



**BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

Faculté des Sciences

Année : 2017/2018

Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en mathématiques et intitulée

**ANALYSE NUMERIQUE DES INEQUATIONS
VARIATIONNELLES PARABOLIQUES
APPLIQUEES EN FINANCE**

Option

Modélisation mathématique

Par

Sofiane MADI

DIRECTEUR DE THÈSE : Bouras Mohamed Cherif

M.C.A U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : Haiour Mohamed

Prof U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :

Remita Mohamed Riad

Prof U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR :

Bencheikh Le Hocine

M.C.A C.U.TAMANGHASSET

Mohamed Amine

EXAMINATEUR :

Maouni Messaoud

M.C.A U. SKIKDA

INVITE :

Stahel Andreas

Prof BFH. SUISSE

© , par Sofiane MADI

Tous les droits sont réservés

À mon père, ma mère, mes frères et ma sœur.

À ma femme et ma fille Nour El Imane.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du département des mathématiques de la faculté des sciences, de l'université Badji-Mokhtar d'Annaba.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mes promoteurs Mr. Bouras Mohamed Cherif et Mr. Haiour Mohamed pour le bon guide qu'ils ont été pour moi, pour leurs précieux conseils et pour l'orientation et l'information qu'ils m'ont prodigués durant toute la période.

Mes remerciements vont également à Mr Andreas Stahel, pour la gentillesse et la patience qu'il a manifestées à mon égard, pour tous les conseils et les programmes qu'il a bien voulu m'envoyer.

Je remercie tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : aussi bien par les discussions que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs suggestions ou contributions. En particulier à Mr. Remita Mohamed Riad, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse. Mrs. Bencheikh Le Hocine Mohamed Amine et Maouni Messaoud ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie, de même que pour leurs participation au Jury. Ils ont également contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de cette thèse, et je leur en suis très reconnaissant.

Pour leurs encouragements et leurs assistances aussi bien matérielle que morale qui m'ont permis de faire cette thèse dans de bonnes conditions, je remercie chaudement mes parents, mes frères, ma sœur et le reste de la famille.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner ma femme qui m'a accompagné pendant cette période.

Résumé en arabe

ملخص

حساب سعر الخيارات الامريكية من مسائل المعقدة في نظرية الخيارات المالية وذلك ناجم عن عدم وجود الحل التحليلي , على عكس الخيارات الاروبية ولهذا يتم حساب الحل عدديا بعدة طرق ونتوصل في طريقة بريننشوارتز المنشورة في [11] طريقة مثلى.

اد استخدموا الفوارق المنتهية في تقديم النظرية انطلاقا من ذلك وفي اطروحتنا هاته نحسن من هذه الطريقة و ذلك لبناء الحل وفق اللوغاريتم المرفق بالعناصر المنتهية و تقارن كل النتائج المحصل عليها.

الكلمات الرئيسية : المتباينات المتغيرة ,الخيار الأمريكي , بريننشوارتز .

Résumé en français

Résumé

L'estimation du prix d'une option américaine est l'un des problèmes les plus difficiles de la théorie des options. Cette difficulté réside dans le fait que; contrairement à une option européenne; la solution analytique n'existe pas. Pour cela, des solutions numériques ont été développées. Une de ces méthodes qui nous a semblé intéressante à présenter, à savoir la méthode Brennan-Schwartz détaillée dans Jaillet, Lapeyre et Lamberton.

L'objectif de notre travail est la présentation de cette méthode pour le cas des éléments finis.

Mots-clés : Inéquation Variationnelle Parabolique, Option Américaine, méthode Brennan-Schwartz, méthode de sur-relaxation avec projection successive .

Résumé en anglais

Abstract

The estimation value of the american option is one of among problems in theorie. Since no explicit form for analytical solution contrary to european option. For this, a lot of method are developped. We are interesting by Brennan-Schwartz approach, how is detailed in Jaillet, Lamberton et Lapeyre. The objectif of this thesis, is to presented this approach for a finite element methods.

Keys-words: Parabolic variational inequality, American Option, Brennan-Schwartz method, Projective successive over relaxation.

Table des matières

Dédicaces	I
Remerciements	III
Résumé en arabe	V
Résumé en français	VI
Résumé en anglais	VII
Introduction	1
1 Préliminaires	5
1.1 Rappel du calcul stochastique	6

1.1.1	Définitions	6
1.1.2	Terminologies financières	7
	Marché complet	7
	Les options	7
	Fonction pay-off	8
1.2	Rappel d'analyse fonctionnelle	9
1.3	Inéquation variationnelle et complémentarité linéaire	11
2	Problème continu	13
2.1	Formulation du problème	14
2.2	Courbe d'exercice	16
2.3	Changement de variable	21
2.4	Formulation variationnelle	25
	2.4.1 Existence et unicité de la solution du problème	26
	2.4.2 Théorème de régularité	27
	2.4.3 Monotonie et continuité	27
3	Problème discret	28

3.1	Localisation à domaine borné	29
3.2	Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis	30
3.2.1	Discrétisation en temps	31
3.2.2	Discrétisation en espace	31
3.2.3	Forme matricielle	35
	Construction des matrices M et R	36
3.3	Discrétisation par la méthode des différences finies	42
3.4	Convergence de la solution du problème discret	44
4	Implémentation des méthodes	48
4.1	Algorithme Brennan-Schwartz	49
	Factorisation LU standard et UL	51
4.2	La méthode PSOR	65
5	Observations Numériques	69
5.1	Évaluation de Brenann-Schwartz	70
5.1.1	Comparaison sur les deux approches FE et FD	70
	Option put	70

Option call	73
5.1.2 Comparaison avec PSOR	75
Option put	76
Option call	78
5.2 Brennan-Schwartz pour le schéma Crank-Nicolson	80
Conclusion et perspective	90

Table des figures

1.1	La fonction pay-off pour l'option call (achat)	8
1.2	La fonction pay-off pour l'option put (vente)	9
2.1	Option américaine, option européenne et la fonction pay-off pour le cas put.	17
2.2	Option américaine, option européenne et la fonction pay-off pour le cas call.	18
2.3	Option américaine, option européenne et la fonction pay-off pour le cas call avec $q = 0$	18
2.4	Représentation de la frontière libre pour l'option de put (vente) de para- mètre $E = 1, r = 0.2$ et $q = 0.15$	20
2.5	Représentation de la frontière libre pour l'option call (achat) de paramètre $E = 1, r = 0.2$ et $q = 0.15$	20
2.6	Solution $U(t, X)$ du problème (2.6) dans le cas put (avant le changement). .	23

2.7	Solution $u(\tau, x)$ du problème (2.10) dans le cas put en log-prix, $x = \ln\left(\frac{X}{E}\right)$ (après le changement).	23
2.8	Solution $U(t, X)$ du problème (2.6) dans le cas call (avant le changement).	24
2.9	Solution $u(\tau, x)$ du problème (2.10) dans le cas call en log-prix, $x = \ln\left(\frac{X}{E}\right)$ (après le changement).	24
3.1	Fonction de base linéaire.	32
5.1	Les valeurs de l'option américaine put pour les deux approches FE (en bleu) et FD (en vert) en $T = 1$ et la fonction pay-off Ψ (en rouge).	71
5.2	Les erreurs d'approximation spatiale pour les deux approches FE et FD pour un pas discrétisation temporelle fixe $k = 0.001$	72
5.3	Les erreurs d'approximation temporelle pour les approches FE et FD pour un pas de discrétisation spatiale fixe $h = 0.001$	73
5.4	Les valeurs de l'option américaine call pour les deux approches FE (en bleu) et FD (en vert) en $T = 1$ et la fonction pay-off Ψ (en rouge).	74
5.5	Les erreurs d'approximation spatiale pour les approches FE et FD avec un pas de discrétisation temporelle fixe $k = 0.001$	75
5.6	Les erreurs d'approximation temporelle pour les approches FE et FD avec $h = 0.001$ fixe.	75
5.7	Les valeurs de l'option américaine put avec les deux solveurs BS et PSOR.	76
5.8	La différence entre la solution avec BS et celle de PSOR.	77

5.9	Les valeur de l'option américaine call avec les deux solveurs BS et PSOR. . .	79
5.10	La différence de la solution de BS avec celle de PSOR.	79
5.11	Les solutions approchées avec les deux schémas CN et IME pour l'option put.	81
5.12	Les solutions approchées avec les schémas CN et IME pour l'option call. . .	81
5.13	La différence en valeur absolue entre la solution approchée par CN et celle IME dans le cas de l'option put.	82
5.14	L'erreur en valeur absolue entre la solution approchée calculé par CN et celle calculé par IME dans le cas de l'option call.	82
5.15	Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l'erreur en fonction de k pas du temps issu d'ap- proximation CN pour l'option call.	84
5.16	Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l'erreur en fonction de k pas du temps issu d'ap- proximation IME pour l'option call.	84
5.17	Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l'erreur en fonction de k pas du temps issu l'ap- proximation CN pour l'option Put.	85
5.18	Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l'erreur en fonction de k pas du temps issu d'ap- proximation IME pour l'option Put.	85
5.19	La dérivée de la solution, de l'option call, par rapport à x après une itération en temps pour Crank-Nicolson.	86
5.20	La dérivée de la solution, de l'option put, par rapport à x après une itération en temps pour Crank-Nicolson.	87

5.21 Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l'erreur en fonction de k pas du temps issu d'approximation CN avec Rannacher pour l'option call.	87
5.22 Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l'erreur en fonction de k pas du temps issu d'approximation CN avec Rannacher pour l'option put.	88

Liste des tableaux

5.1	Comparaion des performances de BS et PSOR dans le cas put.	78
5.2	Comparaion des performances de BS et PSOR dans le cas call.	80
5.3	Ordre de convergence dans le cas de l'option call.	86
5.4	Ordre de convergence dans le cas de l'option put.	86
5.5	Ordre de convergence pour l'option call avec Ranncher.	88
5.6	Ordre de convergence pour l'option put avec Rannacher.	88

Introduction

Dans les années 1973, les marchés financiers ont connu une dynamique traduite par émergence d'une gamme de produits financiers en l'occurrence les options. Grâce à un modèle développé du Black-Scholes-Merton [1], qui ont mis la formulation mathématique du marché pour une action. Les options de base sont les options d'achat et de vente, ou "call" et "put" de leurs appellations anglos-saxon. On distingue deux types d'option, une option européenne et une option américaine. L'européenne ne peut être exercé qu' à l'échéance, à l'opposé l'américaine peut être exercé pendant toute la durée de vie de l'option et l'option américaine prédomine.

Suite à la possibilité d'exercer l'option américaine avant l'échéance. Leur évaluation est formulé comme un problème d'arrêt optimal. Bensoussan [2, 3] et Karatzas [4] ont approuvé le lien entre une évaluation des options américaines et un problème d'arrêt optimal.

Débutant du postulat qu'il est complexe d'obtenir une solution analytique à ces problèmes en général, et qu'il est impératif de recourir à une ou plusieurs méthodes numériques pour

leurs résolutions. De plus, la difficulté dans la solution numérique d'un problème d'évaluation de l'option américaine est le domaine non borné. Dans de nombreux ouvrages en mathématiques modernes et publications sur les méthodes numériques pour la valorisation des options, Wilmott et al. (1995) [5], Seydel (2004) [6],[7], et Achdou Pironneau (2005) [8], ce domaine non borné a été tronqué à un domaine borné puis appliquer les outils standards de mathématiques numériques sous des conditions aux limites appropriées.

Plusieurs ouvrages utilisent l'approche par différence finies, à titre d'exemple [9],[10] et [11], et l'approche éléments finis [8],[12] et [13] pour aboutir aux problèmes de complémentarité linéaire.

La résolution numérique des problèmes de complémentarité linéaire, on trouve dans [14] un algorithme itératif largement utilisé nommé la méthode de sur-relaxation avec projections successives (PSOR "Projected Successive Over-Relaxation", appellation anglaise), aussi dans [9], l'algorithme direct Brennan-Schwartz. Ce dernier, dans sa version originale Brennan et Schwartz considèrent le problème au frontière libre avec une condition de Neumann sur l'un des bords. D'après [10], cet algorithme introduit par [9] résout un système mal posé. Pour cela, ils ont démontré le bon usage de l'algorithme, selon des propriétés particulières de la solution des problèmes de complémentarité linéaire.

Les contributions de cette thèse sont les suivantes :

- La discrétisation des inéquations variationnelles paraboliques, via la méthode de θ -schéma par rapport au temps et la méthode des éléments finis (FEM) pour la discrétisation de l'espace en tenant compte des conditions au bord de Dirichlet non homogènes contrairement au travaux de L. Feng et al. [13], où

ils ont implémenté la méthode des éléments finis avec des conditions au bord Dirichlet homogènes.

- La justification théorique de l'algorithme de Brennan-Schwartz pour l'approche par éléments finis avec la matrice de poids, ceci a fait l'objet d'une publication [15], par les mêmes techniques de Jaillet et al. [10].
- La consolidation des résultats théoriques par voie de simulation.

Parmi les motivations de sélection de l'approche éléments finis au lieu de l'approche des différences finies est due à la caractéristique la plus attirante de la méthode des éléments finis est sa capacité à gérer les géométries complexes, les conditions aux limites, les opérateurs avec une relative facilité, et l'approximation de l'espace de fonction. Donc, c'est plus naturel pour appliquer la contrainte d'obstacles dans l'approximation par éléments finis.

Ce présent travail se décompose en cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons certaines propriétés, définitions et terminologies. Tout d'abord, nous rappelons les résultats nécessaires du calcul stochastique. Ils seront utilisés dans la formulation du problème (voir chapitre 2). En suite, nous choisissons des espaces de Sobolev bien adaptés pour la formulation variationnelle (voir chapitre 3). De plus, nous citons la différence entre une inéquation variationnelle et problème de complémentarité linéaire et ces propriétés qualitatives pour trouver usage en chapitre 4.

Dans le second chapitre, nous donnons les grands axes, de la jonction entre le problème stochastique et le problème d'arrêt optimal. Le comportement et les propriétés de la frontière libre associée à une inéquation parabolique est considéré dans la deuxième section. Et le changement de variable est dans la section suivante, pour simplifier l'étude de la formulation variationnelle du problème, ainsi que l'existence et l'unicité de la solution et

quelques propriétés qualitatives à la dernière section.

L'objet du troisième chapitre, consiste à établir une approximation numérique par éléments finis combiné avec la méthode de θ -schéma en passant par la troncature du problème avec de condition au bord Dirichlet. Par la suite, on introduit la méthode des différences finies pour souligner la dissimilitude par rapport à l'approximation par éléments finis pour le chapitre 4. Suivi d'une étude similaire à celle entreprise dans le cas continu.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons les algorithmes de résolutions, Brennan-Schwartz et sur-relaxation avec projections successives, du problème de complémentarité linéaire obtenu au chapitre 3. Ainsi nous approuvons la validité de l'algorithme Brennan-Schwartz pour le choix de la méthode de discrétisation.

Le dernier chapitre, présente des simulations numériques pour divers cas qui consolide les résultats théoriques du chapitre 3 et 4.

On termine cette thèse en donnant les perspectives comme un prolongement de ce travail.

Préliminaires

1.1	Rappel du calcul stochastique	6
1.2	Rappel d'analyse fonctionnelle	9
1.3	Inéquation variationnelle et complémentarité linéaire	11

Dans ce chapitre, nous rappelons ci-dessous quelques définitions, théorèmes et terminologies classiques du calcul stochastique, de l'analyse fonctionnelle, de l'inéquation variationnelle et de problème de complémentarité linéaire qui seront utiles dans les chapitres ultérieurs. Pour les démonstrations et pour plus de détails, nous renvoyons à [16, 17, 18, 2, 19].

1.1 Rappel du calcul stochastique

1.1.1 Définitions

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace de probabilité.

Définition 1.1.1

On appelle **processus stochastique à temps continu** à valeurs dans un espace E muni d'une tribu \mathcal{E} , une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans (E, \mathcal{E}) .

Définition 1.1.2

Une **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F} .

Définition 1.1.3

On appelle **\mathcal{F}_t -mouvement brownien** un processus stochastique à valeurs réelles qui vérifie :

- Pour tout $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable,
- Continuité : P -p.s. la fonction $s \mapsto X_s(\omega)$ est une fonction continue,
- Indépendance des accroissements : si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_s ,
- Stationnarité des accroissements : si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

1.1.2 Terminologies financières

Marché complet

Le théorème suivant nous permet de définir un marché complet.

Théorème 1.1.1 ([20]) *Un marché est complet si, et seulement si, il existe une unique probabilité \mathbf{P}^* ¹ sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Les options

Définition 1.1.4

Une option est un contrat transférable qui confère à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter appelée Call (ou de vendre appelée Put) :

- un actif X_t (mobilier, immobilier),
- à un prix fixé E ,
- pendant une période T .

On distingue deux types d'options :

- **Européenne** : L'exercice ce fait à la date T ,
- **Américaine** : L'exercice ce fait à n'importe quel moment de $[0, T]$.

1. Ici \mathbf{P}^* équivalente à \mathbf{P} signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}^*(\omega) > 0$.

Fonction pay-off

Définition 1.1.5 Fonction qui donne la valeur d'un produit à son échéance en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent.

Dans le cas de l'option d'achat, la fonction pay-off Ψ est définie par (voir la figure 1.1)

$$\Psi(X) = (X - E)^+ = \max(X - E, 0).$$

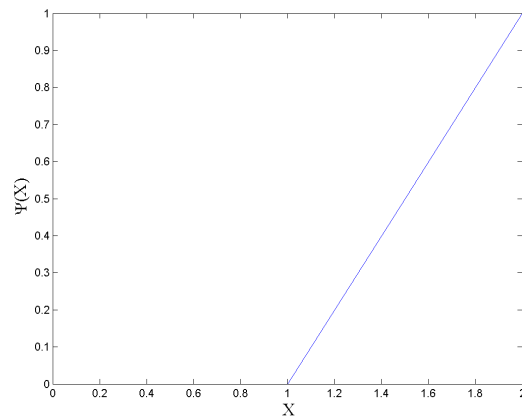


FIGURE 1.1 – La fonction pay-off pour l'option call (achat)

Concernant l'option put (*vente*) la fonction pay-off Ψ est donnée comme suit (voir la figure 1.2)

$$\Psi(X) = (E - X)^+ = \max(E - X, 0).$$

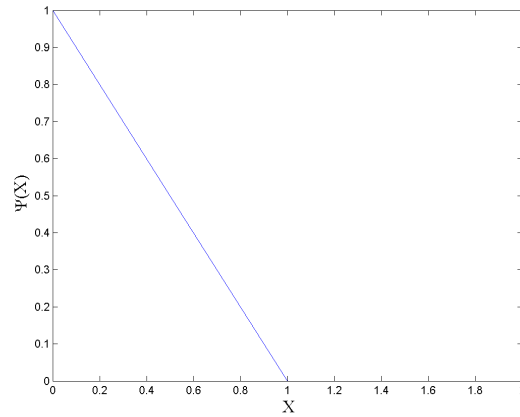


FIGURE 1.2 – La fonction pay-off pour l’option put (vente)

1.2 Rappel d’analyse fonctionnelle

Définition 1.2.1

Les espaces de Sobolev avec poids H_α , V_α et $W^{m,p,\alpha}$ pour $\alpha \geq 0$ s’écrivent comme suit,

$$\begin{aligned} H_\alpha &= L^2(\mathbb{R}, e^{-\alpha|x|} dx), \\ V_\alpha &= \left\{ f \in H_\alpha \mid \frac{\partial f}{\partial x} \in H_\alpha \right\}, \\ W^{m,p,\alpha} &= \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}, e^{-\alpha|x|} dx) \mid \text{pour } j \leq m, f^{(j)} \in L^p(\mathbb{R}, e^{-\alpha|x|} dx) \right\}. \end{aligned}$$

Noter que $H_\alpha = W^{0,2,\alpha}(\mathbb{R})$ et $V_\alpha = W^{1,2,\alpha}(\mathbb{R})$. On note $(\cdot, \cdot)_\alpha$ le produit scalaire de H_α et $\|\cdot\|_\alpha, |\cdot|_\alpha$ les normes respectives de V_α, H_α .

Définition 1.2.2

Soit X un espace de Banach et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $L^2(a, b, X)$ est l'espace des fonctions mesurables u définies sur (a, b) tel que la fonction $t \mapsto \|u(t, \cdot)\|_X$ est à carré intégrable.

Définition 1.2.3

Soit $C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$, l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent et sont continues dans Ω , alors $C_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ le sous-espace vectoriel des fonctions de $C^k(\Omega)$, à support compact dans Ω (une fonction de $C_0^k(\Omega)$ s'annule donc au voisinage de $\partial\Omega$ dans Ω). L'espace des *fonctions test* sur Ω est $C_0^\infty(\Omega)$, que nous noterons également $\mathcal{D}(\Omega)$.

Puisque notre étude basée sur quelques inégalités algébriques connues, nous voulons en rappeler quelques-unes ci-dessous.

Lemme 1.2.1 ([18]) Tout produit scalaire satisfait l'inégalité suivante

$$(x, y) \leq \|x\| \|y\|.$$

Lemme 1.2.2 ([18]) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$a b \leq \delta a^2 + \frac{b^2}{4\delta},$$

où δ est une constante positive.

Le lemme 1.2.1 est connu par le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 1.2.2 est surnommé l'inégalité de Young.

1.3 Inéquation variationnelle et complémentarité linéaire

Définition 1.3.1 Un problème d'inéquation variationnelle (IV) consiste à trouver $u \in \mathcal{K}$ (espace des fonctions admissibles) tel que

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad (1.1)$$

pour tout $v \in \mathcal{K}$.

Après avoir discrétisé le problème d'inéquation variationnelle, on s'appuie sur le problème de complémentarité linéaire afin de résoudre numériquement les inéquations variationnelles.

Définition 1.3.2 Un problème de complémentarité linéaire (PCL) consiste à trouver u pour tous vecteurs, θ et φ de \mathbb{R}^m :

$$\begin{aligned} Au &\geq \theta, \\ u &\geq \varphi, \\ (Au - \theta, \varphi - u) &= 0, \end{aligned}$$

où A est matrice carrée réelle d'ordre m .

Ce résultat relie les problèmes d'inéquations variationnelles aux problèmes de complémentarité linéaire.

Proposition 1.3.1 ([10]) Soit A une matrice carrée réelle d'ordre m . Pour tous vecteurs u , θ et φ de \mathbb{R}^m , les deux systèmes suivants sont équivalents :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} Au \geq \theta, \\ u \geq \varphi, \\ (Au - \theta, \varphi - u) = 0, \end{array} \right.$$

$$(I') \begin{cases} u \geq \varphi \text{ et pour tout vecteur } v \geq \varphi \text{ on a :} \\ (Au, v - u) \geq (\theta, v - u). \end{cases}$$

Pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème de complémentarité linéaire, il est nécessaire que la matrice A soit coercive.

Définition 1.3.3 On dit qu'une matrice A est coercive s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(Ax, x) \geq C |x|, \quad (1.2)$$

où $|x|$ désignant la norme euclidienne.

Les propriétés de la solution du problème de complémentarité linéaire est donnée ci-dessous.

Théorème 1.3.1 ([10]) Si la matrice A est coercive, alors pour tous vecteurs θ et φ de \mathbb{R}^m il existe un, et un seul, vecteur u vérifiant (I).

Définition 1.3.4 ([21]) Soit le polyèdre suivant

$$X_b = \{x | Ax \geq b\},$$

où A est une matrice réelle d'ordre $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Le vecteur $\bar{x} \in X_b$ est appelé plus petit vecteur de X_b satisfaisant $\bar{x} \leq x$ pour tous x de X_b .

Proposition 1.3.2 ([21]) Si la matrice A est coercive et possède des coefficients non diagonaux négatifs ou nuls, la solution de (I) est le plus petit vecteur u vérifiant : $Au \geq \theta$ et $u \geq \varphi$.

Problème continu

2.1	Formulation du problème	14
2.2	Courbe d'exercice	16
2.3	Changement de variable	21
2.4	Formulation variationnelle	25

Ce chapitre présente brièvement la théorie du problème de l'option américaine dans le cas continu. La première section reprend les résultats sur les liens entre les problèmes de temps d'arrêts et les problèmes d'inéquation parabolique (voir [22, 23, 4]). La deuxième

section traite la comparaison des options européennes et les options américaines, en mettant l'accent sur le concept de la frontière libre (voir [5, 24]). Dans la section trois, certaines transformations sont appliquées au problème d'inéquation parabolique associée à l'option américaine afin de simplifier les calculs, pour chapitre 3 problème discret, (voir [5]). Section quatre, la formulation variationnelle avec des espaces de Sobolev correctement choisis, dans le chapitre 1, nous a permis d'assurer l'existence, l'unicité, la régularité, la monotonie et la continuité de la solution (voir [19, 25]).

2.1 Formulation du problème

Dans la théorie des options, la détermination de la valeur d'une option américaine; dans le modèle de Black-Scholes (voir [1]); est modélisé par le problème d'arrêt optimal suivant (voir [16, 8, 26, 10]) :

$$U(t, X) = \sup_{\tau \in \mathfrak{F}_{t,T}} \mathbf{E}^* \left[e^{-r(\tau-t)} \Psi(X_\tau^{t,X}) \right], \quad (2.1)$$

où $\mathfrak{F}_{t,T}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeur dans $[t, T]$, r est une constante représente le taux d'intérêt, Ψ est la fonction pay-off et le processus X_τ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} X_t &= X, \quad X \in \mathbb{R}_+, \\ dX_s &= X_s((r - q)ds + \sigma dW_t), \quad s > t, \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec, sous la probabilité \mathbf{P}^* , $(W_t)_{t \geq 0}$ mouvement brownien standard, la **volatilité** σ et le dividende $q \geq 0$ sont des constantes.

Maintenant, nous considérons que la fonction coût du problème est donnée sous la forme :

$$J_t^X(\tau) = \mathbf{E}^* \left[e^{-r(\tau-t)} \Psi(X_\tau^{t,X}) \right]. \quad (2.3)$$

Le problème d'arrêt optimal est défini alors par :

$$U(t, X) = \sup_{\tau \in \mathfrak{F}_{t,T}} J_t^X(\tau). \quad (2.4)$$

La proposition suivante relie le problème d'arrêt optimal et le problème d'inéquation parabolique. Ce lien a été dégagé par A. Bensoussan et J.-L. Lions dans [3] et [22].

Proposition 2.1.1 ([3]) *La fonction U admet des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial X}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$ localement bornées sur $[0, T[\times \mathbb{R}_+$, vérifiant :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (r - q) X \frac{\partial U}{\partial X} - rU &\leq 0, \\ U &\geq \Psi, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + (r - q) X \frac{\partial U}{\partial X} - rU \right) (U - \Psi) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

pour $t \in [0, T[$ et $X \in \mathbb{R}_+$, avec la condition final

$$U(T, X) = \Psi(X), \quad X \in \mathbb{R}_+.$$

Alors $\forall (t, X) \in [0, T[\times \mathbb{R}_+$, $U(t, X) = \sup_{\tau \in \mathfrak{F}_{t,T}} J_t^X(\tau)$.

La proposition 2.1.1 nous a permis de caractériser la valeur d'une option américaine comme solution du problème d'inéquation parabolique suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U &\leq 0, \\
U &\geq \Psi, \\
\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U \right) (U - \Psi) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

pour $t \in [0, T[$ et $X \in \mathbb{R}_+$, avec la condition final

$$U(T, X) = \Psi(X), \quad X \in \mathbb{R}_+,$$

où nous avons posé

$$\mathcal{A} = \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + (r - q) X \frac{\partial}{\partial X} - r.$$

2.2 Courbe d'exercice

Dans cette section, on étudie la relation entre la valeur de l'option européenne et celle de l'option américaine. De plus, décrire le concept et les propriétés de la courbe d'exercice. Rappelons que, la valeur de l'option américaine est solution de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^{am}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{\partial^2 V^{am}}{\partial X^2} + (r - q) X \frac{\partial V^{am}}{\partial X} - r V^{am} &\leq 0, \\
V^{am} &\geq \Psi, \\
\left(\frac{\partial V^{am}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{\partial^2 V^{am}}{\partial X^2} + (r - q) X \frac{\partial V^{am}}{\partial X} - r V^{am} \right) (V^{am} - \Psi) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

pour $t \in [0, T[$ et $X \in \mathbb{R}_+$, avec la condition final

$$V^{am}(T, X) = \Psi(X), \quad X \in \mathbb{R}_+.$$

Sachant que, la valeur de l'option européenne est solution de (voir [26])

$$\frac{\partial V^{eu}}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{\partial^2 V^{eu}}{\partial X^2} + (r - q) X \frac{\partial V^{eu}}{\partial X} - r V^{eu} = 0, \quad (2.8)$$

pour $t \in [0, T[$ et $X \in \mathbb{R}_+$, avec la condition final

$$V^{eu}(T, X) = \Psi(X), \quad X \in \mathbb{R}_+.$$

Vue que l'option américaine peut être exercée à n'importe quel moment de $[0, T]$, contrairement à l'option européenne ne pouvant être exercée qu'à sa date finale T (voir [26]). Alors une option américaine ne peut être de valeur inférieure à une option européenne, comme il est représenté sur la figure 2.1 et 2.2

$$V^{am} \geq V^{eu}.$$

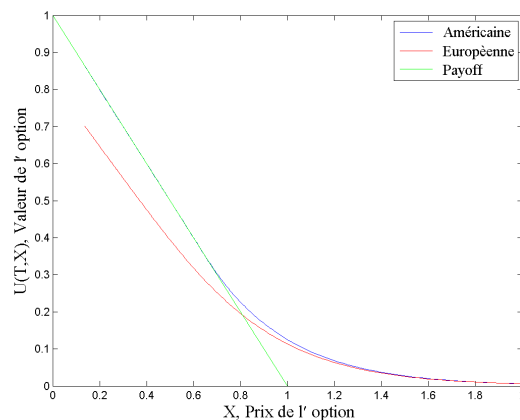


FIGURE 2.1 – Option américaine, option européenne et la fonction pay-off pour le cas put.

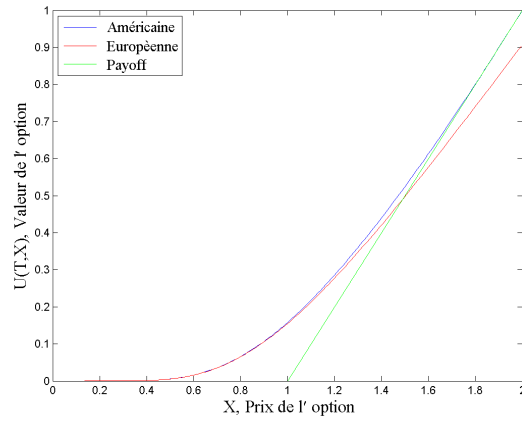


FIGURE 2.2 – Option américaine, option européenne et la fonction pay-off pour le cas call.

Remarque 2.2.1 La valeur de l’option américaine d’achat coïncide avec la valeur de l’option européenne lorsque le dividende est nul (voir la figure 2.3)

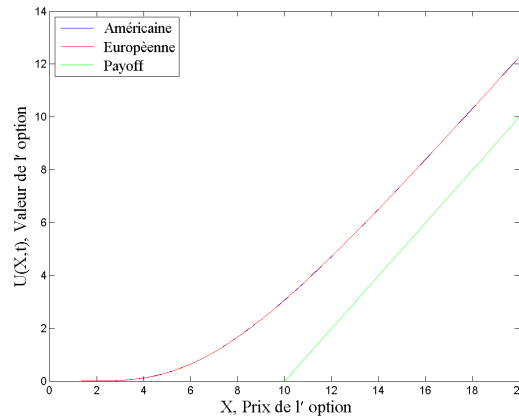


FIGURE 2.3 – Option américaine, option européenne et la fonction pay-off pour le cas call avec $q = 0$.

Ayant la possibilité d’exercer juste avant de perdre de l’argent, pour une option américaine on a (voir [24, 6, 26])

$$V_C(t, X) \geq (X - E)^+, \quad t \in [0, T), \quad X \in (0, \infty),$$

$$V_P(t, X) \geq (E - X)^+, \quad t \in [0, T), \quad X \in (0, \infty).$$

Les figures 2.1 et 2.2 montrent une comparaison entre l'option américaine, européenne et la fonction pay-off dans le cas put et call. Dans le cas de l'option put, la valeur de l'option américaine put se confond avec celle de la fonction pay-off sur $]0, X_{f(t)}]$, et puis strictement au dessus qu'elle ne peut pas être à nouveau en contact avec la fonction pay-off pour $X > X_{f(t)}$ voir la figure 2.1. Pour l'option call, la valeur de l'option américaine call est strictement au dessus de la fonction pay-off sur $]0, X_{f(t)}]$ et se confond pour $X > X_{f(t)}$ voir la figure 2.2.

Remarque 2.2.2 Cette courbe, contact entre la valeur l'option américaine et la fonction pay-off, $X_{f(t)}$ représente la frontière qui sépare le domaine (X, t) en deux parties : d'une part une zone où $U > \Psi$ (zone on continu) et d'autre part une zone où $U = \Psi$ (zone stop). Ceci est illustré sur les figures 2.4, 2.5. Bien sûr cette frontière est inconnue, d'où le nom « problème à frontière libre ». La frontière libre $X_{f(t)}$ vérifie ces propriétés suivantes voir [24, 26, 6] :

- continue et dérivable,
- monotone (croissante pour un put, décroissant pour un call),
- pour une option put

$$\lim_{t \rightarrow T} X_{f(t)} = \min \left(E, \frac{r}{q} E \right)$$

- pour une option call

$$\lim_{t \rightarrow T} X_{f(t)} = \max \left(E, \frac{r}{q} E \right)$$

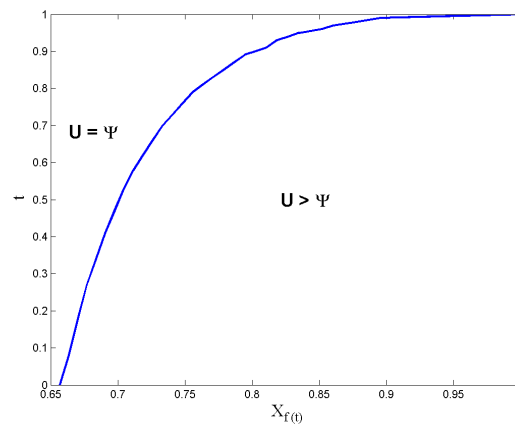


FIGURE 2.4 – Représentation de la frontière libre pour l’option de put (vente) de paramètre $E = 1$, $r = 0.2$ et $q = 0.15$.

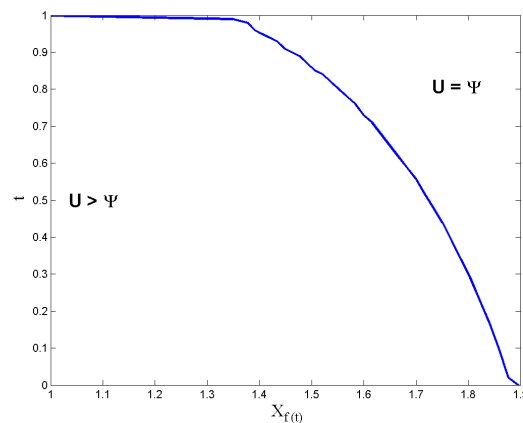


FIGURE 2.5 – Représentation de la frontière libre pour l’option call (achat) de paramètre $E = 1$, $r = 0.2$ et $q = 0.15$.

Nous allons essayer de transformer ce problème à frontière libre en une inéquation variationnelle qui fait disparaître l’inconnue supplémentaire. Avant de donner cette formulation variationnelle nous procédons à un changement de variable.

2.3 Changement de variable

Le changement de variables nous permet d'obtenir un système d'inéquation parabolique plus simple à manipuler. Pour cela, nous considérons ce changement de variable suivant (voir [10, 13, 27, 28]) :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, x) &= U(T - \tau, Ee^x), \\ \psi(x) &= \Psi(Ee^x).\end{aligned}$$

Pour,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U &\leq 0, \\ U &\geq \Psi, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{A}U\right)(U - \Psi) &= 0,\end{aligned}\tag{2.9}$$

avec la condition final, pour $t \in [0, T[$ et $X \in \mathbb{R}_+$

$$U(T, X) = \Psi(X), \quad X \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$\mathcal{A} = \frac{\sigma^2}{2} X^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + (r - q) X \frac{\partial}{\partial X} - r.$$

En prenant la dérivée de U par rapport à t et par rapport à X avec $E \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(t, x) &= -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x), \\ \frac{\partial U}{\partial X}(t, x) &= \frac{\partial \ln(X/E)}{\partial X} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x) = \frac{1}{E} e^{-x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(t, x) &= -\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{1}{E} e^{-x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x) \right) = \frac{1}{E^2} e^{-2x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{E^2} e^{-2x} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x).\end{aligned}$$

Cette transformation nous a conduit à un problème avec condition initial, dont l'opérateur à des coefficients constants

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \mathcal{A}\tilde{u} &\geq 0, \\ \tilde{u} &\geq \psi, \\ \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \mathcal{A}\tilde{u} \right) (\tilde{u} - \psi) &= 0,\end{aligned}\tag{2.10}$$

pour $t \in (0, T]$ et $x \in \mathbb{R}$, avec la condition initial

$$\tilde{u}(0, x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

l'opérateur \mathcal{A} est défini comme suit

$$\mathcal{A} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x} - r, \quad \beta = r - q - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Cette procédure dans la terminologie financière correspond au log-prices. Les figures 2.6 à 2.9 illustrent la valeur de l'option américaine put et call pour le problème (2.5) avant le changement de variable et pour le problème log-prices (2.10).

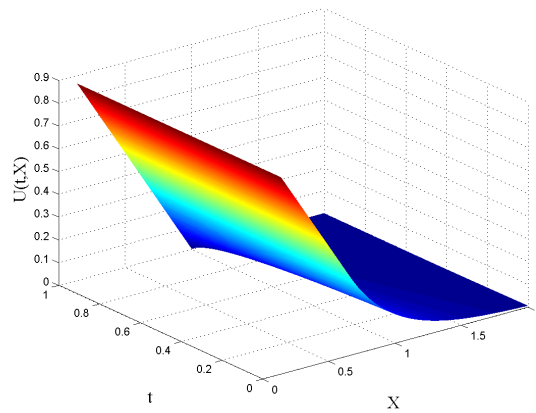


FIGURE 2.6 – Solution $U(t, X)$ du problème (2.6) dans le cas put (avant le changement).

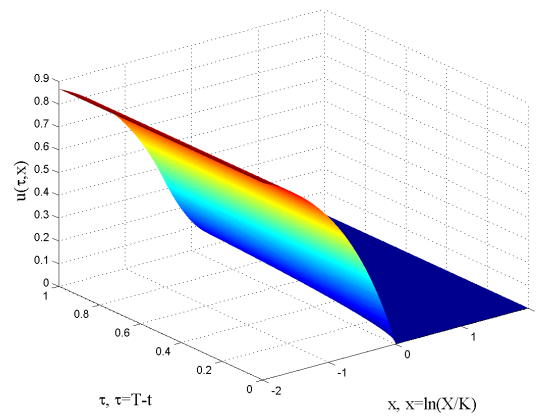


FIGURE 2.7 – Solution $u(\tau, x)$ du problème (2.10) dans le cas put en log-prix, $x = \ln\left(\frac{X}{E}\right)$ (après le changement).

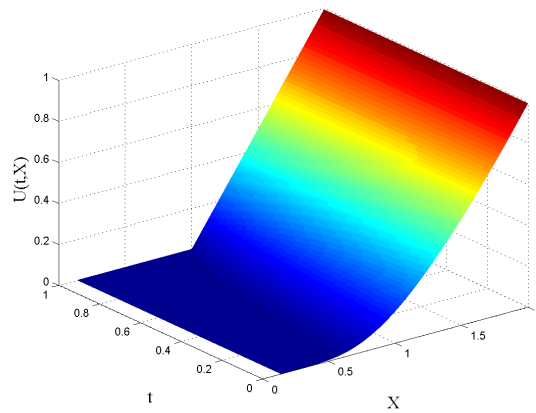


FIGURE 2.8 – Solution $U(t, X)$ du problème (2.6) dans le cas call (avant le changement).

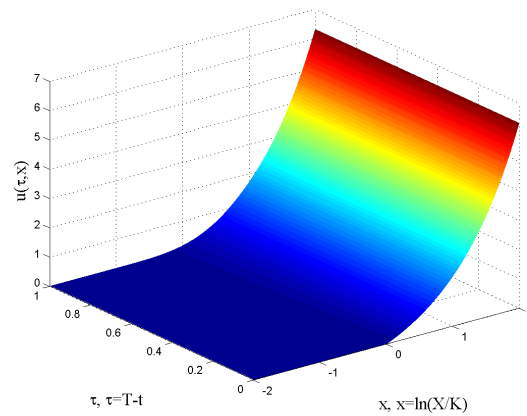


FIGURE 2.9 – Solution $u(\tau, x)$ du problème (2.10) dans le cas call en log-prix, $x = \ln\left(\frac{X}{E}\right)$ (après le changement).

2.4 Formulation variationnelle

Nous utilisons la formulation variationnelle associée au problème d'inéquation parabolique 2.11 afin de simplifier l'inconnu supplémentaire qui est la frontière libre.

Notations. On note l'ensemble des fonctions admissibles par

$$\mathcal{K}_\psi = \{v \mid v \in V_\alpha, v \geq \psi \text{ p.p sur } \mathbb{R}\}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a^\alpha(u, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + r \int u v e^{-\alpha|x|} dx \\ &\quad - \int \left(\frac{\sigma^2}{2} \alpha \operatorname{sgn}(x) + \beta \right) \frac{\partial u}{\partial x} v e^{-\alpha|x|} dx. \end{aligned}$$

Alors, on peut écrire, par une intégration par parties pour $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ que :

$$(\mathcal{A}u, v)_\alpha = -a^\alpha(u, v).$$

Les propriétés de la forme bilinéaire $a^\alpha(.,.)$ sont caractérisées par la proposition suivante :

Proposition 2.4.1 (voir [24]) *La forme bilinéaire $a^\alpha(.,.)$ définie de $H_\alpha \times H_\alpha$ à valeur dans \mathbb{R} est continue, autrement dit :*

$$|a^\alpha(u, v)| \leq C \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha,$$

avec C une constante indépendante de u et v . De plus, il existe deux réels strictement positifs ρ et γ tel que :

$$a(u, u) + \rho |u|^2 \geq \gamma \|u\|^2.$$

La formulation variationnelle de notre problème est donnée d'après la proposition suivante :

Proposition 2.4.2 (voir [10]) Soit u une fonction $L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R}))$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$ tel que $u \in \mathcal{K}_\psi$. On suppose $\psi \in V_\alpha$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(t)u &\leq 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(t)u \right) (\psi - u) &= 0, \end{aligned} \quad \text{p.p dans } [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

pour tout élément $v \in \mathcal{K}_\psi$ on a :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right)_\alpha + a^\alpha(u, v - u) \geq 0 \text{ p.p dans } [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

2.4.1 Existence et unicité de la solution du problème

Théorème 2.4.1 Soit $\psi \in V_\alpha$, alors il existe une, et une seule, fonction u vérifiant :

$$u \in L^2([0, T]; V_\alpha) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha),$$

et le problème (2.12). De plus, la fonction u est dans $L^\infty([0, T]; V_\alpha)$.

Pour assurer l'existence de la solution; dans théorème 2.4.1; P. Jaillet et all [10] utilisent la méthode dite de pénalisation, et pour assurer l'unicité on fait appelle à la proposition 2.4.1.

2.4.2 Théorème de régularité

Théorème 2.4.2 (voir [10]) Soit $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$, alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.12) vérifie :

$$u \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})).$$

Remarque 2.4.1 Soit $\psi(x) = (E \exp(x) - E)_+$ (resp. $\psi(x) = (E - E \exp(x))_+$), et $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbb{R})$ mais n'est pas dans $W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$. Pour que ce théorème soit adapté pour notre cas, on prend une suite (ψ_m) d'éléments de $W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers ψ . Dans ce cas, la solution associée à $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbb{R})$ coïncide avec la solution associée à $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbb{R})$ donné dans le théorème 2.4.2. Pour plus de détails, voir [23].

2.4.3 Monotonie et continuité

Dans ce qui suit, Nous donnons des propriétés qualitatives, sur la dépendance de la solution u de l'inéquation variationnelle par rapport à ψ , qui seront utiles dans le reste de notre travail.

Lemme 2.4.1 (voir [12]) Si ψ et $\hat{\psi}$ appartiennent à $V_\alpha : \psi \leq \hat{\psi}$, alors les solutions u et \hat{u} des inéquations variationnelles associées vérifient : $u \leq \hat{u}$ (en particulier $\psi \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$).

Lemme 2.4.2 (voir [12]) Si ψ et $\hat{\psi}$ appartiennent à V_α et si $\psi - \hat{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors $u - \hat{u} \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R})$ et : $\|u - \hat{u}\|_{L^\infty([0, T]; \mathbb{R})} \leq \|\psi - \hat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

Problème discret

3.1 Localisation à domaine borné	29
3.2 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis	30
3.3 Discrétisation par la méthode des différences finies	42
3.4 Convergence de la solution du problème discret	44

Il est intéressant de noter que fondamentalement la finance est un monde discret, et vue que la solution analytique n'existe pas pour le problème (2.5), il s'agit donc de résoudre le tout à l'aide des méthodes numériques. Ces méthodes numériques passent par une discrétisation. Parmi les méthodes de discrétisations, on distingue la méthode des élément finis

et différence finies. Ces méthodes requièrent la transformation du problème continu en un problème discret, d'abord nous procédons à la troncature du problème à un domaine borné (voir [10]) dans la première section. Dans la section deux, nous utilisons la méthode θ -schéma combiné avec l'approche des éléments finis, où une discrétisation en temps à l'aide du θ -schéma avant la discrétisation en espace par la méthode des éléments finis. On introduit ensuite une discrétisation en utilisant la méthode des différences finies dans la sections trois. On conclut ce chapitre par des résultats de convergence de la solution discrète.

3.1 Localisation à domaine borné

Le problème (2.10) est donné sur \mathbb{R} , afin de discrétiser ce dernier, on ramène le problème (2.10) sur un intervalle $] -l, +l[$ où l est une constante bien choisit (voir [26]). Et on est amené à imposé une condition au bord de type de Dirichlet. Cette procédure a été approuvée par P. Jaillet, B. Lapeyre, D. Lamberton (voir [10], [23]). Ce résultat nous permet, au lieu de calculer u solution de (2.6) sur \mathbb{R} , il suffit de la calculer sur $\Omega =] -l, +l[$. Ainsi, nous obtenons un problème d'inéquation parabolique avec une condition au bord de type Dirichlet s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}u &\geq 0, \\ u &\geq \psi, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{A}u \right) (u - \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pour $t \in (0, T]$ et $x \in \Omega$, avec la condition initial

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega,$$

avec condition au bord Dirichlet :

$$u(t, x) = \psi(x), x \in \partial\Omega. \quad (3.2)$$

Une intégration par parties nous permet d'écrire, pour $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(\mathcal{A}u, v) = -a(u, v).$$

Posons

$$a(u, v) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \beta \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u}{\partial x} v dx + r \int_{-l}^{+l} u v dx.$$

La formulation variationnelle du problème (3.1) peut, alors, être écrite sous forme (voir [29]) :

Trouver $u \in L^2([0, T], V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T], H)$ tel que $u \in \mathcal{K}_\psi$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) \geq 0, \text{ pour tout } v \in \mathcal{K}_\psi, \quad (3.3)$$

avec la condition initiale

$$u(0, x) = \psi(x), \quad (3.4)$$

et

$$\mathcal{K}_\psi = \{v \mid v \in V_\Omega, v \geq \psi \text{ sur } \Omega \text{ et } u(t, x) = \psi(x), \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (3.5)$$

3.2 Discrétisation du problème par la méthode des éléments finis

Pour calculer une solution approchée de (3.3), nous procédons à une discrétisation en temps à l'aide du θ -schéma et la discrétisation en espace par élément finis.

3.2.1 Discrétisation en temps

Subdivisions de l'intervalle $[0, T]$, en N sous intervalle de longueur égale $k = \frac{T}{N}$. Posons ensuite $t_n = nk$, $0 \leq n \leq N$, et $u^n = u(t_n)$. Alors

$$\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{k}, v - u^{\theta, n+1} \right) + a(u^{\theta, n+1}, v - u^{\theta, n+1}) \geq 0, \text{ pour tout } v \in \mathcal{K}_\psi, \quad (3.6)$$

où

$$u^{\theta, n+1} = \theta u^{n+1} + (1 - \theta) u^n, \quad (3.7)$$

avec

$$u^0 = \psi.$$

3.2.2 Discrétisation en espace

Considérons la subdivisions de l'intervalle Ω en $m + 1$ sous intervalle de même longueur $h = \frac{2l}{m + 1}$. Soit $x_i = -l + ih$, $0 \leq i \leq m + 1$, et $u_h^n = (u_1, \dots, u_m)^T$ désigne le vecteur d'approximation de la solution $u(t, x)$ par rapport à l'instant t et la position x . Soit V_h sous-espace vectoriel engendré par des fonctions de base à support minimal, c'est-à-dire, elle doivent être non nulles sur un nombre minimal de sous-intervalle. Cette propriété est vérifiée par les fonctions de base suivantes, appelées fonctions chapeaux, voir la figure (3.1)

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.8)$$

Les fonctions (3.11) sont telles que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

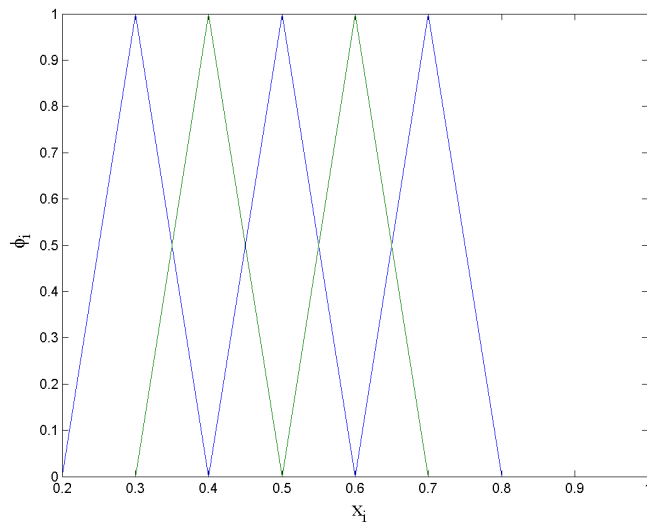


FIGURE 3.1 – Fonction de base linéaire.

Pour tout $v_h \in V_h$, on a

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^m v_j \phi_{h,j}(x), \quad (3.9)$$

$$v'_h(x) = \sum_{j=1}^m v_j \phi'_{h,j}(x), \quad (3.10)$$

avec

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{-1}{h} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Définissons

$$(u_h, v_h)_h = \int_{\Omega} u_h v_h dx, \quad \forall u_h, v_h \in V_h,$$

et

$$\begin{aligned} |v_h|_h &= \sqrt{(v_h, v_h)_h} = |v_h|_{L^2(\Omega)}, \\ \|v_h\|_h &= \left[|v_h|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous savons que

$$|v_h|_h \leq \|v_h\|_h, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Selon (3.10), alors (voir [30])

$$\|v_h\|_h \leq \frac{C_0}{h} |v_h|_h, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.12)$$

Par ailleurs, on approche \mathcal{K}_ψ définit en (3.5) par

$$\mathcal{K}_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h \geq \psi_h \text{ p.p sur } \Omega \text{ et } v_0 = 0, v_{m+1} = \psi(-l)\}.$$

Le problème discret est : trouver $u \in \mathcal{K}_h$ tel que

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}, v_h - u_h^{\theta, n+1} \right) + a_h(u_h^{\theta, n+1}, v_h - u_h^{\theta, n+1}) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h, \quad (3.13)$$

où

$$u_h^{\theta, n+1} = \theta u_h^{n+1} + (1 - \theta) u_h^n,$$

avec

$$u_h^0 = \psi.$$

Nous définissons pour tout u_h et $v_h \in V_h$

$$a_h(u_h, v_h) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} dx - \beta \int_{-l}^{+l} \frac{\partial u_h}{\partial x} v_h dx + r \int_{-l}^{+l} u_h v_h dx,$$

la forme bilinéaire associée à cet opérateur

$$\mathcal{A}_h = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial}{\partial x} - r.$$

Il est évident, par une intégration par parties, que :

$$(\mathcal{A}_h u, v) = -a_h(u, v).$$

3.2.3 Forme matricielle

L'inéquation variationnelle parabolique discrète (3.13) est vérifiée pour $v_h = u_h^{\theta, n+1} + \phi_i \geq \psi$, ce qui donne

$$\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}, \phi_i \right) + a_h(u_h^{\theta, n+1}, \phi_i) \geq 0, \quad (3.14)$$

ou encore

$$(u_h^{n+1} - u_h^n, \phi_i) + k a_h(u_h^{\theta, n+1}, \phi_i) \geq 0, \quad (3.15)$$

en utilisant (3.7) et (3.9)-(3.10)

$$\sum_{j=1}^m [(\phi_j, \phi_i) + k \theta a_h(\phi_j, \phi_i)] u_j^{n+1} - \sum_{j=1}^m [(\phi_j, \phi_i) + k(1 - \theta) a_h(\phi_j, \phi_i)] u_j^n \geq 0. \quad (3.16)$$

Posons

$$\begin{aligned} M_{ij} &= (\phi_j, \phi_i), \\ R_{ij} &= a_h(\phi_j, \phi_i). \end{aligned}$$

la matrices de rigidité $\mathbf{R} = (R_{i,j})$ et la matrice masse $\mathbf{M} = (M_{i,j})$.

Le problème à résoudre, à chaque pas de temps, est donc : trouver $u_h^{n+1} \in \mathcal{K}_h$

$$\left((\mathbf{M} + k \theta \mathbf{R}) u_h^{n+1} - (\mathbf{M} - k(1 - \theta) \mathbf{R}) u_h^n, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h, \quad (3.17)$$

avec la condition initial $u_h^0 = \psi$.

Construction des matrices M et R

Le calcul des coefficients des matrices M et R se fait sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Les éléments diagonaux de la matrice de rigidité R

$$R_{i,i} = a_h(\phi_i, \phi_i) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\phi_i')^2(x) dx - \beta \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i' \phi_i(x) dx + r \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx,$$

$$\begin{aligned} R_{i,i} &= \underbrace{\frac{\sigma^2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_i')^2(x) dx - \beta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i' \phi_i(x) dx + r \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^2(x) dx}_I \\ &\quad + \underbrace{\frac{\sigma^2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_i')^2(x) dx - \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i' \phi_i(x) dx + r \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx}_{II}. \end{aligned}$$

Pour I, nous posons $z = x - x_{i-1}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^h \frac{1}{h^2} dz - \beta \int_0^h \frac{z}{h^2} dz + r \int_0^h \frac{z^2}{h^2} dz \\ &= \frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\beta}{2} + \frac{r h}{3}. \end{aligned}$$

Pour II, nous posons $z = x - x_i$

$$\begin{aligned} II &= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^h \frac{1}{h^2} dz + \beta \int_0^h \frac{z}{h^2} dz + r \int_0^h \frac{z^2}{h^2} dz \\ &= \frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\beta}{2} + \frac{r h}{3} \end{aligned}$$

$$R_{i,i} = I + II = \frac{\sigma^2}{h} + \frac{r h}{3}.$$

Les éléments hors diagonaux de la matrice de rigidité \mathbf{R}

$$R_{i,i+1} = a_h(\phi_{i+1}, \phi_i) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_{i+1} \phi'_i(x) dx - \beta \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_{i+1} \phi_i(x) dx + r \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1} \phi_i(x) dx.$$

Nous posons $z = x - x_i$, alors

$$\begin{aligned} R_{i,i+1} &= \frac{\sigma^2}{2} \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{-1}{h}\right) dz - \beta \int_0^h \left(\frac{1}{h}\right) \left(\frac{h-z}{h}\right) dz + r \int_0^h \left(\frac{z}{h}\right) \left(\frac{h-z}{h}\right) dz \\ &= -\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

De même pour

$$\begin{aligned} R_{i-1,i} &= a_h(\phi_i, \phi_{i-1}) = \frac{\sigma^2}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i \phi'_{i-1}(x) dx - \beta \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i \phi_{i-1}(x) dx + r \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i \phi_{i-1}(x) dx \\ &= -\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

Notations. Soit

$$a_{-1} = -\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}, \quad (3.18)$$

$$a_0 = \frac{\sigma^2}{h} + \frac{r h}{3}, \quad (3.19)$$

$$a_1 = -\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\beta}{2} + r \frac{h}{6}. \quad (3.20)$$

La matrice de rigidité peut être calculée d'une manière explicite

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{-1} & a_0 & a_1 & & & \\ & a_{-1} & a_0 & a_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ & & & & a_{-1} & a_0 & a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m+2)}$$

Nous suivons le même principe du calculer pour déterminer les éléments diagonaux de la matrice de masse \mathbf{M}

$$M_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i^2(x) dx = \frac{2h}{3},$$

et les éléments hors diagonaux de la matrice de masse \mathbf{M}

$$M_{i,i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_{i+1} \phi_i(x) dx = \frac{h}{6}.$$

La matrice de masse est

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m+2)}$$

Nous remarquons que les matrices de rigidité et de masse \mathbf{R} et \mathbf{M} diffèrent de celles introduites dans le papier de L. Feng, V. Linestsky, J.L. Morales et J. Nocedal [13]. La technique d'assemblage des matrices de masse et de rigidité sont inespérées dans [31, 32]. Pour le moment, une fois calculés les matrices de rigidité \mathbf{R} et de masse \mathbf{M} , il faut les modifier, pour prendre en considération les conditions aux limites Dirichlet.

Nous devons donc supprimer la première et dernière colonne, conduisant à des matrices

restreintes \mathbf{R}_r et \mathbf{M}_r .

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \mathbf{M}_r = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & . & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

En utilisant les conditions aux bords de Dirichlet défini en (3.5), nous fixons un vecteur nul $g \in \mathbb{R}^m$, excepté la première composante, $g_1 = k a_{-1} \psi(-l)$. Ensuite, pour chaque pas de temps, nous devons résoudre le système :

$$\left((\mathbf{M}_r + k\theta\mathbf{R}_r) u_h^{n+1} - (\mathbf{M}_r - k(1-\theta)\mathbf{R}_r) u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h, \quad (3.21)$$

avec la condition initial $u_h^0 = \psi_h$.

De (3.21) pour u_h^n connu on calcul u_h^{n+1}

— Pour $\theta = 0$ il correspond au schéma explicite d'Euler.

$$\left(\mathbf{M}_r u_h^{n+1} - (\mathbf{M}_r - k\mathbf{R}_r) u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h. \quad (3.22)$$

— Pour $\theta = 1$ il correspond au schéma implicite d' Euler.

$$\left((\mathbf{M}_r + k\mathbf{R}_r) u_h^{n+1} - \mathbf{M}_r u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h. \quad (3.23)$$

— Pour $\theta = \frac{1}{2}$ il correspond au schéma de Crank-Nicolson .

$$\left(\left(\mathbf{M}_r + \frac{k}{2}\mathbf{R}_r \right) u_h^{n+1} - \left(\mathbf{M}_r - \frac{k}{2}\mathbf{R}_r \right) u_h^n + g, v_h - u_h^{n+1} \right) \geq 0, \forall v_h \in \mathcal{K}_h. \quad (3.24)$$

Nous posons $\mathbf{B} = (\mathbf{M}_r + k\theta \mathbf{R}_r)$, est une matrice tridiagonale de taille $m \times m$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & a & b & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix},$$

avec

$$b = a_0 k\theta + \frac{4h}{6}, \quad (3.25)$$

$$c = a_{+1} k\theta + \frac{h}{6}, \quad (3.26)$$

$$a = a_{-1} k\theta + \frac{h}{6}, \quad (3.27)$$

et $\mathbf{d}^n = (\mathbf{M}_r - k(1-\theta)\mathbf{R}_r) u_h^n - g \in \mathbb{R}_r^m$.

La nouvelle forme d'écriture du problème original (3.1) comme un problème de complémentarité linéaire discrétisée (LCP), en utilisant la proposition 1.3.1, s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} u_h^{n+1} &\geq d^n, \\ u_h^{n+1} &\geq \psi_h, \\ (\mathbf{B} u_h^{n+1} - d^n)(u_h^{n+1} - \psi_h) &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

pour $n = 0, \dots, N$.

Remarque 3.2.1 Les conditions aux bords de Dirichlet sont supposées pour l'option américaine "put". On fait la même chose pour l'option "call", en tenant compte de ces modifications de

$$\mathcal{K}_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h \geq \psi_h \text{ p.p sur } \Omega \text{ et } v_0 = \psi(+l), v_{m+1} = 0\},$$

et le vecteur nul $g \in \mathbb{R}^m$ sauf la dernière composante $g_m = k a_1 \psi(+l)$.

Le problème discret associé aux options européennes, s'écrit :

$$\mathbf{B} u_h^{n+1} = d^n,$$

avec $u_h^0 = \psi_h$.

Remarque 3.2.2 On peut remplacer les conditions aux limites de Dirichlet par des conditions aux limites de Neumann suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pm l, t) = 0$$

Les matrices de masse et de rigidité s'écrivent comme suit

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{a_0}{2} & a_1 & & & \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ & & & a_{-1} & \frac{a_0}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+2) \times (m+2)}$$

$$\mathbf{M} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+2) \times (m+2)}$$

Les entrées de la matrice \mathbf{R} sont définies en (3.18), (3.19) et (3.20).

3.3 Discrétisation par la méthode des différences finies

Le but de cet section est de souligner la différence dans la justification de la méthode de Brennan et Schwartz pour la méthode des éléments finis et celle de différences finies introduite par P. Jaillet, B. Lapeyre et D. Lambertan [10]. L'approximation de (3.1) par différences finies consiste à subdiviser les intervalles $[0, T]$ et Ω en N et $m + 1$ sous intervalles de longueurs respectives

$$k = \frac{T}{N}, \quad h = \frac{2l}{m+1}.$$

Posons $t_n = nk$, $x_i = -l + ih$, et $u_i^n = u(t_n, x_i)$ pour $n = 1, \dots, N$ et $i = 1, \dots, m$. Nous remplaçons par la suite les dérivées partielles par des approximations d'ordre un ou deux en utilisant la formule de Taylor. Pour des résultats théoriques complet sur l'approximation par différences finies voir [33, 32, 31]. Nous avons déjà vu comment discrétiser les dérivées partielles en temps dans la section précédente. Il nous reste donc l'approximation de l'opérateur \mathcal{A} est donné par (voir [30, 34]), si $u_h = (u_h^i)_{1 \leq i \leq m}$

$$(\mathcal{A}_h u_h)_i = \frac{\sigma^2}{2h^2} (u_h^{i+1} - 2u_h^i + u_h^{i-1}) + \frac{\beta}{2h} (u_h^{i+1} - u_h^{i-1}) + r u_h^i.$$

On procède par récurrence : pour u_h^n donné, on calcule u_h^{n+1} en résolvant le problème de complémentarité linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} - \mathcal{A}_h u_h^{n+\theta} &\geq 0, \\ u_h^{n+1} &\geq \psi_h, \\ \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} - \mathcal{A}_h u_h^{n+\theta} \right) (u_h^{n+1} - \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

avec la condition initial

$$u_h^0 = \psi_h(x), \quad x \in \Omega,$$

avec condition au bord Dirichlet :

$$u_h^n = \psi_h \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.30}$$

En posant

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} \tilde{b} & \tilde{c} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a} & \tilde{b} \end{pmatrix},$$

avec

$$\tilde{a} = -\frac{k \sigma^2}{2h^2} + \beta \frac{k}{2h}, \tag{3.31}$$

$$\tilde{b} = 1 + \frac{k \sigma^2}{h^2} + r k, \tag{3.32}$$

$$\tilde{c} = -\frac{k \sigma^2}{2h^2} - \beta \frac{k}{2h}. \tag{3.33}$$

Si nous utilisons les conditions de Neumann, la matrice a la forme [20]

$$\mathcal{A}_h = \begin{pmatrix} \tilde{b} + \tilde{a} & \tilde{c} & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a} & \tilde{b} + \tilde{c} \end{pmatrix},$$

Le problème de complémentarité linéaire à résoudre pour chaque pas du temps est :

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + k\theta\mathcal{A}_h)u_h^{n+1} - (\mathbf{I} - k(1-\theta)\mathcal{A}_h)u_h^n + g &\geq 0, \\ u_h^{n+1} &\geq \psi_h, \\ ((\mathbf{I} + k\theta\mathcal{A}_h)u_h^{n+1} - (\mathbf{I} - k(1-\theta)\mathcal{A}_h)u_h^n + g)(u_h^{n+1} - \psi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec la condition initial

$$u_h^0 = \psi_h(x), \quad x \in \Omega,$$

où \mathbf{I} est la matrice d'identité et g est défini de la même façon que dans la méthode des éléments finis.

3.4 Convergence de la solution du problème discret

Vue que la solution analytique ne s'offre pas ; pour le problème (3.1) ; alors on se contente de la solution approchée. C'est pour quoi on va étudier la convergence de la solution approchée. On remarque que la forme bilinéaire discrète $a_h(u_h, v_h)$ est bornée, c'est-à-dire

$$|a_h(u_h, v_h)|_h \leq C_a \|u_h\|_h \|v_h\|_h, \quad \text{pour } u_h \text{ et } v_h \in V_h, \quad (3.35)$$

avec $C_a = 3(\sigma^2 + |\beta| + r)$.

De la définition de $a_h(u_h, v_h)$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned} |a_h(u_h, v_h)|_h &\leq \frac{\sigma^2}{2} \left| \frac{\partial u_h}{\partial x} \right|_h \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|_h + |\beta| \left| \frac{\partial u_h}{\partial x} \right|_h |v_h|_h + r |u_h|_h |v_h|_h \\ &\leq 3(\sigma^2 + |\beta| + r) \|u_h\|_h \|v_h\|_h. \end{aligned}$$

On introduit le lemme suivant, il nous permet d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème discret.

Lemme 3.4.1 Il existe deux réels strictement positifs ρ et γ tel que :

$$a_h(u_h, u_h) + \rho |u_h|^2 \geq \gamma \|u_h\|^2$$

Nous reprenons les mêmes techniques que dans [10, 23], pour prouver le lemme 3.4.1.

Preuve. En utilisant la définition de $a_h(u, u)$ et $r > 0$

$$a_h(u_h, u_h) \geq \frac{\sigma^2}{2} (\|u_h\|_h^2 - |u_h|_h^2) - |\beta| \|u_h\|_h |u_h|_h.$$

En posant $\mu = |\beta|$ et $\eta = \frac{\sigma^2}{2} > 0$, on a :

$$a_h(u_h, u_h) \geq \eta \|u_h\|_h^2 - \mu \|u_h\|_h |u_h|_h - \eta |u_h|_h^2.$$

D'ou pour tout $\rho > 0$

$$a_h(u_h, u_h) + \rho |u_h|_h^2 \geq \eta \|u_h\|_h^2 - \mu \|u_h\|_h \|u_h\|_h + (\rho - \eta) |u_h|_h^2.$$

Il suffit de choisir $\gamma = \frac{\eta}{2}$ et ρ tel que la forme quadratique

$$(x, y) \rightarrow \frac{\eta}{2} x^2 - \mu xy + (\rho - \eta) y^2,$$

soit positif. On remarque que ce ρ existe car en utilisant la relation classique $a.b < \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2$. D'ou

$$\frac{\eta}{2} x^2 - \mu xy + (\rho - \eta) y^2 \geq \frac{\eta - \delta\mu}{2} x^2 + \left(\rho - \eta - \frac{\mu}{2\delta} \right) y^2.$$

En prenant $\delta = \frac{\eta}{\mu}$ (car $\beta > 0$) et ρ assez grand tel que $\rho - \eta - \frac{\mu^2}{2\eta}$ soit positive. On obtient

$$\frac{\eta}{2} x^2 - \mu xy + (\rho - \eta) y^2 \geq \left(\rho - \eta - \frac{\mu^2}{2\eta} \right) y^2 \geq 0.$$

■

Avant d'annoncer le théorème qui nous assure la convergence de u_h^n vers u , introduit par [29, 35]. On impose la condition suivante dite la condition de stabilité (voir [30]). Il existe une constante $\beta_1 > 0$, telle que :

$$1 - (1 - \theta) \frac{8 C_0^2 C_a^2}{\sigma^2} \frac{k}{h^2} \geq \beta_1 > 0, \quad (3.36)$$

avec C_0 et C_a sont définis en (3.12) et (3.35).

Ce résultat suivant assure la convergence de u_h^n vers u (voir [29]).

Théorème 3.4.1 ([29]) Si, $\theta \in [0, 1]$, pour tous $h, k \rightarrow 0$ et si, $\frac{k}{h^2} \rightarrow 0$ (la condition (3.36) est satisfaite). Alors

$$u_h^n \rightarrow u, \text{ dans } L^2([0, T], L^2(\Omega)).$$

Remarque 3.4.1 D'après la condition de stabilité (3.36), nous ne pouvons pas assurer que pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, le schéma est inconditionnellement stable contrairement au cas, pour $\theta = 1$ dans (3.36) on peut obtenir des résultats de ce type. Pour les options européennes, selon le principe de Von Neumann (voir [33]), pour $\theta \geq \frac{1}{2}$ le schéma est inconditionnellement stable. C'est pour quoi, dans la justification de l'algorithme de Brennan-Schwartz du chapitre 4, nous allons considérer le cas $\theta = 1$.

Implémentation des méthodes

4.1	Algorithme Brennan-Schwartz	49
4.2	La méthode PSOR	65

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique du problème de complémentarité linéaire issue de la discrétisation par différences finies ou éléments finis. Vu que, la méthode des éléments finis et de différences finies génèrent des matrices tridiagonales et du faite que la contrainte est imposée, alors ils existent des méthodes efficaces et appropriés pour résoudre ce type du problème. Parmi ces méthodes, la méthode de Brennan-Schwartz et la méthode de sur-relaxation avec projections successives (PSOR "Projected

Successive Over-Relaxation"). En sus, nous justifions théoriquement l'adaption de l'algorithme de Brennan-Schwartz au cas de discrétisation par éléments finis dans la première section. Dans la deuxième section, nous présentons l'algorithme de PSOR, selon [36], a fin de justifier numériquement la convergence de l'algorithme de Brennan-Schwartz dans le prochain chapitre observations numériques.

4.1 Algorithme Brennan-Schwartz

M.J. Brennan and E.S. Schwartz ont introduit un algorithme de résolution des options américaines put avec conditions aux bords mixtes Dirichlet et Neumann (voir [9]) par différences finies. P. Jaillet, D. Lembreton et B. Lapeyre ont reformulé le problème avec des conditions aux bords Dirichlet, puis ils ont donné la justification de cet algorithme introduit par [9] pour le cas de différences finies.

Nous avons remarqué que lors de la discrétisation soit par la méthode des éléments finis ou différences finies que le type de matrice qui apparaît est tridiagonale, de la forme :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & b_m \end{pmatrix}.$$

La proposition 4.1.1 donne un algorithme directe de résolution du PCL de type

$$\begin{aligned} \mathbf{T}u &\geq \varrho, \\ u &\geq \xi, \\ (\mathbf{T}u - \varrho, u - \xi) &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

dans le cas où les éléments c_j de \mathbf{T} sont nuls.

Proposition 4.1.1 (voir [10]) Une matrice du type \mathbf{T} avec $c_j = 0$ et $b_j > 0$ pour $j = 1, \dots, m$, alors, pour tous vecteurs ξ et ϱ le PCL suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}u &\geq \varrho, \\ u &\geq \xi, \\ (\mathbf{T}u - \varrho, u - \xi) &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

a une solution unique donnée par les équations de récurrence :

$$\begin{aligned} u_1 &= \max \left\{ \frac{\varrho_1}{b_1}, \xi_1 \right\}, \\ u_j &= \max \left\{ \frac{1}{b_j} (\varrho_j - a_j u_{j-1}), \xi_j \right\}, \quad 2 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

La preuve de ce résultat découle des égalités : $(\mathbf{T}u)_1 = b_1 u_1$ et $(\mathbf{T}u)_j = b_j u_j + a_j u_{j-1}$ (voir [10]).

Afin de vérifier les hypothèses de la proposition 4.1.1, nous allons procéder à la décompositions LU . Dans le papier de S. Ikonnen et J. Toivannan ont combiné, sans justifier, l'algorithme de Brennan-Schwartz avec la décompositions LU (voir [11]) pour un problème de complémentarité linéaire issu de la discrétisation par différence finies pour l'option call. Dans ce qui suit, nous justifions cet l'algorithme, dans le cas des éléments finis pour l'option put.

Factorisation LU standard et UL

La factorisation standard LU de la matrice A est donné par $A = LU$, alors pour résoudre le système $Ax = b$ consiste simplement à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires

$$Ly = b,$$

$$Ux = y.$$

Soit la matrice de permutation P avec des 1 sur l'anti-diagonal et des zéros partout ailleurs

$$P = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix},$$

Alors $P^{-1} = P^T = P$, et soit $A_2 = PAP$

Exemple 4.1.1 Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \text{ alors } A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Pour le système d'équations, cela implique

$$Ax = b \Leftrightarrow PAPPx = Pb \Leftrightarrow A_2Px = Pb$$

Maintenant, examinons la factorisation LU pour la matrice A_2

$$\begin{aligned} A_2 &= PAP = L_2 U_2, \\ A &= PA_2 P = (PL_2)(U_2 P) = U_3 L_3, \end{aligned}$$

D'où, en remplaçant $A = U_3 L_3$ dans le système d'équations $Ax = b$, nous mène à résoudre les deux systèmes

$$\begin{aligned} U_3 y &= b, \\ L_3 x &= y. \end{aligned}$$

Cette dernière est la factorisation UL . Nous allons adopter ce principe pour la matrice B . Rappelons que,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & a & b & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix},$$

avec

$$b = \frac{2}{3} r h k + \frac{4h}{6}, \quad (4.3)$$

$$c = -\frac{1}{2} \beta k + \frac{1}{6} r h k - \frac{1}{2} \sigma^2 k, \quad (4.4)$$

$$a = \frac{1}{2} \beta k + \frac{1}{6} r h k - \frac{1}{2} \sigma^2 k. \quad (4.5)$$

La décompositions UL de la matrice \mathbf{B} pour l'option dite put.

$$\mathbf{B} = \mathbf{UL} = \begin{pmatrix} 1 & c'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c'_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & c'_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_1 & b'_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & a'_{m-1} & b'_{m-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a'_m & b'_m \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Pour déterminer les coefficients a'_j , b'_j et c'_m , nous multiplions les deux matrices \mathbf{U} et \mathbf{L} . En effectuant un calcul rétrograde simple :

— Dans la dernière ligne donne des équations ci-dessus

$$b = 1 \cdot b'_m \text{ alors } b'_m = b,$$

$$a = 1 \cdot a'_m \text{ alors } a'_m = a.$$

— Dans l'avant dernière ligne donne des équations ci-dessus

$$c = c'_{m-1} b'_m \text{ alors } c'_{m-1} = \frac{c}{b'_m},$$

$$b = 1 \cdot b'_{m-1} + c'_{m-1} \cdot a'_m \text{ alors } b'_{m-1} = b - \frac{a \cdot c}{b'_{m-1}},$$

$$a = 1 \cdot a'_m \text{ alors } a'_m = a.$$

— Dans la $(j + 1)$ -ème ligne nous obtenons

$$c = c'_{m-j} b'_{m-j+1} \text{ alors } c'_{m-j} = \frac{c}{b'_{m-j+1}},$$

$$b = 1 \cdot b'_{m-j} + c'_{m-j} \cdot a'_{m-j+1} \text{ alors } b'_{m-j} = b - \frac{a \cdot c}{b'_{m-j+1}},$$

$$a = 1 \cdot a'_{m-j} \text{ alors } a'_{m-j} = a,$$

Concernant, le second membre définit par

$$\mathbf{d}^n = \mathbf{M}u_h^n - g \in \mathbb{R}^m,$$

on lui associe le vecteur suivant, pour l'option put, s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{d}}_m^n = \mathbf{d}_m^n, \quad \tilde{\mathbf{d}}_i^n = \mathbf{d}_i^n - \tilde{\mathbf{d}}_{i+1}^n \frac{c}{b'_{i+1}},$$

qui solution de

$$\mathbf{U}\tilde{\mathbf{d}}^n = \mathbf{d}^n.$$

Maintenant, il est possible de décrire l'algorithme en deux boucles seulement.

Algorithm 1 Brennan-Schwartz pour l'option put

— Pour un vecteur donné d^n résoudre $\mathbf{U}y = d^n$

— pour $i = 1$ à m , calculé

$$u_i^{n+1} = \max\{(y_i - a'_i u_{i-1}^n)/b'_i, \psi_i\}$$

Remarque 4.1.1 Pour le cas de l'option call, nous utilisons la décompositions LU de la matrice \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a'_1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & a'_{m-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a'_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_1 & c'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_2 & c'_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & b'_{m-1} & c'_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

De la même façon que précédemment le cas de put mais, le calcul sera progressive. Le second membre dans le l'option call, s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{d}}_1^n = \mathbf{d}_1^n, \quad \tilde{\mathbf{d}}_i^n = \mathbf{d}_i^n - \tilde{\mathbf{d}}_{i-1}^n \frac{c}{b'_{i-1}}.$$

Il aussi est possible de décrire l'algorithme en deux boucles seulement.

Algorithm 2 Brennan-Schwartz pour l'option call

- Pour un vecteur donné d^n résoudre $\mathbf{U} y = d^n$
- pour $i = m$ à 1, calculé

$$u_i^{n+1} = \max\{(y_i - a'_i u_{i+1}^n)/b'_i, \psi_i\}$$

Il nous reste à vérifier que $b'_j > 0$, dans les hypothèses de la proposition 4.1.1.

Lemme 4.1.1 Si \mathbf{B} est une matrice coercive, les coefficients diagonaux de la matrice \mathbf{L} sont strictement positifs.

Dans la preuve on se restreint au cas de l'option put.

Preuve. Du faite que,

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{U} \det \mathbf{L},$$

et que

$$\det \mathbf{U} = 1, \quad \det \mathbf{L} = \prod_{j=1}^m b'_j,$$

alors

$$\det \mathbf{B} = \prod_{j=1}^m b'_j.$$

Puisque la matrice \mathbf{B} est coercive alors les n mineurs principaux dominants soient strictement positifs, autrement dit que $\det \mathbf{B} > 0$, par récurrence sur m on déduit que $b'_j > 0$

pour $j = 1, \dots, m$. ■

La proposition suivante est une extension de la proposition 4.1.1, pour tenir en compte de la frontière libre pour l'option call où put.

Proposition 4.1.2 Assurer que

- \mathbf{B} est une matrice tridiagonale et $c \leq 0$.
- La solution u_h^{n+1} de

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} u_h^{n+1} \geq \mathbf{d}^n, \\ u_h^{n+1} \geq \psi_h, \\ (\mathbf{B} u_h^{n+1} - \mathbf{d}^n, \psi_h - u) = 0, \end{array} \right.$$

satisfait, $(u_h^{n+1})_j = (\psi_h)_j$, pour $j = 1, 2, 3, \dots, k$ et $(u_h^{n+1})_j > (\psi_h)_j$ pour $j = k + 1, \dots, m$ Alors u_h^{n+1} est aussi solution de (\tilde{I})

$$(\tilde{I}) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} u_h^{n+1} \geq \tilde{\mathbf{d}}^n, \\ u_h^{n+1} \geq \psi_h, \\ (\mathbf{L} u_h^{n+1} - \tilde{\mathbf{d}}^n, \psi_h - u_h^{n+1}) = 0. \end{array} \right.$$

Remarque 4.1.2 De la proposition précédente, la segmentation en sous ensemble détermine la frontière libre pour l'option put, c'est-à-dire,

$$u_h^{n+1} = (\psi_h)_j \text{ pour } j \leq k, \text{ et } \mathbf{B} u_h^{n+1} = \mathbf{d}^n \text{ pour } j > k.$$

Cette condition de segmentation, nous assure que

$$(\mathbf{B} u_h^{n+1} - \mathbf{d}^n, \psi_h - u) = 0.$$

Pour le cas de l'option call, la condition de segmentation

$$u_h^{n+1} = (\psi_h)_j \text{ pour } j > k, \text{ et } \mathbf{B} u_h^{n+1} = \mathbf{d}^n \text{ pour } j \leq k.$$

Preuve. Puisque $c \leq 0$, on aura $c'_j = \frac{c}{b'_{j-1}} \leq 0$. De la définition du second membre nous avons donc des constantes positives $\lambda_{j,j+1}, \dots, \lambda_{j,m}$, pour $j = 1, \dots, m-1$ tels que

$$(\tilde{\mathbf{d}}^n)_j = (\mathbf{d}^n)_j + \lambda_{j,j+1} (\mathbf{d}^n)_{j+1} + \dots + \lambda_{j,m} (\mathbf{d}^n)_m,$$

et

$$(\mathbf{L} u_h^{n+1})_j = (\mathbf{B} u_h^{n+1})_j + \lambda_{j,j+1} (\mathbf{B} u_h^{n+1})_{j+1} + \dots + \lambda_{j,m} (\mathbf{B} u_h^{n+1})_m,$$

par conséquent, $\mathbf{B} u_h^{n+1} \geq \mathbf{d}^n$, cela implique $\mathbf{L} u_h^{n+1} \geq \tilde{\mathbf{d}}^n$. Pour $j > k$, nous savons que $(u_h^{n+1})_j > (\psi_h)_j$, alors $(\mathbf{B} u_h^{n+1})_j = (\mathbf{d}^n)_j$. Cela implique $(\mathbf{L} u_h^{n+1})_j = (\tilde{\mathbf{d}}^n)_j$. ■

Pour assuré la solution de problème de complémentarité linéaire, il est nécessaire que la matrice soit coercive. Le lemme suivant nous assure, alors, la coercivité de \mathbf{B} .

Lemme 4.1.2 Si $h < \frac{3\sigma^2 k}{1+r k}$, alors la matrice \mathbf{B} est coercive et pour, $x \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{B}x \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \Rightarrow x > 0.$$

Preuve. Nous remarquons que la matrice \mathbf{B} n'est pas symétrique, mais nous pouvons travailler avec sa partie symétrique puisque

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^T).$$

En utilisant,

$$2\langle x, \mathbf{P}x \rangle = \langle x, \mathbf{B}x \rangle + \langle x, \mathbf{B}^T x \rangle = \langle x, \mathbf{B}x \rangle + \langle \mathbf{B}x, x \rangle = 2\langle x, \mathbf{B}x \rangle.$$

Nous remarquons aussi que \mathbf{B} est définie positive si \mathbf{P} est définie positive. Maintenant, examinons \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} b & -\hat{a} & & & \\ -\hat{a} & b & -\hat{a} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\hat{a} \\ & & & -\hat{a} & b \end{pmatrix},$$

avec $b > 0$. Alors

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}x, x) &= -\hat{a} \sum_{i=2}^m x_{i-1} x_i + b \sum_{i=1}^m x_i^2 - \hat{a} \sum_{i=1}^{m-1} x_{i+1} x_i \\ &\geq -\frac{|\hat{a}|}{2} \sum_{i=2}^m (x_{i-1}^2 + x_i^2) + b \sum_{i=1}^m x_i^2 - \frac{|\hat{a}|}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (x_{i+1}^2 + x_i^2) \\ &\geq (b - 2|\hat{a}|) \sum_{i=1}^m x_i^2 = (b - 2|\hat{a}|) \|x\|^2. \end{aligned}$$

Dans notre cas, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{-h}{6} + k \left(\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{rh}{6} \right), \\ b &= \frac{4h}{6} + k \left(\frac{\sigma^2}{h} + \frac{2}{3} rh \right). \end{aligned}$$

Pour que $\hat{a} > 0$, soit vérifié il faut

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{-h}{6} + k \left(\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{rh}{6} \right) \\ 0 &< -h^2 + k(3\sigma^2 - rh^2) \\ h^2 + rh^2k &< 3\sigma^2k \\ h^2 &< \frac{3\sigma^2k}{1+rk}. \end{aligned}$$

Avec $b - 2\hat{a} = h + r\Delta t h$ et $r > 0$, nous obtenons

$$(\mathbf{P}x, x) \geq (b - 2\hat{a}) \|x\|^2 = h(1 + r\Delta t) \|x\|^2.$$

Assumons que $\mathbf{B}x = \mathbf{d}^n \geq 0$. Utilisons $\mathbf{B} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{L}$ et déterminons y par $\mathbf{U}\tilde{\mathbf{d}}^n = \tilde{\mathbf{d}}^n$. Puisque $x \neq 0$ on conclut $\mathbf{d}^n \neq 0$ et $\tilde{\mathbf{d}}^n \neq 0$. Nous utilisons la preuve de la proposition 4.1.2 pour conclure $\tilde{\mathbf{d}}^n \geq 0$ et $(\tilde{\mathbf{d}}^n)_1 > 0$. Puisque, $\mathbf{L}x = \tilde{\mathbf{d}}^n \geq 0$, nous avons

$$\mathbf{L}\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & a_{m-1} & b_{m-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{d}}^n.$$

Utilisant $b_i > 0$ et $a_i < 0$ nous obtenons $x_i > 0$. ■

Remarque 4.1.3 Dans la condition $h < \frac{3\sigma^2k}{1+rk}$, le pas spatiale h doit être suffisamment petite, Selon le pas du temps k . Dans [10], la condition dans le cas différence finis est

$$\beta = r - q - \frac{\sigma^2}{2} < \frac{\sigma^2}{h}, \text{ ou } h < \frac{\sigma^2}{\beta}.$$

Observez que la condition sur h dans [10] est indépendante de pas de temps k .

La difficulté, en pratique, réside dans la vérification de l'hypothèse de segmentation comme le montre cet exemple suivant introduit par [10].

Exemple 4.1.2 Soit $m = 3$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors, la solution du système (\tilde{I}) , selon la proposition 4.1.2, est donné par : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, nous remarquons la condition de segmentation est vérifié $u_1 = \psi_1, u_2 = \psi_2$ et $u_3 > \psi_3$ mais elle n'est pas solution (I) .

Le lemme suivant nous assure la justification de l'hypothèse de segmentation pour la proposition 4.1.2.

Lemme 4.1.3 Soit $\psi(x) = \max\{E - E \exp(x), 0\}$, l'ensemble

$$\Gamma(\psi) = \left\{ j \in \mathbb{Z}, \psi(jh) > 0 \text{ et } (\mathbf{B}\psi)_j \geq (\mathbf{M}\psi)_j \right\},$$

vérifié cette propriété,

$$j_0 \in \Gamma(\psi) \implies \forall j \leq j_0, j \in \Gamma(\psi).$$

Remarque 4.1.4

— L'ensemble donné dans les travaux de P. Jaillet D. Lamberton et B. Lapeyre (voir [10, 23]) est

$$\Gamma(\psi) = \left\{ j \in \mathbb{Z}, \psi(jh) > 0 \text{ et } \tilde{a}\psi((j-1)h) + \tilde{b}\psi(jh) + \tilde{c}\psi((j+1)h) \geq \psi(jh) \right\},$$

avec \tilde{a} , \tilde{b} et \tilde{c} les coefficients de la matrice de discrétisation \mathcal{A}_h par différence finies en 3.31, 3.32 et 3.33.

— Pour l'option call, la propriété que l'ensemble $\Gamma(\psi)$ est

$$j_0 \in \Gamma(\psi) \implies \forall j \geq j_0, j \in \Gamma(\psi).$$

Preuve. Utilisons

$$\begin{aligned} \exp((j+1)h) - \exp((j-1)h) &= \exp(jh) 2 \sinh(h), \\ \exp((j+1)h) + \exp((j-1)h) &= \exp(jh) 2 \cosh(h), \\ -\exp((j+1)h) + 2\exp(jh) - \exp((j-1)h) &= \exp(jh) (2 - 2 \cosh(h)). \end{aligned}$$

Sachant que de (4.3) – (4.5), cela implique

$$\begin{aligned} f_1 &= a \exp((j-1)h) + b \exp(jh) + c \exp((j+1)h) + \\ &\quad - \frac{h}{6} \exp((j-1)h) - \frac{4h}{6} \exp(jh) - \frac{h}{6} \exp((j+1)h) \\ &= \left(a - \frac{h}{6}\right) \exp((j-1)h) + \left(b - \frac{4h}{6}\right) \exp(jh) + \left(c - \frac{h}{6}\right) \exp((j+1)h) \\ &= k \exp(jh) \frac{h}{6} r (2 \cosh(h) + 2) + \frac{\sigma^2 k}{2h^2} \exp(jh) (2 - 2 \cosh(h)) + \\ &\quad - \frac{\beta}{2} k \sinh(h) 2 \exp(jh) \\ &= k \exp(jh) \left[\frac{\sigma^2}{h^2} (1 - \cosh(h)) - \beta \sinh(h) + \frac{h}{3} r (\cosh(h) + 1) \right] \\ f_2 &= a E + b E + c E - \frac{h}{6} E - \frac{4h}{6} E - \frac{h}{6} E \\ &= E r h k \\ f(j) &= f_2 - E f_1 = k E \left(r h + \exp(jh) \left[\frac{\sigma^2}{h^2} (\cosh(h) - 1) + \beta \sinh(h) - \frac{h}{3} r (\cosh(h) + 1) \right] \right). \end{aligned}$$

Vue que $f(j) = f_2 - E f_1$ est une fonction monotone de j de limite $E r h k > 0$ lorsque, $j \rightarrow -\infty$. Avec $\psi(x) = \max(E - E \exp(x), 0)$ et $\bar{\psi}(x) = E - E \exp(x)$. De ce qui précède,

— Si $j_0 \in \Gamma(\psi)$ alors $\psi(j_0 h) > 0$ et puisque $\psi(x)$ décroissant, alors

$$j_0 \in \Gamma(\bar{\psi}) \implies \forall j \leq j_0, j \in \Gamma(\bar{\psi}).$$

— Si $j_0 \in \Gamma(\psi)$ et $\psi((j_0 + 1)h) \geq 0$, la monotonie de $f(j)$, implique $j \in \Gamma(\psi), \forall j \leq j_0$.

— Si $j_0 \in \Gamma(\psi)$ et $\psi((j_0 + 1)h) = (E - E \exp((j_0 + 1)h)) + R = 0$, pour un certain $R > 0$, en utilisant $c \leq 0$ et

$$0 \leq \left(a - \frac{h}{6}\right) \psi_{j_0-1} + \left(b - \frac{4h}{6}\right) \psi_{j_0} + \left(c - \frac{h}{6}\right) \psi_{j_0+1} = f(j_0) + \left(c - \frac{h}{6}\right) R,$$

et alors $f(j_0) > 0$. Maintenant, la monotonie de $f(j)$ implique $j \in \Gamma(\psi), \forall j \leq j_0$.

■

En utilisant lemme 4.1.3 et la proposition 4.1.3 suivante, nous arrivons à vérifier l'hypothèse de la segmentation de la proposition 4.1.2, ce qui nous assure la validité de l'algorithme de Brennan-Schwartz pour l'approche par élément finis.

Proposition 4.1.3 Les vecteurs $u^0, u^1, u^2, \dots, u^N$, suite de solutions du problème complémentarité linéaire (3.28) vérifient les propriétés suivantes :

- $\forall n \in \{1, \dots, N\} u^n \geq u^{n-1}$
- Pour chaque entier n , il existe un indice k_i tel que

$$u_j^n = \psi_j \quad \text{si } 1 \leq j \leq k_i \quad \text{et } u_j^n > \psi_j \quad \text{si } j > k_i$$

Preuve.

- La première propriété se démontre par récurrence sur n . Il est clair que l'on a, $u^1 \geq u^0 = \psi$ car

$$\mathbf{B}u^1 \geq \mathbf{d}^0, \quad (4.7)$$

$$u^1 \geq \psi = u^0. \quad (4.8)$$

Supposons que, l'inégalité $u^n \geq u^{n-1}$ est acquise. Alors u^{n+1} vérifié :

$$\mathbf{B}u^{n+1} \geq \mathbf{d}^{n-1}.$$

Vue que, u^n solution de

$$\mathbf{B}u^n \geq \mathbf{d}^{n-1}.$$

Et utilisant la définition 1.3.4 et la proposition 1.3.2 : $u^{n+1} \geq u^n$.

- Pour la deuxième assertion, on traite d'abord le cas : $n = 1$. Puisque ψ est non nul, on a, par le lemme 4.1.2, $u_j^1 \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. Le raisonnement par absurde, en supposant qu'il existe, un intervalle d'entiers $[l_1, l_2]$, avec $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq m$, tel que :

$$u_{l_2}^1 = \psi_{l_2} \text{ et } u_j^1 > \psi_j \text{ pour } j \in [l_1, l_2[.$$

Quitte à diminuer l_1 , on peut supposer que, $l_1 = 1$, ou

$$u_{l_1-1}^1 = \psi_{l_1-1}. \quad (4.9)$$

De l'inégalité, $(\mathbf{B}u^1)_{l_2} \geq (\mathbf{d}^0)_{l_2} = (\mathbf{M}u^0)_{l_2} = (\mathbf{M}\psi)_{l_2}$ et de l'égalité $u_{l_2}^1 = \psi_{l_2}$, on déduit :

$$au_{l_2-1}^1 + b\psi_{l_2} + cu_{l_2+1}^1 \geq \frac{h}{6}\psi_{l_2-1} + \frac{4h}{6}\psi_{l_2} + \frac{h}{6}\psi_{l_2+1},$$

et puisque, les constantes a et c sont négatives :

$$a\psi_{l_2-1} + b\psi_{l_2} + c\psi_{l_2+1} \geq \frac{h}{6}\psi_{l_2-1} + \frac{4h}{6}\psi_{l_2} + \frac{h}{6}\psi_{l_2+1}. \quad (4.10)$$

Il en résulte que, $\lambda_2 \in \Gamma(\psi)$, ce qui entraîne par le lemme 4.1.3 $[1, l_2] \subset \Gamma(\psi)$ et, par conséquent :

$$(\mathbf{B}\psi)_j \geq (\mathbf{M}\psi)_j \text{ pour } j \in [1, l_2].$$

Comme pour $j \in [l_1, l_2[$ on a : $(\mathbf{B}u^1)_j = (\mathbf{M}\psi)_j$, on voit que le vecteur vérifié $(\mathbf{B}\psi)_j \geq (\mathbf{B}u^1)_j$ pour $j \in [l_1, l_2[$. Le vecteur $v = \psi - u^1$ vérifié donc $(\mathbf{B}v)_j \geq 0$ pour $j \in [l_1, l_2[$, avec, de plus $v_{\lambda_2} = 0$ et, si $l_1 > 1$, $v_{l_1-1} = 0$. On déduit, en appliquant le lemme 4.1.2 à une matrice extraite de \mathbf{B} , que l'on a : $v_j \geq 0$, pour $j \in [l_1, l_2[$. D'où : $\psi_j \geq u_j^1$ pour $j \in [l_1, l_2[$, ce qui est contradictoire. Si maintenant on suppose que la propriété est vraie à l'ordre n , et si $[l_1, l_2]$ est intervalle tel que :

$$u_{l_2}^{n+1} = \psi_{l_2} \text{ et } u_j^{n+1} > \psi_j \text{ pour } j \in [l_1, l_2[,$$

alors, on a,

$$u_{l_2}^n = \psi_{l_2},$$

et par conséquent : $u_j^n = \psi_j$ pour $j \leq l_2$ et

$$au_{l_2-1}^{n+1} + b\psi_{l_2} + cu_{l_2+1}^{n+1} \geq \frac{h}{6}\psi_{l_2-1} + \frac{4h}{6}\psi_{l_2} + \frac{h}{6}\psi_{l_2+1},$$

et puisque a et c sont négatives :

$$a\psi_{l_2-1} + b\psi_{l_2} + c\psi_{l_2+1} \geq \frac{h}{6}\psi_{l_2-1} + \frac{4h}{6}\psi_{l_2} + \frac{h}{6}\psi_{l_2+1}$$

Il en résulte que $l_2 \in \Gamma(\psi)$, ce qui entraîne par le lemme 4.1.3 $[1, l_2] \subset \Gamma(\psi)$ et, par conséquent de :

$$(\mathbf{B}\psi)_j \geq (\mathbf{M}\psi)_j \text{ pour } j \in [1, l_2].$$

Comme pour $j \in [l_1, l_2[$ on a : $(\mathbf{B}u^n)_j = (\mathbf{M}\psi)_j$, on voit que le vecteur vérifie $(\mathbf{B}\psi)_j \geq (\mathbf{B}u^{n+1})_j$ pour $j \in [l_1, l_2[$. Le vecteur $v = \psi - u^{n+1}$ vérifie donc $(\mathbf{B}v)_j \geq 0$ pour $j \in [l_1, l_2[$, avec, de plus $v_{l_2} = 0$ et, si $l_1 > 1$, $v_{l_1-1} = 0$. On déduit, en appliquant le lemme 10 à une matrice extraite de \mathbf{B} , que l'on a : $v_j \geq 0$, pour $j \in [l_1, l_2[$. D'où : $\psi_j \geq u_j^{n+1}$ pour $j \in [l_1, l_2[$, ce qui est contradictoire.

■

4.2 La méthode PSOR

L'algorithme de relaxation, PSOR "Projected Successive Over-Relaxation" est un procédé itératif qui, introduit par [37] et l'extension de méthode de relaxation pour la résolution des systèmes linéaires sous la forme :

$$\mathbf{A}v = \mathbf{f},$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $v \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^m$.

La méthode de relaxation est basée sur la décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U},$$

où \mathbf{D} , la matrice diagonale, \mathbf{L} , matrice triangulaire inférieure stricte et \mathbf{U} , matrice triangulaire supérieure, alors v est solution de $\mathbf{A}v = \mathbf{f}$, si et seulement, si v vérifie

$$(\mathbf{D}/\omega - \mathbf{L})v = ((1/\omega - 1)\mathbf{D} + \mathbf{U})v + \mathbf{f}.$$

Pour des valeurs de ω dans l'intervalle $]0, 2[$, on introduit la méthode de sur-relaxation successive (ou méthode SOR pour successive over relaxation) (voir [38, 39])

$$\frac{1}{\omega}a_{ii}x_i^{n+1} + \sum_{j<i} a_{ij}v_j^{n+1} = f_i + \left(\frac{1}{\omega} - 1\right)a_{ii}v_i^n - \sum_{j>i} a_{ij}v_j^{n+1}, \quad (4.11)$$

pour tout, $i \in \{1, \dots, m\}$. On peut écrire (4.11), sous la forme vectorielle :

$$(\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L})v^{n+1} = [(1 - \omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}]v^n + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{f},$$

d'où on déduit la matrice d'itération

$$\mathbf{G}_\omega = (\mathbf{I} - \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega)\mathbf{I} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}].$$

La méthode SOR converge si ([38])

$$\rho(\mathbf{G}_\omega) < 1, \quad \text{pour } \omega \in]0, 2[,$$

avec $\rho(\mathbf{G}_\omega)$ est le rayon spectral. Du faite que, le paramètre ω influence sur la vitesse de convergence (voir [38]), le pas optimal est donné par cet relation :

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathbf{G}_{Jacobi})^2}},$$

avec $\mathbf{G}_{Jacobi} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{D})$ la matrice d'itération de Jacobi (voir [38]).

En utilisant le théorème de Gerschgorin (voir [40]), On peut a priori borner les valeurs

propres par

$$\rho(\mathbf{G}_{Jacobi}) \approx \max \frac{1}{A_{ii}} \sum_{j \neq i} |A_{ij}|.$$

Nous intéressons maintenant, à appliquer la méthode PSOR, au problème de complémentarité linéaire suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{B} u_h^{n+1} &\geq d^n, \\ u_h^{n+1} &\geq \psi_h, \\ (\mathbf{B} u_h^{n+1} - d^n)(u_h^{n+1} - \psi_h) &= 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

pour $n = 0, \dots, N$.

Le problème 4.12, est équivalent à (voir [41])

$$\min \{ \mathbf{B} u_h^{n+1} - d^n, u_h^{n+1} - \psi_h \} = 0,$$

pour, $n = 0, \dots, N$.

Posons, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $v = u_h^{n+1}$ et $f = d^n$, on aura (voir [36])

$$\min_v \{ v - \mathbf{A}^{-1} f, v - \psi_h \} = 0.$$

Où encore

$$v = \max \{ \mathbf{A}^{-1} f, \psi_h \}.$$

Ce problème peut être résolu par PSOR, ce dernier a été suggéré par Cryer (voir[37]) pour une discussion détaillée sur la méthode de Cryer voir [14]. Le principe est d'appliquer à la contrainte de maximisation (4.2) l'algorithme SOR. Alors

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, v_i = \max \{ y_i, (\psi_h)_i \},$$

et les y_i sont définis par

$$\frac{1}{\omega} a_{ii} y_i^{n+1} + \sum_{j < i} a_{ij} y_j^{n+1} = f_i + \left(\frac{1}{\omega} - 1 \right) a_{ii} y_i^n - \sum_{j > i} a_{ij} y_j^{n+1}.$$

L'algorithme de PSOR appliqué à 4.12, pour une itération du temps, est décrit par

Algorithm 3 PSOR

for $j = 1$ to m do

$$r_j = d_j - \sum_{i=1}^m B_{ji}u_i$$

$$u_j = u_j + \omega \frac{r_j}{B_{jj}}$$

$$u_j = \max[u_j, \psi_j],$$

end for

Observations Numériques

5.1	Évaluation de Brennan-Schwartz	70
5.2	Brennan-Schwartz pour le schéma Crank-Nicolson	80

Ce chapitre est dédié à la mise en œuvre de l'algorithme Brennan-Schwartz appliqué au problème de complémentarité linéaire issu de la discrétisation des options américaines par l'approche éléments finis (FE). D'abord, pour évaluer l'algorithme de Brennan-Schwartz (BS), nous allons tester les valeurs pratiques des deux approches différences finies et éléments finis sur les options américaines. De plus, les performances de l'algorithme de Brennan-Schwartz sont comparées avec celle, de l'algorithme itératif robuste, qui est sur-relaxation successive projetée (PSOR). En suite, nous adoptons l'algorithme Brennan-Schwartz

pour le schéma Crank-Nicolson combiné avec la méthode des éléments finis, afin de comparer les taux de convergence de ce schéma par rapport au temps. Nous testons les différents programmes sur plusieurs scénarios d'évaluation des options. Chaque programme a été codé en MatLab (où Octave). Les expériences numériques ont été effectuées sur un ordinateur personnel DELL Intel(R) Core(TM) i5-4200 CPU @1.60 GHz 2.30 GHz.

5.1 Évaluation de Brenann-Schwartz

Dans cette section, nous présentons des expériences numériques de l'algorithme Brennan-Schwartz. Nous comparons les résultats issues de la discrétisation par les approches, différences finies de Jaillet et Al. [10] et éléments finis, ainsi que ces performance par rapport à un autre algorithme PSOR. Les valeurs des paramètres de l'opérateur de Black-scholes bien choisit (voir [6]) $\sigma = 0.4$, $q = 0.15$, $r = 0.2$ et le prix d'exercice $E = 1$.

5.1.1 Comparaison sur les deux approches FE et FD

Nous illustrons une comparaison entre la valeur discrète de l'option américaine par l'approche différences finies (FD) de [10] et celle par éléments finis (FE) , notre cas, pour les deux situations de l'option américaine put et call.

Option put

Dans le calcul, nous considérons la valeur d'option américaine put avec les paramètres définies précédemment. Nous avons utilisé deux approches de discrétisation spatiale : différences finies (FD) et éléments finis (FE). Nous avons pris le pas du temps $k = 0.01$ et

$k = 0.001$, et l'intervalle spatial $[-l; l] = [-2; 2]$ a été divisé en sous-intervalles de longueur $h = 0.01$ et $h = 0.001$.

La figure 5.1, représente les tracés des deux solutions avec $k = 0.1$ et $h = 0.1$, c'est-à-dire avec la grille grossière. Le comportement des solutions est comme prévu et nous n'observons aucune différence visuelle entre les solutions FD et FE.

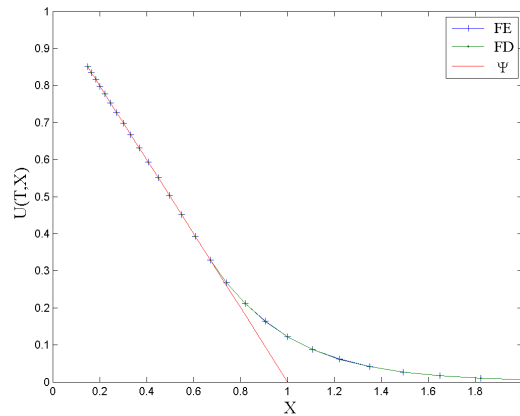


FIGURE 5.1 – Les valeurs de l'option américaine put pour les deux approches FE (en bleu) et FD (en vert) en $T = 1$ et la fonction pay-off Ψ (en rouge).

Pour montrer la convergence de la solution u_h vers la solution exacte inconnue u , lorsque $h \rightarrow 0$ (pas de discrétisation temporelle ou spatiale) pour les deux approches FE et DF, nous avons calculé l'erreur

$$\epsilon(h) = u_{ref} - u_h, \quad (5.1)$$

où u_{ref} est la solution de référence pour un pas de discrétisation très fine $h = 0.001$.

L'erreur d'approximation spatiale (5.1) de deux approches FE et FD sont représenté sur la figure 5.2. L'erreur maximale de la solution avec FE est nettement plus petite que l'erreur de solution avec FD. L'erreur est nulle dans la partie gauche de la figure 5.2 n'est pas

surprenant, puisque les solutions coïncident avec l'obstacle pour les deux approches. La différence entre solution avec l'approche FE et celle avec FD pour $h = 0.001$ et $k = 0.01$ est de 8.20×10^{-8} , de même que pour les deux solutions avec $k = 0.001$. Ceci confirme que pour un pas de discrétisation spatiale très fine la méthode FE et FD génèrent des résultats très similaires.

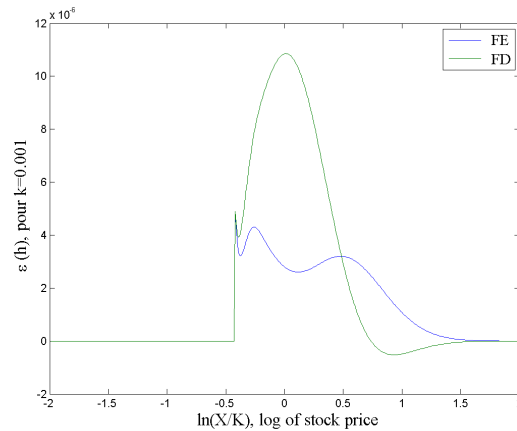


FIGURE 5.2 – Les erreurs d'approximation spatiale pour les deux approches FE et FD pour un pas discrétisation temporelle fixe $k = 0.001$.

Pour l'approximation temporelle, l'allure de la courbe de l'erreur (5.1) des deux approches FE et FD est presque le même. La différence maximale observée avec degré de discrétisation $k = 0.01$ et $k = 0.001$ est d'ordre 2.52×10^{-4} (voir la figure 5.3).

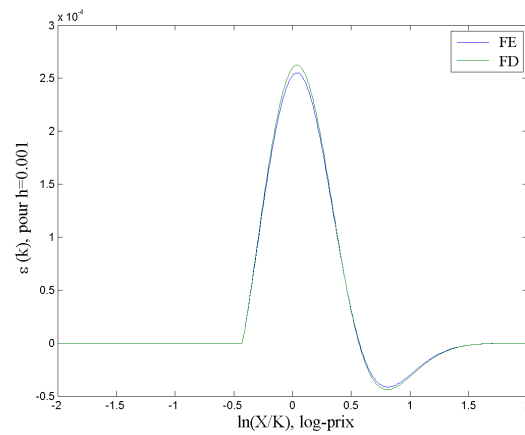


FIGURE 5.3 – Les erreurs d’approximation temporelle pour les approches FE et FD pour un pas de discrétisation spatiale fixe $h = 0.001$.

Nous remarquons que l’erreur globale est clairement dominée par l’erreur causée par la discrétisation en temps issu du schéma implicite.

Option call

Nous reprenons la même procédure que dans le cas put. Avec les mêmes valeurs des paramètres.

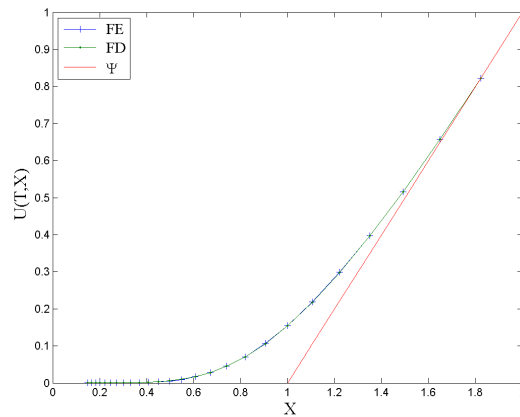


FIGURE 5.4 – Les valeurs de l’option américaine call pour les deux approches FE (en bleu) et FD (en vert) en $T = 1$ et la fonction pay-off Ψ (en rouge).

- La différence entre solutions FE et FD avec $h = 0.001$ et $k = 0.01$ est de 4.72×10^{-8} , de même que pour les deux solutions avec $k = 0.01$. Cela aussi confirme que pour un pas de discrétisation spatiale très fine la méthode FE et FD génèrent des résultats identiques.
- La figure 5.4, montre la valeur de l’option américaine call approchée par FE et FD avec $k = 0.1$ et $h = 0.1$, c’est-à-dire sur la grille grossière.
- Dans la figure 5.5, nous présentons la différence des solutions FE et FD avec $h = 0.01$ et $k = 0.01$ à la solution de référence avec $k = 0.01$. L’erreur maximale de la solution avec FE est nettement plus petite que l’erreur de solution avec FD. L’erreur est zéro dans la partie droite de la figure 5.5, puisque les solutions coïncident avec l’obstacle.
- La différence maximale observée entre les solutions avec $k = 0.01$ et $k = 0.001$ est de l’ordre 2.58×10^{-4} . Comme dans le cas précédent l’erreur causée par la discrétisation en temps domine l’erreur global donné en figure 5.6.

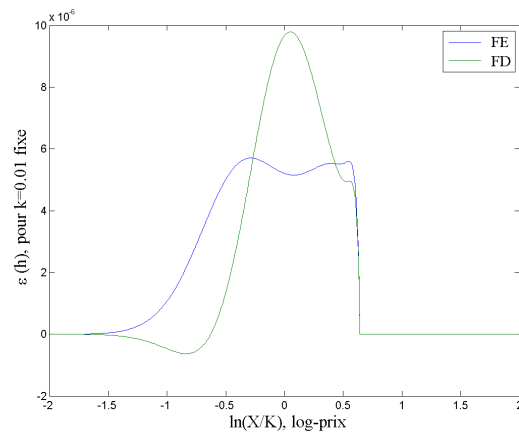


FIGURE 5.5 – Les erreurs d’approximation spatiale pour les approches FE et FD avec un pas de discrétisation temporelle fixe $k = 0.001$.

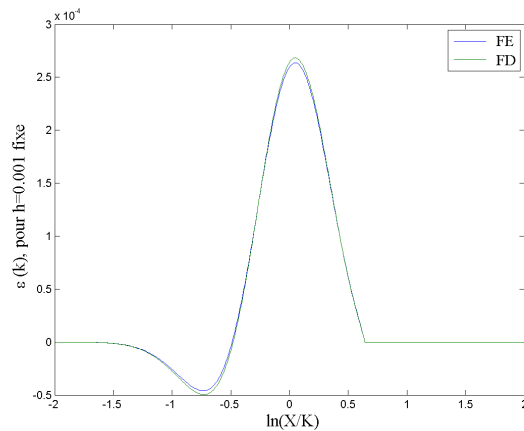


FIGURE 5.6 – Les erreurs d’approximation temporelle pour les approches FE et FD avec $h = 0.001$ fixe.

5.1.2 Comparaison avec PSOR

Pour compléter l’évaluation de l’algorithme Brennan-Schwartz (BS), nous allons comparer ce dernier avec un autre algorithme adapté à ce genre de problème de complémentarité linéaire qui est PSOR. Pour cela, nous présentons l’analyse de la performance de chacune

des méthodes. Le paramètre de tolérance est choisie une fois 10^{-8} et après 10^{-4} . Ceci est dû au fait que les itérations et la précision du test de convergence dépend du paramètre de tolérance. La vitesse d'itération dépend également du paramètre de relaxation ω . Nous choisissons le paramètre de relaxation optimale. Les deux situations de l'option américaine sont prises en considération avec les mêmes valeurs de paramètre que dans les premières expériences numérique.

Option put

La figure 5.7, illustre les graphes des solutions approchées de l'option américaines put pour les deux algorithmes BS et PSOR avec $h = 0.1$ et $k = 0.1$.

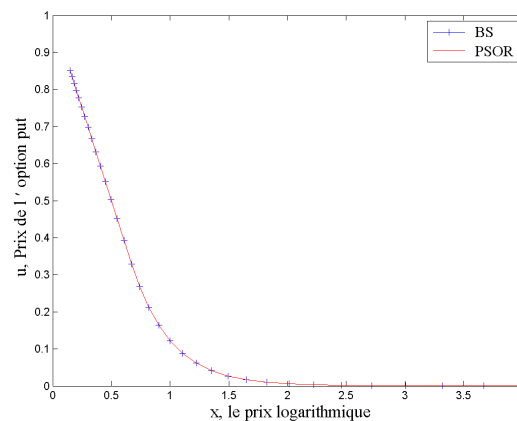


FIGURE 5.7 – Les valeurs de l'option américaine put avec les deux solveurs BS et PSOR.

L'erreur entre les solutions de deux algorithmes BS et celle PSOR pour $h = 0.01$ et $k = 0.01$ est de 7.30×10^{-7} . Le critère d'arrêt pour la méthode PSOR était 10^{-8} . Cela affirme que les résultats obtenus avec les deux algorithmes sont pratiquement les mêmes. L'erreur est 0 sur la partie gauche de la figure 5.8 car $u = \psi$ sur cette partie.

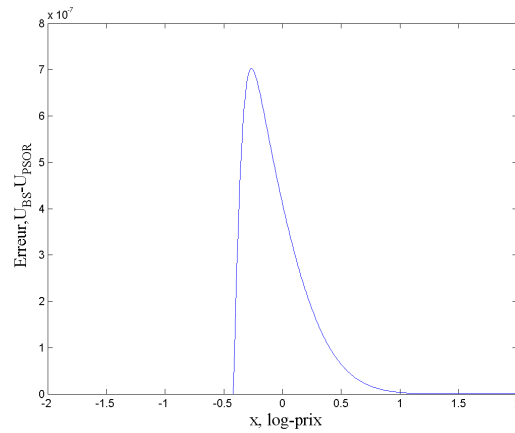


FIGURE 5.8 – La différence entre la solution avec BS et celle de PSOR.

Le tableau 5.1 résume la comparaison de la performance des deux algorithmes BS et PSOR. Le critère d'arrêt pour la méthode PSOR est 10^{-4} . Le tableau comporte les colonnes suivantes :

- M et N définissent le nombre de point de discrétisation par rapport à x et t respectivement,
- *error* l'approximation entre la solution de référence calculé par l'algorithme Brenann-Schwartz (BS) avec $h = 0.001$ et $k = 0.001$ et les solutions approchées pour les deux algorithmes BS et PSOR pour les valeurs de M et N ,
- *CPU* donne le temps en second pour chaque algorithme,
- ω est le paramètre de relaxation optimal PSOR,
- *iter* représente le nombre d'itération pour PSOR.

M	N	PSOR				BS	
		$error$	CPU	ω	$iter$	$error$	CPU
10	2	2.35×10^{-2}	0.0064	0.8235	8	2.36×10^{-2}	0.0020
20	5	6.53×10^{-3}	0.0164	0.9516	19	6.53×10^{-3}	0.0028
40	10	2.91×10^{-3}	0.0552	0.9876	38	2.90×10^{-3}	0.0054
80	20	1.46×10^{-3}	0.2247	0.9969	74	1.39×10^{-3}	0.0160
200	50	6.89×10^{-4}	0.9768	0.9995	150	5.34×10^{-4}	0.0843
400	100	4.06×10^{-4}	2.8064	0.9999	237	2.55×10^{-4}	0.3225

TABLE 5.1 – Comparaison des performances de BS et PSOR dans le cas put.

Les résultats de cet expérimentation sont présentés dans le tableau 5.1. Pour l'algorithme de Brennan-Schwartz, le temps CPU requis augmente linéairement par rapport au nombre de point de subdivision spatiale et temporelle. Le temps CPU pour la méthode BS sur chaque paire (M, N) est nettement plus petit que le temps correspondant pour la méthode PSOR.

Option call

- La figure 5.9 représente les graphes des solutions approchées de l'option Américaines call pour les deux algorithmes BS et PSOR avec $h = 0.1$ et $k = 0.1$.

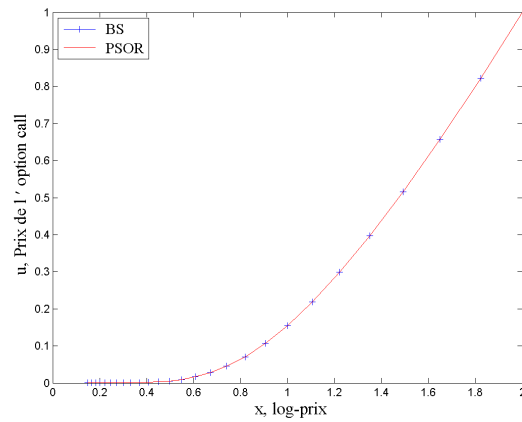


FIGURE 5.9 – Les valeur de l’option américaine call avec les deux solveurs BS et PSOR.

- L’erreur entre les solutions de deux algorithmes BS et PSOR avec $h = 0.01$ et $k = 0.01$ est de 1.18×10^{-6} . Le critère d’arrêt pour la méthode PSOR était 10^{-8} . Cela affirme que les résultats obtenu avec les deux algorithmes sont pratiquement les mêmes. Là où l’erreur 0 sur la figure 5.10 reflète $u = \psi$ sur cette partie.

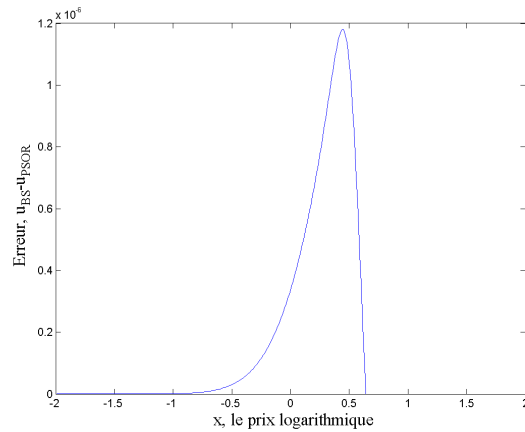


FIGURE 5.10 – La différence de la solution de BS avec celle de PSOR.

- Le tableau 5.2 permet de comparer la performance des deux algorithmes BS et PSOR dans le cas d’option call.

M	N	PSOR				BS	
		$error$	CPU	ω	$iter$	$error$	CPU
10	2	4.62×10^{-2}	0.0030	0.8235	7	4.62×10^{-2}	0.0024
20	5	7.79×10^{-3}	0.0169	0.9516	19	7.78×10^{-3}	0.0029
40	10	3.38×10^{-3}	0.059	0.9876	40	3.31×10^{-3}	0.0049
80	20	1.61×10^{-3}	0.226	0.9969	78	1.52×10^{-3}	0.0124
200	50	6.50×10^{-4}	1.219	0.9995	151	5.65×10^{-4}	0.0622
400	100	3.48×10^{-4}	2.914	0.9999	206	2.64×10^{-4}	0.2377

TABLE 5.2 – Comparaison des performances de BS et PSOR dans le cas call.

5.2 Brennan-Schwartz pour le schéma Crank-Nicolson

Dans cette section, nous allons adopter l'application de l'algorithme Brennan-Schwartz pour le schéma de Crank-Nicolson (CN). Vu que, nous avons des résultats théoriques pour les taux de convergence des deux schémas Crank-Nicolson et Euler implicite que, nous allons tester. La convergence théorique du schéma Crank-Nicolson est d'ordre 2 en temps t et le schéma implicite Euler est d'ordre 1. De plus, dans la section précédente, nous avons remarqué que la convergence de la solution est dominée par la discrétisation en temps t . Pour cela, nous avons fait appel au schéma de Crank-Nicolson (voir dans la section 3.2.3, page 39).

- Les figures 5.11 et 5.12 montrent les solutions approchées de l'option américaines dans les deux situations put et call avec les deux Schémas Crank-Nicolson (CN) et Implicite Euler (IME) avec $h = 0.1$ et $k = 0.1$.

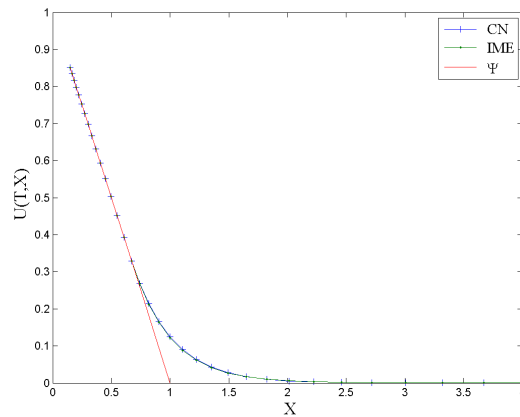


FIGURE 5.11 – Les solutions approchées avec les deux schémas CN et IME pour l’option put.

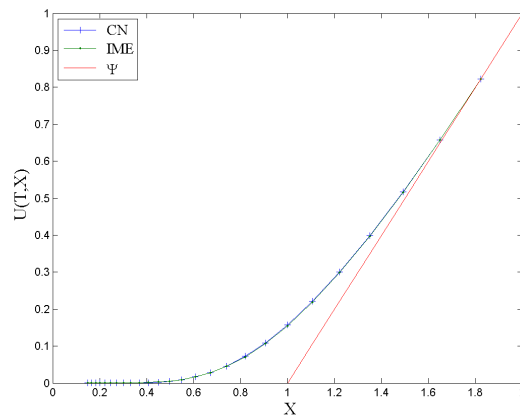


FIGURE 5.12 – Les solutions approchées avec les schémas CN et IME pour l’option call.

- L’erreur entre des les valeurs de l’option put où call, calculé avec les deux schémas implicite d’Euler et Crank-Nicolson est d’ordre $\approx 2.82 \times 10^{-4}$ voir les figures 5.13 et 5.14. Les oscillations sur les figures 5.13 et 5.14 en point 0 sont causé par le schéma Crank-Nicolson, car ce dernier il est influencé par la non dérivabilité de la fonction pay-off ψ en 0. Cette erreur nous assure la similitude

des valeurs obtenus par Crank-Nicolson et implicite d'Euler par l'algorithme Brennan-Schwartz.

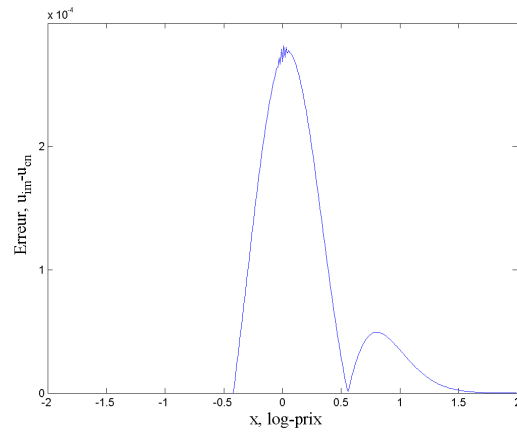


FIGURE 5.13 – La différence en valeur absolue entre la solution approchée par CN et celle IME dans le cas de l’option put.

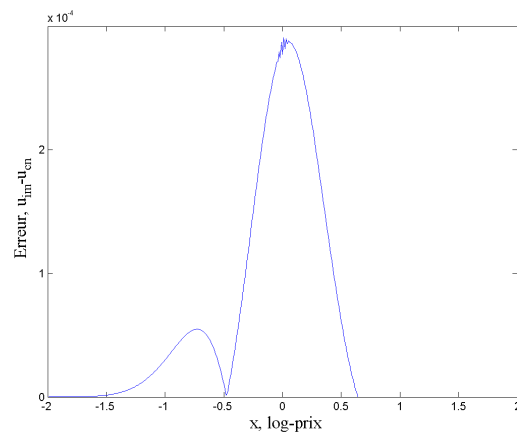


FIGURE 5.14 – L’erreur en valeur absolue entre la solution approchée calculé par CN et celle calculé par IME dans le cas de l’option call.

- La détermination de l’ordre de convergence par rapport à t pour les schémas

Crank-Nicolson et implicite Euler, repose sur le résultat célèbre d'approximation pour une certaine subdivision de pas k on suppose que

$$f_{exact} - f(k) = c_0 k^p,$$

c'est-à-dire, la convergence de $f(k)$ vers f_{exact} est d'ordre p . Comme la solution exact n'est pas connu pour notre cas. Nous allons examiner la variation pour un pas k et $\frac{k}{2}$, alors

$$\begin{aligned} d(k) : &= f(k) - f\left(\frac{k}{2}\right) = c_0 \left(k^p - \frac{k^p}{2^p} \right) \\ &= c_0 \frac{2^p - 1}{2^p} k^p = c_1 k^p \\ \ln(d(k)) &= \ln(c_1) + p \ln(k). \end{aligned}$$

Nous remarquons que, la variable $\ln(d(k))$ s'écrit comme une fonction linéaire en p de coefficient $\ln(k)$. La valeur de p peut être estimée par la méthode de régression linéaire donné par A. Stahel voir [42].

- Pour déterminer l'ordre d'approximation par rapport au temps t , nous prenons ces différentes subdivisions en temps $N = 10, 20, 40, 80, 160$ et 320 , et en fixant la subdivision en espace x , $M = 800$. Les figures 5.15, 5.16, 5.18 et 5.17 sont les courbes de convergence pour les schémas de Crank-Nicolson (CN) et implicite Euler (IM) pour l'option put et call. Sont représentées les erreurs en fonction des subdivisions sur une échelle \log/\log . L'ordre de convergence dans les figures 5.15, 5.16, 5.17 et 5.18 représente la pente des droites.

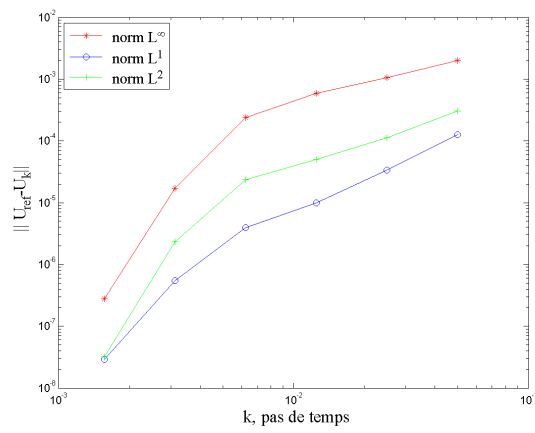


FIGURE 5.15 – Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l’erreur en fonction de k pas du temps issu d’approximation CN pour l’option call.

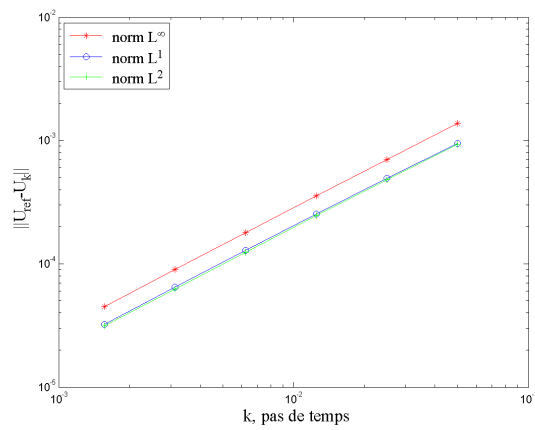


FIGURE 5.16 – Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l’erreur en fonction de k pas du temps issu d’approximation IME pour l’option call.

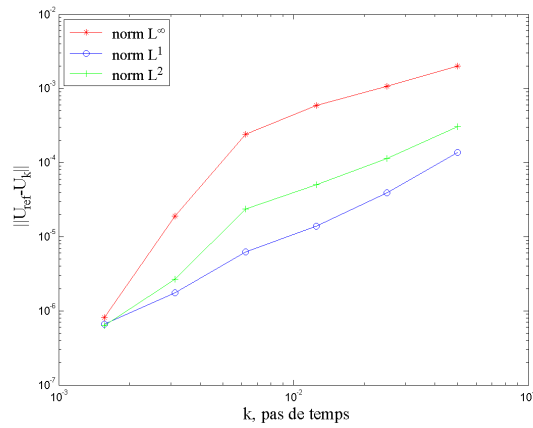


FIGURE 5.17 – Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l’erreur en fonction de k pas du temps issu l’approximation CN pour l’option Put.

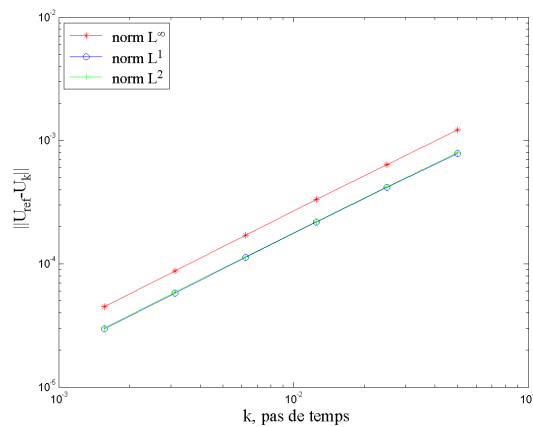


FIGURE 5.18 – Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l’erreur en fonction de k pas du temps issu d’approximation IME pour l’option Put.

Les tableaux 5.3 et 5.4 indiquent l’ordre de convergence p dans le cas de l’option call et put respectivement pour les trois normes L^∞ , L^1 et L^2 :

- Pour l’option call est :

Type	Ordre	L^∞	L^1	L^2
CN	p	2.3788	2.2766	2.3971
IM	p	0.9870	0.9755	0.9797

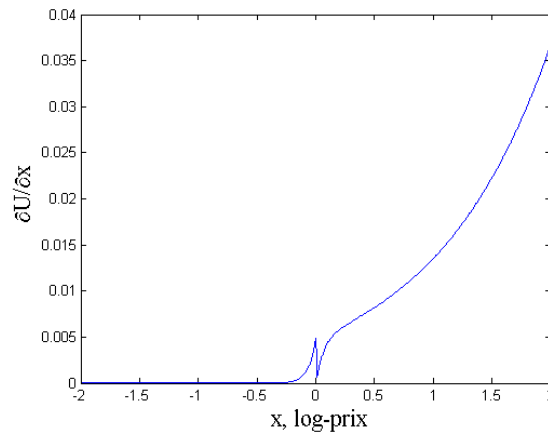
TABLE 5.3 – Ordre de convergence dans le cas de l’option call.

- Pour l’option put est :

Type	Ordre	L^∞	L^1	L^2
CN	p	2.1488	1.5174	1.7683
IM	p	0.9537	0.9480	0.9471

TABLE 5.4 – Ordre de convergence dans le cas de l’option put.

Les valeurs de p donné en tableau 5.3 et 5.4 pour le schéma Crank-Nicolson ne représentent pas réellement le résultat espéré contrairement pour le schéma implicite Euler, cela est dû sur l’influence de la singularité de la fonction payoff ψ en 0 après la première itération, du schéma Crank-Nicolson, en temps t comme on peut le voir sur les figures 5.19 et 5.20

FIGURE 5.19 – La dérivée de la solution, de l’option call, par rapport à x après une itération en temps pour Crank-Nicolson.

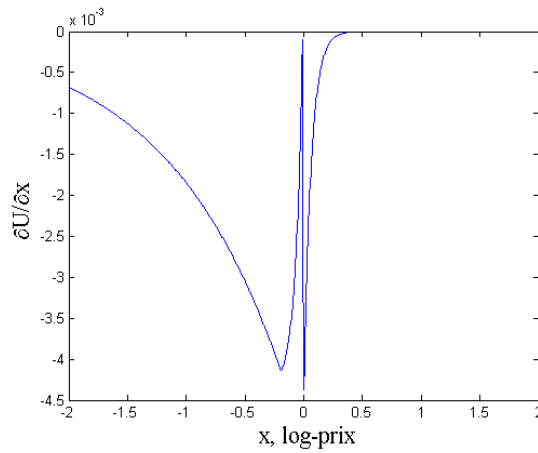


FIGURE 5.20 – La dérivée de la solution, de l’option put, par rapport à x après une itération en temps pour Crank-Nicolson.

- Nous remarquons que l’ordre de convergence pour Crank-Nicolson n’est pas comme on le souhaite sur les figures 5.15 et 5.17. Pour réduire l’influence de l’irrégularité de la condition initial ψ après le premier pas en temps t , R. Rannacher a introduit une technique dans le cas de l’option européenne call (voir [43, 44, 11]) qui nous conduit à des taux convergence stable comme on le voit sur la figure 5.21

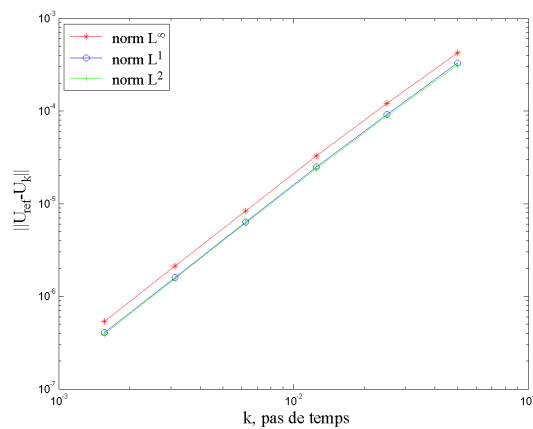


FIGURE 5.21 – Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l’erreur en fonction de k pas du temps issu d’approximation CN avec Rannacher pour l’option call.

Avec les taux de convergence qui détermine les pentes des trois droites

Ordre	L^∞	L^1	L^2
p	1.9324	1.9387	1.9348

TABLE 5.5 – Ordre de convergence pour l’option call avec Rannacher.

Le procédé de Rannacher [43] pour l’option put n’est pas aussi efficace comme l’option call tel la figure 5.22 le montre.

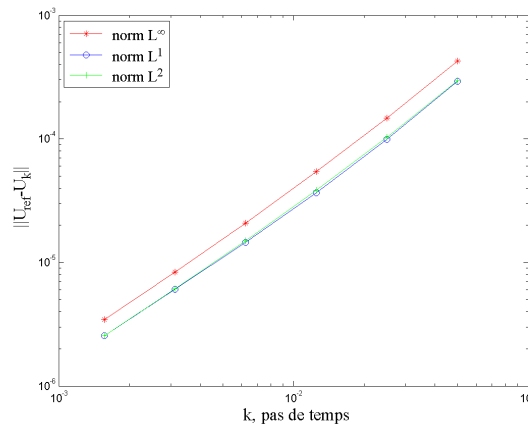


FIGURE 5.22 – Normes L^1 , L^2 et L^∞ de l’erreur en fonction de k pas du temps issu d’approximation CN avec Rannacher pour l’option put.

Les pentes des trois droites est donné en tableau 5.6 suivant

Ordre	L^∞	L^1	L^2
p	1.3887	1.3603	1.3673

TABLE 5.6 – Ordre de convergence pour l’option put avec Rannacher.

Les résultats obtenus pour les taux de convergence après l’utilisation de Rannacher sont stable et proche de la convergence théorique surtout pour l’option call, ceci revient à la régularité plus élevée de la solution de l’option américaine call que celle de l’option put voir la remarque 2.2.1. Ainsi, il est plus

facile d'obtenir un taux de convergence meilleur avec les options américains
call que put.

Conclusion et perspective

L'objectif principal de cette thèse est la justification de l'algorithme de Brennan-Schwartz pour le problème de complémentarité issu de l'approche éléments finis avec les matrices de poids, du problèmes de l'option américaine avec condition au bord Dirichlet non homogène. L'intérêt principal de cette méthode de résolution qui est direct et la prise en considération de l'obstacle.

De toute évidence, l'absence de la solution analytique a compliqué la comparaison des résultats numériques. Il apparaît évident que la solution de référence soit considérées avec un maillage très fine.

Compte tenu des limites de cette étude, nous n'avons pu analyser l'ensemble de ce sujet étendu. Cependant, il nous semblerait intéressant, dans l'avenir, d'étaler la méthode

aux problèmes des options américaines dont les conditions aux limites de Neumann. Une autre piste de recherche future consistera à l'extrapolation de Richardson afin d'assurer une meilleure convergence. En fin, adopté les travaux de Jari Toivanen [11] au cas des éléments finis.

Bibliographie

- [1] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ*, 81(3) :637–654, 1973.
- [2] A. Bensoussan and J.-L. Lions. *Impulse Control and Quasivariational Inequalities*. Gauthier-Villars, Montrouge, 1984.
- [3] A. Bensoussan and J.-L. Lions. *Applications des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique*. Dunod, Paris, 1979.
- [4] Ioannis Karatzas. On the pricing of american options. *Applied Mathematics and Optimisation*, 17 :37–60, 1988.
- [5] P. Wilmott, J. Dewyne, and S. Howison. *The Mathematics of Financial Derivatives, A student Introduction*. Cambridge University Press, 1995.
- [6] R.U. Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer, 2009.
- [7] V.P. Israel and M.A. Rincon. Variational inequalities applied to option market problem. *Applied Mathematics and Computation*, 201 :384–397, 2008.
- [8] Yves Achdou and Olivier Pironneau. *Computational Methods for Option Pricing*, volume 30 of *Frontiers in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2005.

- [9] M.J. Brennan and E.S. Schwartz. The valuation of american put options. *Journal of Finance*, 32 :449–462, 1977.
- [10] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre. Variational inequalities and the pricing of american options. *Acta Applicandae Mathematicae*, 21 :263–289, 1990.
- [11] Samual Ikonnen and Jari Toivannan. Pricing american options using LU decomposition. *Applied Mathematical Sciences*, 1(51) :2529–2551, 2007.
- [12] S. Boulaaras and M. Haiour. L^∞ -asymptotic behavior for a finite element approximation in parabolic quasi-variational inequalities related to impulse control problem, applied mathematics and computation. *Applied Mathematics and Computation*, 217 :6443–6450, 2011.
- [13] L. Feng, V. Linetsky, J.L. Morales, and J. Nocedal. On the solution of complementarity problems arising in american options pricing. *Optimization Methods & Software*, 26 :813–825, 2011.
- [14] Ulrich Eckhardt. *Quadratic Programming by Successive Overrelaxation*. April 1974. Berichte der KFA Jülich.
- [15] M. Haiour A. Stahel S. Madi, M.C. Bouras. Pricing of american options, using the brennan-schwartz algorithm based on finite elements. 201..
- [16] A. Bensoussan. On the theory of option. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2 :139–158, 1984.
- [17] Avner Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications*. ACADIMIC PRESS, INC, 1975.
- [18] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et application*. Masson, Paris, 1983.
- [19] Alois Kufner. *Weighted Sobolev spaces*. Teubner, 1981.
- [20] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Ellipses, Paris, 1997.
- [21] Richard W. Cottle and Jr. Arthur F. Veinott. Polyhedral sets having a least element. *Mathematical Programming*, 3 :238– 249, 1972.

- [22] A. Bensoussan and J.-L. Lions. *Contrôle impulsionnelles et inéquations quasi variationnelles*, volume 6. Dunod, Paris, 1979.
- [23] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre. *Analyse Numérique des Options Américaines*. Cahier du Cerma 9, 1988.
- [24] Karin Mautner. *Numerical treatment of the Black-Scholes variational inequality in computational finance*. 2006.
- [25] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*, volume 2, B : Nonlinear Monotone Operators. Springer, Berlin, 1990.
- [26] J.-C. Hull. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Prentice Hall International, New Jersey, 1997.
- [27] Rüdiger Seydel. *Tools for Computational Finance*. Springer, 5th edition, 2011.
- [28] P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison. *Option Pricing : Mathematical Model and Computation*. Oxford Financial Press, 1993.
- [29] A. Bensoussan R. Glowinski and J.-L. Lions. *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, volume 8. North-Holland, 1981.
- [30] Xiao Lan Zhang. *Analyse numérique des options américaines dans un modèle de diffusion avec des sauts*. Ecole des Ponts ParisTech, 1994.
- [31] Jonas KOKO. *Calcul scientifique avec MATLAB*. Ellipses, Paris, 2009.
- [32] Andreas Stahel. *Numerical Methods*. BFH, 2008. lecture notes, BFH-TI.
- [33] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'école polytechnique, 2005.
- [34] Georges Courtadon. A more accurate finite difference approximation for the valuation of options. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17 No. 5 :697–703, Dec., 1982.
- [35] Roland Glowinsky. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

- [36] Peng Liu. *Numerical Methods For American Option Pricing*. University of Oxford, 2008. Masters thesis.
- [37] C.W. Cryer. The solution of a quadratic programming problem using systematic over-relaxation. *SIAM Journal on Control*, 1971.
- [38] Sacco Riccardo Saleri Fausto Quarteroni, Alfio Maria. *Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications*. Springer, 2004.
- [39] J. Abdeljaoued et H.Lombardi. *Méthodes matricielles : introduction á la complexité algébrique*. Springer, 2003.
- [40] S. Gerschgorin. über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix. *Izv. Akad. Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat., Nauk* 7 :749–754, 1931.
- [41] M. Boulbrachene, M. Haiour, and S. Saadi. L^∞ -estimates for a system of elliptic quasi-variational inequalities. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 24 :1547–1561, 2003.
- [42] Andreas Stahel. *Octave at BFH-TI Biel*. BFH, 2016. lecture notes, BFH-TI.
- [43] R. Rannacher. Finite element solution of diffusion problems with irregular data. *Numerische Mathematik*, 43, 1984.
- [44] Michael B. Giles and Rebecca Carter. Convergence analysis of Crank–Nicolson and Rannacher time-marching. *Journal of Computational Finance*, 9(4), 2006.