

Table des matières

Résumé	iv
Abstract	v
Remerciements	vi
Introduction générale	vii
1 Notions Préliminaires	1
1.1 Introduction	1
1.2 Système dynamique	1
1.3 Courbes invariantes et intégrales premières	6
1.3.1 Intégrales premières	6
1.3.2 Courbes invariantes	6
1.4 Cycles limites	7
1.4.1 Amplitude du cycle limite	7
1.4.2 Existence et non-existence de cycle limite	7
1.4.3 Cycle limite algébrique	8
1.5 Bifurcation des trajectoires périodiques	8
1.5.1 Bifurcation de Hopf	8
2 Sur la théorie de la moyennisation dans le cas périodique	10
2.1 Introduction	10
2.2 Un premier théorème de moyennisation	11
2.3 Un deuxième théorème de moyennisation	13
2.4 Un troisième théorème de moyennisation	14

3	Cycles limites des systèmes quadratiques	18
3.1	Introduction	18
3.2	Classification des systèmes quadratiques selon le nombre de points d'équilibres	20
3.2.1	Point d'équilibre d'un système quadratique	20
3.3	La classification de Ye d'un système quadratique	22
3.4	Système quadratique et cycle limite algébrique	22
3.5	Distributions des cycles limites d'une classe des systèmes quadratiques	25
3.6	Système quadratique ayant quatre cycles limites	26
3.7	La forme normale de Bautin d'un système quadratique	28
3.7.1	Transformation en l'équation d'Abel	28
3.7.2	Etude du système	31
3.7.3	Etude du système (3.11)	40
4	Cycles limites de quelques classes d'équations de Liénard perturbées	43
4.1	Introduction	43
4.2	Résultat principal	44
4.3	Preuve du Théorème 4.2.1	49
4.4	Preuve des corollaires	51
4.5	Preuve des exemples	51
5	Cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés.	58
5.1	Introduction	58
5.2	Présentation des principaux résultats	58
6	Conclusion Générale	61

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES
Option : Mathématiques Appliquées

**Cycles limites des systèmes différentiels de Liénard
perturbés.**

Sous la direction de

Professeur: **Makhlouf Ammar** U. Annaba

Président du jury :	Laouar Abdelhamid	MCA	U. Annaba
EXAMINATEUR	Bebbouchi Rachid	Pr	USTHB. Alger
EXAMINATEUR	Lakrib Mustapha	Pr	U. SidiBelAbbés
EXAMINATEUR	Benmezai Abdelhamid	Pr	USTHB. Alger
EXAMINATEUR	Bradji Abdallah	MCA	U. Annaba

Année Universitaire 2013 / 2014

Résumé

Le travail de cette thèse consiste en l'étude des cycles limites de quelques classes d'équations de Liénard perturbées qui peuvent être considérées comme des perturbations particulières de l'oscillateur harmonique en utilisant la théorie de moyennisation. Cette étude est illustrée par des applications.

La deuxième partie concerne l'étude du nombre maximal de cycles limites des systèmes de Liénard généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2k+1}, \\ \dot{y} = -x^{2k+1} + \varepsilon f(x) y^{2n+1}. \end{cases}$$

où k et n sont des entiers positifs, $f(x)$ est un polynôme de degré m , ε est un petit paramètre.

Mots clé : Cycle limite, Méthode de moyennisation, système quadratique, équation de Liénard, système de Liénard généralisés, bifurcation, perturbation.

Classification AMS : 34C25 – 34C29 – 58F21

Abstract

This work consists of the study of limit cycles of some classes of Liénard perturbed equations which can be considered as special perturbations of the harmonic oscillator using the Averaging theory. This study is illustrated by applications.

The second part concerns of the study of the maximum number of limit cycles of some generalized Liénard systems of the forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2k+1}, \\ \dot{y} = -x^{2k+1} + \varepsilon f(x) y^{2n+1}. \end{cases}$$

where k and n are non-negative integers, $f(x)$ is a polynomial of degree m , ε is a small parameter.

Keywords : limit Cycle, averaging method, quadratic system, Liénard equation, generalized Liénard systems, bifurcation, perturbation.

Classification AMS : 34C25 – 34C29 – 58F21

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier mon directeur de thèse, le Professeur Makhlouf Ammar, de m'avoir confié ce travail de recherche, ainsi que pour son aide, sa disponibilité, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa sympathie et ses précieux conseils aux cours de ces années.

Je tiens à remercier Monsieur Laouar Abdelhamid, Maître de conférences A à l'université Badji Mokhtar- Annaba pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ici toute ma considération à mes examinateurs Messieurs les professeurs Bebbouchi Rachid, Professeur à l'université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'alger, Monsieur Mustapha Lakirb, Professeur à l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés, Monsieur Benmezai Abdelhamid, Professeur à l'université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'alger et Monsieur Bradji Abdallah, Maître de conférences (A) à l'université Badji Mokhtar Annaba d'avoir accepté d'être les examinateurs de ce travail.

Enfin, Je dédie cette thèse à la mémoire de ma mère, malgré son absence elle sera toujours vivante dans mon cœur, son amour m'a permis de dépasser tous les moments difficiles. Elle m'a toujours encouragé et soutenu sous toutes les formes et a toujours cru en ma volonté de réussir.

Introduction générale

Un système dynamique, c'est quoi au juste ? Disons que c'est essentiellement la donnée de deux choses : un espace des phases représentant l'ensemble des états possibles du système considéré et une loi d'évolution décrivant le changement infinitésimal (temps continu) de l'état du système, ou une loi d'évolution donnant l'état du système au temps $t + 1$ en fonction de l'état au temps t (temps discret). Le but principal de la théorie est alors de comprendre l'évolution à long terme du système, en particulier ses propriétés statistiques et asymptotiques. D'une certaine façon, on cherche à passer du court terme au long terme.

La théorie des systèmes dynamiques est relativement récente puisque le père fondateur en est certainement Henri Poincaré. Ce dernier était particulièrement intéressé par la mécanique céleste et le problème dit des « *n corps* ». Les corps en question, ce sont par exemple les planètes du système solaire, les satellites de ces planètes... et le Soleil bien sûr.

Beaucoup de systèmes, notamment physiques, sont décrits par des équations différentielles. Parfois, leurs solutions évoluent vers des cycles limites dont le nombre est l'enjeu du 16^{ième} problème de Hilbert. En 114 ans, on a maintes fois cru sa solution à portée de main... avant qu'elle ne s'échappe. L'histoire de ce problème est néanmoins jalonnée de progrès en mathématiques et d'enseignements sur cette discipline.

Dans les années 1920, le statisticien Alfred Lotka et le mathématicien Vito Volterra élaborent un modèle qui décrit la dynamique de systèmes écologiques où cohabitent un prédateur et sa proie. De façon emblématique, il est souvent appliqué aux lynx et aux lièvres des neiges dont les recensements précis ont été établis par la Compagnie de la baie d'Hudson au *XIXe* siècle. Ce modèle est constitué d'une équation différentielle qui traduit l'évolution des populations de chaque animal. Ainsi, quand les lynx sont nombreux, la population de lièvres décroît, ce qui entraîne la diminution du nombre de

lynx (ils ont moins à manger), puis l'augmentation de celui de lièvres, libérés de la pression des prédateurs... Ce type d'équations n'est pas réservé à la biologie et il est également pertinent notamment en physique : au début du *XXe* siècle, Balthazar Van der Pol décrit de cette façon les oscillations d'un circuit électrique doté d'une lampe dont la résistance dépend de l'intensité du courant qui y passe.

Dans les deux exemples, à mesure que le temps croît, le comportement du système a tendance à devenir périodique. Graphiquement, les courbes qui représentent les solutions s'approchent d'un cycle : on parle de cycle limite. Rigoureusement, le modèle de Lotka-Volterra n'admet un cycle limite que dans une version modifiée par l'écologiste canadien Crawford Holling, mais nous n'entrerons pas dans les détails. D'autres systèmes, plus complexes, peuvent avoir plusieurs cycles limites. Le comportement asymptotique sera encore périodique, mais la convergence aura lieu vers tel ou tel cycle limite selon la position initiale. Il est important de pouvoir déterminer le nombre de ces cycles limites.

Ce problème, ouvert depuis plus d'un siècle, a été au centre de nombreux développements dans les équations différentielles. La principale difficulté du problème de Hilbert est que, même si un champ de vecteurs polynômial est un objet algébrique, ses trajectoires ne sont pas algébriques. Un cycle limite est algébrique s'il est obtenu par une équation algébrique $f(x, y) = 0$. Le cycle limite de l'équation de Van der Pol n'est pas algébrique.

La deuxième partie du 16^{ième} problème de Hilbert, est complètement ouverte. Elle consiste en la recherche du nombre maximum et les dispositions relatives des cycles limites du champ de vecteurs polynômial planaire :

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y), \tag{1}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes de degré n ([32], [6], [30] et [22]). Même si le problème a été posé en 1900, c'est en 1987 que Ecalte et Ilyashenko ont prouvé que le champ de vecteurs polynômial possède un nombre fini de cycles limites. Les deux preuves sont un véritable «tour de force» et chacune nécessite un volume de 300 pages. Bien que le résultat de Ecalte et Ilyashenko montre que chaque champ de vecteurs polynômial individuel a un nombre fini de cycles limites, il est impossible d'en tirer une estimation uniforme sur le nombre de cycles limites. Ainsi, on sait qu'il y a un nombre fini de cycles limites, mais on n'a pas de majoration. Les chercheurs considèrent une classe spéciale pour laquelle il est facile de prouver la finitude, mais pour laquelle

aucune majoration n'est actuellement connue. C'est la classe des équations de Liénard [31], qui s'écrit sous la forme

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -x, \quad (2)$$

où $F(x) = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i$, qui vérifie $F(0) = 0$. Le problème de Hilbert affaibli consiste à trouver une borne supérieure pour le nombre de cycles limites (2) qui ne dépend que de n .

Les résultats suivants sont connus :

Théorème A [33]. Le système (2) avec $F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ et $a_1 a_3 < 0$ a exactement un cycle limite. Il est stable pour $a_1 < 0$ et instable pour $a_1 > 0$.

Remarquons que si $F(x) = x^3 - x$ alors (2) est l'équation de van der Pol avec un cycle limite.

Théorème B. Le système (2) avec $F(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5$ a au plus deux cycles limites.

Théorème C [50]. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système (2) avec $F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i$, a au plus n cycles limites. Il a exactement n cycles limites si et seulement si l'équation de degré n

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3a_3}{8}\rho + \frac{5a_5}{128}\rho^3 + \dots + \binom{2n+2}{n+1} \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} \rho^n = 0,$$

a n racines positives $\rho_j = r_j^2$, $j = \overline{1, n}$. Dans ce cas, les cycles limites tendent vers les cercles de rayons r_j , $j = \overline{1, n}$, centrés à l'origine quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous tenons à mentionner que S. Lynch [37] a calculé la cyclicité de l'origine du système de Liénard généralisé de la forme

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \quad (3)$$

pour différents degrés n et m respectivement des polynômes f et g à l'aide de *Maple* par une approche algébrique.

Il y a beaucoup de résultats concernant l'existence de cycles limites de faible amplitude pour (3). Notons par $\widehat{H}(n, m)$ le nombre maximum de cycles limites de faible amplitudes de (3), Blows et Lloyd (1984) [6], Lloyd et Lynch (1988) [40] et Lynch (1995) [41] ont prouvé les résultats suivants :

- 1) Si g est impair, alors $\widehat{H}(m, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- 2) Si f est pair, alors $\widehat{H}(m, n) = n$, quelque soit g .
- 3) Si f est impair, alors $\widehat{H}(m, 2n + 1) = \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor + n$.
- 4) Si $g(x) = x + g_e(x)$, où g_e est impair, alors $\widehat{H}(2m, 2) = m$.

En 1998, Gasull et Torregrosa (1998) ont obtenu des bornes supérieures pour $\widehat{H}(7, 6)$, $\widehat{H}(6, 7)$, $\widehat{H}(7, 7)$ et $\widehat{H}(4, 20)$.

Christopher et Lynch (1999), Lynch (1998, 1999) [43] et Lynch et Christopher (1999) ont développé une nouvelle méthode algébrique permettant de déterminer les constantes de Liapunov du système (3). Ils ont obtenu les résultats suivants :

- 1) $\widehat{H}(m, 2) = \lfloor \frac{2m+1}{3} \rfloor$,
- 2) $\widehat{H}(2, n) = \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor$,
- 3) $\widehat{H}(m, 3) = 2 \lfloor \frac{3m+2}{8} \rfloor$, pour tout $1 < m \leq 50$,
- 4) $\widehat{H}(3, n) = 2 \lfloor \frac{3n+2}{8} \rfloor$, pour tout $1 < n \leq 50$,
- 5) $\widehat{H}(4, k) = \widehat{H}(k, 4)$, $k = 6, 7, 8, 9$ et $\widehat{H}(5, 6) = \widehat{H}(6, 5)$.

En 2006, Yu et Han (2006) ont donné des valeurs précises de $\widehat{H}(m, n) = \widehat{H}(n, m)$ pour $\{n = 4, m = 10, 11, 12, 13\}$, $\{n = 5, m = 6, 7, 8, 9\}$ et $\{n = 6, m = 5, 6\}$, voir aussi Llibre et al. (2010) [44] pour un tableau avec toutes les valeurs spécifiques.

On note, par $H(n, m)$, le nombre maximum de cycles limites que peut avoir ce système. Maintenant nous allons décrire brièvement les principaux résultats concernant les cycles limites de (3).

1) En 1990, 1996, Dumortier, Li et Rousseau dans [26] et [20] ont prouvé que $H(3, 1) = 1$.

2) En 1997, Dumortier et Chengzhi [21] ont prouvé que $H(2, 2) = 1$.

3) En 1998, Coppel a prouvé que $H(2, 1) = 1$.

4) En 2010, Chengzhi Li et Llibre [19] ont prouvé que $H(1, 3) = 1$.

En utilisant des techniques différentes (intégrales abéliennes, méthodes de la moyennisation, la méthode de Melnikov,...) on a les bornes inférieurs suivantes des nombres de Hilbert. On a $H(2) \geq 4$ [18, 58, 22], $H(3) \geq 13$ [38], $H(4) \geq 22$ [15], $H(5) \geq 28$ [45], $H(6) \geq 35$ [60], $H(7) \geq 50$ [47], $H(n) \geq kn^2 \ln n$ [16], et

$$H(n) \geq 4(n+1)^2 \left(1.442695 \ln(n+1) - \frac{1}{6} \right) + n - \frac{2}{3} \quad [17].$$

Plan de la thèse

Le chapitre 1, comporte un rappel des notions préliminaires des systèmes différentiels On commence par définir les systèmes dynamiques, la notion de flot, les points d'équilibre, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points d'équilibre, le portrait de phase, les cycles limites, les courbes invariantes, les cycles limites algébriques et bifurcation des orbites périodiques.

Dans **le chapitre 2** on introduit les quatre théorèmes importants de la méthode de moyennisation avec des exemples. On applique ces théorèmes pour la recherche des cycles limites des deux problèmes étudiés dans les chapitres quatre et cinq.

Dans **le chapitre 3** on donne quelques résultats concernant les systèmes quadratiques. On trouve les différentes classifications selon le nombre des points d'équilibre. On donne la classification que Ye à proposé [62], avec les principaux résultats concernant l'existence, la non existence et l'unicité de cycle limite pour ces classes. On donne une classe des systèmes quadratiques avec quatre cycles limites. On introduit le système quadratique de Bautin et on détermine le cycle limite en utilisant la méthode de moyennisation, et la classification des systèmes quadratiques qui ont un cycle limite algébrique de degré 2 et 4.

Dans **le chapitre 4** on étudie les cycles limites de certaines classes d'équations de Liénard perturbées, qui peuvent être considéré comme une perturbation particulière de l'oscillateur harmonique, en utilisant la théorie de la moyennisation. Nous illustrons cette étude avec de nombreuses applications.

Ce chapitre a été publié dans le journal "Annals of Differential Equations".

A. Makhlof, N Ouanas : Limit cycles of perturbed Lienard equations, Ann. of Diff. Eqs 29 : 2(2013) , 177 – 187.

Dans **le chapitre 5**, on donne le nombre maximal de cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2k+1}, \\ \dot{y} = -x^{2k+1} + \varepsilon f(x) y^{2n+1}. \end{cases}$$

où k et n sont des entiers positifs, $f(x)$ est un polynôme de degré m , ε est un petit paramètre.

Ce chapitre est soumis pour publication dans le journal "Electronic Journal of Differential Equations".

CHAPITRE 0. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Chapitre 1

Notions Préliminaires

1.1 Introduction

Ce chapitre contient quelques notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

1.2 Système dynamique

Définition 1.2.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

- 1) $\mu(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- 2) $\mu(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- 3) $\mu(0, x) = x$
- 4) $\mu(t + s, x) = \mu(t, \mu(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

exemple 1.2.1 *Soit le système différentiel*

$$\dot{x} = Bx, \quad x(0) = x_0 \tag{1.1}$$

où B est une matrice constante, $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.1) est

$$x(t) = xe^{Bt},$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique

$$(t, x) \rightarrow \mu(x, t) = x_0 e^{Bt}.$$

Systèmes différentiels autonomes du plan

Définition 1.2.2 On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

Le plan des variables x et y s'appelle le plan de phase.

Le champ de vecteurs associé au système (1.2) est noté $X = (P, Q)$. Nous supposons que les fonctions P et Q sont de classe C^1 (donc les conditions de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites en tout point du système (1.2)).

Flot d'équation différentielle

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.3)$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.3).

L'ensemble des applications Φ_t défini par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

est appelé le flot du système non linéaire (1.3).

Orbite périodique

Définition 1.2.3 On appelle orbite périodique toute trajectoire $\phi_t(x)$ de (1.3) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie cette égalité est appelé période.

exemple 1.2.2 *L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Cette équation équivaut au système*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x. \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement puisque

$$\frac{dy}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{y}$$

ce qui donne pour ensemble de solutions

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C.$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solutions périodiques représentées dans le plans de phase par des ellipses.

Points d'équilibres

Pour connaître l'aspect des trajectoires du système (1.2) au moins localement, nous devons chercher ses points d'équilibres.

Définition 1.2.4 *On dit que le point (x_0, y_0) est un point d'équilibre du système (1.2) s'il est solution du système*

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Proposition 1.2.1 *Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.*

Stabilité d'un point d'équilibre

Soit (x_0, y_0) un point d'équilibre du système (1.2). Notons par

$$X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$$

et

$$X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$$

Définition 1.2.5 *On dit que (x_0, y_0) est stable ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \sigma \Rightarrow (\forall t > 0 : \|X(t) - X_0\| < \varepsilon)$$

(x_0, y_0) est asymptotiquement stable ssi (x_0, y_0) est stable et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0$$

Linéarisation et matrice Jacobienne

Au voisinage d'un point d'équilibre, la linéarisation du système (1.2) est donné sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Définition 1.2.6 On appelle matrice Jacobienne associée au système (1.2) au point d'équilibre (x_0, y_0) ; la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Classification des points d'équilibre

Notons la matrice Jacobienne A par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'appelle souvent matrice de stabilité. Les valeurs propres de la matrice A sont données en fonction du déterminant et de la trace par

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4det(A)} \right),$$

et vérifient les relations $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$ et $\lambda_1\lambda_2 = det(A)$. Pour la linéarisation (1.4), le point d'équilibre (x_0, y_0) est alors :

- un point selle si $det(A) < 0$;
- un centre si $det(A) > 0$ et $tr(A) = 0$;
- un foyer si $det(A) > 0$ et $(tr(A))^2 - 4det(A) < 0$, ce foyer est stable si $tr(A) < 0$ et instable si $tr(A) > 0$;
- un noeud si $det(A) > 0$ et $(tr(A))^2 - 4det(A) > 0$, ce noeud est stable si $tr(A) < 0$ et instable si $tr(A) > 0$.

Le point d'équilibre (x_0, y_0) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

Equivalence topologique

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le comportement asymptotique du système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique peut être déduit par comparaison avec le système linéarisé. A ce niveau, on se demande comment peut-on justifier cette comparaison ? En d'autres termes, comment peut-on établir une équivalence au voisinage de l'équilibre entre le système linéarisé et le système non linéaire, sachant que ce dernier présente une dynamique beaucoup plus compliquée ? D'une manière générale, afin de comparer les flots pour des champs de vecteurs linéaires ou non linéaires, il est évident de définir pour toute classification, une relation d'équivalence pour laquelle il existe une application qui prend pour tout temps, le flot de chacun des champs de vecteurs en le flot de l'autre.

Un théorème remarquable, qui répond à la question posée à propos de la linéarisation est le suivant :

Théorème 1.2.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 possédant un zéro p . Soit*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne de f au point p . On suppose que p est un point d'équilibre hyperbolique, c'est-à-dire qu'aucune valeur propre de A n'a sa partie réelle nulle. Alors, il existe deux ouverts U et V de \mathbb{R}^n contenant respectivement p et 0 , et un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que $h(p) = 0$, et qui envoie les trajectoires de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ bijectivement sur les trajectoires de $\dot{y}(t) = Ay(t)$ dans $V = h(U)$ en gardant l'orientation donnée par le temps t . On dit alors que les flots de f et A sont topologiquement équivalents

1.3 Courbes invariantes et intégrales premières

1.3.1 Intégrales premières

Soit Ω un ouvert du plan de phase et $(x(t), y(t))$ une solution (ou une trajectoire). Notons par $\Delta_{x,y}^\Omega$ l'ensemble

$$\Delta_{x,y}^\Omega = \{t \in \mathbb{R} / (x(t), y(t)) \in \Omega\}.$$

Définition 1.3.1 *L'application $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée intégrale première du système (1.2) sur Ω si elle est constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.2) contenues dans Ω c-a-d*

$$H(x(t), y(t)) = \text{cste}, \quad \forall t \in \Delta_{x,y}^\Omega.$$

Définition 1.3.2 *On dit que le système (1.2) est intégrable sur un ouvert Ω s'il admet une intégrale première sur Ω .*

Définition 1.3.3 *On appelle facteur intégrant du système (1.2) sur Ω associé à une intégrale première H une C^1 -fonction $R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que*

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} + \frac{\partial(RQ)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \text{div}(RX) = 0$$

1.3.2 Courbes invariantes

Définition 1.3.4 *On appelle courbe invariante du système (1.2), toute courbe d'équation $U(x, y) = 0$ du plan de phase pour laquelle il existe une fonction $K = K(x; y)$ appelée co-facteur associée à la courbe invariante, telle que*

$$P \frac{\partial(U)}{\partial x} + Q \frac{\partial(U)}{\partial y} = KU.$$

Cette égalité montre que sur la courbe invariante le gradient $\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, Q \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ de U est orthogonal au champ de vecteurs X , donc en tout point de la courbe invariante le champ de vecteurs est tangent à cette courbe, donc elle est formée de solutions (ou trajectoires) du champ de vecteurs X ; ce qui justifie son appellation. Dans le cas où le système (1.2) est polynomial et possède une courbe invariante $U(x; y) = 0$ algébrique de degré m , le co-facteur K est aussi algébrique et son degré vérifie $\text{deg } K \leq m - 1$.

1.4 Cycles limites

Définition 1.4.1 On appelle cycle limite du système (1.2), toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système.

exemple 1.4.1 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

D'où

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1$$

Pour $r = 1$, on a l'orbite périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(\theta + \theta_0), \sin(\theta + \theta_0))$ avec $\theta(0) = \theta_0$. Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, c'est un cycle limite unique.

1.4.1 Amplitude du cycle limite

C'est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.

Remarque 1.4.1 Pour un cycle limite, la somme des indices des points critiques à l'intérieur de ce cycle limite est égale à 1.

1.4.2 Existence et non-existence de cycle limite

Une condition suffisante de non-existence de solution périodique (et donc de cycle limite) est donnée par :

Théorème 1.4.1 Il n'y a pas de trajectoire fermée dans un domaine simplement connexe Ω du plan de phase dans lequel la divergence $\text{Div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ garde un signe constant.

1.4.3 Cycle limite algébrique

Définition 1.4.2 *Un cycle limite algébrique est un cycle limite qui est contenu dans les zéros fixés d'une courbe algébrique invariante (ovale de la courbe algébrique invariante $U(x, y) = 0$).*

1.5 Bifurcation des trajectoires périodiques

Le terme de bifurcation à été introduit par Poincaré pour décrire les transformations des points d'équilibres d'une famille de systèmes, obtenue en faisant varier un paramètre. Si la nature du point d'équilibre subit un changement soudain lorsque le paramètre varie, on dit que le système subit une bifurcation.

1.5.1 Bifurcation de Hopf

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) \\ \dot{y} = g(x, y, \mu) \end{cases} \quad (1.5)$$

où μ est un paramètre réel qui varie.

Le théorème de bifurcation de Hopf prédit l'apparition de cycle limite autour du point d'équilibre quand la stabilité du point d'équilibre change avec le paramètre. Ce théorème donne les conditions pour lesquelles un cycle limite existe pour ce système.

exemple 1.5.1 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases}$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne au voisinage du point d'équilibre $(0, 0)$ est

$$J(\mu) = Df(0, 0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

1.5. BIFURCATION DES TRAJECTOIRES PÉRIODIQUES

Ses valeurs propres sont $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$.

$\mu^* = 0$ est alors la valeurs de bifurcation. Pour $\mu \leq 0$, $\dot{r} < 0$ $(x, y) = (0, 0)$ est un foyer stable sinon $\dot{r} > 0$ $(x, y) = (0, 0)$ est un foyer instable.

Il y a un changement de stabilité du point critique $(0, 0)$. Or $(x, y) = (\sqrt{\mu} \cos \theta, \sqrt{\mu} \sin \theta)$ est un cycle limite.

Chapitre 2

Sur la théorie de la moyennisation dans le cas périodique

2.1 Introduction

Quand un système d'équations différentielles

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

est linéaire, c'est à dire quand $f(x)$ est linéaire par rapport aux variables $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: $f(x) = Ax$, on peut écrire les solutions du système (2.1) grâce à l'exponentielle de la matrice A :

$$x(t) = e^{At}x(0) \text{ où } e^{At} = \sum_{n \geq 0} \frac{(At)^n}{n!}.$$

Pour pouvoir travailler de manière analytique, il faut utiliser des méthodes perturbatives. la méthode de la moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [7] et Bogoliubov et Mitropolskii (1961) [6]. Elle a été ensuite développée par Verhulst [54], Sanders and Verhulst [55], Malkin (1956) [48], Roseau (1966) [52], Llibre et Buica (2004) [4]. Dans le cas périodique l'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme

standard suivante

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad (2.2)$$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, ε un paramètre petit et f est T -périodique en t , l'équation moyennée associée à (2.2) s'écrit

$$\dot{x} = \varepsilon f^0(x), \quad (2.3)$$

où

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, 0) dt. \quad (2.4)$$

La recherche des racines positives du (2.4) réduit le problème de la détermination des solutions T -périodique de (2.2) qui est en général un problème difficile.

Dans cette section, on présente une introduction à la théorie de la moyennisation du premier et second ordre dans le cas périodique.

2.2 Un premier théorème de moyennisation

On considère le problème à valeur suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.5)$$

avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, x(t))$ et $R(t, x(t), \varepsilon)$ sont T -périodique en t . Le système moyenné associé au système (2.5) est

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t)), \quad y(0) = x_0, \quad (2.6)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, y) d\tau. \quad (2.7)$$

Sous certaines conditions, les points d'équilibre du système (2.6) peuvent produire des solutions périodiques du système (2.5), lesquelles on les résume dans le théorème suivant

Théorème 2.2.1 *Considérons le système (2.5) et supposons que les fonctions vectorielles F , R , $D_x F$, $D_x^2 F$ et $D_x R$ sont continues et bornées par une*

CHAPITRE 2. SUR LA THÉORIE DE LA MOYENNISATION DANS LE
CAS PÉRIODIQUE

constante M indépendante de ε dans $[0, \infty[\times D$ avec $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. De plus, on suppose que F et R sont T -périodique en t avec T indépendant de ε .

a) Si $a \in D$ est un point d'équilibre du système (2.6) tel que

$$\det(D_x f^0(a)) \neq 0, \quad (2.8)$$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $x_\varepsilon(t)$ T -périodique du système (2.5) telle que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow a \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

b) Si le point critique a est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ est unique, hyperbolique et de même stabilité que a .

Le résultat suivant est dû à Lins, de Melo et Pugh [33]. La preuve donnée où a été proposée par Llibre, elle est facile et plus courte que la preuve initiale donnée par les auteurs mentionnés.

exemple 2.2.1 *Considérons le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon (a_1 x + \dots + a_n x^n), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.9)$$

En coordonnées polaire (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, (2.9) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{k=1}^n a_k r^k \cos^{k+1} \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \sum_{k=1}^n a_k r^{k-1} \cos^k \theta, \end{cases}$$

lequel est équivalent à l'équation

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \sum_{k=1}^n a_k r^k \cos^{k+1} \theta + O(\varepsilon^2).$$

De (2.7) on obtient

$$\begin{aligned} f^0(r) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k r^k \int_0^{2\pi} \cos^{k+1} \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ est impaire}}}^n a_k b_k r^k = p(r), \end{aligned}$$

où $b_k = \int_0^{2\pi} \cos^{k+1} \theta d\theta \neq 0$ si k est impaire. Le polynôme $p(r)$ a au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ racines positives, on peut choisir les coefficients a_k avec k impaire dans le but d'avoir exactement $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ racines positives pour $p(r)$, si de plus la condition (2.8) est satisfaite pour les $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ racines positives on déduit que (2.9) admet $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ cycles limites hyperboliques.

2.3 Un deuxième théorème de moyennisation

Théorème 2.3.1 *On considère les deux problèmes à valeurs initiales*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 G(t, x(t)) + \varepsilon^3 R(t, x(t), \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.10)$$

et

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t)) + \varepsilon^2 f^{10}(y(t)) + \varepsilon^2 g^0(y(t)), \quad y(0) = x_0, \quad (2.11)$$

avec $F, G : [0, \infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}$ et $R : [0, \infty[\times D \times]0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$, D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R} , les fonctions F , G et R sont des fonctions périodiques de période T par rapport à la variable t , et

$$f^1(t, x) = \frac{\partial F}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(y),$$

où f^0 est donné par (2.7) et

$$y^1(t, x) = \int_0^t [F(\tau, x) - f^0(x)] d\tau + z(x),$$

avec $z(x)$ une fonction continuellement différentiable telle que la moyenné de y^1 est nulle. f^0 , f^{10} et g^0 sont les fonctions moyennées de F , f^1 et G respectivement.

Supposons que

- 1) $\frac{\partial F}{\partial x}$, G et R sont lipchitziennes en x et toutes ces fonctions sont continues sur leurs domaines de définition.
 - 2) $|R(t, x, \varepsilon)|$ est uniformément bornées par une constante dans $[0, \frac{L}{\varepsilon}[\times D \times]0, \varepsilon_0]$.
 - 3) T est indépendant de ε .
 - 4) $y(t)$ appartient à D dans la durée $\frac{1}{\varepsilon}$.
- Alors, dans l'échelle de temps $\frac{1}{\varepsilon}$ on a

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les solutions de (2.10), (2.11). Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, de plus $f^0(y) = 0$, alors on a le résultat suivant.

Corollaire 2.3.1 (a) *Si p est le point d'équilibre de*

$$f^{10}(y) + g^0(y) = 0$$

tel que

$$\frac{\partial}{\partial y} [f^{10}(y) + g^0(y)]_{y=p} \neq 0,$$

alors, il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2.10) telle que

$$\phi(t, \varepsilon) \rightarrow p \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

(b) *Si p est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $\phi(t, \varepsilon)$ de l'équation (2.10) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .*

2.4 Un troisième théorème de moyennisation

On considère le problème de bifurcation des solutions T -périodique du système différentiel

$$\dot{x}(t) = F_0(x(t), t) + \varepsilon F_1(x(t), t) + \varepsilon^2 F_2(x(t), t, \varepsilon), \quad (2.12)$$

avec ε suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^2 , T -périodique en t et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x(t)), \quad (2.13)$$

a une sous variété de dimension k de solutions périodiques

Soit $x(t, z)$ la solution du système non perturbé (2.13) telle que $x(0, z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (2.13) le long de la solution $x(t, z)$ s'écrit

$$\dot{y} = D_x F_0(x(t, z), t) y. \quad (2.14)$$

On note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.14) et par $\zeta : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées; i.e. $\zeta(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

2.4. UN TROISIÈME THÉORÈME DE MOYENNISATION

Théorème 2.4.1 [49, 52, 5] *Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction C^2 . On suppose que*

1) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ est T -périodique.

2) Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.14) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ contient dans le haut coin droit de la matrice nulle de dimension $k \times (n - k)$ et dans le bas coin droit une matrice $\Delta_\alpha ((n - k) \times (n - k))$ avec $\det \Delta_\alpha \neq 0$. On considère la fonction $F : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ définie par :

$$F(\alpha) = \zeta \left(\int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(\tau) F_1(x(\tau, z_\alpha), \tau) d\tau \right). \quad (2.15)$$

S'il existe $a \in V$ telle que $F(a) = 0$ avec $\det \left(\left(\frac{dF}{d\alpha} \right) (a) \right) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\sigma(t, \varepsilon)$ du système (2.12) telle que $\sigma(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si $k = n$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.1 *On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $\bar{V} \subset \Omega$ tel que pour chaque $z \in \bar{V}$, la solution $x(t, z)$ est T -périodique et on considère la fonction $F : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$*

$$F(\alpha) = \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t, z) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt. \quad (2.16)$$

S'il existe $a \in V$ tel que $F(a) = 0$ avec $\det \left(\left(\frac{dF}{d\alpha} \right) (a) \right) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\sigma(t, \varepsilon)$ du système (2.11) telle que $\sigma(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 2.4.1 *Le système différentiel polynômial homogène*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon P(x, y), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon Q(x, y). \end{cases} \quad (2.17)$$

avec $\varepsilon = 0$ a un centre global à l'origine. Si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux polynômes de degré au plus m , alors le système différentiel polynômial homogène (2.17) a au plus $\left[\frac{m-1}{2} \right]$ cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre global. $[\cdot]$ désigne la fonction partie entière.

Preuve. En écrivant le système $(2.17)_{\varepsilon=0}$ en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3 \sin 2\theta, \\ \dot{\theta} = r^2. \end{cases} \quad (2.18)$$

Le système (2.18) implique l'équation différentielle

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sin 2\theta. \quad (2.19)$$

La solution $r(\theta, z)$ telle que $r(0, z) = z$ est

$$r(\theta, z) = ze^{-\sin^2 \theta}. \quad (2.20)$$

Toutes les solutions de (2.19) respectivement $(2.17)_{\varepsilon=0}$ sont 2π -périodiques, c'est pourquoi l'origine du (2.17) est un centre global.

$P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux polynômes de degré au plus m donc

$$P(x, y) = \sum_{j=0}^m p_j(x, y), \quad Q(x, y) = \sum_{j=0}^m q_j(x, y),$$

avec $p_j(x, y)$ et $q_j(x, y)$ sont les parties homogènes de degré j de $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ respectivement. Le système $(2.17)_{\varepsilon=0}$ en coordonnée polaire implique l'équation différentielle

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sin 2\theta + \varepsilon F_1(\theta, r) + o(\varepsilon^2), \quad (2.21)$$

avec

$$F_1(\theta, r) = \sum_{j=0}^m r^j - 2 [(\cos \theta + \cos 3\theta) p_j(\cos \theta, \sin \theta) + (3 \sin \theta + \sin 3\theta) q_j(\cos \theta, \sin \theta)].$$

La matrice fondamentale $M(\theta)$ de (2.21) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution 2π -périodique (2.20) telle que $M(0) = 1$ est

$$M(\theta) = e^{-\sin^2 \theta}.$$

On remarque qu'elle est indépendante de l'orbite périodique $r(\theta, z)$ c'est à dire elle est indépendante de la condition initiale z , de plus $M^{-1}(\theta) = e^{\sin^2 \theta}$.

2.4. UN TROISIÈME THÉORÈME DE MOYENNISATION

Appliquons le théorème 2.4.1 à l'équation différentielle (2.21) en prenant $k = n = 1$ et les notions $x = r$, $t = \theta$, $F_0(\theta, r) = -r \sin 2\theta$ et $\Omega =]0, +\infty[$. Le V et α du théorème 2.4.1 sont

$$V = \{r : 0 < r < \rho\},$$

pour $\rho > 0$, $\alpha = z \in V$, alors toutes les conditions du théorème 2.4.1 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha \in V$ de la fonction $F(\alpha)$ donnée dans (2.16)

$$F(z) = \sum_{j=0}^m z^{j-2} l_j,$$

$$\text{où } l_j = \int_0^{2\pi} e^{(3-j)\sin^2\theta} [(\cos\theta + \cos 3\theta) p_j(\cos\theta, \sin\theta) + (3\sin\theta + \sin 3\theta) q_j(\cos\theta, \sin\theta)] d\theta.$$

L'intégrale $l_j = 0$ si j est paire, donc si $m = 2\lambda + 1$ en a

$$F(z) = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\lambda} z^{2j} l_{2j+1}.$$

Le polynôme $F(z)$ au plus peut avoir $\lambda = \left[\frac{m-1}{2} \right]$ racines réelles positives.

Si $m = 2\lambda$ alors

$$F(z) = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\lambda-1} z^{2j} l_{2j+1}.$$

Même chose, le polynôme $F(z)$ au plus peut avoir $\lambda - 1 = \left[\frac{m-1}{2} \right]$ racines réelles positives. Donc le système (2.17) possède au plus $\left[\frac{m-1}{2} \right]$ cycles limites.

■

Chapitre 3

Cycles limites des systèmes quadratiques

3.1 Introduction

Il y a un peu plus d'un siècle, H. Poincaré donnait dans son célèbre mémoire [35], la définition d'un cycle limite pour un champ de vecteurs

$$V = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.1)$$

de \mathbb{R}^2 . Un cycle est une trajectoire périodique de V ; c'est un cycle limite si son application de retour f n'est pas l'identité. Un cycle limite est alors un cycle isolé dans l'ensemble des cycles. Cette propriété caractéristique fut certainement une des motivations de la question de 16^{ième} problème de Hilbert lorsque P et Q sont des polynômes de degré $n \geq 2$.

Notons que pour le cas $n = 1$, le système (3.1) est un système linéaire peut avoir des orbites périodiques mais n'a pas de cycle limites. Dans ce chapitre nous étudions le cas $n = 2$. Le système (3.1) est un système quadratique de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Une variété de problèmes physiques importants conduisent à des systèmes de ce type. Par exemple, l'équation de Emden-Fowler de l'astrophysique [12]

$$(\zeta^2 \eta')' + \zeta^\lambda \eta^n = 0,$$

est transformée par le changement de variables

$$x = \frac{\zeta \eta'}{\eta}, \quad y = \frac{\zeta^{\lambda-1} \eta^n}{\eta'}, \quad t = \ln |\zeta|,$$

au système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1+x+y), \\ \dot{y} = y(\lambda+1+x+y). \end{cases}$$

De même, l'équation de Blasius de la mécanique des fluides [61]

$$(\zeta^2 \eta')' + \zeta^\lambda \eta^n = 0,$$

est transformée par le changement de variables

$$x = \frac{\eta \eta'}{\eta''}, \quad y = \frac{\eta'^2}{\eta \eta''}, \quad t = \ln |\eta'|,$$

au système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(1+x+y), \\ \dot{y} = y(2+x-y). \end{cases}$$

Le premier exemple d'un système quadratique possédait un cycle limite a été donnée en 1929 par le physicien Sommerfeld. En 1939, Bautin a annoncé que $H(2) \geq 3$. La preuve complète est apparue en 1952 [3]. En 1955 Petrovski et Landis [46] proposaient une méthode pour calculer $H(2)$ et obtenaient $H(2) = 3$. Plus tard, Yulij Ilyashenko [24] en 1969 a trouvé une erreur dans ce résultat.

L. Chen et M. Wang [13]; S. Shi [57] ont donné des exemples des systèmes $(3, 2)$ avec quatre cycles limites. En 1984 Quin montrait que $H(2) = 4$ [58]. Quatre ans plus tard, Shi Songling prouvait que $H(2) \geq 4$: Récemment Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Leonov G.A. [27] ont donne une classe de systèmes quadratiques ayant 4 cycles limites.

Soit C un cycle limite du système (3.2). A l'intérieur de C , il existe un seul point d'équilibre de type foyer car sans intérieur est convexe. Le cycle limite ne peut pas entouré un point d'équilibre de type noeud.

Le nombre maximal des cycles limites générés par un foyer où un centre est 3. Bautin a montré ce résultat par une perturbation quadratique d'un point d'équilibre. Tous ces dernier résultat sont dans [29]

3.2 Classification des systèmes quadratiques selon le nombre de points d'équilibres

3.2.1 Point d'équilibre d'un système quadratique

(x_0, y_0) est un point d'équilibre du système (3.2) s'il est solution du système algébrique

$$\begin{cases} a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 = 0, \\ b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

La distribution et la caractérisation des points d'équilibres de (3.2) ont été étudiées par de nombreux auteurs.

Le système (3.2) avec quatre points d'équilibres simples

Le système algébrique (3.3) a quatre racines simples distincts si et seulement si

$$\mu \neq 0, \quad D < 0, \quad R > 0 \text{ et } S < 0,$$

où μ, D, R, T et S sont données dans [1].

Dans ce cas, par une transformation affine, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y - a_1x^2 + 2d_1xy - b_1y^2, \\ \dot{y} = a_2x + b_2y - a_2x^2 + 2d_2xy - b_2y^2. \end{cases}$$

Le système (3.2) avec un point d'équilibre double et deux points d'équilibres simples

Le système algébrique (3.3) a une racine double et deux racines simples distincts si et seulement si

$$\mu \neq 0, \quad D = 0 \text{ et } T < 0.$$

Dans ce cas, par une transformation affine, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + ua_1y - a_1x^2 + 2d_1xy - ua_1y^2, \\ \dot{y} = a_2x + ua_2y - a_2x^2 + 2d_2xy - ua_2y^2. \end{cases}$$

Dans se cas les points d'équilibres sont $M_1(0, 0)$ de multiplicité 2, $M_1(1, 0)$ et $M_2(0, 1)$.

3.2. CLASSIFICATION DES SYSTÈMES QUADRATIQUES SELON LE NOMBRE DE POINTS D'ÉQUILIBRES

Le système (3.2) avec un point d'équilibre double et deux points d'équilibres complexes

Le système algébrique (3.3) a une racine double et deux racines complexes si et seulement si

$$\mu \neq 0, D = 0 \text{ et } T > 0.$$

Dans ce cas, par une transformation affine, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = mpx + mqy + c_1x^2 - mqty + (c_1 + mp)y^2, \\ \dot{y} = npy + nqy + c_2x^2 - nqxy + (c_1 + np)y^2. \end{cases}$$

Le système (3.2) avec un point d'équilibre simple de multiplicité 4

Le système algébrique (3.3) a une racine simple de multiplicité 4 si et seulement si

$$\mu \neq 0, D = T = P = R = 0.$$

Dans ce cas, par une transformation affine, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + c_1x^2 + 2d_1xy + k_1y^2, \\ \dot{y} = a_2x + c_2x^2 + 2d_2xy + k_2y^2. \end{cases}$$

Le système (3.2) avec trois points d'équilibres simples

Le système algébrique (3.3) a trois racines simples si et seulement si

$$\mu = 0, D < 0 \text{ et } R \neq 0.$$

Dans ce cas, par une transformation affine, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y + c_1x^2 + 2d_1xy, \\ \dot{y} = a_2x + b_2y + c_2x^2 + 2d_2xy. \end{cases}$$

Le système (3.2) avec un point d'équilibre simple de multiplicité 3

Le système algébrique (3.3) a une racines simples de multiplicité 3 si et seulement si

$$\mu = D = P = 0 \text{ et } R \neq 0.$$

Dans ce cas, par une transformation affine, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = mc_1y + c_1x^2 + 2d_1xy, \\ \dot{y} = mc_2y + c_2x^2 + 2d_2xy. \end{cases}$$

Système (3.2) possédant deux points d'équilibres simples

Le système algébrique (3.3) a deux racines simples si et seulement si

$$\mu = R = 0, \quad P \neq 0 \text{ et } U \neq 0,$$

dans ce cas, par une transformation affine, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y - a_1x^2 + 2ma_1xy, \\ \dot{y} = a_2x + b_2y - a_2x^2 + 2ma_2xy. \end{cases}$$

3.3 La classification de Ye d'un système quadratique

Dans [14], il y a deux auteurs qui ont classés les systèmes quadratiques qui peuvent avoir des cycles limites selon les 3 familles suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma x - y + lx^2 + mxy + ny^2, \\ \dot{y} = x(1 + ax + by). \end{cases}$$

comme suit

$$\begin{aligned} &\text{classe (I) si } a = b = 0, \\ &\text{classe (II) si } a \neq 0 \text{ et } b = 0, \\ &\text{classe (III) si } b \neq 0. \end{aligned}$$

L. Chen and Y. Ye ont donné dans [14] des conditions assurant que $H(2) \leq 1$ pour ces classes du système. Cherkas et Zhilevich [10], [11] et Ryckov [53] ont prouvé que les systèmes quadratiques de classe (III) avec $a = 0$ ont au plus un cycle limite.

3.4 Système quadratique et cycle limite algébrique

Les systèmes quadratiques qui ont un cycle limite algébrique de degré 4 sont résumés dans le théorème suivant [9].

Théorème 3.4.1 *Après un changement de variables affine les seuls systèmes quadratiques ayant un cycle limite algébrique de degré 4 sont*

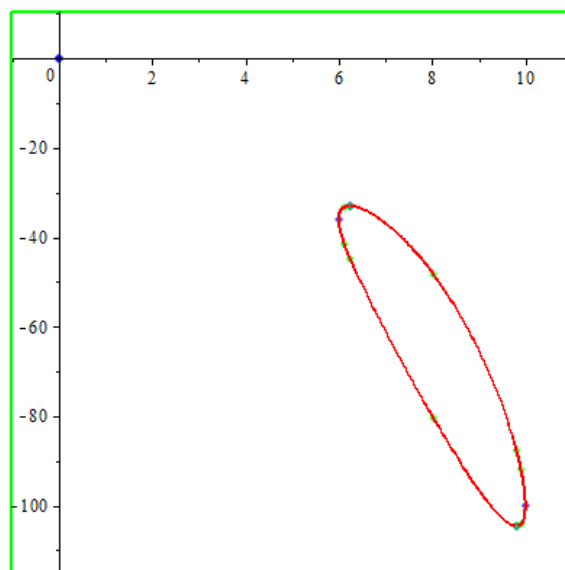
3.4. SYSTÈME QUADRATIQUE ET CYCLE LIMITE ALGÈBRIQUE

(a) Le système de Yablonskii

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4abcx - (a+b)y + 3(a+b)cx^2 + 4xy, \\ \dot{y} &= (a+b)abx - 4abcy + 4\left[abc^2 - \frac{3}{2}(a+b)^2 + 4ab\right]x^2 + 8(a+b)cxy + 8y^2,\end{aligned}$$

avec $abc \neq 0, a \neq b, ab > 0$ et $4c^2(a-b)^2 + (3a-b)(a-3b) < 0$. Ce système possède la courbe algébrique invariante

$$(y + cx^2)^2 + x^2(x-a)(x-b) = 0,$$



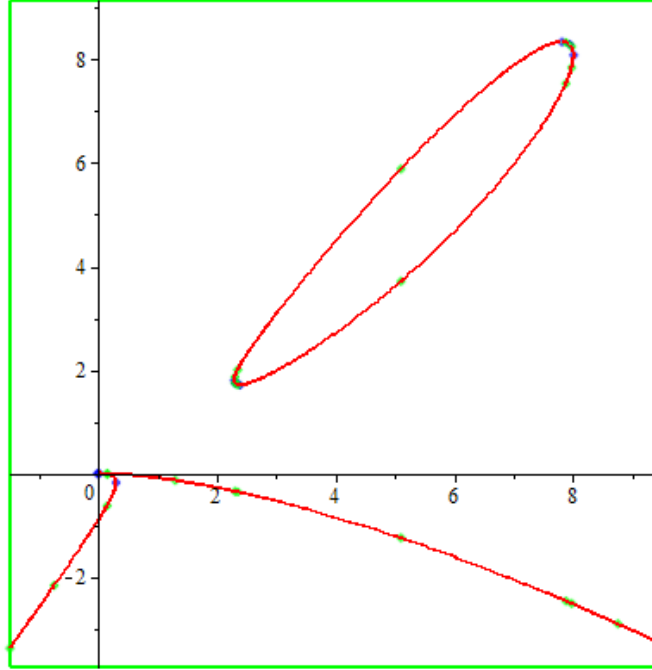
le cycle limite algébrique de degré 4

(b) Le système de Filipstov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 6(1+a)x + 2y - 6(2+a)x^2 + 12xy, \\ \dot{y} &= 15(1+a)y + 3a(1+a)x^2 - 2(12+5a)xy + 16y^2,\end{aligned}$$

avec $0 < a < \frac{3}{13}$. Ce système possède la courbe algébrique invariante

$$3(1+a)(ax^2 + y)^2 + 2y^2[2y - 3(1+a)x] = 0,$$



(c) Le système de Chavarriga

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 5x + 6x^2 + 4(1+a)xy + ay^2, \\ \dot{y} &= x + 2y + 4xy + (2+3a)y^2,\end{aligned}$$

avec $\frac{-71+17\sqrt{17}}{32} < a < 0$. Ce système possède la courbe algébrique invariante

$$x^2 + x^3 + x^2y + 2axy^2 + 2axy^3 + a^2y^4 = 0,$$

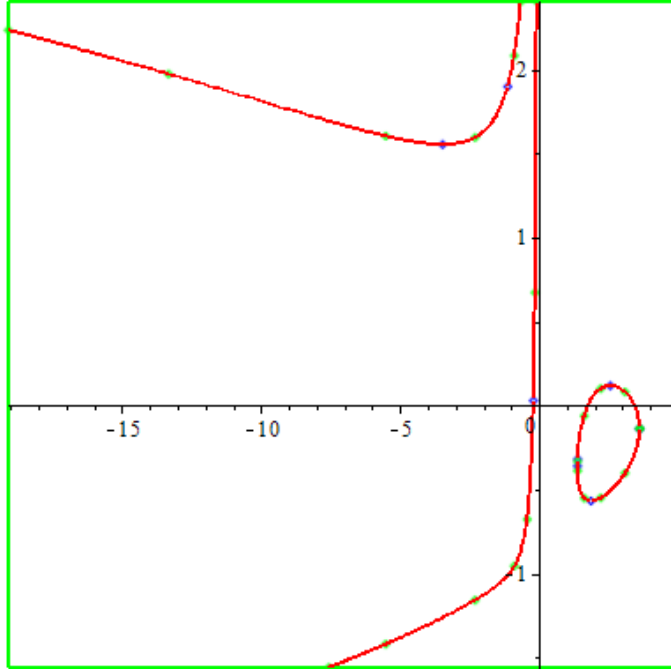
de degré 4 ayant trois composantes, l'une est un ovale et chacun des autres est homéomorphe à droite. Chacun de ces deux derniers composants contient un point singulier du système.

Théorème 3.4.2 (d) *Le système*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2(1 + 2x - 2ax^2 + 6xy), \\ \dot{y} &= 8 - 3a - 14ax - 2axy - 8y^2,\end{aligned}$$

avec $0 < a < \frac{1}{4}$. Ce système possède la courbe algébrique invariante

$$\frac{1}{4} + x - x^2 + ax^3 + xy + x^2y^2 = 0,$$



3.5 Distributions des cycles limites d'une classe des systèmes quadratiques

En 1959, C. Tung [59] découvrait une propriété importante des systèmes quadratiques : une orbite fermée est convexe. Ces systèmes peuvent avoir seulement des cycles limites entourant un point d'équilibre. Par conséquent, il y a uniquement les distributions n , (n_1, n_2) des cycles limites de système (3.2) où $n \in \mathbb{N}$ (respectivement $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ avec $n_1 + n_2 > 0$) le nombre des cycles limites entourant un foyer (respectivement les deux foyer) de (3.2).

Les distributions suivantes des cycles limites de (3.2) sont connues :

1. 1 et $(1, 0)$, $(1, 1)$. [6, 7, 15, 17, 19, 20]
2. 2 et $(2, 0)$. [18]
3. 3 et $(3, 0)$, $(2, 1)$ et $(2, 1)$. [2].

Le tableau suivant résume les principaux résultats de [3]. Différentes configurations des points d'équilibres compatibles avec les distributions 3 et $(3, 0)$

du système quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + xy, \\ \dot{y} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + ay^2. \end{cases}$$

où $a_{00} = a_{01} + a_{11} - (a_{10} + a_{20} + a)$.

N^0	a	a_{20}	a_{11}	a_{01}	a_{10}	Les points d'équilibres	Distributions des cycles limites
1	3	-12	-1.398	8.4	15.28	$1F + 1N + 2S_\infty + 1N_\infty$	3
2	1.5	-15	0.79993	3.2	9.17	$2F + 2S_\infty + 1N_\infty$	(3, 0)
3	-2	-12	10.999	-14	-26.1	$1F + 3S_\infty + 3N_\infty$	3
4	-2	-1	9.49965	-12.5	6.955	$1F + 1S + 2N_\infty + 1S_\infty$	3
5	-4	-1	13.9987	-21	12.4	$1F + 1N + 2S + 2N_\infty + 1S_\infty$	3
6	5	-50	-5.49995	16.5	76.45	$1F + 2N + 1S + 1N_\infty + 2S_\infty$	3
7	$\frac{8}{11}$	-12	2.1502	$\frac{67}{220}$	-26.5	$2F + 1S_\infty$	(3, 1)
8	1.04	-120	1.51997	1.56	-79.6	$2F + 2S_\infty + 1A_\infty$	(3, 1)

Notons par F , N , S et A respectivement foyer, nœud, selle et anti-selle. L'existence d'un nombre donné exact de cycles limites est prouvée en utilisant la fonction de Dulac.

3.6 Système quadratique ayant quatre cycles limites

N.V. Kuznetsov, O.A. Kuznetsova et G.A. Leonov ont donné dans leur article [27] publié récemment, un système quadratique ayant quatre cycles limites. Parmi ces quatre cycles limites, on trouve de large et de faible amplitudes. Les principaux résultats obtenus dans ce travail se résument dans le théorème suivant

Théorème 3.6.1 *Le système quadratique*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy + y, \\ \dot{y} = \alpha_2x + \beta_2y + b_2xy + a_2x^2 + c_2y^2. \end{cases}$$

a quatre cycles limites si les conditions suivantes

$$c_2 \in \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad b_2 \in (1, 3), \quad 4a_2(c_2 - 1) > (b_2 - 1)^2, \quad b_2c_2 > 1,$$

$$\beta_2 \in (0, \varepsilon), \quad \alpha_2 \in \left(\frac{a_2(2 - b_2)}{b_2c_2 - 1}, \frac{a_2(2 - b_2)}{b_2c_2 - 1} + \delta\right), \quad 1 \gg \delta \gg \varepsilon \geq 0$$

3.6. SYSTÈME QUADRATIQUE AYANT QUATRE CYCLES LIMITES

sont satisfaites.

3.7 La forme normale de Bautin d'un système quadratique

Dans tout ce qui suit l'étude sera basée sur les systèmes quadratiques qui sont écrits sous la forme normale dite de Bautin

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases} \quad (3.4)$$

or encore

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by + P(x, y) \\ \dot{y} = bx + ay + Q(x, y) \end{cases} ,$$

avec $b \neq 0$ et $P(x, y), Q(x, y)$ sont deux polynômes de degré ≤ 2 . L'origine est le seul point d'équilibre.

Le système linéarisé

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2\lambda_3 x + (2\lambda_2 + \lambda_5)y & -1 + (2\lambda_2 + \lambda_5)x + 2\lambda_6 y \\ 1 + 2\lambda_2 x + (2\lambda_3 + \lambda_4)y & \lambda_1 + (2\lambda_3 + \lambda_4)x - 2\lambda_2 y \end{pmatrix},$$

au point $(0, 0)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont

$$V_{1,2} = \lambda_1 \pm i.$$

Comme les valeurs propres sont complexes alors $(0, 0)$ est un foyer. Si $\lambda_1 < 0$, $(0, 0)$ est un foyer stable et si $\lambda_1 > 0$, $(0, 0)$ est un foyer instable. Nous savons qu'

un foyer pour le système linéarisé reste un foyer pour le système non linéaire. La somme des indices est 1 donc c'est possible qu'il y a un cycle limite qui contient l'origine du système (3.4).

3.7.1 Transformation en l'équation d'Abel

En coordonnées polaires

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta)$$

le système (3.4) devient

3.7. LA FORME NORMALE DE BAUTIN D'UN SYSTÈME QUADRATIQUE

$$\begin{cases} \dot{r} = \lambda_1 r + a(\theta)r^2, \\ \dot{\theta} = 1 + b(\theta)r, \end{cases} \quad (3.5)$$

où

$$\begin{aligned} a(\theta) &= -\lambda_3 \cos^3(\theta) - \lambda_2 \sin^3(\theta) + (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \\ &\quad \cos(\theta) \sin^2(\theta)(2\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6), \\ b(\theta) &= \lambda_2 \cos^3(\theta) + (3\lambda_3 + \lambda_4) \cos^2(\theta) \sin(\theta) - (3\lambda_2 + \lambda_5) \cos(\theta) \sin^2(\theta) - \lambda_6 \sin^3(\theta). \end{aligned}$$

On remarque que $a(\theta), b(\theta)$ sont deux polynômes homogènes de degré $k = 3$ en les variables $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Dans la région $R = \{(r, \theta) : 1 + rb(\theta) > 0\}$ le système différentiel (3.4) est équivalent à l'équation différentielle

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda_1 r + a(\theta)r^2}{1 + b(\theta)r}. \quad (3.6)$$

L'équation différentielle (3.6) n'est pas sous la forme de l'équation du théorème 2.3.1 de la méthode de moyennisation. Pour la mettre sous cette forme, on utilise la transformation de Cherkas

$$(r, \theta) \rightarrow (\rho, \theta) \quad \text{où} \quad \rho = \frac{r}{1 + b(\theta)r}.$$

Dans se cas

$$r = \frac{\rho}{1 - b(\theta)\rho}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \left[\frac{r}{1 + b(\theta)r} \right] \\
 &= \frac{1}{[1 + rb(\theta)]^2} \left[\frac{dr}{d\theta} (1 + rb(\theta)) - \frac{d}{d\theta} (1 + rb(\theta)) r \right] \\
 &= \frac{1}{[1 + rb(\theta)]^2} \left[\frac{\lambda_1 r + a(\theta)r^2}{1 + b(\theta)r} [1 + rb(\theta)] - b'(\theta)r^2 - \frac{\lambda_1 r + a(\theta)r^2}{1 + b(\theta)r} rb(\theta) \right] \\
 &= \frac{1}{[1 + rb(\theta)]^2} \left[\lambda_1 r + a(\theta)r^2 - b'(\theta)r^2 - \lambda_1 \frac{r^2}{1 + b(\theta)r} b(\theta) - \frac{a(\theta)b(\theta)r^3}{1 + b(\theta)r} \right] \\
 &= \frac{1}{[1 + rb(\theta)]^2} [\lambda_1 r + a(\theta)r^2 - b'(\theta)r^2 - \lambda_1 rb(\theta)\rho] - a(\theta)b(\theta)\rho^3 \\
 &= \frac{\lambda_1 r}{[1 + rb(\theta)]^2} + a(\theta)\rho^2 - b'(\theta)\rho^2 - \frac{\lambda_1 \rho^2 b(\theta)}{1 + rb(\theta)} - a(\theta)b(\theta)\rho^3 \\
 &= \lambda_1 \rho \frac{1}{1 + rb(\theta)} + \left(a(\theta) - b'(\theta) - \frac{\lambda_1 b(\theta)}{1 + rb(\theta)} \right) \rho^2 - a(\theta)b(\theta)\rho^3 \\
 &= \lambda_1 \rho \frac{\rho}{r} + \left[a(\theta) - b'(\theta) - \lambda_1 b(\theta) \frac{\rho}{r} \right] \rho^2 - a(\theta)b(\theta)\rho^3 \\
 &= \lambda_1 \frac{\rho^2}{r} + \left[a(\theta) - b'(\theta) \right] \rho^2 - \left[\lambda_1 \frac{b(\theta)}{r} + a(\theta)b(\theta) \right] \rho^3 \\
 &= \lambda_1 \rho^2 \left[\frac{1 - b(\theta)\rho}{\rho} \right] + \left[a(\theta) - b'(\theta) \right] \rho^2 - \left[\lambda_1 b(\theta) \frac{1 - b(\theta)\rho}{\rho} + a(\theta)b(\theta) \right] \rho^3 \\
 &= \lambda_1 \rho - \lambda_1 b(\theta)\rho^2 + \left[a(\theta) - b'(\theta) \right] \rho^2 - \left[\frac{\lambda_1 b(\theta)}{\rho} - \lambda_1 b(\theta)^2 + a(\theta)b(\theta) \right] \rho^3 \\
 &= \lambda_1 \rho - 2\lambda_1 b(\theta)\rho^2 + \left[a(\theta) - b'(\theta) \right] \rho^2 + [\lambda_1 b(\theta) - a(\theta)] b(\theta)\rho^3 \\
 &= \lambda_1 \rho + \left[a(\theta) - 2\lambda_1 b(\theta) - b'(\theta) \right] \rho^2 + [\lambda_1 b(\theta) - a(\theta)] b(\theta)\rho^3
 \end{aligned}$$

alors

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \lambda_1 \rho + \left[a(\theta) - 2\lambda_1 b(\theta) - b'(\theta) \right] \rho^2 + [\lambda_1 b(\theta) - a(\theta)] b(\theta)\rho^3. \quad (3.7)$$

C'est un cas particulier de l'équation différentielle d'Abel. La fonction $r = r(\theta)$ est une solution périodique de (3.5) autour de l'origine si et seulement si $\rho(\theta) = \frac{r(\theta)}{1 + b(\theta)r(\theta)}$ est une solution périodique de l'équation (3.7).

Appliquons la méthode de la moyennisation du second ordre dans le but d'étudier les solutions périodiques qui bifurquent de l'origine du système

3.7. LA FORME NORMALE DE BAUTIN D'UN SYSTÈME QUADRATIQUE

quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2 + \varepsilon^2 a_1 x, \\ \dot{y} = x + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2 + \varepsilon^2 a_1 y, \end{cases} \quad (3.8)$$

en $\varepsilon = 0$ et quand $a_1 \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) > 0$.

3.7.2 Etude du système

L'origine est le seul point critique de (3.8), le système linéarisé au voisinage de point $(0, 0)$ est donné par

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 a_1 & -1 \\ 1 & \varepsilon^2 a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon^2 a_1 \pm i.$$

Pour $a_1 = 0$ le système linéarisé a deux valeurs propres imaginaires pures $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ donc l'origine est un centre si non c'est un foyer qui change de stabilité selon le signe de a_1 . Il y a un renversement dans la stabilité pour certaines valeurs de a_1 . Il va y avoir une apparition d'un cycle limite c'est la bifurcation de Hopf.

Proposition 3.7.1 *Si $a_1 \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) > 0$, alors pour $\varepsilon = 0$ un cycle limite bifurque de l'origine du système (3.8), de plus pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ce cycle limite en coordonnées polaires est donné par*

$$r(\theta, \varepsilon) = \varepsilon \sigma_0 + \varepsilon^2 c(\theta) \sigma_0^2 + 0(\varepsilon^2)$$

où $\sigma_0 = 2\sqrt{\frac{2a_1}{\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6)}}$ et

$$c(\theta) = \frac{-1}{12} [3\lambda_5 \cos(\theta) + (4\lambda_2 + \lambda_5) \cos(3\theta) + 3(\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_6) \sin(\theta) + (3\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) \sin(3\theta)].$$

Preuve. On pose $\lambda_1 = a_1 \varepsilon^2$ dans (3.4) en obtient le système (3.8), Le changement de variable $\rho = \sigma \varepsilon$ sert à mettre l'équation différentielle d'Abel sous

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DES SYSTÈMES QUADRATIQUES

la forme de l'équation différentielle (2.10) du théorème 2.3.1 dans le but d'appliquer la méthode de la moyennisation. (3.8) devient

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon \frac{d\sigma}{d\theta} \\ &= b(\theta) [a_1\varepsilon^2 b(\theta) - a(\theta)] \sigma^3 \varepsilon^3 + [a(\theta) - b'(\theta) - 2a_1\varepsilon^2 b(\theta)] \sigma^2 \varepsilon^2 + a_1\varepsilon^3 \sigma\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\theta} &= b(\theta) [a_1\varepsilon^2 b(\theta) - a(\theta)] \sigma^3 \varepsilon^2 + [a(\theta) - b'(\theta) - 2a_1\varepsilon^2 b(\theta)] \sigma^2 \varepsilon + a_1\varepsilon^2 \sigma \\ &= [a(\theta) - b'(\theta)] \sigma^2 \varepsilon + b(\theta)^2 \varepsilon^4 a_1 \sigma^3 - a(\theta) b(\theta) \sigma^3 \varepsilon^3 - 2a_1 \varepsilon^3 b(\theta) + a_1 \varepsilon^2 \sigma \\ &= [a(\theta) - b'(\theta)] \sigma^2 \varepsilon + [a_1 \sigma - a(\theta) b(\theta) \sigma^3] \varepsilon^2 + [b(\theta)^2 \varepsilon a_1 \sigma^3 - 2a_1 \sigma^2 b(\theta)] \varepsilon^3 \\ &= [a(\theta) - b'(\theta)] \sigma^2 \varepsilon + [a_1 - a(\theta) b(\theta) \sigma^2] \sigma \varepsilon^2 + [\varepsilon b(\theta) \sigma - 2] \sigma^2 a_1 b(\theta) \varepsilon^3\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = [a(\theta) - b'(\theta)] \sigma^2 \varepsilon + [a_1 - a(\theta) b(\theta) \sigma^2] \sigma \varepsilon^2 + [-2 + \varepsilon b(\theta) \sigma] \sigma^2 a_1 b(\theta) \varepsilon^3.$$

Avec les notations introduites dans le théorème 2.3.1 du chapitre 2, on a

$$\begin{aligned}F(\theta, \sigma) &= [a(\theta) - b'(\theta)] \sigma^2, \\ G(\theta, \sigma) &= a_1 \sigma - a(\theta) b(\theta) \sigma^3, \\ R(\theta, \sigma, \varepsilon) &= -2\sigma^2 a_1 b(\theta) + \varepsilon a_1 b(\theta)^2 \sigma^3,\end{aligned}$$

F, G et R vérifiées les hypothèses de théorème 2.2.1 avec $T = 2\pi$, de plus $f^0(\sigma) = f^{10} = 0$

$$\begin{aligned}g^0(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta, \sigma) d\theta \\ &= \frac{1}{8} \sigma (8a_1 + \lambda_5(\lambda_6 - \lambda_3) \sigma^2)\end{aligned}$$

Par Maple 16 on calcule $f^0(\sigma)$, $y^1(\theta, \sigma)$, $f^{10}(\sigma)$ et $g^0(\sigma)$. D'après le corollaire 2.2.1, le racine positif est $\sigma_0 = 2\sqrt{\frac{2a_1}{\lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6)}}$ si $a_1 \lambda_5 (\lambda_3 - \lambda_6) > 0$. De plus

$$\left. \frac{\partial}{\partial \sigma} g^0(\sigma) \right|_{\sigma=\sigma_0} = -2a_1 \neq 0.$$

3.7. LA FORME NORMALE DE BAUTIN D'UN SYSTÈME QUADRATIQUE

Une solution 2π périodique $\sigma(\theta, \varepsilon)$ est donnée par

$$\sigma(\theta, \varepsilon) = \sigma_0 + \varepsilon y^1(\theta, \sigma_0) + O(\varepsilon^2)$$

tel que

$$\sigma(\theta, \varepsilon) \rightarrow \sigma_0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Retournons à l'équation différentielle d'Abel correspondante au système (3.5), il a une solution 2π -périodique donnée par

$$\rho(\theta, \varepsilon) = \sigma(\theta, \varepsilon) \varepsilon \text{ au voisinage de } \rho_0 = \sigma_0 \varepsilon$$

avec

$$\rho(\theta, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Donc la solution 2π -périodique de système (3.5) est

$$\begin{aligned} r(\theta, \varepsilon) &= \frac{\rho(\theta, \varepsilon)}{1 - \rho(\theta, \varepsilon) b(\theta)} \\ &= \frac{\varepsilon \sigma(\theta, \varepsilon)}{1 - \varepsilon b(\theta) \sigma(\theta, \varepsilon)} \end{aligned}$$

$$r(\theta, \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

on remarque que

$$\begin{aligned} r(\theta, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon \sigma(\theta, \varepsilon)}{1 - \varepsilon b(\theta) \sigma(\theta, \varepsilon)} \\ &= \varepsilon \sigma(\theta, \varepsilon) \sum_{j \geq 0} (\varepsilon b(\theta) \sigma(\theta, \varepsilon))^j \\ &= \varepsilon \sigma(\theta, \varepsilon) [1 + \varepsilon b(\theta) \sigma(\theta, \varepsilon) + \dots] \\ &= \varepsilon \sigma(\theta, \varepsilon) + \varepsilon^2 \sigma^2(\theta, \varepsilon) b(\theta) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon [\sigma_0 + \varepsilon y^1(\theta, \sigma_0)] + \varepsilon^2 [\sigma_0 + \varepsilon y^1(\theta, \sigma_0)]^2 b(\theta) + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \sigma_0 + \varepsilon^2 [y^1(\theta, \sigma_0) + \sigma_0^2 b(\theta)] + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

■

exemple 3.7.1 Soit le système quadratique

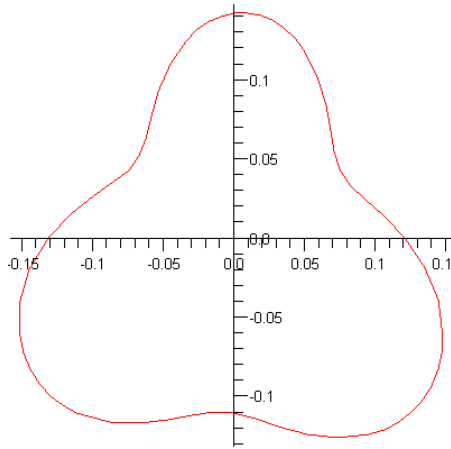
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - 2x^2 + 3xy + y^2 + \varepsilon^2 x, \\ \dot{y} = x - x^2 + 5xy + y^2 + \varepsilon^2 y. \end{cases}$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DES SYSTÈMES QUADRATIQUES

Après calcul on trouve que ce système a un cycle limite au voisinage de l'origine.

La forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-1}$ est

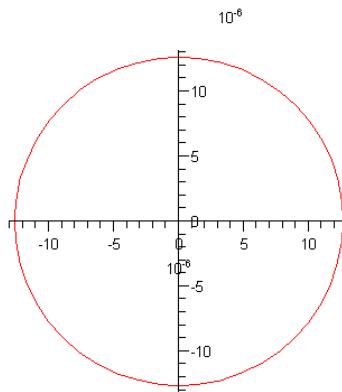
$$r(\theta, 10^{-1}) = 10^{-1} \times \left[\frac{2}{5} \sqrt{10} - \frac{10^{-1} \times \left(\frac{2}{5} \sqrt{10}\right)^2}{3} (3 \sin(\theta) + 6 \sin(3\theta) + \cos(\theta)) \right]$$



Le cycle limite pour $\varepsilon=10^{-1}$.

La forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-4}$ est

$$r(\theta, 10^{-4}) = 10^{-4} \times \left[\frac{2}{5} \sqrt{10} - \frac{10^{-4} \times \left(\frac{2}{5} \sqrt{10}\right)^2}{3} (3 \sin(\theta) + 6 \sin(3\theta) + \cos(\theta)) \right]$$

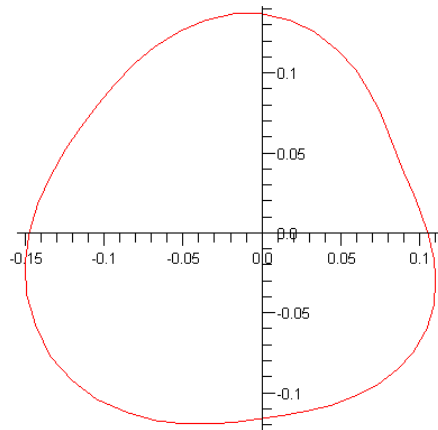


Le cycle limite pour $\varepsilon=10^{-4}$

une application directe de la proposition 3.7.1, la forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-1}$ est

3.7. LA FORME NORMALE DE BAUTIN D'UN SYSTÈME QUADRATIQUE

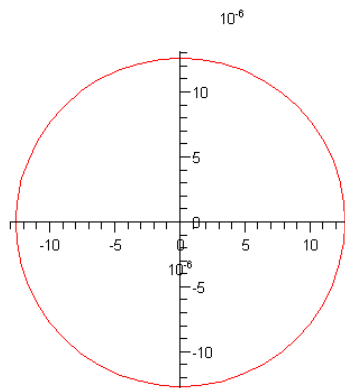
$$r(\theta, 10^{-1}) = 10^{-1} \times \left[\frac{2}{5} \sqrt{10} - 0.1 \times \left(\frac{2}{5} \sqrt{10} \right)^2 \frac{1}{12} (15 \cos(\theta) + \cos(3\theta) + 8 \sin(3\theta)) \right]$$



Le cycle limite pour $\varepsilon=10^{-1}$

exemple 3.7.2 La forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-4}$ est

$$r(\theta, 10^{-4}) = 0.00001 \times \left[\frac{2}{5} \sqrt{10} - 10^{-4} \times \left(\frac{2}{5} \sqrt{10} \right)^2 \frac{1}{12} (15 \cos(\theta) + \cos(3\theta) + 8 \sin(3\theta)) \right]$$



Le cycle limite pour $\varepsilon=10^{-4}$

On remarque que plus que $\varepsilon \rightarrow 0$ les formules se coïncident.

On va appliquer la méthode de la moyennisation du deuxième ordre dans le but d'étudier les solutions périodiques qui bifurquent en les orbites périodiques de centre du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

quand l'on perturbe par le système quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-a_3x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6y^2) + \varepsilon^2a_1x \\ \dot{y} = x + \varepsilon(a_2x^2 + (2a_3 + a_4)xy - a_2y^2) + \varepsilon^2a_1y \end{cases} \quad (3.9)$$

Proposition 3.7.2 *Si $a_1a_5(a_3 - a_6) > 0$, alors pour $\varepsilon = 0$ un cycle limite de système (3.9) bifurque en la solution périodique de rayon $r_0 = 2\sqrt{\frac{2a_1}{a_5(a_3 - a_6)}}$, de plus pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit ce cycle limite, en coordonnées polaires est donné par*

$$r(\theta, \varepsilon) = r_0 + \varepsilon^2c(\theta)r_0^2 + 0(\varepsilon^2)$$

où $r_0 = 2\sqrt{\frac{2a_1}{a_5(a_3 - a_6)}}$ et

$$c(\theta) = \frac{-1}{12} [3a_5 \cos(\theta) + (4a_2 + a_5) \cos(3\theta) + 3(a_3 - a_4 - a_6) \sin(\theta) + (3a_3 + a_4 + a_6) \sin(3\theta)].$$

Preuve. On pose $\lambda_1 = a_1\varepsilon^2$ et $\lambda_k = a_k\varepsilon$, $k = \overline{2, 6}$ dans (1) on obtient le système (3.10). L'équation différentielle d'Abel associée au système (3.10) est

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon [\overline{a(\theta)} - \overline{b(\theta)}'] \rho^2 + \varepsilon^2 [a_1 - \overline{a(\theta)b(\theta)}] \rho + \varepsilon^3 [-2 + \varepsilon\overline{b(\theta)}] a_1\overline{b(\theta)}\rho^2$$

où

$$\begin{aligned} \overline{a(\theta)} &= -a_3 \cos^3(\theta) - a_2 \sin^3(\theta) + (3a_2 + a_5) \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \\ &\quad \cos(\theta) \sin^2(\theta)(2a_3 + a_4 + a_6) \\ \overline{b(\theta)} &= a_2 \cos^3(\theta) + (3a_3 + a_4) \cos^2(\theta) \sin(\theta) - (3a_2 + a_5) \cos(\theta) \sin^2(\theta) - a_6 \sin^3(\theta). \end{aligned}$$

Avec les notations introduites dans le théorème 2.4.1 du chapitre 2, on a

$$\begin{aligned} F(\theta, \rho) &= [\overline{a(\theta)} - \overline{b(\theta)}'] \rho^2 \\ G(\theta, \rho) &= a_1\rho - \overline{a(\theta)b(\theta)}\rho^3 \\ R(\theta, \rho, \varepsilon) &= -2\rho^2 a_1\overline{b(\theta)} + \varepsilon a_1\overline{b(\theta)}^2 \rho^3. \end{aligned}$$

3.7. LA FORME NORMALE DE BAUTIN D'UN SYSTÈME QUADRATIQUE

Les fonctions F , G et R vérifient les suppositions du théorème 2.4.1, avec $T = 2\pi$; de plus

$$\begin{aligned}
 f^0(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, \rho) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a(\theta) - \overline{b(\theta)}] \rho^2 d\theta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^1(\theta, \rho) &= \int_0^\theta [F(s, \rho) - f^0(\rho)] ds + z(\rho) \\
 &= \int_0^\theta [F(s, \rho)] ds + z(\rho)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^1(\theta, \rho) &= \frac{\partial F}{\partial \rho} y^1(\theta, \rho) - \frac{\partial y^1}{\partial \sigma} f^0(\rho) \\
 &= \frac{\partial F}{\partial \rho} y^1(\theta, \rho)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{10}(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^1(\theta, \rho) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \rho} y^1(\theta, \rho) d\theta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g^0(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta, \rho) d\theta \\
 &= \frac{1}{8} \rho (8a_1 + \lambda_5(\lambda_6 - \lambda_3)\rho^2)
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DES SYSTÈMES QUADRATIQUES

par Maple 10 on calcule $f^0(\rho), y^1(\theta, \rho), f^{10}(\rho)$ et $g^0(\rho)$, d'après le corollaire 2.4.1, le racine positif est $\rho_0 = 2\sqrt{\frac{2a_1}{a_5(a_3 - a_6)}}$ si $a_1 a_5 (a_3 - a_6) > 0$, de plus

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} g^0(\rho) \right|_{\rho=\rho_0} = -2a_1 \neq 0$$

Une solution 2π périodique $\rho(\theta, \varepsilon)$ est donnée par

$$\rho(\theta, \varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon y^1(\theta, \rho_0) + 0(\varepsilon^2)$$

Retournons à la solution 2π -périodique $r(\theta, \varepsilon)$ du système (3.9)

$$\begin{aligned} r(\theta, \varepsilon) &= \frac{\rho(\theta, \varepsilon)}{1 - \varepsilon \overline{b(\theta)} \rho(\theta, \varepsilon)} \\ &= \frac{\rho_0 + \varepsilon y^1(\theta, \rho_0) + 0(\varepsilon^2)}{1 - \varepsilon \overline{b(\theta)} [\rho_0 + \varepsilon y^1(\theta, \rho_0) + 0(\varepsilon^2)]} \end{aligned}$$

tel que

$$r(\theta, \varepsilon) \rightarrow \rho_0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

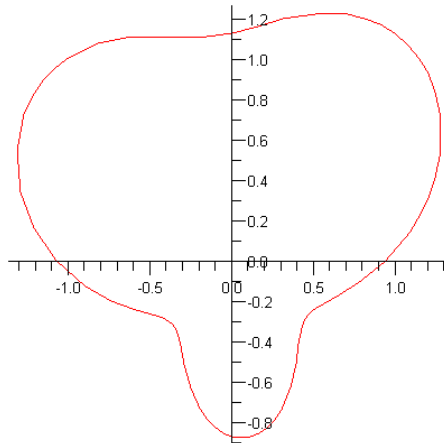
■

exemple 3.7.3 Soit le système quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(3x^2 + 2xy + y^2) - \varepsilon^2 x \\ \dot{y} = x - 6\varepsilon xy - \varepsilon^2 y \end{cases}$$

1. La forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-1}$ est

$$r(\theta, 0.1) = 1 - \frac{10^{-1}}{3} (-12 \sin(\theta) - 8 \sin(3\theta) + 2 \cos(3\theta))$$

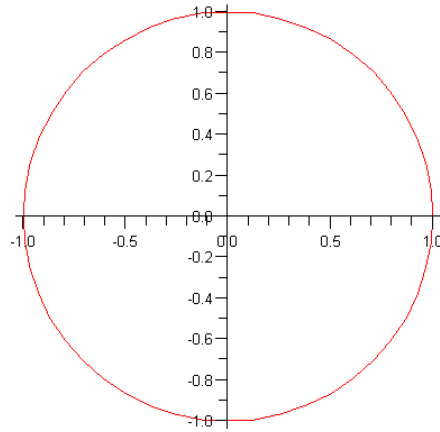


Le cycle limite pour $\varepsilon=0.1$

3.7. LA FORME NORMALE DE BAUTIN D'UN SYSTÈME QUADRATIQUE

2 .La forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-6}$ est

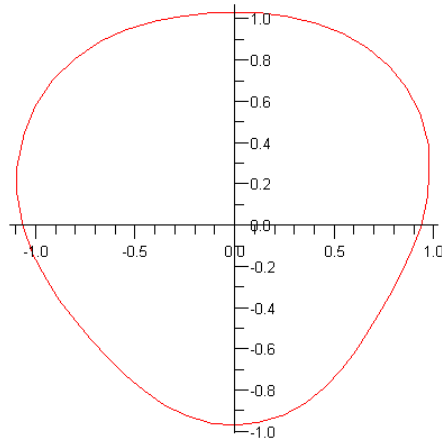
$$r(\theta, 10^{-6}) = 1 - \frac{10^{-6}}{3} (-12 \sin(\theta) - 8 \sin(3\theta) + 2 \cos(3\theta)) .$$



Le cycle limite pour $\varepsilon=0.0000001$

Mais une application directe de la proposition 3.7.2, La forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-1}$ est donnée par la formule

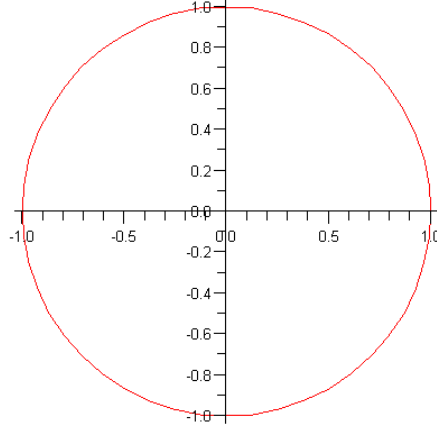
$$r(\theta, 0.1) = 1 - \frac{1}{120} (6 \cos(\theta) + 2 \cos(3\theta) - 12 \sin(\theta) - 8 \sin(3\theta))$$



Le cycle limite pour $\varepsilon=0.1$

la forme de cycle limite pour $\varepsilon = 10^{-6}$ est donnée par

$$r(\theta, 10^{-6}) = 1 - \frac{1}{12000000} (6 \cos(\theta) + 2 \cos(3\theta) - 12 \sin(\theta) - 8 \sin(3\theta))$$



Le cycle limite pour $\varepsilon=10^{-6}$

On va appliquer la méthode de la moyennisation du deuxième ordre pour étudier les solutions périodiques qui bifurquent en les orbites périodiques du centre quadratique de système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1 + \lambda_4 y) \\ \dot{y} = x(1 + \lambda_4 y) \end{cases} \quad (3.10)$$

quand l'on perturbe par le système quadratique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(1 + \lambda_4 y) + \varepsilon(a_1 y - a_3 x^2 + (2a_2 + a_5)xy - 2a_3 y^2) \\ \dot{y} = x(1 + \lambda_4 y) + \varepsilon(a_1 y - a_2 x^2 + 2a_3 xy - a_2 y^2) \end{cases} \quad (3.11)$$

Remarque 3.7.1 *Le centre quadratique est composé de toutes les orbites périodiques circulaires qui sont contenues à l'intérieur de disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{|\lambda_4|}$*

Proposition 3.7.3 *Si $\lambda_4 \neq 0$ et $0 < \frac{2(4a_2+a_5)}{2a_2+a_5} < 1$, alors un cycle limite du système (3.11) bifurque de l'orbite périodique de rayon $s_0 = \frac{1}{|\lambda_4|} \sqrt{\frac{2(4a_2+a_5)}{2a_2+a_5}}$ quand $\varepsilon \geq 0$.*

3.7.3 Étude du système (3.11)

Les points critiques de (3.10) sont

$$(0, 0) \text{ et l'ensemble des points suivant : } \left\{ \left(x, \frac{-1}{\lambda_4} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

3.7. LA FORME NORMALE DE BAUTIN D'UN SYSTÈME QUADRATIQUE

Le système linéarisé associé à (3.11) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 - 2\lambda_4 y \\ 1 + \lambda_4 y & \lambda_4 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Au point $(0, 0)$, il devient

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres associées sont

$$\lambda_1 = -i, \lambda_2 = +i,$$

le système linéarisé a deux valeurs propres imaginaires pures donc l'origine est un centre. Il est soit un centre où un foyer pour le système (3.10).

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, le système (3.10) devient

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \\ \dot{\theta}r^2 &= x\dot{y} - y\dot{x} = r^2(1 + \lambda_4 r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \Rightarrow r(t) = \text{constante} \\ \dot{\theta} = 1 + \lambda_4 r \sin(\theta) \end{cases}$$

$\dot{\theta} > 0$ si $y > \frac{-1}{\lambda_4}$ donc l'origine est un centre.

On pose $\lambda_i = \varepsilon a_i$ pour $i = 1, 2, 3, 5$ et $\lambda_6 = -\lambda_4 - 2\lambda_3$ dans (3.4) on obtient le système (3.10). En coordonnées polaire (r, θ) , le système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = a_1 r + \overline{a(\theta)} r^2 \\ \dot{\theta} = (1 + \lambda_4 \sin(\theta)) + \varepsilon \overline{b(\theta, r)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{a(\theta)} &= -a_3 \cos^3(\theta) - a_2 \sin^3(\theta) + (3a_2 + a_5) \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ \overline{b(\theta, r)} &= \frac{1}{r^2} (a_2 r^3 \cos^3(\theta) - 2a_3 r^3 \sin^3(\theta) + (a_2 + a_5) r^3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + \\ &\quad 3a_3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + a_1 r^2 \sin^2(\theta)) \end{aligned}$$

où encore

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \frac{a_1 r + \overline{a(\theta)} r^2}{1 + \lambda_4 \sin(\theta)} + \varepsilon^2 G(r, \theta, \varepsilon)$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DES SYSTÈMES QUADRATIQUES

De (2.5) on obtient

$$\begin{aligned}
 f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_1 r + [-a_3 \cos^3(\theta) - a_2 \sin^3(\theta) + (3a_2 + a_5) \cos^2(\theta) \sin(\theta)] r^2}{1 + \lambda_4 \sin(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{\lambda_4 (2a_2 + a_5) r^2 - 2(4a_2 + a_5)}{2\lambda_4^3 r}
 \end{aligned}$$

La seule racine positive de $f_0(r)$ est $r = \frac{1}{|\lambda_4|} \sqrt{\frac{2(4a_2+a_5)}{(2a_2+a_5)}}$, si $\lambda_4 \neq 0$ et $0 < \frac{2(4a_2+a_5)}{(2a_2+a_5)} < 1 \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_4|} \sqrt{\frac{2(4a_2+a_5)}{(2a_2+a_5)}} < \frac{1}{|\lambda_4|}$ alors l'orbite périodique de rayon $\frac{1}{|\lambda_4|} \sqrt{\frac{2(4a_2+a_5)}{(2a_2+a_5)}}$ reste toujours contenue dans le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{|\lambda_4|}$. Comme $\frac{\partial f_0}{\partial x} \left(\frac{1}{|\lambda_4|} \sqrt{\frac{2(4a_2+a_5)}{(2a_2+a_5)}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{\frac{2(4a_2+a_5)}{(2a_2+a_5)}} [4(1-|\lambda_4|) - a_5(|\lambda_4|-2)]}{(a_2 + \frac{1}{4}a_5)(|\lambda_4|-1)(a_2 + \frac{1}{2}a_5)} \neq 0$, d'après le théorème 2.2.1 il suit que le système (3.11) pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon $\frac{1}{|\lambda_4|} \sqrt{\frac{2(4a_2+a_5)}{(2a_2+a_5)}}$ du système non perturbé (3.10).

Chapitre 4

Cycles limites de quelques classes d'équations de Liénard perturbées

4.1 Introduction

Les équations différentielles du deuxième ordre surviennent dans de nombreux domaines de la science et de la technologie. Le problème est plus pertinent dans la théorie de la perturbation où les orbites périodiques jouent un rôle principal [23, 25, 48, 33].

Il est bien connu que toutes les solutions de l'oscillateur harmonique sont périodiques de même période, c'est-à-dire l'origine de ce système est un centre isochrone. Quand nous perturbons un oscillateur harmonique, nous pouvons se poser les questions suivantes : Quelle sont les orbites périodiques qui persistent ? Quelle sont orbites périodiques qui génèrent des cycles limites ?

Dans ce chapitre, nous répondons à ces questions pour une large classe d'équations de Liénard.

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$$

n'est pas seulement considérée comme une généralisation de l'équation du pendule amorti ou un système de syng-masse amorti (où $f(x)\dot{x}$ est la force d'amortissement, $g(x)$ est la force de rappel et $e(t)$ est la force externe), mais aussi servi comme un modèle non linéaire dans de nombreux domaines de

recherche scientifiques lors de la prise de différent choix pour $f(x)$, $g(x)$ et $e(t)$. Par exemple pour le choix $f(x) = \varepsilon(x^2 - 1)$, $g(x) = x$ et $e(t) = 0$, on aura l'équation de Van der Pol qui servi de modèle non linéaire pour les oscillations électroniques [52].

Le problème général du nombre et de disposition des cycles limites dans les systèmes de Liénard sont l'objectif principal de nombreuses recherches.

Nous étudions les cycles limites de quelques classes d'équations de Liénard perturbées de la forme

$$\ddot{x} + x = \varepsilon F(t, x, \dot{x}), \quad (4.1)$$

où ε un paramètre petit et $F(t, x, \dot{x}) \in C^2$ est 2π -périodique en t .

Ces équations peuvent considérées comme une perturbation particulière de l'oscillateur harmonique. Nous appliquons le théorème de la moyennisation du second ordre afin d'étudier les cycles limites de cette classe d'équation différentielle ordinaire. Nous illustrons cette étude par de nombreuses applications.

L'équation différentielle linéaire du second ordre $\ddot{x} + x = 0$ fournit un système linéaire dans \mathbb{R}^2 qui a un centre. Le théorème 2.4.1 du chapitre 2 réduit l'étude des cycles limites de l'équation différentielle du second ordre (4.1) qui bifurquent des orbites périodiques de ce centre à trouver les racines non dégénérés du système algébrique de deux équations à deux inconnus. En général, le problème de trouver les racines de deux équations algébriques à deux inconnus n'est pas facile, mais il est plus facile que de chercher directement les orbites périodiques d'une équation différentielle.

4.2 Résultat principal

Dans cette section, nous établissons notre résultat principal pour l'étude des cycles limites de l'équation (4.1). Elle est organisée comme suite : nous présentons l'existence des orbites périodiques des centres isochrones perturbés. Nous donnons quatre corollaires avec huit applications de ces corollaires et les preuves de ces résultats.

Nos résultats sont les suivants :

Théorème 4.2.1 *On considère l'équation différentielle (4.1) où $F(t + 2\pi, x, \dot{x}) =$*

$F(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) dt \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) dt \end{aligned}$$

pour tout (x_0^*, y_0^*) racines du système algébriques

$$f_1(x_0, y_0) = 0, \quad f_2(x_0, y_0) = 0 \quad (4.3)$$

verifiant

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)} \right)_{(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*)} \neq 0, \quad (4.4)$$

l'équation différentielle (4.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution

$$x(t) = x_0^* \cos t + y_0^* \sin t \quad (4.5)$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.1 On considère l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(x) \dot{x} = \varepsilon G(t, x, \dot{x}), \quad (4.6)$$

où $G(t + 2\pi, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(x_0 \cos t + y_0 \sin t) (-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(x_0 \cos t + y_0 \sin t) (-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racines du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.6) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.2 *On considère l'équation de Van der Pol forcée*

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} = \varepsilon G(t, x, \dot{x}), \quad (4.8)$$

où $G(t + 2\pi, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - \frac{1}{8} x_0 (x_0^2 + y_0^2 - 4)) dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - \frac{1}{8} y_0 (x_0^2 + y_0^2 - 4)) dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racine du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.8) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.3 *On considère l'équation de Liénard*

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(\dot{x}) = \varepsilon G(t, x, \dot{x}), \quad (4.10)$$

où $G(t + 2\pi, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x})$ et ε un paramètre petit. Soient

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t (G(t, x_0 \cos t + y_0 \sin t, -x_0 \sin t + y_0 \cos t) \\ &\quad - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)) dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racine du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.10) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Corollaire 4.2.4 *On considère l'équation de Liénard*

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(\dot{x}) = \varepsilon p(t), \quad (4.12)$$

où $p(t + 2\pi) = p(t)$ et ε un paramètre petit. Soit

$$\begin{aligned} f_1(x_0, y_0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t [p(t) - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)] dt, \\ f_2(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t [p(t) - f(-x_0 \sin t + y_0 \cos t)] dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour toute (x_0^*, y_0^*) racine du système algébrique (4.3) satisfaisant (4.4), l'équation différentielle (4.12) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution (4.5) de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans ce qui suit on donne deux exemples du théorème 4.2.1, deux exemples de corollaire 4.2.1, deux exemples de corollaire 4.2.2 avec un cas général, un exemple de corollaire 4.2.3 et un exemple de corollaire 4.2.4.

exemple 4.2.1 Si a_0 et a_2 vérifient $a_0 a_2 < 0$, alors l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \sin t$$

a deux solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$ tendent respectivement vers les solutions périodiques

$$x_1(t) = 2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}} \cos t, \quad x_2(t) = 2\sqrt{-\frac{1}{3} \frac{a_0}{a_2}} \sin t$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.2 Soit l'équation de Liénard ([34] page 235)

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \sin \dot{x}.$$

Cette équation différentielle a une infinité de solutions périodiques $x(t, \varepsilon)$ tendent vers les solutions périodiques

$$x_k(t) = r_k \cos t$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où r_k , $k = 1, 2, \dots$ sont les racines de l'équation de Bessel $J_1(r)$.

exemple 4.2.3 Soit l'équation de Liénard ([28] page 181)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x \dot{x} = \varepsilon [\gamma \cos t - \beta x],$$

avec $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$. cette équation différentielle a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = \frac{\gamma}{\beta} \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.4 L'équation de Liénard ([62] page 153)

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (e^x - 2) \dot{x} = 0,$$

a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = 2.486837646 \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.5 L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} = \varepsilon (x^2 - 1) \sin t,$$

a deux solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$ qui tendent vers les solutions périodiques

$$x_1(t) = -\cos t, \quad x_2(t) = 2 \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.6 Si $(16a_0^3 + 27a_2)a_2 \geq 0$ et $a_2 \neq 0$, alors l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (a_2 x^2 + a_0) \dot{x} = \varepsilon \cos t,$$

a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = -\frac{1}{3} \frac{6^{\frac{1}{3}} \left[2a_2 a_0 6^{\frac{1}{3}} - (\mu a_2^2)^{\frac{2}{3}} \right]}{a_2 (\mu a_2^2)^{\frac{1}{3}}} \sin t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où $\mu = 9 + \sqrt{3} \sqrt{\frac{16a_0^3 + 27a_2}{a_2}}$.

Remarque 4.2.1 Dans le cas $a_0 = -1$ et $a_2 = 1$, on trouve que l'équation de Van der Pol perturbée a une solution périodique

$$x(t) = -2.382975767 \sin t.$$

exemple 4.2.7 L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^3 - \dot{x}) = \varepsilon (1 - \dot{x}^2) \sin t,$$

a deux solutions périodiques $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2$ qui tendent vers les solutions périodiques

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cos t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

exemple 4.2.8 L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^2 - \dot{x}) = \varepsilon \cos t,$$

a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ qui tend vers la solution périodique

$$x_1(t) = -\sin t,$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans ce qui suit nous allons démontrer les résultats obtenus en utilisant le corollaire 2.4.1 du chapitre 2.

4.3 Preuve du Théorème 4.2.1

En introduisant les variables $(x, y) = (x, \dot{x})$, l'équation différentielle (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon F(t, x, y). \quad (4.14)$$

Elle est définie sur un sous ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^2 . Le système $(4.14)_{\varepsilon=0}$ est dit système non perturbé, le système (4.14) est un système perturbé qui possède un seul point d'équilibre à l'origine. La partie linéaire du système $(4.14)_{\varepsilon=0}$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où la solution périodique de système (4.14)_{ε=0} est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ -x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Avec la notations introduites dans le théorème 2.4.1, le système (4.14) est similaire au système (2.12) avec

Preuve.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, F_0(t, X) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, F_1(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t, X) \end{pmatrix}.$$

Obtenir les solutions périodiques de (4.14) se réduit à déterminer les racines du système $F(z) = 0$, où $F(z)$ est donnée par (2.15). La matrice fondamentale $M(t)$ du système différentiel (4.14)_{ε=0} le long de toute solution périodique est

$$M(t) = M_z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de $M(t)$

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Toutes les conditions du théorème 2.4.1 sont satisfaites. Il reste à déterminer les racines du système algébrique $F(z) = (f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0)) = 0$ dans V où

$$f_1(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t F(t, x(t), y(t)) dt, \quad f_2(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t F(t, x(t), y(t)) dt \quad (4.16)$$

avec $x(t)$ et $y(t)$ sont données par (4.15).

S'il existe $(x_0^*, y_0^*) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f_1(x_0^*, y_0^*) = f_2(x_0^*, y_0^*) = 0 \text{ et } \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (x_0^*, y_0^*)} \neq 0,$$

alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec ε_0 petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de (4.1) telle que $x(t, \varepsilon)$ tend vers la solution $x(t)$ de (4.5). ■

4.4 Preuve des corollaires

L'équation (4.6) du corollaire 4.2.1 correspond le cas où $F(t, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x}) - f(x)\dot{x}$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [G(t, x, \dot{x}) - f(x)\dot{x}]. \quad (4.17)$$

L'équation de Van der.Pol forcée (4.8) correspond le cas où $F(t, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x}) - (x^2 - 1)\dot{x}$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [G(t, x, \dot{x}) - (x^2 - 1)\dot{x}]. \quad (4.18)$$

L'équation (4.10) du corollaire 4.2.3 correspondante le cas où $F(t, x, \dot{x}) = G(t, x, \dot{x}) - f(\dot{x})$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [G(t, x, y) - f(y)]. \quad (4.19)$$

L'équation (4.11) du corollaire 4.2.4 correspondante le cas où $F(t, x, \dot{x}) = p(t) - f(\dot{x})$, et le système (4.1) devient

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \varepsilon [p(t) - f(y)]. \quad (4.20)$$

L'étude des cycles limites des systèmes différentielles (4.17), (4.18), (4.19) et (4.20) avec $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec ε_0 suffisamment petit qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre réduit à trouver les racines non dégénérés du système algébrique de deux équations à deux inconnus donnée par (4.3), de plus si (4.4) est vérifiée, alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec ε_0 suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ des équation différentielles (4.6), (4.8), (4.10) et (4.11) respectivement tel que $x(t, \varepsilon)$ tend vers la solution $x(t)$ de (4.5).

4.5 Preuve des exemples

Preuve de l'exemple 4.2.1

Utilisant les notations introduites dans le théorème 4.2.1, l'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (a_0 + a_1x + a_2x^2) \sin t$$

est similaire à (4.1) avec $F(t, x, \dot{x}) = (a_0 + a_1x + a_2x^2) \sin t$. Les fonctions f_1 et f_2 du théorème 1 dans ce cas sont données par

$$f_1 = -\frac{1}{2}a_0 - \frac{3}{8}a_2y_0^2 - \frac{1}{8}a_2x_0^2, \quad f_2 = \frac{1}{4}a_2x_0y_0.$$

Le système $f_1 = f_2 = 0$ a quatre solutions : $\left(0, 2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)$, $\left(2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)$, $\left(0, -2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)$ et $\left(-2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)$, de plus

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(0, 2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)} &= -\frac{1}{4}a_0a_2, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)} &= \frac{1}{4}a_0a_2, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(0, -2\sqrt{-\frac{1}{3}\frac{a_0}{a_2}}\right)} &= -\frac{1}{4}a_0a_2, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \left(-2\sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}, 0\right)} &= \frac{1}{4}a_0a_2. \end{aligned}$$

Toutes les conditions du théorème 4.2.1 et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.2

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \sin \dot{x}$$

est équivalente à (4.10) avec $f(\dot{x}) = \sin \dot{x}$, $G(t, x, \dot{x}) = 0$.

Ou encore

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon \sin y, \end{cases}$$

en coordonnée polaire $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos \theta \sin(r \cos \theta), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{1}{r} \sin \theta \sin(r \cos \theta) \end{cases}$$

ce qui implique que

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \cos \theta \sin(r \cos \theta) + 0(\varepsilon^2) \quad (4.21)$$

En appliquant le théorème 2.4.1 sachant que $F_0(\theta, r) = 0$, $F_1(\theta, r) = \cos \theta \sin(r \cos \theta)$, (4.21) $_{\varepsilon=0}$ a une solution $r(\theta) = r_0$, elle est constante et la matrice fondamentale est $M(\theta) = 1$.

Soit

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin(r \cos \theta) d\theta = J_1(r)$$

où $J_1(r)$ est la fonction de Bessel. Nous savons que $J_1(r)$ a exactement n racines dans $[0, (n+1)\pi]$.

Dans ce cas les solutions $x_k(t) = r_k \cos t$ pour $k = 1, 2, \dots$ où $J_1(r_k) = 0$. Finalement, cette équation a une infinité de solutions périodiques.

Preuve de l'exemple 4.2.3

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x \dot{x} = \varepsilon (\gamma \cos t - \beta x)$$

est équivalente à (4.6) avec $G(t, x, \dot{x}) = \gamma \cos t - \beta x$, $f(x) = x$ avec $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Les fonctions f_1 et f_2 dans ce cas sont données par

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{2}\beta y_0, \quad f_2(\alpha) = -\frac{1}{2}\beta x_0 + \frac{1}{2}\gamma,$$

et le système $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$ a une seule solution $\alpha = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)$ et on a $\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)}\right)_{(x_0, y_0) = \left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right)} = \frac{\beta^2}{4} \neq 0$. Toutes les conditions du corollaire 4.2.1 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.4

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (e^x - 2) \dot{x} = 0,$$

est équivalente à (4.6) avec $G(t, x, \dot{x}) = 0$, $f(x) = e^x - 2$, correspondante au système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon (2 - e^x) y. \end{cases}$$

en coordonnée polaire $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2 \theta (2 - e^{r \cos \theta}), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \cos \theta (2 - e^{r \cos \theta}) \end{cases}$$

Ou encore

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r \sin^2 \theta (e^{r \cos \theta} - 2) + 0(\varepsilon^2). \quad (4.33)$$

CHAPITRE 4. CYCLES LIMITES DE QUELQUES CLASSES
D'ÉQUATIONS DE LIÉNARD PERTURBÉES

En appliquant le théorème 2.4.1 sachant que $F_0(\theta, r) = 0$, $F_0(\theta, r) = r \sin^2 \theta (e^{r \cos \theta} - 2)$, (4.22) _{$\varepsilon=0$} a une solution $r(\theta) = r_0$, elle est constante et la matrice fondamentale est $M(\theta) = 1$. Soit

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta (e - 2) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2 \theta e^{r \cos \theta} d\theta - \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta, \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sum_{n \geq 0} \frac{r^n \cos^n \theta}{n!} d\theta - r, \\ &= \frac{r}{2\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!} \left[\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^n \theta d\theta \right] - r. \end{aligned}$$

mais

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2m + 1 \\ \neq 0 & \text{if } n = 2m \end{cases}$$

Alors,

$$f(r) = \frac{r}{2\pi} \sum_{m \geq 0} \frac{r^{2m}}{(2m)!} \left[\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos^{2m} \theta d\theta \right] - r$$

Mais,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^{2m} \theta d\theta = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}{(2m + 1)(m + 1)!}$$

Alors,

$$f(r) = \frac{r}{2\pi} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{r^{2m}}{(2m)!} \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}{(2m + 1)(m + 1)!} \right) - r$$

posons

$$U_m = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)}{(2m + 1)!(m + 1)!}$$

on a $\frac{U_{m+1}}{U_m} = \frac{1}{4(m+1)(m+2)}$. Cette série est convergente à $f(r) = J_1(r) - r$ selon le critère de D'Alembert. Par Maple 12, $f(r) = 0$ a une unique solution

$r = 2.486837646$. Toutes les conditions du corollaire 4.2.1 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.5

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} = \varepsilon (x^2 - 1) \sin t.$$

est équivalente à (4.8) avec $G(t, x, \dot{x}) = (x^2 - 1) \sin(t)$, Les fonctions f_1 et f_2 dans ce cas sont données par

$$f_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{8}x_0^2 - \frac{3}{8}y_0^2 - \frac{1}{8}x_0y_0^2 - \frac{1}{8}x_0^3, \quad f_2 = -\frac{1}{8}y_0(x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4).$$

Le système $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$ a trois solutions $(-1, 0)$, $(2, 0)$ et $(-2, 0)$ et on a

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (-1, 0)} &= 0.046875, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (2, 0)} &= -0.75, \\ \det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (-2, 0)} &= 0.25. \end{aligned}$$

Donc toutes les conditions du corollaire 4.2.2 sont satisfaites, alors il existe deux solutions 2π -périodique $x_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, 3}$ qui tend respectivement vers

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = 2 \cos t$$

de l'équation différentielle $\ddot{x} + x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve de l'exemple 4.2.6

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (a_2x^2 + a_0) \dot{x} = \varepsilon \cos t$$

est équivalente à (4.8) avec $G(t, x, \dot{x}) = \cos t$, les deux composantes (f_1, f_2) données dans (4.9) sont

$$f_1 = -\frac{1}{8}x_0(4a_0 + a_2x_0^2 + a_2y_0^2), \quad f_2 = -\frac{1}{8}a_2y_0^3 - \frac{1}{2}a_0y_0 - \frac{1}{8}a_2x_0^2y_0 + \frac{1}{2}.$$

Le système $f_1 = f_2 = 0$ a une seule solution $\alpha = \left(0, -\frac{1}{3} \frac{6^{\frac{1}{3}} [2a_2 a_0 6^{\frac{1}{3}} - (\mu a_2^2)^{\frac{2}{3}}]}{a_2 (\mu a_2^2)^{\frac{1}{3}}} \right)$

avec $\mu = \left(9 + \sqrt{3} \sqrt{\frac{16a_0^3 + 27a_2}{a_2}} \right)$ et on a

$$\det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = \alpha} = \frac{1}{288} \left[24a_0^2 + \frac{96a_0^4 6^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} (\mu a_2^2)^{\frac{2}{3}} \mu^2}{\mu (\mu a_2^2)^{\frac{1}{3}}} \right] \neq 0$$

Donc toutes les conditions du corollaire 4.2.2 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.7

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^3 - \dot{x}) = \varepsilon (1 - \dot{x}^2) \sin t,$$

est équivalente à (4.10) avec $G(t, x, \dot{x}) = (1 - \dot{x}^2) \sin t$, $f(\dot{x}) = (\dot{x}^3 - \dot{x})$, les zéros $\alpha = (x_0, y_0)$ des deux composantes (f_1, f_2) données dans (4.11) par

$$f_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8}x_0^2 - \frac{3}{8}x_0y_0^2 + \frac{1}{8}y_0^2 - \frac{3}{8}x_0^3 + \frac{1}{2}x_0, \quad f_2 = -\frac{1}{8}y_0(3x_0^2 - 2x_0 + 3y_0^2 - 4),$$

sont $(1, 0)$, $(2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ et $(-2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ et on a

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (1, 0)} &= 0.046875, \\ \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)} &= -0.0386751347, \\ \det \left(\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (-2\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)} &= 0.5386751347. \end{aligned}$$

Donc toutes les conditions du corollaire 4.2.3 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Preuve de l'exemple 4.2.8

L'équation de Liénard

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (\dot{x}^2 - \dot{x}) = \varepsilon \cos t.$$

est équivalente à (4.12) avec $f(\dot{x}) = \dot{x}^2 - \dot{x}$, $p(t) = \cos t$, les deux composantes (f_1, f_2) données dans (4.13) sont

$$f_1 = \frac{1}{2}x_0, \quad f_2 = \frac{1}{2}(y_0 + 1).$$

et le système $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0$ a une unique solution $\alpha = (0, -1)$ et on a $\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_0, y_0)} \right)_{(x_0, y_0) = (0, -1)} = 0.25$. Toutes les conditions du corollaire 4.2.4 sont satisfaites et le résultat suit immédiatement.

Chapitre 5

Cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va utiliser le théorème 2.4.1 du chapitre 2 afin d'étudier le nombre maximal de cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2k+1}, \\ \dot{y} = -x^{2k+1} + \varepsilon f(x) y^{2n+1}. \end{cases} \quad (5.1)$$

où k et n sont des entiers positifs, $f(x)$ est un polynôme de degré m , ε est un paramètre suffisamment petit.

5.2 Présentation des principaux résultats

Notons que le système (5.1) avec $\varepsilon = 0$ a un centre global avec la hamiltonien $H = \frac{1}{2k+2} (x^{2k+2} + y^{2k+2})$. Nous étudierons le nombre de solutions périodiques de ce centre qui persistent pour le système perturbé (5.1).

Dans [8] ; les auteurs ont donnés des conditions suffisantes pour l'existence d'un seul cycle limite. Si $k = n = 0$ système (5.1) devient le système de Liénard polynômial classique.

Notre résultat principal sur les solutions périodiques du système (5.1) est le suivant

5.2. PRÉSENTATION DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

Théorème 5.2.1 *Le système différentiel (5.1) a au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cycles limites. Ici $[\cdot]$ désigne la fonction partie entière.*

Preuve. En écrivant le système (5.1) en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -(r \cos \theta)^{2k+1} \sin \theta + \cos \theta (r \sin \theta)^{2k+1} - \varepsilon f(r \cos \theta) \sin \theta (r \sin \theta)^{2n+1} \\ \frac{d\theta}{dt} = -\cos^2 \theta (r \cos \theta)^{2k} - \sin^2 \theta (r \sin \theta)^{2k} - \varepsilon \cos \theta f(r \cos \theta) \sin \theta (r \sin \theta)^{2n}, \end{cases} \quad (5.2)$$

Par conséquent, la solution du système (5.2) dans la région $\dot{\theta} \neq 0$ peut être ramenée à l'étude de la solution de l'équation

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta (\cos^{2k} \theta - \sin^{2k} \theta)}{\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta} r + \varepsilon \frac{r^{2(n-k)+1} f(r \cos \theta) \sin^{2(n+k)+2} \theta}{(\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta)^2} + O(\varepsilon^2) \quad (5.3)$$

La solution de l'équation non perturbé (5.3) $_{\varepsilon=0}$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta (\cos^{2k} \theta - \sin^{2k} \theta)}{\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta} r, \quad (5.4)$$

telle que $r(0) = r_0$ est

$$r(\theta, r_0) = r_0 (\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta)^{\frac{-1}{2(k+1)}}. \quad (5.5)$$

Notons que toutes ces orbites périodiques sont 2π -périodiques.

En utilisant la notation introduite dans théorème 2.4.1, nous avons $x = r$, $t = \theta$, $z = r_0$,

$$F_0(r, \theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta (\cos^{2k} \theta - \sin^{2k} \theta)}{\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta} r, \quad F_1(r, \theta) = \frac{r^{2(n-k)+1} f(r \cos \theta) \sin^{2(n+k)+2} \theta}{(\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta)^2}.$$

La matrice fondamentale $M(\theta)$ de l'équation (5.4) est indépendante de z

$$M(\theta) = (\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta)^{\frac{-1}{2(k+1)}}.$$

Par conséquent, on doit étudier les zéros $z = r_0$ de la fonction $F(r_0)$ donnée dans (2.15).

$$F(r_0) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^{2(n-k)+1} f(r \cos \theta) \sin^{2(n+k)+2} \theta}{(\cos^{2k+2} \theta + \sin^{2k+2} \theta)^{\frac{4k+5}{2(k+1)}}} \right]_{r=r(\theta, r_0)} d\theta,$$

mais $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, on obtient

$$F(r_0) = \sum_{i=0}^m a_i r_0^{2(n-k)+i+1} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^i \theta \sin^{2(n+k)+2} \theta}{(\cos^{2n+2} \theta + \sin^{2n+2} \theta)^{\frac{6k-2n-i+4}{2(k+1)}}} d\theta,$$

où encore

$$F(r_0) = \sum_{i=0}^m a_i r_0^{2(n-k)+i+1} b_i, \text{ avec } b_i = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^i \theta \sin^{2(n+k)+2} \theta}{(\cos^{2n+2} \theta + \sin^{2n+2} \theta)^{\frac{6k-2n-i+4}{2(k+1)}}} d\theta.$$

Nous remarquons que $b_i = 0$ si i est impaire, sinon $b_i > 0$, alors on obtient

$$F(r_0) = r_0^{2(n-k)+1} \sum_{i=0}^m a_i r_0^i b_i,$$

le polynôme $F(r_0)$ a au plus $\left[\frac{m}{2}\right]$ racines positives. D'après le théorème 2.4.1, nous concluons que l'équation ■

Chapitre 6

Conclusion Générale

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes différentiels. Elle permet aussi de donner une borne inférieure pour le nombre de cycles limites que peut avoir l'équation différentielle perturbée. Nous continuons à travailler sur des problèmes analogues. On se propose d'étudier le nombre maximum de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2k+1}, \\ \dot{y} = -x^{2k+1} + \sum_{p=0}^m \varepsilon^p f^p(x) y^{2n+1}. \end{cases}$$

où k , p et n sont des entiers positifs, $f(x)$ est un polynôme de degré m , ε est un paramètre petit.

Bibliographie

- [1] J. C. Artes, J. Llibre; Singular points of quadratic systems : a complete classification in the coefficient space \mathbb{R}^2 . International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 18, No. 2 (2008) 313 – 362.
- [2] A. L. Cherkas, J. C. Artes, J. Llibre; Quadratic systems with limit cycles of normal size. Buletinul Academiei de sthnte a republich moldova. Matematica, Number 1 (41) , 2003,page 31 – 46 ISSN 1024 – 7696
- [3] N. N. Bautin, On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of center type, Mathem. Sbornik (N.S) 30 (72) (1952), 181 – 196.
- [4] A. Buica, J. P. Francoise and J. Llibre, Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter, Comm. Pure Appl. Anal. 6 N 1 (2007), pp. 103 – 111.
- [5] T. R, Blows, N. G Lloyd : The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equations. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 95, 359 – 366 (1984) .
- [6] N.N. Bogoliubov and Yu.A.Mitropolskii, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.
- [7] N. M. Kryloff, N. N Bogoliuboff : Introduction à la mécanique non-linéaire, les méthodes approchées et asymptotiques, Vol. 1 – 2 of Ukrainska Akad. Nauk Inst. Mec. Paris : Chaire de Phys. Math. Annales (1937) .
- [8] L. Ciambellotti, Uniqueness of limit cycles for Liénard systems. A generalization of Massera’s Theorm, Theory. Sys. 7 (2009) , 405 – 410.
- [9] J. Chavarriga, H. Giacomini, J Llibre ; Uniqueness of Algebraic Limit Cycles for Quadratic Systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 261, 85 – 99 (2001).

-
- [10] L. A. Cherkas and L. I. Zhilevich, Some criteria for the absence of limit cycles and for the existence of a single limit cycle, (Russian), *Different. Uravn.*, 6(7)(1970), 1170 – 1178.
- [11] L. A. Cerkas and L. I. Zhilevich, The limit cycles of certain differential equations, (Russian), *Diff. Uravn.* 8(7)(1972), 1207 – 1213
- [12] Chandrasekhar, S. "An Introduction to the study of Stellar Structure", Chapter 4. Chicago Univ. Press, 1939 (repr. Dover, New York, 1957).
- [13] L. Chen, M. Wang, Relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system, (Chinese), *Acta Math. Sinica* 22 (1979), 751 – 758.
- [14] L. Chen and Y. Ye, Uniqueness of limit cycle of the systems of equations $dx/dt = -y + dx + lx^2 + xy + ny^2$, $dy/dt = x$, *Acta Math. Sinica* 18 (1975), 219 – 222 (Chinese).
- [15] C. J. Christopher : Estimating limit cycles bifurcations from centers. In : *Trends in Mathematics : Differential Equations with Symbolic Computation*, pp. 23 – 35. Birkhauser Verlag, Basel (2006).
- [16] C.J. Christopher, N.G. Lloyd : Polynomial systems : a lower bound for the Hilbert numbers. *Proc. Math. Phys. Sci.* 450 (1995), 219 – 224.
- [17] J. Li, H.S.Y. Chan, , K.W. Chung : Some lower bounds for $H(n)$ in Hilbert's 16th problem. *Qual. Theory Differ. Equ.* 3 (2003), 345 – 360.
- [18] L. Chen, M. Wang, : Relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system. *Acta Math. Sin.* 22, 751 – 758 (1979, in Chinese).
- [19] Q. Ding, A. Leung; The number of limit cycle bifurcation diagrams for the generalized mixed Rayleigh-Li ´enard oscillator. *Journal of sound and Vibration.* (2009), 322 (1 – 2) , 393 – 400.
- [20] F. Dumortier, C. Li ; Quadratic Li ´enard equations with quadratic damping. *J. Diff. Eqs.* 139 (1997), 41 – 59.
- [21] F. Dumortier, C. Rousseau ; Cubic Li ´enard equations with linear damping. *Nonlinearity* 3 (1990), 1015 – 1039.
- [22] Z. Zhang, T. Ding, W. Huang, Z. Dong : *Qualitative Theory of Differential Equations.* American Mathematical Society, Providence (1992).
- [23] J. Llibre, P. C. Ernesto : Limit cycles for a class of second order differential equation, *Physics Letters A* 375 (2011), 108 – 1083.

- [24] Yu. S. Ilyashenko, Appearance of limit cycles by perturbation of the equation $\frac{dw}{dz} = \frac{Rz}{Rw}$, where $R(z, w)$ is a polynomial. *Mat. Sbornik (New Series)* 78 (120) (1969), 360 – 373.
- [25] J. Guckenheimer and P. Holmes : *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vectors Fields*, Springer, 1983.
- [26] A. Gasull, J. Torregrosa ; Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity. *J. Diff. Eqs.* 159 (1998), 1015 – 1039.
- [27] N.V. Kuznetsov, O.A. Kuznetsova ,G.A. Leonov ; Visualization of four normal size limit cycles in two-dimensional polynomial quadratic system. *Differential equations and Dynamical systems*, 21 (1 – 2), 2013, pp. 29 – 34 doi :10.1007/s12591 – 012 – 0118 – 6.
- [28] DW.Jordan, P.Smith : *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford university press. Fourth edition (2007).
- [29] A. G. Valery, *Global Bifurcation Theory and Hilbert’s Sixteenth problem*, ISBN1 1 – 4020 – 7571 – 5 Copyright 2003 by Kluwer Academic Publishers.
- [30] Y. Wu, Y. Gao, M. Han : On the number and distributions of limit cycles in a quintic planar vector field. *Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng.* 18 (2008), 1939 – 1955.
- [31] M. Hirsch, S. Smale ; *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, (1974).
- [32] D. Hilbert, *Mathematical problems*, In *Proceeding of Symposia in Pure Mathematics* 28 (1976) , 1 – 34.
- [33] A. Lins, W. de Melo, C. C. Pugh ; On Liénard’s equation. *Lecture notes in Math Nonlinear* 597 Springer, (1997), pp. 335 – 357.
- [34] B. Peter, Kan, Y. Zarmi : *Nonlinear dynamics explorations through normal forms wiley series in nonlinear science*, 1998, p. 235.
- [35] H. Poincaré : *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. *J.Math. Pures. Appl.* (3) 7 (1881), 375 – 422.
- [36] A. Lins Neto : On the number of solutions of the equations $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$, *Invent. Math.* 59 (1980), 67 – 76.
- [37] S. Lynch, C. J. Christopher : *Limit cycles in highly non-linear differential equations*. *J. Sound Vib.* 224 (1999), 505 – 517.

- [38] C. Li, C. Liu, ,J. Yang, : Acubic system with thirteen limit cycles. *J.Differ. Equ.* 246 (2009), 3609 – 3619.
- [39] N. G. Lloyd ; Limit cycles of polynomial systems-some recent developments. *London Math. Soc. Lecture note Ser.* 127, Cambridge University Press, 1998, PP. 192 – 234.
- [40] N. G Lloyd, S. Lynch, : Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems. *Proc. R. Soc. Lond. A* 418 (1988) , 199 – 208.
- [41] S. Lynch : Limit cycles of generalized Liénard equations. *Appl. Math. Lett.* 8 (1995), 15 – 17.
- [42] S. Lynch : Generalized quadratic Liénard equations. *App. Math. Lett.* 11 (1998), 7 – 10.
- [43] S. Lynch : Generalized cubic Liénard equations. *App. Math. Lett.* 12 (1999), 1 – 6.
- [44] J. Llibre, A. C Mereu, M. A. Teixeira : Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 148 (2010), 363 – 383.
- [45] C. Li, C. Liu, ,J. Yang, : Acubic system with thirteen limit cycles. *J.Differ. Equ.* 246 (2009), 3609 – 3619.
- [46] I. G. Petrovskii and E. M. Landis, On the number of limit cycles of the equation $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ where P and Q are polynomials of the 2nd degree, *Mat. Sbornik (N.S)* 37(79), 209 – 250, 1955.
- [47] J. Li, M. Zhang, S. Li, : Bifurcations of limit cycles in a Z_2 -equivariant planar polynomial vector field of degree 7. *Int. J. Bifurc. Chaos* 16 (2006), 925 – 943.
- [48] I. G. Malkin, *Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations*, (Russian) Gostexizdat, Moscow, (1956).
- [49] A. Makhlouf, N. Ouanas : Limit cycles of perturbed Lienard equations, *Ann. of Diff. Eqs* 29 : 2(2013) , 177 – 187.
- [50] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, *Texts in Applied Mathematics* 7, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [51] J. Reyn, *Phase portraits of planar quadratic systems. Mathematics and Its Applications* (Springer), 583. Springer, New York, 2007.
- [52] M. Roseau, *Vibrations Non-linéaires et Théorie de la Stabilité*, (French) *Springer Tracts in Natural Philosophy*, Vol. 8, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.

- [53] G. S. Ryckov, The limit cycles of the equation $u(x+l)d\mu = (x+ax^2 - hbxy - hc\mu + d\mu^2)dx$, (Russian), *Diff. Uravn.* 8(1972), 2257 – 2259.
- [54] B. Van der Pol : Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance, London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag., 3, P. 65 (1927).
- [55] F. Verhulst : Nonlinear differential equations and dynamical systems, Berlin : Springer-Verlag, second edition (1927).
- [56] J. A. Sanders, and F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, New York, 1985.
- [57] S. Shi, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems, *Scientia Sinica*, 23(2) (1980), 153 – 158. Appeared in Chinese in *Sc. Sin.* Vol. 11, 1051 – 1056.
- [58] S. Songling, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems. *Scientia Sin.* 23 (1980), 154 – 158.
- [59] C. Tung, Positions of limit cycles of the system $\frac{dx}{dt} = \sum_{0 \leq i+k \leq 2} a_{ik}x^i y^k$, $\frac{dy}{dt} = \sum_{0 \leq i+k \leq 2} b_{ik}x^i y^k$. *Sci. Sinica*, 8 (1959), 151 – 171.
- [60] S. Wang, P. Yu : Bifurcation of limit cycles in a quintic Hamiltonian system under a sixth-order perturbation. *Chaos Solitons Fractals* 26 (2005), 1317 – 1335.
- [61] H. Weyl, On the differential equations of the simplest boundary-layer problems. *Ann. of Math.* 43 (1942), 381 – 407.
- [62] Y. Ye : Theory of Limit Cycles, *Transl.Math. Monographs* 66. Amer. Math.Soc., Providence, RI (1986).