UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

THESE de DOCTORAT

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

Présentée par

LAKEHAL Hakim

Titre :

Sur l'existence de solutions non triviales d'un systéme d'équations aux dérivées partielles non linéaires

devant le jury composé de :

Prof. H. SISSAOUI...........Président U.B.M ANNABA

Prof. B.KHODJA ....Directeur de Thése U.B.M ANNABA

Prof. M. HAZI ....Examinateur E.N.S. KOUBA

Prof. A. KADEM ....Examinateur U. SETIF

Prof. N.KECHKAR ....Examinateur U. COSTENTINE A

Prof. F.Z NOURI ....Examinateur U.B.M ANNABA

Remerciements

*Je remercie **Dieu** le tout-puissant, qui m'a donné la force et la patience pour accomplir cette thèse.*
*Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans la confiance, la patience et la générosité de mon directeur de thèse **B. KHODJA** que je tiens à remercier vivement.*
*Monsieur le professeur **H. SISSAOUI** m'a fait le grand honneur de présider le jury. Je l'en remercie trés vivement.*
*Je remercie les professeurs **F.Z NOURI**, **A. KADEM** , **M. HAZI** et **N. KECHKAR** de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.*
*Je remercie le professeur **T.Gallouët** de m'avoir donné l'occasion de séjourner au Cmi de Marseille et participer à son groupe de travail. C'est grâce à **Thierry** que j'ai abordé les équations de convection-diffusion non linéaires.*

Dédicase

Ce mémoire est dédié à mes parents, à ma femme et à mes enfants. Le travail n'aurait pu aboutir sans leur inépuisable soutien, et leur encouragement à aller au bout de ma tache. A mes frères, mes sœurs et à toute ma famille. .

Résumé

Nous abordons dans cette thèse deux types de problèmes : une équation de convection-diffusion non linéaire avec des conditions de Neumann au bord et un système elliptique semi linéaire d'équations aux dérivées partielles soumis à des conditions de Dirichlet. Ces résultats sont obtenus grâce au théorème du degré topologique de Leray-Schauder et quelques outils d'analyse fonctionnelle.

Mots clés : Degré topologique, Théorème du point fixe de Schauder, Problèmes aux limites.

Abstract

In this thesis, we present some results of existence of non trivial solutions for a class of semi linear elliptic systems of partial differential equations, in a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, with zero Dirichlet boundary conditions.

These results are obtained by using, Leray-Schauder's topological degree and some tools of functional analysis.

Key words : Topological Degree, Schauder's fixed point thoerem, Homotopy, Boundary value Problems.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse mathématique des systèmes et des équations aux dérivées partielles de type elliptique. En règle générale ces équatons elliptiques correspondent à des modèles physiques stationnaires c'est à dire indépendant du temps. Les équations différentielles aux dérivées partielles sont d'une importance cruciale dans la modélisation et la déscription des phénomènes : physiques, dynamique de fluide et mécaniques. Le but de ce travail est d'appliquer la méthode du degré topologique et quelques outils d'analyse fonctionnalle pour montrer l'existence de solutions faibles de porblèmes elliptiques semi linéaires. Les non linéarités utilisées sont liées à la technique utilisée et dépendent d'une méthode à une autre. Dans ce manuscrit

Le première partie de ce travail consiste en une étude d'équations elliptiques non coercitives. On sait qu'une bonne manière d'aborder des équations aux dérivées partielles de la formes :

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + div(uW) + bu = f(x) \text{ dans } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \tag{P.1}$$

(avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$) est de considérer une formulation dite "Variationnelle", de ces problèmes faisant intervenir la forme bilinéaire

$$a(u,v)=\int_\Omega A\nabla u.\nabla v-\int_\Omega uW.\nabla v+\int_\Omega buv$$

sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. le théorème de Lax-Milgram donne alors sous l'hypothèse que a est continue coercive l'existence et de l'uncité de la solution. Il existe un autre outil, le théorème de Leray-Lions qui donne, sinon l'uncité du moins l'existence d'une solution sous une hypothèse de coercivité sur a plus faible. On sait bien que ce genre d'hypothèse n'est pas totalement dispensable, la difficulté principale est due à l'absence de la coercivité. Un résutat de l'exisentce et de l'unicité d'une solution faible au problème (P.1) sans hypothèse sur $div(W)$, a été établi pas Droniou.J [17].

Le premier Chapitre est un préliminaire, qui comporte des résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est organisé comme suit : en premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev et les opérateurs compactes qui jouent un rôle essentiel dans les Chapitres 2 et 3. Nous introduisons enfin le degré topologique outil important pour la résolution des équations aux dérivées partielles semi linéaires.

Chapitre 2 : Nous prouvons dans ce chapitre, la question de l'existence et de l'unicité d'une solution faible du problème de convection - diffusion non linéaire P.1. Lorsque le terme de diffusion linéaire (i.e $div(\nabla u)$) et le terme de convection non linéaire (i.e $-div(W\varphi(u))$ et le terme de réaction est nul (i.e $bu+f(x)=0$).

La méthode employée pour obtenir ce résultat fait appel au degré topologique de Leray- Schaudre. Grâce à cet outil, prouver l'exisence d'une solution à P.1 se ramène à obtenir des estimations à priori sur les solutions de cette équation. En fait, nous ne nous limitons pas au cas de condition au bord de type Dirichlet, nous considérons une condition au bord de type Neumann.

La deuxième partie concerne l'existence de solutions non triviales d'une classe de systèmes elliptiques semi linéaire de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v) \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta v = g(x, u, v) \text{ dans } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

soumis à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Cette question d'actualité a fait récemment l'objet de plusieurs travaux où diférentes situations sur les structures des non linéarités f et g ont été étudiées ; voir par exemple [7], [21], [22], [23] et [30], ainsi que leurs références. L'étude de ces problèmes est motivée par ses diverses applications, notamment dans les équations de réaction-difusion (où le cas stationnaire est un système elliptique) et les fluides newtoniens (voir [12]).

Chapitre 3 : Le chapitre 3 contient des résultats d'existence de solutions non triviales d'une classe de systèmes elliptiques semi linéaire en état de résonnance. Plus précisément, nous nous intéressons au système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = au + f_0(x,u,v) + h_1\,(x) \;\text{ dans } \Omega, \\ \\ -\Delta v = bv + g_0(x,u,v) + h_2\,(x) \;\text{ dans } \Omega, \\ \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P.2}$$

pour $h = (h_1, h_2) \in (L^2(\Omega))^2$ donnée, et $a, b \in \sigma(-\Delta)$ le spectre de $-\Delta$. On cherche à donner des conditions sur (h_1, h_2) pour assurer l'existence de solutions. On retrouve ainsi un résultat bien connu [37], lorsque $a, b \notin \sigma(-\Delta)$, où les estimations à priori des solutions éventuelles sont faciles à obtenir, par une méthode reposant sur l'invariance par homotopie du degré topologique de Leray-Schauder .

Finalement, parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisi à la fin de ce travail un nombre assez restreint permettant au lecteur interéssé d'avoir accés à quelques sources que nous avons utilisées pour rédiger cette thèse.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous traitons deux parties

Dans la première nous rappelons divers résultats généraux qui ont servi dans cette thése et qui pour la plupart sont accompagnés de références. Dans la deuxième partie nous introduisons la méthode du degré topologique.

1.1 Rappels et complément d'analyse

Nous rappelons ici les notions essentielles sur les espaces fonctionnels, particulièrement, les espaces L^p et les espaces de Sobolev. Nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats utiles pour les chapitres suivants.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, , on note

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}.$$

$C^m(\Omega)$: L'espace des fonctions m fois continument différentiables sur Ω.

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$$

$$C_c(\mathbb{R}^m) = \{f \in C(\mathbb{R}^m) \text{ telle que } f(x) = 0,\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^m \backslash K \text{ où } K\ \text{ est un compact}\}.$$

$D(\mathbb{R}^m)$ L'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^m$ à support compact dans $\mathbb{R}^m$ (dit aussi, espace des fonctions test).

1.1.1 Espaces L^p

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue ; on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}/f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

On définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ est mesurable et } \exists C \geq 0 \ / \ |f(x)| \leq C, \ \mu \text{ - p.p. sur } \Omega\}$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \quad \mu - \text{p.p}\}.$$

est la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

L^1_{loc} désigne l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω, i.e

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : f \in L^1(K) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega\}.$$

Structure des espaces $L^p(\Omega)$

Proposition 1.1 [8] (1) *L'espace* $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$

(2) *L 'espace* $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est séparable pour* $1 \leq p < \infty$

(3) *L 'espace* $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Inégalité de Hölder [8]

Soient $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *alors*

$$fg \in L^1(\Omega) \ \textit{et} \ \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Inégalité de Minkowski [8]

Soient $f, g \in L^p(\Omega)$, *avec* $p \geq 1$ *alors*

$$f + g \in L^p(\Omega) \ et \ \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Inégalité de Young [8]

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}, \ \forall a \geq 0, \forall b \geq 0.$$

Théorème 1.1 [8] (***Convergence dominée de lebesgue***)

Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions* $L^1(\Omega)$ *convergeant presque partout vers une fonction mesurable* f *on suppose qu'il existe* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que tout* $n \geq 1$ *on ait* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω, *alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^1} = 0$$

Lemme 1.1 [8]

Soient $(f_n)_{n\in N}$ *une suite de* $L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$ *tels que*

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

alors il existe une sous -suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que :*

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *, presque partout sur* Ω

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ *et presque partout sur* Ω *avec* $h \in L^p(\Omega)$

Dérivée faible

Définition 1.1 *Soit $1 \leq i \leq n$, on dit qu'une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivable dans la direction i au sens fiable s'il existe $D_i f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = -\int_\Omega D_i f(x) \varphi(x) dx.$$

Si un tel $D_i f$ existe, il est unique, néanmoins il n'existe pas toujours

1.1.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels (c'est à dire des espaces constitués de fonctions) dont les puissances et les dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible) sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont des espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets). Le fait qu'ils soient complets est trés important pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ on définit la fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p}$$

$$\|u\|_\infty = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty ;$$

pour toute fonction u qui donne un sens à cette écriture .

On définit l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables $u \in L^p(\Omega)$ telles que la dérivée au sens faible $D^\alpha u, (0 \leq |\alpha| \leq m)$ appartient à $L^p(\Omega)$ et l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On associe à l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ la norme $\|.\|_{m,p}$ et on a alors la proposition suivante

Proposition 1.2 [8]

i)$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$

ii)$W^{m,p}(\Omega)$ est séparable,pour $1 \leq p < +\infty$

iii)$W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif, pour $1 < p < +\infty$,

pour $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Remarque 1.1

Dans $W^{1,p}(\Omega)$ l'application

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

est une norme équivalente à $\|.\|_{1,p}$

Formule de Green

Avant de donner la formule de Green, examinons d'abord la formule d'intégration par partie

Proposition 1.3 [8] (***formule d'intégration par partie***)

Soient u, v deux fonctions de $H^1(\Omega)$ et $\partial\Omega \in C^1$, alors pour tout $1 \leq i \leq N$ a lieu la formule d'intégration par partie

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx + \int_{\partial\Omega} u(s)v(s)n_i ds.$$

où $n_i = \cos(n, x_i)$ est le cosinus de l'angle de la normale extérieure à $\partial\Omega$ et de l'axe des x_i.

Si $v \in H^1(\Omega)$ et si les composantes u_i du vecteur $\overrightarrow{u}$ appartiennent à $H^1(\Omega)$, alors a lieu l'égalité :

$$\int_\Omega div(\overrightarrow{u}(x)).v(x)dx = -\int_\Omega (\overrightarrow{u}(x), \nabla v(x))dx + \int_{\partial\Omega} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n})vds$$

Enfin, en remarquant que

$$\Delta u(x) = div(\nabla \overrightarrow{u})$$

on obtient la $2^{\grave{e}me}$ formule de Green

Proposition 1.4 [29] *Pour $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega \Delta u(x).v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.vds$$

Lemme 1.2 [8] (***Inégalité de Poincaré)***) *Soit Ω un domaine borné. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Proposition 1.5 [29] *Soit Ω un ouvert borné et connexe de classe C^1. Alors si $\omega \subset \Omega$ est mesurable avec $\lambda_N(\omega) > 0$ il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle*

$$\int_\Omega (u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u)^2 dx \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \forall u \in H^1(\Omega)$$

.

Cette formule est connue sous le nom d'inégalité de Poincaré-Wirtinger.

Théorème 1.2 [29]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ satisfaisant la propriété suivante

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty, p^* = \frac{Np}{N-p}$

1) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ Alors $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$ avec $q \in [p, p^*]\,, \frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{m}{N}$

2) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ Alors $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$ avec $q \in [p, \infty]$

3) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0,$ Alors $W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$

Théorème de Stampacchia sur la composition

Pour établir des estimations sur les solutions des problèmes elliptiques que nous étudierons, nous serons amenés à considérer $\varphi(u)$ comme fonction-test, avec φ :

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Les hypothèses sur* φ *nous permettant d'assurer que* $\varphi(u)$ *est encore dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *et l'objet du théorème suivant.*

Théorème 1.3 [29] (***Stampacchia***) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $1 \leq p < \infty$. *Soit* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue,* C^1 *par morceaux telle que* $\varphi(0) = 0$ *et* φ' *bornée sur* $\mathbb{R}$. *Alors* $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $\nabla\varphi(u) = \varphi'(u)\nabla u$ *p.p.*

Théorème 1.4 [29] ***(Rellich)*** *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ *et* $1 \leq p < +\infty$. *Toute partie borné e de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est relativement compacte dans* $L^p(\Omega)$. *Ceci revient à dire que de toute suite bornée de* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *on peut extraire une sous-suite qui converge dans* $L^p(\Omega)$.

Le théorème reste vrai avec $W^{1,p}(\Omega)$ *à condition de supposer la frontière lipschitzienne.*

Théorème 1.5 [8] ***(Lax-Milgram)*** *Soit* L *une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert* H *et* a *une forme bilinéaire continue et coercive, alors il existe une et une seule fonction* $u \in H$ *telle que :*

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Si de plus la forme bilinéaire a *est symétrique, alors* u *est l'unique élément de* H *qui minimise la fonctionnelle* $J : H \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v) \quad \text{pour tout } v \in H,$$

c.à.d

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \;\; et \; J(u) < J(v) \;\; si \; u \neq v.$$

Définition 1.2 *Soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable à valeur réelle. Considérons l'application*

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto f(u);$$

où $f(u)$ *est une fonction à valeur réelle définie sur* Ω *par :*

$$f(u)(x) = f(x, u(x)).$$

L'application f *est appellée opérateur de Nemitski assiciée à* f.

Théorème 1.6 [29] *Soient* $\alpha, \beta \geq 1,\ f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaisant :*

(i) $f(x,t)$ *mesurable par rapport à* $x \in \Omega$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et continue par rapport à* $t \in \mathbb{R}$ *pour presque partout* $x \in \Omega$.

(ii) *Il existe* $a_1 \in L^B(\Omega)$ *et* $a_2 > 0$ *tel que*

$$|f(x,u)| \leq a_1(x) + a_2(x)\,|u|^{\frac{\alpha}{\beta}},\ \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad (\alpha, \beta \geq 1).$$

Alors l'opérateur de Nemitski f *est continue de* $L^{\alpha}(\Omega)$ *à* $L^B(\Omega)$.

Remarque 1.2 *La condition* (i) *est appellée condition de Carathéodory et* $f(x,t)$ *satisfaisant* (i) *est appellée fonction de Carathéodory.*

1.2 Degré topologique

Nous abordons dans cette deuxième partie une méthode de compacité pour obtenir des résulats d'existence de solution pour des problèmes elliptiques non linéaires.

1.2.1 Degré de Brouwer et propriétés

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N, N \geq 1$. *Soit* $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *et* $y \in \mathbb{R}^N$. *On cherche à montrer qu'il existe* $x \in \bar{\Omega}$ *tel que* $f(x) = y$. *On commence par donner l'existence et l'unicité d'une application, appelée dégre topologique, en dimension finie puis on l'étend à la dimension infinie. Cette application nous permet parfois d'obtenir des résultats d'existence de solutions.*

Définition 1.3 *Soient* Ω *un ouvert borné et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $x_0 \in \Omega$ *est dit point régulièr si* $J_f(x_0) \neq 0$ *(ou* $J_f(x_0) = \det Df(x_0)$ *avec* $Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}(x_0)$*), Dans le cas contraire,* x_0 *est appelé point critique ou point singulier .*

Désignons par

$$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega : J_f(x_0) = 0\}$$

l'ensemble des points singuliers de f *sur* Ω

Définition 1.4 (**Cas régulier**) *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et* $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *une fonction définie de* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, pour* $y \notin f(\partial\Omega)$ *une valeur régulière, on dèfinit le degré de* f *au point* y *par*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{f(x_i)=y, i=\overline{1.n}} sgn(\det D_x f(x_i)).$$

Définition 1.5 *Soit* $N \geq 1$*. On note* $\mathcal{A}$ *l'ensemble des triplets* (f, Ω, y) *où* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*,* $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *et* $y \in \mathbb{R}^N$ *t.q* $y \notin \{f(x), x \in \partial\Omega\}$

Théorème 1.7 [25] (***Brouwer***) *Soit* $N \geq 1$ *et* $\mathcal{A}$ *donné par la définition 1.5. Il existe alors une application* d *de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathbb{Z}$ *appelée (degré topologique), vérifiant les trois proprités suivantes :*

- *Normalisation :* $d\left(Id, \Omega, y\right) = 1,$ *si* $y \in \Omega$.
- *Degré d'une union :* $d\left(f, \Omega, y\right) = d\left(f, \Omega_1, y\right) + d\left(f, \Omega_2, y\right),$ *si* $\Omega_1 \bigcup \Omega_2 \subset \Omega, \Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$ *et* $y \notin \{f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \bigcup \Omega_2\}$.
- *Invariance par homotopie : Si* $h \in C([0,1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^N), y \in C([0,1], \mathbb{R}^N)$ *et* $y(t) \notin \{h(t,x), x \in \partial\Omega\}$ (*pour tout* $t \in [0,1]$) *on a alors* $d\left(h\left(t,.\right), \Omega, y\right) = d\left(h\left(0,.\right), \Omega, y(0)\right)$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Théorème du point fixe de Brouwer 1912 :

Une première conséquence de cette méthode de dergé topologique est le théorème de point fixe de Brouwer que nous donnons maintenant.

Théorème 1.8 [25] (***point fixe de Brouwer***)

Soit $N \geq 1, R > 0$ *et* $f \in C(B_R, B_R)$ *avec* $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| \leq R\}$ *(on a muni* $\mathbb{R}^N$ *d'une norme noté* $\|.\|$*.) Alors* f *admet un point fixe, c'est à dire il existe* $x \in B_R$ *t.q.* $f(x) = x$*.*

1.2.2 Degré de Leray-Schauder et propriétés

le théorème précédent a été généralisé (dès 1934) en dimension infinie par Leray et Schauder sous une hypothése de compacité. Donnons d'abord une définition

Définition 1.6 *Soit* E *un espace de Banach,* B *une partie de* E *et* f *une application de* B *dans* E*. On dit que* f *est compacte (la terminologie de Leray-Schauder est différente, ils utilisent l'expression "complètement continue"), si* f *vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. f *est continue*

2. $\{f(x), x \in C\}$ *est relativement compacte dans* E *pour tout partie* C *bornée de* B*.*

Remarque 1.3 *1- la définition précédente est équivalente de dire que, pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *bornée dans* B *on peut extraire de* $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite qui converge dans* E*.*

2- On peut remarquer, dans la définition précédente, que si f *est linéaire (et* $B = E$*) la deuxième condition entraîne la première. Mais ceci est faux pour des applications non linéaires.*

Voici le résultat principal de cette partie, qui énonce l'existence du degré de Leray-Schauder en même temps que ses propriétés principales, tout à fait similaires à celles du degré de Brouwer.

Définition 1.7 *Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets $(I - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné dans E, f est une application compacte de $\bar{\Omega}$ dans E et $y \in E$ t.q $y \notin \{x - f(x), x \in \partial\Omega\}$*

Théorème 1.9 [25] (***Leray-Schauder***)

Soit E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ donné par la définition 1.7. Il existe une application d de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$ appelée (degré topologique), vérifiant les trois propritées suivantes :

- *Normalisation : $d\left(Id, \Omega, y\right) = 1$, si $y \in \Omega$.*
- *Degré d'une union : $d\left(I - f, \Omega, y\right) = d\left(I - f, \Omega_1, y\right) + d\left(I - f, \Omega_2, y\right)$, si $\Omega_1 \bigcup \Omega_2 \subset \Omega, \Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$ et $y \notin \{x - f(x), x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_1 \bigcup \Omega_2\}$.*
- *Invariance par homotopie : Si h est une application complètement continue de $[0,1] \times \bar{\Omega}$dans E, $y \in C([0,1], E)$ et $y(t) \notin \{x - h(t,x), x \in \partial\Omega\}$(pour tout $t \in [0,1]$), on a alors $d\left(I - h\left(t, .\right), \Omega, y\right) = d\left(I - h\left(0, .\right), \Omega, y(0)\right)$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Définition 1.8 *Une application de la forme*

$$f = I - h$$

où I est l'application identité et h est une application compacte est dite perturbation compacte de l'identité (ou application de Leray-Schauder).

Remarque 1.4 *La propriété essentielle du degré topologique est :*

Si $(I-f,\Omega,y)\in\mathcal{A}$ *et* $d\,(I-f,\Omega,y)\neq 0$, *alors il existe* $x\in\Omega$ *tel que* $x-f(x)=y$.

Définition 1.9 *Un espace métrique* (X,d) *est connexe s'il n'existe pas de sous ensemble de* X *autre que* X *et* $\emptyset$ *qui soit à la fois ouvert et fermé. Un sous ensemble* $Y\subset X$ *d'un espace métrique* (X,d) *est connexe si* (Y,d), *muni de la distance induite est un espace métrique connexe.*

Proposition 1.6 [25] *1)- Un espace métrique* (X,d) *est connexe si et seulement si :*

$X=A\bigcup B$ *où* A *et* B *sont des ouverts de* X *disjoints* $\Rightarrow A$ *ou* B *est vide.*

$2)-$ *Une partie* $Y\subset X$ *est connexe si et seulement si :*

$Y=A\bigcup B$ *où* A *et* B *sont des ouverts de* Y *disjoints* $\Rightarrow A$ *ouB est vide.*

Définition 1.10 *On dit que le système :*

$$\begin{cases}-\triangle u=f(x,u,v)\ \text{dans}\ \Omega\\ \\ -\triangle v=g(x,u,v)\ \text{dans}\ \Omega\end{cases}\tag{1.1}$$

est variationnel si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) Il existe une fonction differentiable $F(x,u,v)$ *pour* $(x,u,v)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *telle que*

$$\frac{\partial F(x,u,v)}{\partial u}=f(x,u,v),\ \ et\ \frac{\partial F(x,u,v)}{\partial v}=g(x,u,v),$$

Dans ce cas, on dit que le système 1.1 est de type Gradient.

ii) Il existe une fonction differentiable $H(x,u,v)$ pour $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = f(x,u,v), \text{ et } \frac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = g(x,u,v),$$

Dans ce cas, on dit que le système 1.1 est de type Hamiltonien.

Théorème spéctrale

Rappelons que l'opérateur $(-\triangle)$, donnée par

$$D(-\triangle) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega), \quad -\triangle u \in L^2(\Omega) \right\}$$

définit un opérateur inverse et compact sur $L^2(\Omega)$.

$(-\triangle)$ est appellé l'opérateur de Laplace-Dirichlet.

Théorème 1.10 [29] *L'opérateur $(-\triangle)$ a une famille dénombrable de valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qu'on peut écrire comme une suite croissante de nombres positifes qui tend vers $+\infty$ si $n \to +\infty$:*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$$

Remarque 1.5 *Chaque valeur propre est répéteé un nombre de fois égale à sa multiplicité (qui est finie).*

Théorème 1.11 [29] *Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ définie par*

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H_0^1, v \neq 0} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx}{\int\limits_\Omega |v(x)|^2 \, dx}$$

équivalant à

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int\limits_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx : \int\limits_\Omega |v(x)|^2 \, dx = 1, v \in H_0^1 (\Omega), v \neq 0 \right\}$$

λ_1 *est la première valeur propre de l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet nulles sur le bord.*

Chapitre 2

Etude d'un problème de Convection-diffusion non linéaire avec condition de Neumann

2.1 Introduction et Résultats Principaux

On propose dans ce chapitre une étude d'une équation de convection-diffusion non linéaire avec la condition de Neumann nulle sur le bord.

Soit Ω *un ouvert borné connexe de* $\mathbb{R}^N$ *(*$N = 2$ *ou* 3*), à frontière lipschitzienne, on* *cherche une fonction* $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\begin{cases} -\triangle u + div(W\varphi(u)) = 0 \ dans\ \Omega, \\ \\ -\nabla u \cdot \overrightarrow{n} + W\varphi(u) \cdot \overrightarrow{n} = 0 \ sur\ \partial\Omega, \\ \\ \displaystyle\int_\Omega u(x)dx = M, \end{cases} \tag{2.1}$$

où W *est donné sur* Ω, $\frac{\partial u}{\partial n}$ *désigne la dérivée normale extérieure de* u, *c'est à dire* $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \overrightarrow{n}$ *où* $\overrightarrow{n} = (n_1, n_2, ...n_N)$ *est le vecteur unitaire de la normale extérieure à* $\partial\Omega$, *et* $W\varphi(u) \cdot \overrightarrow{n} = \sum_{i=1}^{i=N} \varphi(u) W_i \cdot \overrightarrow{n_i}$ *où* $W = (W_1, W_2, ..., W_N) \in (L^p(\Omega))^N$, *pour tout* $p > N$, *la quantité* $-\nabla u \cdot \overrightarrow{n} + W\varphi(u) \cdot \overrightarrow{n}$ *s'appelle la condition de Neumann.*

Le but de ce chapitre est de montrer l'existence, l'unicité de la solution faible au problème (2.1), et sa positivité. Cette équation est non linéaire à cause du terme de convection.

Sous l'hypothèse $W \in (L^p(\Omega))^N$ *pour tout* $p > N$, *la formulation faible de ce problème est*

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_\Omega \varphi(u(x)) W(x) \nabla v(x) dx = 0, \ \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.2}$$

Pour φ *une fonction lipschitzienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\varphi(0) = 0$, *i.e il existe une constante* $L > 0$ *telle que*

$$|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Nous donnous le resultat suivant.

Lemme 2.1 *Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $W \in (L^p(\Omega))^N$, pour tout $p > N$.*

Alors on a

$$\varphi(u)W \in (L^2(\Omega))^N.$$

Preuve 2.1

Le théorème d'injection de Sobolev, donne $u \in L^6(\Omega)$, si $N = 3$ et que $u \in L^r(\Omega)$, pour tout $r \in [1, \infty[$, si $N = 2$. Comme φ est une fonction lipschitzienne. On déduit aussi que $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$, si $N = 3$ et $\varphi(u) \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [1, \infty[$ si $N = 2$.

Pour $N = 3$, on a $W \in (L^3(\Omega))^3$ et $\varphi(u) \in L^6(\Omega)$, on obtient alors $W\varphi(u) \in (L^2(\Omega))^3$

Pour $N = 2$, on a $W \in (L^p(\Omega))^2$ et $\varphi(u) \in L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)$, on obtient alors $W\varphi(u) \in (L^2(\Omega))^2$ $\Diamond$

Montrons à présent L'équivalence des normes, $\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ et $\||\nabla u|\|_{L^1(\Omega)}$ pour tout $u \in W_\omega$.

Lemme 2.2 *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne. Soit $\omega \subset \Omega$ un ensemble mesurable de mesure de Lebesgue positive. Définissons l'ensemble W_ω par :*

$$W_\omega = \{u \in W^{1,1}(\Omega) \text{ telle que } u = 0 \text{ p.p. dans } \omega\}.$$

Alors il existe C ne dépond que de Ω et ω tel que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\||\nabla u|\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W_\omega \text{ et } 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}. \tag{2.3}$$

Preuve 2.2

On veut démontrer 2.3 pour $p = 1^\star = N/(N-1)$. D'aprés l'injection de Sobolev, il est connu qu'il existe C_s ne dépond que de Ω tel que

$$\|u\|_{L^{1^\star}(\Omega)} \leq C_s\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W^{1,1}(\Omega).$$

Pour montrer que $\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ est équivalente à $\||\nabla u|\|_{L^1(\Omega)}$, pour tout $u \in W_\omega$, il suffit donc de montrer qu'il existe C_2 ne dépend que de Ω et ω tel que

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} \leq C_2\||\nabla u|\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } u \in W_\omega. \tag{2.4}$$

Pour montrer 2.4, on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite d'éléments de W_ω, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} > n\||\nabla u_n|\|_{L^1(\Omega)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

En remplaçant u_n par $u_n/\|u_n\|_{L^1(\Omega)}$, on peut supposer $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$. On a alors aussi $\||\nabla u_n|\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{n}$. ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$, Par le théorème de compacité (le théorème de Rellich) on en déduit que la suite u_n est relativement compate dans $L^1(\Omega)$. Donc, on peut supposer (après extraction d'une sous suite) qu'il existe $u \in L^1(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^1(\Omega)$ quand $n \to \infty$.

Comme $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} = 1$ on a aussi $\|u\|_{L^1(\Omega)} = 1$. Or de $\||\nabla u_n|\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{n}$ on déduit $\nabla u_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)^N$, on a donc $\nabla u = 0$ p.p. dans Ω (connexe), u est alors une fonction constante. Comme $u_n \to u$ dans $W^{1,1}(\Omega)$ et $u_n \in W_\omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a aussi $u \in W_w$ et donc $u = 0$ p.p. dans ω . On en déduit que $u = 0$ p.p dans Ω. Ce qui est impossible car $\|u\|_{L^1(\Omega)} = 1$. ce qui conclut la preuve de Lemme 2.2 $\diamondsuit$

Nous donnons un résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 2.1 *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N = 2$ ou $3)$ à frontière lipschitzienne. Soit $p > N$, $W \in L^p(\Omega)^N$ et $M \geq 0$. Alors, il existe une unique solution du problème 2.2, avec la condition $\displaystyle\int_\Omega u(x)dx = M$.*

La preuve de ce théorème est divisée en 3 étapes.

2.2 Unicité et positivité de la solution

Commençons à prouver que toute solution de 2.2 a un signe constant.

Lemme 2.3 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.1, le problème 2.2 admet une solution unique,et positive.*

Preuve 2.3

Soit u la solution de 2.2 avec $\displaystyle\int_\Omega u(x)dx = M$. Pour démontrer que $u > 0$ p.p. si

$M>0$, on raisonne par l'absurde. Notons $\Omega_- = \{x \in \Omega : u(x) \leq 0\}$ et on suppose que $l_N(\Omega_-) > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction de troncature T_n défine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $T_n(s) = \min\{\frac{1}{n}, \max\{s, 0\}\}$. On sait par le théorème de Stampacchia que $T_n(u) \in H^1(\Omega)$ pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ et

$$\nabla T_n(u) = 1_{0<u<\frac{1}{n}} \nabla u \ p.p. \ dans \ \Omega.$$

On peut prendre cette fonction comme fonction-test $v = T_n(u)$ dans 2.2 et obtenir

$$\int_\Omega |\nabla T_n(u)|^2 dx = \int_\Omega \varphi(u) W \cdot \nabla T_n(u) dx,$$

soit encore, en posant $A_{\frac{1}{n}} = \{x \in \Omega : 0 < u(x) < \frac{1}{n}\}$

alors

$$\int_{A_{\frac{1}{n}}} |\nabla u|^2 dx = \int_{A_{\frac{1}{n}}} \varphi(u) W \cdot \nabla u dx,$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz, et φ lipschitzienne on obtient donc :

$$\int_{A_{\frac{1}{n}}} |\nabla u|^2 dx \leq L \frac{a_n}{n} \Big(\int_{A_{\frac{1}{n}}} |\nabla u|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

avec

$$a_n = \Big(\int_{0<u<\frac{1}{n}} |W|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}},$$

ou encore

$$\|\nabla T_n(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq L \frac{a_n}{n},$$

comme $H^1(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ *on a* $T_n(u) \in H^1(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$.

On peut voir que $A_{\frac{1}{n+1}} \subset A_{\frac{1}{n}}$ *et* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}} = \emptyset$, *donc* $l_N(A_{\frac{1}{n}}) = 0$, *lorsque* $n \to \infty$ *(par continuité décroissante d'une mesure).*

Comme $W \in L^2(\Omega)^N$ *on en déduit que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Utilisant le fait que* $\|z\|_{L^1(\Omega)} \leq \|z\|_{L^2(\Omega)} l_N(\Omega)^{1/2}$, *on obtient*

$$\|\nabla T_n(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\nabla T_n(u)\|_{L^2(\Omega)} l_N(\Omega)^{1/2} \leq L\frac{a_n}{n} l_N(\Omega)^{1/2}.$$

Remarquons d'abord que $T_n(u) = 0$ *p.p. sur* Ω_-. *Si* $l_N(\Omega_-) > 0$, *le lemme 2.2 donne l'existence de* C, *ne dépendant que de* Ω *et* ω *tel que*

$$\|T_n(u)\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|\nabla T_n(u)\|_{L^1(\Omega)}.$$

En remarquant que

$$\|T_n(u)\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega T_n(u)dx \geq \int_{B_n} \frac{1}{n}dx \geq \frac{1}{n} l_N(B_{\frac{1}{n}}),$$

où $B_{\frac{1}{n}} = \{x \in \Omega, u(x) \geq \frac{1}{n}\}$

on a aussi $B_{\frac{1}{n+1}} \supset B_{\frac{1}{n}}$ *et* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_{\frac{1}{n}} = \{u > 0\}$, *donc* $\lim_{n\to+\infty} l_N(B_{\frac{1}{n}}) = l_N\{u > 0\}$, *(par continuité croissante d'une mesure), comme*

$$l_N(B_{\frac{1}{n}}) \leq LCa_n l_N(\Omega)^{1/2}.$$

en passant à la limite lorsque n *tend vers* $+\infty$, *on obtient* $l_N(\{u > 0\}) = 0$, *c.à.d* $u \leq 0$ *p.p.*.

Si $M > 0$, il est impossible d'avoir $\int_\Omega u(x)dx = M > 0$. Alors, on conclut que $l_N(\Omega_-) = 0$, qui donne $u > 0$ p.p. dans Ω.
Si $M = 0$, on a $\int_\Omega udx = M = 0$, et alors d'après $u \leq 0$ p.p. on conclut que $u = 0$ p.p. dans Ω.
Maintenant il est facile de démontrer l'unicité de la solution de 2.2 avec $\int_\Omega udx = M$. Soit u_1 et u_2 deux solutions de 2.2 avec $\int_\Omega u_1dx = \int_\Omega u_2dx = M$. On pose $u = u_1 - u_2$. Alors, $\int_\Omega udx = 0$ qui donne $u = 0$ p.p., qui est le résultat de l'unicité désiré$\Diamond$

2.3 Estimation à priori

Lemme 2.4 *Soit $A > 0$, φ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe C ne dépondant que de A, p, M,L et Ω tel que, si u est une solution de 2.2 avec $\int_\Omega u(x)dx = M$, on a*

$$\||W|\|_{L^p(\Omega)} \leq A \Rightarrow \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Preuve 2.4

Soit $A > 0$ et supposons que $\||W|\|_{L^p(\Omega)} \leq A$. Soit u une solution de 2.2 avec $\int_\Omega udx = M$. on prend $v = u$ dans 2.2 et en utilisant l'inégalité de Hölder avec $q = \frac{2p}{p-2}$ (qui donne $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$) on obtient

$$\||\nabla u|\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq L\||W|\|_{L^p(\Omega)} \|u\|_{L^q(\Omega)} \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.5}$$

on choisit $\bar{q}$ tel que $q < \bar{q} < +\infty$ si $N = 2$ et $\bar{q} = 6$ si $N = 3$ (ce qui donne $q < \bar{q}$). Par l'inégalité de Sobolev , il existe une constante $C_s > 0$ qui dépend seulement de Ω tel que

$$\|u\|_{L^{\bar{q}}(\Omega)} \leq C_s \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Hölder , on a aussi $\theta = \frac{\bar{q}-q}{q(\bar{q}-1)} \in (0,1)$ (ce qui dépend seulement de p et N),

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^1(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^{\bar{q}}(\Omega)}$$

cela donne

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq M^{\theta} C_s^{1-\theta} \|u\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega)},$$

et avec 2.5,

$$\||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} \leq LM^{\theta} A C_s^{1-\theta} \|u\|^{1-\theta}_{H^1(\Omega)}. \tag{2.6}$$

On utilise maintenant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger qui donne l'existence de $C_p > 0$ dépendant seulement de Ω tel que

$$\|u - M\lambda_N(\Omega)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors on obtient

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - M\lambda_N(\Omega)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} + M\lambda_N(\Omega)^{-\frac{1}{2}} \leq C_p \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} + M\lambda_N(\Omega)^{-\frac{1}{2}}.$$

on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} + M\lambda_N(\Omega)^{-\frac{1}{2}},$$

qui donne

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (C_p+1)\||\nabla u|\|_{L^2(\Omega)} + M\lambda_N(\Omega)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.7}$$

Enfin , avec 2.6 et 2.7, on obtient l'existence de C_2 *,*C_3 *dépendant de* M*,*A*, p, L et* Ω *tel que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2\|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\theta} + C_3.$$

Puisque $\theta > 0$*, ce qui donne l'existence de* C *dépendant de* A*, p,*M*,* L *et* Ω *tel que* $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\Diamond$

2.4 Existence

Maintenant on va prouver le résultat d'existence, par la méthode du degré topologique de Leray-Schauder.

Preuve du théorème 2.1

Pour W *et* M *donnés, on va démonter l'existence d'une solution de 2.2 avec* $\displaystyle\int_\Omega u dx = M$*. on va utiliser la méthode du degré topologique en construisant une application* F *continue et compacte de* $[0,1] \times L^q(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$ *avec* $q = \frac{2p}{p-2}$ *(de sorte que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$*). On pose donc dans la suite* $q = \frac{2p}{p-2}$*. (* $q < \frac{2N}{N-2}$*, l'espace* $H^1(\Omega)$ *s'injecte compactement dans* $L^q(\Omega)$*)).*

Mainenant, construisons l'opérateur F*. Soit* $\bar{u} \in L^q(\Omega)$*, comme* $W\varphi(\bar{u}) \in (L^2(\Omega))^N$*,* *le problème :*

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \int_\Omega u dx = 0, \\ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v(x) dx = t \int_\Omega W\varphi(\bar{u}) \cdot \nabla v(x) dx \text{ pour tout } v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.8}$$

est un problème de Neumann classique. L'application $s : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *qui à* v *associe* $s(v) = \int_\Omega W\varphi(\bar{u}) \cdot \nabla v(x) dx$ *est linéaire continue. L'existence et l'unicité de* u *solution de 2.8 est donc une conséquence du théorème de Lax-Milgram.*

On pose

$$F(t, \bar{u}) = t(u + \frac{M}{\lambda_N(\Omega)})$$

On a $\int_\Omega F(t, \bar{u}) dx = tM$. *Si* $u = F(1, u)$, *alors la fonction* u *est une solution de 2.2 avec* $\int_\Omega u dx = M$. *On montre tout d'abord la continuité de* F. *Soit* $(t_n, \bar{u}_n)$ *une suite de* $[0, 1] \times L^q(\Omega)$ *t.q* $t_n \to t$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\bar{u}_n \to \bar{u}$ *dans* $L^q(\Omega)$ *quand* $n \to +\infty$. *On veut montrer que* $u_n \to u$ *dans* $L^q(\Omega)$. *Après une éventuelle extraction de sous suite, on peut aussi supposer que* $\bar{u}_n \to \bar{u}$ *p.p et* $|\bar{u}_n(x)| \leq H(x)$ *p.p. pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *avec* $H \in L^q(\Omega)$. *On en déduit (par théorème de convergence dominée dans* $L^q(\Omega)$ *) que* $\varphi(\bar{u}_n) \to \varphi(\bar{u})$ *dans* $L^q(\Omega)$ *et donc* $\varphi(\bar{u}_n)W \to \varphi(\bar{u})W$ *dans* $L^2(\Omega)^N$, *(en remarquant que* $HW \in L^2(\Omega)^N$*). Comme la suite* $\varphi(\bar{u}_n)W$ *est bornée dans* $L^2(\Omega)^N$ *et que* u_n *solution de 2.8, avec* $(t_n, \bar{u}_n)$ *au lieu de* $(t, \bar{u})$ *on va montrer que la suite* u_n *bornée dans* $H^1(\Omega)$. *Alors on prend* $v = u_n$ *dans l'equation 2.8 on peut voir que* u_n *bornée dans* $H^1(\Omega)$, *on peut donc supposer (toujour après extraction de sous suite) qu'il* *existe w t.q $u_n \to w$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ par la compacité de l'injection de sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ on a $u_n \to w$ dans $L^q(\Omega)$. On montre alors que w est solution de 2.8 avec $(t_n, \bar{u}_n)$ au lieu de $(t, \bar{u})$. Il suffit pour cela de passer à limite, pour tout $v \in H^1(\Omega)$ dans l'équation suivante :*

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla v(x)dx = t_n \int_\Omega \varphi(\bar{u}_n)W \cdot \nabla v(x)dx \textit{ pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

Ce passage à limite découle facilement du fait que $\nabla u_n \to \nabla w$ faiblement dans $L^2(\Omega)^N$ et $\varphi(\bar{u}_n)W \to \varphi(\bar{u})W$ dans $L^2(\Omega)^N$, $w \in H^1(\Omega)$ est une solition de l'équation 2.8 par l'unicité on obtient $u = w$ donc $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$.

On montre maintenant la compacité de F. On suppose que t est quelconque dans $[0;1]$ et que $\bar{u}$ reste dans un borné de $L^q(\Omega)$. La fonction u est donc solution de 2.8. Grâce à $|\varphi(s)| \leq L|s|$, la fonction $\varphi(\bar{u})$ reste dans un borné de $L^q(\Omega)$ et donc $\varphi(\bar{u})W$ reste dans un borné de $L^2(\Omega)^N$. En prenant maintenant $v = u$ dans 2.8, on en déduit que u réste dans un borné de $H^1(\Omega)$, comme $H^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^q(\Omega)$, on en déduit que u reste dans un compact de $L^q(\Omega)$. Ce qui prouve bien la compacité de F . On peut donc appliquer l'invariance par homotopie du degré topologique sur la boule (ouverte) de $L^q(\Omega)$, de centre 0 et de rayon R. Grâce à lemme précédent il existe une constante C telle que

$$(t \in [0,1], u \in L^q(\Omega), u = F(t,u)) \Rightarrow \exists C > 0 \textit{ tel que } \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Alors , Il existe $R > 0$ *tel que*

$$(t \in [0,1], u \in L^q(\Omega), u = F(t,u)) \Rightarrow \|u\|_{L^q(\Omega)} < R.$$

Soit B_R *la boule de rayon* R *et de centre* 0 *dans* $L^q(\Omega)$. *Le degré topologique de* $Id - F(t,\cdot)$ *(où* Id *est l'application* $u \mapsto u$*) sur* B_R *associée au point* 0 *est bien défini indépendant de* $t \in [0,1]$. *Ce qui donne* $d(Id - F(1,\cdot), B_R, 0) = d(Id - F(0,\cdot), B_R, 0)$. $F(0,\cdot) = 0$ *on a* $d(Id - F(0,\cdot), B_R, 0) = 1$. *Alors* $d(Id - F(1,\cdot), B_R, 0) = 1$. *Ce qui démontre l'existence de* $u \in B_R$ *tel que* $u = F(1,u)$

$\diamondsuit$

Chapitre 3

Résultats d'existence de solutions d'un système elliptique semi-linéaire en état de résonnance

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre, nous nous intéessons à l'étude de l'éxistence de solutions non triviales pour le système elliptique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) + f_1(x) \ dans \ \ \Omega, \\ -\Delta v = g(x,u,v) + f_2(x) \ dans \ \ \Omega, \\ u = v = 0 \ sur \, \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où Ω *est un domaine borné de* $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$ *de frontière régulière* $\partial\Omega$ *et* $h = (f_1, f_2)$ *une fonction non nulle dans* $\left(L^2(\Omega)\right)^2$. f, g *sont des fonctions non linéaires de la forme :*

$$\begin{cases} f(x,u,v) = au + f_0(x,u,v), \\ g(x,u,v) = bv + g_0(x,u,v), \end{cases}$$

avec $a = \lambda$, *valeur porpre simple de* $(-\Delta)$, *avec condition de Drichlet hommogéne* $b \in \{\mu, \lambda_1\}$. *Désignons par* φ, ψ *les fonctions propres normalisées correspondantes à* λ *et* μ,($\mu \neq \lambda$), *resp (i.e* $-\Delta\varphi = \lambda\varphi, -\Delta\psi = \mu\psi, \varphi, \psi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$*).*

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ *est la première valeur propre positive de* $-\triangle$.

$$\lambda_1 = \inf_{v \in H_0^1, v \neq 0} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx}{\displaystyle\int_\Omega |v(x)|^2 \, dx},$$

qu'un peut aussi écrire

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \ : \ \int_\Omega |v(x)|^2 dx = 1, v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0 \right\},$$

φ_1 *la première fonction propre normalisée par*

$$\int_\Omega \varphi_1(x) dx = 1.$$

On assume que les fonctions

$$f_0, g_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sont continues et satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |f_0(x,s,p)| \leq c_1 (1 + |s| + |p|) \\ |g_0(x,s,p)| \leq c_2 (1 + |s| + |p|) \end{cases} \tag{3.1}$$

avec c_1, c_2 *des constantes réelles, positives. Le problème (P) est supposé non variationnel donc, il n'y a pas de possibilité d'utiliser la méthode variationnelle car le système (P) n'est pas une équation d'Euler-Lagrange pour une certaine fonctionnelle. Par conséquent, nous ferons appel à la méthode de degré topologique où la grande dificulté réside dans l'obtention d'une estimation à priori des solutions éventuelles. Le cas scalaire correspondant a été considéré dans [24] et l'existence de solutions a été montrée pour le probléme* $Au = au + g(.,u) + \widetilde{h}$ *où* $a \in \{\mu, \lambda_1\}$*, l'opérateur* A *est auto-adjoint à résolvante compacte dans* $L^2(\Omega)$*,* λ *est une valeur porpre de* A*,* $g(.,.)$

applique $\Omega \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $\gamma^- \leq g(.,s) \leq \gamma^+$ *et* $\lim_{|s|\to\infty} g(.,s) = \gamma^{+,-}$ *et* $\widetilde{h} \in L^2(\Omega)$.

L'objectif de ce travail est d'étendre ce résultat au système (P).

Plus précisément, sous les conditions suivantes sur les fonctions f_0 *et* g_0 *:*

$$\begin{cases} \gamma_1^+, \gamma_1^- \in (L^2(\Omega)) \\ \quad \textit{avec} \\ \gamma_1^-(x) \leq f_0(x,s,p) \leq \gamma_1^+(x) \;\; p.p\ \Omega \\ \textit{et} \\ \lim\limits_{s,|p|\to+\infty} f_0(.,s,p) = \gamma_1^+(.) \;\; p.p\ \Omega \\ \lim\limits_{-s,|p|\to+\infty} f_0(.,s,p) = \gamma_1^-(.) \;\; p.p\ \Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{cases} \gamma_2^+, \gamma_2^- \in L^2(\Omega) \\ \textit{avec} \\ \gamma_2^-(x) \leq g_0(x,s,p) \leq \gamma_2^+(x) \;\; p.p\ \Omega \\ \textit{et} \\ \lim\limits_{|s|,p\to+\infty} g_0(.,s,p) = \gamma_2^+(.) \;\; p.p\ \Omega \\ \lim\limits_{-p,|s|\to+\infty} g_0(.,s,p) = \gamma_2^-(.) \;\; p.p\ \Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Donnons à présent le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (3.1),(3.2) et (3.3), le problème (P) admet au moins une solution $(u,v) \in U$.*

Rappelons que l'opérateur A, donné par

$$\begin{cases} Au = -\Delta u \\ D(-\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\} \end{cases} \tag{3.4}$$

définit un opérateur inverse compact dans $L^2(\Omega)$, et son spectre est formé par une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, telle que $|\lambda_k| \to +\infty$.

L'opérateur $\widetilde{A} : U \to U$ définie par

$$\left\langle \widetilde{A}\,(u,v)\,,(\overline{u},\overline{v})\right\rangle_U = \left\langle \left(A^1u, A^2v\right),(\overline{u},\overline{v})\right\rangle_U, \qquad (u,v)\ \ ,(\overline{u},\overline{v}) \in U$$

$$\langle A^1u,\overline{u}\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega u\,(x)\,\overline{u}\,(x)\,dx, \qquad \left\langle A^2v,\overline{v}\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega v\,(x)\,\overline{v}\,(x)\,dx$$

est positif, auto-adjoint et compact.

Pour (u,v) fixé dans U et f_0, g_0 satisfaisant (3.1) il est facile de voir que

$$\widetilde{T}_u\,(\overline{u}) = \int_\Omega \nabla u\,(x)\,\nabla\overline{u}\,(x)\,dx; \qquad \widetilde{T}_v\,(\overline{v}) = \int_\Omega \nabla v\,(x)\,\nabla\overline{v}\,(x)\,dx$$

$$\widetilde{S}_{u,v}\,(\overline{u}) = \int_\Omega f_0(x,u,v)\overline{u}\,(x)\,dx; \qquad \widetilde{S}_{u,v}\,(\overline{v}) = \int_\Omega g_0(x,u,v)\overline{v}\,(x)\,dx$$

sont des fonctionnelles linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$. *Le théorème de représentation de Riesz assure l'éxictence et l'unicité d'éléments uniques* $L_1(u), L_2(v), S_1(u,v), S_2(u,v) \in H_0^1(\Omega)$ *telles que*

$$\langle L_1(u), \overline{u}\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \widetilde{T}_u(\overline{u}), \forall \overline{u} \in H_0^1(\Omega),$$

$$\langle L_2(v), \overline{v}\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \widetilde{T}_v(\overline{v}), \forall \overline{v} \in H_0^1(\Omega),$$

et

$$\langle S_1(u,v), \overline{u}\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \widetilde{S}_{u,v}(\overline{u}), \forall \overline{u} \in H_0^1(\Omega),$$

$$\langle S_2(u,v), \overline{v}\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \widetilde{S}_{u,v}(\overline{v}) \forall \overline{v} \in H_0^1(\Omega).$$

Appelons S *et* L *les opérateurs définis sur* U *par*

$$S(u,v) = (S_1(u,v), S_2(u,v)), L(u,v) = (L_1(u), L_2(v)).$$

Si on choisit

$$\langle u, \overline{u}\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \overline{u}(x)\, dx,$$
$$\langle v, \overline{v}\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla v(x) \nabla \overline{v}(x)\, dx,$$

L *devient l'opérateur l'identité sur* U. *L'application* $S : (u,v) \in U \to (S_1(u,v), S_2(u,v)) \in U$ *est alors un opérateur continu et compacte.*

Pour tout $t \in [0,1]$ et $(u,v) \in U$, On définit l'homotopie

$$H(t,u,v) = \begin{pmatrix} H_1(t,u,v) \\ \\ H_2(t,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - aA^1(u) - tS_1(u,v) - (1-t)\,\varepsilon A^1(u) \\ \\ v - bA^2(v) - tS_2(u,v) - (1-t)\,\varepsilon A^2(v) \end{pmatrix}, \ \forall \varepsilon > 0$$

qui s'écrit ausi,

$$H(t,u,v) = (u,v) - \widetilde{B}\widetilde{A}(u,v) - t\ S(u,v) - (1-t)\,C(\varepsilon)\,\widetilde{A}(u,v)\,,\ \forall \varepsilon > 0$$

où

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad et \quad C(\varepsilon) = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$H : [0,1] \times U \to U,$$

est une homotopie compacte, le système (P) est alors équivalent au problème suivant :

$$\forall (u,v) \in U, (u,v) = \widetilde{B}\widetilde{A}(u,v) + \ S(u,v)\,.$$

correspondant aussi à

$$H(1,u,v) = 0, (u,v) \in U$$

Présentons maintenant les deux cas à étudier.

3.2 Premier cas

Dans cette sous section, on prend

$$\begin{cases} f(x,u,v) = \lambda u + f_0(x,u,v), \\ \\ g(x,u,v) = \lambda_1 v + g_0(x,u,v), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} f_1(x) = h_1(x), \\ \\ f_2(x) = -h_2(x), \end{cases}$$

le système (P) devient :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f_0(x,u,v) + h_1(x) \ dans\ \Omega \\ \\ -\Delta v = \ \lambda_1 v + g_0(x,u,v) - h_2(x) \ \ dans\ \Omega \\ \\ u = v = 0 \ sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

Définissons la solution faible de 3.5 .

Définition 3.1 *on dit que $(u,v) \in U$ est une solution faible de 3.5, si pour tout $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) \in U$ on a*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla \widetilde{w}_1 dx = \int_\Omega \left[\lambda u(x) + f_0(x,u,v)\right] \widetilde{w}_1(x) dx + \int_\Omega h_1(x)\widetilde{w}_1(x)dx, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v \nabla \widetilde{w}_2 dx = \int_\Omega \left[\lambda_1 v(x) + g_0(x,u,v)\right] \widetilde{w}_2(x) dx - \int_\Omega h_2(x)\widetilde{w}_2(x)dx, \end{cases}$$

Donnons à présent une condition nécessaire d'existence.

Proposition 3.1 *Si* $(h_1, h_2) \in (L^2(\Omega))^2$ *et* f_0, g_0 *vérifient les hypothèses précédentes , une condition nécesaire pour que le problème 3.5 admette une solution, est que pour tout* (φ, φ_1)*, soient verifié les conditions i),ii).*

i) $\int_\Omega \gamma_1^+ \varphi^+(x)\, dx - \int_\Omega \gamma_1^- \varphi^-(x)\, dx + \int_\Omega h_1(x)\, \varphi(x)\, dx \geq 0$

ii) $\gamma_2^- \leq \int_\Omega h_2(x)\, \varphi_1(x)\, dx \leq \gamma_2^+$

Preuve 3.1

Si (u, v) *est solution du système 3.5, en multipliant par* (φ, φ_1)*, et en utilisant le fait que* $A^* = A$ *on obtient*

$$\begin{cases} \int_\Omega uA\varphi dx = \int_\Omega [\lambda u(x) + f_0(x, u, v)]\, \varphi(x) dx + \int_\Omega h_1(x)\varphi(x) dx, \\ \int_\Omega vA\varphi_1 dx = \int_\Omega [\lambda_1 v(x) + g_0(x, u, v)]\, \varphi_1(x) dx - \int_\Omega h_2(x)\varphi_1(x) dx, \end{cases}$$

qui, compte tenu du fait que $A\varphi = \lambda\varphi$ *et* $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$*, et en écrivant*

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^- \text{ où } \varphi^+ = \max(0, \varphi) \text{ et } \varphi^- = \max(0, -\varphi),$$

donne :

$$\begin{cases} \int_\Omega f_0(x, u, v)\left[\varphi^+(x) - \varphi^-(x)\right] dx + \int_\Omega h_1(x)\varphi(x) dx = 0, \\ \int_\Omega h_2(x)\varphi_1(x)\, dx = \int_\Omega g_0(x, u, v)\varphi_1(x)\, dx. \end{cases}$$

(3.2) et (3.3) , impliquent

$$\int_\Omega \gamma_1^+ \varphi^+(x)\, dx - \int_\Omega \gamma_1^- \varphi^-(x)\, dx + \int_\Omega h_1(x)\, \varphi(x)\, dx \geq 0,$$

$$\gamma_2^- \leq \int_\Omega h_2(x)\varphi_1(x)\,dx \leq \gamma_2^+.$$

D'où le resultat.

3.2.1 Estimation à priori des solutions

Nous allons montrer dans cette partie que lorsque $i), ii)$ *sont verifiés, on peut obtenir des estimations à priori sur les solutions du système 3.5.*

On sait que H *est donnée par*

$$H(t,u,v) = (u,v) - \widetilde{B}\widetilde{A}\,(u,v) - t\ S\,(u,v) - (1-t)\,C\,(\varepsilon)\,\widetilde{A}\,(u,v)\,,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, *est une homotopie compacte de* $[0,1] \times U$ *dans* V. *Montrons qu'il existe* $R_1 > 0$ *tel que, pour tout* $(u,v) \in U, \|(u,v)\|_U = R_1$ *et* $t \in [0,1]$, *on a*

$$H(t,u,v) \neq 0.$$

Lemme 3.1 *il existe* $R_1 > 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \|(u,v)\|_U = R_1, \quad \forall t \in [0,1]\,, \forall\,(u,v) \in U, \\ \\ H(t,u,v) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve 3.1

Soit $\varepsilon > 0$ *de sorte l'intervalle* $]\lambda_k, \lambda_k + \varepsilon]\,, k \in \mathbb{N}^*$, *ne contienne aucune valeur propre de l'opérateur* $(-\Delta), \lambda_1 + \varepsilon < \lambda_2$. *Supposons, par contradiction, qu'il existe*

$(t,u,v) \in [0,1] \times U$ *tel que*

$$H(t,u,v) = 0 \text{ et } \|(u,v)\|_U > R_1.$$

En d'autres termes, on peut trouver une suite $\{(u_n,v_n)\}_{n=1}^{\infty} \in U$ *et* $\{t_n\}_{n=1}^{n=\infty} \subset [0,1]$

tel que $\|(u_n,v_n)\|_U > n$ *et*

$$(u_n,v_n) - \widetilde{B}\widetilde{A}\,(u_n,v_n) - t_n\ S\,(u_n,v_n) - (1-t_n)\,C\,(\varepsilon)\,\widetilde{A}\,(u_n,v_n) = 0\ ,\forall\varepsilon > 0 \quad (3.6)$$

où

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ & \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ et } C\,(\varepsilon) = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$w_n = (w_{n,1}, w_{n,2}) = \left(\frac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}, \frac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\right)$$

Alors, avec ce choix de w_n *on a*

$$w_n = (w_{n,1}, w_{n,2}) \in (D(-\Delta))^2 \text{ et } \|w_n\|_U = 1. \quad (3.7)$$

Montrons que $w_n \in (D(-\Delta))^2$. *On a*

$$w_n - \widetilde{B}\widetilde{A}\,(w_n) - (1-t_n)\,C\,(\varepsilon)\,\widetilde{A}\,(w_n) - t_n\ \frac{S\,(u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = 0\ ,\forall\varepsilon > 0 \quad (3.8)$$

ou bien

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla w_{n,1}\nabla\widetilde{w}_1 dx = [\lambda + (1-t_n)\,\varepsilon] \int_\Omega w_{n,1}\widetilde{w}_1 dx + t_n \int_\Omega \frac{f_0(x,u_n,v_n)\widetilde{w}_1}{\|(u_n,v_n)\|_U} dx + \int_\Omega h_1\,(x)\,\widetilde{w}_1 dx \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla w_{n,2}\nabla\widetilde{w}_2 dx = [\lambda_1 + (1-t_n)\,\varepsilon] \int_\Omega w_{n,2}\widetilde{w}_2 dx + t_n \int_\Omega \frac{g_0(x,u_n,v_n)\widetilde{w}_2}{\|(u_n,v_n)\|_U} dx - \int_\Omega h_2\,(x)\,\widetilde{w}_2 dx \\ (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) \in U \end{cases}$$

(3.2) et l'ingalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$*, donnent l'estimation suivante*

$$\int_\Omega |f_0(x,u_n,v_n)|^2 \, dx \leq \int_\Omega c_1^2 (1+|u_n|+|v_n|)^2 \, dx \leq 2c_1^2 \int_\Omega \left(1+|u_n|^2+|v_n|^2\right) dx \leq c' \left(1+\|u_n\|_{H_0^1}^2 + \|v_n\|_{H_0^1}^2\right)$$

pour une certaine constante $c^{'} > 0$*. Par conséquent,*

$$\int_\Omega \frac{f_0 \left|(x,u_n,v_n)\right|^2}{\|(u_n,v_n)\|_U^2} dx \leq c^{'} \left(\frac{1}{\|(u_n,v_n)\|_U^2}+1\right)$$
$$\int_\Omega \frac{|f_0(x,u_n,v_n)|^2}{\|(u_n,v_n)\|_U^2} dx \leq c^{'} \left(\frac{1}{n^2}+1\right) \leq 2c^{'}$$

ce qui prouve que , $\frac{f_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U}$ *est bornée dans* $L^2(\Omega)$*. Un raisonnement similaire montre que la fonction* $\frac{g_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U}$ *est aussi bornée dans* $L^2(\Omega)$*.*

Comme $\|(u_n,v_n)\|_U > n$ *on a*

$$\begin{cases} \dfrac{\|h_1\|_{L^2(\Omega)}}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq \dfrac{\|h_1\|_{L^2(\Omega)}}{n} \leq \|h_1\|_{L^2(\Omega)}, \\ \dfrac{\|h_2\|_{L^2(\Omega)}}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq \dfrac{\|h_2\|_{L^2(\Omega)}}{n} \leq \|h_2\|_{L^2(\Omega)}, \end{cases}$$

on peut voir que $-\Delta w_{n,1}$ *et* $-\Delta w_{n,2}, \in L^2(\Omega)$ *ce qui assure que*

$$w_n = (w_{n,1}, w_{n,2}) \in D(-\Delta) \times D(-\Delta).$$

L'injection $(H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega))$ *étant compate , on peut extraire une sous suite de* $(t_n, w_{n,1}, w_{n,2})$*, notée encore par* $(t_n, w_{n,1}, w_{n,2})$*, qui converge dans* $[0,1] \times V$*. Soit* (t, w_1, w_2) *la limite de* $(t_n, w_{n,1}, w_{n,2})$ *dans* $[0,1] \times V$*. D'après les hypothèses (3.2) et*

(3.3) on a

$$\begin{cases} \dfrac{f_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = \dfrac{u_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\dfrac{f_0(x,u_n,v_n)}{u_n} = w_{n,1}\dfrac{f_0(x,w_{n,1}\|(u_n,v_n,)\|_U,v_n)}{w_{n,1}\|(u_n,v_n)\|_U} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ \ p.p.\ dans\ \Omega \\ \dfrac{g_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = \dfrac{v_n}{\|(u_n,v_n)\|_U}\dfrac{g_0(x,u_n,v_n)}{v_n} = w_{n,2}\dfrac{g_0(x,u_n,w_{n,2}\|(u_n,v_n)\|_U)}{w_{n,2}\|(u_n,v_n)\|_U} \underset{n\to\infty}{\to} 0\ p.p.\ dans\ \Omega \end{cases}$$

et comme les suites $w_{n,1}$,$w_{n,2}$ *sont bornées dans* $L^2(\Omega)$, *on obtient*

$$\begin{cases} \dfrac{f_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq c_1\left(1+|w_{n,1}|+|w_{n,2}|\right) \leq c^{'}\ \ a.e.\ in\ \Omega \\ \dfrac{g_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} \leq c_2\left(1+|w_{n,1}|+|w_{n,2}|\right) \leq c^{''}\ \ a.e.\ in\ \Omega \end{cases}$$

où $c^{'}, c^{''}$ *sont des constantes réelles positives. En appliquant le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée , on déduit que*

$$\begin{cases} \dfrac{f_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} \quad \to\ 0\ \ dans\ L^2(\Omega)\ \ ,n\to\infty \\ \dfrac{g_0(x,u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} \quad \to\ 0\ \ dans\ L^2(\Omega)\,,n\to\infty \end{cases}$$

par conséquent

$$t_n\frac{S(u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} \to 0$$

et

$$\widetilde{A}(w_n) \to \widetilde{A}(w)\,,$$

on obtient alors

$$w - \left[\widetilde{B} + (1-t)\,C(\varepsilon)\right]\widetilde{A}(w) = 0\ ,\ \|w\|_U = 1, \forall\varepsilon > 0.$$

donc

$$\begin{cases} -\Delta w_1 & = (\lambda + (1-t)\,\varepsilon)\, w_1 \\ \\ -\Delta w_2 & = (\lambda_1 + (1-t)\,\varepsilon)\, w_2. \end{cases}$$

Si $t \neq 1$, *comme* $\lambda + (1-t)\,\varepsilon$ *et* $\lambda_1 + (1-t)\,\varepsilon$ *ne sont pas des valeurs propres et* $(w_1, w_2) \neq (0,0)$, *on a une contradction.*

Par le choix de ε, *la seule possiblité d'avoir* $t = 1$ *i.e* $t_n \to 1$, *est que* $(\lambda_1, \lambda) \in sp(-\Delta)$.

L'équation

$$w - \widetilde{B}\widetilde{A}\,(w) = 0,$$

admet une solution avec $\|w\|_U = 1$. *Examinons l'expression*

$$w_n - \widetilde{B}\widetilde{A}\,(w_n) - (1-t_n)\,c\,(\varepsilon)\,\widetilde{A}\,(w_n) - t_n\ \tfrac{S(u_n,v_n)}{\|(u_n,v_n)\|_U} = 0\ ,\forall\varepsilon > 0,$$

en utilisant les propeiétés de S,

$$(u_n, v_n) - \widetilde{B}\widetilde{A}\,(u_n, v_n) - t_n S\,(u_n, v_n) - (1-t_n)\,c\,(\varepsilon)\,\widetilde{A}\,(u_n, v_n) = 0\ ,\forall\varepsilon > 0,$$

i.e

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u_n \nabla \widetilde{w}_1 dx = [\lambda + (1-t_n)\,\varepsilon] \int_\Omega u_n \widetilde{w}_1 dx + t_n \ \int_\Omega f_0(x, u_n, v_n)\widetilde{w}_1 dx + \int_\Omega h_1\,(x)\,\widetilde{w}_1 dx, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla v_n \nabla \widetilde{w}_2 dx = [\lambda_1 + (1-t_n)\,\varepsilon] \int_\Omega v_n \widetilde{w}_2 dx + t_n \int_\Omega g_0(x, u_n, v_n)\widetilde{w}_2 dx - \int_\Omega h_2\,(x)\,\widetilde{w}_2 dx, \\ (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) \in U. \end{cases} \tag{3.9}$$

En prenant $(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = (w_1, w_2)$ *et en utilisant le fait que*

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u_n \nabla w_1 dx = \lambda \int_\Omega u_n w_1 dx, \\ \int_\Omega \nabla v_n \nabla w_2 dx = \lambda_1 \int_\Omega v_n w_2 dx, \end{cases}$$

Alors pour n *assez grand on a*

$$\begin{cases} t_n \int_\Omega f_0(x, u_n, v_n) w_1 dx + \int_\Omega h_1(x) w_1 dx = -(1-t_n)\varepsilon \int_\Omega u_n w_1 dx \leq 0, \\ t_n \int_\Omega g_0(x, u_n, v_n) w_2 dx - \int_\Omega h_2(x) w_2 dx = -(1-t_n)\varepsilon \int_\Omega v_n w_2 dx \leq 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue et $t_n \to 1$*, on déduit que,*

- $\int_\Omega [f_0(x, \|(u_n, v_n)\|_U w_{n,1}, v_n(x))] w_1(x) dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_\Omega \gamma_1^+ w_1^+(x) dx - \int_\Omega \gamma_1^- w_1^-(x) dx,$
- $\int_\Omega h_2(x) \varphi_1 dx \geq \lim_{n\to\infty} t_n \int_\Omega g_0(x, u_n, \|(u_n, v_n)\|_U w_{n,2}(x)) \varphi_1 dx = \gamma_2^+,$
- $\int_\Omega h_2(x) \varphi_1 dx \leq \lim_{n\to\infty} t_n \int_\Omega g_0(x, u_n, \|(u_n, v_n)\|_U w_{n,2}(x)) \varphi_1 dx = \gamma_2^-,$

comme

$$\begin{cases} \int_\Omega \gamma_1^+ w_1^+(x) dx - \int_\Omega \gamma_1^- w_1^-(x) dx + \int_\Omega h_1(x) w_1(x) dx \leq 0, \\ \gamma_2^+ \leq \int_\Omega h_2(x) \varphi_1 dx \leq \gamma_2^-, \end{cases}$$

ceci contredit la proposition.

3.3 Deuxième cas

On pose maintenant

$$\begin{cases} f(x,u,v) = \lambda u + f_0(x,u,v), \\ g(x,u,v) = \mu v + g_0(x,u,v), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} f_1(x) = h_1(x), \\ f_2(x) = h_2(x). \end{cases}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f_0(x,u,v) + h_1(x), \ \ \textit{dans } \Omega \\ -\Delta v = \ \mu v + g_0(x,u,v) + h_2(x), \ \ \textit{dans } \Omega \\ u = v = 0 \ \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

(3.11)

Pour le syslème (3.11), on a aussi une condition nécessaire formulée dans la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Sous les hypothèses (3.2) et (3.3), si* $(h_1, h_2) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$. *Une condition nécessaire pour que le problème 3.11 admette une solution, est que pour* *tout* $(\theta_1, \theta_2) \in N_\lambda \times N_\mu$. *On a*

$$\int_\Omega \gamma_i^+ \theta_i^+ (x)\, dx - \int_\Omega \gamma_i^- \theta_i^- (x)\,(x)\, dx + \int_\Omega h_i (x)\, \theta_i (x)\, dx \geq 0, i \in 1, 2$$

Preuve 3.2

Soit (u, v) *une solution faible pour 3.11, i.e. pour toute* $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) \in U$, *on a*

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \nabla \widetilde{w}_1 dx = \int_\Omega [\lambda u(x) + f_0(x, u, v)]\, \widetilde{w}_1(x) dx + \int_\Omega h_1(x) \widetilde{w}_1(x) dx, \\ \int_\Omega \nabla v \nabla \widetilde{w}_2 dx = \int_\Omega [\mu v(x) + g_0(x, u, v)]\, \widetilde{w}_2(x) dx + \int_\Omega h_2(x) \widetilde{w}_2(x) dx, \end{cases} \tag{3.12}$$

choisissons $(\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2) = (\theta_1, \theta_2) \in N_\lambda \times N_\mu$ *dans la définition 3.12 , on obtient*

$$\begin{cases} \int_\Omega f_0(x, u, v) \theta_1 (x)\, dx + \int_\Omega h_1(x) \theta_1 (x)\, dx = 0 \\ \int_\Omega g_0(x, u, v) \theta_2 (x)\, dx + \int_\Omega h_2(x) \theta_2 (x)\, dx = 0 \end{cases}$$

En écrivant

$$\theta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-, (i = 1, 2)$$

Comme dans la démonstration de la proposition précèdente avec φ *remplacée par* θ_1, *et* φ_1 *remplacée par* θ_2 *est en utilusant*

$$[f_0(x, u, v)] \left[\theta_1^+ (x) - \theta_1^- (x)\ \right] \leq \gamma_1^+ \theta_1^+ (x) - \gamma_1^- \theta_1^- (x),$$

on obtient

$$\int_\Omega \gamma_1^+ \theta_1^+ (x)\, dx - \int_\Omega \gamma_1^- \theta_1^- (x)\, dx + \int_\Omega h_1 (x)\, \theta_1 (x)\, dx \geq 0,$$

La condition 3.3, implique que

$$[g_0(x,u,v)]\left[\theta_2^+(x)-\theta_2^-(x)\ \right]\leq\gamma_2^+\theta_2^+(x)-\gamma_2^-\theta_2^-(x),$$

et par suite

$$\int_\Omega\gamma_2^+\theta_2^+(x)\,dx-\int_\Omega\gamma_2^-\theta_2^-(x)\,dx+\int_\Omega h_2(x)\,\theta_2(x)\,dx\geq 0.$$

D'où le résultat.

3.3.1 Estimation à priori des solutions

Lemme 3.2 *Il existe $R_2>0$ tel que*

$$\begin{cases}\|(u,v)\|_U=R_2, & \forall t\in[0,1]\,,\forall\,(u,v)\in U,\\ H(t,u,v)\neq 0.\end{cases}$$

Preuve 3.2

Soit $\varepsilon>0$ tel que $]\lambda^i,\lambda^i+\varepsilon]\cap sp(-\Delta)=\varnothing$ $i=1,2\,(\lambda^1=\lambda$ et $\lambda^2=\mu)$. Comme dans la démonstration du lemme précèdent, avec

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\ \ et\ C\,(\varepsilon)=\varepsilon\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

on prend

$$(\widetilde{w}_1,\widetilde{w}_2)=(w_1,w_2)$$

Alors pour n assez grand on a

$$\begin{cases} t_n \int_\Omega f_0(x,u_n,v_n)w_1dx + \int_\Omega h_1(x)\,w_1dx = -(1-t_n)\,\varepsilon\int_\Omega u_n w_1 dx \leq 0, \\ t_n \int_\Omega g_0(x,u_n,v_n)w_2dx + \int_\Omega h_2(x)\,w_2dx = -(1-t_n)\,\varepsilon\int_\Omega v_n w_2 dx \leq 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,et $t_n \to 1$, *on déduit que,*

- $\int_\Omega \left[f_0(x, \|(u_n,v_n)\|_U\, w_{n,1}, v_n(x))\right] w_1(x)\,dx \to \int_\Omega \gamma_1^+ w_1^+(x)\,dx - \int_\Omega \gamma_1^- w_1^-(x)\,dx,$
- $\int_\Omega \left[g_0(x, u_n, \|(u_n,v_n)\|_U\, w_{n,2}(x))\right] w_2(x)\,dx \to \int_\Omega \gamma_2^+ w_2^+(x)\,dx - \int_\Omega \gamma_2^- w_2^-(x)\,dx.$

On obtient finalement

$$\int_\Omega \gamma_i^+ w_i^+(x)\,dx - \int_\Omega \gamma_i^- w_i^-(x)\,dx + \int_\Omega h_i(x)\,w_i dx \leq 0, i = 1, 2.$$

contredisant l'hyothèses de la proposition.

3.4 Démonstration du résultat principal

Dans ce paragraphe, nous donnons la démonstration du théorème 3.1

Preuve du théorème 3.1

Soit

$$B(0,R) = \left\{(u,v) \in U, \|(u,v)\|_U < R\right\}.$$

La boule de centre 0 *et de rayon* $R = \max(R_1, R_2)$. *Le degré topologique*

$$\deg(H(t,.,.), B(0,R), 0), t \in [0,1]$$

est constant. Pour $t = 0$ *, on a*

$$H(0,u,v) = \begin{pmatrix} H^1(0,u,v) \\ \\ H^2(0,u,v) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u - (\lambda + \varepsilon)\, A^1 u \\ \\ v - (\lambda_1 + \varepsilon)\, A^2 v \end{pmatrix}, \forall \varepsilon > 0$$

Et le problème (3.11) *dovient linéaire, i.e*

$$\begin{cases} -\Delta u = (b + \varepsilon)\, u + f_1 \;\; in\ \Omega \\ \\ u = 0 \;\; on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.14}$$

l'alternative de Fridholm assure l'éxistence d'une solution unique, donc

$$\deg(H(0,.,.), B\,(0,R)\,, 0) = \deg\Big(I - (\widetilde{B} + C(\varepsilon))\widetilde{A}, B(0,R), 0\Big) = \deg(I - (b+\varepsilon)A^1, B(0,R), 0) = \pm 1.$$

D'après la propriété d'invariance homotopique, on obtient

$$\deg(H(0,.,.), B\,(0,R)\,, 0) = \deg(H(1,.,.), B\,(0,R)\,, 0) = \pm 1.$$

Par conséquent, le problème P admet au moins une solution non triviale, ce qui achève la preuve du théorème.

Conclusion et Perspectives

Deux differents problèmes ont constité l'essentiel de cette thése.

Le premer travail concerne les équations elliptique non coercives. Nous montrons, dans un cadre non linéaire l'existence et l'unicité d'une solution faible dans l'espace d'enrgie $H^1(\Omega)$ *pour une calsse d'équations de convetion-diffusion pour lesquelle le terme de convection provoque la perte de coercitivité, dans la deuxième partie, on donne des conditions d'existence pour un système elliptique non linéaire en état de résonance. Les deux problèmes ont été traités par le techinque du degré topologique. Nous proposons une généralisation du travail de A. Moussaoui et B. Khodja* [37]

Liste des symboles

Δ *Laplacian.*

∇ *Gradient d'un champ de vecteurs.*

$\frac{\partial}{\partial x}$ *Dérivée partielle.*

$\frac{\partial}{\partial n}$ *Dérivée normale exterieure d'un champ scalaire.*

$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}}$, *avec* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ *un multi-indice.*

$x.y$ *est le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs* $x; y \in \mathbb{R}^N$ *;* $|.|$ *est la norme euclidienne associée.*

N_{λ} *désigne le noyau de* $A - \lambda I$.

$\rightarrow$ *Convergence forte.*

$\rightharpoonup$ *Convergence faible.*

$\varphi^{\perp}$ *L'orthogonale de* φ *dans l'espace* $L^2(\Omega)$.

$C^m(\mathbb{R}^N)$ *Espace des fonctions* m *fois continument différentiables.*

$C^{\infty}(\mathbb{R}^N) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\mathbb{R}^N)$.

$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ *Espace des fonctions* $C^{\infty}(\mathbb{R})$ *support compact dans* $\mathbb{R}^N$.

$L^p(\mathbb{R}^N)$ *Espace de Lebegue equipé de la norme* $\|.\|_p$.

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *Espace des fonctions de* $L^p(\Omega')$, $\forall \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \mathbb{R}^N$.

$W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ *Espace de Sobolev d'ordre* m *muni de la norme* $\|.\|_{m,p}$.

$W_{loc}^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *Espace des fonctions de* $W^{m,p}\left(\Omega'\right), \forall\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \mathbb{R}^N$.

$H^m\left(\mathbb{R}^N\right) \quad = W^{m,2}\left(\mathbb{R}^N\right)$.

$U \quad = \quad H_0^1\left(\Omega\right) \times H_0^1\left(\Omega\right)$ *muni de la norme* $\left\|(u,v)\right\|_U^2 = \left\|u\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \left\|v\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2$.

$V \quad = L^2\left(\Omega\right) \times L^2\left(\Omega\right)$.

$\mathbb{N}$ *L'ensemble des entiers positifs, N = 0,1, 2,... .*

$\mathbb{R}$ *L'ensemble des nobmres réels.*

$\mathbb{R}^N$ *Espace réel de dimension N.*

$[a,b]$ *Un intervalle dans* X; $[a,b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$.

$B\left(o,r\right)$ *Boule ouverte de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$.

$\bar{\Omega}$ *L'adherence de* Ω.

J *Matrice Jacobienne.*

J_f *Déterminant d'une matrice Jacobienne de l'application* f.

$X \hookrightarrow Y, X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ *L'injection continue (ou compacte) de* X *dans* Y.

Bibliographie

[1] ***R.A. Adams****, Sobolev space, Academic press, New york/San Francisco/London, (1975).*

[2] ***C.O. Alves and de D.G. Figueiredo*** *, Nonvariational elliptic systems. Disc. Cont. Dynamical Syst., 2002, 8(2) : 289-302.*

[3] ***A. Ambroseti and A. Malchiodi****, Nonlinear Analysis And Semilinear Elliptic Problems, Cambridge University Press, (2007).*

[4] ***A. Ambroseti and P.H. Rabinowitz****, Dual variational method in critical points theory and applications, J.Func. Anal., (1973).*

[5] ***A. Ambroseti and G. Prodi****, A primer of Nonlinear Analysis, Cambridge University Press, (1993).*

[6] ***A. Bahri and P.L. Lions****, On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains, Ann. Inst. Henri Poincaré, (1997).*

[7] ***L. Boccardo and D.G. de Figueiredo*** , *Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations. Nonlinear Diff. Eqn. Appl., 2002, 9 : 309-323.*

[8] ***H. BREZIS***, *Analyse fonctionnelle, théorie et application. Dunod, Paris, (1983).*

[9] ***H. Brezis and L. Nirenbrg***, *Characterizations of the Ranges of some Nonlinear Operators and Applications to Boundary Value Problems, Ann.scuola.Norm.Sup. Pisa CI. sci.(4) 5 (1978), 225-326.*

[10] ***H. Brezis and W. Strauss***, *Semi-linear elliptic equations in* L^1, *J. Math. Soc. Japan, (1973).*

[11] ***M. Chipot***, *Hand book of differential equations, Stationary Partial Differential Equations, Vol. 7, Elsevier, (2008).*

[12] ***F. Cîstea, D. Montreanu and V. Radulescu***, *Weak solutions of quasilinear problems with nonlinear boundary condition, Nonlinear Anal, 43 (2001), 623-636.*

[13] ***Ph. Clément, D.G. de Figueiredo and E. Mitidieri*** , *Positive solutions of semilinear elliptic systems. Commun. Part. Diff. Eqns., 1992, 17 : 923-940.*

[14] ***J. Cronin***, *Fixed points and topological degree in non linear analysis, Amer. Math. Soc, (1964).*

[15] ***E.N. Dancer***, *Boundary value problems for weakly non-linear ordinary differentiel equations, bull.Aust . Math.soc. vol 15.(1976) $N^0 3$, pp. 321-328*

[16] ***S. DJEBAILI*** , *Le degré topologique, théorie et applications, Kouba Alger, (2006).*

[17] ***J. Droniou***, *Soling concection- diffusion equation with mixd, Neumann and Fourier boundary conditions and measures as data, by a duality method, Adv.Differential Equations. vol5(10-12), October-Decemder 2000, pp. 1341-1396*

[18] ***P. Drabek and J. Milota***, *Methods of Nonlinear Analysis ; Applications to Differential Equations, Birkhauser Advanced texts, Basel, (2007).*

[19] ***M.J. Estiben and P. Lions***, *Existence and non existence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains, Proc, Roy. Soc. Edimburgh, (1982).*

[20] ***A. Fattah, T. Gallouët and H.lakehal***, *An Existence proof for the stationary compressible stokes problem, Annales de la faculté des sciences de Toullouse.*

[21] ***D.G. de Figueiredo.***, *Semilinear elliptic systems. Lectures at the International School on Nonlinear Differential Equations, Trieste-Italy, October 2006.*

[22] ***D.G. de Figueiredo and J.Yang***, *A priori bounds for positive solutions of a non-variational elliptic systems. Commun. PDE, 2001, 23(11&12), 2305-2322.*

[23] ***D.G. de Figueiredo and B. Ruf***, *Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth.Med. J. Math., 2004, 1 : 417-431.*

[24] ***T. Gallouët and O. Kavian***, *Résultats d'existence et de non-existence pour certains problèmes demi-linéaires a l'infini. Ann. Fac. Sci. Toulouse, 1981, 3(3&4) : 201-246.*

[25] ***T. Gallouët, R. Herbin***, *cours Master 2, Equation aux dérivée partielle, Université Aix de Marseille, (2012).*

[26] ***D. Gilbarg and N.S. Trudinger***, *Elliptic prtial differential equations of second order, Spring-Verlag, Berlin, (1998).*

[27] ***W. Gharbi and B. Khodja and H. Lakehal***, *Existence result of solutions for a class of semi linear elliptic systems, Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems Vol. 4, Issue. 4, 2012, pp. 1-13*

[28] ***A. Haraux et B. Khodja***, *Caractère trivial de la solution de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires dans des ouverts cylindriques de* $\mathbb{R}^N$. *Portugaliae Mathématica Fasc 2, (1984).*

[29] ***O.Kavian :*** *"Introduction à la théorie des points critiques et Applications aux Problémes Elliptiques", Springer Verlag, Math. et Appl, Vol 13, 1993*

[30] ***H. Lakehal and B. Khodja and W. Gharbi***, *Existence results of nontrivial solutions for a semi linear elliptic system at resonance, Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems Vol. 5, Issue. 3, 2013, pp. 1-12*

[31] ***E.N. Landesman and A.C. Lazer***, *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance, J. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.*

[32] ***F. Legoll et M. Lewin***., *Mathématique des modèle multi-échelles, Mars 2010.*

[33] ***J. Leray and J. Schauder***, *Topologie et equations fonctionelles, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 3 (1934),45-78.*

[34] ***J.L. Lions***, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, (1969).*

[35] ***J. Mawhin***, *Topological degree methods in non linear boundary value problems, Conference Board of the Mathematical Sciences, AMS, (1979).*

[36] ***J.W. Milnor***, *Topology from a differencial view point, Charottesville, The University Press of Verginia, (1965).*

[37] ***A. Moussaoui and B. Khodja***, *Existence Results for a Class of Semilinear Elliptic Systems, journal of partial differential equations, Vol. 22, (2009) No. 2, pp. 111-126.*