وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Badji Mokhtar Annaba

Badji Mokhtar University - Annaba

جامعة باجي مختار عنابة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année 2015

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat de 3ème cycle en Mathématiques

Etude du modèle de Friedrichs dans le cas du spectre continu multiple

Option :
Mathématiques et Applications

Présentée par

ZEMMOURI Asma

DIRECTEUR DE THÈSE :	DIABA Fatma	MCA	Univ. B.M. Annaba
CO-DIRECTEUR :	CHEREMNIKH Evegeny	PROF.	Univ. Ukraine

Devant le jury

PRESIDENT	REBANNI Fouzia	PROF.	Univ. B .M. Annaba
EXAMINATEUR:	DJELLIT Ilhem	PROF.	Univ. B. M. Annaba
EXAMINATEUR :	AMIAR Rachida	MCA.	Univ. B. M. Annaba
EXAMINATEUR:	NOUAR Ahmed	PROF.	Univ. de Skikda

Thèse de Doctorat 3ème cycle
Etude du modèle de Friedrichs dans le cas du spectre continu multiple

Asma Zemmouri
Laboratoire de Mathématique Appliquées
Département de Mathématiques, Université de Badji Mokhtar-Annaba

Encadré par F. Diaba Et Co-encadré par E. V. Cheremnikh

TABLE DES MATIÈRES

1 Remerciements 4

2 Introduction 8

1 Quelques travaux sur le modèle de Friedrichs et les problèmes de Sturm-Liouville 12

1 Quelques travaux sur le modèle de Friedrichs 12

1.1 Sur les projecteurs de l'opérateur $T = S + V$ 14

1.2 Notations 20

1.3 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to \infty$ 22

1.4 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to 0$ 22

1.5 Spectre ponctuel de l'opérateur L 24

1.6 Modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport 25

1.7 Spectre de modèle de Friedrichs 28

1.8 Construction du semi-groupe $\exp(itT)$ 30

1.9 Recherche de la résolvante de l'opérateur maximal 32

2 Quelques travaux sur les problèmes de Sturm-Liouville 33

2 Quelques travaux sur les opérateurs auto-adjoints et non auto-adjoints 43

1 Théorèmes et modèles spectraux pour les opérateurs auto-adjoints . . 43

1.1 Les invariants unitaires et la théorie de multiplication 48

1.2 Opérateurs d'entrelacements et opérateurs auto-adjoints . . . 50
2 Calcul du saut de la résolvante dans le cas du modèle de Friedrichs . 51
2.1 Préliminaire et théorème principal 51
2.2 Notations 54

3 L'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite à potentiel avec retard 60
1 Modèle de Friedrichs de l'opérateur de Sturm–Liouville sur la droite . 61
2 Résolvante de l'opérateur T 63
3 Spectre de l'opérateur L 67
4 Conclusion 72

1 Remerciements

En préambule à cette thèse, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce travail ainsi qu'à la réussite de ce cycle universitaire, le cycle "D", après avoir passé les deux cycles L & M.

En tout premier lieu, mes remerciements et ma gratitude sont destinés à ma directrice de thèse Mme Fatma Diaba, Maître de conférences au Département de Mathématiques, pour son enthousiasme, son implication presque quotidienne et sa grande disponibilité. Elle m'a apporté un soutien moral et scientifique constant, ainsi qu'une compréhension plus approfondie de divers aspects du sujet. Je lui présente les témoignages de ma sincère reconnaissance.

Un grand merci à Mr Cheremnikh E. V., Professeur en Mathématiques à l'université Polytechnique Lviv- Ukraine pour sa collaboration scientifique.

Je remercie Madame REBBANI F. Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

J'adresse également mes sincères remerciements à Madame Djellit Ilhem, Professeur à l'université de Badji Mokhtar Annaba, Monsieur Nouar Ahmed Professeur à l'université de Skikda et Madame Amiar Rachida Maître de conférences à l'université de Badji Mokhtar Annaba pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter d'examiner le travail de cette thèse pour mieux valoriser les résultats obtenus.

Je remercie chaleureusement les enseignants du département de mathématiques au niveau de "l'université d'Annaba", pour m'avoir donné les bases de mon savoir mathématique, que j'ai bien exploité au 3ème Cycle de ma formation.

Mes remerciements vont également au laboratoire de Maths appliqués à sa tête le Professeur REBBANI, qui nous a beaucoup facilité nos déplacements aux conférences internationales et nationales ainsi que le support matériel informatique et consommables. Ce laboratoire nous a donné l'occasion de côtoyer des enseignants de tout le territoire algérien et de l'étranger grâce à l'organisation de plusieurs séminaires ainsi que les journées des jeunes chercheurs.

Un merci du fond du cœur, ma profonde gratitude ainsi que toute ma reconnaissance je les exprime à mes parents à qui je dédie ce travail. Je remercie mon père pour sa présence et son encouragement tout au long de ces années. Mes remerciements s'adressent également à toute ma famille, à mes frères, à mes sœurs et à mon mari.

Je remercie tout particulièrement l'ensemble de mes collègues qu'on présente ensemble la première et la deuxième promotion des thésards en 'Mathématiques et Applications' du nouveau système LMD, pour leur amitié, leur bonne humeur, et leur convivialité que ce soit dans des discussions professionnelles, scientifiques ou dans des thèmes de la vie courante. Merci à mes amis, vos encouragements et votre amitié ont compté énormément ces trois années.

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude du spectre ponctuel et spectre continu de l'opérateur de Sturm-Liouville. Nous avons utilisé un modèle technique appelé modèle de Friedrichs. Utilisant la transformée de Fourier à l'opérateur de Sturm-Liouville (voir [3]) , et on montre que l'opérateur de Sturm-Liouville est unitairement équivalent au modèle de Friedrichs.

Ceci permet d'étudier directement le spectre continu de l'opérateur de Sturm-Liouville à l'aide de la résolvante ce qui évite des calculs compliquées du modèle fonctionnel.

On étudie l'opérateur de Sturm-Liouville perturbé par un opérateur intégral défini par l'expression :

$$Ly = -y'' + q(x)y(x - \Delta), -\infty < x < \infty, \ \Delta \in (-\infty, \infty)$$

Où $q(x)$ est une fonction à valeur complexe qui satisfait la condition

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon |x|), \varepsilon > 0, C = const, \ x \in (-\infty, \infty)$$

Notre but consiste à trouver la décomposition spectrale de l'opérateur perturbé sur l'axe tout entier en utilisant le modèle de Friedrichs.

Le résultat essentiel établit l'existence du spectre continu de l'opérateur de Sturm-Liouville et qui est de multiplicité fini.

Abstract

In this thesis we are interested under investigation of the specific spectrum and continuous spectrum of the operator of Sturm-Liouville. We used a technical model called model of Friedrichs. Using transformed of Fourier to the operator of Sturm-Liouville (look [3]) , and one shows that the operator of Sturm-Liouville is unitairement equivalent to the model of Friedrichs.

This makes it possible to directly study the continuous spectrum of the operator of Sturm-Liouville using the resolvent that avoids complicated calculations of the functional model.

We study the operator of Sturm-Liouville disturbed by an integral operator defined by the expression :

$$Ly = -y'' + q(x)y(x - \Delta), -\infty < x < \infty,\ \Delta \in (-\infty, \infty)$$

Where $q(x)$ is a function with complex value which satisfies the condition

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon\, |x|), \varepsilon > 0, C = const,\ x \in (-\infty, \infty)$$

Our goal consists in finding the decomposition spectral of the operator disturbed on the entire axis by using the model of Friedrichs.

The significant result establishes the existence of the continuous spectrum of the operator of Sturm-Liouville and which is with finished multiplicity.

ملخص

في هذه الأطروحة نركز على دراسة الطيف النقطي والطيف المستمر للمؤثر ستورم – ليوفيل. استعملنا تقنية خاصة تسمى نموذج فريدريكس.

لذلك استخدمنا تحويل فورييه للمؤثر ستورم- ليوفيل (انظر [3]), تبين أن المؤثر ستورم- ليوفيل يعادل ويكافئ لنموذج فريدريكس.

وهذا يسمح لدراسة مباشرة الطيف المستمر للمؤثر ستورم- ليوفيل باستخدام المذيب وبالتالي تجنب الحسابات المعقدة للنموذج وظيفي.

ندرس المؤثر ستورم - ليوفيل المضطرب من قبل المؤثر التكاملي المعطى بالتعبير:

$$Ly = -y'' + q(x)y(x-\Delta), -\infty < x < \infty, \Delta \in (-\infty, \infty)$$

مع q(x) هي دالة ذات قيم مركبة تتوفر الشرط:

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon|x|), \varepsilon > 0, x \in (-\infty, \infty)$$

هدفنا هو العثور على التحلل الطيفي للمؤثر المضطرب على المحور كله باستخدام نموذج فريدريكس.

والنتيجة الرئيسية تحدد وجود الطيف المستمر للمؤثر ستورم - ليوفيل، ومنته.

2 Introduction

La théorie de Sturm-Liouville joue un rôle important dans la résolution de nombreux problèmes de la physique mathématique. Il est un domaine actif de recherche en mathématiques pures et appliquées. Ces dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour les problèmes de Sturm-Liouville avec des conditions aux limites dépendantes d'une valeur propre. Il existe une large littérature sur ce sujet.

Plusieurs équations de la physique mathématique telles que l'équation des ondes, l'équation de Schrödinger etc... peuvent être traitées grâce à la méthode des séparations des variables qui ramène ces équations aux dérivées partielles, à des équations différentielles linéaires du second ordre de la forme

$$\alpha(x)u'' + \beta(x)u' + \gamma(x)u = \lambda u; \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{C}$$

équations dont on cherche les solutions u satisfaisant à des conditions imposées par le problème physique étudié.

En outre, certains problèmes aux limites qui peuvent avoir des discontinuités dans la solution ou dans sa dérivée en un point c intérieur, sont également étudiés. Des conditions sont imposées aux limites à gauche et à droite de solutions et de leurs dérivées à un point c intérieur et sont souvent appelées des conditions de transmission ou des conditions d'interface.

En outre, certains problèmes liés aux conditions de transport résultent des problèmes de conduction thermique pour une plaque mince laminée (par exemple, une plaque composée de matériaux ayant des caractéristiques différentes empilées dans l'épaisseur).

Dans cette classe de problèmes, les conditions de transmission à travers les interfaces doivent être ajoutées lorsque la plaque est laminée. L'étude de la structure de la solution dans la région de la couche correspondante à la solution de base dans la plaque, conduit à l'étude d'un problème aux valeurs propres pour un opérateur différentiel du second ordre avec des coefficients continus par morceaux et des conditions de transmissions.

La théorie des opérateurs non auto-adjoints joue un grand rôle dans des domaines différents et variés de la physique mathématique qui constituent un des thèmes majeurs.

Certains problèmes physiques peuvent être directement modélisés par des équations linéaires.

La modélisation mathématique par les équations aux dérivées partielles suivie de l'analyse théorique et numérique laquelle à son tour est confrontée à l'expérience, est devenue une démarche de base.

De nombreux problèmes spectraux se rencontrent dans les applications (calcul des niveaux d'énergie et des états en mécanique quantique, criticité en neutronique, transmission dans un guide d'onde, une fibre optique, etc...)

La théorie spectrale qui permet de les traiter dépend notamment du spectre continu, source de nombreuses difficultés.

Le chapitre I est un rappel succint des résultats et travaux relatifs à l'opérateur de transport et aux problèmes aux limites non locaux. Il est évident que dans ce domaine riche et fertile mais néamoins difficile que toute avancée minime soit elle représente un intérêt scientifique certain.

Nous y avons également regroupé les résultas obtenus par d'autres auteurs ainsi que les différentes méthodes utilisées ayant un lien direct avec notre problématique.

Dans ce chapitre, notre but est d'introduire la méthode de Friedrichs appliquée à l'opérateur de Sturm-Liouville dans une série de modèles élaborés [10, 34, 59, 60, 59] et tirer de cela des résultats sur le spectre.

Une application du modèle de Friedrichs à l'opérateur de transport établie par Diaba et Cheremnikh [13] est présentée d'une manière détaillée dans notre thèse.

Nous avons aussi exposé quelques résultats sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations d'évolution (voir [6], [5], [11]).

Ce rappel susdit d'un ensemble de résultats et travaux nous a fortement motivé pour envisager cette étude.

Les résultats sont basés essentiellement sur les travaux de Cheremnikh et Diaba [13], [15] indispensables pour l'étude des cas plus généraux.

Le chapitre II est sectionné en deux parties, dans **la première partie** on a considéré le spectre des opérateurs auto-adjoints et non auto-adjoints. Dans l'article de Fuhrmann [47] le théorème spectral (voir [44], [47]) établit que n'importe quel opérateur auto-adjoint A a une représentation intégrale de la forme

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda E(d\lambda) \tag{1}$$

où $E(.)$ est la mesure spectrale associée, c'est la projection orthogonale donnée par l'ensemble des fonctions $\sigma-$additif définies sur les ensembles de Borel de la droite réelle. Au cas où A serait borné, l'intégrale (1) converge au sens de la topologie uniforme d'opérateurs par contre le cas non borné, est donné par la topologie forte des opérateurs. L'intégrale (1) permet de construire un calcul fonctionnel.

L'objectif est d'obtenir une représentation fonctionnelle de l'espace de Hilbert qui permet d'avoir une structure supplémentaire en termes de certains problèmes qui peuvent être résolus d'une manière concrète.

Ainsi, l'auteur est passé à la caractérisation des invariants unitaires des opérateurs auto-adjoints au moyen de la représentation spectrale.

Dans **la deuxième partie**, on a indiqué les conditions sur le modèle de Friedrichs qui permettent d'écrire la formule pour le saut de la résolvante. La représentation de la projection orthogonale par la résolvante R_ζ d'un opérateur auto-adjoint

$$E(\Delta) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta+i\varepsilon} \left(R_\zeta - R_{\bar\zeta}\right) d\zeta, \Delta \subset (-\infty,+\infty)$$

est bien connue depuis longtemps. Evidemment, le saut de la résolvante

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta+i\varepsilon} \left(\left(R_\zeta - R_{\bar\zeta}\right)\varphi,\psi\right), \zeta = \sigma + i\varepsilon, \sigma \in (-\infty,+\infty)$$

est important dans la théorie de la perturbation non auto-adjointe du spectre continu aussi. Dans ce travail, nous précisons les calculs du saut de la résolvante.

Le chapitre III, représente notre contribution sur l'étude du spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite à potentiel avec retard. Dans le travail [10], l'auteur a considéré dans l'espace $L^2(0,\infty)$, l'opérateur

$$Ly = -y'' + q(x)y(x-\Delta), y(0) = 0, x > 0$$

(où $y(x-\Delta) \equiv 0$, $x \in (0,\Delta)$) avec la condition

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon x},\ x > 0,\ \varepsilon > 0$$

Pour l'équation homogène $-y'' + q(x)y(x-\Delta) - \sigma y = 0$, $\sigma > 0$ le comportement asymptotique de la solution $y(x)$ a été obtenu si $x \to \infty$.

Il est naturel de considérer maintenant l'expression $ly = -y'' + q(x)y(x-\Delta)$ sur la droite. Ainsi, nous présentons l'opérateur L dans l'espace $L^2(-\infty,\infty)$ engendré par le domaine de définition maximal.

Nous avons donné la condition d'existence du spectre ponctuel et le spectre continu en appliquant le modèle de Friedrichs en utilisant directement l'expression de la résolvante au lieu des calculs fonctionnels très compliqués.

Ce nouveau résultat a fait l'objet de plusieurs conférences nationales et internationales dont voici quelques unes :

- 7th Euro-Maghreb Workshop on Evolution Equations à Annaba 30 Mai au 3 Juin 2010.

-Congrés des Mathématiques Algériens CMA2012.

- 18ème Colloque CSMT 2012 de la Société mathématiques de Tunisie

- Premier Colloque International sur les équations différentielles Ghardaïa 5, 6 et 7 Mars 2013 CIED2013.

- Conférence sur les problèmes mathématiques non linéaires , Annaba 11 au 13 Mars 2014 ProMa'2014.

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale : Diaba F., Zemmouri A., Cheremnikh E. V, Sturm-Liouville operator on the line with retarded potential apparue dans le journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 6, Issue. 3, 2014, pp. 53-61 Online ISSN : 1943-023X.

CHAPITRE 1

Quelques travaux sur le modèle de Friedrichs et les problèmes de Sturm-Liouville

1 Quelques travaux sur le modèle de Friedrichs

En 1938, K.O. Friedrichs [32] a considéré l'opérateur

$$H = H_0 + \varepsilon V$$

où H_0 est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante dans $L^2(-1, 1)$,

$$H_0 f(x) = x f(x), \qquad -1 < x < 1 \tag{1.1}$$

et où V est un opérateur intégral

$$V f(x) = \int v(x, y) f(y) \, dy$$

Le noyau $v(x, y)$ est une fonction continue, satisfaisant la condition de Hölder et vérifiant

$$v(-1,y) = v(1,y) = v(x,-1) = v(x,1) = 0$$

L'auteur a démontré que pour un ε petit, les opérateurs H_0, H sont unitairement équivalents, c'est-à-dire qu'il existe U tel que

$$U^*U = UU^* = E, \qquad HU = UH_0$$

Ensuite, en 1948 dans [33] l'auteur a généralisé ce modèle pour l'intervalle non fini et pour les fonctions qui peuvent prendre des valeurs dans un espace d'Hilbert auxiliaire.

Ensuite, en 1964 L.D. Faddeev [36] a considéré le cas auto-adjoint mais sans la condition que ε petit et que la condition de Hölder $\geq \dfrac{1}{2}$, il a démontré que l'opérateur perturbé H possède un nombre fini des valeurs propres et que

$$U^*U = E, UU^* = E - P, \qquad \varphi(H)U = U\varphi(H_0)$$

où P est la projection sur le sous espace engendré par les éléments propres et φ une certaine fonction bornée.

En 1970 (voir [62]), L'auteur a étudié les projecteurs propres de l'opérateur

$$T = S + V$$

où V est une perturbation régulière. En particulier, il décrit les vecteurs racines de l'opérateur T et exprimons la dimension de chacun de leurs sous-espaces racines en termes de la multiplicité de la valeur propre (singularité spectrale) comme racine de la perturbation déterminante correspondante.

Nous rappelons que les "projecteurs propres" $P_{\sigma_\pm}$ correspondant à une singularité spectrale σ ont été d'origine définis comme opérateurs agissant de l'espace des éléments réguliers à son espace conjugué. En conséquence, sous cette forme l'opérateur $P_{\sigma_\pm}$ ne peut pas être considéré comme quantité.

L'auteur a construit une extension linéaire de l'opérateur $P_{\sigma_\pm}$ ce qui agit dans un espace simple et satisfait la condition $P^2_{\sigma_\pm} = P_{\sigma_\pm}$, c-à-d, elle est réellement un projecteur.

Dans le cas d'une perturbation complètement régulière, il découle de l'équation de Parseval que des fonctions suffisamment lisses dans H sont déterminées d'une manière unique par leur transformée de Fourier T sur le spectre continu et leurs coefficients de Fourier correspondant au spectre discret.

Ceci se produit, par exemple, dans le cas on il y a une singularité spectrale qui n'est pas une valeur propre.

1.1 Sur les projecteurs de l'opérateur $T = S + V$

Il convient de commencer par une description de racine du sous-espace

$$H_\lambda = \bigcup_k Z\left((T-\lambda)^k\right), \tag{1.2}$$

correspondant à une valeur propre non réelle λ de l'opérateur T, puisque dans ce cas la situation est plus simple que dans le cas d'une singularité spectrale.

Proposition 1.1 *Soit* $a_0, ..., a_{m-1} \in D(S)$ *et*

$$(T-\lambda)a_0 = 0, (T-\lambda)a_j = a_{j-1}, j = 1, ..., m-1, \tag{1.3}$$

où $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. *Posons*

$$c^j = -Ba_j, \;\; j = 0, ..., m-1. \tag{1.4}$$

Alors

$$\frac{1}{j!}K^{(j)}(\lambda)c^0 + ... + K(\lambda)c^j = 0, j = 0, ..., m-1, \tag{1.5}$$

et

$$a_j = S_\lambda^{j+1}A^*c^0 + ... + S_\lambda A^* c^j, j = 0, ..., m-1 \tag{1.6}$$

Réciproquement, soit $c^0, ..., c^{m-1}$ *sont des vecteurs arbitraires dans* G *qui satisfont le système* (1.5). *Définissons les fonctions* $a_0, ..., a_{m-1}$ *par la formule* (1.6). *Alors ces fonctions appartiennent à* $D(S)$ *et satisfont les relations* (1.3) *et* (1.4).

Où

$$T = S + V$$

et

$$K(\zeta)c_\zeta = O_m$$

Théorème 1.1 *Si la perturbation V est complètement régulière, alors chaque fonction $f \in D(D^n)$ est déterminée d'une manière unique par sa $T-$ transformée de Fourier sur le spectre continu et ses $T-$coefficients de Fourier correspondants à toutes les valeurs propres non réelles λ et les singularités spectrales σ de l'opérateur T.*

Ensuite en 1973, B.S. Pavlov [48], a aussi considéré le modèle de Friedrichs pour l'opérateur l_σ défini dans l'éspace $L_2\,(0,\infty)$ pour l'expression différentielle

$$l_\sigma u = \frac{1}{i}\frac{du}{dx}$$

qui agit sur les éléments $u \in W_2^1\,(0,\infty)$ appartenant aux noyaux d'une fonctionnelle bornée définie sur $W_2^1\,(0,\infty)$ par une fonction σ à variation bornée.

$$(u,\bar{\sigma}) = \int_0^\infty u(x)\overline{d\sigma(x)} = 0, \qquad u \in W_2^1\,(0,\infty)$$

Il suppose que $\sigma(x)$ est lisse par morceaux et à support compact. Il étudie la nature du spectre ponctuel et les propriétés du système des fonctions propres sur un certain intervalle fini de l'opérateur l_σ.

En 1976, T. Kako et Yajima [56] considèrent le cas auto-adjoint T_1 dans H avec la mesure spectrale $E_1(.)$ et soit $A, B \in C_0\,(H,\Re)$. On introduit les conditions suivantes $(A-1)$ et $(A-2)$.
$(A-1)$ $D\,(A) \cap D\,(B) \supset D\,(T)$. Le domaine de l'opérateur fermé $B\,[R_1\,(\zeta)\,A^*]$ est égal à l'espace tout entier $\Re$ pour un certain ζ, $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$, où $R_1\,(\zeta) = (T_1 - \zeta)^{-1}$.

Notons

$$B\,[R_1\,(\zeta)\,A^*] = Q\,(\zeta)\,, \qquad A\,[R_1\,(\zeta)\,B^*] = Q^*\,(\zeta) = Q\,(\zeta)^*$$

$(A-2)$ Il existe une constante $\delta > 0$ et un ensemble ouvert Δ tel que $(1 + Q(\zeta))$ possède un inverse borné $(1 + Q(\zeta))^{-1}$ pour chaque $\zeta \in \Pi_{\delta}^{\pm}(\Delta)$ et $(1 + Q(\zeta))^{-1}$est uniformément borné au point $\zeta \in \Pi_{\delta}^{\pm}(\Delta)$ où

$$\Pi_{\delta}^{\pm}(\Delta) = \left\{ \begin{array}{r} \zeta \in C^1 / \ \operatorname{Re}\zeta \in \Delta, \\ 0 \lesseqgtr \operatorname{Im}\zeta \lesseqgtr \pm\delta \end{array} \right\} \tag{2.45}$$

et Δ un intervalle ne contenant pas de singularités spectrales.
On note que $(A-2)$ implique que $1 + Q^*(\zeta)$ possède les mêmes propriétés que $1 + Q(\zeta)$ et $(1 + Q(\zeta))^{-1}$ et $(1 + Q^*(\zeta))^{-1}$ sont tous les deux holomorphes en $\zeta \in \Pi_{\delta}^{\pm}(\Delta)$.
$(B-1)$ (petite perturbation). Il existe γ, $0 \leq \gamma \leq 1$ tel que

$$\|Q(\zeta)\| \leq \gamma \ , \ \zeta \in \Pi_{\delta}^{\pm}(\Delta) \tag{2.46}$$

$(B-2)$ (perturbation Compacte) $Q(\zeta)$ est compacte à un certain $\zeta \in \Pi_{\delta}^{\pm}(\Delta)$ et $Q(\zeta)$ possède une valeur limite bornée $Q(\lambda \pm i0) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} Q(\lambda + i\varepsilon)$ au sens de la norme topologique de l'opérateur lequel est continu au point $\lambda \in \Delta$ et $0 \notin \sigma(1 + Q(\lambda \pm i0))$.

Sous les conditions $(A-1)$ et $(A-2)$ les auteurs définissent la résolvante pertubée $R_2(\zeta)$ comme

$$R_2(\zeta) = R_1(\zeta) - [R_1(\zeta) A^*] (1 + Q(\zeta))^{-1} B R_1(\zeta), \qquad \zeta \in \Pi_{\delta}^{\pm}(\Delta) \tag{2.47}$$

et ils démontrent que $R_2(\zeta)$ est le résolvante d'un certain opérateur fermé T_2 et ils ont obtenu les opérateurs d'ondes

$$\begin{aligned} W_{\pm}(\Delta) &= s - \lim e^{itT_2} E_2(\Delta) e^{-itT_1} E_1(\Delta) \\ Z_{\pm}(\Delta) &= s - \lim e^{itT_1} E_1(\Delta) e^{-itT_2} E_2(\Delta) \end{aligned}$$

En 1997, dans Cheremnikh E.V. [6], a repris ce modèle de Friedrichs pour l'opérateur de Sturm-Liouville mais dans l'espace $L^2(0,+\infty)$ sous des conditions qui lui permettent d'étudier la transformée de Fourier d'un certain opérateur de Sturm-Liouville. Il considère l'espace $H = L^2_\rho(0,+\infty)$ et l'opérateur

$$T = S + V$$

où S est l'opérateur non perturbé défini par $S\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau), \tau > 0$ de domaine maximal $D(S)$ et la perturbation admet la factorisation $V = A^*B$ où les opértaeurs A, B agissent dans un espace d'Hilbert auxiliaire G tels que

$$A\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)\,\alpha(s)\,\rho(s)\,ds, \qquad B\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)\,\beta(s)\,\rho(s)\,ds \tag{1.7}$$

où $\alpha(s), \beta(s) \in G$ sont certaines fonctions vectorielles, soient $\|.\|, \|.\|_H$ les normes dans G, H.

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites

A_1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{ds}{\rho(s)(1+s)} < \infty$;

A_2. Les fonctions $\rho(s), \alpha(s), \beta(s)$ admettent n dérivées continues pour un certain $n \geq 1$;

A_3. $\alpha'(s), \beta'(s), \left(\dfrac{1}{\rho(s)}\right)' = o(1)$, $\alpha(s), \beta(s) = o\left(\dfrac{1}{\ln s}\right)$, $s \to \infty$;

A_4. $\sup\limits_{(0,\infty)} \rho(s)\|\alpha(s)\| < \infty$, $\sup\limits_{(0,\infty)} \rho(s)\|\beta(s)\| < \infty$;

A_5. Pour tout $\varphi \in L^2_\rho$ les intégrales (1.7) convergent dans le sens de la norme de G et définissent les opérateurs bornés de $L^2_\rho \to G$ avec $R(A)$, $R(B)$ denses dans G.

L'auteur a besoin de la fonction $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$ où $S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}$, cette fonction est connue dans la théorie des opérateurs $T = S + A^*B$

Soit $\Omega_+(\delta) = \{\zeta : |\zeta| \leqslant \delta,\ Im\zeta > 0,\ |\zeta - \sigma| < \delta\}$ et $F_+(\sigma) = \lim\limits_{\tau \searrow 0} F(\sigma + i\tau)$ pour une fonction analytique $F(s)$ dans $\Omega_+(\delta)$.

$$F(\zeta)=\int_a^b \frac{f(s)}{s-\zeta}ds, f\in C^1[a,b], \zeta\notin[a,b].$$

Lemme 1.1 *Soient $f(s), f'(s), s>0$ sont des fonctions différentiables et $\dfrac{F(s)}{1+s}\in L^1(0,\infty)$, $f(s)=o\left(\dfrac{1}{\ln s}\right)$, $f'(s)=o(1), s\longrightarrow\infty$. Alors la fonction*

$$F(\zeta)=\int_0^\infty \frac{f(s)}{s-\zeta}ds$$

a la limite $\lim\limits_{|\zeta|\longrightarrow\infty}F(\zeta)=0$ uniformément lorsque $\arg\zeta\in[a,b]$.

Considérons de nouveau, $S_\zeta=(S-\zeta)^{-1}, \zeta\notin[0,\infty)$ et $K(\zeta)=1+BS_\zeta A^*$. Il est évident que $A^*c(s)=(c,\alpha(s))$, où $(.,.)$ est le produit scalaire dans G. Alors

$$(K(\zeta)c,d)=(c,d)+\int_0^\infty \frac{(c,\alpha(s))\,(\beta(s),d)}{s-\zeta}\rho(s)ds, \qquad \zeta\notin[0,\infty)$$

Nous posons $c\in D(K_\pm(\sigma))$ si la fonctionnelle $d\longrightarrow(K(\sigma)c,d)_\pm$ est bornée dans G et nous définissons $K_\pm(\sigma):G\longrightarrow G$ par la relation

$$(K_\pm(\sigma)c,d)=(K(\sigma)c,d)_\pm, c,d\in G.$$

1. $\lim\limits_{\zeta\longrightarrow\sigma\pm i0}\|K(\zeta)-K_\pm(\sigma)\|=0$ *et les opérateurs $K(\zeta)-1, \zeta\notin[0,\infty)$ et $K_\pm(\sigma)-1, \sigma>0$, sont complètement continus.*
2. $\lim\limits_{\zeta\longrightarrow\infty}\|K(\zeta)-1\|=0$ *uniformément pour* $\arg\zeta\in[0,2\pi]$.

L'auteur passe à l'étude du modèle de Friedrichs de l'opérateur maximal, il introduit une notion abstraite de l'opérateur maximal.

Définition 1.1 *L'opérateur $\tilde{S}$ est appelé maximal correspondant à l'opérateur S si*

$$D(\tilde{S}) = \left\{ \varphi \in H : \exists c = c(\varphi) : \int\limits_0^\infty |\tau\varphi(\tau) + c(\varphi)|^2 \rho(\tau) d\tau < \infty \right\}$$

et

$$\tilde{S}\varphi(\tau) = \tau\varphi(\tau) + c(\varphi)$$

evidemment, pour $\varphi \in D(\tilde{S})$ le nombre $c(\varphi)$ est unique et en plus, $\varphi \in D(S) \Leftrightarrow c(\varphi) = 0$

En 2005, dans le travail de F. Diaba et E. V. Cheremnikh [13] , les auteurs ont considéré dans le l'espace $L^2(D)$ où $D = \mathbb{R} \times [-1, 1]$, l'opérateur

$$(Lf)(x, \mu) = i\mu f_x(x, \mu) + c_0(x) \int\limits_{-1}^{1} f(x, \mu) d\mu, \quad x \in \mathbb{R},\ \mu \in (-1, 1) \tag{1.8}$$

où le potentiel $c_0(x)$ vérifie la condition

$$|c_0(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|},\ \varepsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Ils ont étudié le spectre de cet opérateur, pour cela ils commencent par transformer l'opérateur initial pour obtenir le modèle de Friedrichs. En appliquant la transformation de Fourier

$$(Ff)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt, t \in \mathbb{R}.$$

Ils obtiennent

$$(FLf)(x) = \tau\mu u(\tau, \mu) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} c_0(x) \int\limits_{-1}^{1} f(t, \mu) e^{-ix\tau} dx d\mu$$

1.2 Notations

Soit l'espace H défini par

$$H = \left\{ \varphi(s,\mu) : \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |\varphi(s,\mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu < \infty \right\}$$

L'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$, son adjoint

$$(Zc)(s,\mu) = c\left(\frac{s}{\mu}\right), c \in L^2(\mathbb{R}), (Z^*\varphi) = \int_{-1}^{1} \varphi(\tau\mu,\mu) d\mu$$

Et le changement de variables

$$(s,\mu) \to (\tau,\mu) \quad \left\{ \begin{array}{c} \tau = \frac{s}{\mu}, \mu \neq 0 \\ \mu = \mu \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} s = \tau\mu \\ \mu = \mu \end{array} \right\}$$

Ce changement de variables définit l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$ par

$$(F \circ u)(s,\mu) = u(\frac{s}{\mu},\mu)$$

Il a été supposé que le potentiel est factorisé de façon que

$$C_0(x) = C_{01}(x)C_{02}(x), \quad |C_{01}(x)| = |C_{02}(x)| = \sqrt{|C_0(x)|}$$

Les opérateurs $C_{01}, C_{02} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ sont des opérateurs de multiplication par les fonctions respectivement $c_{01}(x), c_{02}(x)$

$$(C_{01}\varphi)(x) = c_{01}(x)\varphi(x), (C_{02}\varphi)(x) = c_{02}(x)\varphi(x)$$

Le modèle de Friedrichs sera défini dans l'espace H comme une certaine perturbation de l'opérateur de multiplication par la variable indépendante

$$\begin{aligned} S &: H \to H \\ (S\varphi)(\tau,\mu) &= \tau\varphi(\tau,\mu), \tau \in \mathbb{R}, \mu \in (-1,1) \end{aligned}$$

avec le domaine de définition maximal $D(S)$.

Lemme 1.2 *Soit $L : L^2(D) \to L^2(D)$ l'opérateur de domaine de définition maximal défini par* (1.8)*. Alors*

$$ULU^{-1} = S + V : H \to H$$

où l'opérateur

$$\begin{aligned} (V\varphi)(s,\mu) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu'}{|\mu'|}\int_{\mathbb{R}}\tilde{c}_0(x)\left(\frac{s'}{\mu'}-\frac{s}{\mu}\right)\varphi(s',\mu')ds' \\ \tilde{c}_0(y) &= \int_{\mathbb{R}} c_0(x)e^{ixy}dx \end{aligned}$$

est borné dans H et admet la factorisation $V = A^*B$ avec $A, B : H \to L^2(\mathbb{R})$ où

$$A = C_{01}F^{-1}Z^*, B = C_{02}F^{-1}Z^* \tag{1.9}$$

Définition 1.2 *Nous appelons l'opérateur*

$$T = S + V, V = A^*B \tag{1.10}$$

modèle de Friedrichs dans l'espace H.

Corollaire 1.1 *On obtient*

$$L = U^{-1}TU$$

l'opérateur $L : L^2(D) \to L^2(D)$ (voir (1.8)*) est unitairement équivalent au modèle de Friedrichs* (1.10) *.*

1.3 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to \infty$

L'étude du spectre de l'opérateur L se réduit à celle de l'opérateur T sera donnée directement à partir de la résolvante

$$T_\zeta \psi = (T - \zeta)^{-1} \psi = \varphi = S_\zeta \psi - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta \psi$$

Par conséquent, les propriétés de la résolvante dépendent de celles de l'opérateur

$$K(\zeta) - 1 = B S_\zeta A^* = C_{02} F^{-1} Z^* S_\zeta F C_{01}^*$$

Les prolongements analytiques de $K(\zeta)$ par l'axe réel seront notés $K_\pm(\zeta)$ et leurs noyaux respectivement par $k_\pm(x, y, \zeta)$.

Lemme 1.3 *1. L'opérateur $K(\zeta) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \zeta \notin \mathbb{R}$ est complètement continu et*

$$\|K(\zeta) - 1\| \to 0, r \to \infty$$

uniformément dans le domaine $|\zeta| > r, |\operatorname{Im} \zeta| > \nu_0$ pour chaque $\nu_0 > 0$.

2. L'opérateur $K(\zeta) - 1$ admet un prologement analytique au-dessus des demi-axes $(-\infty, 0), (0, \infty)$ et

$$\|K_\pm(\zeta) - 1\| \to 0, |\zeta| \to \infty,$$

uniformément dans le domaine $|\operatorname{Im} \zeta| < \varepsilon_1$ pour chaque $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$

1.4 Etude de la résolvante dans le cas $\zeta \to 0$

Ils vont obtenu la limite principale du comportement asymptotique du noyau de l'opérateur $K(\zeta) - 1$ si $\zeta \to 0$ et étudier l'opérateur inverse $K^{-1}(\zeta)$ avec la condition supplémentaire sur le potentiel $c_0(x)$ (voir (1.8)).

Ce noyau est donné par

$$\begin{aligned} k(x,y,\zeta) &= \frac{1}{2\pi} C_{02}(y)\overline{C_{01}(y)} I(u,\zeta), u = y - x \\ I(u,\zeta) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-\tau}^{\tau} \frac{dt}{t-\zeta} \right) \frac{e^{i\tau u}}{\tau} d\tau \end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$ une valeur arbitraire et

$$\Omega_- = \{\zeta : |\zeta| \leq \delta, \operatorname{Im}\zeta \leq 0, \zeta \neq 0\}$$

(respectivement Ω_+ pour $\operatorname{Im}\zeta \geq 0$).

Lemme 1.4 *Soit $p > 0$ et $\zeta = \sigma + i\nu \in \Omega_\pm$, alors il existe la constante $C > 0$ telle que*

$$I(u,\zeta) = \gamma(\zeta) + I_0(u,\zeta) \quad (I_0 \textit{ est bornée par rapport à } \zeta)$$

où

$$\gamma(\zeta) = -\pi i sign \nu \ln \zeta$$

et

$$I_0(u,\zeta) \leq C \left(\frac{1}{|u|^{\frac{1}{p}}} + |u| \right), \zeta \in \Omega_\pm, |u| \in (0,\infty)$$

Lemme 1.5 *Soient les domaines $\Omega_\pm$ donnés avec le rayon ε, alors il existe $C_0(\varepsilon)$ telle que*

$$\begin{aligned} K(\zeta) - 1 &= \gamma(\zeta)(.,C_{01})_{L^2(\mathbb{R})} C_{02} + Q(\zeta), \\ \gamma(\zeta) &= -\pi i sign \nu \ln \zeta, \quad \zeta = \sigma + i\nu \in \Omega_\pm \end{aligned}$$

où l'opérateur $Q(\zeta) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ admet l'estimation

$$Q(\zeta) \leq C_0(\varepsilon) \left\| c_0 \right\|_\varepsilon, \zeta \in \Omega_\pm$$

où

$$\|c_0\|_\varepsilon = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |c_0(x)|^2 \, e^{2\varepsilon|x|} dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.11}$$

1.5 Spectre ponctuel de l'opérateur L

Notons que la constante $C_0(\varepsilon)$ dans (1.11) ne dépend pas de l'opérateur L. Nous introduisons la constante $C(\varepsilon) = \dfrac{1}{3C_0(\varepsilon)}$ laquelle définit le sous ensemble suivant $N \subset L^2(\mathbb{R})$:

$$N = \left\{ h \in L^2(\mathbb{R}) : \|h\|_\varepsilon \leq C(\varepsilon) \left| \int\limits_{\mathbb{R}} h(x) dx \right| \diagup \int\limits_{\mathbb{R}} |h(x)| \, dx \right\} \tag{1.12}$$

Théorème 1.2 *Pour chaque potentiel $c_0 \in N$ il existe $\delta > 0$ tel que l'opérateur T (voir (1.10)) n'a pas de spectre ponctuel dans le domaine $0 < |\zeta| < \delta$.*

Définition 1.3 *On appelle la singularité spectrale de l'opérateur T un pôle généralisé $\sigma_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ des fonctions $\sigma \to (T_\sigma \varphi, \psi)_\pm$, où $(T_\sigma \varphi, \psi)_\pm = \lim\limits_{\varepsilon \to \pm 0} (T_{\sigma + i\varepsilon} \varphi, \psi)_H$, $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$ et les fonctions φ, ψ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.*

Nous n'étudions pas $\zeta = 0$ comme point du spectre.

Lemme 1.6 *La valeur propre $\zeta_0, \operatorname{Im} \zeta_0 \neq 0$ et la singularité spectrale $\sigma_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ de l'opérateur sont respectivement pôles de la fonction oppératorielle $K(\zeta)^{-1}$, $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ et son prolongement analytique $K_+(\sigma)^{-1}$ ou $K_-(\sigma)^{-1}, \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Théorème 1.3 *Le spectre ponctuel de l'opérateur L est fini pour tout potentiel $c_0(t)$ exponentiellement décroissant de l'ensemble $N \subset L^2(0, \infty)$ (voir (1.12)).*

Comme suite de l'article précédent, en 2010, Diaba F. et Cheremnikh E.V., Ivasyk G. V. [15] ont étudié les opérateurs d'évolutions. Ils ont considéré dans l'espace

$L^2(D), D = \mathbb{R} \times [-1,1]$ l'opérateur de transport

$$Lf = -i\mu \frac{\partial f}{\partial x} + a(x) b_1(\mu) \int_{-1}^{1} b(\mu') f(x, \mu') d\mu'. \tag{1.13}$$

avec le domaine de définition maximal $D(L)$ sous les conditions suivantes : Il existe des constantes $M > 0$, $\epsilon > 0$ telles que

$$|a(x)| < Me^{-\epsilon |x|}, x \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

et les fonctions $b(\mu), b_1(\mu)$ admettent une prolongement analytique de l'intervalle $(-1,1)$ dans le cercle $|z| < 1 + \epsilon$. Notons que $b_1(\mu) \equiv 1$ et $b_0(\mu) \equiv b(\mu) \equiv 1$.

Ils ont étudié l'équation d'évolution de transport suivante

$$\begin{cases} \dot{u} = iLu, t > 0 \\ u \mid_{t=0} = u(0), u(0) \in D(L) \end{cases} \tag{1.15}$$

et ils ont obtenu le terme principal du comportement asymptotique des solutions de ces équations correspondant aux valeurs propres de l'opérateur L. Ils supposent que l'opérateur L n'a pas des singularités spectrales.

1.6 Modèle de Friedrichs de l'opérateur de transport

Transformons l'opérateur L en modèle de Friedrichs. Commençons par des notations. Soit H l'espace de Hilbert des fonctions $\varphi(s, \mu)$, $(s, \mu) \in D$, $D = \mathbb{R} \times [-1,1]$ avec la norme

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |\varphi(s, \mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu.$$

Soit l'opérateur $F_0 : L^2(D) \to H$, où

$$(F_0 u)(\tau, \mu) = u\left(\frac{\tau}{\mu}, \mu\right), u \in L^2(D), \tau \in \mathbb{R} \tag{1.16}$$

et l'opérateur $Z : L^2(\mathbb{R}) \to H$, où

$$(Zc)(\tau, \mu) = c\left(\frac{\tau}{\mu}\right), c \in L^2(\mathbb{R}). \tag{1.17}$$

Il est facile de vérifier que

$$\|F_0 u\|_H = \|u\|_{L^2(D)},$$

que F_0 est un opérateur unitaire et que l'opérateur Z est borné, à savoir $\|z\| \leq \sqrt{2}$, où Z est grand. La transformation de Fourier est notée par

$$(Ff)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-is\tau} f(\tau) d\tau, s \in \mathbb{R}$$

dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et dans l'espace $L^2(D)$ aussi.

Maintenant appliquons à l'égalité (1.13) la transformation de Fourier par rapport à la variable x, alors

$$(FLf)(\tau, \mu) = \tau\mu u(\tau, \mu) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-1}^{1} a(x) b(\mu') f(x, \mu') d\mu' \right) e^{-ix\dfrac{s}{\mu}} dx,$$

où $u = Ff$.

Maintenant, appliquons l'opérateur F_0 (voir (1.16)), simplement c'est la substitution $\tau = \dfrac{s}{\mu}$ alors

$$(F_0 FLf)(s, \mu) = su(\frac{s}{\mu}, \mu) + \frac{b_1(\mu)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{-1}^{1} a(x) b(\mu') f(x, \mu') d\mu' \right) e^{-ix\dfrac{s}{\mu}} dx$$

Nous notons $\varphi(s, \mu) = u\left(\dfrac{s}{\mu}, \mu\right)$ ou $\varphi = F_0 u = F_0 Ff$. Soit $\dfrac{s}{\mu} = \tau$, alors

$u(\tau, \mu) = \varphi(\tau\mu, \mu) = \left(F_0^{-1}\varphi\right)(\tau, \mu)$. C'est pourquoi

$$f(x, \mu) = \left(F^{-1}F_0^{-1}\varphi\right)(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(\tau\mu, \mu\right) e^{i\tau x} d\tau.$$

Le changement de variable $s' = \mu\tau$ (les cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$) donne

$$f(x, \mu') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(s', \mu^{\prime i \frac{s'}{\mu'}}\right) \frac{ds'}{|\mu'|}$$

Finallement, nous obtenons

$$\left(F_0 F L F^{-1} F_0^{-1}\varphi\right)(s, \mu) = s\varphi\left(s, \mu\right) + V\varphi(s, \mu), \tag{1.18}$$

où

$$V\varphi(s, \mu) = \frac{b_1(\mu)}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^{1} a(x) b(\mu') \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(s', \mu^{\prime i \frac{s'}{\mu'}}\right)\right) \frac{d\mu'}{|\mu'|} e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx \tag{1.19}$$

Nous choisissons une certaine factorisation pour la fonction $a(x)$ tel que

$$a(x) = \overline{a_1(x)} a_2(x), |a_1(x)| = |a_2(x)| \tag{1.20}$$

Soit $G = L^2(\mathbb{R})$ alors $V = A^*B$ (voir (1.19)), où les opérateurs $A, B : H \to G$ sont donnés par les expressions

$$\begin{cases} A^*c(s, \mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} b_1(\mu) \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \overline{a_1(x)} c(x) e^{-ix\frac{s}{\mu}} dx \\ B\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_2(x) \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^{1} b(\mu')\varphi\left(s', \mu^{\prime i \frac{s'}{\mu'}}\right) \frac{d\mu'}{|\mu'|} ds' \end{cases} \tag{1.21}$$

Evidemment, l'opérateur $U = F_0F : L^2(D) \to H$ (voir (1.16)) est unitaire. Alors, le théorème suivant est prouvé.

Théorème 1.4 *Soit $L : L^2(D) \to L^2(D)$ l'opérateur avec le domaine de la définition maximal donné par l'expression* (1.13). *Alors*

$$ULU^{-1} = T : H \to H$$

où

$$T = S + V, V = A^*B$$

$(S\varphi)(\tau,\mu) \equiv \tau\varphi(\tau,\mu), \tau \in \mathbb{R}, \mu \in (-1,1)$ *et les opérateurs A, B acte de H vers* $G = L^2(\mathbb{R})$. (*voir* (1.21)) .

Lemme 1.7 *Les opérateurs $A, B : H \to G$, à savoir*

$$\begin{cases} A\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_1(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} b_1(\mu)\varphi(s,\mu)\, e^{ix\frac{s}{\mu}} \frac{d\mu}{|\mu|} ds \\ B\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} a_2(x) \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} b(\mu)\varphi(s',\mu)\, e^{ix\frac{s}{\mu}} \frac{d\mu}{|\mu|} ds \end{cases} \tag{1.22}$$

sont bornés.

Proposition 1.2 *Si $a(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$ et $b_1(\mu) = b(\mu), \mu \in (-1,1)$, alors le modèle de Friedrichs $T = S + V$ est un opérateur auto-adjoint, $T^* = T$.*

1.7 Spectre de modèle de Friedrichs

Nous considérons la résolvante de l'opérateur

$$T = S + A^*B$$

L'équation

$$(T - \zeta)\,\varphi = \psi, \psi \in H, \zeta \notin \mathbb{R},$$

prend la forme

$$(S-\zeta)\,\varphi + A^* B\varphi = \psi.$$

Notons

$$S_\zeta = (S-\zeta)^{-1}\,, T_\zeta = (T-\zeta)^{-1}\,.$$

Comme $\zeta \notin \mathbb{R}$ alors l'opérateur S_ζ existe, est borné et l'équation prend la forme

$$\varphi + S_\zeta A^* B\varphi = S_\zeta \psi \tag{1.23}$$

Application de l'opérateur B, nous obtenons $(1 + BS_\zeta A^*)\,B\varphi = BS_\zeta\psi$. Soit

$$K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*, \zeta \notin \mathbb{R} \tag{1.24}$$

Alors pour l'expression $B\varphi$ dans (1.23) nous obtenons

$$B\varphi = K^{-1}(\zeta)BS_\zeta\psi.$$

Prenant en considération la bornitude des opérateurs A et B, nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.3 *Si l'opérateur $K(\zeta), \zeta \notin \mathbb{R}$ a un opérateur inverse borné $K(\zeta)^{-1}$, alors la valeur ζ appartient à l'ensemble résolvant de l'operateur T et*

$$T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} BS_\zeta \tag{1.25}$$

Lemme 1.8 *L'opérateur $K(\zeta)$ (voir (1.24)) admet la représentation*

$$\left(\left(K(\zeta)-1\right)c\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x,y,\zeta)c(y)dy, \zeta \notin \mathbb{R}, \tag{1.26}$$

où

$$k(x,y,\zeta) = \frac{1}{2}a_2(x)\overline{a_1(y)}I(x-y,\zeta$$

et

$$I(u,\zeta) = \int\limits_{\mathbb{R}} l(\tau,\zeta)e^{iu\tau}d\tau, l(\tau,\zeta) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{b(\mu')b_1(\mu')}{\tau\mu' - \zeta}d\mu' \tag{1.27}$$

Théorème 1.5 *L'opérateur $K(\zeta) - 1 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \zeta \notin \mathbb{R}$ est compact et*

$$\|K(\zeta) - 1\| \to 0, |\zeta| \to \infty$$

uniformément dans le domaine $|\operatorname{Im}\zeta| > 0$ pour chaque $\nu > 0$.

Théorème 1.6 *L'opérateur $K(\zeta) - 1$ admet un prolongement analytique l'opérateur $K_{\pm}(\zeta) - 1$ au-dessus des demi-axes $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$ et*

$$\|K_{\pm}(\zeta) - 1\| \to 0, |\zeta| \to \infty$$

uniformément dans le domaine $|\operatorname{Im}\zeta| < \epsilon$ pour chaque $\epsilon_1 < \dfrac{\epsilon}{2}$.

1.8 Construction du semi-groupe $\exp{(itT)}$

Il est connu que le problème de Cauchy $\dot{u} = Mu$, $u\mid_{t=0}= u(0)$, où l'opérateur M est tel que le demi plan $\operatorname{Re}\zeta > \gamma > 0$ appartient à son ensemble résolvant, admet sous une certaine condition près la représentation de la solution

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\zeta t}R(\zeta, M)u(0)d\zeta, \quad R(\zeta, M) = (M - \zeta)^{-1}$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \dot{u} = iTu, t > 0 \\ u\mid_{t=0}= u(0), u(0) \in D(T) \end{cases} \tag{1.28}$$

Notons $\zeta = \gamma + i\theta, -\infty < \theta < \infty$, alors $(iT - \zeta)^{-1} = -iT_{\theta - i\gamma}$.

Au lieu de cela, une vérification difficile de certaine condition suffisante sur l'opérateur T, nous proposons directement de choisir la solution sous la forme

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma+i\theta)t}T_{\theta-i\gamma}u(0)d\theta \tag{1.29}$$

Nous notons

$$h(t,\theta) = e^{(\gamma+i\theta)t}$$

et nous notons l'élément $u(0) = \varphi(\tau,\mu) \in H$ simplement par $u(0) = \varphi$. Alors, nous devons prouver que l'opérateur

$$U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\theta)T_{\theta-i\gamma}d\theta, t > 0 \tag{1.30}$$

définit le semi-groupe correspondant au problème (1.28).

Théorème 1.7 *Si $\varphi \in D(T)$ alors l'intégrale* (1.30) *admet la représentation*

$$U(t)\varphi = \varphi - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma}T_{\theta-i\gamma}T\varphi d\theta, t > 0 \tag{1.31}$$

où l'intégrale converge au sens de la norme de H.

Lemme 1.9 *Si $\varphi \in D(T)$ alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma}T_{\theta-i\gamma}T\varphi d\theta = T\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t,\theta)}{\theta - i\gamma}T_{\theta-i\gamma}\varphi d\theta \tag{1.32}$$

Lemme 1.10 *Si $\varphi \in H$, alors*

$$s - \lim_{\Delta t \to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\theta - i\gamma}\frac{\Delta h}{\Delta t}T_{\theta-i\gamma}\varphi d\theta = i\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\theta)T_{\theta-i\gamma}d\theta \tag{1.33}$$

Théorème 1.8 *Soit $\varphi \in D(T)$, alors*

$$U'(t)\varphi = iTU(t)\varphi, t > 0, \tag{1.34}$$

où $U'(t)$ signifie la dérivée forte.

Théorème 1.9 *Soit $\varphi \in D(T)$, alors*

$$\lim_{t\to 0} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0 \tag{1.35}$$

Théorème 1.10 *Le problème*

$$\begin{cases} \dot{u} = iTu, t > 0 \\ u\mid_{t=0} = \varphi, \quad \varphi \in D(T) \end{cases}$$

a une solution unique $u(t) = U(t)\varphi$, donnée par le semi-groupe

$$U(t)\varphi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma+i\theta)t}T_{\theta-i\gamma}\varphi d\theta$$

1.9 Recherche de la résolvante de l'opérateur maximal

Soit $\psi \in R(\tilde{S} - \sigma)$ une fonction continue alors $\left(\tilde{S} - \sigma\right)\varphi = \psi$, ou

$$(s-\sigma)\,\varphi(s) + c(\varphi) = \psi(s)$$

Si $s = \sigma$ alors $c(\varphi) = \psi(s)$

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= R_\sigma\psi(s) = \frac{\psi(s) - \psi(\sigma)}{s - \sigma} \\ \text{où } R_\sigma &= \left(\tilde{S} - \sigma\right)^{-1} \end{aligned}$$

Soit $N(\sigma) = 1 + BR_\sigma A^*$. Il est naturel de supposer que $N(\sigma)$ est inversible.

Théorème 1.11 *La résolvante de l'opérateur maximal* $\tilde{T}_\sigma = \left(\tilde{T} - \sigma\right)^{-1}$ *existe si et seulement si l'opérateur* $N(\sigma)$ *est inversible. Si l'opérateur inverse* $N(\sigma)^{-1}$ *existe alors,*

$$\tilde{T}_\sigma f = \tilde{S}_\sigma f - \tilde{S}_\sigma A^* N(\sigma)^{-1} B \tilde{S}_\sigma f$$

Le modèle de Friedrichs a été considéré dans le cas de l'opérateur de transport lequel engendre un problème physique défini plus bas.

2 Quelques travaux sur les problèmes de Sturm-Liouville

En 2003, R. del Rio et Olga Tchebotavera [51] considèrent les équations unidimensionnelles de Schrödinger

$$ly = -y'' + v(x)y(x) = Ey(x), \ 0 \leq x \leq \infty, \tag{1.36}$$

et les opérateurs auto-adjoints associés

$$H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) \quad \text{on } L_2(0,\infty)$$

engendrés par les conditions aux limites

$$y(0)\cos\alpha - y'(0)\sin\alpha = 0, \alpha \in [0,\infty) \tag{1.37}$$

Soient $u_1(x,z)$ et $u_2(x,z)$ des solutions de

$$lu = zu \tag{1.38}$$

qui satisfont

$$\begin{aligned} u_1(0,z) &= \sin\alpha, u_1'(0,z) = \cos\alpha \\ u_2(0,z) &= -\cos\alpha, u_2'(0,z) = \sin\alpha \end{aligned}$$

Pour chaque z non réel, il existe une fonction

$$\varphi_\alpha(x,z) = u_2(x,z) + m_\alpha(z) u_1(x,z)$$

qui est une solution de (1.38) et appartient à $L_2(0,\infty)$. Notons que u_1 satisfait les conditions aux limtes (1.37). La fonction $m_\alpha(z)$ est appelée la fonction de Weyl et a une représentation intégrale de la forme

$$m_\alpha(z) = c + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\mu - z} - \frac{\mu}{\mu^2+1} \right) d\rho_\alpha(\mu),$$

où $\rho_\alpha$est une mesure de Lebesgue-Stieltjes déterminée d'une manière unique par m_α. La mesure ρ_α est apelée la fonction spectrale de H_α.

La densité spectrale $\dfrac{d\rho_\alpha}{d\lambda}$ est donnée presque partout par

$$\frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{E\to 0+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m_\alpha(\lambda + iE) =: \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m_\alpha\left(\lambda + i0\right).$$

Nous pouvons la considérer comme densité de probabilité locale pour l'énergie du système.

Théorème 2.1 *Soient* λ_i, λ_j *les deux valeurs propres de* (1.36) *dans un intervalle* $[0,N]$ *avec les conditions* (1.37) *et des conditions semblables dans* N. *Soit* ρ_0 *la mesure spectrale de ce problème. Alors*

$$\rho_0\left([\lambda_i,\lambda_j]\right) = \max_{\rho \in M_N} \rho\left([\lambda_i,\lambda_j]\right)$$

En 2007, Diaba F. et Cheremnikh E. V. [14] se sont intéressés à un aspect du calcul de fonctionnel pour des opérateurs non auto-adjoints. Ils ont considéré la perturbation du domaine de définition en utilisant le modèle de Friedrichs.

En raison de l'importance de la fonction opératorielle avec la condition non locale, les auteurs ont donné comme résultat, la forme explicite de la fonction d'un tel cas d'opérateur en particulier de la fonction exponentielle de l'opérateur de Sturm-

Liouville $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ dans l'espace $L^2(0,\infty)$ avec la condition non local $y(0) = (y,\eta)_{L^2(0,\infty)}$.

Soit $ly = -y''$. L'opérateur non perturbé B est defini dans l'espace $L^2(0,\infty)$ comme suit :

$$\begin{cases} D(B) = \{y \in L^2(0,\infty) : ly \in L^2(0,\infty), y(0) = 0\} \\ By = ly, y \in D(B) \end{cases} \tag{1.39}$$

Soit $\eta \in L^2(0,\infty)$ une fonction arbitraire, nous notons par $\Phi(.)$ la fonctionnelle

$$\Phi(y) = (y,\eta)_{L^2(0,\infty)}. \tag{1.40}$$

l'opérateur perturbé A est défini comme suit :

$$\begin{cases} D(A) = \{z \in L^2(0,\infty) : lz \in L^2(0,\infty), z(0) + \Phi(z) = 0\} \\ Az = lz, z \in D(A) \end{cases}$$

Nous notons par $e \in L^2(0,\infty)$ une fonction arbitraire tel que

$$le, l^2e \in L^2(0,\infty), e(0) = 1, \Phi(e) = -2 \tag{1.41}$$

Evidemment la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(0,\infty) \to H \equiv L^2_\rho(0,\infty)$ où

$$\mathcal{F}y(\tau) = \int_0^\infty y(x)\frac{\sin x\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}}dx, \tau > 0$$

et $\rho(\tau) = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\tau}$ diagonalise l'opérateur B.
L'intégration par partie donne

$$\mathcal{F}le(\tau) - \tau\mathcal{F}e(\tau) = -e(0) = -1 \tag{1.42}$$

où

$$\mathcal{F}(l-\zeta)e(\tau) - (\tau-\zeta)\mathcal{F}e(\tau) = -1$$

pour chaque $\zeta \in L^2(0,\infty)$. Nous notons $e_\zeta \in L^2(0,\infty)$ un élément tel que

$$\mathcal{F}e_\zeta(\tau) = \frac{1}{\tau-\zeta}, \tau > 0, \zeta \notin [0,\infty) \tag{1.43}$$

Alors

$$\frac{1}{\tau-\zeta}\mathcal{F}(l-\zeta)e(\tau) - \mathcal{F}e(\tau) = -\mathcal{F}e_\zeta(\tau)$$

ou

$$R_\zeta(B)(l-\zeta)e = e - e_\zeta, \zeta \notin [0,\infty)$$

où $R_\zeta(B) = (B-\zeta)^{-1}$ est la résolvante de l'opérateur B.

Les auteurs ont déterminé le spectre de l'opérateur directemment à partir du calcul de la résolvante en utilisant le modèle de Friedrichs.

Théorème 2.2 *1) Soit $\zeta \notin [0,\infty)$, alors $\zeta \in \rho(A)$ Ssi $\delta(\zeta) \neq 0$, dans le cas*

$$R_\zeta(A) = R_\zeta(B)f - \frac{1}{\delta(\zeta)}\left(R_\zeta(B)f - \eta\right)_{L^2(0,\infty)} e_\zeta$$

où la fonction vectorielle $e_\zeta \in L^2(0,\infty)$ est définie par la relation (1.43)*. Une valeur $\zeta \notin [0,\infty)$ est une valeur propre de l'opérateur A Si $\delta(\zeta) = 0$.*

2) Soit $\sigma > 0$ et $\delta_\pm(\sigma) \neq 0$ alors σ appartient au spectre continu de A. Une valeur $\sigma > 0$ est la singularité spectrale de l'opérateur A si $\delta_+(\sigma) = 0$ ou $\delta_-(\sigma) = 0$.

3) L'ensemble des valeurs propres et de singularités spectrales de l'opérateur A est fini.

La solution de l'équation d'évolution est donnée par le résultat suivant

Théorème 2.3 *Supposons l'élément $\eta \in L^2(0,\infty)$ satisfait les conditions*

$$\int_0^\infty |\eta_0(x)|\, e^{\varepsilon x} dx < 0, \eta_0 = B^2\eta$$

et

$$\eta(0) = \eta''(0) = \eta^{IV}(0) = 0, \eta'', \eta^{IV}, \eta^{VI} \in L^2(0,\infty).$$

Alors le problème

$$\begin{cases} \dot{z} = -iAz, t > 0 \\ z\,|_{t=0} = z_0, z_0 \in D(A) \end{cases}$$

est uniformément correct et sa solution pour $t > 0$ *prend la forme*

$$z(t) = e^{-itB} z_0 + ie^{-itB} \mathcal{F}^{-1} E_t^+ k,\ \ t > 0 \tag{1.44}$$

où la fonction $k(s), s > 0$ *est définie par la relation*

$$\Im(k, p) = i(R_{ip}(A) z_0, \eta)_{L^2(0,\infty)} \tag{1.45}$$

et pour $t < 0$, *prend la forme*

$$z(t) = e^{-itB} z_0 + ie^{-itB} E_t^- k_1,\ \ t < 0 \tag{1.46}$$

où la fonction $k^-(s) = k_1(-s), s > 0$ *est définie par la relation*

$$\Im(k^-, p) = -i\left(R_{-ip}(A) z_0, \eta\right)_{L^2(0,\infty)} \tag{1.47}$$

Les travaux suivants sont particulièrement importants pour leur étude à savoir Ljancé [61], Kato [57], Kako et Yajima [56] et d'autres. A signaler surtout les références Cheremnikh [10] sur la fonction exponentielle de l'opérateur de Sturm-Liouville et Cheremnikh [6] sur la fonction opératorielle de certain modèle de Friedrichs sont indiquéss dans ce travail.

Puis en 2007, R. del Rio et Olga Tchebotavera [52] considèrent une famille des opérateurs auto-adjoints $L_\theta(q)$ dans $L_2(0,\infty)$ engendrés par l'expression différentielle

$$lu = -u'' + q(x)u$$

et les conditions aux limites

$$U(0)\cos\theta - u'(\theta)\sin\theta = 0, \theta \in [0,\pi) ,$$

et soit ρ_θ la mesure spectrale correspondant à L_θ. La moyenne

$$\mu(.) := \int_0^\pi \rho_\theta(.)d\theta$$

n'est pas seulement obsolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, mais elle lui est égale.

Théorème 2.4 *Si pour presque partout chaque $E \in I, I \subset \mathbb{R}$, il existe une solution non triviale de*

$$lu = Eu,$$

alors

$$\sigma_c(L_\theta) \cap I = \phi$$

pour presque chaque $\theta \in [0,\pi)$, où σ_c désigne le spectre continu .

Pour chaque $(\lambda,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,\pi)$, considérons l'opérateur auto-adjoint $L_{\lambda\theta}$ dans $L_2(0,\infty)$ engendré par l'expression différentielle

$$l_\lambda u = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \lambda W(x) \tag{1.48}$$

comme suit

$$L_{\lambda,\theta}u := l_\lambda u$$

pour u dans le domaine de $L_{\lambda,\theta}$ donné par

$$\begin{aligned} D(L_{\lambda,\theta}) &= \{f \in L_2(0,\infty), f, f' \text{ absolument continues localement dans } (0,\infty), \\ &\quad l_\lambda f \in L_2(0,\infty), f(0)\cos\theta - f'(0)\sin\theta = 0, \theta \in [0,\pi)\}. \end{aligned}$$

Nous supposons $L_{\lambda\theta}$ est régulier à 0 et le cas du point limite vérifié à ∞. Les fonctions V et W sont des valeurs réelles et localement dans L^1. Nous supposons $W(x) > 0$ pour $x \in [0,c]$ et $W(x) = 0$ pour chaque $x \notin [0,c]$.

Notons par ρ_λ^θ la fonction spectralle de l'operateur $L_{\lambda\theta}$.

Utilisant la même expression différentielle (1.48), nous définissons un problème régulier dans l'intervalle fini $[0,c]$ et pour $\theta \in [0,\pi)$ les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0)\cos\theta - u'(0)\sin\theta = 0, \\ u(c) = 0 \end{cases} \tag{1.49}$$

Théorème 2.5 *Il existe une suite décroissante monotone des valeurs propres*

$$\lambda^{(0)} > \lambda^{(1)} > \lambda^{(2)} > \ldots$$

telles que $\lambda^{(n)} \to -\infty$ *quand* $n \to \infty$.

Théorème 2.6 *1. Si*

$$\lambda_1 \leq \lambda^{(n+1)}(E_1) < \lambda^{(n)}(E_2) \leq \lambda_2$$

où $\lambda^{(n)}$ *sont des valeurs propres du problème régulier dans* $[0,c]$ *mentionné dans le théorème précédent alors* $|.| \leq \mu_\theta$.

2. Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *alors* $\mu \leq |.|$.

En 2011, Erdoğan Şen et Azad Bayramov [22] ont étudié les valeurs propres et les fonctions propres du problème aux limites discontinu à argument avec retard et un paramètre spectral dans la condition de frontière des problèmes de Sturm-Liouville. A savoir, ils ont considéré le problème aux limites pour l'équation différentielle

$$p(x)y'' + q(x)y(x - \Delta(x)) + \lambda y(x) = 0 \tag{1.50}$$

sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, avec les conditions aux limites

$$y(0) = 0, \tag{1.51}$$

$$y'(\pi) + \lambda y(\pi) = 0, \tag{1.52}$$

et les conditions de transmission

$$\gamma_1 y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \delta_1 y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \tag{1.53}$$

$$\gamma_2 y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \delta_2 y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \tag{1.54}$$

où

$$p(x) = p_1^2 \ si \ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$p(x) = p_2^2 \ si \ \ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

la fonction à valeurs réelles $q(x)$ est continue dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et a une limite finie

$$q\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} q(x),$$

la fonction à valeurs réelles $\Delta(x) \geq 0$ continue dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et a une limie finie

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{\pi}{2}\pm 0\right) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \Delta(x),\ x-\Delta(x)\geq 0,\ si\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\\ x-\Delta(x) &\geq \frac{\pi}{2}\ si\ x\in\left(\frac{\pi}{2}\ ,\pi\right],\end{aligned}$$

λ est un paramètre spectral réel ;

$$p_1, p_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$$

sont des nombres réels arbitraires et

$$|\gamma_i| + |\delta_i| \neq 0\ \ pour\ \ i = 1, 2.$$

En outre

$$\gamma_1\delta_2 p_1 = \gamma_2\delta_1 p_2$$

est vérifié.

Théorème 2.7 *Le problème* $(1.50)-(1.54)$ *peut avoir seulement des valeurs propres simples.*

Pour le théorème d'existence on a :

Théorème 2.8 *Le problème* $(1.50)-(1.54)$ *a un ensemble infini de valeurs propres positives.*

Et pour les formules asymptotiques des valeurs propres et des fonctions propres on a les résultats suivants :

Théorème 2.9 *Soit* n *est un nombre naturel . Pour chaque* n *suffisamment grand, il y a exactement des valeurs propres du problème* $(1.50)-(1.54)$ *près de*

$$\frac{p_1^2 p_2^2}{(p_1^2+p_2^2)}\,(2n+1)^2\,.$$

Supposons que les conditions suivantes sont remplies :

(A) Les dérivées $q'(x)$ et $\Delta''(x)$ existent et sont bornées sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et ont des limites finies respectivement.

$$q'\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} q'(x)$$

et

$$\Delta''\left(\frac{\pi}{2} \pm 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} \pm 0} \Delta''(x),$$

(B) $\Delta'(x) \leq 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors

$$\Delta(0) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \Delta(x) = 0.$$

Théorème 2.10 *Si les conditions* (A) *et* (B) *sont satisfaites, alors les fonctions propres* $u_n(x)$ *du problème* $(1.50)-(1.54)$ *ont la représentation asymptotique suivante pour* $n \to \infty$:

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{p_1 + p_2}{2p_2 n} \sin \dfrac{2p_2 n}{p_1 + p_2} x + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \\ -\dfrac{\gamma\,(p_1 + p_2)}{2np_1\delta_2} \sin n \left(\dfrac{\pi\,(p_2 - p_1)}{p_1 + p_2} + \dfrac{p_1 x}{p_1 + p_2}\right) + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \end{cases}$$

CHAPITRE 2

Quelques travaux sur les opérateurs auto-adjoints et non auto-adjoints

1 Théorèmes et modèles spectraux pour les opérateurs auto-adjoints

Ici, nous considérons le théorème spectral qui établit que n'importe quel opérateur auto-adjoint A a une représentation intégrale de la forme

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda E(d\lambda) \tag{2.1}$$

où $E(.)$ est la mesure spectrale associée, c'est la projection orthogonale donnée par l'ensemble des fonctions $\sigma-$additif définie sur les ensembles de Borel de la droite réelle.

Au cas où A serait borné, l'intégrale (2.1) converge au sens de la topologie uniforme d'opérateurs par contre les questions de la convergence non bornée sont données par la topologie forte des opérateurs.

L'intégrale (2.1) nous permet de construire un calcul fonctionnel. Pour chaque fonction mesurable bornée de Borel φ définie sur $\mathbb{R}$ nous définissons $\varphi(A)$ par

$$\varphi(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\lambda E(d\lambda) \tag{2.2}$$

la fonction $\varphi \to \varphi(A)$ est un homomorphisme de l'algèbre B de toutes les fonctions mesurables bornées de Borel sur $\mathbb{R}$ dans l'algèbre $B(H)$ de tous les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert H. En particulier l'espace de Hilbert fondamental devient un $B-$module par la définition

$$\varphi x = \varphi(A)x, \;\; x \in H \tag{2.3}$$

Notre objectif est d'obtenir une représentation fonctionnelle de l'espace de Hilbert. La représentation fonctionnelle de l'espace de Hilbert permet d'avoir une structure supplémentaire en termes de certains problèmes qui peuvent être résolus d'une manière concrète.

A cet effet, nous supposons que notre opérateur auto-adjoint A a un ensemble fini de générateurs.

Définition 1.1 *Un ensemble des vecteurs $x_1, ..., x_r \in H$ s'appelle un ensemble de générateurs si l'ensemble de tous les vecteurs de tous*

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(A)x_i$$

où $\varphi_i \in B$ est un sous-ensemble dense de H. Soit B^r est le produit cartésien de r copies de B. Evidemment B^r est un $B-$module. Nous définissons la fonction $\rho : B^r \to H$ par

$$\rho(\varphi_1, ..., \varphi_2) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(A)x_i \tag{2.4}$$

où $(x_1, ..., x_r)$ est l'ensemble fixe des générateurs de A.

D'après les propriétés élémentaires du calcul fonctionnel, un homomorphisme de

$B-$module, et d'après notre hypothèse $x_1, ..., x_r$ la fonction ρ est un ensemble de générateurs. Il suit que ρ admet un rang dense dans H. En calculant la norme de $\rho(\varphi_1, ..., \varphi_r)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(A)x_i\right\| &= \sum_i\sum_j\left(\varphi_i(A)x_i, \varphi_j(A)x_j\right) = \sum\sum\left(\bar{\varphi}_j(A)\varphi_i(A)x_i, x_j\right)\\ &= \sum\sum\int\bar{\varphi}_j(\lambda)\varphi_i(\lambda)\left(E(d\lambda)x_j, x_j\right)\end{aligned}$$

Définissons maintenant les mesures complexes μ_{ij} par

$$\mu_{ij}(\sigma) = (E(\sigma)x_i, x_j) \tag{2.5}$$

pour tous les ensembles de Borel σ et soit M la matrice μ_{ij} .

Nous appelons un tel objet par mesure matricielle (voir [41]). On dit qu'une mesure matricielle est positive si pour chaque ensemble de Borel σ, $M(\sigma)$ est une matrice hermitienne définie non négative. Il est facile de vérifie que la mesure matricielle M construite dans (2.5) est une mesure matricielle positive. En effet, soit σ un sous ensemble de Borel de R et soit $(\alpha_1, ..., \alpha_2)$ sont des nombres complexes, alors avec $a = (a_1, ..., a_2)$

$$\begin{aligned}(\mathbb{M}(\sigma)a, a) &= \sum_i\sum_j\mu_{ij}\alpha_i\bar{\alpha}_j = \sum_i\sum_j\left(E(\sigma)x_i, x_j\right)\alpha_i\bar{\alpha}_j\\ &= \left(E(\sigma)\sum_i\alpha_i x_i, \sum_j\bar{\alpha}_j x_j\right) = \left\|E(\sigma)\sum_i\alpha_i x_i\right\|^2 \gtrapprox 0\end{aligned}$$

En termes de mesure matricielle introduite, nous avons

$$\|\rho F\|^2 = \left\|\sum f_i(A)x_i\right\|^2 = \int(d\mathbb{M}F, F) \tag{2.6}$$

où $F \in B_r$ est la fonction vectorielle telle que les composantes sont $f_1, ..., f_r$. L'égalité (2.6) indique que si nous définissons correctement l'espace L^2 d'une mesure matricielle M lequel nous allons le noter naturellement par $L^2(M)$ alors la fonction

$\rho : B^r \to H$ aura une extension naturelle à une fonction unitaire de $L^2(M)$ sur H. D'ailleurs, une telle fonction satisfait

$$\rho(\varphi F) = \varphi(A)(\rho F), \varphi \in B \tag{2.7}$$

Également pour n'importe quel vecteur x dans le domaine de A, nous avons

$$\left[\rho^{-1}(Ax)\right](\lambda) = \lambda(\rho^{-1}x)(\lambda) \tag{2.8}$$

Ainsi la représentation fonctionnelle A agit comme la multiplication par λ. Nous notons que M possède une description commode en termes de mesure spectrale $E(.)$ associée à A. Si $J : \mathbb{C}^r \to H$ est la fonction envoyant $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ à $\sum \alpha_i x_i$ alors pour chaque ensemble de Borel σ nous avons

$$M(\sigma) = J^* E(\sigma) J \tag{2.9}$$

Pour définir $L^2(M)$ nous précédons comme dans [6]. Nous notons par $L_0^2(M)$ l'ensemble de tous les $r-$tuples $(f_1, ..., f_r)$ des fonctions mesurables de Borel pour lesquelles

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (d\mathbb{M}F, F) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum \sum f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)} d\mu_{ij} < \infty \tag{2.10}$$

et définissons $L^2(M)$ comme ensemble de toutes les classes d'équivalence dans $L_0^2(M)$ modulo de l'ensemble des fonctions nulles, étant donnée une fonction nulle pour laquelle $\|F\| = 0$ Avec le produit scalaire dans $L^2(M)$ défini par

$$(F, G) = \int (d\mathbb{M}F, G) = \sum \sum f_i(\lambda) f_j(\lambda) d\mu_{ij}$$

$L^2(M)$ devient un espace préhilbertien et la seule question ouverte est celle de la complétude. Il existe une seule classe des mesures matricielles pour lesquelles $L^2(M)$ est clairement complet, à savoir la classe des mesures diagonales positives, i.e., celles pour lesquelles $i \neq j$ impliques $\mu_{ij} = 0$ et les éléments diagonaux sont des mesures positives. Si $\mu_1, ..., \mu_r$ sont des éléments diagonaux d'une mesure matricielle diagonale alors dans ce cas

$$\|F\|^2 = \int \sum |f_i(\lambda)|^2 \, d\mu_i = \sum \int |f_i(\lambda)|^2 \, d\mu_i = \sum \|f_i\|^2$$

où $\|.\|$ est la norme de f_i comme un élément de $L^2(\mu_i)$. Par conséquent dans ce cas $L^2(M)$ est clairement égal à la somme directe $L^2(\mu_1) \oplus ... \oplus L^2(\mu_r)$ lequel est un espace complet. Nous allons utiliser cette remarque pour montrer la complétude de $L^2(M)$ en exhibant une fonction unitaire qui diagonalise M. Dans un premier temps nous simplifions le problème en remplaçant les mesures matricielles par des matrices de densité et une mesure scalaire. Nous choisissons une mesure positive μ telle que tous les μ_{ij} sont absolument continus par rapport à μ, $\mu_{ij} << \mu$. Un candidat est la somme de toutes les variations de tous les μ_{ij}, il s'avère qu'un meilleur choix est la trace du M.

Si $m_{ij} = \dfrac{d\mu_{ij}}{d\mu}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de μ_{ij} par rapport à μ, alors nous introduisons la matrice de densité

$$M(\lambda) = (m_{ij}(\lambda)) \tag{2.11}$$

Le prochain lemme est extrait de [41].

Lemme 1.1 *Si $M(\lambda)$ est une matrice de densité d'une mesure matricielle M par rapport à une mesure scalaire μ puis $M(\lambda)$ est $\mu - a.e$ définie non négative.*

Considérons l'ensemble de toutes les mesures positives de matrice sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 *On dit que $\mathbb{M}$ divise $\mathbb{N}$, et on écrit $\mathbb{M} \mid \mathbb{N}$ s' il existe une fonction matricielle positive H telle que*

$$d\mathbb{M} = H^* d\mathbb{N} H \tag{2.12}$$

Deux mesures matricielles $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ sont équivalentes et on écrit $\mathbb{M} \backsim \mathbb{N}$ si $\mathbb{M} \mid \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \mid \mathbb{M}$.

Définition 1.3 *On dit que la fonction $U : L^2(M) \to L^2(N)$ est une injection si elle est $B-$homomorphisme injectif. Si U est aussi une isométrie on dit alors qu'elle est une injection isométrique.*

Le lemme suivant présente une large classe des "embeddings" isométriques.

Lemme 1.2 *Soient $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ deux mesures matricielles positives et supposons que $\mathbb{M} \mid \mathbb{N}$ alors il existe un injection isométrique de $L^2(M)$ dans $L^2(N)$.*

Théorème 1.1 *Si M est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ alors $L^2(M)$ est un espace d' Hilbert.*

Théorème 1.2 *Chaque opérateur A dans un espace de Hilbert H est unitairement équivalent à un opérateur unitaire $M\chi,_M$, dans $L^2(M)$ pour une certaine mesure matricielle positive sur la droite réelle si et seulement si A engendre un opérateur auto-adjoint.*

1.1 Les invariants unitaires et la théorie de multiplication

Cette section est consacrée à la caractérisation des invariants unitaires des opérateurs auto-adjoints au moyen de la représentation spectrale.

Théorème 1.3 *Soit A engendrant un opérateur auto-adjoint sur un espace d' Hilbert H. Alors il existe une suite finie des mesures positives $\mu_1 \gg \mu_2 \gg ... \gg \mu_p$ telle que A est équivalent unitairement à*

$$M\chi,_{\mu_1} \oplus, ..., \oplus M\chi,_{\mu_p} \tag{2.13}$$

agissant dans

$$L^2(\mu_1)\oplus, ..., \oplus L^2(\mu_p) \tag{2.14}$$

la suite $\mu_1, ..., \mu_p$ est déterminée par A vers l'équivalence des mesures. La représentation (2.13) de l'opérateur A désigné comme la représentation spectrale ordonnée. Le nombre p désigne la multiplicité de A.

Il y a une autre représentation associée à un opérateur auto-adjoint qui est étroitement liée à la représentation spectrale commandée.

Lemme 1.3 *Soit $L = (\lambda_{ij})$ une mesure matricielle positive et soit σ une mesure positive telle que $L \mid \sigma I$. Alors il existe une mesure matricielle diagonale M avec entrées diagonales $\mu_1, ..., \mu_p$ telle que $d\mu_i = m_i d\sigma$ et les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\mu_1 \gg ... \gg \mu_p$

(ii) L *et* M *sont* $\sigma-$*unitairement équivalent*

D'ailleurs si une autre mesure matricielle diagonale $\mathbb{N}$ avec entrées diagonales $\upsilon_1, ..., \upsilon_p$ telles que $d\upsilon_i = n_i d\rho$ et les assertions

(i) $\upsilon_1 \gg ... \gg \upsilon_p$

(ii) L *et* $\mathbb{N}$ *sont* $\sigma-$*unitairement équivalents*

sont vérifiées alors M et N sont $\tau-$unitairement équivalents où $\tau = \sigma \wedge \rho$ est le minimum des mesures ρ et σ.

Théorème 1.4 *Soit A un opérateur auto-adjoint fini dans un espace de Hilbert H. Alors il existe une suite finie des mesures positives mutuellement singulières $\upsilon_1, ..., \upsilon_p$ telle que A est unitairement équivalent à*

$$M\chi_{,\mathbb{N}_1} \oplus, ..., \oplus M\chi_{,\mathbb{N}_p} \tag{2.15}$$

agissant dans

$$L^2(\mathbb{N}_1) \oplus, ..., \oplus L^2(\mathbb{N}_p) \tag{2.16}$$

où $N_j = \upsilon_j I_j$, I_j étant la matrice identité. La suite des mesures $\upsilon_1, ..., \upsilon_p$ est déterminée par A jusqu'à l'équivalence des mesures. La représentation (2.15) *désigne la représentation spectrale canonique de A.*

1.2 Opérateurs d'entrelacements et opérateurs auto-adjoints

Etant donné deux opérateurs A_1 et A_2 nous disons que l'opérateur X entrelace A_1 et A_2 si

$$XA_1 = XA_2$$

Si l'opérateur d'entrelacement X est inversible et est borné alors A_1 et A_2 sont semblables.

Dans l'ensemble de toutes les mesures matricielles, nous distinguons l'ensemble des mesures de type scalaire qui sont les mesures matricielles de la forme σI, c'est-à-dire, les mesures matricielles diagonales avec tous les éléments de la diagonale étant égaux à σ.

Etant donnée une mesure matricielle $\mathbb{M}$, un sous-espace K de $L^2(\mathbb{M})$ est appelé un sous espace invariant si

$$M_{\varphi,\mathbb{M}}K \subset K \tag{2.17}$$

pour tout $\varphi \in B$ c'est.-à-dire, s'il est invariant sur tous les opérateurs de multiplication par des fonctions mesurables bornées.

Théorème 1.5 *Un sous espace K de $L^2(\sigma I)$ est un sous espace invariant si et seulement si $K = PL^2(\sigma I)$ où P est un σ mesurable a.e., projection de fonction à valeur matricielle. Il est clair qu'un sous espace K est invariant si et seulement si son complément orthogonal $K_\perp$ est invariant. Si $P_\perp$ est la fonction évaluée de projection correspondante à $K_\perp$ alors nous avons $P_\perp = I - P$.*

Le prochain théorème caractérise tous les $B-$homomorphismes de $L^2(\sigma I)$.

Théorème 1.6 *Soit $X : L^2(\sigma I) \to L^2(\sigma I)$ est un $B-$homomorphisme. Alors il existe une fonction matricielle bornée ϑ mesurable σ-a.e. telle que pour tout $F \in L^2(\sigma I)$*

$$(XF)(\lambda) = \vartheta(\lambda)F(\lambda) \tag{2.18}$$

Réciproquement n'importe quel opérateur X défini par (2.18) *est un $B-$homomorphisme.*

2 Calcul du saut de la résolvante dans le cas du modèle de Friedrichs

Dans cette partie, on indique les conditions sur le modèle de Friedrichs qui permettent d'écrire la formule pour le saut de la résolvante.

La représentation de la projection orthogonale par la résolvante R_ζ d'un opérateur auto-adjoint

$$E(\Delta) = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Delta + i\epsilon} \left(R_\zeta - R_{\overline{\zeta}}\right) d\zeta,\ \Delta \subset (-\infty, \infty) \tag{2.19}$$

est bien connue depuis longtemps (voir par exemple Berezanski Yu.M. [3] ,p.425).

Evidemment le saut de la résolvante $\lim\limits_{\epsilon \to +0} ((R_\zeta - R_{\overline{\zeta}})\varphi, \psi),\ \zeta = \sigma + i\epsilon,\ \sigma \in (-\infty, \infty)$ est important dans la théorie de la perturbation non auto-adjointe du spectre continu aussi. Dans le travail de Ljancé [56], concernant le modèle de Friedrichs non auto-adjoint, l'auteur utilise une extension de l'opérateur dans un espace assez large. Dans le travail de Cheremnikh E., un opérateur auxiliaire (comme l'opérateur différentiel maximal) a été considéré. Dans ce travail, nous précisons les calculs du saut de la résolvante.

2.1 Préliminaire et théorème principal

Soit $\mathbb{R} = (-\infty, \infty),\ H = L^2(\mathbb{R}, H_1)$, où H_1 est un certain espace d'Hilbert avec le produit scalaire $(\bullet, \bullet)_{H_1}$. Nous considérons le modèle de Friedrichs

$$T = S + V,\ V = A^*B,\ D(T) = D(S),\ A, B : H \to G, \tag{2.20}$$

où S est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante (c'est–à-dire $(S\varphi)(\tau) = \tau\varphi(\tau),\ \tau \in \mathbb{R}$) de domaine de définition maximal $D(S)$ et A, B sont des opérateurs bornés de H vers G. L'espace G est un espace d'Hilbert auxiliaire. Nous utilisons respectivement les notations $\varphi, \psi, f, g \in H,\ c, d \in G$ pour les éléments et $(\bullet, \bullet), (\bullet, \bullet)_G$ pour le produit scalaire. Nous notons $S_\zeta = (S - \zeta)^{-1},\ T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$.

La relation $(T-\zeta)\psi=\varphi$ ou bien $(S-\zeta)\psi+A^*B\psi=\varphi$ donne

$$T_\zeta\varphi = S_\zeta\varphi - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta\varphi,\ \mathrm{Im}\zeta \neq 0 \tag{2.21}$$

pour chaque valeur ζ telle qu' il existe l'opérateur inverse borné $K(\zeta)^{-1}$.

Nous notons par $K_+(\zeta),\ \mathrm{Im}\zeta > -\epsilon$ et $K_-(\zeta),\ \mathrm{Im}\zeta < \epsilon$ les extentions de la fonction opératorielle $K(\zeta)$ au dessus de l'axe $\mathrm{Im}\zeta = 0,\ \zeta \neq 0$ des domaines $\mathrm{Im}\zeta > 0$ et $\mathrm{Im}\zeta < 0$ respectivement pour un certain $\epsilon > 0$.

Nous supposons que :

C1) Il existe les extensions $K_\pm(\zeta)$ et $\|K_\pm(\zeta)-1\| \to 0, \zeta \to \infty$ uniformément dans le domaine $|\mathrm{Im}\zeta| < \epsilon$;

C2) Les opérateurs $K_\pm(\zeta)^{-1}$ existent et sont holomorphes dans le domaine $|\mathrm{Im}\zeta| < \epsilon,\ \mathrm{Re}\zeta \neq 0$ excepté peut être un ensemble fini de points.

Notons

$$\mathbf{B}(\zeta)\varphi = \varphi - A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta \varphi,\ \mathbf{A}(\zeta)\psi = \psi - B^* K(\overline{\zeta})^{-1*} A S_\zeta \psi. \tag{2.22}$$

Soit

$$h(\tau,\zeta) = ((\mathbf{B}(\zeta)\varphi)(\tau), (\mathbf{A}(\zeta)\psi)(\tau)),\ \tau \in R,\ \mathrm{Im}\zeta > 0. \tag{2.23}$$

Nous avons besoin de limites fortes dans l'espace G

$$(AS_\sigma)_\pm\varphi = \lim_{\nu\to+0} AS_\zeta\varphi,\ (BS_\sigma)_\pm\varphi = \lim_{\nu\to+0} BS_\zeta\varphi,\ \zeta=\sigma+i\nu \tag{2.24}$$

et correspondant aux limites fortes dans H

$$\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi = \varphi - A^* K_+(\sigma)^{-1}(BS_\sigma)_+\varphi,\ \mathbf{A}_-(\sigma)\varphi = \varphi - B^* K_-(\sigma)^{-1*}(AS_\sigma)_+\varphi,\ \varphi \in H^0 \tag{2.25}$$

pour les éléments φ d'un certain sous-espace $H^0 \subset H$ dense dans H, $\overline{H^0} = H$.

Nous supposons que

C3) Les limites fortes (2.24) existent excepté peut être un ensemble fini $D \subset R$ des valeurs σ pour les éléments $\varphi \in H^0$ et la fonction $h(\tau, \zeta)$ (voir (2.23)) pour $0 \leq \mathrm{Im}\zeta < \epsilon_0$, pour certain $\epsilon_0 > 0$ est différentiable en τ dans $\mathbb{R}$ et

$$\int_R |h(\tau, \zeta)| \, d\tau \leq M, \ 0 \leq \mathrm{Im}\zeta < \epsilon_0, \tag{2.26}$$

où $M = \text{const}$

C4) Pour chaque intervalle fini (a, b) nous avons

$$|h(\tau, \zeta) - h(\tau, \sigma)| \leq C \, |\zeta - \sigma| \, , \ |\tau - \sigma| < \delta, \ \tau \in (a, b), \ \zeta = \sigma + i\nu, \tag{2.27}$$

où $\sigma \in R \setminus D$ (voir C_3) et $C = \text{const}$ ne dépend pas de δ_0.

Le résultat principal de ce travail est donné par le théorème suivant . Notons (voir C3))

$$(T_\sigma \varphi, \psi)_\pm = \lim_{\nu \to +0} (T_{\sigma + i\nu} \varphi, \psi), \ \varphi, \psi \in H^0, \ \sigma \in R \setminus D. \tag{2.28}$$

Théorème 2.1 *Il existe un sous espace $H^1 \subset H^0$ dense dans H, $\overline{H^1} = H$ tel que*

1. *Les valeurs limites $(T_\sigma \varphi, \psi)_\pm$ existent si $\sigma \in R \setminus D, \ \varphi, \psi \in H^1$;*
2. *Le saut de la résolvante au point $\sigma \in R \setminus D$ est*

$$(T_\sigma \varphi, \psi)_+ - (T_\sigma \varphi, \psi)_- = 2\pi i \left((\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi)(\sigma), (\mathbf{A}_-(\sigma)\psi)(\sigma) \right)_{H_1}, \tag{2.29}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+(\sigma)\varphi &= \varphi - A^* K_+(\sigma)^{-1} (BS_\sigma)_+ \varphi, \\ \mathbf{A}_-(\sigma)\varphi &= \varphi - B^* K_-(\sigma)^{-1*} (AS_\sigma)_+ \varphi, \ \varphi \in H^1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

3. *Si $\varphi, \psi \in D(T) \cap H^1$ alors*

$$\left(\mathbf{A}_-(\sigma)(T^* - \sigma)\psi \right)(\sigma) = 0, \quad \left(\mathbf{B}_+(\sigma)(T - \sigma)\varphi \right)(\sigma) = 0 \tag{2.31}$$

et si $\{e_k\} \subset H_1$ *est une base orthonormale arbitraire dans* H_1 *alors les fonctionnelles*

$$(a_{\sigma,k},\psi) = (e_k,(\mathbf{A}_-(\sigma)\psi)(\sigma))_{H_1},\ (\varphi,b_{\sigma,k}) = ((\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi)(\sigma),e_k)_{H_1},\ k=1,2,... \tag{2.32}$$

sont les fonctionnelles propres des opérateurs T *et* T^* *respectivement.*

2.2 Notations

Notons que les opérateurs $\mathbf{B}(\zeta)$, $\mathbf{A}(\zeta) : H \to H$ (voir (2.22)) ne dépendent pas du choix de la factorisation $V = A^*B$, la comparison (2.22) avec (2.21) donne

$$(S-\zeta)T_\zeta\varphi = \mathbf{B}(\zeta)\varphi,\ \ (S-\zeta)T^*_{\overline{\zeta}}\psi = \mathbf{A}(\zeta)\psi, \tag{2.33}$$

où $T^*_{\overline{\zeta}}$ est la résolvante de l'operateur T^* au point $\overline{\zeta}$. Dans le cas

$$\overline{R(A^*)} = \overline{R(B^*)} = H, \tag{2.34}$$

le calcul du saut de la résolvante est plus simple. Autrement nous remplaçons la factorisation $V = A^*B$ par une certaine factorisation spéciale qui satisfait la condition (2.34). Alors, supposns maintenant que $\overline{\beta}R(A^*) \neq H$ ou $\overline{R(B^*)} \neq H$. Nous notons $Z(A) = \{f \in H : Af = 0\}$. On sait que si $A, B : H \to G$ sont opérateurs bornés alors

$$\overline{R(A^*)} \oplus Z(A) = H,\ \overline{R(B^*)} \oplus Z(B) = H. \tag{2.35}$$

Définition 2.1 *Soit* $\tilde{G} = G \oplus Z(A) \oplus Z(B)$. *L'espace* $\tilde{G}$ *est un espace d'Hilbert et le produit scalaire pour les éléments*

$$\tilde{c} = \{c, g_\alpha, g_\beta\},\ \tilde{d} = \{d, h_\alpha, h_\beta\} \in \tilde{G} \tag{2.36}$$

avec éléments arbitraires $g_\alpha, h_\alpha \in Z(A)$, $g_\beta, h_\beta \in Z(B)$ *est defini par l' expression*

$$(\tilde{c},\tilde{d})_{\tilde{G}} = (c,d)_G + (g_\alpha,h_\alpha) + (g_\beta,h_\beta). \tag{2.37}$$

Soient $P_\alpha : H \to Z(A), P_\beta : H \to Z(B)$ sont des projection orthogonales.

Définition 2.2 *Les opérateurs $\tilde{A}, \tilde{B} : H \to \tilde{G}$ sont définis par la relation*

$$\tilde{A}f = \{Af, P_\alpha f, 0\}\,,\ \ \tilde{B}f = \{Bf, 0, P_\beta f\}\,. \tag{2.38}$$

Comme $\tilde{G}$ est espace d'Hilbert alors $\tilde{A}^*,\ \tilde{B}^* : \tilde{G} \to H$.

Lemme 2.1 *Les relations suivantes sont vérifiées :*

1. $\tilde{A}^*\tilde{B} = A^*B$
2. $\overline{R(\tilde{A}^*)} = \overline{R(\tilde{B}^*)} = H$

Preuve.

1. Soit $f \in H$ un élément arbitraire, d'après (2.37) $-$ (2.38) nous avons

$$(\tilde{A}f, \tilde{c})_{\tilde{G}} = (Af, c)_G + (P_\alpha f, g_\alpha) = (f, A^*c) + (f, g_\alpha) = (f, A^*c + g_\alpha).$$

   Par conséquent, si $\tilde{c} = \{c, g_\alpha, g_\beta\}$ alors

$$\tilde{A}^*\tilde{c} = A^*c + g_\alpha. \tag{2.39}$$

   Substituant (voir (2.38)) $\tilde{c} = \tilde{B}f = \{Bf, 0, P_\beta f\} \equiv \{c, g_\alpha, g_\beta\}$ dans (2.39) nous obtenons l'assertion 1).

2. Comme un élément $g_\alpha \in Z(A)$ dans la relation (2.39) est arbitraire alors $\overline{R(\tilde{A}^*)} = H$ (voir (2.35)). L'opérateur B est considéré par analogie ce qui prouve l'assertion 2).
   Le lemma 2.1 est prouvé.

■

Nouveau factoriation $V = \tilde{A}^*\tilde{B}$ satisfait la condition (2.34).

Lemme 2.2 *Soit* $\varphi = A^*c,\ \psi = B^*d, c, d \in G$ *alors*

$$\left(\left(T_\zeta - T_{\overline{\zeta}}\right)\varphi, \psi\right) = \left(\left(S_\zeta - S_{\overline{\zeta}}\right)\mathtt{B}(\zeta)\varphi, \mathtt{A}(\zeta)\psi\right) \tag{2.40}$$

et

$$\mathtt{B}(\zeta)(T-\zeta)\varphi = (S-\zeta)\varphi,\ \mathtt{A}(\zeta)(T^* - \overline{\zeta})\psi = (S-\overline{\zeta})\psi. \tag{2.41}$$

Preuve. Selon (2.20) – (2.21)

$$BT_\zeta A^* = BS_\zeta A^* - BS_\zeta A^* K(\zeta)^{-1}BS_\zeta A^* = K(\zeta)-1-(K(\zeta)-1)K(\zeta)^{-1}(K(\zeta)-1) = 1-K(\zeta)^{-1}$$

et d'après la présentation $\varphi = A^*c,\ \psi = B^*d$ nous avons

$$(T_\zeta\varphi, \psi = (BT_\zeta A^*c, d)_G = (c,d)_G - \left(K(\zeta)^{-1}c, d\right)_G.$$

Parconséquent

$$\left((T_\zeta - T_{\overline{\zeta}})\varphi, \psi\right) = -\left(\left(K(\zeta)^{-1} - K(\overline{\zeta})^{-1}\right)c, d\right)_G = \left(K(\overline{\zeta})^{-1}\left[K(\zeta) - K(\overline{\zeta})\right]K(\zeta)^{-1}c, d\right)_G =$$

$$= \left(\left(BS_\zeta A^* - BS_{\overline{\zeta}}A^*\right)K(\zeta)^{-1}c, K(\overline{\zeta})^{-1*}d\right)_G = \left(\left(S_\zeta - S_{\overline{\zeta}}\right)A^*K(\zeta)^{-1}c, B^*K(\overline{\zeta})^{-1*}d\right)_G. \tag{2.42}$$

Multiplions $K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*$ par $A^*K(\zeta)^{-1}$ nous obtenons

$$A^*c = A^*K(\zeta)^{-1}c + A^*K(\zeta)^{-1}BS_\zeta A^*c$$

Comme $\varphi = A^*c$ alors $A^*K(\zeta)^{-1}c = \varphi - A^*K(\zeta)^{-1}BS_\zeta\varphi = \mathbf{B}(\zeta)\varphi$ (voir (2.22)). Par analogie $B^*K(\zeta)^{-1*}d = \mathbf{A}(\zeta)\psi$ alors (2.40) résulte de (2.42). Le changement $T_\zeta\varphi \to \varphi$ et $T^*_{\overline{\zeta}}\psi \to \psi$ transforme (2.33) vers (2.41).
Le lemma 2.2 est prouvé.

■

Lemme 2.3 *Si la fonctionnelle $h(\tau,\zeta)$ satisfait les conditions $C_3) - C_4)$ alors*

$$\lim_{\nu\to+0}\int_R\left(\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)h(\tau,\zeta)d\tau = 2\pi i h(\sigma,\sigma),\ \zeta=\sigma+i\nu. \tag{2.43}$$

Preuve. nous avons

$$\begin{aligned}\int_R\left(\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)h(\tau,\zeta)d\tau &= \int_R\left(\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)(h(\tau,\zeta)-h(\tau,\sigma))\,d\tau\\ &+\int_R\left(\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)h(\tau,\sigma)d\tau.\end{aligned}$$

Alors, pour prouver la relation (2.43) il suffit de prouver que

$$I(\nu)\equiv\int_R\left(\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right)(h(\tau,\zeta)-h(\tau,\sigma))\,d\tau\to 0,\ \nu\to+0, \tag{2.44}$$

où $\mathrm{Re}\zeta=\sigma=\text{const}$. Soit $\delta>0$ et

$$I(\nu)=\int_{|\tau-\sigma|<\delta}+\int_{|\tau-\sigma|>\delta}\equiv I_1(\nu)+I_2(\nu)$$

1) Comme $|\tau-\zeta|=\left|\tau-\overline{\zeta}\right|\geq|\zeta-\sigma|$ alors (voir (2.27))

$$\begin{aligned}|I_1(\nu)| &\leq \int_{|\tau-\sigma|<\delta}\left(\frac{1}{|\tau-\zeta|}+\frac{1}{\left|\tau-\overline{\zeta}\right|}\right)|h(\tau,\zeta)-h(\tau,\sigma)|\,d\tau\\ &\leq \frac{2}{|\zeta-\sigma|}\int_{|\tau-\sigma|<\delta}|h(\tau,\zeta)-h(\tau,\sigma)|\,d\tau\leq 4C\delta\end{aligned}$$

2) Si $|\tau-\sigma|>\delta$ alors $|\zeta-\tau|>\delta$ et

$$\left|\frac{1}{\tau-\zeta}-\frac{1}{\tau-\overline{\zeta}}\right|=\left|\frac{2i\nu}{(\tau-\zeta)(\tau-\overline{\zeta})}\right|\leq\frac{2\nu}{\delta^2}$$

Par conséquent (voir (2.26))

$$|I_2(\nu)| \leq \int\limits_{|\tau-\sigma|>\delta} \left| \frac{1}{\tau-\zeta} - \frac{1}{\tau-\bar{\zeta}} \right| (|h(\tau,\zeta)| + |h(\tau,\sigma)|)\, d\tau \leq 4M\frac{\nu}{\delta^2}.$$

Si nous choisissons $\delta = \sqrt[3]{\nu}$ alors $I_1(\nu), I_2(\nu) \to 0, \nu \to +0$, ce qui prouve la relation (2.44).
Le lemme 2.3 est prouvé. ■

Revenons maintenant à la démenstration du théorème 2.1

Preuve. 1- En raison de (2.21) et la condition C_3) la valeur limite $(T_\sigma\varphi, \psi)_\pm$ existe si nous choisissons $H^1 \subset H^0$ comme un sous espace de fonctions differentables.

2- Selon (2.33) les expressions $\mathbf{B}(\zeta)\varphi, \mathbf{A}(\zeta)\psi$ ne dépendent pas du choix de la factorisation. Nous posons $V = \tilde{A}^*\tilde{B}$ (voir Lemme 2.1) et nous obtenons la relation (2.40) pour un certain sous espace dense dans H. Tous les opérateurs dans la relation (2.40) sont bornés, donc (2.40) est vérifiée pour les éléments $\varphi, \psi \in H$. En utilisant le Lemme 2.3, nous obtenons les relation (2.29) de la relation (2.40).

3- Considérons la relation (2.41), où $\mathrm{Im}\zeta \to +0$ et $\mathrm{Re}\zeta = \sigma =$ const. Le côté droit $(S-\sigma)\varphi$ est une fonction vectorielle à valeurs dans l'espace H_1. Evidemment $\left.|[(\tau-\sigma)\,\varphi(\tau)]\right|_{\tau=\sigma} = 0$. Ainsi, les relations (2.31) – (2.32) resultent de (2.41).
Le théorème est prouvé. ■

Notons qu'on peut obtenir la formule du saut de la résolvante (voir (2.29))

$$(T_\sigma\varphi, \psi)_+ - (T_\sigma\varphi, \psi)_- = 2\pi i \left((\mathbf{B}_+(\sigma)\varphi)(\sigma), (\mathbf{A}_-(\sigma)\psi)(\sigma) \right)_{H_1} \tag{2.45}$$

Si 1) Les conditions sur les éléments φ, ψ qui donnent $C_3) - C_4)$ sont indiquées ;
2) Les conditions sur φ, ψ qui permettent de prolonger continuellement les deux côtés de (2.29) dans un sous espace plus large sont données.

Notons que le signe $\pm$ dans les notations $\mathbf{B}_+(\sigma), \mathbf{A}_-(\sigma)$ correspond au signe des valeurs limites $K_+(\sigma)^{-1}$, $K_-(\sigma)^{-1}$ dans les expressions $\mathbf{B}_+(\sigma), \mathbf{A}_-(\sigma)$.

Ces travaux de recherche nous ont beaucoup aidé pour entamer cette étude concernant un domaine riche par ses applications et difficiles par les outils mathématiques appliqués utilisés.

CHAPITRE 3

L'opérateur de Sturm-Liouville sur la droite à potentiel avec retard

Les équations différentielles à argument avec retard jouent un rôle important dans la théorie générale des équations différentielles (voir, par ex. [20]).

Dans le travail de [10], on a considéré dans l'espace $L^2(0,\infty)$ l'opérateur

$$Ly = -y'' + q(x)y(x-\Delta), y(0) = 0, x > 0$$

(où $y(x-\Delta) \equiv 0,\ x \in (0,\Delta)$) avec la condition

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon x},\ x > 0,\ \varepsilon > 0$$

Pour l'équation homogène

$$-y'' + q(x)y(x-\Delta) - \sigma y = 0, \sigma > 0$$

le comportement asymptotique de la solution $y(x)$ a été obtenu si $x \to \infty$.

Il est naturel de considérer maintenant l'expression

$$ly = -y'' + q(x)y(x-\Delta)$$

sur la droite. Ainsi, nous présentons l'opérateur L dans l'espace $L^2(-\infty,\infty)$ engendré par le domaine de défintion maximal.

Dans les sections 1–2 le modèle de Friedrichs de l' opérateur L et sa résolvante sont donnés.

Dans la section 3 la condition sur le spectre ponctuel est obtenue.

1 Modèle de Friedrichs de l'opérateur de Sturm–Liouville sur la droite

D'abord, nous allons diagonaliser l'opérateur avec le potentiel trivial dans l'espace $L^2(-\infty,\infty)$, c-à-d

$$L_0 y = -y'', \quad -\infty < x < \infty \tag{3.1}$$

avec domaine de défintion minimal.

Soit

$$H = L^2_\rho\left((0,\infty),\mathbb{C}^2\right)$$

où

$$\rho(\tau) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\tau}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau} \end{pmatrix}, \quad \tau > 0 \tag{3.2}$$

Nous introduisons l'opérateur unitaire $U\colon L^2(-\infty,\infty) \to H$ noté par

$$Uy(\tau) = \varphi(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{cases} \varphi_1(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\cos\sqrt{\tau}x dx \\ \varphi_2(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\dfrac{\sin\sqrt{\tau}x}{\sqrt{\tau}} dx \end{cases} \tag{3.3}$$

L'opérateur inverse est (voir [3])

$$U^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}(x) = y(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{\tau}}\varphi_1(\tau)\cos\sqrt{\tau}x + \varphi_2(\tau)\sin\sqrt{\tau}x\right]d\tau \tag{3.4}$$

Il est connu que

$$S = UL_0U^{-1}\colon H \to H \tag{3.5}$$

est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante,

$$S\varphi(\tau) = \begin{pmatrix} \tau\varphi_1(\tau) \\ \tau\varphi_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau > 0$$

avec domaine de définition maximal.

Maintenant, nous considérons l'opérateur

$$Ly = -y'' + q(x)y(x-\Delta),\ -\infty < x < \infty,\ \Delta \in (-\infty, \infty) \tag{3.6}$$

où $\Delta = \text{const}$ et $q(x)$ est une fonction à valeur complexe satisfaisant la condition

$$|q(x)| \leqslant C\exp\left(-\varepsilon|x|\right),\ \varepsilon > 0,\ C = \text{const},\ x \in (-\infty, \infty) \tag{3.7}$$

l'opérateur

$$(Qy)(x) = q(x)y(x-\Delta)$$

est borné, par conséquent $D(L) = D(L_0)$ et

$$L = L_0 + Q$$

Si nous notons

$$T = ULU^{-1}$$

alors (voir (3.5))

$$T = S + V \tag{3.8}$$

où $V = UQU^{-1}$. L'opérateur T est appelé modèle de Friedrichs de l'opérateur L.

2 Résolvante de l'opérateur T

D'après (3.3)–(3.4)

$$QU^{-1}\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}q(t)\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{\theta}}\varphi_1(\theta)\cos\sqrt{\theta}(t-\Delta) + \varphi_2(\theta)\sin\sqrt{\theta}(t-\Delta)\right]d\theta$$

et l'élément $\psi = UQU^{-1}\varphi$ est

$$\begin{cases} \psi_1(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{\theta}}\varphi_1(\theta)\cos\sqrt{\theta}(t-\Delta) + \varphi_2(\theta)\sin\sqrt{\theta}(t-\Delta)\right]d\theta\cos\sqrt{\tau}t\,dt \\ \psi_2(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{\theta}}\varphi_1(\theta)\cos\sqrt{\theta}(t-\Delta) + \varphi_2(\theta)\sin\sqrt{\theta}(t-\Delta)\right]d\theta\frac{\sin\sqrt{\tau}t}{\sqrt{\tau}}dt \end{cases} \tag{3.9}$$

Choisissons la factorisation $q(t) = \overline{q_1(t)}q_2(t)$ telle que $|q_1(t)| = |q_2(t)|$, alors le système (3.9) devient

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\tau) \\ \psi_2(\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_0^\infty \left(\begin{pmatrix} \varphi_1(\theta) \\ \varphi_2(\theta) \end{pmatrix}, \beta(\theta,t)\right)_{\mathbb{C}^2} d\theta\right]\alpha(\tau,t)dt \tag{3.10}$$

où

$$\beta(\theta,t)=q_1(t)\begin{pmatrix}\dfrac{\cos\sqrt{\theta}(t-\Delta)}{\sqrt{\theta}}\\ \\ \sin\sqrt{\theta}(t-\Delta)\end{pmatrix},\quad \alpha(\tau,t)=q_2(t)\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\tau}t\\ \\ \dfrac{\sin\sqrt{\tau}t}{\sqrt{\tau}}\end{pmatrix}$$

Alors, l'expression

$$\psi=UQU^{-1}\varphi$$

a la forme

$$\psi(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{\infty}(\varphi(\theta),\beta(\theta,t))_{\mathbb{C}^2}\,d\theta\right)\alpha(\tau,t)dt$$

Introduissons les opérateurs $A, B\colon H\to L^2(-\infty,\infty)$ par les relations

$$B\varphi(t)=\int\limits_{0}^{\infty}(\varphi(\theta),\beta(\theta,t))_{\mathbb{C}^2}\,d\theta,\quad A^*c(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}c(t)\alpha(\tau,t)dt \tag{3.11}$$

Lemme 2.1 *L'opérateur V (voir (3.8)) admet la factorisation*

$$V=A^*B \tag{3.12}$$

où les opérateurs A, B sont définis par (3.11)*.*

Preuve. résulte de (3.10). ∎

Soit

$$S_\zeta=(S-\zeta)^{-1},\ \zeta\notin[0,\infty),\quad T_\zeta=(T-\zeta)^{-1},\ \zeta\in\rho(T)$$

Notons (voir (3.11))

$$K(\zeta)=1+BS_\zeta A^*,\ \zeta\notin[0,\infty) \tag{3.13}$$

Lemme 2.2 *Si l'opérateur $K(\zeta)$ admet l'opérateur inverse borné $K^{-1}(\zeta)$ alors $\zeta\in\rho(T)$ et*

$$T_\zeta\varphi=S_\zeta\varphi-S_\zeta A^*K^{-1}(\zeta)BS_\zeta\varphi,\ \zeta\in\rho(T) \tag{3.14}$$

Preuve. L'équation

$$(T-\zeta)\psi = \varphi$$

donne

$$(S-\zeta)\psi + A^*B\psi = \varphi$$

où

$$\psi + S_\zeta A^*B\psi = S_\zeta\varphi.$$

En Appliquant l'opérateur B, nous obtenons

$$(1+BS_\zeta A^*)B\psi = BS_\zeta\varphi$$

ou (voir (3.13))

$$B\psi = K^{-1}(\zeta)BS_\zeta\varphi$$

qui prouve l'égalité(3.14).

Le lemme est prouvé. ■

Lemme 2.3 *L'opérateur* $K(\zeta)\colon L^2(-\infty,\infty)\to L^2(-\infty,\infty)$ *a la forme*

$$(K(\zeta)-1)\,c(s) = \frac{i}{2\sqrt{\zeta}}\overline{q_1(s)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(t)q_2(t)\exp[i|s-t-\Delta|\sqrt{\zeta}]dt \tag{3.15}$$

où $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta}>0$*.*

Preuve. Il résulte de (3.11)que

$$BS_\zeta A^*c(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(t)\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{\theta-\zeta}\,(\alpha(\theta,\tau),\beta(\theta,s))_{\mathbb{C}^2}\,d\theta dt,\ \ c\in L^2(-\infty,\infty) \tag{3.16}$$

Selon (3.10)

$$(\alpha(\theta,\tau),\beta(\theta,s)) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\overline{q_1(s)}q_2(t)\left[\cos\sqrt{\theta}(s-\Delta)\cos\sqrt{\theta}t + \sin\sqrt{\theta}(s-\Delta)\sin\sqrt{\theta}t\right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\overline{q_1(s)}q_2(t)\cos\sqrt{\theta}(s-t-\Delta) \tag{3.17}$$

Pour simplifier la formule (3.15) , nous devons étudier la fonction

$$F(u,\zeta) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\theta}(\theta-\zeta)}\cos\sqrt{\theta}(u-\Delta)d\theta$$

où nous notons $u = s - t$. Le changement de variable$\sqrt{\theta} = p$ donne

$$F(u,\zeta) = 2\int\limits_0^\infty \frac{1}{p^2-\zeta}\cos p|u-\Delta|dp$$

Rappelons, que si $f(z)$ est une fonction analytique dans le demi-plan Im$z > 0$, et $a > 0$ alors

$$\int\limits_0^\infty f(x)\cos uxdx = \pi i\sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right]$$

La fonction $f(z) = \dfrac{2}{z^2-\zeta}$ satisfait les conditions nécessaires, ainsi

$$F(u,\zeta) = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\zeta}}\left[\frac{1}{z^2-\zeta}e^{i|u-\Delta|z}\right] = \frac{\pi i}{\sqrt{\zeta}}e^{i|u-\Delta|\sqrt{\zeta}},\ \operatorname{Im}\sqrt{\zeta} > 0$$

Alors, de (3.13), (3.15)–(3.17) suit (3.15).

Le lemme est prouvé. ■

3 Spectre de l'opérateur L

Notons que l'opérateur S a le spectre continu pur de multiplicité 2 qui coïncide avec la demi droite $[0, \infty)$. L'opérateur perturbé

$$T = S + V$$

peut avoir des valeurs propres et la singularité spectrale au point $\sigma_0 \in [0, \infty)$ où les fonctions

$$\sigma \to (T_\sigma \varphi, \psi)_\pm = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} (T_{\sigma + i\varepsilon}\varphi, \psi),\ 0 < \sigma < \infty \tag{3.18}$$

sont non bornées dans σ_0 pour φ, ψ du sous-espace linéaire, dense dans H. En raison de la présentation (3.14) la nature de l'expression (3.18) dépend de la fonction opératorielle $K(\zeta)$. En prenant en considération la condition (3.7) nous obtenons que

$$\frac{1}{|\sqrt{\zeta}|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \overline{q_1(s)} q_2(t) \exp\left[i|s - t - \Delta| \sqrt{\zeta} \right] \right| dsdt < 1 \tag{3.19}$$

pour une grande valeur suffisante $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta} > 0$. Par conséquent, la fonction opératorielle $K(\zeta) - 1$ (voir (3.15)) est compacte et holomorphe dans le domaine $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta} > 0$ et l'opérateur inverse $K(\zeta)^{-1}$ existe exepté peut être quelques points d'isolement (voir le théorème sur la fonction opératorielle holomorphe [24]).

Nous avons besoin du prolongement analytique de $K(\zeta)$ au-dessus des demis-axes $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$. Notons $\sqrt{\zeta} = \sigma + i\tau$. Nous introduisons la courbe $l_+(\delta)$ dans le plan (σ, τ) par l'équation

$$\tau(\sigma) = \begin{cases} -\dfrac{\delta}{\sigma_0}\sigma, & \sigma_0 < \sigma < 0 \\ -\delta, & \sigma < \sigma_0 \end{cases}$$

pour un certain $\sigma_0 < 0$, $0 < \delta < |\sigma_0|$.

La relation

$$\sqrt{\zeta} = \sigma + i\tau, \zeta = x + iy$$

transforme $l_+(\delta)$ en la courbe $L_+(\delta)$ dans s-plan.

Pour $\sigma < \sigma_0$ nous avons

$$\begin{cases} x = \sigma^2 - \delta^2 \\ y = -2\delta\sigma \end{cases}$$

Ainsi, la partie correspondante de la courbe $L_+(\delta)$ appartient à la parabole

$$y^2 = 4\delta^2(x + \delta^2)$$

Notons par $\Omega_+(\delta)$ le domaine dans le demi-plan $\mathrm{Im}\zeta > 0$, limité par la demi droite $(0, \infty)$ et la courbe $L_+(\delta)$.

Par analogie pour un certain $\sigma_0 > 0$ et $0 < \delta < \sigma_0$, par la relation

$$\tau(\sigma) = \begin{cases} -\dfrac{\delta}{\sigma_0}\sigma, & 0 < \sigma < \sigma_0 \\ -\delta, & \sigma > \sigma_0 \end{cases}$$

nous définissons la courbe $l_-(\delta)$ et le domaine correspondant $\Omega_-(\delta)$ dans le demi plan $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta} < 0$.

Notons, que si $|\sigma| > |\sigma_0|$ alors $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta} > -\delta$, $\zeta \in \Omega_\pm(\delta)$.

Finalement, la fonction $\sqrt{\zeta}$ et la fonction opératorielle $K(\zeta)$ admettent le prolongement analytique dans les deux domaines $\Omega_\pm(\delta)$.

Plus bas, nous choisissons $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (voir (3.7)). Notons

$$M_0 = \sup_{s,t,\zeta} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(|s|+|t|)} \left| \exp\left[i|s - t - \Delta|\sqrt{\zeta} \right] \right|, \quad \zeta \in \Omega_\pm(\delta)$$

et

$$M_1 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|q(t)|} e^{\frac{\varepsilon}{2}|t|} dt \right)^2$$

Théorème 3.1 *1) Il existe un prolongement analytique $K_\pm(\zeta)$ de la fonction opératorielle $K(\zeta)$ dans les domaines $\Omega_\pm(\delta)$.*

2) Pour $\zeta \in \Omega_{\pm}(\delta)$ l'estimation suivante est satisfaite

$$\|K_{+}(\zeta) - 1\| \leqslant \frac{M_0 M_1}{|\sqrt{\zeta}|} \tag{3.20}$$

Preuve. D'après (3.19), (3.15) il reste à noter que l'expression (3.19) a l'estimation

$$\frac{M}{|\sqrt{\zeta}|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |q_1(s)||q_2(t)| e^{\frac{\varepsilon}{2}(|s|+|t|)} dt ds = \frac{M_0 M_1}{|\sqrt{\zeta}|}$$

■

Corollaire 3.1 *Le point unique $\zeta = 0$ peut être le point d'accumulation du spectre continu de l'opérateur L.*

Preuve. D'après (3.18) et la formule (3.14) , chaque valeur $\zeta \neq 0$ de spectre continu est un pôle de $K(\zeta)^{-1}$, c-à-d l'opérateur $K(\zeta)$ n'est pas inversible ou $K_{\pm}(\sigma)$, $\sigma \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ n'est pas inversible.

Selon (3.19) , l'opérateur $K(\zeta)$ est inversible si $\mathrm{Im}\sqrt{\zeta}$ est suffisamment grand. Il résulte du théorème sur la fonction opératorielle holomorphe que le point d'accumulation possible peut être sur la frontière de $\Omega_{\pm}(\delta)$. Alors, il peut être $\zeta = 0$ ou $\zeta = \infty$.

Puisque (3.20) , il reste $\zeta = 0$ seulement. Le corollaire est prouvé. Pour étudier le point $\zeta = 0$, nous introduissons la condition supplémentaire sur l'opérateur L : s'il existe $N > 0$ tel que

$$\operatorname{supp} q(x) \subset [-N, N] \tag{3.21}$$

Réécrivons (3.15) comme suivant

$$(K(\zeta) - 1)c(s) = \frac{i}{2\sqrt{\zeta}} \overline{q_1(s)} \int_{-\infty}^{\infty} c(t) q_2(t) dt + Q(\zeta) c(s) \tag{3.22}$$

où

$$Q(\zeta)c(s) = \frac{i}{2\sqrt{\zeta}}\overline{q_1(s)} \int_{-\infty}^{\infty} c(t)q_2(t)\left[\exp\left(i|s-t-\Delta|\sqrt{\zeta}\right)-1\right]dt$$

Soit $a > 0$ une constante arbitraire, nous considérons le cas quand $|\sqrt{\zeta}| < a$. En raison de (3.21) la valeur suivante est finie :

$$C(N) = \frac{1}{2}\sup_{|s|,|t|<N}\left|\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\left[\exp\left(i|s-t-\Delta|\sqrt{\zeta}\right)-1\right]\right|, \quad |\sqrt{\zeta}| < a$$

Evidemment

$$|Q(\zeta)c(s)| \leqslant C(N)|\overline{q_1(s)}| \int_{-\infty}^{\infty} |c(t)||q_2(t)|dt \leqslant C(N)|\overline{q_1(s)}|\|c\| \cdot \|q_2\|$$

D'ici

$$\|Q(\zeta)\| \leqslant C(N)\|\sqrt{q}\|^2 \tag{3.23}$$

En plus de (3.21) , la condition suivante est satisfaite

$$C(N)\|\sqrt{q}\|^2 < 1 \tag{3.24}$$

L'équation $K(\zeta)c = d$ (voir (3.22)) prend la forme

$$(1+Q(\zeta))\,c + \frac{i}{2\sqrt{\zeta}}(c,\overline{q_2})\overline{q_1} = d$$

Notons $\overline{q}_1(\zeta) = (1+Q(\zeta))^{-1}\overline{q}_1$ (voir (3.23)) alors

$$c + \frac{i}{2\sqrt{\zeta}}(c,\overline{q_2})\overline{q_1}(\zeta) = (1+Q(\zeta))^{-1}d$$

ou

$$(c,\overline{q}_2)\left[1+\frac{i}{2\sqrt{\zeta}}\left(\overline{q}_1(\zeta),\overline{q}_2\right)\right] = \left((1+Q(\zeta))^{-1}d,\overline{q}_2\right)$$

Par conséquent $K(\zeta)$ est inversible si $d = 0$, il résulte $c = 0$ ou

$$1 + \frac{i}{2\sqrt{\zeta}}\left(\overline{q}_1(\zeta), \overline{q}_2\right) \neq 0 \tag{3.25}$$

Il est suffisant de demander $(\overline{q}_1(0), \overline{q}_2) \neq 0$ où $\overline{q}_1(0) = (1 + Q(0))^{-1}\overline{q}_1$ et $Q(0) = \lim\limits_{\zeta \to 0} Q(\zeta)$ où

$$Q(0)c(s) = -\frac{1}{2}q_1(s)\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(t)q_2(t)|s - t - \Delta|dt \tag{3.26}$$

Finalement, le théorème est prouvé. ■

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions* (3.21), (3.24) *sont vérifiées et*

$$\left((1 + Q(0))^{-1}\,\overline{q}_1, q_2\right) \neq 0 \tag{3.27}$$

où l'opérateur $Q(0)$ *est donné dans* (3.25)*. Alors il existe* a_1 *tel, que le cercle* $|\zeta| < a_1$ *ne contient pas un point de spectre ponctuel de l'opérateur* L*.*

Preuve. En effet, si (3.27) est vérifiée, alors pour ζ est petit la condition (3.25) est vérifiée aussi.Le théorème est prouvé. ■

Théorème 3.3 *D'après les conditions* (3.21), (3.24) *et* (3.27)*, l'opérateur* L *a un spectre ponctuel fini.*

Preuve. résulte du Théorème 3.1 et du Théorème 3.2. ■

4 Conclusion

Notre contribution s'articule autour de deux notions qui sont le modèle de Friedrichs et l'opérateur de Sturm-Liouville. On a utilisé essentiellement la transformation unitaire laquelle nous a conduit à construire le modèle de Friedrichs $T = S + V$.

Ce modèle technique nous a permis de simplifier les calculs très compliqués du calcul fonctionnel dans l'étude du spectre. On a explicité la formule de la résolvante de l'opérateur T dans le modèle de Friedrichs.

On a montré que la résolvante $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$ est bornée. Ce qui a conduit à conclure que le spectre ponctuel est fini et le seul point d'accumulation est le point zéro

Ayant trouvé le spectre, nous envisageons dans le futur de chercher une asymptotique de la solution de ce problème en utilisant la notion des semi-groupes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Brown, A version of multiplicity theory, Topics in Operator Theory, C. Pearcy, ed., American Mathematical Society, Providence RI, 1974.

[2] A. I. Plessner, Spectral Theory of Linear Operators, vol. 1, 2, F. Ungar, New York, 1969.

[3] Berezansky Yu. M., Decomposition on eigenvalues of selfadjoint operators, 1965, 748 p. (russian).

[4] B. Sz.-Nagy and C. Foais, Harmonic Analysis of Operators on Hitbert Space, North-Holland, Amsterdam, 1970.

[5] Cheremnikh E. V., On time Asymptotic of the solution of some Cauchy's problem with spectral singularities, Mah. Studii, 1993, n. 2, p. 64-72 (ukrain).

[6] Cheremnikh E. V., Asymptotic behaviour of the solution of some evolution equations, Math. meth, and phys. mec, fields, 1997, v. 40, n. 4, p. 75-85 (ukrain).

[7] Cheremnikh E. V., On limit values of the resolvent on continuous spectrum, Visnyk, Lviv polytechnic, 1997, 320, 196-203 (Russian).

[8] Cheremnikh E. V., Friedrichs' model and problems with non-local boundary conditions, Math. meth. and phys.-mec. fields, 2000, v, 43, n. 3, p. 146-156 (ukrain).

[9] Cheremnikh E. V., Non- selfadjoint Friedrichs' model and Weyl function, Reports Nation. Acad. Sci. Ukraine, 2001, n.8, p, 22-29 (Ukrain).

[10] Cheremnikh E. V., On a normal eigenvalue embedded in continuous spectrum. Meth. Func. Ansl. and Topology. V.7, n.1, 2001 p.1–16.

[11] Cheremnikh E. V., On the stability of space asymptotic behaviour of the solutions of evolution equations, Ukrain. Math. J., 2002, v. 54, n.3, p. 395-401 (ukrain).

[12] D. G. Lueneberger, Optimization by Vector Space Methods, John Wiley, New York, 1969.

[13] Diaba F., Cheremnikh E.V., On the point spectrum of transport operator, Meth. Funct. Anal. And Topology, v. 11 n.1, 2005, p. 21-36.

[14] Diaba F., Cheremnikh E. V. On asymptotic time for an evolution with non-local boundary condition. Journal of Dynamical Systems & Geometric theoric. Vol. 5, Number 1 (2007) 41-56

[15] Diaba F., Cheremnikh E. V., Ivasyk G. V., On time asymptotic of the solutions of transport evolution equation, 2010.

[16] Diaba F., Zemmouri A., Cheremnikh E. V, Sturm-Liouville operator on the line with retarded potential, Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 6, Issue. 3, 2014, pp. 53-61 Online ISSN : 1943-023X.

[17] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, Oxford, 1937 ; Russian transl. ; GITTL, Moscow, 1948.

[18] E. D. Sontag, On linear systems and noncommutative rings, Math. Systems Theory, 9 (1976), 327-344.

[19] E. Hellinger, Die Orthogonalinvariainten Ouadratischer Formen, Inaugural–dissertation, Ghtingen, 1907.

[20] Elsgoltz L. E., Norkin S. B., Introduction in the theory of differential equations with deviated argument. Nauka, 1971, p. 296.

[21] E. Nelson, Topics in Dynamics I : Flows, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1969.

[22] Erdoğan Şen and Azad Bayramov, On calculation of eigenvalues and eigenfunctionsof a Sturm-Liouville type problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition, Journal of Inequalities and Applications 2011, 2011 :113.

[23] F. D. Gahov, Boundary- value problems, Fizmatgiz, Moscow, 1958, 2nd rev. ed. 1963 ; English transl., Pergamon Press, Oxford and Addition-Wesley, Reading, Mass., 1966. MR 21 " 2879 ; MR 27 " 6094 ; MR 33" 6311.

[24] Gohberg I. C., Krein M. G., Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space, 1969, 378 p.

[25] H. Helson, Lectures on Invariant Subspaces, Academic Press, New York, 1964.

[26] H. O. Fattorini, On complete controllability of linear systems, J. Differential Equations, 3 (1967), pp. 391-402.

[27] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, Theory and application of Volterra operators in Hilbert space, "Nauka", Moscow, 1967 ; English transl., Transl. Math. Monographs, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970. MR 36 " 2007.

[28] I. N. Akhiezer and I. M. Glazman, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, F. Ungar, New York, 1961.

[29] J. Schwartz, Some non-selfadjoint operators, Comm. Pure Appl. Math. 13(1960), 609-639 MR 29" 2656.

[30] J. S. Baras, Algebraic structure of infinite dimensional linear systems in Hilbert space, Mathematical Systems Theory, Udine 1975, Springer 1976, pp. 193-203.

[31] J. W. Helton, Discrete time systems, operator models and scattering theory, J. Functional Analysis, 16 (1974), pp. 15-38.

[32] K.O.Friedrichs, Uber die Spectralzerlegungeines Integral operators. Math.Annal. 115, $N^0$2,1938, 249-300.

[33] K.O.Friedrichs, *On the perturbation of continuous spectrum*, Comm.pure .appl.math., 1, $N^0$4, 1948, 361-406.

[34] K. O. Friedrichs, Perturbation of spectra in Hilbert space, Lectures in Appl. Math., vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965. MR 32 " 365.

[35] K. Yosida, Functional analysis, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 123, Academic Press, New York ; Springer -Verlag, Berlin 1965 ; Russian transl. ; "Mir", Moscow 1967. MR 31" 5054 ; 37 " 725.

[36] L.D.Faddeev, *Sur le modèle de Friedrichs dans la théorie de perturbation du spectre continu*, Travaux de l'Inst.Math.Academic des Sciences l'URSS, 1964, V.73, p.292-313.

[37] Lehner I. J. The spectrum of the neutron transport for the infinit slab// J. Math. Mech. 11, 1962, no. 2

[38] M. A. Naĭmark, Investigation of the spectrumand the expansion in eigenfunction of a non-selfadjoint opeartor, Trudy Moskov. Mat. Obsc. 3(1954), 181-270 ; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 16 (1960), 103-193. MR 15, 959 ; 22" 8162.

[39] M. A. Naĭmark, Linear differential operators, 2nd ed., "Nauka", Moscow, 1969 ; English transl. of 1st ed., Ungar, New York, 1967. MR 16 702 ; 35"6885.

[40] M. L. J. Hautus et M. Heyman, Linearfeedback-An algebraic approach, SIAM J. Control Optim., 16 (1978), pp. 83-105.

[41] N. Dunford et J. T. Schwartz, Linear Operators, Vols. 1, 2, Interscience, New York, 1957, 1963.

[42] On the structure of intertwining operators, Acta Sci. Math. (Szeged), 35 (1973), pp. 225-253.

[43] P. A. Fuhrmann, A functional calculus in Hilbert space based on operator valued analytic functions, Israel J. Math., 6 (1968), pp. 267-278.

[44] P. A. Fuhrmann, On the corona theorem and its applications to spectral problems in Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968), pp. 55-66.

[45] P. A. Fuhrmann, Algebraic ideas in infinite dimensional system theory, Mathematical Systems Theory, Udine 1975, Springer, 1976, pp. 237-251.

[46] P. A. Fuhrmann, Algebraic system theory : An analyst's point of view, J. Franklin Inst., 301 (1976), pp. 521-540.

[47] Paul A. Fuhrmanni, Operator measures,self-adjoint operators and dynamical systems, SIAM J. MATH. ANAL. Vol. 11, No. 4, July 1980, 1980 Society for Industrial and Applied Mathematics

[48] Pavlov B. S., Spectral analysis of an differential operator with spreaded boundary condition, Prob. Math. Phys., 1973, n. 6, p. 101-119 (Russia).

[49] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity, Chelsea, New York, 1951.

[50] R. Beals, Topics in Operator Theory, University of Chicago Press, Chicago, 1972.

[51] R. del Rio and Olga Tchebotareva ; Boundary continuous of Sturm-Liouville operators with mixed spectra, Journal of Mathematical Analysis et Applications, J. Math. Anal. Appl. 288 (2003) 518-529.

[52] R. del Rio and Olga Tchebotareva ; Sturm-Liouville operators in the half axis with local perturbations, Journal of Mathematical Analysis et Applications, J. Math. Anal. Appl. 329 (2007) 557-566.

[53] R. E. Kalman, Lectures on Controllability and Observability, CIME summer 1968, Cremonese, Roma, 1969.

[54] R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib, Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York, 1969.

[55] R.W. Brockf. TT and P. A. Fuhrmann, Normal symmetric dynamical systems, SIAM J. Control, 14 (1976), pp. 107-119.

[56] T.Kako et Yajima, *Spectral and Scattering theory for a class of Non-Selfadjoint Operators*, Sci.pap.coll.Gen.Educ.Univ.Tokyo, V, 26,1976, N^{o}2, p.73-89.

[57] T. Kato, Perturbation theory for linear operators, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1966. MR 34 " 3324.

[58] V. A. Marčenko, Expansion in eigenfunctions of non-selfadjoint singular differential operators of second order, Mat. Sb. 52 (94) (1960), 739-788 ; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 25 (1963), 77-130. MR 23 " A3313.

[59] V. E. Ljance, A differential operator with spectral singularities, Math. Sb. 64 (106) (1964), 521-561 ; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 60 (1966) ; 185-225. MR 30 " 5023.

[60] V. E. Ljance, The inverse problem for a non-selfadjoint operator, Dokl. Akad. Nauk SSSR 166 (1966), 39-33= Sovient Math. Dokl. 7 (1966), 27-30. MR 33 " 4720.

[61] V. E. Ljance, Non-selfadjoint one-dimensional perturbation of the operator of multiplication by the independent variable, Dokl. Akad. Nauk SSSR 182 (1968), 1010-1013= Sovient Math. Dokl. 9 (1968), 1241-1245. MR 38" 1557.

[62] V. E. Ljance, Completement perturbation of continuous spectrum Mat. sb. I 82 (124), 1970, 126-156, II 84 (126), 1971, 141-158 (Russian).

[63] V. E. Ljance, Completement regular perturbation of continuous spectrum Mat. sb. I 84 (126)(1971), No.1, Vol. 13 (1971), No. 1.

[64] —–, Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators, Math. Ann. 162 (1965/6th6), 258-279. MR 32 " 8211.

[65] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.