Polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux

by

Rehouma Abdel Hamid.

Submitted to the Department de mathémtiques
in partial fulfillment of the requirements for the degree of

Thése Doctorat de Mathématiques

at the

UNIVERSITÉ DE BADJI MOKHTAR,SIDI AMAR,ANNABA.

Mai 2014

Signature of Author . . . .
Department de mathémtiques
30 /5/ 2014.

Certified by . . . .
Pr.Benzine Rachid & Pr Yamina Laskri.
....
Research Head

Certified by . . . .
....
....
Thesis Supervisor

Accepted by . . . .
....
....

اهـــــــــداء

أشكـــــــــــر اللـــــــــــه سبحانه وتعالى شكرا جزيــلا يليـــق بجلاله وعظمة سلطـانه أن وفقنــــــــــي في انجاز هذا العمل البحثي العلمي.

أهـــــــــــــدي هذا العمــــــــــل أولا الى روح والدي الحاج رحومـــــــة محمــــــــــد تغمده اللـــــــــه برحمته الواسعة وأسكنه فسيــــــــــح جنــــــــانه.آمين يا رب العالمــــــــــــين.

أهـــــــــــــدي هذا العمــــــــــل أيضا الى أمـــي الحاجة هارون زينب أطـال اللـــــه في عمرها وحفظها اللــــــه ورعاها.أهـــــــــــدي هذا العمـــــــــل الى كل أفراد عائلتي إلى زوجتي وأبنائي وبناتي وأخص بالذكـــــــر: إشراق وأختها جنى (بهجـة العين). وأبنائي وأخص بالذكـــــــر: مخلــــــــص وأخيه عثمـان البشـيـر.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance à mes directeurs de thèse Professeur BENZINE Rachid et Professeur LASKRI Yamina qui m'ont proposé le sujet de cette thèse. Merci pour leurs précieux conseils et leurs encouragements.

Mes remerciements vont également à Professeur REBBANI Faouzia pour le grand honneur qu'elle me fait en présidant le jury de cette thèse, et à Professeur BENAYAT Djilali et à Docteur ELLAGGOUNE Fateh d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse. Merci pour leurs remarques et toutes leurs idées.

Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

.

RESUME

Soit $\{L_n\}$ le système de polynômes orthogonaux sur le cercle unité i.e. $L_n(z)$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^{2\pi} L_n(z)(\overline{z})^k \rho(\theta)d\theta = 0,\ k = 0, 1, ..., n-1, \quad z = e^{i\theta}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, que nous appelerons pôle, définissons la suite des polynômes polaires notés $P_{n,\alpha}(z)$ associés aux polynômes orthogonaux $L_n(z)$, comme suit. $P_{n,\alpha}(z) = z^n + ...$,($P_{n,\alpha}(z)$ est un polynôme unitaire (monique)) est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(n+1)L_n(z) = ((z-\alpha)P_{n,\alpha}(z))' = P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha)P'_{n,\alpha}(z).$$

On étudie dans cette thèse les propriétés des polynômes polaires $P_{n,\alpha}(z)$.

ABSTRACT

Let μ be a finite positive measure defined on the Borelian $\sigma-$algebra of $\mathbb{C}$, μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure $d\theta$ on $[-\pi, +\pi]$. Let us consider $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, the system of monic orthogonal polynomial with respect to μ. We introduce a new class of polynomials $\{P_{n,\alpha}\}$, that we call polar polynomials associated to $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$.For a fixed complex number $\alpha, P_{n,\alpha}(z)$ is solution of the following differential equation

$$(n+1)\, L_n(z) = P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha)\, P'_{n,\alpha}(z)\,.$$

We study algebraic and asymptotic properties of the polar polynomials.

ملـخص

نتناول في هذا البحث موضوع كثيرات الحدود البولارية ، وهي من أهم المجموعات المرفقة لكثيرات الحدود المتعامدة فالعلاقة بين كثيرات الحدود المتعامدة وكثيرات الحدودالبولاريةهي علاقة أصلية ،أي البولارية هي كثيرات حدود أصلية لكثيرات الحدودالمتعامدة وتحقق شرط صفري يضمن أحاديتها.

السلوك المقارب لكثيرات الحدود المتعامدة يعتبرمن أهم المسائل المتداولة ، نتطرق الى جوانب مهمة في هذا الموضوع ،فكثيرات الحدود البولارية لها سلوك مقارب يشبه في الكثير من الأحيان السلوك المقارب لكثيرات الحدود المتعامدة،تحصلنا على نتائج في السلوك المقارب لكثيرات الحدود المتعامدة نفسها عن طريق السلوك المقارب لكثيرات الحدود البولارية.

Table des matières

Les spécialistes des approximants de Padé verront rapidement que la clef de l'orthogonalité vient donc de ce renversement des termes dans les transformées de Stieltjes de la mesure de Lebesgue, et de celle de la mesure ρ,je considère la mesure positive sur $[0,1]$ de densité :

$$x \longmapsto \rho(x) = \frac{1}{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \pi^2}.$$

Roland Groux (Les mesures secondaires,2006).

Introduction

Soit μ une mesure positive finie définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{C}$ et concentré sur le cercle unité $T = \{z,\ |z| = 1\}$. μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\theta$ sur $[-\pi, +\pi]$, i.e.

$$d\mu(\theta) = \rho(\theta)d\theta,\ \rho \geq 0,\ \rho \in L^1([-\pi, +\pi], d\theta). \tag{1}$$

Ceci étant, considérons $L_n(z) = z^n + \ldots$, le polynôme monique de degré n exactement (le coéfficient de z^n est égal à 1) associé à la mesure μ. $L_n(z)$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^{2\pi} L_n(z)\,(\overline{z})^k\,\rho(\theta)d\theta = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad \left(z = e^{i\theta}\right). \tag{2}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, que nous appelerons pôle, définissons la suite des polynômes polaires notés $P_{n,\alpha}(z)$ associés aux polynômes orthogonaux $L_n(z)$, comme suit.$P_{n,\alpha}(z) = z^n + \ldots$,($P_{n,\alpha}(z)$ est un polynôme unitaire (monique) $P_{n,\alpha}$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(n+1)\,L_n(z) = ((z-\alpha)\,P_{n,\alpha}(z))' = P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha)\,P'_{n,\alpha}(z)\,. \tag{3}$$

Notons que $\Phi_n(z) = (z-\alpha)\,P_{n,\alpha}(z)$ est un polynôme monique, primitive de $(n+1)\,L_n(z)$, normalisé par la relation $\Phi_n(\alpha) = 0$. Une conséquence directe des relations précédentes est que

$P_n(z)$ satisfait les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \left[P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha) P'_{n,\alpha}(z)\right] (\overline{z})^k \rho(\theta) d\theta = 0, \;\; k = 0, 1, ..., n-1, \quad \left(z = e^{i\theta}\right). \qquad (4)$$

Ce type d'orthogonalité généré par des opérateurs differentiels a été introduit initialement par Aptekarev,Cachafeiro,Marcellán,**[2]** et Alfaro et Marcellán,**[4]**.Une étude similaire a été effectuée par A.Fundora, H.Pijeira et W.Urbina **[22]**,**[49]**,dans le cas où la mesure est concentrée sur le segment $[-1,+1]$, au lieu du cercle $T = \{z, \; |z| = 1\}$.Une étude autre similaire a été effectuée par Ya.Laskri ,A.Rehouma **[42]** ,dans le cas où la mesure de surface (planar measure) est concentrée sur le disque unité (polynômes polaires des polynômes orthogonaux de type de **Bergman**).En englais (Polar Bergman polynomials on domains with corners).

La première partie de cette est consacrée à l'étude des propriétés algébrique et le comportement asymptotique des polynômes polaires $\{P_{n,\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Considérons maintenant une mesure β de support E. E est un contour de Jordan réctifiable.Par l'appellation polynômes L_p extrémaux on désignera les polynômes notés $T_{n,p,\beta}$ qui sont solutions optimales de problèmes extrémaux posés dans l'espace $L_p(\beta,\mathbb{C})$. Si on note par $m_{n,p}(\beta)$ $(n \in \mathbb{N}, \; p > 0)$ les constantes extrémales associées à β et à E, on obtient

$$m_{n,p}(\beta) = \|T_{n,p,\beta}\|_{L_p(\beta,E)} = \min_{a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}} \left\| z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right\|$$

Le cas $p = 2$ correspond au cas très connu des polynômes orthogonaux normalisés $T_{n,2,\beta}$ associés à la mesure β. Les conditions d'orthogonalité étant :

$$T_{n,2,\beta}(z) = z^n + ...; \;\; \text{et} \quad \int_E T_{n,2,\beta}(z)\overline{T_{m,2,\beta}(z)} d\beta(z) = k_n \delta_{n,m}; \;\; k_n \neq 0, \;\; n,m \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Soit $\sigma \in \mathbb{C}$, qu'on appelle pole, on appelle polynômes polaires, associés aux polynômes $T_{n,p,\beta}$, la suite des polynomes qu'on note $\{Q_{n,\beta}(z)\}_{n=0,1,2....}$dont le coefficient de z^n est égal à $+1$ et solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(n+1) T_{n,p,\beta} = Q_{n,\beta}(z) + (z-\sigma) Q'_{n,\beta}(z) \qquad (7)$$

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude des propriétés algébriques et le comportement asymptotique des polynômes polaires $\{Q_{n,\beta}(z)\}_{n=0,1,2....}$.

La thèse est composée de cinq chapitres. Le chapitre I est consacré à l'étude des propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur le cercle unité. On définit dans ce chapitre aussi les polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité. On donne quelques propriétés générales de ces polynômes.

Le chapitre II est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur le cercle unité.

le chapitre III contient une partie importante des résultats originaux de cette thèse. Il est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité. On y trouve aussi quelques notions et résultats concernant la localisation des zéros des polynômes polaires.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des propriétés fondamentales des polynômes orthogonaux et Lp extrémaux associés à une mesure concentrée sur un contour de Jordan rectifiable. On y définit aussi les polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour.

Dans le chapitre V on expose la deuxième partie des résultats originaux de la thèse. Il s'agit essentiellement des résultats concernant le comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur un contour de Jordan rectifiable .

Le manuscrit se termine par une conclusion générale, quelques problèmes ouverts et des perspectives de résolution.

Chapitre 1

Polynômes orthogonaux sur le cercle unité et polynômes polaires associés. Définitions et propriétés générales

1.1 Définition et propriétes générales des polynômes orthogonaux et polynômes associés sur le cercle unité

Soit μ une mesure positive, finie, non discrète et définie sur la tribu Borélienne $B(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ étant muni de sa topologie usuelle. μ est supportée sur le cercle unité $\partial D = T = \{z, |z| = 1\}$. On suppose dans tout ce qui suit que

$$z^n \in L^2(\mu, \mathbb{C})\,; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Notons par $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ la suite des polynômes orthogonaux sur le cercle unité T par rapport à la mesure μ, $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ vérifient donc les relations d'orthogonalité suivantes

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_n(z)\,\overline{L_m(z)}d\mu(\theta) = \delta_{n,m}\,\|L_n\|^2_{L^2(\partial D, d\mu)} \qquad , \; n, m \in \mathbb{N}. \qquad \left(z = e^{i\theta}\right) \qquad (1.1)$$

et

$$\|L_n\| = \|L_n\|_{L^2(\partial D, d\mu)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |L_n(z)|^2 \, d\mu(\theta)} \qquad , n = 0,1,2..... \qquad \left(z = e^{i\theta}\right)$$

Pour l'unicité, posons

$$L_n(z) = z^n + \xi_{n,1} z^{n-1} .... + \xi_{n,n-1} z + \xi_{n,n}$$

Remarquons que

$$\xi_{n,n-1} = L_n'(0) \qquad \text{et} \qquad \xi_{n,n} = L_n(0)$$

Notons par **OPUC** l'ensemble des polynômes orthogonaux sur le cercle unité.(in short abbreviation **O**rthogonal **P**olynomials on the **U**nit **C**ircle).

Définition 1.1.1. *Soit* $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *le système de polynômes orthogonaux associés à la mesure* μ *sur le cercle unité. On appelle polynômes réciproques des polynômes les polynômes notés* $\{L_n^*(z)\}$ *et reliés aux polynômes orthogonaux* $\{L_n(z)\}$ *par la relation*

$$L_n^*(z) = z^n \overline{L_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

Donnons dans le théorème suivant quelques propriétés de ces polynômes

Théorème 1.1.1.([47], [21] [40],[23],[43],[44],[55],[56],[57]). *Les polynômes* $\{L_n^*(z)\}$ *et* $\{L_n(z)\}$ *vérifient les relations suivantes*

$$L_{n+1}(z) = zL_n(z) - \overline{\alpha_n} L_{n+1}(0) L_n^*(z) \tag{1.2}$$

où $\alpha_n = -\overline{L_{n+1}(0)}$,.α_n s'appellent les constantes des Verblansky,[4],**[47], [21] [40],[23],[43],[44] ,[55],[56],[57],[59],**Et

$$L_n^*(z) = \overline{L_n(0)} z^n + \overline{L_n'(0)} z^{n-1} ......\overline{\xi_{n,n}} z + 1$$

encore

$$\|L_{n+1}\|^2_{L^2(\partial D, d\mu)} = \left(1 - |L_{n+1}(0)|^2\right) \|L_n\|^2_{L^2(\partial D, d\mu)} = \tag{1.3}$$

et,**[47], [21] [40],[55],[56],[57],[59],**

$$\|L_{n+1}\|^2_{L^2(\partial D,d\mu)} = \prod_{k=0}^{n}\left(1-|\alpha_k|^2\right)$$

,aussi

$$\langle L_n, z^n\rangle_{L^2(\partial D,d\mu)} = \|L_n\|^2_{L^2(\partial D,d\mu)} \tag{1.4}$$

dans le même contexte

$$\left\langle L_n(z), \frac{1}{z}\right\rangle_{L^2(\partial D,d\mu)} = L_{n+1}(0)\left\langle L_n^*(z), 1\right\rangle_{L^2(\partial D,d\mu)}$$

et

$$L_n^*(z) = L_{n-1}^*(z) + z\overline{L_{n,}(0)}L_{n-1}(z) \tag{1.5}$$

par suite

$$\left|\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} - z\right| = \left|\frac{L_{n+1}^*(z)}{L_n^*(z)} - 1\right| = |L_{n+1}(0)| \qquad , \text{pour } |z| = 1.$$

et

$$L_n^*(z) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\overline{L_{k+1}(0)}L_k(z).$$

Si, **[56],[57],[59]**

$$d\mu = \rho(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s$$

$\rho(\theta)$ est une fonction poids absolument continue et positive sur $[0 \quad 2\pi]$, $d\mu_s$ est une mesure singulière.La formule de **Szegö**,**[55]**,**[56],[57],[59]**

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-|\alpha_n|^2\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(\rho(\theta))\,d\theta\right) \tag{1.6}$$

1.2 Outils fonctionnels pour étudier le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité

L'espace fonctionnel de base qui nous sert à étudier le le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité, est l'espace de Hardy $H^2(D)$ ou plus généralement $H^p(D)$.

1.2.1 L'espace $H^p(D)$

L'espace $H^p(D)$ sert à étudier le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux et plus généralement les polynômes L_p extrémaux.

Définition 1.2.1 *Si* $f \in H(D)$ (analytique dans D), *nous définissons pour* $p > 0$ *et pour tout* r, $0 \leq r < 1$

$$M_p(f;r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right\}^{1/p}. \tag{1.7}$$

Théorème 1.2.1([53],[33],[18]) *Les fonctions* $M_p(f;r)$ *sont monotones croissantes en* r.

Ce théorème permet d'établir la définition suivante :

Définition 1.2.2 *Pour tout* $f \in H(D)$ *et pour* $p > 0$, *on pose*

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1} M_p(f;r) = \sup_{0 \leq r < 1} \{M_p(f;r)\}. \tag{1.8}$$

La classe $H^p(D)$ *est définie comme l'ensemble des fonctions* $f \in H(D)$ *pour lesquelles* $\|f\|_p < \infty$.

Remarque 1.2.1 *Si* $0 < s < p < \infty$, il est clair que $H^p \subset H^s$.

Théorème 1.2.2 ([53],[33],[18]) *Pour* $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $\left(H^p(D), \|.\|_p\right)$ *est un espace de Banach. Pour* $0 < p < 1$ *l'espace* $H^p(D)$ *est un espace métrique muni de la distance*

$$d(f,g) = \|f - g\|_p$$

1.2.2 Limite radiale

Théorème 1.2.3 ([53],[33],[18]) *Si $p > 0$ et si $f \in H^p(D)$ alors f possède une limite radiale notée f^**

$$\lim_{r \to 1} f\left(re^{i\theta}\right) = f^*\left(e^{i\theta}\right) \tag{1.9}$$

presque partout sur le cercle Γ. En plus

$$f^* \in L_p(\Gamma),$$

et

$$\|f\|_p = \|f^*\|_{L_p(\Gamma)} \tag{1.10}$$

Théorème 1.2.4 ([53],[33],[18]) *Soit $f \in H^p(D)$ alors*

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) - f^*\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = 0 \tag{1.11}$$

où $f\left(e^{i\theta}\right)$ est la limite radiale de $f(z)$.

Corollaire 1.2.1 ([53],[33]) *Soit $f \in H^p(D)$ alors f est respectivement l'intégrale de* ***Poisson*** *et de* ***Cauchy*** *de sa limite radiale $f^*\left(e^{i\theta}\right)$, on a alors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f^*\left(e^{i\theta}\right) dt,$$

et

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} dt. \tag{1.12}$$

1.2.3 L'espace $H^2(D)$

La particularité de l'espace $H^2(D)$ est dû au faît qu'il s'agit d'un espace de Hilbert et qu'on peut l'identifier avec un sous-ensemble de $L_2(\Gamma)$. **([53],[33],[18])** Rappelons que la norme d'un élément $g \in L_2(\Gamma)$ est donnée par

$$\|g\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2}.$$

et que le produit scalaire est défini par

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Gamma)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} d\theta.$$

L'espace $H^2(D)$ est l'espace fonctionnel pour étudier le cas particulier trés connu des polynômes orthogonaux. Les propriétés essentielles de cet espace se résument dans le théorème **1.2.5** suivant

Théorème 1.2.5 ([53],[33],[18])

(i) *Une fonction* $f \in H(D)$ *de la forme* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ (z \in D)$, *appartient a* $H^2(D)$ *si et seulement si* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. *Dans ce cas*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

(ii) *Si* $f \in H^2(D)$ *alors* $\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ *existe en presque tous les points de* Γ *une limite radiale notée* $f^*(e^{i\theta})$, *elle vérifie* $\|f\|_2 = \|f^*\|_{L_2(\Gamma)}$.

(iii) f *est l'intégale de Cauchy de* f^*, *c'est-à-dire :*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad , z = re^{i\theta}, 0 \leq r < 1, \tag{1.13}$$

C_1 *étant le cercle unité orienté positivement.*

1.2.4 Fonction de Szegö associée au disque unité

Comme on le verra plus tard, la formule asymptotique des polynômes L_p extrémaux s'exprime essentiellement en fonction des fonctions de Szegö (qui représentent la partie absolument continue de la mesure α) . Les fonctions de Szegö rentrent dans le cadre général de la représentation des fonctions positives. Pour la construction de ces fonctions dans le disque unité ouvert, on recommande **([53],[33],[18],[55],[56])**.

Soit $F \in H^p(D)$ et F^* la limite radiale de F qui existe presque partout sur le cercle Γ. posons $f(\theta) = \left|F^*\left(e^{i\theta}\right)\right|$. Il est connu que $f \in L_p([-\pi,\pi], d\theta)$. On montre aussi que $\log(f) \in L_1([-\pi,\pi], d\theta)$, (**[53],[33],[55],[56]**.Réciproquement si $f \in L_p([-\pi,\pi], d\theta)$, f presque partout positive et $\log(f) \in L_1([-\pi,\pi], d\theta)$; on montre **([53],[33],[18])** qu'il existe une infinité de fonctions $F \in H^p(D)$ tel que $f(\theta) = \left|F^*\left(e^{i\theta}\right)\right|$, presque partout pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$. F^* étant la limite radiale de F.

Parmi les fonctions de type F, on peut construire une fonction particulière dite fonction de Szegö et dont les propriétés se trouvent dans le théorème suivant :

Théorème 1.2.6 ([53],[18],[33],[55],[55],[56]). *Soit f une fonction non négative définie sur $[-\pi,\pi]$ tel que $f \in L_p([-\pi,\pi], d\theta)$ et $\log(f) \in L_1([-\pi,\pi], d\theta)$; $d\theta$ étant la mesure de Lebesgue sur $[-\pi,\pi]$, alors la fonction suivante*

$$D_f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi} \log\left(f\left(e^{i\theta}\right)\right)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta\right\}, \quad (|z|<1) \tag{1.14}$$

dîte fonction de Szegö associée au domaine D et à la fonction f posséde les propriétés suivantes :

(i) $D_f \in H^p(D)$.

(ii) $D_f(z) \neq 0$; $\forall z \in D$.

(iii) $\left|D_f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p = f(\xi)$; *presque partout sur Γ, où $D_f\left(e^{i\theta}\right)$ est la limite radiale de D_f.*

(vi) $D_f(0) > 0$.

Preuve du théorème 1.2.6 et construction de la fonction de Szegö $\mathbf{D}_f$

Soit f une fonction non négative telle que $f \in L_1([-\pi,\pi], d\theta)$ et $\log(f) \in L_1([-\pi,\pi], d\theta)$. Considèrons l'intégrale de Poisson $F\left(re^{i\theta}\right)$ associée à la fonction $\log(f)$ donnée par

$$F\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\log(f(t))\,dt$$

et qui possèdent deux propriétés essentielles (**[53] „[33],[55],[55],[56]**) à savoir que F est harmonique dans le disque unité ouvert D et qu'elle représente la partie réelle d'une certaine fonction holomorphe que l'on notera $h(z)$. On supposera que $h(0)$ est réel pour avoir l'unicité de h. la fonction cherchée sera alors

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}h(z)\right\}.$$

c'est-à-dire

$$D_f(z) = g(z) \text{ et } Re\left[D_f(z)\right] = F\left(re^{i\theta}\right) \text{ pour } z = re^{i\theta}, 0 \leq r < 1.$$

On montre alors que g vérifie les propriétés le (i), (ii), (iii) et (vi) du théorème 2.5.1 En effet,

(i) Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta \leq c, \ \forall r, \ 0 < r < 1.$$

Soit $z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
\log(g(z)) &= \log(|g(z)|) + i\arg(g(z)) = \frac{1}{2}(h(z)) \\
&= \frac{1}{2}Re(h(z)) + i\mathrm{Im}(h(z))
\end{aligned}$$

ainsi

$$\log(|g(z)|) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(h(z)),$$

ou encore

$$\log\left(\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^p\right) = \mathrm{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)$$

ou en utilisant la formule de Jensen

$$\begin{aligned}
\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p} &= \exp\left\{\operatorname{Re}\left(h\left(re^{i\theta}\right)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{1+r^{2}-2r\cos(\theta-t)}\log(f(t))\,dt\right\} \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{1+r^{2}-2r\cos(\theta-t)}f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

A présent, on intégre par rapport à θ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p}d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{1+r^{2}-2r\cos(\theta-t)}f(t)\,dt\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{1+r^{2}-2r\cos(\theta-t)}d\theta\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta = c
\end{aligned}$$

(ii) est évident.

(iii) $g\in H^{p}(D)$. Notons par $g\left(e^{i\theta}\right)$ la limite radiale de g,

$$\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{1+r^{2}-2r\cos(\theta-t)}\log(f(t))\,dt\right\},$$

mais

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to1^{-}}\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p} &= \left|g\left(e^{i\theta}\right)\right|^{p} \\
&= \exp\left\{\lim_{r\to1^{-}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{1+r^{2}-2r\cos(\theta-t)}\log(f(t))\,dt\right\} \\
&= \exp\{\log(f(\theta))\},\ \text{presque partout pour } -\pi<\theta<+\pi.
\end{aligned}$$

[33] page 274 ou,[53] page 220. On obtient alors

$$\left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^p = f(\theta), \text{ presque partout pour } -\pi < \theta < +\pi.$$

(vi) On a

$$g(0) = \exp\left\{\frac{1}{2}h(0)\right\} > 0.$$

Il n'est pas difficile de montrer que

$$D_f = g$$

La construction de la fonction de Szegö est terminée.■

1.3 Lemmes essentiels sur les polynômes orthogonaux

On trouvera dans cette partie les principaux lemmes sur les polynômes orthogoaux et qui nous seront utiles par la suite

Lemme 1.3.1,([4])

$$\left(L_n'(z)\right)^* = nL_n^*(z) - z\left(L_n^*(z)\right)' \tag{1.15}$$

Preuve

$$L_n(z) = z^n + \xi_{n,1}z^{n-1}.... + z\xi_{n,n-1} + \xi_{n,n}$$

alors il est facile de vérifier que

$$L_n^*(z) = \overline{\xi_{n,n}}z^n + \overline{\xi_{n,n-1}}z^{n-1}......\overline{\xi_{n,n}}z + 1$$

et

$$L_n'(z) = nz^{n-1} + (n-1)\xi_{n,1}z^{n-1}.... + \xi_{n,n-1}$$

d'où

$$\left(L_n'(z)\right)^* = \overline{\xi_{n,n-1}}z^{n-1}...... + (n-1)\overline{\xi_{n,1}}z + n$$

et

$$L_n^{*\prime}(z) = n\overline{\xi_{n,n}}z^{n-1} + (n-1)\overline{\xi_{n,n-1}}z^{n-2} + ... + \overline{\xi_{n,n}}$$

d'où

$$nL_n^*(z) - z(L_n^*(z))' = \left(L_n'(z)\right)^*$$

ce qui est exactement (1.15).■

1.3.1 Polynômes orthogonaux secondaires

Définition 1.3.1 *Soit* $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *le système de polynômes orthogonaux associés à la mesure* μ *sur le cercle unité. On appele polynômes orthogonaux secondaires associés aux polynomes* $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ la suite des polynômes notés $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ et vérifiant les relations suivantes :

$$Q_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\left(L_n\left(e^{i\theta}\right) - L_n(z)\right) d\mu(\theta) \qquad n = 0, 1, 2.... \tag{1.16}$$

Lemme 1.3.2 [21] La suite $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ vérifie les relations de récurence à trois termes suivantes :

$$L_0 = 1, \;\; Q_0 = 1$$

et

$$\begin{pmatrix} L_{n+1} & Q_n \\ L_{n+1}^* & -Q_{n+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & L_{n+1}(0) \\ \overline{L_n(0)}z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_n & Q_n \\ L_n^* & -Q_n^* \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, 2.....$$

où

$$Q_n^*(z) = z^n\overline{Q_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

Lemme 1.3.3 [21]

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{Lim}\frac{Q_n^*(z)}{L_n^*(z)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta) \tag{1.17}$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z| \geq 1\}$.

1.3.2 Polynômes noyaux

Définition 1.3.2 *Soit* $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *le système de polynômes orthogonaux associés à la mesure* μ *sur le cercle unité. On appele polynômes noyaux associés aux polynomes* $\{L_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ la suite des polynômes notés $\{k_n(z,w)\}_{n=0}^{\infty}$ définies par la relation suivante :

$$k_n(z,w) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{L_k(w)} L_k(z)}{\|L_k\|^2}$$

Ceci étant, on obtient la relation dite de de **Christoffel-Darboux** suivante :

Lemme 1.3.4 (lemme de **Christoffel-Darboux,[14],[23],[43],[44] ,[55],[56],[57],[59]).**

$$k_n(z,w) = \frac{L_{n+1}^*(z) L_{n+1}^*(w) - L_{n+1}(z) L_{n+1}(w)}{\|L_{n+1}\|^2 (1 - z\overline{w})}$$

Définition 1.3.3 Les polynômes orthogonaux noyaux à l'origine sont définis par

$$k_n(z,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{L_k(0)} L_k(z)}{\|L_k\|^2}$$

Ces polynômes sont orthogonaux sur le cercle unité par rapport à la même mesure,**[4],[14], [23],[55],[56],[57],[59]**.

Parmis les propriétés des polynômes orthogonaux noyaux à l'origine, nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.3.5([4],[14], [23],[55])

$$k_n(z,0) = \frac{L_n^*(z)}{\|L_n\|_\mu^2}$$

si Q_n est un polynôme de degré $\leq n$ alors $k_n(.,0)$ satisfait la relation suivante :

$$\int_{|z|=1} \overline{\overline{D}^s k_n(z,0)} Q_n(z)\, d\mu(\theta) = Q_n^{(s)}(0) \tag{1.19}$$

Et

$$k_n'(z,0) = \frac{L_n^{*\prime}(z)}{\|L_n\|_\mu^2}$$

i.e

$$zk_n'(z,0) = \frac{nL_n^*(z) - (L_n'(z))^*}{\|L_n\|_\mu^2}$$

Le lemme suivant s'appelle est du à **Bernstein**.

Lemme 1.3.6 ([4],[50],[59])Soit P_n un polynôme de degré $\leq n$, arbitraire. Alors Il existe une constante C_n dependent seulement de n telle que :

$$\left\|P_n'\right\|_\mu \leq C_n \left\|P_n\right\|_\mu \tag{1.20}$$

où

$$\|P_n\|_\mu = \sqrt{\int_{|z|=1} |P_n(z)|^2 \, d\mu}$$

1.3.3 Polynômes dérivées polaires

Définition 1.3.3 ([1],[5],[6],[7])Soit P_n un polynôme de degré $\leq n$ et ξ un nombre complexe arbitraire. Si $P_n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a_{n,k} z^k$, alors le polynôme $A_\xi P_n$ de degré $n-1$ qui vérifie

$$A_\xi P_n = \sum_{k=0}^{n-1} nC_k^{n-1} \left(a_{n,k} + a_{n,k+1}\xi\right) z \tag{1.21}$$

s'appelle polynôme dérivée par rapport au nombre complexe ξ.

Il est aisé de vérifier que $A_\xi P_n$,[1],[5],[6],[7],vérifie

$$A_\xi P_n = nP_n + (\xi - z) P_n' \tag{1.22}$$

Remarquons aussi que

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{A_\xi P_n(z)}{\xi - z} = P_n'(z)$$

En d'autres termes on a

$$A_\infty P_n = P_n'(z)$$

Définition 1.3.4 Soit P_n un polynôme de degré $\leq n$. Soit $z_n = (z_{n1}, z_{n2} .... z_{nn})$ le n-uplet des nombres complexes, zéros de P_n. Le centre de masse $G(z)$ est défini par

$$G(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_{n,k} \tag{1.23}$$

On peut parler aussi du centre de masse par rapport à un nombre complexe arbitraire ξ. Soit $w = a(z-\xi)^{-1} + b$ l'application linéaire,

$$G_\xi(w) = \xi - n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\xi - z_{n,k}} \right)^{-1}$$

Alors

$$G_\xi(P_n) = \xi - n \left(\frac{P_n'(\xi)}{P_n(\xi)} \right)^{-1}$$

Observons que

$$\lim_{\xi \to \infty} G_\xi(z) = G(z) \tag{1.24}$$

Beaucoup d'auteurs ont étudié les polynômes dérivées polaires. On a le résultat suivant

Théorème 1.3.1([1],[5],[6],[7],[8]).Soit P_n un polynôme de degré $\leq n$ et $p \geq 1$,

$$\sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |P_n'(z)|^p \, d\theta} \leq n \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |P_n(z)|^p \, d\theta} \,, \qquad \left(z = e^{i\theta}\right) \tag{1.25}$$

et

$$\sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |A_\xi P_n(z)|^p \, d\theta} \leq (1 + n|\xi|) \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |P_n(z)|^p \, d\theta} \,, \qquad \left(z = e^{i\theta}\right)$$

Théorème 1.3.2 ([1],[5],[6],[7],[8]). Soit P_n un polynôme de degré n et $p \geq 1$ et ξ un nombre complexe vérifiant $|\xi| \geq 1$. On suppose que $P_n(z) \neq 0$ si $|z| < 1$. Alors

$$\sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |A_\xi P_n(z)|^p \, d\theta} \leq \frac{n(|\xi| + 1)}{\sqrt[p]{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |1 + e^{iy}|^p \, dy}} \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |P_n(z)|^p \, d\theta} \,, \qquad \left(z = e^{i\theta}\right) \tag{1.26}$$

Théorème 1.3.3 ([1],[5],[6],[7],[8]). Soit P_n un polynôme de degré n et $p \geq 1$ et $P_n^*(z) =$

$z^n\overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$ Alors pour toute nombre complexe ξ telque $P_n(z) = P_n^*(z)$ on a

$$|A_\xi P_n^*(z)| = |A_\xi P_n(z)|, \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

et

$$\sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |A_\xi P_n(z)|^p \, d\theta} \leq \frac{n(|\xi|+1)}{\sqrt[p]{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1+e^{iy}|^p \, dy}} \sqrt[p]{\int_0^{2\pi} |P_n(z)|^p \, d\theta}, \qquad \left(z = e^{i\theta}\right) \tag{1.27}$$

Théorème 1.3.4 ([5],[6],[7],[8]). Soit P_n un polynôme de degré n et $p \geq 1$ et $P_n^*(z) = z^n\overline{P_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$. Alors pour toute nombre complexe ξ, tel que $P_n(0) \neq 0$, et pour tout nombre réel y , on a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|A_\xi P_n^*(z) + e^{iy} A_\xi P_n(z)\right|^p d\theta dy \leq 2\pi n^p (1+|\xi|)^p \int_0^{2\pi} |P_n(z)|^p \, d\theta, \qquad \left(z = e^{i\theta}\right) \tag{1.28}$$

1.4 Définition et propriétes générales des polynômes polaires associés aux polynômes moniques

Définition 1.4.1 *Soit $L_n(z) = z^n + ...$un polynôme monique et $\xi \in \mathbb{C}$ quelconque. On appelle polynôme polaire associé au polynome monique $L_n(z)$ et au pole ξ, le polynôme monique noté $P_{n,\xi}(z) = z^n + ...$, solution de l'équation différentielle suivante :*

$$((z-\xi) P_{n,\xi}(z))' = (n+1) L_n(z) \tag{1.29}$$

Il est aisé de voir que $P_{n,\xi}$ vérifie les relations suivantes :

$$(z-\xi) P_{n,\xi}(z) = (n+1) \int_\xi^z L_n(t) dt, \qquad n = 1, 2, 3... \tag{1.30}$$

avec la condition

$$\left[(z-\xi)\, P_{n,\xi}(z)\right]_{z=\xi} = 0$$

et

$$\lim_{z\to\xi} P_{n,\xi}(z) = \lim_{z\to\xi} \frac{(n+1)\int\limits_{\xi}^{z} L_n(t)dt}{z-\xi} = (n+1)\, L_n(\xi)$$

Le lemme suivant donne une comparaison entre les coefficients du développement de **Taylor** de L_n et son polynôme polaire $P_{n,\xi}$.

Lemme 1.4.1 *Si*

$$L_n(z) = z^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} z^{n-i} \quad \text{et} \quad P_{n,\xi}(z) = z^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_{n,i} z^{n-i}$$

Alors

$$(k+1)\left(b_{n,k} - \xi b_{n,k+1}\right) = (n+1)\, a_{n,k} \ , \qquad k = 2....n-1 \tag{1.31}$$

Preuve Il suffit de remarquer que

$$(z-\xi)\, P_{n,\xi}(z) = (z-\xi) \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} z^k \ = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} z^{k+1} - \xi \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} z^k$$

i-e

$$(z-\xi)\, P_{n,\xi}(z) = z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(b_{n,k-1} - \xi b_{n,k}\right) z^k - \xi b_{n,0}$$

par dérivation,

$$\left((z-\alpha)\, P_{n,\xi}(z)\right)' = (n+1)\, z^n + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\left(b_{n,k} - \xi b_{n,k+1}\right) z^k$$

d'aprés la relation (1.29)

$$(k+1)\left(b_{n,k} - \xi b_{n,k+1}\right) = (n+1)\, a_{n,k} \qquad ,k = 2, 3....n-1.$$

ce qui donne (1.31).■

Le lemme suivant établit la relation entre les polynômes dérivées polaires et les polynômes polaires.

Corollaire 1.4.1 *On a*

$$A_{\xi}P_{n,\xi}\left(z\right)=\left(n+1\right)\left(P_{n,\xi}\left(z\right)-L_{n}\left(z\right)\right) \tag{1.32}$$

D'autre part supposons qu'il existe deux constantes

$$C_{1}=C_{1}\left(d\mu\right) \quad et \quad C_{2}=C_{2}\left(d\mu\right),$$

tels que

$$C_{1}\left\|...\right\|_{L^{2}\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)}\leq\left\|...\right\|_{L^{2}(d\mu)}\leq C_{2}\left\|...\right\|_{L^{2}\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right)} \tag{1.33}$$

alors

$$\left(\int_{0}^{2\pi}\left|A_{\xi}P_{n,\xi}\left(e^{i\theta}\right)\right|^{2}d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\leq C_{2}n\left(\left|\xi\right|+1\right)\left(\frac{2\pi}{\int_{0}^{2\pi}\left|1+e^{i\theta}\right|^{2}d\theta}\int_{0}^{2\pi}\left|P_{n,\xi}\left(e^{i\theta}\right)\right|^{2}d\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$\left\|P_{n,\xi}-L_{n}\right\|_{\mu}\leq C_{2}n\left(\left|\xi\right|+1\right)\left(\frac{2\pi}{\int_{0}^{2\pi}\left|1+e^{i\theta}\right|^{2}d\theta}\int_{0}^{2\pi}\left|P_{n,\xi}\left(e^{i\theta}\right)\right|^{2}d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.34}$$

Preuve Les deux propriétés (1.22),(1.29) impliquent (1.32).Les deux assertions (1.25),(1.26) et l'hypothèse (1.33) impliquent (1.34). ■

Exemple 1.4.1 Le système de monômes $L_{n}\left(z\right)=z^{n}$, $n=0,1,2$.......est orthogonal sur le cercle unité. Definissons l'ensemble des polynômes polaires $P_{n,1}$. Ces polynômes vérifient donc

$$(n+1)\int_1^z L_n(s)\,ds = (z-1)\,P_{n,1}(z) \tag{1.35}$$

et

$$((z-1)\,P_n(z))_{z=1} = 0$$

on a

$$P_n(z) = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

les zéros de $P_{n,1}(z)$ sont exactement $\left\{z : z \neq 1 \text{ tels que : } z^{n+1}-1=0\right\}$,ces zéros sont les racines $(n+1)$-ième de l'unité. Posons $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$,on obtient

$$\frac{((z-1)\,P_n)'}{(z-1)\,P_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z-\xi^k}$$

i-e

$$\frac{z^n}{z^{n+1}-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z-\xi^k} \tag{1.36}$$

implique

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{((z-1)\,P_n)'}{n\,(z-1)\,P_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{P_n'(z)}{nP_n(z)} = \frac{1}{z}$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z|>1\}$.Et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{P_n'(z)}{nP_n(z)} = 0$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z|<1\}$. En conclusion

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z-\xi^k} = \frac{1}{z} \tag{1.37}$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z|>1\}$.Et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z-\xi^k} = 0 \tag{1.38}$$

uniformément sur les compacts de $\{z, |z| < 1\}$.(Pour plus des détails voir chapitre 3).Puisque

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2\pi}{n+1} \frac{1}{z - \xi^k}$$

Alors

$$\text{si : } |z| < 1 \Longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} = 0 \text{ et } \quad \text{si : } |z| > 1 \Longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}} = \frac{1}{z}$$

Par conséquent

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{P_n'(z)}{nP_n(z)} = \frac{1}{z} \qquad \text{si : } |z| > 1 \text{ et } \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{P_n'(z)}{nP_n(z)} = 0 \qquad \text{si : } |z| < 1.$$

et

$$Lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{L_n(z)}{P_n(z)} = \frac{z-1}{z} \tag{1.39}$$

uniformément sur les compacts de $\Omega = \{z, \;\; |z| > 1 \;\; \}$.

Chapitre 2

Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux et leurs polynomes reciproques

Le problème du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité a intéressé différents auteurs dans divers contextes. Ce problème a été étudié de façon approfondie par Szegö ([55],[56], 1921), Krein ([31] 1945), Geronimus ([23],[26] 1958), Nevai([4],1979,et [5], 1997), Li-Chien Shen ([26], 2000) et Lubinsky ([6], 2007). La formule asymptotique obtenue est de la forme

$$L_n(z) \approx \frac{z^n}{\overline{D_\rho}\left(\frac{1}{z}\right)};\ \ |z| > 1.$$

2.1 Comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Notons par $\{L_n(z)\}$ la suite des polynômes orthogonaux associés au cercle unité et à la mesure μ. Le comportement asymptotique des polynômes $\{L_n(z)\}$ a été étudié par les auteurs cités auparavent sous plusieurs conditions. Citons les principaux cas

a) μ est absolument continue i.e. $d\mu = \rho(\theta)d\theta$; $\rho \in L^1([0, 2\pi], d\theta)$ et $\log(\rho) \in L_1([0, 2\pi], d\theta)$; *$d\theta$ étant la mesure de Lebesgue sur* $[0, 2\pi]$, $\rho \geq 0$

b) μ n'est pas absolument continue. La partie absolument continue de μ vérifie la condition suivante dite de Szego ,[23],[40],[55],[56],[59],

$$\int_0^{2\pi} \log \mu' > -\infty \tag{2.1}$$

ou la condition dite de **Nevai** [47],

$$\mu' > 0 \ \text{ presque partout sur } \ [0, 2\pi] \tag{2.2}$$

La formule asymptotique obtenue est de la forme

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \frac{L_n(z)}{z^n} = \frac{1}{\overline{D_\rho \left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}} \tag{2.3}$$

uniforméments sur les compacts de $\{z, z \in \mathbb{C}, |z| > 1.\}$, ([23],[47],[55],[56]).

Définition 2.1.1 ([22],[49],[46])*Soit Q_n polynôme de degré n. Notons par $z_{n,1}, z_{n,2}, ...z_{n,n}$ les zéros simples de Q_n et par $\nu_n (Q_n)$* la mesure suivante dite mesure de masse supportée par *les zéros de Q_n*

$$\nu_n (Q_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{z_{n,k}} \tag{2.4}$$

*$\delta_{z_{n,k}}$ est la mesure de **Dirac** concentrée sur le point $z_{n,k}$.*

Définition 2.1.2. Soit $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de mesures à support compact. On dit que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ convege faiblement vers la mesure μ quand $n \to \infty$ si

$$\lim_{n \to \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$$

pour toute fonction f continue sur $\mathbb{C}$ à support compact. Dans ce cas on écrit $\mu_n \overset{*}{\to} \mu$ ou $d\mu_n \overset{*}{\to} d\mu$ ou $d\mu_n(x) \overset{*}{\to} \mu'(x)dx$ si μ est absolument continue.

Notons par $\|.\|_\triangle$ la norm sup sur l'ensemble $\triangle$ et Cap($\triangle$) la capacité logarithmique de $\triangle$ ([22],[49],[46],[37],[38],[50],[61],sur la notion de capacité logarithmique).Ceci étant on a le résultat suivant

Lemme 2.1.1 ([22],[49],[46],[37],[38],[59]).Soit $\Delta \subset \mathbb{C}$ un ensemble compact tel que

$$int(\triangle) = \varnothing,\ \mathbb{C} \setminus (\triangle) \text{ est connexe et } cap(\triangle) > 0$$

Soit $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de polynômes moniques (i.e. $Q_n(z) = z^n + ...,$) tels que

$$\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_{\Delta}^{\frac{1}{n}} \leq Cap(\Delta)\ .$$

Alors

$$\nu_n(Q_n) \xrightarrow{*} \omega_{\Delta}$$

ω_{Δ} est la mesure équilibrée de Δ ([22],[49],[46], pour plus de détails sur la mesure équilibrée).

Théorème 2.1.1([22],[49],[46]**)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n'(z)}{nQ_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \int \frac{d\nu_n(x)}{z-x} = \int \frac{\lim_{n\to\infty} d\nu_n(x)}{z-x} = \int \frac{d\omega_{\Delta}(x)}{z-x}. \tag{2.5}$$

où $\lim_{n\to\infty} \nu_n(x) = \omega$ (au sens de la convergence faible), ν_n est la *mesure de masse supportée par* les zéros de Q_n.

Lemme 2.1.2([22],[49],[46]).Soit $\{Q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de polynômes. Alors pour $j \in \mathbb{N}$ on a

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\left\| Q_n^{(j)} \right\|_{\Delta}}{\|Q_n\|_{\Delta}} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 1 \tag{2.6}$$

Théorème 2.1.2([40],[47]).Soit μ une mesure de Borel finie définie sur le cercle unité (sur $[0\ \ 2\pi]$).Notons par $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le système de plynômes orthonormés associés à la mesure μ. $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc les relations suivantes

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_m}(e^{i\theta}) d\mu(\theta) = \delta_{mn}$$

On suppose aussi que μ vérifie la condition de Nevai (2.2) ou la condition de Szego (2.1). Alors on a pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z^m \varphi_n^{(m)}(z)}{n^m \varphi_n(z)} = 1 \quad , \qquad\qquad (z = e^{i\theta}).$$

2.1.1 Comportement asymptotique des polynômes dérivées

Considérons le système de polynômes orthognaux moniques $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$,c-à-d tels que $(L_n(z) = z^n + ...)$ orthognaux associés à la mesure μ, μ $(d\mu(\theta) = \rho(\theta)d\theta$, voir (1.1)). On s'intéresse à la limite du rapport $\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}$. Rahmanov [51] a démontré que si $\mu' > 0$ presque partout sur $[0 \;\; 2\pi]$, alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = z \tag{2.7}$$

Lubinsky [40] démontra le résultat suivant :

Théorème 2.1.2([40]) Considérons le système de polynômes orthognaux moniques $\{L_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(L_n(z) = z^n + ...,)$ orthognaux associés à la mesure μ. Supposons qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}(z)}{zL_n(z)} = 1 \tag{2.8}$$

pour z tel que $|z| = 1$. Alors pour $m \geq 1$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}^{(m)}(z)}{zL_n^{(m)}(z)} = 1 \tag{2.9}$$

uniformément dans $\{z : |z| \geq 1\}$.

Les lemmes suivants nous seront utiles pour la suite :

Lemme 2.1.3.([40],(théorème de **Lucas,**[19],[28]**),**(théorème de **Badkov,**[12] **)**

Soit P_n un polyôme de degré n. On suppose que tous les zéros de P_n sont situés dans le disque unité. Alors tous les zéros des polynômes dérivés $P_n^{(m)}$, $m = 0, 1, 2....k$, sont situés dans le disque unité. D'autre part Si $|z| = 1$,alors

$$\left|P_n'(z)\right| \geq \frac{n}{2}\left|P_n(z)\right|$$

Lemme 2.1.4.([8])(théorème de **Abdul Aziz)**

Soit $P_n = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ un polynôme de degré n. Posons $M = \underset{0\leq j\leq n-1}{Max} |a_j|$. Alors tous les zéros de P_n sont contenus dans le cercle $|z| \leq 1 + M$.

Lemme 2.1.5.([8])(théorème de **Abdul Aziz)**

Soit $P_n = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ un polynôme de degré n. Posons $M = \underset{0\leq j\leq n-1}{Max} |a_j|$, alors tous les zéros de P_n sont contenus dans la région

$$\frac{|a_0|}{2\left(1+M\right)^{n-1}\left(1+nM\right)} \leq |z| \leq 1 + \lambda_0 M$$

où λ_0 est la solution unique de l'équation :

$$x = 1 - \frac{1}{\left(1+Mx\right)^n}$$

dans l'intervalle $[0 \quad 1]$.

Lemme 2.1.6.([54])(théorème de **Q.I.Rahman)**

Soit $P_n(z)$ un polynôme de degré n tel que tous les zéros de $P_n(z)$ sont contenus dans le disque unité $|z| \leq 1$. Si $|a| > \frac{n+2}{n}$, alors $\left((z-a)P_n(z)\right)'$ possède une seule racine dans le disque $|z-a| \leq \frac{|a|+1}{n+1}$.

Toutes les autre $n-1$ racines sont contenues dans le disque unité $|z| \leq 1$.

2.2 Comportement asymptotique des polynômes réciproques associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Rappelons que le polynôme réciproque $L_n^*(z)$ de $L_n(z)$ est défini par

$$L_n^*(z) = z^n \overline{L_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

Alors on a les résultats suivants

Proposition 2.2.1([40],[59],[23],[55])

$$|L_n^*(z)| = |L_n(z)| \qquad\qquad z = e^{i\theta}, \tag{2.10}$$

et,[40],[59]

$$\left|\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} - z\right| \leq |L_n(0)| \tag{2.11}$$

et,[40],[59],[23]

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} L_n(0) = 0 \tag{2.12}$$

Preuve Puisque

$$L_n^*(z) = z^n \overline{L_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

on obtient alors pour $|z| = 1$

$$|L_n^*(z)| = \left|L_n\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right| = |L_n(z)|$$

Maintenant d'après l'hypothèse (2.8) et l'assertion (1.2) on a pour $|z| = 1$

$$\left|\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} - z\right| = \left|\frac{L_{n+1}^*(z)}{L_n^*(z)} - 1\right| = |L_{n+1}(0)| \ ,$$

Ceci implique

$$\left|\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} - z\right| \leq |L_n(0)|$$

Comme dans [40] et d'après (2.8) on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = z,$$

Ceci implique

$$L_{n+1}(0) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } n \longrightarrow \infty. \ \blacksquare$$

Théorème 2.2.1([40]) *Les polynômes L_n et L_n^* ainsi que leurs dérivées $L_n^{(m)}$ et $L_n^{*(m)}$ vérifient*

$$\left|\frac{L_{n+1}^{(m)}(z)}{zL_n^{(m)}(z)} - 1\right| \leq \frac{2m}{n-m} + C\,|L_n(0)| \tag{2.14}$$

et

$$\left|\frac{L_n^{*(m)}(z)}{L_n^{(m)}(z)}\right| \leq C \tag{2.15}$$

où la constante C depend seulement de m et non de n.

Corollaire 2.2.1([40])

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^*_{n+1}(z)}{L^*_n(z)}=1 \tag{2.16}$$

uniformément sur les compacts de $\{|z|<1\}$.

Preuve Par définition,et en tenant compte que,

$$Lim_{n\longrightarrow\infty}\overline{\left[\frac{L_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}{L_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]}=\frac{1}{z}$$

implique

$$Lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{L^*_{n+1}(z)}{L^*_n(z)}=z.Lim_{n\longrightarrow\infty}\overline{\left[\frac{L_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}{L_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right]}=1$$

uniformément sur les compacts de $\{|z|<1\}$.

Chapitre 3

Comportement asymptotique des polynomes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Ce chapitre contient Les principaux résultats originaux de la thèse. On définira et on étudiera les propriétés algébriques et le comportement asymptotique des polynomes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité.

3.1 Définitions des polynomes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Soit μ une mesure positive finie définie sur la tribu borélienne de $\mathbb{C}$ et concentré sur le cercle unité $T = \{z,\ |z| = 1\}$. μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\theta$ sur $[-\pi, +\pi]$, i.e.

$$d\mu(\theta) = \rho(\theta)d\theta,\ \rho \geq 0,\ \rho \in L^1([-\pi, +\pi], d\theta).$$

Ceci étant, considérons $L_n(z) = z^n + ...$, le polynôme monique de degré n exactement (le coéfficient de z^n est égal à 1) associé à la mesure μ. $L_n(z)$ vérifie les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^{2\pi} L_n(z)\,(\overline{z})^k \rho(\theta)d\theta = 0,\ k = 0, 1, ..., n-1, \quad z = e^{i\theta}.$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}$ fixé, que nous appelerons pôle, définissons la suite des polynômes polaires notés $P_n(z) = P_{n,\xi}(z)$ associés aux polynômes orthogonaux $L_n(z)$, comme suit. $P_n(z) = P_{n,\xi}(z) = z^n + ...,(P_{n,\xi}(z)$ est monique) est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(n+1)\,L_n(z) = ((z-\xi)\,P_{n,\xi}(z))' = P_{n,\xi}(z) + (z-\xi)\,P'_{n,\xi}(z).$$

Notons que $\Phi_n(z) = (z-\xi)\,P_n(z)$ est un polynôme monique, primitive de $(n+1)\,L_n(z)$, normalisé par la relation $\Phi_n(\xi) = 0$. Une conséquence directe des relations précédentes est que $P_n(z)$ satisfait les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \left[P_n(z) + (z-\xi)\,P'_n(z)\right](\overline{z})^k \rho(\theta)d\theta = 0, \qquad k = 0, 1, ..., n-1, \quad \left(z = e^{i\theta}\right).$$

Ce type d'orthogonalité généré par des opérateurs differentiels a été introduit initialement par Aptekarev [2],Suárez [65] , Alfaro et Marcellan [4] . Une étude similaire a été effectuée par A. Fundora, H. Pijeira et W. Urbina ([22],[49]),dans le cas où la mesure est concentrée sur le segment $[-1, +1]$, au lieu du cercle $T = \{z,\ |z| = 1\}$.

3.2 Localisation des zeros des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Proposition 3.1.1. *Les polynômes polaires $P_{n,\xi}$ en les comparant avec leur polynômes orthogonaux associés $L_{n,\mu}$ vérifient*

$$P^{(k)}_{n,\xi}(\xi) = \frac{n+1}{k+1} L^{(k)}_n(\xi) \qquad , k = 0, 1, 2...n. \tag{3.1}$$

Preuve Considérons (1.30).Remarquons que

$$((z-\xi)\,P_{n,\xi}(z))^{(k)} = (z-\xi)\,P_{n,\xi}^{(k)}(z) + kP_{n,\xi}^{(k-1)}(z) = (n+1)\,L_n^{(k-1)}(z)$$

Posons $z=\xi$, dans la formule précédente on obtient l'assertion (3.1).■

Le lemme suivant compare les coefficients du développement de **Taylor** de L_n et son polynôme polaire $P_{n,\xi}$.

Lemme 3.1.1 Si

$$L_n\,(z) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}\,(z-\xi)^k \quad \text{et} \qquad P_{n,\xi}\,(z) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k} z^k$$

alors

$$B_{n,k} = \frac{n+1}{k+1} A_{n,k}, \qquad\qquad k = 0, 1, 2...n \tag{3.2}$$

Preuve (3.2) est une conséquence de (3.1).■

Lemme 3.1.2 ([22],[49],[60]) *Posons*

$$f\,(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} C_k^n z^k, \quad \text{et} \qquad g\,(z) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} C_k^n z^k, \qquad \alpha_{nk}, \beta_{nk} \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

Notons

$$h\,(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk}\beta_{nk} C_k^n z^k. \tag{3.4}$$

Supposons que tous les zéros de $f\,(z)$ appartiennent au disque fermé $\overline{\Delta}$. Notons par $\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, ...\lambda_{n,n}$ les zéros de $g\,(z)$. Alors tout zéro de $h\,(z)$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_{n,k}\gamma_{n,k}$,où $\gamma_{n,k} \in \overline{\Delta}$.

Dans [8] , **Pijeira** a montré à l'aide de ce thorème que tous les zéros des polynômes polaires dans le cas d'une mesure concentrée sur le segment (qui seront supposés moniques), appartiennent au disque fermé borné Δ=$\{z, z \in C : |z| \leq b + c\,|\alpha|\}$, où b, c sont deux constantes convenablement choisies.

On va maintenant énoncer un lemme dont la démonstration est un peu compliquée mais son application est la base de la formule asymptotique à l'extérieur d'un contour. Ce résultat a été obtenu par **G.Szegô** en 1921.

Lemme 3.1.3.([50],[55],[56],[61]).*Soit Ω un domaine simplement connexe, $\Gamma = \partial\Omega$ est un* *contour de Jordan rectifiable.Soit φ la transformation conforme de Ω vers l'extérieur du cercle unité,vérifiant les conditions suivantes :*

$$\varphi(\infty) = \infty \quad et \quad \varphi'(\infty) = \tau. \tag{3.5}$$

Soient $z_k^{(n)} \in ext(\Gamma)$, $k = 1, 2...n$ et $P_n(z)$ le polynôme d'interpolation vérifiant :

$$P_n\left(z_k^{(n)}\right) = f\left(z_k^{(n)}\right), \qquad k = 1, 2...n. \quad (z \in \Omega). \tag{3.6}$$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(z - z_k^{(n)}\right)}{(\tau.\varphi(z))^n} = 1. \tag{3.7}$$

Uniformément sur les compacts de Ω.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} P_n(z) = f(z). \tag{3.8}$$

Uniformément sur les compacts de Ω.

Lemme 3.1.4.([59])

Soit $(L_{n,\mu})_n$ la suite des polynômes orthogonaux sur le cercle unité associés à la mesure μ. Alors les zeros de $L_{n,\mu}(z)$ sont dans le disque férmé unitaire $\overline{\Delta} = \{|z| \leq 1\}$.

Lemme 3.1.5.([59]). *Soit $(L_n(z,\beta))_n$ la suite des polynôme paraorthogonaux sur le cercle unité associés à la mesure μ, i-e*

$$L_{n+1}(z,\beta) = zL_n(z) + \beta L_n^*(z), \qquad , \ |\beta| = 1. \tag{3.9}$$

Alors tous les zeros de $L_n(z,\beta)$ sont sur le cercle unité : $\partial\overline{\Delta} = \{|z| = 1\}$.

3.3 Formules asymptotiques des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité

Le comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité et leur polynômes polaires constitue un lieu de rencontre privilègié pour diverses disciplines des mathématiques. Ce paragraphe contient les premiers résultats originaux de cette thèse.

3.3.1 Comportement asymptotique des polynômes polaires

Théorème 3.2.1 *Soit* $\{L_n(z)\}_{n=0,1,2....}$ *le système de polynômes orthogonaux relativement à la mesure* μ*. On suppose que la mesure* μ *vérifie la condition de* ***Nevai*** *suivante :*

$$\mu' > 0 \text{ presque partout sur le cercle unité.}$$

Notons par $\{P_{n,\xi}(z)\}_{n=0,1,2....}$ *la suite des polynômes polaires unitaires (* $P_{n,\xi}(z) = z^n + ...$*) associés à* μ*. dont le coefficient de* z^n *est égal à* $+1$*. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)} = \frac{z-\xi}{z} \tag{3.10}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1,\xi}(z)}{zP_{n,\xi}(z)} = 1 \tag{3.11}$$

Uniformément sur les compacts de $\{z, |z| \geq 1\}$*.*

Preuve : Rappelons que par définition les polynômes polaires $P_{n,\xi}(z)$ sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(n+1)\,L_n(z) = ((z-\xi)\,P_{n,\xi}(z))' = P_{n,\xi}(z) + (z-\xi)\,P'_{n,\xi}(z). \tag{3.12}$$

Divisons les deux membres de (3.12) par $nP_{n,\xi}(z)$ on obtient :

$$\frac{n+1}{n}\frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)} = \frac{1}{n} + (z-\xi)\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)} \tag{3.13}$$

Remarquons que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}$$

existe (pour plus de détails, [22],[49]). Notons cette limite par $M(z)$. Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)} = (z-\xi)\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}$$

implique

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{L_{n+1}(z)}{P_{n+1,\xi}(z)}}{\frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}(z)}{P_{n+1,\xi}(z)}\frac{P_{n,\xi}(z)}{L_n(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}\frac{P_{n,\xi}(z)}{P_{n+1,\xi}(z)} \tag{3.14}$$

L'hypothèse $\mu' > 0$ p.p. sur le cercle implique (pour plus de détails,[22],[49],[51],[40],[47]) :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = z\ , \tag{3.15}$$

uniformément sur les compacts de $|z| > 1$.Les deux assertions (3.14) et (3.15) impliquent :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}(z)}{P_{n,+1\xi}(z)} = \frac{1}{z}$$

On aura donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\xi}(z)}{P_{n,\xi}(z)} = z,$$

uniformément sur les compacts de $|z| > 1$.Ecrivons,

$$\frac{(n+1)\,L_n(z)}{(z-\xi)\,P_{n,\xi}(z)} = \frac{1}{z-\xi} + \frac{P'_{n,\xi}(z)}{P_{n,\xi}(z)} = \frac{1}{z-\xi} + \frac{d}{dz}(\log P_{n,\xi}(z))$$

La dérivée logarithmique et son interprétation dépend de l'ensemble des zéros du polynôme $P_{n,\xi}$.Remarquons que

$$\frac{((z-\xi)\,P_{n,\xi}(z))'}{(z-\xi)\,P_{n,\xi}(z)} = \frac{d}{dz}\left[\log(z-\xi)\,P_{n,\xi}(z)\right] \tag{3.16}$$

et

$$((z-\xi)\,P_{n,\xi}(z))' = P_{n,\xi}(z) + (z-\xi)P'_{n,\xi}(z)$$

Donc (3.16) et (1.29) impliquent

$$\frac{d}{dz}\left[\log\left(z-\xi\right)P_{n,\xi}\left(z\right)\right]=\left(n+1\right)\frac{L_{n}\left(z\right)}{\left(z-\xi\right)P_{n,\xi}\left(z\right)}$$

L'intégration des deux membres de cette égalité de z_1 à z donne :

$$\frac{\left(z-\xi\right)P_{n,\xi}\left(z\right)}{\left(z_{1}-\xi\right)P_{n,\xi}\left(z_{1}\right)}=\exp\left(\left(n+1\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n,\xi}\left(t\right)}dt\right).$$

ce qui donne

$$P_{n,\xi}\left(z\right)=\frac{z_{1}-\xi}{z-\xi}P_{n,\xi}\left(z_{1}\right)\exp\left(\left(n+1\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n,\xi}\left(t\right)}dt\right)$$

Par conséquent

$$\frac{P_{n+1,\xi}\left(z\right)}{P_{n,,\xi}\left(z\right)}=\frac{P_{n+1,\xi}\left(z_{1}\right)\exp\left(\left(n+2\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n+1}(t)}{(t-\xi)P_{n+1,\xi}(t)}dt\right)}{P_{n,\xi}\left(z_{1}\right)\exp\left(\left(n+1\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n}(t)}{(t-\xi)P_{n,\xi}(t)}dt\right)} \tag{3.17}$$

$$=\frac{P_{n+1,\xi}\left(z_{1}\right)}{P_{n,\xi}\left(z_{1}\right)}\exp\left[\left(n+2\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n+1}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n+1,\xi}\left(t\right)}dt-\left(n+1\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n,\xi}\left(t\right)}dt\right]$$

ou encore

$$\frac{P_{n+1,\xi}\left(z\right)}{P_{n,,\xi}\left(z\right)}\left(\frac{P_{n+1,\xi}\left(z_{1}\right)}{P_{n,\xi}\left(z_{1}\right)}\right)^{-1}=\exp\left[\left(n+2\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n+1}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n+1,\xi}\left(t\right)}dt-\left(n+1\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n,\xi}\left(t\right)}dt\right] \tag{3.18}$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n,\xi}\left(t\right)}dt=\lim_{n\to\infty}\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n+1}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n+1,\xi}\left(t\right)}dt. \tag{3.19}$$

(3.18) et (3.19) impliquent

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\xi}\left(z\right)}{P_{n,,\xi}\left(z\right)}\left(\frac{P_{n+1,\xi}\left(z_{1}\right)}{P_{n,\xi}\left(z_{1}\right)}\right)^{-1}=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(n+2-n-1\right)\int_{z_{1}}^{z}\frac{L_{n}\left(t\right)}{\left(t-\xi\right)P_{n,\xi}\left(t\right)}dt\right) \tag{3.20}$$

Notons

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}'\left(t\right)}{nP_{n,,\xi}\left(t\right)}dt=M(t) \tag{3.21}$$

et

$$\Lambda(z) = \int_{z_1}^{z} M(t)dt \tag{3.22}$$

Remarquons que la limite (3.21) existe ([22],[49] pour plus de détails). Ceci étant, (3.20), (3.21) et (3.22) donnent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1,\xi}(z)}{P_{n,,\xi}(z)} \left(\frac{P_{n+1,\xi}(z_1)}{P_{n,\xi}(z_1)} \right)^{-1} = e^{\Lambda(z)}$$

avec

$$e^{\Lambda(z)} = \frac{z}{z_1}$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1,\xi}(z)}{zP_{n,\xi}(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}(z)}{zL_n(z)}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

3.3.2 Comportement asymptotique des polynômes réciproques

Que se passe t'il pour les polynômes réciproques. C'est l'objet du théorème suivant

Théorème 3.2.2. *Sous les mêmes hypothèses et notations du thérème 3.2.1, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n^*(z)}{P_{n,\xi}^*(z)} = \left(1 - \overline{\xi}z\right) \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,\xi}^{*\prime}(z)}{nP_{n,\xi}^*(z)} \tag{3.23}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1,\xi}^*(z)}{P_{n,\xi}^*(z)} = 1 \tag{3.24}$$

Uniformément sur les compacts de $\{|z| < 1\}$.

Preuve : Il est utile de voir que

$$(n+1)\, L_n^*(z) = \left(1 - \overline{\xi}z\right) P_{n,\xi}^{\prime *}(z) + P_{n,\xi}^*(z)$$

et

$$(n+1)\, L_n^*(z) = \left(1 + n\left(1 - \overline{\xi}z\right)\right) P_{n,\xi}^*(z) - z\left(1 - \overline{\xi}z\right) P_{n,\xi}^{*\prime}(z)$$

autrement dit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n^*(z)}{L_{n-1}^*(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{nP_{n,\xi}^*(z)}{(n-1)\,P_{n-1,\xi}^*(z)}\frac{\left(1-\bar{\xi}z\right)-z\left(1-\bar{\xi}z\right)\frac{P_{n,\xi}^{*\prime}(z)}{nP_{n,\xi}^*(z)}}{\left(1-\bar{\xi}z\right)-z\left(1-\bar{\xi}z\right)\frac{P_{n-1,\xi}^{*\prime}(z)}{(n-1)P_{n-1,\xi}^*(z)}}$$

On combine avec (2.17), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}^*(z)}{P_{n-1,\xi}^*(z)}=1$$

uniformément sur les compacts de $\{|z|<1\}$. Ce qui achève la démonstration de l'assertion (3.24). Maintenant,observons que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n^*(z)}{P_{n,\xi}^*(z)}=\left(1-\bar{\xi}z\right)\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}^{*\prime}(z)}{nP_{n,\xi}^*(z)}$$

uniformément sur les compacts de$\{|z|<1\}$. D'où l'assertion (3.23). ■

3.3.3 Comportement asymptotique des polynômes dérivées

Théorème 3.2.3 *Sous les mêmes hypothèses et notations du thérème 3.2.1, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n'(z)}{P_{n,\xi}'(z)}=\frac{z-\xi}{z} \tag{3.25}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\xi}'(z)}{zP_{n,\xi}'(z)}=1 \tag{3.26}$$

uniformément sur les compacts de $\{z,|z|\geq 1\}$.

Preuve : Dérivons les deux membres de (1.30), on obtient

$$(n+1)\,L_n'(z)=(z-\xi)\,P_{n,\xi}'(z)+P_{n,\xi}(z)$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n'(z)}{P_{n,\xi}'(z)}=(z-\xi)\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}'(z)}{nP_{n,\xi}(z)}$$

D'où la conclusion de (3.25).On obtient (3.26) en utilisant (3.25).

3.3.4 La dérivée Logarithmique et le comportement asymptotique

Remarque 3.2.1. Posons

$$\Lambda_{n+1}(z) = (z-\alpha) P_{n,\xi}(z)$$

Λ_{n+1} est un polynôme primitive de $(n+1) L_n(z)$ vérifiant la condition

$$\Lambda_{n+1}(\xi) = 0 \quad , \qquad n = 0, 1, 2.......$$

Λ_{n+1} satsifait aussi

$$(\log \Lambda_{n+1}(z))' = \frac{(n+1) L_n(z)}{(z-\alpha) P_{n,\xi}(z)} = (\log (z-\alpha))' + (\log P_{n,\xi}(z))' .$$

Remarquons que

$$\left(\log \Lambda'_{n+1}(z)\right)' = (\log L_n(z))' \tag{3.27}$$

On suppose que z appartient à l'nveloppe convexe formée des zéros de $L_n(z)$ .Il existe une droite qui sépare z et tous les zéros de L_n. Intégrons les deux membres de (3.27) de z à z_1, on obtient

$$\log \frac{\Lambda'_{n+1}(z)}{\Lambda'_{n+1}(z_1)} = \int_{z_1}^{z} \frac{L'_n(t)}{L_n(t)} dt$$

c-à-d

$$\Lambda'_{n+1}(z) = \Lambda'_{n+1}(z_1) \exp\left(n \int_{z_1}^{z} \frac{L'_n(t)}{n L_n(t)} dt \right) .$$

Intégrons une seconde fois les deux membres de dernière égalité de z à z_1,on obtient

$$(z-\xi) P_{n,\xi}(z) = \Lambda'_{n+1}(z_1) \int_{\xi}^{z} \exp n \int_{z_1}^{t} \frac{L'_n(u)}{n L_n(u)} du dt$$

implique

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\xi}(z)}{P_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Lambda'_{n+2}(z_1)}{\Lambda'_{n+1}(z_1)}\lim_{n\to\infty}\frac{\int\limits_{\alpha}^{z}\exp(n+1)\int\limits_{z_1}^{t}\frac{L'_{n+1}(u)}{(n+1)L_{n+1}(u)}dudt}{\int\limits_{\alpha}^{z}\exp n\int\limits_{z_1}^{t}\frac{L'_{n}(u)}{nL_{n}(u)}dudt}$$

Faisant n tendre à l'infini,i vient donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\xi}(z)}{P_{n,\xi}(z)}=z$$

uniformément sur les compacts de $|z|>1$.Il s'ensuit alors,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}=\frac{1}{z}.$$

Remarque 3.2.2. Remarquons que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\xi}(z)}{P_{n,\xi}(z)}$$

equivalently

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\log P_{n,\xi}(z)}\right)'=\left(\lim_{n\to\infty}\log\frac{P_{n+1,\xi}(z)}{P_{n,\xi}(z)}\right)'$$

uniformément sur les compacts de $|z|>1$. C'est à dire

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\log P_{n,\xi}(z)}\right)'=\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}$$

Une deuxième démonstration de (3.10)

En combinant (1.30) et (3.11) on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)}=(z-\xi)\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}$$

implique

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)}\right)'=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)}\left(\frac{L'_n(z)}{L_n(z)}-\frac{P'_{n,\xi}(z)}{P_{n,\xi}(z)}\right)$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{L'_n(z)}{nL_n(z)}$$

uniformément sur les compacts de$\{|z|>1\}$.Ce qui termine la démonstration du point (3.10).

Que se passe t'il pour les polynômes *polaires des polynômes orthogonaux secondaires relativement à la mesure* μ. C'est l'objet du théorème suivant

Théorème 3.2.4 S*oit* $\{\varphi_{n,\xi}(z)\}_{n=0,1,2....}$ *le système de polynômes polaires des polynômes orthogonaux secondaires relativement à la mesure* μ. Si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi'_{n,\xi}(z)}{n\varphi_{n,\xi}(z)}=\frac{1}{z},$$

alors

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n(z)}{\varphi_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{P_{n,\xi}(z)}\tag{3.28}$$

uniformément sur les compcats de $\{|z|>1\}$.i-e.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n(z)}{\varphi_{n,\xi}(z)}=\frac{z-\xi}{z}\tag{3.29}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_{n+1,\xi}(z)}{z\varphi_{n,\xi}(z)}=1\tag{3.30}$$

uniformément sur les compcats de $\{|z|>1\}$.

Preuve D'après la propriété (1.29) et (1.16),(1.17), on a

$$(z-\xi)\,\varphi_{n,\xi}(z)=(n+1)\int_{\xi}^{z}Q_n(t)\,dt$$

Remarquons que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{(z-\xi)\,P_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}\quad\text{et}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n(z)}{(z-\xi)\,\varphi_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi'_{n,\xi}(z)}{n\varphi_{n,\xi}(z)}.$$

La mesure d'équilibre sur le cercle unité assure que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi'_{n,\xi}(z)}{n\varphi_{n,\xi}(z)}$$

Ceci implique

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}(z)+(z-\xi)P'_{n,\xi}(z)}{\varphi_{n,\xi}(z)+(z-\xi)\varphi'_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1}\frac{L_n(z)}{Q_n(z)}$$

ou encore

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}(z)}{\varphi_n(z)}\frac{(z-\xi)\frac{P'_{n,\xi}(z)}{nP_{n,\xi}(z)}+\frac{1}{n}}{(z-\xi)\frac{\varphi'_{n,\xi}(z)}{n\varphi_{n,\xi}(z)}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{Q_n(z)}$$

Finalement on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\xi}(z)}{\varphi_{n,\xi}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{Q_n(z)}$$

D'où le point (3.28). Utilisant l'assertion (3.10) on obtient (3.29) et (3.30). La démonstration du théorème est terminée. ■

Chapitre 4

Polynômes polaires associés aux polynomes L_p extrémaux sur le contour. Définitions et propriétés générales

4.1 Espaces $H^p(\Omega)$

4.1.1 Contour de Jordan rectifiable

Définition 4.1.1. *On appelle contour de Jordan, l'image d'une application* $z : t \to z(t)$ *définie de* $[a,b] \to C$ *continue et telle que* $z(a) = z(b)$ *et* $z \mid_{[a,b[}$ *est une application injective.*

Définition 4.1.2 *Un contour de Jordan est dit rectifiable si l'application* z *est à variation bornée, dans ce cas sa variation totale notée* $V(z)$ *est égale à la longueur du contour et coincide exactement avec* $\int_a^b |z'(t)|\, dt < +\infty$ *lorsque* z est dérivable.

4.1.2 Transformation conforme

La transformation conforme représente l'un des outils fonctionnels fondamentale dans cette étude, elle permettra le passage de l'extérieur du contour Ω vers l'extérieur du cercle G.

Il est connu que tout contour de Jordan E partage le plan $\mathbb{C}$ en deux parties, l'une bornée, ouverte et simplement connexe appelée l'intérieur de E et notée $int\,(E)$ et l'autre ouverte, non bornée et connexe appelée l'extérieur de E notée $Ext\,(E)$.

Notons par $\Omega = Ext\,(E) \cup \{\infty\}$ et par $G = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} \cup \{\infty\}$.

L'application du théorème de la représentation conforme de **Riemann** [56],[61] ,[63]nous donne le théoréme suivant :

Théorème 4.1.1 ([32],[50],[56],[61],[63],[64]).*Soit E un contour de Jordan du plan complexe $\mathbb{C}$, alors il existe une application unique φ appelée transformation conforme, $\varphi : \Omega \to G$ qui applique conformément l'extérieur du contour vers l'extérieur du disque possèdant les propriétés suivantes :*

(i) *φ est bijective.*

(ii) *$\varphi\,|_{\Omega\setminus\{\infty\}}$ est holomorphe.*

(iii) $\varphi(\infty) = \infty$.

(vi) $\lim_{z\to\infty} \dfrac{\varphi(z)}{z} = \tau > 0$.

On note par $C^{-1}(E) = \lim_{z\to\infty} \dfrac{\varphi(z)}{z}$, la constante $C(E)$ est appelée la capacité logarithmique de E.De plus si E est rectifiable, on obtient le théorème de **Caratheodory** suivant :

Théorème 4.1.2.([18],[33], [53],[61]).*Soit E un contour de Jordan rectifiable et φ l'application qui applique conformément Ω sur G alors φ admet un prolongement continu sur E qui réalise une bijection de E sur $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$*.Si l'on note par ψ l'inverse de φ; $\psi : G \to \Omega$ alors leurs dérivées $\varphi'(z)$ et $\psi'(z)$ n'ont pas de zéros dans Ω et G et ont des valeurs limites sur E et sur Γ presque partout (par rapport à la mesure de **Lebesgue**). Ainsi, les fonctions $\varphi'(z)$ et $\psi'(z)$ sont bien définies et sont intégrables sur E et sur le cercle Γ ;ce qui donne la possibilité de définir les fonctions $(\varphi'(z))^{\frac{1}{p}}$ et $\left(\psi'(z)\right)^{\frac{1}{p}}$,($p > 0$).(cf Koosis ;[33]).

4.1.3 Espace de Hardy $H^p(\Omega)$ associé à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable,([33],[53]).

Les espaces de Hardy notés H^p sont des sous-espaces de l'ensemble des fonctions holomorphes, définis par des conditions de croissance. Ils ont été introduit en 1915 par **G. H. Hardy** qui les a étudiés dans le disque unité ouvert. Les propriétés caractéristiques des espaces H^p sont les propriétés de factorisation,de valeurs frontières et de représentation du type **Cauchy** à partir de mesures sur la frontière . En 1953, W. Rudin [53] a étudié ces espaces dans un ouvert connexe quelconque. Pour effectuer cette généralisation,**Rudin**,s'est basé essentiellement sur une caractérisation des espaces de **Hardy** sur le disque unité ouvert. Cette caractérisation se résume dans le fait qu'une fonction appartient à l'espace de Hardy dans le disque unité ouvert si et seulement si elle admet un majorant harmonique dans ce disque, [61],[33]([53] chapitre 17 ; problème 6). Utilisant les propriétés de la transformation conforme entre le disque unité ouvert et l'intérieur d'un contour de **Jordan** rectifiable, **V. J. Smirnov** [61],[62],[63],[64] a étudié ces espaces à l'intérieur d'un contour de Jordan rectifiable.

Soit $E_r = \{z \in \Omega : |\varphi(z)| = r\}\, ;\, r > 1$.

Définition 4.1.3 ([35],[37],[61],[63])*Soit $f \in H(\Omega)$. On dit que $f \in H^p(\Omega)$ si et seulement si $\exists\, C > 0$ (indépendante de r) telle que*

$$\int_{E_r} |f(z)|^p\, |dz| \leq C \quad \text{pour } 1 < r \leq 2. \tag{4.1}$$

Proposition 4.1.1 ([35],[37],[61],[63]) *$f \in H^p(\Omega)$ si et seulement si*

$$f(\psi(w)) \cdot \left(\psi'(w)\right)^{\frac{1}{p}} \in H^p(G). \tag{4.2}$$

Preuve : Posons $z = \psi(w) \quad \Rightarrow \quad dz = \psi'(w)\, dw$

Ainsi

$$\int_{E_r} |f(z)|^p\, |dz| = \int_{C_r} |f(\psi(w))|^p \left|\psi'(w)\right| |dw| = \int_{C_r} \left| f(\psi(w)) \cdot \left(\psi'(w)\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p |dw| \tag{4.3}$$

Les propriétés de l'espace de hardy $H^p(\Omega)$ découlent de celles de l'espace $H^p(G)$ en utilisant le théorème 1.2.5 et le théorème 1.2.6 Elles se résument dans le théorème suivant :

Théorème 4.1.3 ([33],[53],[35],[37],[61],[63])). *Soit E un contour de Jordan rectifiable et $f \in H^p(\Omega)$ alors f admet en presque tout les points de E une limite non-tangentielle notée f^*,*

$$f^*(\xi) = \lim_{z \to \xi} f(z)$$

f^* vérifie

(1) $f^* \in L_p(E, d\xi) = \left\{ f : E \to \mathbb{C} : \left(\int\limits_E |f(\xi)|^p |d\xi| \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}$ *et on a*

$$\int\limits_E \left| f^*(\xi) \right|^p |d\xi| = \lim_{r \to 1} \int\limits_{E_r} |f(z)|^p |dz| .$$

(2) *Pour tout* $f \in H^p(\Omega)$, *notons par*

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} = \int\limits_E |f^*(\xi)|^p |d\xi| , \tag{4.4}$$

alors :

(3) *Pour* $p \geq 1$, $H^p(\Omega)$ *est un espace de* ***Banach*** *pour la norme (4.4).*

(4) *Pour* $0 < p < 1$, $H^p(\Omega)$ *est un espace métrique pour la distance*

$$d(f, g) = \|f - g\|^p_{H^p(\Omega)} .$$

(5) $\forall z \in \Omega - \{\infty\}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_E \frac{f^*(\xi)}{\xi - z} \frac{d\xi}{z}.$$

4.1.4 Fonction de Szegö associée à l'extérieur d'un contour de Jordan rectifiable

Définition 4.1.4 *Soit* ρ *une fonction poids définie sur le contour* E *tq*

$$\rho \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_E |\xi|^n \rho(\xi) |d\xi| < +\infty, \;\; n = 0, 1, ... \tag{4.5}$$

et (la condition de ***Szegö*** *,[61],[28],[29],[32]).*

$$\int_E (\log \rho(\xi)) \left| \varphi'(\xi) \right| |d\xi| > -\infty. \tag{4.6}$$

Alors il existe une fonction notée $D_{E,\rho}$ *et appelée fonction de* ***Szegö*** *(à l'extérieur) associée à la fonction poids* ρ *sur le contour* E *vérifiant les conditions suivantes :*

i) $D_{E,\rho}(z)$ *est analystique sur* Ω.

ii) $D_{E,\rho}(z) \neq 0$ *sur* Ω.

iii) $D_{\rho}(\infty) > 0$.

vi) $D_{E,\rho}(z)$ *possède une limite non-tangentielle* $D_{E,\rho}(\xi)$ *prèsque partout sur* E*,et*

$$\left|D_{E,\rho}(\xi)\right|^{-p}\left|\varphi'(\xi)\right| = \rho(\xi), \quad \xi \in E \qquad pp \tag{4.7}$$

où

$$D_{E,\rho}(\xi) = \lim_{z\to\xi} D_{E,\rho}(z) \qquad pp.$$

Les lemmes 4.1.1, 4.1.2 caractérisant l'espace de Hardy $H^p(\Omega,\rho)$ seront indispensables dans l'élaboration de la formule asymptotique des polynômes Lp extrémaux.

Lemme 4.1.1 (cf Kaliaguin,*[?]* **)** *Si* $f(z) \in H^p(\Omega,\rho)$ *et* $K \subset \Omega$, K *compact, alors il existe une constante* $C(K)$ *(dépendant seulement de* K*) telle que :*

$$\sup_K |f(z)| \leq C(K)\, \|f\|^p_{H^p(\Omega,\rho)}. \tag{4.8}$$

Lemme 4.1.2 (*[?]* **)** *Soit* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions de* $H^p(\Omega,\rho)$ *telle que*

(i) $f_n \to f$ *uniformément sur les sous ensembles compacts de* Ω.

(ii) $\|f_n\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} \leq M$ *(const.)*

alors

$$f \in H^p(\Omega,\rho) \text{ et } \|f\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} \leq \lim \inf_{n\to\infty} \|f_n\|^p_{H^p(\Omega,\rho)}.$$

4.2 Polynômes L_p extrémaux sur le contour

Définition 4.2.1 *[55] Soit* E *un contour de Jordan rectifiable.Soit* ρ *une fonction poids sur* E *vérifiant (4.6). Pour* $0 < p < \infty$ *et pour toute fonction mesurable à valeurs complexes définie sur* C*, on pose :*

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(\xi)|^p \rho(\xi)\, |d\xi|\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.9}$$

On désigne par $L^p(E,\rho)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions pour lesquelles :

$$\|f\|_p < \infty$$

L'intégrale (4.9) étant l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure ρ, et à l'espace mesurable $(B(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ .On note par $P_{n,1}$ l'ensemble des polynômes unitaires ou moniques ou normalisés $Q_n(z)$ ie

$$Q_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0;\ a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{C}$$

On suppose dans tout ce qui suit que $z^n \in L^p(E,\rho), n = 0, 1, 2, .$

Définition 4.2.2 (*[10], [37],[37])Soit ρ une mesure positive finie, non discrète définie sur $B(\mathbb{C})$ et son support.* On *appelle polynôme L_p extrémal noté par L_n et associé à la mesure ρ la solution du problème extrémal suivant :*

$$\|L_n\|_{L^p(E,\rho)} = \min_{Q_n \in P_{n,1}} \|Q_n\|_{L^p(E,\rho)} \tag{4.10}$$

Remarque 4.2.1

Les polynômes orthogonaux sur le contour sont un cas particulier de polynômes L_p extrémaux correspondant à $p = 2$. Ces polynômes sont définis par

Définition et théorème 4.2.3. *Soit E un contour de Jordan rectifiable.Soit ρ une fonction poids sur E vérifiant (4.6). Alors il existe un système unique des polynômes orthogonaux sur le contour E, $(L_n(z))_{n=0,1,2...}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1) L_n est un polynôme de degré n exactement dont le coéfficient de z^n est égal à $+1$,i-e

$$L_n(z) = z^n + ..., \quad n = 0, 1, 2...$$

et les relations d'orthogonalité

$$\int_E L_n(\xi)\, \overline{L_m(\xi)} \rho(\xi)\, |d\xi| = \delta_{n,m} \|L_n\|^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

où

$$\|L_n\|_\rho = \sqrt{\int_E L_n(\xi)\, \overline{L_n(\xi)} \rho(\xi)\, |d\xi|}\ , \quad n = 0, 1, 2..$$

où $|d\xi|$ *est la mesure longueur d'arc normalisée sur le cercle unité* T *(pour plus des détails [46]).*

Mesure d'équilibre sur un contour.

Définition 4.2.4 ([46],[50]).*Soit* $w = \varphi(z)$ *la transformation conforme unique qui applique l'extérieur du contour ,*Ω *vers l'extérieur du disque unité* G *possèdant les propriétés i), ii),iii) et iv) (voir théorème 4.1.1). La mesure d'équilibre sur le contour* E *est définie par*

$$\mu_E(B) = \frac{l}{2\pi}\left|\varphi'(z)\right||dz| \qquad z \in B \subseteq \Omega.$$

avec

$$\frac{1}{l}\mu_E(B) = \int_B \frac{|\varphi'(\xi)|\,|d\xi|}{2\pi} = \frac{l}{2\pi}\int\limits_{\varphi(B)} d\theta$$

où $\dfrac{d\theta}{2\pi}$ *est la mesure longueur d'arc normalisée sur le cercle unité* T *(pour plus des détails [40];[46]).*

Les deux constantes $Cap(E)$ *et* μ_E *seront déterminées comme suit.*

Lemme 4.2.1.([46],[50],*[3],[64]*,[37],[38]).

$$\limsup_{n\to\infty}|L_n(z)|^{\frac{1}{n}} = Cap(E)$$

et

$$\limsup_{n\to\infty}|L_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq Cap(E)\,|\varphi(z)|\,.$$

Uniformément sur les compacts de $\overline{\Omega} - \{\infty\}$ *.Plus précisement*

$$\limsup_{n\to\infty}|L_{n^2}(z)|^{\frac{1}{n}} = Cap(E)\,|\varphi(z)|$$

Localement uniformément sur les compacts de $\overline{\mathbb{C}} - \left[co\,\overline{G}\right]$ *.*

Pour plus de détails il est préconisable de consulter les travaux de **E.Saff** sur les mesures d'equilibre des polynômes orthogonaux et la distribution de leurs zéros.

Définition et théorème 4.2.5 ([32]**,**[35],[61],[50],[64])*Considérons le développement en* *série de **Laurent** à l'infini de la fonction φ et ses puissances non negatives and its non-négatives φ^n suivantes :*

$$\varphi(z) = \frac{1}{Cap(E)} z + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k . z^{-k} \ , \qquad z \in \Omega. \tag{4.11}$$

$$\varphi^n(z) = F_n(z) + \lambda_n(z) \, , \ z \in \Omega \ , \ \lambda_n(\xi) \longrightarrow 0, \text{ uniformément sur } E.$$

On appelle n-ième polynôme de Faber sur $\overline{\Omega}$, la partie polynômiale notée par $F_n(z)$ du développement précédent.

4.2.1 Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(\Omega, \rho)$

Théorème 4.2.5 ([37],[38],*[39]) Considérons le problème extrémal suivant*

$$\mu(\beta) = \inf \left\{ \|\varphi\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} \, , \ \varphi \in H^p(\Omega, \rho) \, , \ \varphi(\infty) = 1 \right\} \tag{4.12}$$

La solution optimale du problème (4.12) *ainsi que sa valeur optimale sont données par*

$$\mu(\beta) = \|\varphi^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} = \left\| \frac{D_{E,\rho}}{D_{E,\rho}(\infty)} \right\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} = \frac{2\pi}{[D_{E,\rho}(\infty)]^p}.$$

Preuve ,([37],[38],*[39],[61],[50],[64])*

Soit $\varphi \in H^p(\Omega, \rho) : \varphi(\infty) = 1$, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int\limits_{E_R} \frac{|\varphi(z)|^p}{|D_{E,\rho}(z)|^p} \left|\varphi'(z) \ dz\right| &= \frac{1}{R} \int\limits_{|w|=R} \frac{|\varphi(\Psi(w))|^p}{|D_{E,\rho}(\Psi(w))|^p} \mid dw| \\ &= \frac{1}{R} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left|\varphi\left(\Psi\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right)\right|^p}{\left|D_{E,\rho}\left(\Psi\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right)\right|^p} R d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \left|g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right|^p d\theta, \end{aligned}$$

où

$$g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) = \frac{\varphi\left(\Psi\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right)}{D_{E,\rho}\left(\Psi\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right)}.$$

Si on définit la fonction g_p par

$$g_p\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) = g\left(\frac{1}{\mathrm{Re}^{i\theta}}\right), \ 0 < R < 1, \ g_p(0) = g(\infty),$$

on remarquera que la fonction g_p est holomorphe dans D, alors en utilisant le fait que les fonctions sous le signe intégrale soient sous-harmoniques et la formule de Cauchy on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \left| g\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right) \right| d\theta = \int_0^{2\pi} \left| g_p\left(\frac{1}{R} e^{i\theta}\right) \right| d\theta \geq \left| \int_0^{2\pi} g_p\left(\frac{1}{R} e^{i\theta}\right) d\theta \right|$$

$$= 2\pi \left| g_p(0) \right| = 2\pi \left| g(\infty) \right|$$

Ainsi

$$\frac{1}{R} \int_{E_R} \frac{|\varphi(z)|^p}{|D_{E,\rho}(z)|^p} \left| \varphi'(z)\ dz \right| \geq 2\pi \left(\frac{\varphi(\infty)}{D_{E,\rho}(\infty)} \right)^p = \frac{2\pi}{D^p_{E,\rho}(\infty)}, \tag{4.13}$$

en passant à la limite quand $R \to 1^+, \forall \varphi \in H^p(\Omega, \rho)$ telle que $\varphi(\infty) = 1$,on a

$$\|\varphi\|_{H^p(\Omega,\rho)} \geq \frac{2\pi}{D^p_{E,\rho}(\infty)}$$

Si

$$\varphi^* = \frac{D_{E,\rho}(z)}{D_{E,\rho}(\infty)},$$

on a

$$\varphi^* \in H^p(\Omega, \rho) : \varphi^*(\infty) = 1,$$

de plus elle réalise l'égalité dans (4.13). alors si $R \to 1^+$ on obtient :

$$\|\varphi^*\|_{H^p(\Omega,\rho)} = \frac{2\pi}{D^p_{E,\rho}(\infty)}.$$

Ceci montre que φ^* est la solution optimale du problème (4.18) et que

$$\mu(\beta) = \|\varphi^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} = \left\| \frac{D_{E,\rho}}{D_{E,\rho}(\infty)} \right\| = \frac{2\pi}{D^p_{E,\rho}(\infty)}. \tag{4.14}$$

4.3 Polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le contour

Notons par $\{P_{n,\alpha}(z)\}_{n=0,1,2....}$ la suite des polynômes polaires moniques associés à la suite des polynômes orthogonaux moniques $\{L_n(z)\}$ sur le contour. $P_{n,\alpha}(z)$ est par définition solution de l'équation différentielle

$$(n+1)\, L_n(z) = P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha)\, P'_{n,\alpha}(z) \tag{4.15}$$

et vérifie les relations suivantes

$$(n+1)\int_{\alpha}^{z} L_n(t)\, dt = (z-\alpha)\, P_{n,\alpha}(z), \qquad n =, 1, 2......... (\alpha \in \mathbb{C}, z \neq \alpha)$$

et

$$((z-\alpha)\, P_{n,\alpha}(z))_{z=\alpha} = 0 \qquad\qquad ,n =, 1, 2.........$$

Les propriétés précedentes impliquent

$$\int_E \left[P_{n,\alpha}(\xi) + (\xi-\alpha)\, P'_{n,\alpha}(\xi)\right] \overline{\xi^{\nu}} \rho(\xi)\, |d\xi| = 0 \qquad ,\nu = 0, 1.....n-1.$$

ou encore

$$\int_E \left[P_{n,\alpha}(\xi) + (\xi-\alpha)\, P'_{n,\alpha}(\xi)\right] \overline{L_m(\xi)} \rho(\xi)\, |d\xi| = 0, \qquad m \neq n.$$

Avec ces notations on obtient aussi

$$\int_E \left[P_{n,\alpha}(\xi) + (\xi-\alpha)\, P'_{n,\alpha}(\xi)\right] \overline{L_m(\xi)} \rho(\xi)\, |d\xi| = (n+1)\, \|L_n\|^2 \;\; , \qquad n = 0, 1, 2....$$

Chapitre 5

Comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polaires L_p extrémaux sur le contour

Ce paragraphe contient la deuxième partie des résultats originaux de cette thèse. Il s'agit des formules asymptotiques des polynômes polaires associés aux polaires L_p extrémaux sur le contour

5.1 Comportement asymptotique des polynômes L_p extrémaux associés à une mesure concentrée sur le contour

Le principal résultat concernant le comportement asymptotique des polynômes L_p extrémaux associés à une mesure concentrée sur le contour se trouve dans le théorème suivant qui est du à Gueronimus

Théorème 5.1.1 (1952,*[26]*) *Soit E un contour de* ***Jordan*** rectifiable et ρ *une fonction* *poids définie sur le contour E tq*

$$\rho \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \int_E |\xi|^n \rho(\xi) |d\xi| < +\infty, \;\; n = 0, 1, ... \tag{5.1}$$

et la condition dite de Szegö suivante,

$$\int_E (\log \rho(\xi)) \left|\varphi'(\xi)\right| |d\xi| > -\infty. \tag{5.2}$$

Notons

$$m_n(\rho) = Min \left\{ \|Q_n(z)\|_{L^p(E,\rho)}, Q_n = z^n + ..., Q_n(\infty) = 1 \right\} \tag{5.3}$$

Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n(\rho)}{C(E)^n} = \mu(\rho)^{\frac{1}{p}}.$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{L_n(z)}{C(E)^n \varphi^n(z)} - \varphi^*(z) \right\|_{H^p(\Omega,\rho)} = 0. \tag{5.4}$$

et

$$L_n(z) = C(E)^n \varphi^n(z) \varphi^*(z) \left[1 + \varepsilon_n(z)\right],$$

uniformément sur es compacts de Ω. Dans ce cas, φ^*, la solution optimae est donnée par la relation suivante :

$$\left\| \frac{D_{E,\rho}(z)}{D_{E,\rho}(\infty)} \right\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} = \|\varphi^*\|^p_{H^p(\Omega,\rho)} = \inf \left\{ \|\varphi\|^p_{H^p(\Omega,\rho)}, \varphi(\infty) = 1 \right\} = \mu(\rho)$$

Théorème 5.1.2 *Avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses que celles du théorème 5.1.1 de* ***Ya. L. Geronimus,*** *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} = C(E)\varphi(z) \tag{5.5}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n'(z)}{L_n(z)} - n\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\varphi^{*\prime}(z)}{\varphi^*(z)} \tag{5.6}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n'(z)}{nL_n(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \tag{5.7}$$

uniformément sur les compacts de Ω.

5.2 Comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes L_p extrémaux sur le contour

$\alpha \in \mathbb{C}$ (appelé pole). Notons par $\{P_{n,\alpha}(z)\}_{n=0,1,2....}$ la suite des polynômes polaires moniques associés à la suite des polynômes moniques L_p extrémaux sur le contour $\{L_n(z)\}$. $P_{n,\alpha}(z)$ est par définition solution de l'équation différentielle

$$(n+1)\,L_n(z) = P_{n,\alpha}(z) + (z-\alpha)\,P_{n,\alpha}'(z) \tag{5.8}$$

et les relations suivantes

$$(n+1)\int_\alpha^z L_n(t)\,dt = (z-\alpha)\,P_{n,\alpha}(z) \qquad ,n=,1,2......... \,(z\neq\alpha)$$

et

$$((z-\alpha)\,P_{n,\alpha}(z))_{z=\alpha} = 0 \qquad ,n=,1,2......... \tag{5.9}$$

et

$$P_{n,\alpha}(\alpha) = (n+1)\,L_n(\alpha) \qquad ,n=,1,2.........$$

On trouve dans le théorème le comportement asymptotique des polynômes polaires $P_{n,\alpha}(z)$.

Théorème 5.2.1 *Soit* E *un contour de* ***Jordan*** rectifiable et ρ *une fonction poids définie sur le contour* E *telle que*

$$\rho\geq 0,\ \int_E |\xi|^n\,\rho(\xi)\,|d\xi| < +\infty \quad \text{et} \quad \int_E (\log\rho(\xi))\,|\varphi'(\xi)|\,|d\xi| > -\infty. \tag{5.10}$$

Alors on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n(z)}{P_{n,\alpha}(z)}=(z-\alpha)\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} \tag{5.11}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\alpha}(z)}{P_{n,\alpha}(z)}=C(E)\varphi(z) \tag{5.12}$$

uniformément sur les compacts de Ω.

Preuve : Divisons les deux membres de l'égalité (5.8) par $nP_{n,\alpha}(z)$, on a

$$\frac{n+1}{n}\frac{L_n(z)}{P_{n,\alpha}(z)}=\frac{1}{n}+(z-\alpha)\frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)}$$

D'où le point (5.11). Ainsi le point (5.12) provient du point (5.5) et du fait que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\alpha}(z)}{P_{n,\alpha}(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}$$

Ce qui termine la démonstration.

Corollaire 5.2.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L'_n(z)}{nL_n(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} \tag{5.13}$$

uniformément sur les compacts de Ω.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L'_{n+1}(z)}{nL_n(z)}=C(E)\varphi'(z) \tag{5.14}$$

Preuve : L'égalité (5.8) donne,

$$\frac{L'_n(z)}{L_n(z)}=\frac{(z-\alpha)P''_{n,\alpha}(z)+2P'_{n,\alpha}(z)}{(z-\alpha)P'_{n,\alpha}(z)+P_{n,\alpha}(z)}.$$

Alors

$$\frac{L'_n(z)}{nL_n(z)}=\frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)}\frac{(z-\alpha)\frac{P''_{n,\alpha}(z)}{nP'_{n,\alpha}(z)}+\frac{2}{n}}{(z-\alpha)\frac{P'_{n,\alpha}(z)}{nP_{n,\alpha}(z)}+\frac{1}{n}}.$$

D'où le point (5.13). D'une autre façon et en utilisant la décomposition

$$\frac{L'_{n+1}(z)}{nL_n(z)}=\frac{L'_{n+1}(z)}{nL_{n+1}(z)}\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)}$$

on obtient l'assertion (5.14) en appliquant (5.5) et (5.7).

Remarque 5.2.1 Remarquons que

$$\left(\frac{L_n}{P_{n,\alpha}}\right)' = \frac{L_n}{P_{n,\alpha}}\left(\frac{L_n'}{L_n} - \frac{P_{n,\alpha}'}{P_{n,\alpha}}\right)$$

on obtient donc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\alpha}'(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{L_n'(z)}{nL_n(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \tag{5.15}$$

uniformément sur les compacts de Ω. ■

Corollaire 5.2.2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n'(z)}{P_{n,\alpha}'(z)} = (z-\alpha)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \tag{5.16}$$

uniformément sur les compacts de Ω

Preuve : Effectuons la décomposition suivante

$$\frac{L_n'(z)}{P_{n,\alpha}'(z)} = \frac{L_n'(z)}{nL_n(z)}\frac{L_n(z)}{P_{n,\alpha}(z)}\frac{nP_{n,\alpha}(z)}{P_{n,\alpha}'(z)}$$

Appliquons (5.7) et (5.11) on obtient (5.16). ■

Théorème 5.2.2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,\alpha}'(z)}{nP_{n,\alpha}(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \tag{5.17}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\alpha}'(z)}{nP_{n,\alpha}'} = C(E)\,\varphi'(z) \tag{5.18}$$

uniformément sur les compacts de Ω

Preuve : Pour tout nombre complexe fixé α,les polynômes polaires $P_{n,,\alpha}(z)$ vérifient

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow\alpha \\ \alpha \text{ est un pole de} P_{n,\alpha}}} P_{n,\alpha}(z) = (n+1)\lim_{\substack{z\longrightarrow\alpha \\ \alpha\in E}}\frac{\int_\alpha^z L_n(t)\,dt}{z-\alpha} = (n+1)\,L_n(\alpha)$$

On sait que

$$(\log(z-\alpha)\,P_{n,\alpha}(z))' = \frac{((z-\alpha)\,P_{n,\alpha}(z))'}{(z-\alpha)\,P_{n,\alpha}(z)}$$

Avec l'aide de (5.8).On obtient

$$\left(\log\left(z-\alpha\right)P_{n,\alpha}\left(z\right)\right)' = \left(n+1\right)\frac{L_n\left(z\right)}{\left(z-\alpha\right)P_{n,\alpha}\left(z\right)}$$

Intégration de a vers z, les deux membres de cette égalité, on obtient

$$\frac{\left(z-\alpha\right)P_{n,\alpha}\left(z\right)}{\left(a-\alpha\right)P_{n,\alpha}\left(a\right)} = \exp\left(n+1\right)\int_a^z \frac{L_n\left(t\right)}{\left(t-\alpha\right)P_{n,\alpha}\left(t\right)}dt$$

Ceci montre que

$$P_{n,\alpha}\left(z\right) = \frac{a-\alpha}{z-\alpha}P_{n,\alpha}\left(a\right)\exp\left(n+1\right)\int_a^z \frac{L_n\left(t\right)}{\left(t-\alpha\right)P_{n,\alpha}\left(t\right)}dt$$

Avec (5.5) on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1,\alpha}\left(z\right)}{P_{n,\alpha}\left(z\right)}\left(\frac{P_{n+1,\alpha}\left(a\right)}{P_{n,\alpha}\left(a\right)}\right)^{-1} = \exp\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^z \frac{L_n\left(t\right)}{\left(t-\alpha\right)P_{n,\alpha}\left(t\right)}dt$$

Ce qui revient à montrer que.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n,\alpha}\left(z\right)}{nP_{n,\alpha}\left(z\right)} = \frac{\varphi'\left(z\right)}{\varphi\left(z\right)}$$

La preuve du point (5.17) est achevée. Le point (5.18) s'obtient en tenant en compte (5.17) et (5.12) et en remarquant que

$$\frac{P'_{n+1,\alpha}\left(z\right)}{nP_{n,\alpha}} = \frac{P'_{n+1,\alpha}\left(z\right)}{nP_{n+1,\alpha}\left(z\right)}\frac{P_{n+1,\alpha}\left(z\right)}{P_{n,\alpha}}$$

Ce qui revient à montrer que.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P'_{n+1,\alpha}\left(z\right)}{nP_{n,\alpha}} = C\left(E\right)\varphi'\left(z\right)$$

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons apporté une contribution à un problème n'est facile dans le domaine de la théorie constructive des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux et leur comportement asymptotique.Le résultat principal porte sur l'étude du comportement asymptotique des polynômes polaires associés aux polynômes orthogonaux sur le cercle unité,et le comportement asymptotique des polynômes polaires des polynômes orthogonaux sur un contour.Il est très possible que les formules asymptotiques obtenues trouveront leurs applications dans plusieurs domaines des physiques- mathématiques.Il est utile de dire que le projet des polynômes polaires avec tous les autres polynômes orthogonaux ou non-orthgonaux associés aux polynômes orthogonaux relativement à n'importe qu'elle mesure,auront leur lieu privilège et joueront leur rôle dévolu dans le problème de comportement asymptotique des polynômes orthogonaux et autre problèmes d'approximation polynômiales en norme (les problèmes de la convergence uniforme par une meilleure approximation polynômiale).

ALHAMDOU LILLAH OUA ASSALATOU OUA ASSALAMOU ALA SIDNA RASSOULOU ALLAH

Bibliographie

[1] **A.AZIZ ,N.A.RATHER**,On an inequality concerning the polar derivative of a polynomial,Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 117, No. 3, August 2007, pp. 349–357.

[2] **A.APTEKAREV,A.CACHAFEIRO,F.MARCELLÁN**, A scalar Riemann boundary value problem approach to orthogonal polynomials on the circle, J. Approx. Theory 141 (2006),pp174-181.

[3] **V.V.ANDRIEVSKI,I.E.PRITSKER**,Convergence of Bieberbach polynomials in domains with interiors cusps.J d'Analyse Math.82 (2000),pp 209-225.

[4] **M.ALFARO, F.MARCELLÁN**,Recent trends in orthogonal polynomials on the unit circle and their applications,C. Brezinski, L. Gori and A. Ronveaux (editors),pp. 3-14,1991.

[5] **A.AZIZ**, Inequalities for the polar derivative of a polynomial, J. Approx. Theory 55 (1988) pp 183–193.

[6] ———**,N.A.RATHER**,Some Zygmund type Lq inequalities for polynomials, J. Math.Anal. Appl. 289 (2004) pp14–29.

[7] ———,**W.M.SHAH**, Inequalities for the polar derivative of a polynomial, Indian J.Pure Appl. Math. 29 (1998) pp163–173.

[8] ———,**B.A.ZERGAR**,On the Zeros of Polynomials .Proc.Indian .acad .Sci.[Math Sci],vol 106,No 2 , May 1996,pp127-132.

[9] **D.ALLINGHAM**,Conformal Mappings And The Area Of The Mandelbrot Set,Thesis,supervision under Professor David Elliott.1995.

[10] **R.BENZINE,YA.LASKRI**,L-p Extremal Polynomials.L-p Extremal Polynomials Results and Perspectives.Serdika Math.J.32 (2006) pp 218-270.

[11] **R.BENZINE,YA.LASKRI,A.REHOUMA**,Asymptotics Properties for Polar L-p extremal polynomials on the contour.(submitted for consideration for publication).

[12] **V. M.BADKOV**,Pointwise Estimates from Below of the Moduli of the Derivatives of Orthogonal Polynomials on the Circle with a Weight Having Singularities,Mathematics USSR Sbornik, 186(1995),pp 771–781.

[13] **P. BORWEIN,T.ERDELYI**,Polynomials and Polynomial Inequalities, Springer, New York, 1995.

[14] **LI-CHIEN SHEN**,Orthogonal polynomials on the unit circle associated with Laguerre poynomials,Pro of Amer Math Soci Volume 129, Number 3,pp 873-879.2000.

[15] **H.CARTAN**,Théorie élémentaire des fonctions analytique d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann, Paris 1967.

[16] **P. L.CHEBYCHEV**,Complete collected works, vol 3. Izdat. Nauk SSSR, Moscow 1948. [Russian] MR 11, 150.

[17] **J.B.CONWAY**,Functions of one complex variable. Springer Verlag. New-York, 1973.

[18] **P.L.DUREN**,Theory of H^p spaces ,Dover ,New York ,2000.

[19] **N.G.DE-BRUJIN**,Inequalities concerning polynomials in the complex domain, Nederl.Akad. Wetensch. Proc. 50 (1947) 1265–1272 ; Indag. Math. 9 (1947) pp 591–598.

[20] **G.DARBOUX**,Mémoire sur l'approximation des fonctions de trés grands nombres, Journal de Mathématiques, (3), vol. 4 (1878), 5-56,pp 377-416.

[21] **P.FERENC,P.NEVAI**,Schur functions and orthogonal polynomials on the unit circle.Proceedings of AFS 95.Budapest.1997.

[22] **A.FANDORA.A,PIJEIRA.M**.Asymptotics behavior of orthogonal polynomials primitives.Margarita mathematica en memoira de José Javier Guadalupe Hernández, Servicio de Publicacone de la Univ.de la Rioja,Logróno,Spain 2001 pp 626-632.

[23] **YA.L.GERONIMUS**,Polynomials orthogonal on the circle and on an interval. Fizmatgiz, Moscow, 1958. English transl. Consultants Bureau, New York, 1961.

[24] **J.S. GERONIMO,KM**. Case, Scattering theory and polynomials orthogonal on the real line, Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980),pp 467-494.MR 82 :c :81138.

[25] **U.GRENANDER,G.SZEGŐ**,Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press,Berkeley, 1958 ; 2nd edition : Chelsea Publishing Company, New York,1984.

[26] **YA.L.GERONIMUS**,On some extremal problems in the space L^p_σ, Mat. Sb. (N.S.) 31(73) (1952),pp 3-26 (Russian).

[27] **E.GODOY,F.MARCELLÁN**,Tridiagonal Toeplitz matrices and orthogonal polynomials on the unit circle,Orthogonal polynomials and their applications (Laredo, 1987),pp 139-146, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 117, Dekker, New York. 1989.

[28] **I.S.GRADSHTEYN,I.M.RYZHIK,**Tables of Integrals, Series and Products,Academic Press, 1980.

[29] **A.A.GONCHĂR**.On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions. Mat. Sbornik.Tome 97 (139) (1975), N° 4.

[30] **L. GARZA,F. MARCELLÁN**,Verblunsky Parameters and Linear Spectral Transformations, Methods and Applications of Analysis 16 (2009), no.1,pp 69–86.

[31] **M. G.KREIN**, On a generalization of some investigations of **G.Szegő,V.Smirnov** and **A.Kolmogorov**.C.R.(Doklad) Acad. Sci. URSS 46 (1945),pp 91-94. MR7, 156.

[32] **H.T.KAPTANOĞLU,N.SADIK**,Bohr Radii of Elliptic Regions, Russian Journal of Mathematical Physics, 12, no 3,(2005) pp 363-368.

[33] **P.KOOSIS**.Introduction to H^p Spaces.London Math.Soc.Lecture Notes,Series, Vol. 40, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[34] **M.V.KELDYSH**. Select papers, Academic Press, 1985.(in Russian).

[35] **P.P.KOROVKINE**,On orthogonal polynomials on a closed curve.Math.Sbornik 9 (1941)pp 469-484.(in Russian).

[36] **A.KOLMOGOROV,S.FOMINE**,Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.Edition Mir, Moscou,1977.

[37] **V.KALYAGIN, R.BENZINE**, Sur la formule asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur un contour plus une partie discrète finie,(An asymptotic formula for orthogonal polynomials associated with a measure concentrated on a contour plus a finite discrete part),Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B 41, (1989), no1,pp 29-46 (French).

[38] **V.KALYAGIN**,On Asymptotics of Lp extremal polynomials on a complex curve ($0 < p < \infty$), J. Approx. Theory, 74, (1993),pp 226-236.

[39] ——————, A Note on the Asymptotics of Orthogonal Polynomials on a complex Arc : The case of a measure with a discrete Part, J. Approx. Theory 80 (1995),pp138-145.

[40] **D.S.LUBINSKY**,On asymptotics of derivatives of orthogonal polynomials on the unit circle.J-Approx.theory 145(2007),pp122-127.

[41] ——————.Universality Type Limits For Bergman Orthogonal Polynomials,Computational Methods and Functions Theory,10 (2010),pp135-154.

[42] **YA.LASKRI,A.REHOUMA**,Polar Bergman Polynomials Over Domains with Corners ,IJOPCM.Vol. 4 No. 4,December 2011.pp74-87.

[43] **X.LI, K. PAN**, Asymptotics for L-p extremal polynomials on the unit circle, J. Approx. Theory 67 (1991),pp 270-283.

[44] ——————,Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part on the unit circle.J.Approx.Theory 79,(1994),pp54-71.

[45] **E.MUHAMADIEV.**On a certain functional equation in the algebra of polynomials with complex coefficients.Abstract and Applied Analysis,Volume 2006, Article ID 94509.pp1–15.

[46] **H.N.MHASKAR,E.B.SAFF**.On the distribution of zeros of polynomials orthogonal on the unit circle.Journal of appproximation theory.Vol 63,N 1,1990.

[47] **P.NEVAI**, An asymptotic formula for the derivatives of orthogonal polynomials,SIAM J. Math.Anal.10(1979),pp 472–477.

[48] **E.M.NIKISHIN**,The discrete **Sturm-Liouville** operator and some problems of function theory, Trudy Sem. Petrovsk. 10 (1984),pp 3-77 (in Russian), English Transl. in Soviet Math,35 (1987),pp 2679-2744.

[49] **H.PIJEIRA.CABRERA,Y.JOSE.BELLO CRUZ,W.R.URBINA**.On Polar Legendre polynomials,Rocky Mountain Journal of Mathematics,RMJ (2008),vol 38,pp1-10.

[50] **IGOR.E.PRITSKER**,Derivatives of **Faber** polynomials and Markov inequalities Journal of Approximation Theory archive Volume 118 , Issue 2 (October 2002) table of contents pp 163 - 174.

[51] **E.A. RAHMANOV**,On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials".Math. USSR Sbornik 32(2) (1977).pp199-213.(in Russian).

[52] **A.REHOUMA,YA.LASKRI,R.BENZINE**,Asymptotic Properties of Polar Polynomials,Applied Mathematical Sciences,(AMS) Vol. 8, 2014, no. 14.pp 685 - 691.

[53] **W.RUDIN**,Real and Complex Analysis,McGraw-Hill,New York, 1968.

[54] **Q.I.RAHMAN**,On the zeros of polynomials and its derivative.Pacific Journal of MathematicsVol. 41, No. 2,pp 525-528 (1972).

[55] **G.SZEGŐ**,Bemerkungen zu einen Satz von J.H.Grace Uber die Wurzeln algebraischer Gleighungen.Math Z.13(1922),pp 28-55.

[56] ————,Orthogonal Polynomials,Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 23, 4th ed., American Math. Society, Providence, RI, 1975.

[57] ————,Uber orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der Komplexen Ebene gehoren.Math.Zeit.9 (1921),pp218-270.

[58] ————,Uber die entwicklung einer willkurlichen funktion nach den plynomen eines orthogonal systems. Mathematische Zeitschrift, vol 12 (1921),pp 61-94.

[59] **B.SIMON**,Orthogonal polynomials on the unit circle,part 1 :Classical theory ,AMS Colloquium Series,Americain Mathematical Society,Providence,RI,2005.

[60] **G.SCHMISSER**,Majorization of the Critical Points of a Polynomial by Its Zeros.Computational Methods and Function Theory.Vol...,No...,pp .....

[61] **V.J. SMIRNOV**, Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe, Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad, Vol.2 (1928),pp155-179.

[62] ——————, Sur les formules de **Cauchy** et de **Green** et quelques problémes qui s'y rattachent, Bulletin de l'académie des sciences de l'U.R.S.S., 1932,pp 337-372.

[63] ——————,**N. A. LEBEDEV**, "The Constructive Theory of Functions of a Complex Variable," Nauka, Moscow, 1964 (in Russian). ; M.I.T. Press,Cambridge,MA,1968 (Engl. transl).

[64] **P. SOUETINE**, Polynômes orthognaux sur le contour, (en russe). Russian Math Surveys, t.21,(1966).

[65] **C.SUÁREZ**, About the orthogonality of derivatives of orthogonal Polynomials on the unit circle,Advances in Difference Equations Article ID 406231,Volume 2010,pp 1-18.

[66] **A.ZYGMOUND**, A remark on conjugate series,Proc. London Math. Soc. 34 (1932) pp 392–400.