UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHÉMATIQUES

Par
BOUSSETILA Nadjib

PROBLÈME AUX LIMITES NON LOCALES POUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES OPÉRATIONNELLE

Soutenu le 07/10/1998
Jury :

M. DENCHE	Président	Prof.	Univ. Constantine
F. REBBANI	Rapporteur	M.C.	Univ. Annaba
A. DJELLIT	Examinateur	M.C.	Univ. Annaba
A. BOUZIANI	Examinateur	M.C.	C.U. Oum el Bouaghi

Résumé

Dans ce travail on étudie l'équation :

$$\mathcal{L}_\lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)\left(u + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f(t), \qquad (E)$$

avec les conditions non-locales suivantes :

$$\begin{cases} l_{1_\mu} u \equiv \mu_1 u\mid_{t_1=0} - \mu_2 u\mid_{t_1=T_1} = \varphi(t_2), \\ l_{2_\mu} u \equiv \mu_1 u\mid_{t_2=0} - \mu_2 u\mid_{t_2=T_2} = \psi(t_1), \end{cases} \qquad (C.L)$$

où $t = (t_1, t_2) \in D =]0, T_1[\times]0, T_2[$, λ est un paramètre réel ($\lambda \geq 0$), u, f sont des fonctions de variable $t = (t_1,\, t_2)$ et à valeurs dans H, $A(t)$ est un opérateur linéaire dans H, non-borné, à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ indépendant de t, et partout dense dans H.
Les fonctions φ et ψ sont respectivement définies de $[0, T_2]$, $[0, T_1]$ à valeurs dans H, μ_1 et μ_2 sont deux paramètres complexes tels que $\mu_i \neq 0,\ i = 1, 2$.

On démontre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (E)-$(C.L)$, et sa dépendance continue par rapport aux données, en se basant sur la méthode des estimations a priori.

A.M.S. Classification : 35 B 45, 35 R 20.

Mots clés : *E.D.P. opérationnelle, estimations a priori, conditions aux limites non-locales.*

To my parents and my family, for their love, support, and encouragement.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse le professeur REBBANI Faouzia, qui grâce à sa disponobilité, son soutien, ses conseils et ses encouragements m'a permis de mener à bien ce travail.

J'adresse l'expression de ma gratitude au professeur M. DENCHE, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Ainsi qu'aux docteurs :
A. DJELLIT maître de conférences à l'université Badji Mokhtar-Annaba,
A. BOUZIANI maître de conférences au Centre Universitaire d'Oum el Bouaghi,
qui ont accepté d'examiner mon mémoire et faire partie de ce jury.

Je remercie également tous les membres de l'institut de Mathématiques, pour toute l'aide qui m'a été accordée.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier ma collègue F. ZOUYED pour la bonne collaboration scientifique.

Je remercie aussi tous mes amis pour leur soutien moral et matériel.

Notations

$\mathbb{R}$: corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: corps des nombres complexes.

$Im(Z)$: partie imaginaire du nombre complexe z.

$Re(z)$: partie réelle du nombre complexe z.

A : opérateur linéaire.

$\mathcal{D}(A)$: domaine de définition de l'opérateur A.

$\mathcal{G}(A)$: graphe de l'opérateur A.

$\mathcal{R}(A)$: image de l'opérateur A.

$\mathcal{N}(A)$: noyau de l'opérateur A.

$\overline{M}$: fermeture de l'ensemble M.

$M^{\perp}$: orthogonal de l'ensemble M.

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$: des espaces de Banach de normes respectives $\|.\|_{\mathcal{X}}$, $\|.\|_{\mathcal{Y}}$.

$\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$,
cet espace est muni de la norme $\|B\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup\limits_{u\neq 0} \dfrac{\|Bu\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}}$.

$\mathcal{H}$: espace de Hilbert où la norme et le produit scalaire sont notés
respectivement par $|.|$, $(.,.)$.

$\mathscr{L}(\mathcal{H})$: espace des opérateurs linéaires continus dans $\mathcal{H}$.

$\mathscr{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$: espace des opérateurs compacts de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

$\rho(A)$: ensemble résolvant de l'opérateur A.

$\langle .,. \rangle_{\mathscr{D}'}$: crochet de dualité.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: ouvert bourné, $\overline{\Omega}$ fermeture de Ω.

$L_2(\Omega; \mathcal{X})$: espace des fonctions v telles que $t \longmapsto \|v(t)\|_{\mathcal{X}}$ est une fonction de $L_2(\Omega)$.

$L_\infty(\Omega; \mathcal{X})$: espace des fonctions v telles que $\sup\limits_{\Omega} \|v(t)\|_{\mathcal{X}}$ est finie.

Table des matières

Introduction 1

0.1 Analyse bibliographique . . . 1

0.2 Contenu du mémoire . . . 4

1 Rappels d'analyse fonctionnelle 6

1.1 Opérateurs linéaires . . . 6

1.1.1 Opérateurs bornés . . . 6

1.1.2 Opérateurs non-bornés . . . 8

1.2 Opérateurs dépendant d'un paramètre . . . 10

1.2.1 Continuité . . . 10

1.2.2 Différentiabilité . . . 11

1.2.3 Opérateurs de régularisation . . . 12

1.3 Lemme de Gronwall . . . 12

2 Estimation de la solution forte et corollaires 14

2.1 Position du problème . . . 14

2.2 Espaces fonctionnels . . . 15

2.3 Estimation a priori . . . 20

2.4 Corollaires . . . 31

3 Existence de la solution forte et continuité par rapport aux paramètres 33

3.1 Existence de la solution forte 33
3.2 Continuité de la solution forte par rapport aux paramètres 47

Exemple **50**

Conclusion et perspectives **54**

Bibliographie **56**

Introduction

0.1 Analyse bibliographique

La théorie des équations différentielles à coefficients opérationnels non bornés, dans les espaces de Banach est apparue et a commencé a se développer intensivement dans les années cinquante dans les travaux fondamentaux de E. Hill [28] et K. Yosida [55].
Les premiers théorèmes d'existences de la solution du problème de Cauchy pour les équations différentielles à coefficients opérationnels ont été établis dans l'article de T. Kato [30].
Les équations différentielles opérationnelles dans les espaces de Banach dans le cas où le domaine de définition de l'opérateur A dépendait de t, ont été étudiées par P.E. Sobolevski [50].
De nouvaux résultats sur l'existence de la solution du problème de Cauchy avec des coefficients opérationnels variables ont été obtenus par H. Tanabe [51] pour des équations d'évolution de type parabolique.
Dans les travaux de P.E. Sobolevski, M.A. Krasnolski et S.G. Krein [36, 37] ont été étudiées les conditions, pour lesquelles la formule qui donne la solution de l'équation non homogène à partir de l'équation homogène, définie la solution classique. Une partie importante de ces résultats est décrite dans la monographie de S. G. Krein [37].
Par une approche variationnelle les équations différentielles à opérateurs non-bornés dans les espaces de Banach ont été étudiées dans les travaux de M.I. Visik [54] et M.I. Visik & O.A. Ladyzenskaya [53]. Cette approche a permis de définir une nouvelle notion de la solution faible.

Les principaux résultats dans cette direction sont décrits dans les monographies de J.L. Lions [41] et J.L. Lions & E. Magenes [42].
Il est important de signaler les travaux de J.A. Dubinski [20, 21] dans les quelles on donne une classification des équations différentielles opérationnelles d'ordre supérieur à coefficients constants, ainsi que les positions correctes des problèmes et où on étudie l'existence de la solution.
Dans les travaux de N.I. Yurchuk [56, 58] et V.I. Chessalyn [18, 19] grâce à la méthode des inégalités énergétiques est étudiée une classe assez large d'équations différentielles opérationnelles d'ordre supérieur avec une seule variable, sont établies les positions correctes de ces problèmes et sont démontrés l'existence et l'unicité des solutions fortes des problèmes considérés.
Dans les travaux de F. Rebbani [48, 49] sont généralisés les résultats de N.Y. Yurchuk et V. Chessalyn aux équations différentielles dépendant de deux variables indépendantes. Ce qui a élargi considérablement la classe des équations étudiées.
Le cas n-variables a été traité dans le mémoire de Magister de B. Labed [46].
Toujours grâce à la méthode des inégalités énergétiques a été traité le problème de Goursat dans [27] pour une équation hyperbolique de second ordere à coefficients opérationnels non-bornés dépendant de t.
Cette méthode a été utilisée pour l'étude des problèmes liés aux equations elliptiques [40, 41, 54], paraboliques [39, 40, 54, 58], hyperboliques [15, 35, 39, 40, 44], composites [1], mixtes [32], non-classiques [2, 5, 8], et opérationnelles avec des conditions aux limites de type Cauchy, Dirichlet, Neumann, Goursat, nonlocales et intégrales [4, 17, 18, 25, 28, 29, 49, 60], ainsi que pour les problèmes de transmission [32].
Les problèmes avec des conditions aux limites non-locales ont été étudiés par pleusieurs chercheurs. La signification physique des conditions aux limites non-locales a servi de base pour l'intérêt croissant porté a ce type de problème. La modélisation mathématique des problèmes non-locaux est rencontré en théorie de transmission de la chaleur, en théorie des populations, thermo-élasticité, élasticité, physique de plasma et en métallurgie [15, 29].
Parmi les travaux récents dans cette direction, nous citons ceux de A. Bouziani [4, 6, 9, 10] qui a étudié des problémes mixtes pour une classe d'équations paraboliques et hyperboliques

avec conditions intégrales.

Dans le travail de F. Zouyed [60] a été étudiée une équations différéntielle hyperbolique de second ordre à coefficient opérationnel non-borné avec des conditions aux limites non-locales, mais le coefficient opérationnel était indépendant de t.

F. Rebbani & A. Guezane-lakoude [49] ont étudié un problème équivalent à [60] mais avec des conditions aux limites non-locales opérationnelles.

Il est aussi intéressant de citer les travaux de V.I. Chessalyn qui a étudie dans [17] un problème aux limites, et dans [18] l'équation de Liav, toujours avec des conditions aux limites non-locales.

Le présent mémoire est une généralisation de certains travaux de V.I. Chessalyn [18] et F. Zouyed [60].

0.2 Contenu du mémoire

Dans ce travail on étudie dans un rectangle borné $D =]0,\, T_1[\times]0,\, T_2[$ de $\mathbb{R}^2$ un problème aux limites pour une équation différentielle de type :

$$\mathcal{L}_\lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)\left(u + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f(t)\,, \tag{E}$$

avec les conditions non locales :

$$\begin{cases} l_{1\mu} u \equiv \mu_1 u \mid_{t_1=0} - \mu_2 u \mid_{t_1=T_1} = \varphi(t_2)\,, \\ l_{2\mu} u \equiv \mu_1 u \mid_{t_2=0} - \mu_2 u \mid_{t_2=T_2} = \psi(t_1)\,, \end{cases} \tag{NC}$$

où $A(t)$ est un opérateur non-borné, λ est un paramètre réel, μ_1 et μ_2 sont deux paramètres complexes.

Pour ce type de problème on établit des théorèmes d'existence, d'unicité de la solution forte généralisée, sa dépendance continue par rapport aux données $(f,\, \varphi,\, \psi)$, ainsi que sa continuité par rapport aux paramètres $(\mu,\, \lambda)$.

Ces résultats sont obtenus grâce à la méthode des **estimations a priori** (dite aussi, méthode des **inégalités énergétiques**) basée sur la technique des multiplicateurs. Cette méthode résulte des idées introduites par J.Leray [40], L. Garding [25], I.G. Petrovsky [46] dans leurs travaux, et de celles développées dans l'ouvrage de A.A. Dezin [19], et dans les travaux de N.I. Yurchuk [56, 57, 58, 59] et V.I. Korzyuk [34].

Elle consiste en :

☐ d'abord écrire le problème posé sous forme opérationnelle :

$$Lu = F, \quad u \in \mathcal{D}(L), \tag{1}$$

où l'opérateur L est engendré par l'équation (E) et les conditions (NC) et est considéré de l'espace de Banach $\mathbb{B}$ dans l'espace de Hilbert $\mathbb{V}$.

☐ établir ensuite les estimations a priori pour l'opérateur L.

☐ démontrer ensuite la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace $\mathbb{V}$.

Plus précisément, on suivra le shema suivant :

On établit l'estimation a priori du type :

$$|||u|||_{\mathbb{B}} \leq c\, |||Lu|||_{\mathbb{V}}\,. \tag{2}$$

Cette estimation est obtenue en général en multipliant scalairement l'équation par u ou ses dérivées et une fonction poids, et en faisant des intégrations par parties.
En suite, on montre que l'opérateur L dans $\mathbb{B}$ admet une fermeture $\overline{L}$. La solution de l'équation opérationnelle :

$$\overline{L}u = F, \tag{3}$$

est appelée solution *forte généralisée* du problème considéré.
Par passage à la limite, l'estimations (2) est prolongée aux solutions fortes généralisées, i.e., on a

$$\||u\||_{\mathbb{B}} \leq c \left\| \left| \overline{L}u \right| \right\|_{\mathbb{V}}. \tag{4}$$

A partir de là, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (3), l'égalité des ensembles $\mathcal{R}(\overline{L})$ et $\overline{\mathcal{R}(L)}$, et l'inversibilité de $\overline{L}$, l'inverse $\left(\overline{L}\right)^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs de l'opérateur $\overline{L}$.
La dernière étape, consiste à établir la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L)$ dans $\mathbb{V}$ et donc l'existence d'une solution forte généralisée du problème (1).

Commentaire. La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode, on est confronté à difficultés, parmi lesquelles :

- ▶ `Le choix de l'espace des solutions.`
- ▶ `Le choix du multiplicateur.`
- ▶ `Le choix de l'opérateur de régularisation.`

Il est important de noter qu'il n'existe pas encore, pour ce type d'équations, une théorie générale analogue à celle des équations paraboliques et hyperboliques classiques. Ceci est dû à la relative nouveauté de cette thématique d'une part et à la complexité et des questions qu'elle soulève. Chaque problème nécessite donc un traitement spécifique. Ce qui souligne l'actualité du sujet que nous traitons dans cette thèse.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On désigne ici par :

$\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des espaces de Banach.

$\mathcal{X}^*$ (resp. $\mathcal{Y}^*$) le dual topologique de $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$).

$\langle .,. \rangle$ le crochet de dualité.

$\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ muni de la norme $|.|$ et le produit scalaire $(.,.)$.

$\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$, que l'on munit de la norme définie par

$$\|B\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_{\mathcal{Y}}}{\|u\|_{\mathcal{X}}}.$$

1.1 Opérateurs linéaires

1.1.1 Opérateurs bornés

Théorèmes de prolongement

Théorème 1.1.1 *Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{X}$. Toute application linéaire continue de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{Y}$ a un unique prolongement linéaire continue de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$.*

Théorème 1.1.2 [prolongement de la convergence]. *Soient $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{X}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|B_n\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \leq c$$

et que, pour tout élément x de $\mathcal{D}$, la suite $B_n x$ a une limite Bx quand n tend vers l'infini. Alors l'application $B : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{Y}$ ainsi définie est linéaire continue, et, si $\widehat{B} \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est un prolongement de B, alors pour tout $x \in \mathcal{X}$,

$$B_n x \longrightarrow \widehat{B}x, \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Principe de la borne uniforme

Théorème 1.1.3 [Banch-Steinhaus]. *Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs de $\mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ vérifiant*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \sup_{i\in I} \|B_i x\|_{\mathcal{Y}} < \infty. \tag{a}$$

Alors (a) a lieu uniformément sur la boule unité de $\mathcal{X}$, i.e.,

$$\sup_{i\in I} \|B_i\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} < \infty. \tag{b}$$

► L'application de ce théorème apparaît bien dans les opérateurs dépendant d'un paramètre t, où le paramètre t joue le rôle de l'indice i.

Théorème de l'isomorphisme

Théorème 1.1.4 *Toute bijection linéaire continue de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{Y}$ a un inverse continu.*

Théorème du graphe fermé

Théorème 1.1.5 *Soit $B : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ une application linéaire. Alors B est continue si et seulement si le graphe de B est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, c'est-à-dire : pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{X}$ vérifiant $(x_n \longrightarrow x,\ n \longrightarrow \infty)$ dans $\mathcal{X}$ et $(Bx_n \longrightarrow y,\ n \longrightarrow \infty)$ dans $\mathcal{Y}$, on a $y = Bx$*

Théorème 1.1.6 *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach unitaire d'élément unité e. Si $|v| < 1$, alors $e + v$ est inversible et on a $(e+v)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k v^k$.*

► Comme application de ce théorème on prend $\mathscr{A} = \mathscr{L}(\mathcal{X})$ ou $\mathscr{A} = \mathscr{L}(H)$.

1.1.2 Opérateurs non-bornés

On appelle opérateur sur $\mathcal{X}$, la donnée d'un couple $(A, \mathcal{D}(A))$, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}$ qu'on suppose en général dense dans $\mathcal{X}$.
Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $G(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ défini par $G(A) = \{(v,\, Av), \quad v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Définition 1.1.1 On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{X}$ et $Au_n \longrightarrow v$ dans $\mathcal{Y}$, alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

► L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe dans $\mathcal{X}$.

Définition 1.1.2 On dit qu'un opérateur A est fermable dans $\mathcal{X}$ s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussitôt que A est fermable dans $\mathcal{X}$ si et seulement si l'adhérence $\overline{G(A)}$ de son graphe est un graphe. Autrement dit A est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \longrightarrow 0$ et $Au_n \longrightarrow v$, alors $v = 0$.
L'opérateur fermé $\overline{A}$ dont le graphe $G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$ est appelé fermeture de A.

Théorème 1.1.7 [Théorème du graphe fermé]. *Si l'opérateur fermé A est définit sur tout l'espace $\mathcal{X}$, alors A est borné*

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = \mathcal{X} \Longrightarrow A \text{ borné}).$$

Définition 1.1.3 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A, comme suit :

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{Y}^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in \mathcal{Y}^* : \exists\, c > 0 \text{ tel que } |\langle v,\, Au\rangle| \leq c\, |u|_{\mathcal{X}}\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\}\,.$$

Dans ce cas la fonctionnelle $u \longmapsto g(u) = \langle v,\, Au\rangle$ elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c\, |u|_{\mathcal{X}}\,, \quad \forall u \in X$. Par suite $f \in \mathcal{X}^*$. On a par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^*

$$\langle v,\, Au\rangle_{\mathcal{Y}^* \times \mathcal{Y}} = \langle A^* v,\, u\rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),\ \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

Proposition 1.1.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné à domaine dense. Alors A^* est fermé.*

Définition 1.1.4 L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e., $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ et $(v,\, Au) = (Av,\, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A)$.

► L'adjoint d'un opérateur borné $B \in \mathscr{L}(\mathcal{X},\, \mathcal{Y})$ existe toujour et on a de plus $\|B\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \|B^*\|_{\mathscr{L}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)}$.

► Si $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$, alors $\overline{A^*} = A^*$. Si de plus, $\mathcal{D}(A^*)$ est dense, alors $A^{**} = (A^*)^* = \overline{A}$.

Proposition 1.1.2 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$. L'opérateur A^{-1} existe et est borné sur $\mathcal{R}(A)$, si et seulement si pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$ on a $|Au| \geq m\,|u|$, où m est une constante positive indépendante de u.*

Théorème 1.1.8 [Caractérisation des opérateurs à image fermé].
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
Les propriétés suivantes sont equivalentes :
(i) $\mathcal{R}(A)$ est fermé,
(ii) $\mathcal{R}(A^*)$ est fermé,
(iii) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^{\perp}$,
(iv) $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.9 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) A est surjectif, i.e., $\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}$,
(b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

(c) $\mathcal{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathcal{R}(A^*)$ est fermé.

▶ En pratique si l'on cherche à établir qu'un opérateur A est surjectif, on utilise l'implication $((b) \Longrightarrow (a))$ de la manière suivante. On considère l'équation $A^*v = f$ avec $f \in \mathcal{Y}^*$ et on montre que $\|v\| \leq k\|f\|$ avec k indépendante de f. Cette technique s'appelle la méthode des *estimations a priori* : on ne se préocupe pas de savoir si l'équation $A^*v = f$ possède une solution de cette équation, et on cherche à estimer sa norme.

Théorème 1.1.10 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) A^* est surjectif, i.e., $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{X}^*$,
(b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|Av|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A),$$

(c) $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ et $\mathcal{R}(A)$ est fermé.

Corollaire 1.1.1 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{X}$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur $\mathcal{X}$ si et seulement s'il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que*

$$|u| \leq m_1 |Au|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$|v| \leq m_2 |A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

1.2 Opérateurs dépendant d'un paramètre

1.2.1 Continuité

Définition 1.2.1 la fonction $[0, T] \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est simplement (resp. fortement) continue en $t_0 \in [0, T]$ si, pour tout $x \in \mathcal{X}$ la fonction $y(t) = A(t)x$ est continue en t_0, i.e., $\forall x \in \mathcal{X}$ la fonction $|y(t) - y(t_0)|_{\mathcal{Y}} = |A(t)x - A(t_0)x|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow t_0$ (resp. $\|A(t) - A(t_0)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \longrightarrow 0$, quand $t \longrightarrow t_0$). Et simplement (resp. fortement) continue sur $[0, T]$ si elle l'est en tout point de $[0, T]$.

Lemme 1.2.1 *Si l'opérateur $A(t) \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est simplement continu sur $[0, T]$. Alors il est uniformément borné par rapport à t.*

Ceci est une conséquence immédiate de théorème de la borne uniforme.

1.2.2 Différentiabilité

Définition 1.2.2 L'opérateur $A(t) \in \mathscr{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est simplement dérivable en t_0 si, pour tout $x \in X$ la fonction $y(t) = A(t)x \in \mathcal{Y}$ est dérivable en t_0, et simplement dérivable sur $[0, T]$ si elle l'est en tout point de $[0, T]$.

Remarque 1.2.1 Les notions de continuité et dérivabilité dans le cas où $A(t)$ est un opérateur non-borné, fermé, à domaine de définition dense, indépendant de t, sont analogues à celles du cas borné.

Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}_A$ indépendant de t.

Lemme 1.2.2 *On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}(A(t))$, et $B(t)$ est un opérateur linéaire borné, simplement continûment dérivable. Alors l'opérateur $C(t) = B(t)A(t)$ défini sur $\mathcal{D}(A(t))$ est simplement continûment dérivable, et on a*

$$C^{'}(t)u = B^{'}(t)A(t)u + B(t)A^{'}(t)u, \quad u \in \mathcal{D}(A(t)),\ t \in [0, T]\,.$$

Lemme 1.2.3 *On suppose que $A(t)$ est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}(A(t))$, et admet un inverse borné. Alors $A(t)^{-1}$ est simplement continûment dérivable, et on a*

$$(A(t)^{-1})^{'} = -A(t)^{-1}A(t)^{'}A(t)^{-1}.$$

Pour la démonstration de ces lemmes voir (S.G. Krein [37], Chap **II**, page 176-188) et (H. Tanabe [52], Chap **I**, page 15).

Théorème 1.2.1 *Soit $A(t)$ un opérateur auto-adjoint défini positif, à domaine de définition $\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}_A$ indépendant de t, et simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}_A$. Alors l'opérateur $A^{\alpha}(t)$, $0 \le \alpha \le 1$, est simplement continûment dérivable sur $\mathcal{D}_A$.*

► Pour les opérateurs fractionnaires dépendant d'un paramètre t, $(A^{\alpha}(t)\ ,\ 0 \le \alpha \le 1)$ on peut consulter les livres (S.G. Krein [37], Chap **II**, page 176-188) et (H. Tanabe [52], Chap **2**, page 19-20 et Chap **4**, page 108-113).

1.2.3 Opérateurs de régularisation

Dans la pratique, les opérateurs les plus rencontrés sont des opérateurs différentiels, donc l'expression $u \in \mathcal{D}(L)$ exprime une certaine régularité. les opérateurs de régularisation (en anglais : *molification operators*) sont un outil qui permet de faire correspondre à un élément d'un espace fonctionnel donné son régularisé, i.e., un élément du même espace mais possédant des propriétés de régularité plus importantes et qui lui est en même temps proche par rapport à la norme considérée.

Définition 1.2.3 Soit $A(t) : \mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}_A \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ un opérateur non-borné, fermé, à domaine de définition $\mathcal{D}_A$ indépendant de t, avec $\overline{\mathcal{D}_A} = \mathcal{X}$. Pour cet opérateur on définit la famille d'opérateurs $\{\mathcal{R}_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$ ayant les propriétés suivantes :

(1) l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ est fortement continu en t, et uniformément borné en ε ;

(2) pour chaque ε l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ applique $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{D}_A$;

(3) l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ commute avec A ;

(4) l'opérateur $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ converge fortement vers I, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, i.e.,
$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \|\mathcal{R}_\varepsilon(t)x - x\| \longrightarrow 0$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

(pour plus de détail, voir [34]).

▶ Si $A(t) = A(t)^*$ et $(A(t)u,\, u) \geq \lambda_0 |u|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A(t))$, $\lambda_0 > 0$, on définit l'pproximation de Yosida :

$$\mathcal{R}_\varepsilon(t) = (I + \varepsilon A(t))^{-1}.$$

On montre que la famille d'opérateurs $\mathcal{R}_\varepsilon(t)$ vérifie les propriétés (1)-(4). (voir [13], proposition VII.2, page 102).

1.3 Lemme de Gronwall

Le lemme de Gronwall et ses variantes jouent un grand rôle dans les estimations des termes intégrodifférentiels.

Lemme 1.3.1

(VG1) Soit $w(t)$ et $g(t)$ des fonctions non négatives et intégrables sur $D =]0, T[$, et telle que la fonction $g(t)$ soit non-décroissante. Alors de l'inégalité

$$w(t) \leq M \int\limits_0^t w(s)ds + g(t),$$

découle l'inégalité

$$w(t) \leq \exp(Mt)g(t).$$

(VG2) Soit $w(t)$ et $f(t)$ des fonctions non négatives et intégrables sur $D =]0,T[$, et telle que la fonction $f(t)$ soit non-croissante. Alors de l'inégalité

$$w(t) \leq M \int\limits_t^T w(s)ds + f(t),$$

découle l'inégalité

$$w(t) \leq \exp\left(M(T-t)\right) f(t).$$

D'autres notions et inégalités seront utilisées telle que l'ε-inégalité

$$2|Re(a,b)| \leq \varepsilon \left|a\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left|b\right|^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Chapitre 2

Estimation de la solution forte et corollaires

2.1 Position du problème

Soit $D =]0, T_1[\times]0, T_2[$ un rectangle borné de $\mathbb{R}^2$ de variable $t = (t_1, t_2)$, et H un espace de Hilbert complexe, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|$ et $(.,.)$.

On considère dans H l'équation :

$$\mathcal{L}_\lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A(t)\left(u + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f\ (t)\,, \tag{1}$$

où λ est un paramètre réel ($\lambda \geq 0$), u, f sont des fonctions de variable $t = (t_1, t_2) \in D$ et à valeurs dans H, $A(t)$ est un opérateur linéaire dans H, non-borné, à domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ indépendant de t, et partout dense dans H.

L'opérateur A est auto-adjoint et vérifie les conditions suivantes :

$$(\mathscr{A}_1) \qquad (Au, u) \geq c_0 |u|^2\,,\ \forall u \in \mathcal{D}(A)\,, \quad \forall t \in \overline{D},$$

où c_0 est une constante positive indépendante de u.

$$(\mathscr{A}_2) \qquad \begin{cases} A(0, t_2) = A(T_1, t_2)\,, & t_2 \in [0, T_2]\,, \\ A(t_1, 0) = A(t_1, T_2)\,, & t_1 \in [0, T_1]\,. \end{cases}$$

A l'équation (1) on associe les conditions initiales non locales suivantes :

$$\begin{cases} l_{1_\mu} u \equiv \mu_1 u\,|_{t_1=0} - \mu_2 u\,|_{t_1=T_1} = \varphi(t_2)\,, \\ l_{2_\mu} u \equiv \mu_1 u\,|_{t_2=0} - \mu_2 u\,|_{t_2=T_2} = \psi(t_1)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Les fonctions φ et ψ sont respectivement définies de $[0, T_2]$, $[0, T_1]$ à valeurs dans H, et vérifient la condition :

$$\mu_1\varphi(0) - \mu_2\varphi(T_2) = \mu_1\psi(0) - \mu_2\psi(T_1), \tag{3}$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2)$, où μ_1, μ_2 sont deux paramètres complexes tels que $\mu_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$, réalisant une des conditions :

$$(\mathscr{B}_1) \qquad \alpha_1(\mu) = \exp\left[3C(T_1 + T_2)\right] \left|\mu_1^{-1}\mu_2\right|^2 < 1,$$

$$(\mathscr{B}_2) \qquad \alpha_2(\mu) = \exp\left[3C(T_1 + T_2)\right] \left|\mu_2^{-1}\mu_1\right|^2 < 1.$$

2.2 Espaces fonctionnels

Tout d'abord introduisons certains espaces fonctionnels nécessaires pour l'étude du problème considéré.

On définit sur l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ la norme hermitienne suivante :

$$|u|_1 = |A(0)\, u|,$$

on otient l'espace de Hilbert W^1.

De manière analogue, on définit sur l'ensemble $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ la norme

$$|u|_{\frac{1}{2}} = \left|A^{\frac{1}{2}}(0)u\right|,$$

on obtient ainsi l'espace de Hilbert $W^{1/2}$.

Remarque.

- Les opérateurs $A(0)$ et $A^{\frac{1}{2}}(0)$ sont bornés de W^1 et $W^{1/2}$ respectivement dans H.
- D'après les propriétés de l'opérateur A on a les inclusions topologiques suivantes :

$$W^1 \subset W^{1/2} \subset H.$$

- W^1 est partout dense dans $W^{1/2}$ et dans H.
- De plus, par définition de L_2, on a les inclusions topologiques suivantes :

$$L_2(D; W^1) \subset L_2(D; W^{1/2}) \subset L_2(D; H).$$

Proposition 2.2.1 *L' opérateur $A(t)^{-1}$ (resp. $A(t)^{-\frac{1}{2}}$) est borné de H dans H.*

Preuve. Voir le théorème 1.1.1 (Rappels) □

Proposition 2.2.2 *L'opérateur $A(t)$ (resp. $A(t)^{\frac{1}{2}}$) est borné de W^1 (resp. $W^{\frac{1}{2}}$) dans H.*

Preuve. Posons

$$B(t) = A(t)A(0)^{-1} \text{ et } C(t) = A(t)^{\frac{1}{2}}A(0)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'après la proposition 2.2.1 et le théorème du graphe fermé on a $B(t) \in \mathscr{L}(H)$.
Pour chaque $t \in \overline{D}$, on peut écrire

$$|A(t)u| = \left|A(t)A(0)^{-1}A(0)u\right| = |B(t)A(0)u| \leq \|B(t)\|_{\mathscr{L}(H)} |A(0)u| = \|B(t)\|_{\mathscr{L}(H)} |u|_1 ,$$

ce qui permet d'affirmer que $A(t) \in \mathscr{L}(W^1; H)$. De manière analogue on démontre aussi que $A(t)^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}}; H)$. □

Proposition 2.2.3 [59] *Si la fonction $\overline{D} \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1, H)$ est continue par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1; H)$, alors il existe des constantes positives c_1 et c_2 telles que*

$$c_1 |u|_1 \leq |A(t)u| \leq c_2 |u|_1 , \quad \forall u \in W^1, \tag{4}$$

$$\sqrt{c_1} |u|_{\frac{1}{2}} \leq \left|A(t)^{\frac{1}{2}}u\right| \leq \sqrt{c_2} |u|_{\frac{1}{2}} , \quad \forall u \in W^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Lemme 2.2.1 ([37], Lemme 1.9, page 186). *Si la fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1, H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2, par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1, H)$. Alors on a les estimations*

$$\left\|\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_1} A(t)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq K \left\|A(t)'_{t_1}A(t)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} , \tag{6}$$

$$\left\|\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_2} A(t)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq K \left\|A(t)'_{t_2}A(t)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} , \tag{7}$$

où K est donné par $K = \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{(1+s)^2} ds$ *et* $\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} = \frac{\partial A(t)^{\frac{1}{2}}}{\partial t_i}$, $A(t)'_{t_i} = \frac{\partial A(t)}{\partial t_i}$, $(i = 1, 2)$.

Proposition 2.2.4 *Les opérateurs* $A(t)'_{t_i}A(t)^{-1}$, $\left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \in L_\infty(\overline{D};\mathscr{L}(H))$.

Preuve. Montrons que

$$\sup_{\overline{D}} \left\| A(t)'_{t_i}A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \text{ et } \sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \text{ sont finies, } (i=1,2).$$

D'après le théorème de la borne uniforme on a l'estimation

$$\sup_{\overline{D}} \left\| A(t)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^1,H)} \leq c_i^*, \quad (i=1,2). \tag{8}$$

En utilisant l'estimation (8) et (4), on obtient

$$\left| A(t)'_{t_i}u \right| \leq c_i^* c_1^{-1} \left| A(t)u \right|, \quad (i=1,2), \tag{9}$$

en remplaçant u par $A(t)^{-1}v$ dans (9), on obtient

$$\left| A(t)'_{t_i}A(t)^{-1}v \right| \leq c_i^* c_1^{-1} \left| v \right|, \quad \forall v \in H, \quad (i=1,2), \tag{10}$$

ce qui implique que

$$\left\| A(t)'_{t_i}A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq c_i^* c_1^{-1}, \quad \forall t \in \overline{D}, \quad (i=1,2),$$

d'où

$$\sup_{\overline{D}} \left\| A(t)'_{t_i}A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq c_i^* c_1^{-1} = p_i < +\infty, \quad (i=1,2). \tag{11}$$

La fonction $D \ni t \longmapsto A(t)^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}}, H)$ admet aussi des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2, et on a l'estimation

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}},H)} \leq b_i^*, \ (i=1,2). \tag{12}$$

Pour démontrer cela, on utilise les estimations (6), (7), les inégalités (5) et (11), on obtient

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}}u \right| \leq K \left\| A(t)'_{t_i}A(t)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(H)} |u| \leq Kp_i |u|, \quad (i=1,2). \tag{13}$$

posons $u = A(t)^{\frac{1}{2}}v$, (13) devient alors

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}}\right)'_{t_i} v \right| \leq Kp_i \left| A(t)^{\frac{1}{2}}v \right| \leq Kp_i\sqrt{c_2}\, |v|_{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in W^{\frac{1}{2}}, \quad (i=1,2), \tag{14}$$

d'où on déduit

$$\left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}},H)} \leq b_i^*, \quad \forall t \in \overline{D}, \quad (i=1,2),$$

ou encore

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} \right\|_{\mathscr{L}(W^{\frac{1}{2}},H)} \leq b_i^* \leq +\infty, \ (i=1,2), \tag{15}$$

où $b_i^* = Kp_i\sqrt{c_2}$.

Il reste à vérifier que $\sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)}$, $(i=1,2)$ est finie.

On a

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} u \right| \leq b_i^* \left| u \right|_{\frac{1}{2}}, \qquad (i=1,2), \tag{16}$$

en utilisant l'estimation (5) et (16), on obtient

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} u \right| \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left| A(t)^{\frac{1}{2}} u \right|, \qquad (i=1,2), \tag{17}$$

en remplaçant u par $A(t)^{-\frac{1}{2}}v$ dans (17), on obtient

$$\left| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} v \right| \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}} \left| v \right|, \quad \forall v \in H, \quad \forall t \in \overline{D} \qquad (i=1,2),$$

ce qui entraîne

$$\left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \quad \forall t \in \overline{D}, \quad (i=1,2),$$

et donc

$$\sup_{\overline{D}} \left\| \left(A(t)^{\frac{1}{2}} \right)'_{t_i} A(t)^{-\frac{1}{2}} \right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq b_i^* \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \qquad (i=1,2). \tag{18}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2.4. □

Soit

$$d_i \ = \ 2(K+1) \left\| \frac{\partial(\,A(t)\,)}{\partial t_i} A^{-1}(t) \right\|_{\mathscr{L}(H),\infty}, \quad (i=1,2), \ \ C = \max(d_1, d_2)$$

et

$$\mathscr{M} = \left\{ \mu = (\mu_1,\, \mu_2) \in \mathbb{C}^2 : \ \ (\mathscr{B}_1) \text{ ou } (\mathscr{B}_2) \text{ soit réalisée} \right\}.$$

Notons par $H^{1,1}(D;W^1)$ l'espace obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty(\overline{D};W^1)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{1,1}^2 = \int_D \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|_1^2 + \left| \frac{\partial\, u}{\partial t_2} \right|_1^2 + |u|_1^2 \right\} dt.$$

Soit $H^1([0,\, T_2]\,; W^{1/2})$ l'espace obtenu par complétion de l'espace $\mathscr{C}^\infty([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\,)$ par rapport à la norme

$$\|\,\varphi\,\|_1^2 = \int_0^{T_2} \left\{ |\varphi'|^2 + |\varphi|_{\frac{1}{2}}^2 + 2\lambda\, |\varphi'|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda\, |\varphi|_1^2 + \lambda^2\, |\varphi'|_1^2 \right\} dt_2.$$

De manière analogue on construit l'espace $H^1([0,\, T_1]\,; W^{1/2})$ muni de la norme

$$\|\,\psi\,\|_1^2 = \int_0^{T_1} \left\{ |\psi'|^2 + |\psi|_{\frac{1}{2}}^2 + 2\lambda\, |\psi'|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda\, |\psi|_1^2 + \lambda^2\, |\psi'|_1^2 \right\} dt_1.$$

En complétant l'espace $\mathscr{C}^\infty(\overline{D}; W^1)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned} |||u|||_1^2 \;\; = \;\; & \frac{\sigma_i(\mu)}{\lambda+1} \left(\int_D \left\{ \lambda \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \lambda^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda^3 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_1^2 \right\} dt \right. \\ & \left. + \sup_{\tau \in D} \left(\|u(\tau_1, .)\|_1^2 + \|u(., \tau_2)\|_1^2 \right) \right) , \end{aligned}$$

où $\sigma_i(\mu) = \dfrac{(\alpha_i(1-\alpha_i))^2}{(1+\alpha_i)^4(1+\left|\mu_i^{-1}\right|^2)}$, $(i = 1, 2)$, selon que soit réalisée la condition $(\mathscr{B}_1)$ où $(\mathscr{B}_2)$. On obtient l'espace de Banach $E^1_{\lambda,\mu}$.

Notons par E l'espace de Hilbert

$$L_2(D; H) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_1]\,; W^{1/2}\right),$$

composé des éléments $F = (f,\, \varphi,\, \psi)$ telle que la norme

$$|||F|||^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie.}$$

Le symbole $\|.\|$ désigne la norme de $L_2(D; H)$ espace des fonctions à carré intégrables définies de D dans H.

$$\widetilde{H^1}\left([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_1]\,; W^{1/2}\right)$$

est le sous espace fermé de $H^1\left([0,\, T_2]\,; W^{1/2}\right) \times H^1\left([0,\, T_1]\,; W^{1/2}\right)$ composé des éléments $(\varphi,\, \psi)$ tels que

$$\mu_1 \varphi\,(0) - \mu_2 \varphi\,(T_1) = \mu_1 \psi\,(0) - \mu_2 \psi\,(T_2)\,.$$

2.3 Estimation a priori

Soit l'opérateur $L_{\lambda,\mu} = (\mathcal{L}_\lambda,\, l_{1\mu},\, l_{2\mu})$ engendré par l'équation (1) et les conditions aux limites (2), agissant de $E^1_{\lambda,\mu}$ dans E, et à domaine de définition

$$\mathcal{D}(L_{\lambda,\,\mu}) = H^{1,1}(D; W^1) \subset E^1_{\lambda,\,\mu}.$$

On introduit l'hypothèse suivante :

$(\mathscr{H}_1)$ On suppose que la fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1,\, H)$ admet des dérivées bornées par rapport à t_1 et t_2 par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1; H)$.

Pour l'opérateur $L_{\lambda,\,\mu}$ on établit le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 [Estimation a priori]. *Si les conditions* $(\mathscr{H}_1)$ *et* $(\mathscr{B}_1)$ *(ou* $(\mathscr{B}_2)$*) sont vérifiées. Alors on a l'estimation*

$$|||\, u\, |||_1^2 \leq\, S\, |||\, L_{\lambda,\,\mu} u |||^2\,, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}\,(L_{\lambda,\,\mu}), \tag{19}$$

où S *est une constante positive indépendante de* λ, μ *et* u.

Pour la démonstration du Théorème 2.3.1, introduisons les lemmes suivants :

Lemme 2.3.1 *Soit* $|\,.|_m$ *la norme dans* W^m, $(m = 0,\, \frac{1}{2},\, 1)$. *soit* g *une fonction de variable* $t \in [0,\, T]$ *à valeurs dans* H, *et soit*

$$h = \mu_1\, g(0) - \mu_2\, g(T). \tag{a}$$

Alors si la condition $(\mathscr{B}_1)$ *est vérifiée on a*

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_1)\, |g(0)|_m^2 - \left|\mu_1^{-1}\mu_2\right|^2 |g(T)|_m^2 \leq \frac{(1+\alpha_1)\left|\mu_1^{-1}\right|^2}{(1-\alpha_1)}\, |h|_m^2\,, \tag{b}$$

et si la condition $(\mathscr{B}_2)$ *est vérifiée on a*

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_2)\, |g(T)|_m^2 - \left|\mu_2^{-1}\mu_1\right|^2 |g(0)|_m^2 \leq \frac{(1+\alpha_2)\left|\mu_2^{-1}\right|^2}{(1-\alpha_2)}\, |h|_m^2\,. \tag{c}$$

Preuve.

Si $(\mathscr{B}_1)$ est vérifiée, de (a) on a

$$|g(0)|_m^2 \leq (1+\varepsilon)\left|\mu_1^{-1}\mu_2\right|^2 |g(T)|_m^2 + (1+\varepsilon^{-1})\left|\mu_1^{-1}\right|^2 |h|_m^2\,,$$

en prenant $\varepsilon = \dfrac{1+\alpha_1}{1-\alpha_1}$ on obtient l'inégalité (b). Si $(\mathscr{B}_2)$ est vérifiée, de (a) on a

$$|g(T)|_m^2 \leq (1+\varepsilon)\left|\mu_2^{-1}\mu_1\right|^2 |g(0)|_m^2 + (1+\varepsilon^{-1})\left|\mu_2^{-1}\right|^2 |h|_m^2 ,$$

en prenant $\varepsilon = \dfrac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}$ on obtient l'inégalité (c). □

Lemme 2.3.2 [59] **[Lemme de Gronwall généralisé].**

$(VG1)$ *Soient $w(t_1, t_2)$ et $g(t_1, t_2)$ des fonctions non négatives et intégrables sur D, et telle que la fonction $g(t_1, t_2)$ soit non décroissante par rapport aux variables t_1 et t_2. Alors de l'inégalité*

$$w(t_1, t_2) \leq k\left\{\int_0^{t_1} w(s_1, t_2)\, ds_1 + \int_0^{t_2} w(t_1, s_2)\, ds_2\right\} + g\left(t_1, t_2\right),$$

découle l'inégalité

$$w(t_1, t_2) \leq \exp\left(2k(t_1+t_2)\right) g(t_1, t_2).$$

$(VG2)$ *Soient $w(t_1, t_2)$ et $g(t_1, t_2)$ des fonctions non négatives et intégrables sur D, et telle que la fonction $g(t_1, t_2)$ soit non croissante par rapport aux variables t_1 et t_2. Alors de l'inégalité*

$$w(t_1, t_2) \leq k\left\{\int_{t_1}^{T_1} w(s_1, t_2)\, ds_1 + \int_{t_2}^{T_2} w(t_1, s_2)\, ds_2\right\} + g\left(t_1, t_2\right),$$

découle l'inégalité

$$w(t_1, t_2) \leq \exp\left(2k(T_1+T_2-t_1-t_2)\right) g(t_1, t_2).$$

Démonstration du théorème 2.3.1. Multiplions scalairement dans H l'équation (1) par

$$Mu = \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2} + \lambda A(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right),$$

on obtient l'identité

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + \left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2 + 2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + \lambda\left|Au\right|^2 + \lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right\}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial t_2}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2 + 2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \lambda\left|Au\right|^2 + \lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\right\} =$$

$$
\begin{aligned}
&2Re\left(\mathcal{L}_\lambda u,\, 2Mu\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_1}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_2}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Posons

$$
F_2(t)=\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2+2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2+\lambda\left|Au\right|^2+\lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right\},
$$

$$
F_1(t)=\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\left|A^{\frac{1}{2}}u\right|^2+2\lambda\left|A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2+\lambda\left|Au\right|^2+\lambda^2\left|A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
G(t)=\;&2Re\left(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_1}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_2}\frac{\partial u}{\partial t_1},\, A\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)\\
&+4\lambda Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)+2Re\left((A^{\frac{1}{2}})'_{t_2}u,\, A^{\frac{1}{2}}u\right)\\
&+2\lambda Re\left(A'_{t_2}u,\, Au\right)+2\lambda^2 Re\left(A'_{t_1}\frac{\partial u}{\partial t_2},\, A\frac{\partial u}{\partial t_2}\right).
\end{aligned}
$$

L'identité (20) devient

$$
\frac{\partial}{\partial t_1}\left(F(t_2)\right)+\frac{\partial}{\partial t_2}\left(F(t_1)\right)=G(t). \tag{21}
$$

Intégrons l'identité (21) dans le rectangle $D_\tau =]0,\, \tau_1[\,\times\,]0,\, \tau_2[\, \subset D$, on obtient

$$
\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\,dt_2=\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} G(t)dt+\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\,dt_1+\int_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\,dt_2. \tag{22}
$$

En utilisant les estimations (6) et (7) du lemme 2.2.1 et quelques inégalités élémentaires, on obtient

$$
\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\,dt_1+\int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\,dt_2\leq
$$

$$
\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right|dt+C\int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1}\left(F_1(t)+F_2(t)\right)dt+\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\,dt_1+\int_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\,dt_2. \tag{23}
$$

En faisant des calculs similaires dans les rectangles $]\tau_1,\, T_1[\, \times\,]\tau_2,\, T_2[$, $]0,\, \tau_1[\, \times\,]\tau_2,\, T_2[$ et $]\tau_1,\, T_1[\, \times\,]0, \tau_2[$ respectivement, on obtient les trois inégalités suivantes :

$$-\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} (F_1(t) + F_2(t))\, dt - \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 - \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2, \quad (24)$$

$$\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 - \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 \leq$$

$$\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{0}^{\tau_1} (F_1(t) + F_2(t))\, dt + \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1, \quad (25)$$

$$\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 - \int_{0}^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C\int_{0}^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} (F_1(t) + F_2(t))\, dt + \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \int_{0}^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2. \quad (26)$$

Notons

$$\beta_1 = \exp(CT_1), \quad \beta_2 = \exp(CT_2), \quad \theta_1 = \exp\left(C(T_1 + T_2)\right), \quad \theta_2 = \exp\left(2C(T_1 + T_2)\right),$$

$$\delta_1 = \theta_2\beta_2\left|\mu_2\mu_1^{-1}\right|^2, \quad \delta_2 = \theta_2\beta_1\left|\mu_2\mu_1^{-1}\right|^2, \quad \alpha = \beta_1\delta_1 = \beta_2\delta_2, \quad \theta = \exp\left(3C(T_1 + T_2)\right).$$

On suppose ici que la condition $(\mathscr{B}_1)$ est réalisée.

Revenons maintenant à l'inégalité (23).

Si on pose

$$G(\tau_1,\, \tau_2) = \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_{0}^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2,$$

et

$$H(\tau_1,\, \tau_2) = \int_{0}^{\tau_2}\int_{0}^{\tau_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + \int_{0}^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 + \int_{0}^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2,$$

alors de l'inégalité (23) on tire

$$G(\tau_1,\, \tau_2) = \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$C \left\{ \int\limits_0^{\tau_1} G(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} G(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\} + H(\tau_1,\, \tau_2). \tag{27}$$

On remarque que l'inégalité (27) vérifie les conditions (VG2) du lemme 2.3.2 . Appliquons ce lemme à l'inégalité (27), on obtient

$$\int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \leq$$

$$\theta_2 \left\{ \int\limits_0^{\tau_2} \int\limits_0^{\tau_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 + \int\limits_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 \right\}. \tag{28}$$

Revenons maintenant à l'inégalité (25), on peut écrire

$$\int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{\tau_1} \int\limits_{\tau_2}^{T_2} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C \int\limits_0^{\tau_1} \int\limits_{\tau_2}^{T_2} (F_1(t) + F_2(t))\, dt + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2. \tag{29}$$

Fixons la variable τ_2 et considérons la fonction

$$Y(\tau_1,\, \tau_2) = \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 + \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1$$

comme une fonction d'une seule variable τ_1.

En appliquant à l'inégalité (29) le lemme de Gronwall (classique) et certaines estimations élémentaires, on obtient

$$\int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 - \beta_1 \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 \leq$$

$$\beta_1 \left\{ \int\limits_{\tau_2}^{T_2} \int\limits_0^{\tau_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt + C \int\limits_{\tau_2}^{T_2} \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t) dt + \int\limits_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 \right\} - \int\limits_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1. \tag{30}$$

De manière similaire on déduit de l'inégalité (26), l'inégalité

$$\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 - \beta_2 \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2$$

$$\leq \beta_2 \left\{ \int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + C \int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t) dt + \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 \right\} - \int_0^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2. \quad (31)$$

Multiplions (28) par $\frac{1}{4}(1+\alpha)^2$, (30) par $\frac{1}{2}\delta_1(1+\alpha)$, (31) par $\frac{1}{2}\delta_2(1+\alpha)$ et (24) par $\delta_1\delta_2$, puis sommons les quatres inégalités obtenues, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}(1-\alpha)(1+\alpha) \left\{ \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\} \\
&+\delta_1 \left(\tfrac{1}{2}(1+\alpha) - \delta_2\right) \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 + \delta_2 \left(\tfrac{1}{2}(1+\alpha) - \delta_1\right) \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 \leq \\
&\leq \left\{ \tfrac{1}{4}\theta_2(1+\alpha)^2 \int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + \tfrac{1}{2}\delta_1\beta_1(1+\alpha) \int_0^{\tau_2}\int_0^{\tau_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt \right\} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{2}\delta_2\beta_2(1+\alpha) \int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt + \delta_1\delta_2 \int_{\tau_1}^{T_1}\int_{\tau_2}^{T_2} 2\,|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)|\, dt \right\} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{2}\theta_2(1+\alpha)^2 \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \tfrac{1}{2}\delta_1(1+\alpha) \int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 \right\} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2 \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \alpha^2 \int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 \right\} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{2}\theta_2(1+\alpha)^2 \int_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \tfrac{1}{2}\delta_2(1+\alpha) \int_0^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2 \right\} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2 \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \alpha^2 \int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2 \right\} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{2}\delta_1\beta_1(1+\alpha)^2 \int_0^{\tau_1}\int_{\tau_2}^{T_2} F_1(t) dt + \tfrac{1}{2}\delta_2\beta_2(1+\alpha)^2 \int_{\tau_1}^{T_1}\int_0^{\tau_2} F_2(t) dt \right\} \\
&+ \left\{ \delta_1\delta_2 \int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t) dt + \delta_1\delta_2 \int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t) dt \right\}.
\end{aligned} \quad (32)$$

On commence par minorer le membre gauche. Remarquons que

$$\beta_1 \geq 1, \quad \beta_2 \geq 1,$$

$$\left(\frac{1}{2}(1+\alpha) - \delta_2\right)\delta_1 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_1, \quad \left(\frac{1}{2}(1+\alpha) - \delta_1\right)\delta_2 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_2,$$

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_1\beta_1\beta_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\beta_2 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha,$$
$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\delta_2\beta_1\beta_2 = \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\beta_1 \geq \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha.$$

Multiplons l'inégalité (32) par $\beta_1\beta_2$, et en tenant compte de la remarque précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\} \leq$$
$$\frac{1}{2}(1-\alpha)(1-\alpha)\beta_1\beta_2\left\{\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1 + \int_0^{\tau_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}$$
$$+\beta_2\left(\frac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_2\right)\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2 + \beta_1\left(\frac{1}{2}(1+\alpha)-\delta_2\right)\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1. \tag{33}$$

Le membre droit de l'inégalité (32) est majoré par

$$\begin{aligned}
&\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\\
&+\left\{\tfrac{1}{4}\theta(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,0)\,dt_1 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,T_2)\,dt_1\right\}\\
&+\left\{\tfrac{1}{2}\theta(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_2} F_2(0,\,t_2)\,dt_2 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_1\int_0^{\tau_2} F_2(T_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\\
&+\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\,0)\,dt_1 - \alpha^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\,T_2)\,dt_1\right\}\\
&+\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\,t_2)\,dt_2 - \alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\\
&+C\left\{\tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{\tau_1} F_1(t)dt + \tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt\right\}\\
&+\left\{\alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt + \alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t)dt\right\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Majorons séparément les intégrales se trouvant dans l'expression (34). En utilisant le lemme 2.3.1 et la condition $(\mathscr{A}_2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\theta(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,0)\,dt_1 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_2\int_0^{\tau_1} F_1(t_1,\,T_2)\,dt_1\\
&\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\int_0^{\tau_1} N(\psi)dt_1,
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\theta(1+\alpha)^2\int_0^{\tau_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \tfrac{1}{2}(1+\alpha)\alpha\beta_1\int_0^{\tau_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2 \\ &\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\int_0^{\tau_2} N(\varphi)dt_2,\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\theta_1\alpha(1+\alpha)^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, 0)\, dt_1 - \alpha^2\int_{\tau_1}^{T_1} F_1(t_1,\, T_2)\, dt_1 \\ &\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\int_{\tau_1}^{T_1} N(\psi)dt_1,\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\theta_1(1+\alpha)^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(0,\, t_2)\, dt_2 - \alpha^2\int_{\tau_2}^{T_2} F_2(T_1,\, t_2)\, dt_2 \\ &\leq\ \tfrac{1}{2}\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\int_{\tau_2}^{T_2} N(\varphi)dt_2,\end{aligned} \tag{38}$$

où

$$N(\varphi) = |\varphi'|^2 + \left|A(0,\, t_2)^{\frac{1}{2}}\varphi\right|^2 + 2\lambda\left|A(0,\, t_2)^{\frac{1}{2}}\varphi'\right|^2 + \lambda\left|A(0,\, t_2)\varphi\right|^2 + \lambda^2\left|A(0,\, t_2)^{\frac{1}{2}}\varphi\right|^2,$$

$$N(\psi) = |\psi'|^2 + \left|A(t_1,\, 0)^{\frac{1}{2}}\psi\right|^2 + 2\lambda\left|A(t_1,\, 0)^{\frac{1}{2}}\psi'\right|^2 + \lambda\left|A(t_1,\, 0)\psi\right|^2 + \lambda^2\left|A(t_1,\, 0)^{\frac{1}{2}}\psi\right|^2.$$

En combinant les inégalités (35), (36), (37), (38) et (33), on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2\right\} \leq \\ &\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\, Mu)\right| dt \\ &+2\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\left\{\int_0^{T_1} N(\psi)dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi)dt_2\right\} \\ &+\tfrac{1}{2}C(1+\alpha)\alpha\theta_1\left\{\int_0^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt + \int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1} F_1(t)dt\right\}.\end{aligned} \tag{39}$$

Pour qu'on se place dans les conditions du lemme 2.3.2, on considère premièrement le cas $\left(0 < \alpha < \frac{1}{3}\right)$. Lorsque $0 < \alpha < \frac{1}{3}$, on a alors

$$\frac{1}{2}(1+\alpha) \leq 2(1-\alpha) \text{ et } \alpha \leq (1-\alpha),$$

et l'inégalité (39) devient

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\leq\\
&2\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\\
&+4\theta_1^4\tfrac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\left\{\int_0^{T_1} N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2} N(\varphi)dt_2\right\}\\
&+C^*(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_2}\int_{\tau_1}^{T_1} F_2(t)dt+\int_{\tau_2}^{T_2}\int_0^{T_1} F_1(t)dt\right\},
\end{aligned}\tag{40}
$$

où $C^*=4C\theta_1$.

Si on pose

$$
G(\tau_1,\,\tau_2)=(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\},
$$

$$
\begin{aligned}
H(\tau_1,\,\tau_2)\;&=\;2\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\\
&\quad+4\theta_1^4\frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)}\left|\mu_1^{-1}\right|^2\left\{\int_0^{T_1} N(\psi)dt_1+\int_0^{T_2} N(\varphi)dt_2\right\},
\end{aligned}
$$

alors de l'négalité (40) on tire

$$
\begin{aligned}
G(\tau_1,\,\tau_2)&=(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\\
&\leq C^*\left\{\int_{\tau_1}^{T_1} G(t_1,\,\tau_2)dt_1+\int_{\tau_2}^{T_2} G(\tau_1,\,t_2)dt_2\right\}+H(\tau_1,\,\tau_2).
\end{aligned}\tag{41}
$$

On remarque que l'inégalité (41) vérifie les conditions (VG2) du lemme 2.3.2 . En vertu de ce lemme, on obtient

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha)\alpha\left\{\int_0^{T_1} F_1(t_1,\,\tau_2)\,dt_1+\int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\,t_2)\,dt_2\right\}\\
&\leq\gamma\left\{2\theta(1+\alpha)^2\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} 2\left|(\mathcal{L}_\lambda u,\,Mu)\right|dt\right\}
\end{aligned}
$$

$$+ 4\theta_1^4 \frac{(1+\alpha)^2}{(1-\alpha)} \left|\mu_1^{-1}\right|^2 \left\{ \int_0^{T_1} N(\psi) dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi) dt_2 \right\}, \tag{42}$$

où $\gamma = \exp\left(2C^*(T_1+T_2)\right)$. En appliquant à l'inégalité (42) quelques estimations élémentaires, on obtient

$$\begin{aligned} &(1-\alpha)\alpha \left\{ \int_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\} \leq \\ &2\gamma^2 (1+\alpha)^2 \left\{ (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}) \left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2 + \varepsilon_2 \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} F_2(t) dt + \varepsilon_1 \int_0^{T_2}\int_0^{T_1} F_1(t) dt \right\} \\ &+ \tfrac{2\left|\mu_1^{-1}\right|^2}{(1-\alpha)} \left\{ \int_0^{T_1} N(\psi) dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi) dt_2 \right\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Prenons $\varepsilon_i = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{4\gamma^2(1+\alpha)^2 T_{3-i}}$, $(i=1,2)$, puis intégrant l'inégalité (43) par rapport à τ_i de 0 à T_i $(i=1,2)$, on obtient

$$\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha \left\{ \int_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\}$$

$$\leq \frac{\gamma^2(1+\alpha)^2 T_1 T_2}{(1-\alpha)} \left\{ \frac{8\gamma^2}{\alpha}(T_1+T_2) \left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2 + 4\left|\mu_1^{-1}\right|^2 \left(\int_0^{T_1} N(\psi) dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi) dt_2 \right) \right\}. \tag{44}$$

En utilisant quelques estimations élémentaires sur (44), on obtient

$$(1-\alpha)\alpha \left\{ \int_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\}$$

$$\leq \frac{16\gamma^4(1+\alpha)^4(T_1+T_2)^2}{(1-\alpha)\alpha} (1 + \left|\mu_1^{-1}\right|^2) \left\{ \left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2 + \int_0^{T_1} N(\psi) dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi) dt_2 \right\}. \tag{45}$$

De l'inégalité (45), vient

$$\sigma_1(\mu) \left\{ \int_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2 \right\}$$

$$\leq S_1 \left\{ \left\|\mathcal{L}_\lambda u\right\|^2 + \int_0^{T_1} N(\psi) dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi) dt_2 \right\}, \tag{46}$$

où $S_1 = 16 \exp\left(32C \exp\left(C(T_1+T_2)\right)(T_1+T_2)\right)$.

En vertu de (4) et (5), on obtient les inégalités suivantes :

$$\int_0^{T_1} N(\psi)dt_1 + \int_0^{T_2} N(\varphi)dt_2 \leq \max(1, c_2^2)\left\{\|l_{1\mu}u\|_1^2 + \|l_{2\mu}u\|_1^2\right\}, \tag{47}$$

$$\min(1,\, c_1^2)\left(\|u(.,\, \tau_2)\|_1^2 + \|u(\tau_1,\, .)\|_1^2\right) \leq \int_0^{T_1} F_1(t_1,\, \tau_2)\, dt_1 + \int_0^{T_2} F_2(\tau_1,\, t_2)\, dt_2, \tag{48}$$

$$\min(1,\, c_1^2)\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|_1^2 dt\right\} dt$$

$$\leq \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 dt\right\} dt. \tag{49}$$

Pour majorer le terme

$$\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2\right\} dt,$$

on multiplie (1) par $\sqrt{\lambda}$, et en faisant des estimations par rapport à la norme de H, on obtient

$$\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2\right\} dt$$

$$\leq 2\lambda\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{|Au|^2\, dt + 2\lambda|\mathcal{L}_\lambda u|^2\right\} dt. \tag{50}$$

On majore le premier terme du second membre de l'inégalité (50) grâce au second membre de l'inégalité (46). En combinant (47), (48), (49) et (50), on obtient

$$\frac{\sigma_1(\mu)}{(1+\lambda)}\left(\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left\{\lambda\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 + \lambda^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{\frac{1}{2}}^2 + \lambda^3\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|_1^2\right\} dt + \|u(.,\, \tau_2)\|_1^2 + \|u(\tau_1,\, .)\|_1^2\right)$$
$$\leq S_2\left\{\|\mathcal{L}_\lambda u\|^2 + \|l_{1\mu}u\|_1^2 + \|l_{2\mu}u\|_1^2\right\}, \tag{51}$$

où $S_2 = 32\exp\left(32C\exp\left(C(T_1+T_2)\right)(T_1+T_2)\right)\dfrac{\max(1,\, c_2^2)}{\min(1,\, c_1^2)}$.

Le membre droit de (51) ne dépend pas de τ. Passons au *sup* par rapport à $\tau \in D$, on obtient l'estimation a priori (19).

Considérons maintenant le cas $\left(\frac{1}{3} < \alpha < 1\right)$. Puisque l'inégalité (19) est vraie pour les μ telle que la fonction $\alpha(\mu) \leq \frac{1}{3}$. En faisant le changement de variable suivant :

$$\mu \longrightarrow \eta(\mu) = \frac{(1-\alpha(\mu))}{2}.$$

Avec ce changement on se ramène au cas $\left(0 < \eta(\mu) \leq \frac{1}{3}\right)$. Ce qui entraîne $\forall \alpha : 0 < \alpha < 1$,

$$|||u|||_1^2 \leq S\,|||L_{\lambda,\mu}u|||^2\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu}), \tag{52}$$

où $S = 128\exp\left(32C\exp\left(C(T_1+T_2)\right)(T_1+T_2)\right).$

Le cas où la condition $(\mathscr{B}_2)$ est réalisée se traite par la même méthodologie. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.3.1. □

2.4 Corollaires

Passons maintenant aux corollaires qui découlent du théorème 2.3.1.

Fermeture de l'opérateur $L_{\lambda,\mu}$.

Proposition 2.4.1 *L'opérateur $L_{\lambda,\mu}$ admet une fermeture de domaine de définition* $\mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \overline{\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})}$.

Preuve. Soit (u_n) une suite de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ telle que

$$u_n \longrightarrow 0 \text{ dans } E^1_{\lambda,\mu} \text{ et } L_{\lambda,\mu}u_n \longrightarrow F \text{ dans } E, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Montrons que $F = (v,\, v_1,\, v_2) = (0,\, 0,\, 0)$. Puisque les opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont continus, on a alors

$$l_{1\mu}u_n \longrightarrow 0 \text{ et } l_{2\mu}u_n \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

ce qui entraîne que $v_1 = v_2 = 0$.

Il reste à démontrer que $v = 0$. Soit z un élément de $C_0^\infty(D; W^1)$, on a

$$\langle v,\, z\rangle_{\mathscr{D}'} = \int\limits_D (v,\, z)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_D (v_n,\, z)dt = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int\limits_D (u_n,\, \mathcal{L}_\lambda z)dt = 0.$$

Donc $\langle v,\, z\rangle_{D'} = 0$ pour tout $z \in C_0^\infty(D; W^1)$, qui est dense dans $L_2(D; H)$, ce qui entraîne que $v = 0$. D'où $L_{\lambda,\mu}$ est fermable.

Soit $\overline{L_{\lambda,\mu}}$ la fermeture de l'opérateur $L_{\lambda,\mu}$, alors toute solution de l'équation

$$\overline{L_{\lambda,\mu}}u = F,$$

est appelée solution forte généralisée du problème (1)-(2).

Comme les fonctions $u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}})$ sont des limites des fonctions $u_n \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$, alors on peut prolonger l'inégalité (52) en passant à la limie, soit

$$|||u|||_1^2 \leq S \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda,\mu}}u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{L_{\lambda,\mu}}u). \tag{53}$$

Corollaire 2.4.1 *La solution forte généralisée du problème (1)-(2) quand elle existe est unique et dépend continûment du second membre $F \in E$.*

Preuve. L'unicité est dûe à l'inégalité (53), pour la dépendance continue par rapport à $F \in E$, on suppose qu'il existe une solution forte $u = (\overline{L_{\lambda,\mu}})^{-1}F$ de $\overline{L_{\lambda,\mu}} = F$, et si de plus $v = (\overline{L_{\lambda,\mu}})^{-1}G$ est une autre solution du même problème avec second membre G. On a

$$|||u - v|||_1^2 \leq S \left|\left|\left|\overline{L_{\lambda,\mu}}(u - v)\right|\right|\right|^2 = S\,|||F - G|||^2.$$

Ce qui signifie qu'une faible variation du second membre F n'entraîne qu'une faible variation de la solution.

Corollaire 2.4.2 *L'inégalité (53) assure l'existence de l'inverse de l'opérateur $\overline{L_{\lambda,\mu}}$ sur son image $R(\overline{L_{\lambda,\mu}})$, et cet inverse est borné.*

Corollaire 2.4.3 *L'ensemble $R(\overline{L_{\lambda,\mu}})$ est fermé dans E et $R(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \overline{R(L_{\lambda,\mu})}$.*

Preuve. D'après la définition de $R(\overline{L_{\lambda,\mu}})$, on a $R(\overline{L_{\lambda,\mu}}) \subset \overline{R(L_{\lambda,\mu})}$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $F \in \overline{R(L_{\lambda,\mu})}$, alors il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ telle que $|||L_{\lambda,\mu}\, u_n - F||| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow 0$. On a $|||u_p - u_q|||_1^2 \leq S\,|||L_{\lambda,\mu}\, u_p - L_{\lambda,\mu}u_q|||^2 \longrightarrow 0$, quand $p,\, q \longrightarrow 0$, donc (u_n) converge vers un élément $u \in E^1_{\lambda,\mu}$ et $\overline{L_{\lambda,\mu}}u = F$.

On déduit du corollaire 2.4.3 que pour démontrer l'existence de la solution forte généralisée du problème (1)-(2), il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})$ dans E.

Chapitre 3

Existence de la solution forte et continuité par rapport aux paramètres

3.1 Existence de la solution forte

Commençons par introduire la structure Hilbertienne suivante :

$H^{1,1}(D;H)$:= l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty(\overline{D};H)$ par rapport à la norme

$$\| u \|_{1,1}^2 = \int\limits_D \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t_2} \right|^2 + | u|^2 \right\} dt.$$

$H^1\left([0,\, T_2]\,;H\right)$:= l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty\left([0,\, T_2]\,;H\right)$ par rapport à la norme

$$\|\varphi\|_1^2 = \|\varphi\|^2 + \|\varphi'\|^2\,,$$

où $\|.\|$ est la norme dans $L_2(D;H)$.

De manière analogue on construit l'espace $H^1\left([0,\, T_1]\,;H\right)$.

Notons par E_0 l'espace de Hilbert

$$L_2(D;H) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_2]\,;H\right) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_1]\,;H\right)$$

composé des éléments $F = (f,\, \varphi,\, \psi)$ telle que

$$|||F|||^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie.}$$

$\widetilde{H^1}\left([0,\, T_2]\,;H\right) \times \widetilde{H^1}\left([0,\, T_1]\,;H\right)$ est le sous-espace fermé de

$$H^1\left([0,\, T_2]\,;H\right) \times H^1\left([0,\, T_1]\,;H\right)$$

composé des éléments $(\varphi,\, \psi)$ tels que $\overline{\mu_2}\psi(0) - \overline{\mu_1}\psi(T_1) = \overline{\mu_2}\varphi(0) - \overline{\mu_1}\varphi(T_2)$.

$H_0^{1,1}(D; W^1) :=$ le sous-espace fermé de $H^{1,1}(D; H)$ défini par

$$H_0^{1,1}\left(D; W^1\right) = \left\{u \in H^{1,1}\left(D; W^1\right) \,:\, \mu_1 u\,|_{t_1=0} - \mu_2 u\,|_{t_1=T_1} = \mu_1 u\,|_{t_2=0} - \mu_2\, u\,|_{t_2=T_2}\right\},$$

$\overset{0}{H}{}^{1,1}(D; H) :=$ le sous-espace fermé de $H^{1,1}(D; H)$ défini par

$$\left\{u \in H^{1,1}(D; H) : \overline{\mu_2}\,\varphi(0) - \overline{\mu_1}\,\varphi(T_2) = \overline{\mu_2}\,\psi(0) - \overline{\mu_1}\,\psi(T_1)\right\},$$

où $\overline{\mu_i}$ est le conjugué de μ_i.

Opérateurs de régularisation (Approximation de Yosida) (Brezis [13], proposition VII.2, p. 102).

On définit $A_\varepsilon = I + \varepsilon A$. L'opérateur A_ε possède les propriétés suivantes :

$\mathscr{P}_\varepsilon 1$: A_ε est auto-adjoint;

$\mathscr{P}_\varepsilon 2$: A_ε est uniformément positif : $(A_\varepsilon u, u) \geq (1 + \varepsilon c_0)\,|u|^2$, $\forall u \in \mathcal{D}(A)$, $\quad \forall t \in \overline{D}$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 3$: A_ε admet un inverse borné et on a $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq \dfrac{1}{(1+\varepsilon c_0)} \leq 1$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 4$: $\|\varepsilon\, A A_\varepsilon^{-1} v\| = \|(I - A_\varepsilon^{-1})\, v\| \longrightarrow 0,\ \ \varepsilon \longrightarrow 0, \quad \forall v \in H$;

$\mathscr{P}_\varepsilon 5$: A_ε^{-1} est auto-adjoint et commute ave A $(AA_\varepsilon^{-1} = A_\varepsilon^{-1}A)$.

Etablissons maintenant la densité de l'ensemble $\mathcal{R}(L_{\lambda,\,\mu})$ dans E. Dans ce but introduisons la condition suivante :

$(\mathscr{H}_2)$ La fonction $D \ni t \longmapsto A(t) \in \mathscr{L}(W^1,\, H)$ admet des dérivées mixtes

$$A''_{t_1t_2}(t) = \frac{\partial^2(A(t))}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad A''_{t_2t_1}(t) = \frac{\partial^2(A(t))}{\partial t_2 \partial t_1}$$

par rapport à la topologie de la convergence simple dans $\mathscr{L}(W^1,\, H)$, et telles que

$$A''_{t_1t_2}(t)A^{-1}(t), \quad A''_{t_2t_1}(t)A^{-1}(t) \in L_2(D; \mathscr{L}(H)).$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *Sous les conditions du théorème 2.3.1 et la condition* $(\mathscr{H}_2)$*, l'ensemble* $\mathcal{R}(L_{\lambda,\,\mu})$ *est dense dans* E.

Démonstration. Nous décomposons la démonstration en deux étapes :

$\boxed{\textbf{1}^{\text{ère}}\ \textbf{étape}}$ Nous commençons par le cas $\lambda = 0$.

Soit alors $\mathcal{L}_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + A$ l'opérateur correspondant à la valeur $\lambda = 0$.

Soit $V = (v,\, v_1,\, v_2)$ un élément orthogonal à $R(L_{0,\mu})$, alors pour tout $u \in H^{1,1}(D; W^1)$ on a

$$\langle L_{0,\mu}\, u,\, V\rangle_E = \langle \mathcal{L}_0\, u,\, v\rangle + \langle l_{1\mu} u,\, v_1\rangle + \langle l_{2\mu} u,\, v_2\rangle = 0. \tag{54$_a$}$$

Démontrons que $V = (0,\, 0,\, 0)$.

Comme $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont indépendants et les images des opérateurs $l_{1\mu}$ et $l_{2\mu}$ sont partout denses dans les espaces correspondants, alors pour démontrer que $V = (0,\, 0,\, 0)$, il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *Si pour tout $v \in L_2(D; H)$, on a*

$$\langle \mathcal{L}_0 u,\, v\rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D; W^1) = \left\{u \in H^{1,1}(D; W^1) : l_{1\mu} u = 0,\ l_{2\mu} u = 0\right\}.$$

Alors $v = 0$.

Preuve. On a

$$\langle \mathcal{L}_0 u,\, v\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + Au,\, v\right\rangle = 0, \quad \forall u \in H_0^{1,1}(D; W^1). \tag{54$_b$}$$

A partir de l'équation $(54)_b$, on a

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},\, v\right\rangle = -\langle Au,\, v\rangle\,. \tag{55}$$

Posons

$$w = A_\varepsilon^{-1} v \text{ et } h = A_\varepsilon u, \tag{56}$$

$$B_{1\varepsilon}^* = \varepsilon A'_{t_2} A_\varepsilon^{-1}, \quad B_{2\varepsilon}^* = \varepsilon A'_{t_1} A_\varepsilon^{-1}, \quad B_{0\varepsilon}^* = \varepsilon A''_{t_2 t_1} A_\varepsilon^{-1}, \quad C_{0\varepsilon}^* = \varepsilon A''_{t_1 t_2} A_\varepsilon^{-1}, \tag{57}$$

"$*$ " désigne le symbole de l'adjoint. Ici h peut être considérée comme une fonction arbitraire de $H_0^{1,1}(D; H)$.

D'après les relations :

$$(i) \quad \frac{\partial^2 (A_\varepsilon u)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\varepsilon A'_{t_2} u + A_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t_2}\right) = \varepsilon A''_{t_1 t_2} u + \varepsilon A'_{t_2} \frac{\partial u}{\partial t_1} + \varepsilon A'_{t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2} + A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2},$$

$$(ii) \quad \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_2} u)}{\partial t_1} = \varepsilon A''_{t_1 t_2} u + \varepsilon A'_2 \frac{\partial u}{\partial t_1},$$

$$(iii) \quad \frac{\partial (\varepsilon A'_{t_1} u)}{\partial t_2} = \varepsilon A''_{t_2 t_1} u + \varepsilon A'_{t_1} \frac{\partial u}{\partial t_2},$$

on a

$$A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 (A_\varepsilon u)}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial(\varepsilon A'_{t_2} u)}{\partial t_1} - \frac{\partial(\varepsilon A'_{t_1} u)}{\partial t_2} + \varepsilon A''_{t_2 t_1} u. \tag{58}$$

En remplaçant u par $A_\varepsilon^{-1} h$ dans (58), on obtient

$$A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial(B^*_{1\varepsilon} h)}{\partial t_1} - \frac{\partial(B^*_{2\varepsilon} h)}{\partial t_2} + B^*_{0\varepsilon} h. \tag{59}$$

L'équation (55) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, v \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, A_\varepsilon A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle = \left\langle A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle \\ &= \left\langle A_\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, w \right\rangle = \left\langle A_\varepsilon u, -A A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle = \left\langle h, -A A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle. \end{aligned} \tag{60}$$

En remplaçant $A_\varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}$ par l'expression (59) dans (60), on obtient

$$\left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1} (B^*_{1\varepsilon} h) - \frac{\partial}{\partial t_2} (B^*_{2\varepsilon} h) + B^*_{0\varepsilon} h, w \right\rangle = \left\langle h, -A A_\varepsilon^{-1} v \right\rangle, \tag{61}$$

d'où on déduit

$$\left\langle \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1} (B^*_{1\varepsilon} h) - \frac{\partial}{\partial t_2} (B^*_{2\varepsilon} h), w \right\rangle = \left\langle h, -\left(A A_\varepsilon^{-1} + B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} \right) v \right\rangle. \tag{62}$$

Puisque l'équation (62) est vraie pour toute fonction $h \in H_0^{1,1}(D; H)$, elle reste vraie pour $h \in C_0^\infty(D; H)$. Ce qui donne en language distributionnel

$$\begin{aligned} &\left\langle h, \frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial t_2} \right\rangle_{\mathscr{D}'} \\ &= \langle h, -(A A_\varepsilon^{-1} + B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1}) v \rangle, \quad \forall h \in C_0^\infty(D; H). \end{aligned} \tag{63}$$

Considérons les opérateurs $\widetilde{\mathcal{L}}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}'$ définis par

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{L}}\right) = \overset{0}{H}{}^{1,1}(D; H) \subset L_2(D; H) \\ \widetilde{\mathcal{L}} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} \dfrac{\partial u}{\partial t_2}, \end{cases} \tag{64}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}\left(\widetilde{\mathcal{L}}'\right) = H_0^{1,1}(D; H) \subset L_2(D; H) \\ \widetilde{\mathcal{L}}' u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \dfrac{\partial}{\partial t_1} (B^*_{1\varepsilon} u) - \dfrac{\partial}{\partial t_2} (B^*_{2\varepsilon} u). \end{cases} \tag{65}$$

Montrons que $\widetilde{\mathcal{L}}'$ est l'adjoint de $\widetilde{\mathcal{L}}$.

En effet, d'après les relations :

- $$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2},\, u\right) = \left(v,\, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial v}{\partial t_2},\, u\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1}\right),$$
- $$-\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(B_{1\varepsilon}^* v),\, u\right) = \left(v,\, B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right),$$
- $$-\left(\frac{\partial}{\partial t_2}(B_{2\varepsilon}^* v),\, u\right) = \left(v,\, B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* v,\, u\right),$$

pour tout $v \in H_0^{1,1}(D;H)$ et $u \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$, on a

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}' v,\, u\right\rangle = \int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^* v\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^* v\right),\, u\right) dt =$$

$$\left\langle v,\, \widetilde{\mathcal{L}} u\right\rangle + \int_0^{T_2}\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right)\Big|_{t_1=0}^{t_1=T_1} dt_2 - \int_0^{T_1}\left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} u\right)\Big|_{t_2=0}^{t_2=T_2} dt_1. \tag{66}$$

D'après la définition de $H_0^{1,1}(D;H)$ et $\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$, on a

$$\mu_1 v\,|_{t_1=0} = \mu_2 v\,|_{t_1=T_1}, \quad \mu_1 v\,|_{t_2=0} = \mu_2 v\,|_{t_2=T_2}, \quad \mu_1 \frac{\partial v}{\partial t_2}\,|_{t_1=0} = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial t_2}\,|_{t_1=T_1},$$

$$\overline{\mu_2} u\,|_{t_1=0} = \overline{\mu_1} u\,|_{t_1=T_1}, \quad \overline{\mu_2} u\,|_{t_2=0} = \overline{\mu_1}\,|_{t_2=T_2}, \quad \overline{\mu_2}\frac{\partial u}{\partial t_2}\,|_{t_2=0} = \overline{\mu_1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\,|_{t_2=T_2}. \tag{67}$$

En injectant les expressions (67) dans les intégrales se trouvant dans (66), on trouve

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t_2} - B_{1\varepsilon}^* v,\, u\right)_{t_1=0}^{t_1=T_1} = 0, \quad \left(v,\, \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon} u\right)_{t_2=0}^{t_2=T_2} = 0.$$

On obtient alors

$$\left(\widetilde{\mathcal{L}}' v,\, u\right) = \left(v,\, \widetilde{\mathcal{L}} u\right), \quad \forall v \in H_0^{1,1}(D;H), \quad \forall u \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H). \tag{68}$$

Revenons à l'équation (62). D'après la relation (68), l'équation (62) signifie que pour tout $\varepsilon \neq 0$, w est la solution faible du problème

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}} w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} = -(B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1} + AA_\varepsilon^{-1} v), \\ \widetilde{l_{1\mu}} w = \overline{\mu_2} w\,|_{t_1=0} - \overline{\mu_1} w\,|_{t_1=T_1} = 0, \\ \widetilde{l_{2\mu}} w = \overline{\mu_2} w\,|_{t_2=0} - \overline{\mu_1} w\,|_{t_2=T_2} = 0, \end{cases} \tag{69}$$

avec $v \in L_2(D;H)$, $\quad B_{j\varepsilon} \in \mathscr{L}(H) \quad (j = 0,1,2)$.

Considérons l'opérateur $\widetilde{L} = (\widetilde{\mathcal{L}},\, \widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}})$ agissant de $H^{1,1}(D;H)$ dans E_0.

Etudions les propriétés de cet opérateur.

Proposition 3.1.2 *L'opérateur* $\widetilde{L}$ *est un isomorphisme de* $H^{1,1}(D;H)$ *dans* E_0 *pour tout* $\mu \in \mathscr{M}$.

Preuve. Il faut démontrer que

$$(a) \quad \left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2 \leq K_1 \|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H),$$

$$(b) \quad \|u\|_{1,1}^2 \leq K_2 \left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H),$$

$$(c) \quad R(\widetilde{L}) = E_0,$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes positives indépendantes de u.

(a) D'après les estimations du lemme 2.2.1 et compte tenu du fait que

$$B_{j\varepsilon} \in \mathscr{L}(H), \quad \left\|1 - A_\varepsilon^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq 2,$$

on obtient

$$\|B_{j\varepsilon}\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|B_{j\varepsilon}^*\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|\varepsilon A'_{t_j} A_\varepsilon^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} = \left\|A'_{t_j} A^{-1}(I - A_\varepsilon^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq$$

$$\left\|A'_{t_j} A^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(H)} \left\|(I - A_\varepsilon^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(H)} \leq C, \quad (j = 1,\, 2).$$

Une estimation de $\left|\widetilde{\mathcal{L}}u\right|$ donne

$$\left|\widetilde{\mathcal{L}}u\right|^2 = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 \leq \left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \left|B_{1\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \left|B_{2\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right\}^2$$

$$\leq \left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right| + \|B_{1\varepsilon}\|_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right| + \|B_{2\varepsilon}\|_{\mathscr{L}(H)}\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|\right\}^2$$

$$\leq 4(1+C)\left\{\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|^2\right\},$$

d'où on déduit

$$\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2 \leq 4(1+C)\|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{70}$$

En vertu de la continuité des opérateurs $\widetilde{l_{1\mu}}$, $\widetilde{l_{2\mu}}$ de $H^{1,1}(D;H)$ dans les espaces $H^1([0,\, T_2]\,;H)$, $H^1([0,\, T_1]\,;H)$ respectivement et l'inégalité (70), on obtient

$$\left|\left|\left|\widetilde{L}u\right|\right|\right|^2 \leq K_1 \|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{71}$$

Par des techniques similaires à celles utilisées pour établir l'estimation (19), on démontre

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2 \leq K_3 \left\|\left|\widetilde{L}u\right|\right\|^2, \tag{72}$$

où $K_3=\dfrac{64(T_1+T_2+1)^2}{\sigma_i(\mu)}\exp\left(32C\left(\exp(C(T_1+T_2)\right)(T_1+T_2)\right), \quad (i=1,2)$.
D'autre part, de l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial t_1}|u|^2+\frac{\partial}{\partial t_2}|u|^2=2Re\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2},\, u\right),$$

découle l'inégalité

$$\|u\|^2\leq K_4\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2+\left\|\widetilde{l_{1\mu}}u\right\|^2+\left\|\widetilde{l_{2\mu}}u\right\|^2\right\}, \tag{73}$$

où $K_4=\dfrac{2(T_1+T_2)^2\left(1+\left|\mu_{3-i}\mu_i^{-1}\right|^2\right)^2\left(1+\left|\mu_i^{-1}\right|^2\right)}{\left(1-\left|\mu_{3-i}\mu_i^{-1}\right|^2\right)^2}$.
Sachant que

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right\|^2\leq 2\left\|\widetilde{\mathcal{L}}u\right\|^2+4C^2\left\{\left\|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right\|^2\right\}, \tag{74}$$

et en combinant les inégalités (72)-(74), on otient

$$\|u\|_{1,1}^2\leq K_2\left\|\left|\widetilde{L}u\right|\right\|^2, \quad \forall u\in H^{1,1}(D;H), \tag{75}$$

où $K_2=2(2+C^2)(1+K_3)(1+K_4)$.

De la continuité de l'opérateur $\widetilde{L}$ et l'inégalité (75), on conclut que l'opérateur $\widetilde{L}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ sur le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\widetilde{L})=\widetilde{L}\left(H^{1,1}(D;H)\right)$. Il reste à vérifie que $R(\widetilde{L})=E_0$.

Pour cela introduisons la famille d'opérateurs $\left\{\widetilde{L_s}\right\}_{s\in[0,\,1]}$, définie par

$$\begin{cases}\widetilde{L_s}=(\widetilde{\mathcal{L}_s},\,\widetilde{l_{1\mu}},\,\widetilde{l_{2\mu}}), \quad s\in[0,\,1],\\[2mm] \widetilde{\mathcal{L}_s}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}+sBu, \quad Bu=B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_1}+B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial u}{\partial t_2},\\[2mm] D(\widetilde{L_s})=H^{1,1}(D,\,H).\end{cases} \tag{76}$$

On va procéder ici par la méthode de prolongement par rapport au paramètre s.

Par une procédure d'intégration simple, on montre que la solution de l'équation opérationnelle $\widetilde{L_0}u = F, \quad F = (f,\, v,\, w) \in E_0$ est donnée par l'expression

$$\int_0^{t_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau + \frac{1}{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}\left\{v(t_2) + w(t_1) - \overline{\mu_2}w(0) + \overline{\mu_1}w(T_1)\right\}$$

$$+\frac{\overline{\mu_1}}{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}\left\{\int_0^{t_2}\int_0^{T_1} f(\tau)d\tau + \int_0^{T_2}\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau + \frac{\overline{\mu_1}}{(\overline{\mu_2} - \overline{\mu_1})}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1} f(\tau)d\tau\right\}. \tag{77}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0}) = E_0$. Puisque les inégalités (71) et (75) sont vraies pour l'opérateur $\widetilde{L_0}$, on déduit que l'opérateur $\widetilde{L_0}$ est un isomorphisme de $H^{1,1}(D;H)$ sur E_0.

Pour tout $s_0,\, s \in [0,\, 1]$, on peut écrire

$$\widetilde{L_s} = \widetilde{L_{s_0}} + (s - s_0)(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) \text{ avec } (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}) = (B,\, \widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}}).$$

En appliquant des estimations élémentaires sur Bu, on obtient

$$\|Bu\|^2 \leq 2C^2\, \|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{78}$$

A partir de cette inégalité et la continuité des opérateurs $\widetilde{l_{1\mu}},\, \widetilde{l_{2\mu}}$ de $H^{1,1}(D;H)$ dans les espaces $H^1([0,\, T_2]\,;H)$, $H^1([0,\, T_1]\,;H)$ respectivement, on obtient

$$\left|\left|\left|(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u\right|\right|\right|^2 \leq K_5\, \|u\|_{1,1}^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H). \tag{79}$$

Montrons maintenant que

$$\|u\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right|, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H), \tag{80}$$

où K_6 est une constante positive indépendante de u.

En effet, d'après l'inégalité (75) on a

$$\forall s \in [0,\, 1]\,, \quad \exists C(s) > 0 \quad \text{telle que} \quad \|u\|_{1,1}^2 \leq C(s)\left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right|^2, \quad \forall u \in H^{1,1}(D;H).$$

Posons $h(s) = \inf\limits_{u\in H^{1,1}(D;H)} \dfrac{\left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right|}{\|u\|_{1,1}}$, et montrons que h est continue sur $[0,\, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{K_5}}$, alors pour tout $s_0,\, s \in [0,\, 1]$ et tel que $|s_0 - s| < \delta$, on a

$$\left|\left|\left|\left|\widetilde{L_s}u\right|\right|\right| - \left|\left|\left|\widetilde{L_{s_0}}u\right|\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|\widetilde{L_s}u - \widetilde{L_{s_0}}u\right|\right|\right| = |s_0 - s|\left|\left|\left|\widetilde{L_1}u - \widetilde{L_0}u\right|\right|\right| \leq$$

$$\delta \left|\left|\left| \widetilde{L_1}u - \widetilde{L_0}u \right|\right|\right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{K_5}} \sqrt{K_5} \left\| u \right\|_{1,1}^2 = \varepsilon \left\| u \right\|_{1,1}^2 . \tag{81}$$

A partir de l'inégalié (81), on a

$$\frac{\left|\left|\left| \widetilde{L_{s_0}}u \right|\right|\right|}{\left\| u \right\|_{1,1}} - \varepsilon \leq \frac{\left|\left|\left| \widetilde{L_s}u \right|\right|\right|}{\left\| u \right\|_{1,1}} \leq \frac{\left|\left|\left| \widetilde{L_{s_0}}u \right|\right|\right|}{\left\| u \right\|_{1,1}} + \varepsilon,$$

passons à l'infinimum sur $H^{1,1}(D; H)$, on obtient $|h(s) - h(s_0)| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la continuité de h sur [0, 1]. Donc la fonction h admet une borne *inf*, désignons cette borne *inf* par $\dfrac{1}{K_6}$ on trouve alors l'inégalité (80).

Revenons maintenant à l'équation $\widetilde{L_s}u = F$, cette équation s'écrit sous la forme

$$\widetilde{L_s}u = \widetilde{L_{s_0}}u + (s - s_0)(\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u = F. \tag{82}$$

Supposons qu'on a démontré que $\mathcal{R}(\widetilde{L_{s_0}}) = E_0$ (le cas $s_0 = 0$), on va montrer que $R(\widetilde{L_s}) = E_0$ pour certains s au voisinage de s_0.

L'équation (82) est équivalente à

$$u + (s - s_0) \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u = \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} F. \tag{83}$$

A partir des inégalités (79) et (80), on a

$$\left\| \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} F \right\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left| F \right|\right|\right| ,$$

$$\left\| \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u \right\|_{1,1} \leq K_6 \left|\left|\left| (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u \right|\right|\right| \leq K_6 \sqrt{K_5} \left\| u \right\|_{1,1} = K_7 \left\| u \right\|_{1,1} . \tag{84}$$

Soit $s \in [0,\ 1]$ tel que $|s_0 - s| \leq \rho < \frac{1}{K_7}$, et notons par

$$\Lambda = (s - s_0) \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0}), \quad g = \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} F.$$

L'équation (83) devient

$$u + \Lambda u = g. \tag{84}$$

Calculons la norme de Λ,

$$\left\| \Lambda \right\| = \sup_{\left\| u \right\|_{1,1} \leq 1} \left\| \Lambda u \right\|_{1,1} = |s - s_0| \left\| \left(\widetilde{L_{s_0}}\right)^{-1} (\widetilde{L_1} - \widetilde{L_0})u \right\|_{1,1} \leq |s - s_0| K_7 < 1,$$

dans ce cas l'opérateur $(I+\Lambda)$ avec $\|\Lambda\|<1$ est inversible, et la solution de l'équation (84) est donnée par la série de Neumman

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Lambda^n g, \tag{85}$$

ce qui prouve que $\mathcal{R}(\widetilde{L_s})=E_0, \quad \forall s:|s_0-s|\leq\rho<\dfrac{1}{K_7}$.
Comme on a démontré que $\mathcal{R}(\widetilde{L_0})=E_0$, on aura donc $R(\widetilde{L_s})=E_0, \quad \forall s:0<s\leq\rho$.
En suite on pose $s_0=\rho$ et on procède de la même manière, on obtient $\mathcal{R}(\widetilde{L_s})=E_0$ pout tout s tel que $0<s\leq 2\rho$. On continue ce procédé pas à pas, on obtient $\mathcal{R}(\widetilde{L_s})=E_0, \quad \forall s\in[0,\,1]$. Pour le cas $s=1$, on trouve $\mathcal{R}(\widetilde{L_1})=R(\widetilde{L})=E_0$, d'où le résultat recherché. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.2

Proposition 3.1.3 *L'opérateur $\widetilde{L}=\widetilde{\mathcal{L}}$ donné par l'expression (64) est fermé dans la topologie de $L_2(D;H)$.*

Preuve. Soit $(u_n)\subset\mathcal{D}(\widetilde{L})=\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$ telle que

$$u_n\longrightarrow u \text{ dans } L_2(D;H), \quad \widetilde{L}u_n\longrightarrow f \text{ dans } L_2(D;H), \quad n\longrightarrow\infty.$$

Montrons que $u\in\mathcal{D}(\widetilde{L})$ et $\widetilde{L}u=f$. D'après l'inégalité (75) la suite (u_n) est une suite de Cauchy dans $H^{1,1}(D;H)$, d'où $u_n\longrightarrow v$ dans $H^{1,1}(D;H)$. Comme $\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$ est un sous-espace fermé dans $H^{1,1}(D;H)$, donc $v\in\overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H)$. La convergence $u_n\longrightarrow v$ dans $H^{1,1}(D;H)$ entraîne la convergence $u_n\longrightarrow v$ dans $L_2(D;H)$, mais comme par hypothèse $u_n\longrightarrow u$ dans $L_2(D;H)$ et $\widetilde{L}$ est borné, on a alors $\widetilde{L}u=f$.
Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.3. □
Etudions maintenant quelques propriétés de l'opérateur

$$\widetilde{L}'=\widetilde{\mathcal{L}}':H_0^{1,1}(D;H)\subset L_2(D;H)\longrightarrow L_2(D;H).$$

On a

$$\widetilde{L}'u=\frac{\partial^2u}{\partial t_1\partial t_2}-\frac{\partial}{\partial t_1}\left(B_{1\varepsilon}^*u\right)-\frac{\partial}{\partial t_2}\left(B_{2\varepsilon}^*u\right)=$$

$$=\frac{\partial^2u}{\partial t_1\partial t_2}-B_{1\varepsilon}^*\frac{\partial u}{\partial t_1}-B_{2\varepsilon}^*\frac{\partial u}{\partial t_2}-\left(\varepsilon A''_{t_1t_2}A_\varepsilon^{-1}+\varepsilon A''_{t_2t_1}A_\varepsilon^{-1}-B_{1\varepsilon}^*B_{2\varepsilon}^*-B_{2\varepsilon}^*B_{1\varepsilon}^*\right)u.$$

Une estimation en norme de $L_2(D;H)$ donne

$$\left\|\widetilde{\mathcal{L}}'u\right\|^2 \leq 64\max\left\{1,\, C^4,\, \int_D \left\|A''_{t_1t_2}A^{-1}\right\|^2_{\mathscr{L}(H)} dt,\, \int_D \left\|A''_{t_2t_1}A^{-1}\right\|^2_{\mathscr{L}(H)} dt\right\}\|u\|^2_{1,1}\,, \qquad (86)$$

d'où la continuité de $\widetilde{L}'$ de $H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$.

D'après les proposition 3.1.2, 3.1.3 et l'inégalité (86) il résulte que l'opérateur $\widetilde{L}'$ est un isomorphisme de $H_0^{1,1}(D;H)$ dans $L_2(D;H)$. Cette assertion découle du théorème des opérateurs à image fermée :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L} \text{ est fermé},\\
&\mathcal{R}(\widetilde{L}) = L_2(D;H),\\
&\mathcal{N}(\widetilde{L}') = \mathcal{R}(\widetilde{L})^{\perp} = \{0\}\,,\\
&\mathcal{R}(\widetilde{L}') = \overline{\mathcal{R}(\widetilde{L}')} = \mathcal{N}(\widetilde{L})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = L_2(D;H).
\end{aligned}$$

Remarque. L'opérateur $\widetilde{L}\,'$ est fermé dans la topologie de $L_2(D;H)$.

Définition 3.1.1 On note par $\hat{\mathcal{L}}$ le prolongement faible de l'opérteur $\widetilde{\mathcal{L}}$ défini par

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'u,\, v\right\rangle = \left\langle u,\, \hat{\mathcal{L}}v\right\rangle = \langle u,\, f\rangle\,, \quad \forall u \in\, H_0^{1,1}(D,H) \text{ et } \hat{\mathcal{L}}v = f \in\, L_2\,(D;H)\,. \qquad (87)$$

Proposition 3.1.4 *Le prolongement faible $\hat{\mathcal{L}}$ coincide avec le prolongement fort, i.e.,*

$$\left(\hat{\mathcal{L}}\right)' = \widetilde{\mathcal{L}}'.$$

Preuve. Il est clair que $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) \subset \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$. Montrons que

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) = \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}) \text{ et } \widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u, \quad \forall u \in \mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}}).$$

D'après ce qui précède l'opérateur $\widetilde{\mathcal{L}}'$ est fermé et $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{L}}') = L_2\,(D;H)$, alors d'après le théorème de Banach sur les opérateurs à image fermée, l'opérateur $\left(\hat{\mathcal{L}}\right)^{-1}$ est défini sur le sous-espace fermé $\mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp}$ et est continu. On a

$$(i)\quad \mathcal{N}(\hat{\mathcal{L}}) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{L}}')^{\perp} = \{0\}\,, \quad (ii)\quad \mathcal{N}(\widetilde{\mathcal{L}}') = \{0\}\,, \text{ d'où } \mathcal{R}(\hat{\mathcal{L}}) = L_2\,(D;H)\,,$$

d'après (ii) $\forall f \in\, L_2\,(D,H)$, il existe une solution de l'équation $\hat{\mathcal{L}}u = f$. Fixons f et soit v la solution de l'équation $\widetilde{\mathcal{L}}u = f$. Montrons que $u = v$.

En effet, d'après les relations (68) et (87), on a

$$\begin{aligned}
\left\langle z,\, \hat{\mathcal{L}}u\right\rangle &= \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z,\, u\right\rangle = \langle z, f\rangle\,, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D;H),\\
\langle z,\, \mathcal{L}v\rangle &= \left\langle \widetilde{\mathcal{L}}'z,\, v\right\rangle = \langle z,\, f\rangle\,, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D;H).
\end{aligned}$$

A partir de là on obtient $\left\langle \widetilde{\mathcal{L}}' z,\, v-u \right\rangle = 0, \quad \forall z \in H_0^{1,1}(D;H)$, ce qui signifie que $w = v-u$ est la solution faible de l'équation homogène $\widetilde{L}u = 0$. Mais d'après l'unicité de la solution faible, on obtient $u = v$. D'où $u = v \in H_0^{1,1}(D;H)$ et $\widetilde{\mathcal{L}}u = \hat{\mathcal{L}}u = f$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.4. $\square$

La proposition 3.1.4 affirme que la solution du problème $(\mathscr{P})$ coïncide avec la solution forte. D'où $w \in H^{1,1}(D;H) \cap L_2(D;W^1)$ et vérifie (69) au sens fort, i.e.,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + B_{0\varepsilon}w + Aw = 0, \\ \overline{\mu_2} w \mid_{t_1=0} = \overline{\mu_1} w \mid_{t_1=T_1}, \\ \overline{\mu_2} w \mid_{t_2=0} = \overline{\mu_1} w \mid_{t_2=T_2} = 0. \end{cases} \tag{88}$$

Le problème (88) est équivalent à l'équation opérationnelle :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H), \\ \mathcal{L}u = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} + B_{1\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_1} + B_{2\varepsilon}\dfrac{\partial w}{\partial t_2} + Aw = -B_{0\varepsilon}w = f. \end{cases} \tag{89}$$

Proposition 3.1.5 *Sous les conditions du théorème 2.3.1, on a l'estimation*

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} w \right\|^2 \leq K_8 \left\| \mathcal{L}w \right\|^2, \ \forall w \in \overset{0}{H}{}^{1,1}(D;H). \tag{90}$$

où $K_8 = K_8(\alpha_1,\, T_1,\, T_2)$.

Preuve. On procède par la même méthodologie que celle utilisée pour établir le théorème 2.3.1, on démontre l'estimation (90). $\square$

A partir de l'inégalié (90), en tenant compte des conditions $(\mathscr{H}_2)$ et $(\mathscr{A}_1)$, on a la majoration

$$\| w\|^2 \leq \frac{1}{c_0} \left\| A^{\frac{1}{2}} w \right\|^2 \leq \frac{K_8}{c_0} \left\| B_{0\varepsilon} w \right\|^2. \tag{91}$$

En remplaçant w par $A_\varepsilon^{-1}v$ dans (91), il vient

$$\left\| A_\varepsilon^{-1} v \right\|^2 \leq \frac{K_8}{c_0} \left\| B_{0\varepsilon} A_\varepsilon^{-1} v \right\|^2 \tag{92}$$

D'après $\mathscr{P}_\varepsilon 4$ on a $\|A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \longrightarrow \|v\|^2$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Montrons que $\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\|^2 \longrightarrow 0$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

En effet, on a

$$B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v = \left(\varepsilon A''_{t_2t_1}A_\varepsilon^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v = \left(\varepsilon A''_{t_2t_1}A^{-1}AA_\varepsilon^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v$$
$$= \left(\varepsilon AA_\varepsilon^{-1}\right)^* \left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v = \left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* A_\varepsilon^{-1}v,$$

d'où

$$\left\|B_{0\varepsilon}A_\varepsilon^{-1}v\right\| \leq \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v + v\right)\right\| \leq$$
$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| + \left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* v\right\|,$$

or

$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^*\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| \leq$$
$$2\left\|A''_{t_2t_1}A^{-1}\right\|_{L_2(D,\mathscr{L}(H))}\left\|\left(A_\varepsilon^{-1}v - v\right)\right\| \longrightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0,$$

et

$$\left\|\left(I - A_\varepsilon^{-1}\right)\left(A''_{t_2t_1}A^{-1}\right)^* v\right\| \longrightarrow 0, \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

En passant dans (92) à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient $v = 0$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.1.1. □

Donc on a établit $\overline{\mathcal{R}\ (L_{\lambda,\mu})} = E$ dans le cas $\lambda = 0$.

2ème étape

Considérons maintenant le cas $\lambda \neq 0$.

Par la méthode de prolongement par rapport au paramètre λ, on démontre que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = \overline{\mathcal{R}(L_{\lambda,\mu})} = E$. En effet, écrivons l'opérateur $L_{\lambda,\mu} = (\mathcal{L}_\lambda,\ l_{1_\mu},\ l_{2_\mu})$ sous la forme

$$\begin{aligned} &L_{\lambda,\mu} = L_{\lambda_0,\mu} + (\lambda - \lambda_0)(L_{1,\mu} - L_{0,\mu}), \\ &\text{avec } \ (L_{1,\mu} - L_{0,\mu}) = (B,\ l_{1\mu},\ l_{2\mu}), \quad B \equiv A\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}. \end{aligned} \tag{93}$$

On remarque que l'opérateur $A\dfrac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}$ est continu de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ dans $L_2(D;H)$ (ceci découle de (4) et la définition de $|||.|||_1$).

A partir de cette remarque et la continuité des opérateurs $l_{1\mu}$, $l_{2\mu}$ de $\mathcal{D}(L_{\lambda,\mu})$ dans $H^1([0,\ T_2]\,;H)$, $H^1([0,\ T_1]\,;H)$ respectivement, on obtient

$$|||(L_{1,\mu} - L_{0,\mu})u||| \leq K_9\, |||u|||_{1,1}\,, \quad \forall u \in \mathcal{D}(L_{\lambda,\mu}). \tag{94}$$

L'équation $\overline{L_{\lambda,\,\mu}}u = F$ s'écrit sous la forme

$$\overline{L_{\lambda,\,\mu}}u = \overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}u + (\lambda - \lambda_0)\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u = F. \tag{95}$$

Supposons qu'on a démontré que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ (le cas $\lambda_0 = 0$). On va démontrer que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ pour les λ au voisinage de λ_0.
L'équation (95) est équivalente à

$$u + (\lambda - \lambda_0)\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u = \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}F. \tag{96}$$

D'après l'estimation (53) et l'inégalité (94), on a

$$\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}F\right|\right|\right|_1 \leq \sqrt{S}\,|||F|||\,,$$

et

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u\right|\right|\right|_1 &\leq \sqrt{S}\left|\left|\left|\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}u\right|\right|\right| \\ &\leq \sqrt{S}K_9\,|||u|||_1 = K_{10}\,|||u|||_1\,.\end{aligned} \tag{97}$$

Soit λ : $|\lambda - \lambda_0| \leq \rho < \dfrac{1}{K_{10}}$. Notons par $\Lambda = (\lambda - \lambda_0)\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}\overline{(L_{1,\,\mu} - L_{0,\,\mu})}$ et $g = \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\mu}}\right)^{-1}F$. L'équation (96) devient

$$u + \Lambda u = g. \tag{98}$$

On a $||\Lambda|| = \sup\limits_{D\left(\overline{L_{\lambda,\mu}}\right)}\dfrac{||\Lambda u||_1}{||u||_1} < 1$, d'où l'opérateur $(I + \Lambda)$ est inversible, et la solution de l'équation (98) est donnée par la série de Neumman $u = \sum_{n=0}^{\infty}(-\Lambda)^n g$. Ce qui prouve que $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\mu}}) = E$, $\forall\lambda : |\lambda - \lambda_0| \leq \rho < \dfrac{1}{K_{10}}$.
En suite on pose $\lambda = \rho$ et on procède de la même manière, on obtient $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$, $\forall\lambda : 0 < \lambda \leq 2\rho$. En procédant de la même manière pas à pas, on obtient $\mathcal{R}(\overline{L_{\lambda,\,\mu}}) = E$ pour tout $\lambda \geq 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.1. □
D'où le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *Pour tout élément $F = (f,\,\varphi,\,\psi) \in E$ il existe une et une seule solution forte généralisée $u = \left(\overline{L}_{\lambda,\,\mu}\right)^{-1}F = \overline{\left(L^{-1}_{\lambda,\,\mu}\right)}F$ du problème (1)-(2) et on a*

$$|||u|||_1^2 \leq S\,|||F|||^2\,,$$

où S est une constante positive indépendante de μ, λ, u et F.

3.2 Continuité de la solution forte par rapport aux paramètres

Nous étudions ici le comportement de l'opérateur donnant la solution.

Soit (μ_n, λ_n) une suite convergente vers $(\overset{0}{\mu}, \lambda_0)$ telle que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda_0, \quad \mu_n = (\mu_{1,n}, \mu_{2,n}) \longrightarrow (\overset{0}{\mu}_1, \overset{0}{\mu}_2), \quad n \longrightarrow \infty.$$

On définit l'espace E^1 obtenu en complétant $\mathscr{C}^\infty(\overline{D}; W^1)$ par rapport à la norme

$$|||u|||_{E^1} = \sup_{\tau \in D} \left[\int_0^{T_1} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|_1^2 \right)_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|_1^2 \right)_{t_1=\tau_1} dt_2 \right],$$

si $\lambda_0 \neq 0$, et

$$|||u|||_{E^1} = \sup_{\tau \in D} \left[\int_0^{T_1} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + |u|_{\frac{1}{2}}^2 \right)_{t_2=\tau_2} dt_1 + \int_0^{T_2} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2 + |u|_{\frac{1}{2}}^2 \right)_{t_1=\tau_1} dt_2 \right],$$

si $\lambda_0 = 0$.

Comme E on prend l'espace de Hilbert composé des éléments $F = (f, \varphi, \psi)$ telle que

$$|||F|||_2^2 = \|f\|^2 + \|\varphi\|_1^2 + \|\psi\|_1^2 \text{ est finie,}$$

où

$$\|\varphi\|_1^2 = \int_0^{T_2} \left\{ |\varphi|_1^2 + |\varphi'|_1^2 \right\} dt_2, \quad \|\psi\|_1^2 = \int_0^{T_1} \left\{ |\psi|_1^2 + |\psi'|_1^2 \right\} dt_1.$$

Remarque. Comme la suite (μ_n, λ_n) est convergente, on peut choisir des constantes positives

$$a_0 = a_0(\overset{0}{\mu}, \lambda_0), \quad a_1 = a_1(\lambda_0), \quad a_2 = a_2(\lambda_0),$$

telles que

$$a_0 \, |||u|||_{E^1} \leq |||u|||_1 , \quad \forall u \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n, \mu_n}}\right),$$

$$a_2 \, |||F||| \leq |||F|||_2 \leq a_1 \, |||F||| , \quad \forall F \in E,$$

autrement dit $|||F||| \approx |||F|||_2$.

On désigne par $\mathscr{L}(E, E^1)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans E^1 muni de la topologie de la convergence simple.

Théorème 3.2.1 *Soient réalisées les conditions du théorème 3.1.1, et* $(\mu_n,\, \lambda_n) \longrightarrow (\overset{0}{\mu},\, \lambda_0)$. *Alors*

$$\left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right)^{-1} \longrightarrow \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1}$$

au sense de la convergence simple.

Preuve. Pour démontrer ce théorème il suffit d'établir :

$$(i) \quad \sup_n \left\| \left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(E,\,E^1)} < +\infty,$$

$$(ii) \quad \left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right)^{-1} \longrightarrow \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} \text{ dans un sous-espace } X \text{ dense dans } E.$$

D'après l'estimation (53), pour l'opérateur $\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}$ on a

$$|||u|||_1^2 \leq S \left|||\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}} u|||\right|, \quad \forall u \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right). \tag{99}$$

Comme la constante S ne dépend pas de μ_n et λ_n, alors a partir de (99) et la remarque précédente, on obtient

$$|||u|||_{E^1}^2 \leq \frac{S}{a_0} \left|||\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}} u|||\right| = M_0 \left|||\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}} u|||\right|, \quad \forall u \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right). \tag{100}$$

Posons $X = R\left(L_{\lambda_0,\overset{0}{\mu}}\right)$ qui est un sous-espace dense dans E.
Pour $F \in X$, ona $\left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \in \mathcal{D}\left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right)$. De l'inégalité (100), il vient

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left| \left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right)^{-1} F - \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \right|\right|\right|_{E^1}^2 \\
&\leq M_0 \left|\left|\left| F - \left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right) \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \right|\right|\right|^2 \\
&\quad \leq M_1 \left|\left|\left| F - \left(\overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\right) \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F \right|\right|\right|_2^2,
\end{aligned} \tag{101}$$

où $M_1 = \dfrac{M_0}{a_2}$.
Posons $\left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right)^{-1} F = h, \quad F = \left(\overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}}\right) h$, alors

$$\left|\left|\left| \overline{L_{\lambda_n,\,\mu_n}}\, h - \overline{L_{\lambda_0,\,\overset{0}{\mu}}} h \right|\right|\right|_2^2 \leq$$

$$|\lambda_n - \lambda_0|^2 \left\| \frac{\partial^2 h}{\partial t_1 \partial t_2} \right\|^2$$

$$+2\left(\left|\mu_{1,n}-\overset{0}{\mu}_1\right|^2\|h\|_1^2\,|_{t_1=0}+\left|\mu_{2,n}-\overset{0}{\mu}_2\right|^2\|h\|_1^2\,|_{t_1=T_1}\right)$$
$$+\,2\left(\left|\mu_{1,n}-\overset{0}{\mu}_1\right|^2\|h\|_1^2\,|_{t_2=0}+\left|\mu_{2,n}-\overset{0}{\mu}_2\right|^2\|h\|_1^2\,|_{t_2=T_2}\right). \tag{102}$$

On voit que le membre droit de (102) tend vers zéro lorsque $n \longrightarrow +\infty, \quad \forall F \in X$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.1. □

Exemple

Soit l'équation définie par

$$\mathcal{L}_\lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}(a(t,\, x)\frac{\partial}{\partial x_1})\left(u + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}\right) = f(t,\, x), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} l_{1\mu}\; u \equiv \mu_1 u\;|_{t_1=0} - \mu_2 u\;|_{t_1=T_1} = \varphi\,(t_2,\, x)\,, \\ l_{2\mu}\; u \equiv \mu_1 u\;|_{t_2=0} - \mu_2 u\;|_{t_2=T_2} = \psi\,(t_1,\, x) \end{cases} \tag{2}$$

où $t = (t_1,\, t_2) \in D =]0,\, T_1[\, \times\,]0,\, T_2[\,,\quad x \in \Omega =]0, 1[\, \times\,]0, 1[$ et $(t,\, x) \in Q = D \times \Omega$.

On pose $H = L_2(\Omega)$ l'espace de Hilbert, où la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par $|.|_0$ et $(.,\, .)_0$, $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ qui est dense dans H.

La fonction $a(t,\, x)$ satisfait aux conditions

$$\mathscr{H}_1 : \quad 0 < c_0 \le a(t,\, x) \le c_1, \quad \forall (t,\, x) \in \overline{Q},$$

$$\mathscr{H}_2 : \quad a(0,\, t_2,\, x) = a(T_1,\, t_2,\, x), \quad a(t_1,\, 0,\, x) = a(t_1,\, T_2,\, x),$$

$$\mathscr{H}_3 : \quad \frac{\partial a}{\partial t_1},\quad \frac{\partial a}{\partial t_2},\quad \frac{\partial^2 a}{\partial t_1 \partial t_2},\quad \frac{\partial^2 a}{\partial t_2 \partial t_1} \text{ sont bornées pour tout } (t,\, x) \in \overline{Q}.$$

Sous ces conditions, on a un problème aux limites pour une *E.D.P* correspondant à la classe des problèmes étudiés.

• La condition $\mathscr{H}_1$ assure la positivité de l'opérateur

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}(a(t,\, x)\frac{\partial}{\partial x_1}).$$

En effet, la forme quadratique associée à l'opérateur A est strictement positive

$$(Au, u)_0 = \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\partial}{\partial x_1}(a(t,\, x)\frac{\partial u}{\partial x_1}) u \, dx_1 dx_2 =$$

$$\int_0^1\int_0^1 a(t,x)\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1dx_2 \geq c_0\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1dx_2$$

en vertu de l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}(Au,\, u)_0 &\geq c_0\int_0^1\int_0^1 \left|\tfrac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx_1dx_2 \\ &\geq c_0m_0\int_0^1\int_0^1 |u|^2\,dx_1dx_2 = k_0\,|u|_0^2\,, \quad \forall u\in\mathcal{D}(A),\end{aligned}$$

ici $m_0 = 2,\ k_0 = c_0m_0$.

• La condition $\dfrac{\partial^2 a}{\partial t_1\partial t_2}$ et $\dfrac{\partial^2 a}{\partial t_2\partial t_1}$ sont bornées pour tout $(t,\, x)\in\overline{Q}$, nous assure que les opérateur $\dfrac{\partial^2 A}{\partial t_1\partial t_2}A^{-1}$ et $\dfrac{\partial^2 A}{\partial t_2\partial t_1}A^{-1}\in L_\infty(D,\mathscr{L}(H))\subset L_2(D,\mathscr{L}(H))$.

A partir de la forme quadratique $(Au,\, u)_0$, on calcul $A^{\frac{1}{2}}$

$$(Au,\, u)_0 = \int_0^1\int_0^1 a(t,\, x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1dx_2 =$$

$$\int_0^1\int_0^1 \sqrt{a(t,\, x)}\frac{\partial u}{\partial x_1}\sqrt{a(t,\, x)}\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1dx_2 = (A^{\frac{1}{2}}u,\, A^{\frac{1}{2}}u)_0,$$

d'où on déduit

$$A^{\frac{1}{2}}u = \sqrt{a(t,\, x)}\frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

Définissons à présent les espaces nécessaires à l'étude du problème considéré.

On munit $\mathcal{D}(A)$ de la norme

$$|u|_1^2 = \int_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(0,\, x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right|^2 dx,$$

on obtient l'espace W^1.

De même on construit l'espace $W^{\frac{1}{2}}$, en munissant $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ de la norme

$$|u|_{\frac{1}{2}}^2 = \int_\Omega \left|\sqrt{a(0,\, x)}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx.$$

L'espace des solutions $E^1_{\lambda,\mu}$ est obtenu par complétion de $\mathscr{C}^\infty(\overline{D},\, W^1)$ par rapport à la norme

$$|||u|||_1^2 = \frac{\sigma_i(\mu)}{1+\lambda}\left\{\lambda\int_D\int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2}\right|^2 dxdt + \lambda^2\int_D\int_\Omega \left|\sqrt{a(0,\, x)}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1\partial t_2\partial x_1}\right|^2 dxdt\right.$$

$$+\lambda^3 \int\limits_D \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,\, x) \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial t_2 \partial x_1} \right) \right|^2 dxdt$$

$$+ \sup_{\tau \in D} \left(\int\limits_0^{T_1} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial u(t_1,\, \tau_2,\, x)}{\partial t_1} \right|^2 dxdt_1 + \int\limits_0^{T_1} \int\limits_\Omega \left| \sqrt{a(0,x)} \frac{\partial u(t_1,\, \tau_2,\, x)}{\partial x_1} \right|^2 dxdt_1 \right.$$

$$+2\lambda \int\limits_0^{T_1} \int\limits_\Omega \left| \sqrt{a(0,x)} \frac{\partial^2 u(t_1,\, \tau_2,\, x)}{\partial t_1 \partial x_1} \right|^2 dxdt_1 + \lambda \int\limits_0^{T_1} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,x) \frac{\partial u(t_1,\, \tau_2,\, x)}{\partial x_1} \right) \right|^2 dxdt_1$$

$$+\lambda^2 \int\limits_0^{T_1} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,\, x) \frac{\partial^2 u(t_1,\, \tau_2,\, x)}{\partial t_1 \partial x_1} \right) \right|^2 dxdt_1$$

$$+ \int\limits_0^{T_2} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial u(\tau_1,\, t_2,\, x)}{\partial t_2} \right|^2 dxdt_2 + \int\limits_0^{T_2} \int\limits_\Omega \left| \sqrt{a(0,x)} \frac{\partial u(\tau_1,\, t_2,\, x)}{\partial x_1} \right|^2 dxdt_2$$

$$+2\lambda \int\limits_0^{T_2} \int\limits_\Omega \left| \sqrt{a(0,x)} \frac{\partial^2 u(\tau_1,\, t_2,\, x))}{\partial t_2 \partial x_1} \right|^2 dxdt_1 + \lambda \int\limits_0^{T_2} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,x) \frac{\partial u(\tau_1,\, t_2,\, x)}{\partial x_1} \right) \right|^2 dxdt_2$$

$$\left. +\lambda^2 \int\limits_0^{T_2} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,\, x) \frac{\partial^2 u(\tau_1,\, t_2,\, x)}{\partial t_2 \partial x_1} \right) \right|^2 dxdt_2 \right) \Bigg\} .$$

(i = 1, 2) selon que soit réalisée la condition $(\mathscr{B}_1)$ ou $(\mathscr{B}_2)$.

L'opérateur $L_{\lambda,\,\mu} = (\mathcal{L}_\lambda,\, l_{1\mu},\, l_{2\mu})$ admettant comme domaine de définition $\mathcal{D}(L_{\lambda,\,\mu}) = H^{1,1}(D; W^1)$, où $H^{1,1}(D; W^1)$ est le complété de $\mathscr{C}^\infty(D; W^1)$ par rapport à la norme

$$||u||_1^2 = \int\limits_D \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,\, x) \frac{\partial^3 u}{\partial t_1 \partial t_2 \partial x_1} \right) \right|^2 dxdt + \int\limits_D \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,\, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial x_1} \right) \right|^2 dxdt$$

$$+ \int\limits_D \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,\, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial x_1} \right) \right|^2 dxdt + \int\limits_D \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(0,\, x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right|^2 dxdt.$$

L'espace des données E est

$$E = L_2(D; H) \times \widetilde{H^1} \left([0,\, T_2] \,; W^{1/2} \right) \times \widetilde{H^1} \left([0,\, T_1] \,; W^{1/2} \right),$$

composé des éléments $F=(f,\,\varphi,\,\psi)$ telle que la norme

$$\begin{aligned}|||F|||^2 &= \int\limits_D\int\limits_\Omega |f|^2\,dxdt + \int\limits_0^{T_1}\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial\psi}{\partial t_1}\right|^2 dxdt_1 + \int\limits_0^{T_1}\int\limits_\Omega \left|\sqrt{a(0,\,x)}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right|^2 dxdt_1\\
&+2\lambda\int\limits_0^{T_1}\int\limits_\Omega \left|\sqrt{a(0,\,x)}\frac{\partial^2\psi}{\partial t_1\partial x_1}\right|^2 dxdt_1 + \lambda\int\limits_0^{T_1}\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(0,\,x)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\right|^2 dxdt_1\\
&+\lambda^2\int\limits_0^{T_1}\int\limits_\Omega \left|\tfrac{\partial}{\partial x_1}\left(a(0,\,x)\frac{\partial^2\psi}{\partial t_1\partial x_1}\right)\right|^2 dxdt_1 + \int\limits_0^{T_2}\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right|^2 dxdt_2\\
&+\int\limits_0^{T_2}\int\limits_\Omega \left|\sqrt{a(0,\,x)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|^2 dxdt_2 + 2\lambda\int\limits_0^{T_2}\int\limits_\Omega \left|\sqrt{a(0,\,x)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_2\partial x_1}\right|^2 dxdt_1\\
&+\lambda\int\limits_0^{T_2}\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a(0,\,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\right|^2 dxdt_2 + \lambda^2\int\limits_0^{T_2}\int\limits_\Omega \left|\tfrac{\partial}{\partial x_1}\left(a(0,\,x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_2\partial x_1}\right)\right|^2 dxdt_2\end{aligned}$$

est finie.

Pour le problème posé, on établit le théorème suivant :

Théorème. *Pour tout élément $F=(f,\,\varphi,\,\psi)\in E$ il existe une et une seule solution forte $u=\left(\overline{L}_{\lambda,\mu}\right)^{-1}F=\overline{\left(L_{\lambda,\,\mu}^{-1}\right)}F$ du problème du problème (1)-(2) et on a*

$$|||u|||_1^2 \leq\; S\,|||F|||^2\,,$$

où S est une constante positive indépendante de μ, λ, u et F. □

Conclusion et perspectives

Dans le travail considéré on s'intéresse à une équation différentielle de second ordre à coefficient opérationnel non-borné dépendant de t, avec des conditions aux limites non-locales. Ce problème contient trois paramètres l'un réel les autres complexes, ce qui a permis d'étudier de manière globale une classe trés large d'équations aux dérivées partielles.

Pour cette famille de problèmes, on a pu établir des théorèmes d'existences, d'unicité, de dépendance continue de la solution forte par rapport aux paramètres.

Des résultats analogues peuvent être établis pour des conditions aux limites non-locales opérationnelles de type suivant :

$$\begin{cases} l_{1\mu}\ u \equiv B_1(\mu)u\ |_{t_1=0} - B_2(\mu)u\ |_{t_1=T_1} = \varphi\,(t_2)\,, \\ l_{2\mu}\ u \equiv B_1(\mu)u\ |_{t_2=0} - B_2(\mu)u\ |_{t_2=T_2} = \psi\,(t_1)\,, \end{cases}$$

où $B_i(\mu) \in \mathscr{L}(H)$, $(i = 1, 2)$ et $\mu \in \mathscr{M}$ est un paramètre, $\mathscr{M}$ est un ensemble de nature arbitraire sur lequel est défini la notion de convergence des suites.

Les conditions imposées sur la famille d'opérateurs $B_i(\mu)$ sont :

$(\mathscr{B}_0)$ pour tout $\mu \in \mathscr{M}$ les opérateurs $B_i(\mu)$, $(i = 1, 2)$ transformant $\mathcal{D}(A)$ en $\mathcal{D}(A)$ et réalisant une des conditions :

$(\mathscr{B}_1)$ sur H il existe $B_1^{-1}(\mu) \in \mathscr{L}(H)$ transformant $\mathcal{D}(A)$ en $\mathcal{D}(A)$, et tel que

$$\left\| B_1^{-1}(\mu)B_2(\mu) \right\| \exp\left(3C(T_1 + T_2)\right) < 1,$$

$(\mathscr{B}_2)$ sur H il existe $B_2^{-1}(\mu) \in \mathscr{L}(H)$ transformant $\mathcal{D}(A)$ en $\mathcal{D}(A)$, et tel que

$$\left\| B_2^{-1}(\mu)B_1(\mu) \right\| \exp\left(3C(T_1 + T_2)\right) < 1.$$

Dans le cas où $B_i(\mu) = \mu_i$ $(i = 1,\, 2)$, on trouve les conditions aux limites de notre problème. Pour ce type d'équations les recherches peuvent se poursuivre en ajoutant dans l'équation des termes de la forme $\dfrac{a_1(t)}{t_1} B_1(t) \dfrac{\partial u}{\partial t_1} + \dfrac{a_2(t)}{t_2} B_2(t) \dfrac{\partial u}{\partial t_2}$ c.à.d. des termes qui contient des singularités, et en introduisant aussi dans les conditions aux limites des opérateurs qui dépendent des paramètres complexes.

On peut constater aussi le cas où les variables t_1 et t_2 ne sont pas indépendantes, par exemples le cas où

$$t = (t_1,\, t_2) \in D(0,\, R) = \left\{ (t_1,\, t_2) \in \mathbb{R} : t_1^2 + t_2^2 = R \right\}.$$

Ce cas est trés délicat mais il mérite d'être étudié.

Bibliographie

[1] N.E. Benouar. Problème aux limies pour une classe d'équations composites. *Compte rendu de l'academie des Science, Paris*, **T.** 319, série I, p. 953-958, 1994.

[2] N.E. Benouar. Problème aux limites pour une classe d'équations d'ordre impair. *Bultin de la classe des Sciences, Académie Royale de Belgique*, **T.** 5, p. 51-58, 1994.

[3] N.E. Benouar, N.I. Yurchuk. Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator. *Differential'nye Uravneniva*, Vol. 27, No. 12, p. 2094-2098, 1991.

[4] A. Bouziani. Solution forte d'un problème mixte avec condition intégral pour une classe d'équations paraboliques. *Maghreb Mathematical Review*, Vol. 6, No. 1, p. 1-17, 1997.

[5] A. Bouziani. problèmes aux limites pour certaines équations de type non classique du troisième ordre. *Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique*, **T.** VI, p. 215-222, 1995.

[6] A. Bouziani. Mixed problem with integral conditions for certain parabolic equations. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Vol. 9, No. 3, p. 323-330, 1996.

[7] A. Bouziani. Mixed problem for certain non classical équation with a small parameter. *Bulletin de la classe des Sciences, Académie Royale de Belgique*, **T.** 5, p. 389-400, 1994.

[8] A. Bouziani, N.E. Benouar. Problème aux limites pour une classe d'équations de type non classique pour une structure pluri-dimensionnelle. *Bulletin of the polish Academy of Science Mathematics*, Vol. 43, No. 4, p. 317-328, 1995.

[9] A. Bouziani, N.E. Benouar. Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences. Paris*, **T**. 321, Série .1, p. 1177-1182, 1995.

[10] A.Bouziani, N.E . Benouar. Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques. *Bulletin de la Société Mathématiques de Belgique*, Vol. 31, p. 125-133, 1996.

[11] N.I. Brish, N.I. Yurchuk. Somme new boundary value problemes for a class of partial differential equations. *I, Differential Equations*, Vol. 4, No. 8, p. 560-750, 1968.

[12] N.I. Brish, N.I. Yurchuk. Somme new boundary value problems for a class of partial differential equations. *I, Differential Equations*, Vol. 4, No. 8, p. 770-775, 1968.

[13] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. *Edit Masson*, 1993.

[14] J.R. Cannon, Y.Lin, J. Van Der Hok. A quasi-linear parabolic equation with non local boundary condition. *Rend. Mat. Appl* (**7**), p. 239-264, 1989.

[15] B. Carbonaro, R. Rosso. Energy inequality and the domain of influence theorem in classical elastodynamics. *J. Elasticity*, Vol. 14, p. 163-174, 1984.

[16] J. Chazarin. Problèmes de Cauchy abstraits et applications à quelques problèmes mixtes. *J. of Functional Analysis*, **7**, p. 386-446, 1971.

[17] V.I. Chessalyn. Problème pour une équation différentielle opérationnelle d'orde impair à condition aux limites non locales. *Diff .Urav*, **T**. 13, No. 3, p. 468-476, 1977.

[18] V.I. Chessalyn, N.Y. Yurchuk. Problèmes avec conditions aux limites non locales pour des équations abstraites de LIAV. *IZD. AKAD. NAUK BSSR,* No. 6, Série Phys-Math, 1973.

[19] A.A. Dezin. General questions in theory of boundary value problems, *Moscow. Nauka, English trans, Springer Verlag* .1980

[20] J.A Dubinsky. On somme differential operator equation of arbitrary order. *Math. Sbornik*, Vol. 90 (**132**), 1973, *Traduction, Math. USSR. Sbornik*, Vol. 19, p. 1-21, 1973.

[21] J.A. Dubinsky. On abstract theorem and its application to boundary value problems for non classical equation. *Math. Sbornik*, **79**, p. 91-117, 1969.

[22] Dunford, Schwartz. Linear operator, Part I. General Theory, *WILLEY-INTERSCIENCE*, 1988.

[23] Dunford, Schwartz. Linear operator, Part II. Spectral Theory, *WILLEY-INTERSCIENCE*, 1988.

[24] U. Engleman. Problème aux limites pour des équations aux dérivées partielles hyperboliques opérationnelles de second ordre avec conditions aux limites non locales. *Diff .Urav*, **T**. XI, No. 9, 1975.

[25] L. Garding. Cauchy's Problem for hyperbolic equations. *University of chicago, Lectures notes*, 1957.

[26] V.I. Gorbatchuk, M.L. Gorbatchuk. Problèmes aux limites pour les équations différentielles opérationnelles. *Nauk. Dumka*, 1984.

[27] A. Guezane-Lakoud, F. Rebbani, N.I. Yurchuk. Problèmes aux limites pour équation différentielle opérationnelle de second ordre. *Maghreb Mthematical Review*, Vol. 6, No. 1, p. 39-48, 1997.

[28] E. Hill, P.S. Philips. Functionnal analysis and semigroups. *A.M.S. Call. Pub*, **31**, 1957.

[29] N.I. Ionkin. solution of boundary value problem in heat conduction theory with non local boundary conditions. *Differential'nye. Urav*, Vol. 13, No. 2, p. 294-304, 1977.

[30] T. Kato. Integration of the equation of evolution in a Banach space. *J. Math. Soc. Japan*, **T**. 5, p. 208-234, 1953.

[31] T. Kato. Perturbation theory for linear operator. *Berlin -Heidelberg-New York, Springer Verlag*, 1980.

[32] N.V. Kislov. Boundary value problems for operational differential equation of mixed type. *Differential'nye Uravneniva*, Vol. 19, No. 8, p. 1472-1436, 1983.

[33] V.I. Korzyuk. Energy inequality for the boundary value probleme of hyperbolic equations with a third ordre wave operator. *Differential'nye Uravneniva*, Vol. 27, No. 6, p. 1014-1022, 1991.

[34] V.I. Korzyuk, *The method of enegy inequalities and molifying operators*, Vestnik Belgosuniversiteta. Ser. **1**. Fizika, Matematika, Informatika, **3** (1996), 55-71 (Russian).

[35] M.A. Krasnolski, S.G. Krein, P.E. Sobolevski. On differential equations with unbound operators in Hilbert space. *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R*, **111**, p. 590-593, 1957.

[36] M.A. Krasnolski, S.G. Krein, P.E. Sobolevski. On differential equations with unbounded operators in Banach space. *Dok. Akad. Nauk. S.S.S.R*, **111**, p. 19-22, 1957.

[37] S.G. Krein. Linear differential in Banach space. *Moskow, Nauk 1976, Engl Trans Am, Math. Soc*, 1972.

[38] O.A. Ladyzhenskaya. Sur les problèmes aux limites fondamentaux liés aux équations paraboliques et hyperboliques. *Dokl. Acad. Sciences. URSS*, Vol. 97, No. 3, p. 395-398, 1954.

[39] O.A. Ladyzhenskaya. The boundary value problems of mathematical physics. *Springer Verlag, New York*, 1985.

[40] J. Leray. Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficient. *Princton, Jus for Adv Study, New York*, 1952.

[41] J.L. Lions. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. *Springer*, 1961.

[42] J.L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homgènes et applications. *Paris, Dunod*, **T.** 1, 1968.

[43] F.E. Lomovtsev. Necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the Cauchy problem for second order hyperbolic equation with variable domain of operator equation. *Dfferential'nye*, Vol. 28, No. 5, p. 712-722, 1992.

[44] F.E. Lomovtsev, N.I. Yurchuk. Boundary value problems for differential operational equation with variable operational coefficient domains. *Dfferential'nye*, Vol. 27, No. 10, p. 1754-1766, 1991.

[45] B. Labed. Problème aux limites pour une classe d'équations aux dérivées partielles à coefficients opérationnels. Mémoire de Magister, *Institut de Mathématiques, Université d'Annaba*, 1993.

[46] L.G. Petrovsky. Über das Cauchyshe problem für system von linearen partiallen differentialgeinchungen in Gebit der nichtanalystischen funktionen. *Bull. Univ. d'état, Moskow*, No. 7, p. 1-74, 1938.

[47] F. Rebbani, V.I. Chessalyn. Problèmes aux limites pour des q́uations différentialles opérationnelles d'ordre impair dans le rectangle. *Uzvesitis Akad, Nauk, B.S.S.S.R, Série Phys. Mat, Nauk*, No. 3, 1985.

[48] F. Rebbani, V.I. Chessalyn. Problèmes aux limites pour certaines équations différentielles opérationnelles dans le rectangle. *Dok. Acad. Nauk. B.S.S.R*, **T**. 30, No. 12, p. 1061-1063, 1986.

[49] F. Rebbani, A. Guezane-Lakoud. A priori estimate for hyperbolic abstract equation with nonlocal operational boundary boundary conditions. *Publication de l'institut de Mathématiques, Université d'Annaba* , No. 1, 1998.

[50] P.E. Sobolevski. on the equation of parabolic type in Banach space. *Moskow. Math. Soc*, Ser. 2, **49**, p. 297-350, 1966.

[51] H. Tanabe. Evolution equation of parabolic type. *Proc. Japan Acad*, **T**. 34, No. 10, p. 610-613, 1961.

[52] H. Tanabe. Equation of evolution. Transled from Japanesse, *Pitma, London*, 1979.

[53] M.I. Vishik, K.O.A. Ladyzhenskaya. Problème aux limites pour des équations aux dérivées partielles et quelques classes d'équations opérationnelles. *Uspehi Mat. Nauk*, **T**. 11, No. 16, p. 41-97, A.M.S. Trans, **10 (2)**, 1958.

[54] M.I. Vishik. Problème de Cauchy pour une équation à coefficient opérationnels et problèmes aux limites mixtes pour des systèmes d'équations différentielles et méthodes approchées de leur résolution. *Math. Sbornik* **36**, p. 51-148, 1958.

[55] K. Yosida. On differentiability and representation of one parameter semigroup of linear operator, *J. Math. Soc. Japan*, **T**. 1, No. 1, p. 15-21, 1948.

[56] N.I. Yurchuk. Estimation a priori des solutions de problèmes aux limites pour certaines équations différentielles opérationnelles. *Diff. Urav.* **T**. 12, No. 4, p. 729-739, 1976.

[57] N.I. Yurchuk. Problème aux limites pour des équations à coefficients opérationnels dépendant d'un paramètre. I. Estimation a priori. *Diff. Urav*, **T**. 12, No. 9, p. 1645-1661, 1976.

[58] N.I. Yurchuk. Mixed problem with integral condition for certain parabolic equations. *Diff. Urav*, Vol. 22, No. 19, p. 2117-2126, 1986.

[59] N.I. Yurchuk, N.I. Brish. Problème de Goursat pour une équation différentielle linéaire abstraite de second ordre. *Diff. Urav*, **T**. 7, No. 6, 1971.

[60] F. Zouyed. Problème aux limites pour une équation différentielle abstraite avec conditions aux limites non-locales, Mémoire de Magister. *Institut de Mathématiques, Université d'Annaba*, 1997.