



Année 2012

Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Mécanique

Mémoire
Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister

**Etude de l'influence de l'ancrage de la conduite sur la
variation de la pression et des contraintes lors de
l'écoulement transitoire.**

Option

Mécanique de la rupture

Par:

BRAHMIA Nouredine

Directeur de mémoire : DJEMILI Abdelouaheb M.C. U.d'ANNABA

Devant le jury :

Président :	BOUCHAMI Tidjani	Professeur	U. ANNABA
Examinateur :	SAMAR Mohamed El hadi	Professeur	U. ANNABA
	AZZOUZ.salah-eddine	M.C	U. ANNABA

REMERCIEMENTS

Je tiens, en premier lieu, à remercier mon directeur de mémoire Dr. **DJEMILI Abdelouaheb** pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordées tout au long de cette étude.

Je remercie d'autre part :

- **Pr .BOUCHAMI Tidjani** pour avoir accepté de présider le jury et analyser ce travail.

- **Pr. SEMAR Mohamed el hadi** et **Dr. Azzouz Salah-eddine** pour avoir acceptés de servir comme examinateurs de ce travail.

- Les enseignants de l'école doctorale nationale de Mécanique de construction (**EDNMC**).

- Le Département de Mécanique et le laboratoire LR3MI de l'université Badji Mokhtar d'Annaba.

DÉDICACES

A mes chers parents;

A mes sœurs et frères;

A mes nièces et neveux;

A mes amis et collègues;

Le présent travail est particulièrement dédié à la mémoire de mon grand-père et de mon
oncle Said.

SOMMAIRE

Résumé

Nomenclature

Introduction1

Chapitre I : Généralité

I.1.Introduction4

I.2. Description du phénomène physique4

I.2. 1.Les variations du régime dans un système5

I.2.2.Le phénomène du coup de bélier 5

I.3. La protection contre le coup de bélier14

A) Procédés agissant sur les causes.....14

B) Procédés agissant sur les remèdes.....15

Etude bibliographique.....16

Chapitre II : Formulation et Relations de base

II.1. Formulation générale21

II-1-1 Equation relatives au fluide21

A- Les équations de conservation22

B- Loi de comportement mécanique24

C- Loi de comportement thermodynamique24

I-1.2 – Equations relatives à la conduite25

A- L'équation dynamique26

B- La loi de comportement du matériau26

II.2. Formulation dans le cas particulier des écoulements en conduite27

II.2.1. Pour l'écoulement	27
A- Equation de la conservation de la mass.....	28
B- Equation de la conservation de la quantité du mouvement	28
I-2.2.Equations relatives à la paroi de la conduite	30
A- Equation de comportement de la conduite (paroi de conduite)	31
B- Equation de la dynamique (du mouvement) de la conduite	32
II.2.3 .Détermination du terme de frottement J	33
II.2.4 .Relation de couplage conduite fluide	35
II.3 .Forme réduite du système des équations de base	37
II-4 .Condition aux limites	37
A- Conditions aux extrémités	38
B- Condition au support rigide	38
C- Condition au coude	39

Chapitre III : Description des types d'ancrage

III.1. Définition	41
III.2. Terminologie et symbole.....	42
III.3. Emplacement du support	44
III.4. Le support de type amortisseur	46
III.5. Effet du support sur la paroi de la conduite	47

Chapitre IV : Méthode de résolution

IV.1.Méthode basée sur les caractéristiques	50
A-Recherche des droites caractéristiques	50

B- Recherche des relations de compatibilités	58
IV.1.1.Schéma de calcul (point de courant) par la méthode de différences finies	60
IV.1.1 Interpolation	62
IV.1.2 .Calcul de p , V , \dot{u} , et σ (intégration)	63
IV.1.3. Calcul et modélisation numérique du terme de frottement (Brunone):.....	67
IV.1.4 .Nœuds extrêmes	68
A- Extrémité amont (réservoir)	68
B- Extrémité avale (vanne)	69
IV.1.5 .Nœuds au support fixe	70
IV.1.6 .Nœuds au coude	73

Chapitre V : Applications du model numérique et résultats

V.1.Configuration de l'installation (Heinsbroek [27]).....	77
V.2. Schéma de l'installation	78
V.3. Organigramme	79
V .4.1 / 1 ^{ere} cas : résultats avec prise en compte de l'ancrage (un coude fixé)	82
V.4.Résultatset discussions	82
Interprétation.....	84
V.4.2. /2eme cas : validation des résultats pour le coude libre (non ancré):...	86
Interprétation	88
Conclusion	91
Annexe	93

Références bibliographiques	99
--	----

Résumé :

Le but de cette étude est de montrer l'influence du système d'ancrage au niveau des jonctions (coude, vanne, ect ...) sur la valeur de la surpression et du niveau des contraintes correspondantes. L'application des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour un écoulement transitoire en conduite, nous conduit à un système d'équations différentielles aux dérivées partielles du type hyperbolique. Ce système d'équation prend en compte l'interaction fluide-conduite, le mouvement de la conduite (déformation), ainsi que les vibrations mécaniques au niveau des jonctions (coude, vanne). La contrainte tangentielle de viscosité dans le terme de frottement à été représentée par un modèle de brunone [15]. La résolution de ce système d'équations se fait par la méthode des caractéristiques couplée avec les différences finies .Le modèle proposé a été tester par une comparaison avec les résultats de Ahmadi et al [27] validés avec ceux de Heinsbroek.

Mots clés : Coup de bélier/écoulement transitoire/ancrage/méthode des caractéristiques /différences finies.

Abstract:

The purpose of this study is to show the influence of the anchoring system at the junctions (elbow, valve, ect ...) on the value of the pressure and stress level corresponding. The application of the laws of conservation of mass, momentum and energy for transient flow in pipes, leads us to a system of partial differential equations of hyperbolic type. This equation system takes into account the interaction fluid-pipe, the movement of the conduit (deformation), and the mechanical vibrations at the junctions (elbow, valve). Viscosity shear stress in the friction term in was represented by brunone model's [15]. Solving this system of equations by the method of characteristics coupled with finite differences. The proposed model was tested by a comparison with the results of Ahmadi et al [27] validated with those of Heinsbroek.

Key words: water Hammer / transient flow / anchor / method of characteristics/finite difference.

ملخص:

الغرض من هذه الدراسة هو إظهار تأثير سلوك المرونة الغير الخطية لجدار الانابيب على انتشار موجات ضغط السائل وتأثير الدعامة على قيمة الضغط الزائد. ولاخذ اعتبار ادماج السائل و المعدن استعملت علاقة معادلات مناسبة. عندما يصل ضغط السائل القيم الحرجة يولد ضغوط عالية على حائط الأنابيب التي يمكن أن تدمر بنية المادة. بتطبيق قوانين الحفاظ على الكتلة و كمية الحركة والطاقة، يؤدي إلى نظام من المعادلات التفاضلية الجزئية. حل المعادلات من هذا النظام من خلال طريقة الخصائص إلى جانب الفروق المحدودة. النموذج المقترح قد تم اختباره من خلال المقارنة مع النتائج التجريبية.

المفاتيح: طريقة الخصائص / الفروق المحدودة/الجريان

Nomenclature :

t_f : Temps de fermeture de la vanne.

C_f : Vitesse de propagation des perturbations des pressions et vitesses.

q : Le flux de chaleur.

S : L'entropie.

Φ : Puissance dissipée.

ρ : La masse volumique.

E : Module d'élasticité de la conduite.

$\bar{\epsilon}$: Le tenseur des taux de déformation.

τ_0 : Contrainte tangentielle de viscosité.

τ : La loi de fermeture de la vanne.

$\bar{\tau}$: Le tenseur de contrainte de viscosité.

λ, μ : Coefficient de viscosité (dit de LAME).

μ : Viscosité dynamique.

R_e : Nombre de REYNOLDS.

D : Diamètre de la conduite.

K : Coefficient d'élasticité du fluide.

R : Coefficient des pertes de charge singulier.

c_f : Coefficient de frottement au niveau de la paroi.

H, H_p : Hauteur piézométrique à l'instant (t et $t+\Delta t$).

χ_s : Coefficient de compressibilité isothermique.

Q, Q_p : Les débits volumique à l'instant (t et t+ Δt).

T_f : La force de frottement exercée par le fluide sur la paroi.

e : Epaisseur de la conduite.

S : Section de la vanne.

Q_V : Energie par unité de volume.

e : Energie interne.

\vec{f}_V : Force de viscosité par unité de volume.

\vec{F} : Force de volume par unité de volume.

P : La pression.

α : L'angle d'inclinaison de la conduite par rapport au plan horizontal.

L : Longueur de la conduite.

Δh : Pertes de charge.

S_m : La section de la paroi de conduite.

V : La vitesse de l'écoulement.

v: Le volume.

u : Le déplacement longitudinale de la conduite.

\dot{u} : La vitesse de déplacement longitudinale.

\ddot{u} : L'accélération.

J : Terme de frottement.

***I**n*trou*d*uction

La recherche est faite dans le cadre de l'école doctorale de la mécanique au sein du laboratoire Ir3mi, sous l'axe de l'interaction fluide structure. Plusieurs études ont été faites pour les différents cas qui peuvent se manifester dans l'industrie tel que l'étude du type du matériau utilisé (élastique, viscoélastique), les vibrations des installations, la cavitation, etc ...

Dans ce travail, on étudie en particulier l'ancrage des conduites et son effet sur la pression, la vitesse du fluide, les contraintes et les déplacements de la structure. Dans certains cas le type d'écoulement peut constituer un danger pour l'exploitation et la fiabilité des installations.

La difficulté apparaît lors de la variation du régime de l'écoulement dans les conduites qui peut engendrer des conséquences désastreuses pour la sécurité de l'installation et sa durée de vie. Il est source de plusieurs dégâts (détérioration des conduites et des équipements) qui occasionnent des coûts et des entretiens habituellement non prévus.

L'étude et la maîtrise de fixation présentent des intérêts remarquables lors de la transition du régime et les vibrations du réseau des conduites. En ce sens qu'elle permet, lors du dimensionnement d'en tenir compte du choix d'emplacement des supports pour diminuer les efforts indésirables.

Dans les réseaux hydrauliques, figurent divers éléments qui peuvent provoquer la variation de l'écoulement, parmi ces éléments on peut citer:

- les vannes qui occasionnent un phénomène transitoire dont la sévérité dépend des conditions de manipulation (ouverture ou fermeture brusque, lente ou continue) et de la constitution du réseau.

Introduction

- les pompes et les turbines qui provoquent ce régime transitoire par leurs démarrages, arrêts ou pertes de puissance.

Avec l'apparition des ordinateurs, et le grand progrès enregistré dans le développement des méthodes numériques, la résolution des problèmes en transitoire a grandement évolué en passant du traitement graphique très limité au traitement numérique des cas plus complexes.

Parmi les méthodes numériques disponibles, on cite la méthode des caractéristiques qui est devenue le meilleur outil, grâce à sa précision et la possibilité de traitement des problèmes à frontières les plus compliquées.

La méthode des caractéristiques est un outil de travail permettant de simuler les différents cas de configuration en régime transitoire, qui peuvent avoir lieu dans un réseau contenant des éléments variés.

Outre son intérêt pratique dans la simulation pour la conception des réseaux, elle permet parallèlement à des expériences menées en laboratoire, d'avoir un outil de comparaison avec les différents résultats théoriques ou expérimentaux. Enfin elle pourra constituer un outil efficace, pour le traitement de grands réseaux sur lesquels l'expérience s'avère toujours difficile.

Dans cette étude, le premier chapitre a été consacré à la description de l'écoulement transitoire et les différents paramètres qui contrôlent la transition, provoquant un éventuel coup de bélier. On montrera aussi les causes de ce phénomène, les conséquences et les moyens de protection.

Le deuxième chapitre donne les différentes équations mathématiques et les hypothèses concernant l'écoulement instationnaire de fluide en conduite en matériau élastique. Pour l'évaluation du terme de frottement, nous avons utilisé le modèle de Brunone [15] dans lequel il se compose d'une partie classique du régime permanent plus une partie concernant le régime instationnaire. Ce terme de

Introduction

frottement représenté par la contrainte de viscosité dépend de la viscosité du fluide et du taux de variation de la vitesse.

Dans le troisième chapitre, on donne une description des moyens de fixation et d'ancrage des conduites, et leur effet sur les contraintes agissant sur la conduite ainsi que les déplacements.

Le quatrième chapitre est consacré aux méthodes de résolution du système d'équations obtenu. Une première partie analytique (méthode des caractéristiques) a été développée suivie par une méthode numérique celle de différence finie.

Le dernier chapitre est une application du modèle développé et la comparaison de nos résultats avec les résultats de Ahmadi et al. [15], validés avec ceux de Heinsbroek.

Une conclusion a été faite sur l'importance de la simulation numérique pour la compréhension des phénomènes physiques et la prévention des risques de vibration au niveau des jonctions (coude, té, branchement, ...) dans les installations d'écoulements de fluide et la fiabilité du système.

CHAPITRE I

- Généralité

I.1.Introduction :

Dans le système hydraulique en charge, les variations de pression causées par des changements de régime plus ou moins rapides, voire brusques, entraînent des contraintes sur les matériels qui dépassent largement celles du régime stationnaire ou permanent. Le dimensionnement d'une ligne d'adduction ou de refoulement se trouve donc affecté par ces valeurs extrême, s'est d'autant plus vraie dans le cas des stations de refoulement des eaux usée ; puisque leurs pompes sont fréquemment et périodiquement démarrées et arrêtées dans des conditions d'urgence. Des systèmes sont soumis à des conditions extrêmes auxquelles ils doivent, dans la mesure du possible résisté.

Une analyse des différents régimes transitoires permettra de déterminer le dimensionnement et le système de fixation et d'ancrage ainsi que les éléments de protection de l'installation. Compte tenu de la complexité du phénomène, il n'existe pas de solution analytique complète permettant de résoudre ce problème. Des méthodes approximatives, graphique ont pris le relais pour permettre aux ingénieurs de quantifié ce type de phénomène. La disponibilité croissante de la puissance de calcul des ordinateurs à un coût décroissant ,a permis de développer des outils numériques de simulation dont la précision et la fiabilité sont déjà fort acceptable pour autant que l'on respecte les conditions d'utilisation.

I.2. Description du phénomène physique :

Le phénomène de transition hydraulique apparait lorsque l'équilibre des forces agissant sur un système est modifié. Quand un liquide est en mouvement

dans une conduite et que le mouvement ne varie pas dans le temps, il y a un état d'équilibre, entre l'énergie disponible (potentielle) et les énergies dues au mouvement (cinétique) et l'énergie perdues par le frottement, ce qui définit un mouvement permanent.

I.2. 1. Les variations du régime dans un système :

Les variations du régime dans un système fermé sous pression c'est-à-dire qu'il ne contient pas d'endroit où il est possible d'accumuler de l'eau en grande quantité, on observe une variation locale importante de la pression, c'est le coup de bélier. Le « coup de bélier » peut se produire par exemple lors de la fermeture brusque d'une vanne ou un robinet. L'écoulement de l'eau est interrompu instantanément, mais l'énergie cinétique du flux aquatique se transforme en énergie de pression ; à l'intérieur des tuyaux se produit une surpression qui s'exerce avec force par un choc très violent sur les parois ainsi que sur le robinet ou la vanne d'arrêt, ce phénomène engendre un bruit caractéristique bien connu.

Dans ce que suit, nous examinerons avec plus d'attention ce phénomène car il entraîne des effets contraignants sur le matériel.

I.2.2. Le phénomène du coup de bélier :

Dans les installations industrielles ou sanitaires, le phénomène du coup de bélier se produit lors de la fermeture rapide, sur une canalisation de l'installation, d'un mitigeur, d'une électrovanne, d'une vanne à sphère, etc... La rapidité de la manœuvre provoque une brusque variation de la pression de l'eau, (surpression) dont l'onde se propage dans les canalisations. La perturbation part du dispositif de coupure, à l'amont, se répercutant contre les autres dispositifs ou coudes de l'installation et s'étendant vers l'aval en s'amortissant

progressivement. La surpression va s'ajouter à la pression déjà existante dans la canalisation pouvant provoquer à la longue :

- ✓ rupture des conduites, réservoirs ou flexibles.
- ✓ usure des joints, des soudures de raccordement et des appareils sanitaires.
- ✓ détérioration des dispositifs de coupure, clapet anti-retour et de régulation.
- ✓ bruits importants et fortes vibrations dans les canalisations et les cloisons.



Figure I .1 : Joints d'expansion détruits par le coup de bélier

L'importance de la surpression dépend de nombreux facteurs :

- temps de fermeture des appareils.
- longueur, diamètre et type de matériaux des canalisations
- vitesse de l'eau.

Pour pouvoir calculer la surpression lors d'un coup de bélier, la formule suivante prend en compte, de façon instantanée, les caractéristiques habituelles d'une installation sanitaire :

$$\Delta P = \rho * g * \frac{2 V L}{t} \quad (I.1)$$

où :

ΔP : est la surpression due au coup de bélier (Pa)

V : est la vitesse de l'eau au moment de la fermeture (m/s)

L : est la longueur du tube (m)

g : est l'accélération de la pesanteur (9,81 m/s²)

t : est le temps de fermeture de la vanne (s)

La Formule précédente valable si $t > t^*$,

Si l'on veut définir simplement le "temps de fermeture" (mieux défini comme "temps de réaction") on peut utiliser la formule suivante:

$$t^* = \frac{2 L}{a} \quad (I.2)$$

où

t^* : est le temps de réaction de la vanne (s)

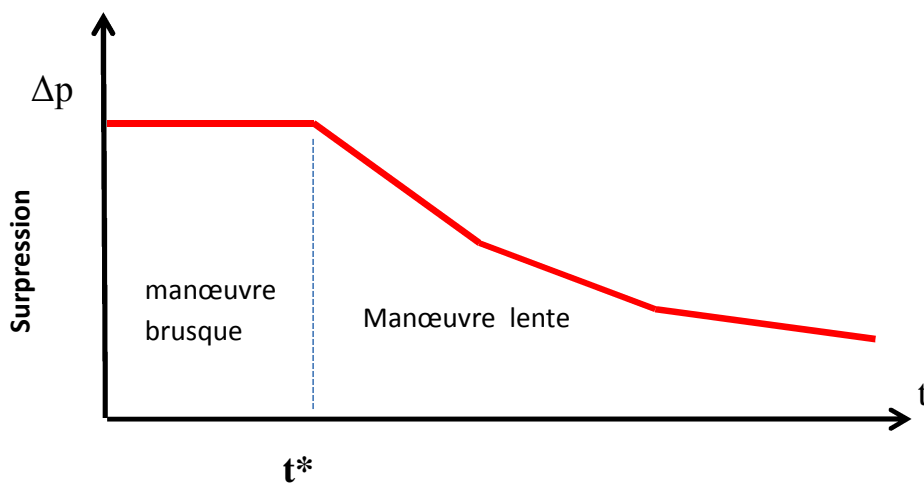
L : est la longueur du tube (m)

a : est la vitesse de propagation de l'onde (m/s) (en fonction du type de fluide, des matériaux, du diamètre interne et externe de la canalisation).

Pour les systèmes mécaniques tels que mitigeurs, électrovannes, vannes à sphère etc..., tous les temps de fermeture $t \leq t^*$ sont définis comme “manœuvres brusques”, car ils provoquent dans le tube un coup de bélier avec une surpression d’intensité maximum. Au contraire, un temps de fermeture $t > t^*$ sera défini comme “manœuvre lente” et provoque un coup de bélier avec une surpression d’une intensité moins dangereuse.

Nous utiliserons dans la formule (1.1) un temps $t = t^*$ pour obtenir une valeur de surpression p maximum pour le coup de bélier.

Le graphique ci-dessous permet de visualiser le phénomène.



t^* : Temps de fermeture

Figure I.2 : la surpression due à la fermeture de la vanne

Exemple :

Pour une longueur des tubes 10 m, diamètre équivalent à 1/2", tubes en acier, cuivre et PE-X avec vitesse de l'eau $v_1 = 2$ m/s. Nous reportons les valeurs de la vitesse de propagation de l'onde C_m , des temps de manœuvres "brusque" t^* (temps de réaction) et de la surpression ΔP extrait de la formule.

	L (m)	v1(m/s)	C_m (m/s)	t^* (ms)	Δp (bar)
Acier	10	2	1411	14,2	28,8
Cuivre	10	2	1400	14,3	28,5
PE-X	10	2	885	22,6	18

Tableau 1 : la valeur Δp en fonction du type du matériau.

A cause de la plus grande rigidité du tube métallique, la vitesse de l'onde C_m est plus élevée que dans le tube en matière plastique et plus proche de la vitesse du son dans l'eau (1420 m/s à 7°C). Au vu des résultats obtenus, nous pouvons remarquer que le tube en matière plastique pour usage sanitaire peut absorber plus facilement un coup de bélier, il montre un temps de réaction t^* plus lent que dans un tube en métal. Cela se traduit, dans la pratique, à la nécessité d'un temps de manœuvre de fermeture encore plus lent que sur un tube métal. Les tubes en matière plastique présentent des valeurs de surpression ΔP inférieur à celle du métal (étant moins rigide, ils "amortissent" partiellement le coup de bélier), mais

de telles surpressions pourraient engendrer des sollicitations dépassant la limite de résistance de ce même tube. En outre, dans les installations encastrées, la présence d'une gaine annelée ou d'une isolation influence les caractéristiques de rigidité du tube en matière plastique, rendant encore plus complexe le calcul du coup de bélier.

Au vu de cet exemple, on comprend alors que l'installation d'un anti-bélier, déjà utile avec un tube métallique, l'est encore plus, voir indispensable, dans une installation sanitaire avec tubes en matière plastique.

Le graphique en bas de la page représente l'influence des différents paramètres sur la surpression dans un tube cuivre au moment de la fermeture. Les trois courbes sont calculées avec un temps de fermeture t égal au temps de réaction t^* pour un tube de 100 m de dimension 20x1.

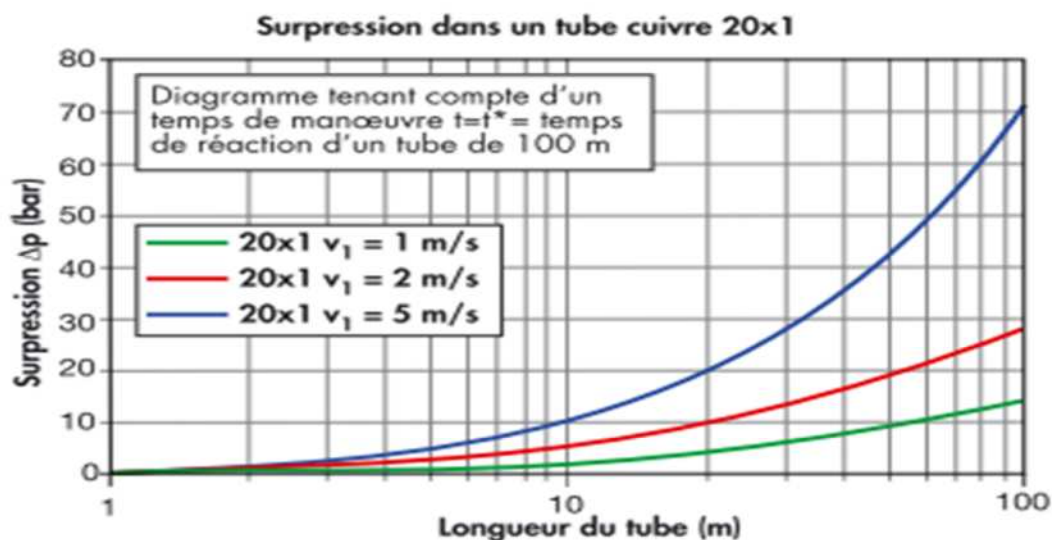


Figure I.3 : Influence de la vitesse de l'écoulement V_1 sur la surpression dans un tube en cuivre.

Tube cuivre	C_m (m/s)	t^* (ms) tube
20x1	1393	143,5

Nous pouvons alors en tirer les conclusions suivantes :

- ✓ Plus le tube est long, plus le temps de réaction est long t^* , donc il faut toujours manœuvrer lentement pour éviter le risque de coup de bélier.
- ✓ À égalité de temps de manœuvre t et de vitesse du fluide v_1 , plus long est le tube, plus grand est la ΔP provoqué par la manœuvre même.
- ✓ À égalité de vitesse du fluide v_1 et de longueur du tube, à diamètre plus grand correspond une ΔP légèrement diminué (la différence est peu sensible).
- ✓ À égalité de longueur du tube et du temps de manœuvre t , la vitesse du fluide augmente v_1 la ΔP augmente généré par la manœuvre.

Concéderons donc un système, analogue à une situation de refoulement, où l'eau coule à une vitesse V_0 pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant.

Le phénomène, peut être décrit en quatre phases :

- 1) Au temps $t=0$, la vanne située à l'aval du système est fermée, immédiatement et à proximité de la vanne, la vitesse d'écoulement s'annule, donc l'énergie cinétique fait le même et doit être composée par gain d'énergie potentielle sous forme d'une dépression puisque le mouvement initial de l'eau a tendance à tirer sur la partie de colonne d'eau qui est immobile. Cette déformation qui tend à réduire le diamètre de la conduite, ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que toute la conduite soit mise en compression, ce qui rend un temps égal au rapport de la longueur ' L ' sur la célérité de l'onde de la déformation ' C '.

2) Lorsque l'onde de dépression atteint le réservoir, celle-ci se dissipe puisqu'il règne à cet endroit une pression constante, à ce moment précis, plus rien ne retient la mise en compression de conduite et elle commence à prendre sa forme à proximité du réservoir, l'augmentation du volume ainsi créée, entraîne le remplissage de la conduite à une vitesse équivalente à la vitesse initial du fluide puisque la déformation initial de la conduite est directement liée à cette dernière, ce phénomène à la même durée que celle de l'étape précédente.

3) Au moment où toute la conduite a repris sa forme, la vitesse de l'eau doit s'annuler en frappant la vanne fermée, encore une fois, on doit avoir transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle par contre cette fois, l'énergie de pression est positive ; cette surpression met en tension la Conduite qui se dilate, la vitesse de l'onde de déformation « C » étant Constante, la durée de cette étape est identique à celle des précédentes.

4) Le surplus d'eau dû à l'augmentation du volume de la conduite commence à s'évacuer près du réservoir à une vitesse « V_0 » de façon à ce que la conduite reprenne son diamètre initial ; à la fin de cette étape, toute la conduite aura retrouvé les conditions initiales et l'étape 1 pourra recommencer.

La période complète à durer $4L / C_f$, et l'oscillation continue identiquement

D'après ce qui vient d'être dit, l'onde de pression devrait subsister indéfiniment et sans déformation, mais réellement les frottements d'eau sur elle-même et sur la paroi de la conduite interviennent et provoque une déformation et un amortissement de l'onde, de sorte que les courbes relevées expérimentalement ont des formes analogues à celle de la figure (I.4), qui représente la surpression en un point de l'extrémité aval de la conduite ce sont approximativement, d'oscillation (sinusoïdale amorti).

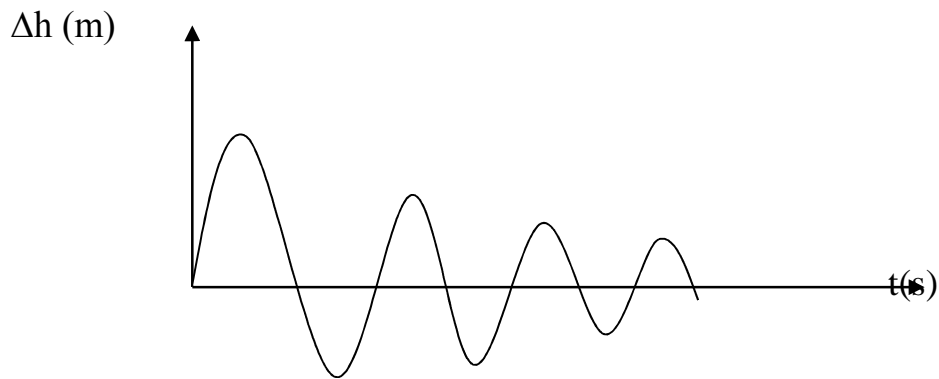


Figure I.4: la vitesse de propagation, ou célérité de l'onde « a » est donné par la formule « D'ALLIEVI ».

$$a^2 = \frac{1}{\rho \left(\frac{1}{K} + \frac{d}{E.e} \right)} \quad (\text{I.3})$$

Avec :

K : coefficient de compression de l'eau.

E : module d'élasticité du matériau.

d : diamètre de la conduite.

e : épaisseur de la paroi.

Quand la valeur maximale de la surpression du coup de bélier, elle est donnée par la formule de JOUKOVSKY :

$$\Delta h = \frac{aV_0}{g} \quad (\text{I.4})$$

Avec :

V_0 : vitesse de l'écoulement

On aura :

$$\Delta P = a \cdot \rho \cdot V_0 \quad (\text{I.5})$$

Les causes plus fréquentes du coup de bélier sont :

*arrêt brutal d'un groupe électropompe aimantant une conduite de refoulement.

*démarrage d'un groupe électropompe.

*fermeture d'une vanne de sectionnement d'une conduite de refoulement ou de distribution.

*le phénomène de coup de bélier est oscillatoire, et pour l'étudier correctement il faut tenir compte de la compressibilité du liquide et d'élasticité de la conduite.

Les procédés mis en œuvre pour la protection contre le coup de bélier peuvent être classés en deux catégories :

- Procédés agissant sur les causes.
- Procédés agissant sur les remèdes.

I.3. La protection contre le coup de bélier :

A) procédés agissant sur les causes :

Les procédés agissant sur les causes tendent à déterminer l'un des deux termes se trouvant en numérateur dans la formule exprimant la surpression maximal c'est-à-dire la vitesse de l'écoulement et la vitesse de propagation de l'onde (a).

La diminution peuvent être obtenue par :

- *les volants d'inertie ;
- * les coupleurs ;
- * les démarrages et l'arrêt sur vanne fermée ;
- *choix du matériau de la canalisation.

B) procédés agissant sur les remèdes :

- *les cheminés d'équilibre ;

- * les réservoirs d'air ;
- * les robinets automatiques d'entrée d'air ;
- * les clapets percés ;
- *les soupapes anti- bélier

Etude bibliographique :

Le problème de l'écoulement instationnaire (ou transitoire) de fluide dans les systèmes de conduite en hydraulique a été traité par de nombreux chercheurs. Ces derniers temps, les orientations pour la recherche dans le domaine des processus transitoires peuvent être divisées en plusieurs domaines: les systèmes de protection contre le coup de bélier, l'écoulement diphasique, et l'ancrage ect.. .

Joukowsky (1897) a réalisé des expériences classiques à Moscou en 1897/1898 et a proposé la loi pour les coups de bélier instantané dans un système de tuyauterie simple . Cette loi stipule que l'élévation de la hauteur de pression ΔH (piézométrique) résultant d'une rapide fermeture d'une valve ($T_c < 2L / a$), est donnée par:

$$\Delta H = \frac{aV_0}{g}$$

Dans laquelle, a = vitesse de l'onde de pression, V_0 = vitesse d'écoulement initial, g = accélération gravitationnelle, L = longueur du tuyau et T_c = temps de fermeture de la valve.

La vitesse de l'onde a été estimée à partir de la formule de Korteweg's(1878)

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho}{1 + (K/E)(D/e)}}$$

Allievi (1902) a développé la théorie fondamentale du coup de bélier qu'il a publié en 1902. L'équation dynamique qu'il a trouvé est plus précise par rapport à l'équation de Korteweg .il a montré aussi que le terme $V(\frac{\partial V}{\partial x})$ est négligeable.

Zielke (1968) il a développé un modèle de frottement de l'écoulement laminaire en transitoire [1]. Selon lui, le membre non-stationnaire dans l'expression de terme de frottement dépend de la vitesse du courant du fluide et la fonction poids qui prend en compte le changement de vitesse dans les points précédents dans le temps. Le modèle de Zielke a ensuite été adopté et amélioré par Trikha (1975) Achard et Lespinard (1981), Arlt (1983.), Kagawa (1983), Brown (1984). Yigang et Jing-Chao (1989), Suzuki (1991), Vardy (1992). Schohl (1993). Shuya Vardy et Brown (1995) (1995). Zarzycki (1997).

Brunone (1991) a développé son propre modèle de détermination de l'expression du coefficient de frottement en régime transitoire selon laquelle il est en fonction de la vitesse moyenne du fluide, la valeur actuelle de l'accélération et l'accélération convective locale de la valeur actuelle [3].

Vardy, Hwang et Brown (1993) ont fait la détermination des coefficients de terme de frottement instationnaire à partir de la fonctions poids du modèle de Zielke pour le cas d'un écoulement turbulent dans une conduite lisse, considérant que la viscosité du fluide reste constante dans la couche limite [5].

Djemili.A (1993) a étudié l'effet de l'ancrage de la conduite pour l'écoulement instationnaire et en particuliers au niveau des coudes. Il a montré que les vibrations engendrées par une mauvaise conception de l'ancrage peuvent augmenter la pression. Il a montré aussi l'influence de la rigidité du tronçon rattaché au coude sur l'évolution de la pression et des contraintes dans le matériau viscoélastique de la paroi de la conduite [6].

Brunone, Golia et Greco (1995) ont étudié l'influence des profils de vitesse en deux dimensions pour la modélisation en régime transitoire [9].

Ghidaoui et Karney (1995) ont présentés une autre méthode pour la transformation des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique aux équations des caractéristiques [10].

Silva-Araya et Chaudhry (1997) Élaboration d'un modèle 2D pour calculer la perte de charge due à la non-stationnarité sur la base de calcul de la dissipation d'énergie dans le flux de transition [11].

Nash et Karney (1999) a appliqué la méthode d'analyse inverse du processus transitoires aux tuyaux reliés en série [12].

Brunone et Morelli (1999) ont Publiés un travail dans lequel ils ont discuté l'impact de la vanne à commande automatique dans le processus transitoire dans le système d'approvisionnement en eau [13].

Pezzinga (2000) Réalisation d'une comparaison des codes 1D et 2D pour déterminer le modèle instable de terme de frottement [14].

Brunone, Karney, Mecarelli et Ferrante (2000) ont étudié l'effet du frottement solide sur le profil de vitesse instantanée au cours du processus de transition [15].

Covas et Ramos (2001) étaient engagés dans la découverte de fissures dans les conduites d'eau en utilisant l'analyse inverse des processus transitoires [17].

Ghidaoui et Kolyshkin (2001) ont effectués des analyses de stabilité de processus transitoires en fonction du profil d'écoulement de la vitesse [18].

Brunone et Ferrante (2001) ont publiés les travaux des techniques actuel pour déterminer la position et la taille des fissures dans les canalisations sous pression [19].

Wang, Lambert, Simpson, Liggett et Vitkovsky (2002) ont publiés des travaux où les fissures et les fuites dans la canalisation sont déterminées par des équations supplémentaires et l'application de Fourier [20].

Chebicheb Z, Otmani A., Djemili A. (2006), Dans cette étude, il a été mis en évidence de la possibilité de traité numériquement le phénomène d'écoulement instationnaire en conduite avec la prise en compte de la déformation de la paroi en matériau élastique (cuivre) ou viscoélastique (polyéthylène). Le terme de frottement a été calculé on utilisant le modèle de Brunone. Ce terme dépend de la vitesse moyenne, de l'accélération locale et de l'accélération convective [22].

A.S. Tijsseling (2007) a donné un modèle mathématique pour décrire le comportement acoustique d'un pipe mince rempli de liquide, basé sur les équations de couplage fluide structure [23].

S. He,c. Ariyaratne , A.E. Vardy (2007) ont développés un modèle numérique pour montre l'influence du turbulence et l'inertie sur le contrainte tangentielle à la paroi [24].

M.H. Afshar, M. Rohani (2008) ils ont donnés une simulation numérique de phénomène de coup de bélier avec un schéma implicite et la MOC [25].

A.R. Lohrasbi and R. Attarnejad (2008) ils ont utilisés la méthode des caractéristiques pour étudie le phénomène du coup de bélier. Ils ont

recommandé pour minimiser l'impact du coup de bélier sur le système hydraulique, la fermeture ou l'ouverture lente de la vanne [26].

Ahmadi, A. Keramat (2010) [27] ; dans leur étude, le but principal était l'étude des effets des jonctions. Des différentes Junction ont été étudiés, tels que les pompes, valves et les tés. L'accent a été mis sur une pompe et de té dans le système. Les relations proposées ont été considérées comme des conditions aux limites, pour la modélisation numérique ils ont utilisés la méthode des éléments finis pour les équations de la structure et la méthode des caractéristiques pour les équations du fluide. Les résultats peuvent être utilisés pour trouver la jonction la plus influente sur la valeur de la surpression.

El Hassan Achouyab , Bennasser Bahrar (2011) ils ont présente un code numérique d'interactions fluide –structure pour résoudre le problème de coup de bélier en conduite à paroi mince. Ce code est le couplage de la méthode des éléments finis associée à l'algorithme de Newmark pour le mouvement de la paroi de la conduite et la méthode des caractéristiques pour le fluide. Contrairement à la théorie classique, ce code permet d'illustrer les effets secondaires d'interaction fluide–structure affectant les paramètres de coup de bélier dans les cas de conduite élastique et viscoélastique [28].

P. G. PROVENZANO, F. BARONI et R. J. AGUERRE (2011) [29] ; ont utilisés des lois de fermeture différentes selon le type de la vanne utiliser. La réduction de la vitesse détermine la forme de l'onde de pression au cours de la fermeture. Une fonction générique a été élaborée permettant de modéliser une grande variété de lois. Un algorithme a été généré qui comprend la loi de fermeture comme condition aux limites pour décrire le phénomène transitoire. Ils ont montrés que la forme d'onde de pression et l'amplitude dépend essentiellement de ces lois de fermeture.

CHAPITRE II

- **Formulation et relation de base**

II-1 Formulation générale :

Les équations du mouvement d'un fluide dans une conduite sont déduites à partir des équations de conservation (de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie), et celles du comportement mécanique et thermodynamique du fluide et de la paroi de la conduite.

II-1-1 Equation relatives au fluide :

A- Les équations de conservation :

Equation de conservation de la masse (équation de continuité) :

L'équation de la continuité doit traduire le principe de conservation de la masse. L'augmentation de la masse pendant un certain temps de fluide contenu dans un volume doit être égale à la somme des masses de fluide qui y entrent, diminuée de celles qui en sortent, la forme différentielle de l'équation de continuité est la suivante ;

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (\text{II-1})$$

où

\vec{V} est le vecteur de vitesse ;

ρ est la masse volumique.

Equation de quantité de mouvement :

Le principe fondamental de la dynamique c'est que la variation de la quantité de mouvement d'un système matériel est égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{V} dV = \sum_{EXT} \vec{F} \quad (\text{II-2})$$

Où les forces extérieures sont :

$$\text{Les forces de volume : } \int_D \vec{f} dV$$

$$\text{Les forces de surface : } \int_D \vec{T} ds$$

où

\vec{f} : La résultante de force à distance qui s'exerce sur l'élément de volume dv

\vec{T} : Représente une force par unité de surface.

V : La vitesse moyenne.

v : le volume de contrôle.

Sous une autre forme, on peut écrire :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \text{grad } P + \vec{f}_V \quad (\text{II-3})$$

où:

$\rho \frac{d\vec{V}}{dt}$: représente la force d'inertie par unité de volume.

$\rho \vec{F}$: représente les forces de volume.

$\overrightarrow{grad} p$: représente les forces de pression.

\overrightarrow{f}_v : représente les forces de viscosité.

Équation de conservation d'énergie :

Pour un système matériel quelconque effectuant une transformation ouverte entre deux états d'équilibre, la variation de la somme de l'énergie interne E de l'énergie cinétique K est égale au travail ΔW et de la chaleur ΔQ .

$$\Delta(E+K)=W+Q$$

La résolution mathématique de l'équation conduit à :

$$\rho \frac{dE}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{grad} T) + q - p \cdot \text{div} \vec{V} + \Phi \quad (\text{II-4})$$

où

$\text{Div}(\lambda \overrightarrow{grad} T)$: Le flux de chaleur.

q :est la source de chaleur.

$P \cdot \text{div} \vec{V}$: L'effet de pression.

Φ : La fonction de dissipation (processus irréversible).

B - Loi de comportement mécanique :

Les phénomènes mécaniques sont très liés, on distingue habituellement les lois de comportement mécanique qui nous serviront de relier les contraintes et les déformations pour les fluides, qui sont moins spécifiques à un type de milieu.

La loi de comportement mécanique des fluides est donnée par la relation suivante :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\sigma} &= f(\overline{\varepsilon}) \\ \overline{\sigma} &= -p \overline{I} + \overline{\tau} \\ \overline{\tau} &= \lambda (\operatorname{div} \overline{V}) \overline{I} + 2 \mu \overline{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-5})$$

où

$\overline{\sigma}$: est le tenseur de contraintes ;

$\overline{\varepsilon}$: est le tenseur des taux de déformation ;

λ et μ : est le Coefficients de viscosité (coefficient de lame) ;

$\overline{\tau}$: est le tenseur des contraintes de viscosité l'équation (II-5) prend la forme suivante :

$$\overline{\sigma} = (-P + \lambda \operatorname{div} \overline{V}) \overline{I} + 2 \mu \overline{\varepsilon} \quad (\text{II-6})$$

C- Loi de comportement thermodynamique :

Les transformations rapides liées au phénomène de propagation d'onde (dans les liquides) peuvent être considérées comme isothermes.

Dans ces conditions, le fluide à un comportement particulièrement barotrope, c'est-à-dire la masse volumique dépend essentiellement de la pression.

En vertu la relation qui lie « ρ » et « P », on peut écrire :

$$\chi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$$

Sachant que le module d'élasticité du fluide K est l'inverse du coefficient de compressibilité χ de fluide, on peut écrire :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{K} dP \quad (\text{II-7})$$

où :

χ : Coefficient de compressibilité isotherme ;

K : Le module d'élasticité du fluide ;

ρ : La masse volumique du fluide.

I-1.2 – Equations relatives à la conduite :

a) L'équation dynamique(ou équation du mouvement de la paroi de la conduite) :

$$\rho_m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \text{div} \overline{\sigma} + \rho_m \vec{F} \quad (\text{II-8})$$

où :

\vec{u} : est le vecteur de déplacement d'un élément de paroi.

ρ_m : est la masse volumique du matériau.

$\overline{\sigma}$: est le tenseur des contraintes.

\vec{F} : est la force massique extérieure (pesanteur).

b) La loi de comportement du matériau (de la paroi de la conduite) :

Pour un matériau élastique, homogène, linéaire et isotrope et en admettant qu'il n'y a pas d'échange de température, les relations des contraintes aux déformations sont données par la loi de Hooke généralisée (système de coordonnées (x, θ, r)).

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}) \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{rr}) \end{array} \right. \quad (\text{II-9})$$

Avec :

E: est le module d'élasticité (ou module de Young).

\mathcal{E}_{ij} : est les composantes du tenseur de déformation.

ν : est le coefficient de poisson.

I-2 : Formulation dans le cas particulier des écoulements en conduite :

I-2-1- Pour l'écoulement :

Les équations précédentes peuvent être simplifiées selon les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

1. L'écoulement est globalement supposé unidimensionnel.
2. Etant donné les grandes valeurs du module d'élasticité du fluide et du module d'élasticité du matériau (de Young), la vitesse du fluide V est très petite par rapport à la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu fluide, ce qui implique que les termes convectifs sont négligés.
3. Pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur.
4. la viscosité est supposée constante.
5. Le problème est supposé en petite déformation.
6. On suppose l'axisymétrie du problème.

Compte tenu de ces hypothèses, les équations de conservation précédentes peuvent être écrites comme suit :

A - Equation de la conservation de la masse :

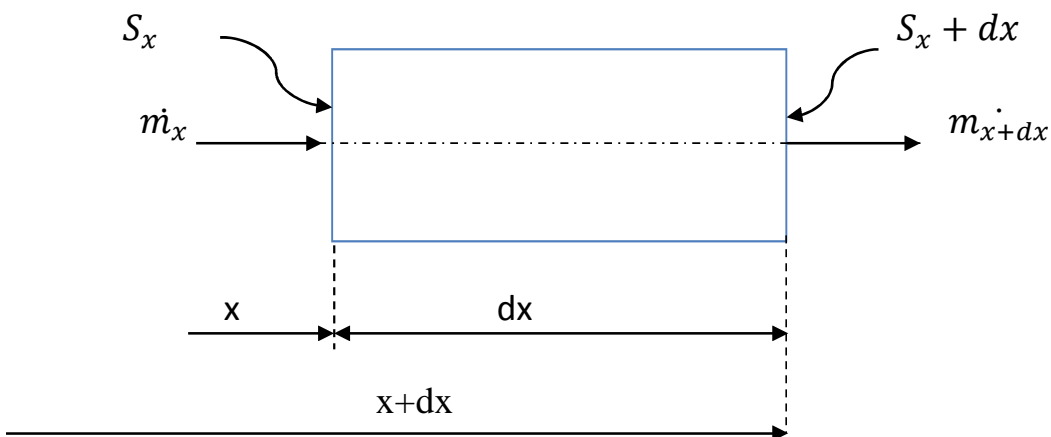


Figure II.1 : schéma d'un volume de contrôle pour l'application de l'équation de la conservation de la masse.

$$S-E+S_t=0$$

$$\dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_x + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot s \cdot dx) = 0$$

$$\rho \cdot V \cdot S + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot V \cdot S)dx - \rho \cdot V \cdot S + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot s \cdot dx) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot V \cdot S) = 0 \quad (\text{II-10})$$

où

S : est la section du fluide.

En coordonnées cylindrique (R, θ, x)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot s) + \rho \cdot s \left(\partial V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot V_r) = 0 \quad (\text{II-11})$$

B- Equation de la conservation de la quantité du mouvement :

Sur la (**figure II.2**) est schématisé un élément de volume de fluide de section (s) et de longueur dx dont le tube est incliné d'un angle (α).les forces appliquées sur cet élément dans la direction x sont les forces de pression, la contrainte tangentielle (τ), et la force de gravité.

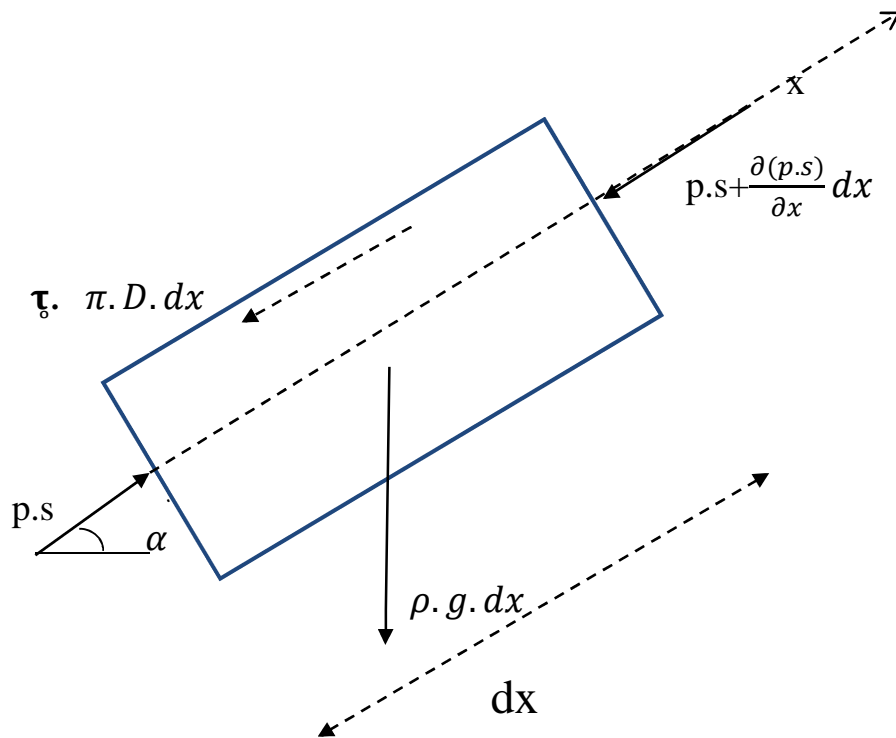


Figure II.2 : schéma d'un volume de contrôle pour l'application de l'équation de la quantité du mouvement.

Pour trouver l'équation de quantité de mouvement en projetant les efforts sur l'axe x :

$$p \cdot s - p \cdot s - \frac{\partial(p \cdot s)}{\partial x} dx - \tau_0 \cdot \pi \cdot D \cdot dx - \rho \cdot g \cdot s dx \cdot \sin \alpha = \rho \cdot s \cdot dx \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

Tout calcul fait, on obtient :

$$s \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0 \cdot \pi \cdot D + \rho \cdot g \cdot s \cdot \sin \alpha + \rho \cdot s \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Avec:

$$\tau_0 = \rho \cdot g \cdot \frac{D}{4} J$$

Où

τ : est la contrainte tangentielle de viscosité;

J : perte de charge unitaire (m /m).

L'équation de quantité de mouvement finale est la suivante :

$$\rho_f \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g (J - \sin \alpha) \quad (\text{II} - 12)$$

I-2.2. Equations relatives à la paroi de la conduite :

Nous avons supposé les hypothèses suivantes :

- * Les hypothèses concernant la conduite sont celles des coques minces en petite déformation.
- * L'inertie radiale de la paroi est négligeable [6].
- * L'axisymétrie du problème.
- * Les déplacements sont les déplacements des points situés sur la surface médiane.

A- Equation de comportement de la conduite (paroi de conduite) :

Ces équations sont déduites à partir de la loi de HOOKE généralisée pour un matériau élastique se déformant sous la pression du fluide.

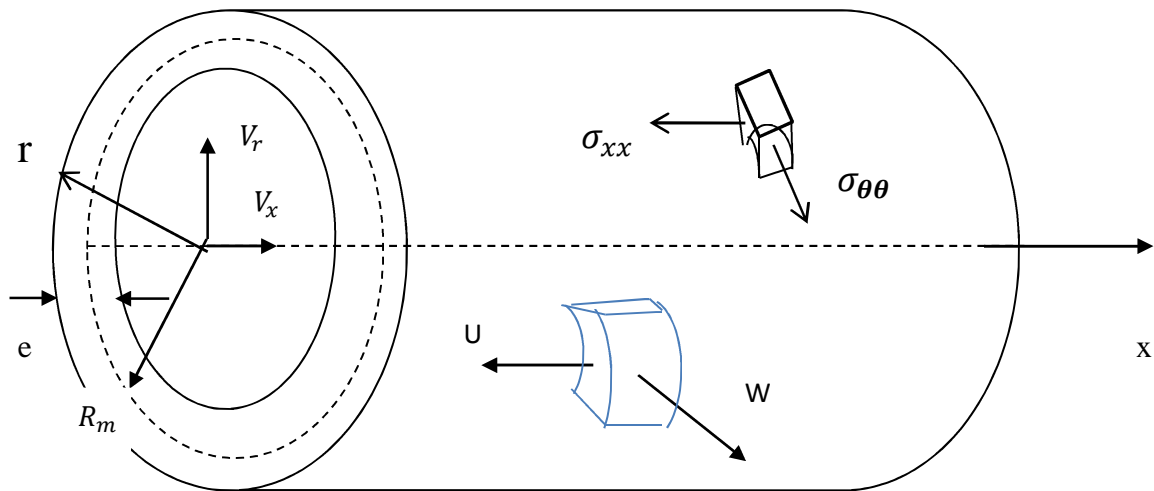


Figure II.3 : système de coordonnées (r, x, θ) et géométrie de la paroi de la conduite.

Compte tenu des hypothèses et l'axe-symétrie du problème les équations de comportement se traduisent à deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{\theta\theta})] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{xx})] \end{array} \right. \quad (\text{II-13})$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{II-14})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{W}{R} \quad (\text{II-15})$$

où :

u : est le déplacement longitudinal de la paroi de la conduite.

W : est le déplacement radial de la paroi de la conduite.

R : est le rayon.

B -Equation de la dynamique (ou équation du mouvement) de la conduite :

$$\rho_m \cdot R \cdot e \frac{\partial \dot{W}}{\partial t} - R \cdot P + e \cdot \sigma_\theta = 0 \quad (\text{II-16})$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = 0 \quad (\text{II-17})$$

En se référant aux travaux de Bahrar [28] et de Djemili [6] qui ont montrés que l'inertie radiale peut être négligée alors l'équation (II-16) peut être écrite sous une forme donnant directement la relation entre la contrainte circonférentielle et la pression interne du fluide.

$$\sigma_\theta = \frac{RP}{e} \quad (\text{II-18})$$

avec :

e : Epaisseur de la paroi de la conduite.

ρ_m : La masse volumique du matériau.

\dot{u} : La vitesse de déplacement longitudinale de la structure.

\dot{W} : La vitesse de déplacement radial de la structure.

I-2-3 - Détermination du terme de frottement J [15] :

Calcul du terme de frottement :

L'effet du terme de frottement du fluide contre la paroi de la conduite est complètement pris en compte par l'introduction du terme de la variation de la vitesse moyenne instantanée et du taux de variation de la vitesse appelé aussi fréquence de variation de la vitesse.

Le modèle utilisé est celui de Brunone, qui est efficace et significatif .Il est sous la forme suivante:

$$J = j_s + j_u \quad (\text{II- 19})$$

Sachant que :

j_s : est le gradient hydraulique pour l'écoulement permanent.

j_u : est le gradient hydraulique pour l'écoulement instationnaire.

Ce terme a la forme algébrique suivante :

$$J = \frac{\lambda V |V|}{2gD} + \frac{K_B}{2g} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + c_f \text{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \right) \quad (\text{II-20})$$

Dans laquelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sign}(V)=+1 \text{ si } v \geq 0 \\ \text{sign}(V)=-1 \text{ si } v \leq 0 \end{array} \right.$$

et

$$K_B = \frac{\sqrt{C^*}}{2} \quad C^* = \left\{ \begin{array}{l} 0.0476 \text{ en régime laminaire} \\ \frac{7.41}{Re^z} \text{ en régime turbulent} \end{array} \right.$$

$$Z = \log_{10}(14.3/Re^{0.05})$$

où:

K_B : est le coefficient de frottement de Vardy ;

C^* : est le coefficient d'amortissement ;

c_f : est la vitesse d'onde de pression.

Et

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} \frac{64}{Re} \quad \text{en régime laminaire} \\ 0.14Re^{-0.14} \quad \text{en régime turbulent} \end{array} \right.$$

avec

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

où

Re : Le nombre de Reynolds;

ν : La viscosité cinématique.

II-2-4 : Relation de couplage conduite fluide :

Dans cette partie, on donne les relations du couplage entre les différents paramètres du fluide (P et V) et de la conduite (σ et u).

On considère les grandeurs moyennes de l'écoulement en substituant (II-14) et (II-15) dans (II-13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{\theta\theta})] \\ \frac{W}{R} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{xx})] \end{array} \right. \quad (\text{II-21})$$

L'arrangement des équations de (II-21) nous donne :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{W}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (\text{II-22})$$

Et en remplaçant l'équation (II-18) dans (II-22) après transformation mathématique, on peut écrire:

$$P = \frac{e*E}{R*(1-\nu^2)} \left[\frac{W}{R} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right] \quad (\text{II-23})$$

La condition aux limites (surface interne de la conduite)

$$V_r \Big|_{r=R} = \frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{II-24})$$

De l'équation du fluide (II-7) et (II-10) en coordonnées cylindrique ; on peut écrire :

$$\frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rVr) + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-25})$$

Et en intégrant cette équation (approximation des champs)[6][28], (II-25) devient :

$$\frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + 2 \frac{V_r}{R} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-26})$$

En remplaçant (II-24) dans (II-26) nous obtenons :

$$\frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + 2 \frac{\dot{W}}{R} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-27})$$

En dérivant par rapport au temps les équations (II-22) et (II-23), Nous obtenons :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\frac{\partial \dot{U}}{\partial x} + \nu \frac{\dot{W}}{R} \right] \quad (\text{II-28})$$

$$2 \frac{\dot{W}}{R} = \frac{2R(1 - \nu^2)}{e.E} \frac{\partial P}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (\text{II-29})$$

On remplace l'équation (II-29) dans (II-27) et (II-28), nous obtenons :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} - \frac{\nu R}{e} \frac{\partial P}{\partial t} - E \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-30})$$

$$\left[\frac{1}{K} + \frac{2R(1-\nu^2)}{eE} \right] \frac{\partial P}{\partial t} - 2 \frac{\nu \cdot \partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-31})$$

Dans la suite, on note la contrainte axiale par σ au lieu de σ_{xx} et la vitesse du fluide par V au lieu de V_x .

II-3 : Forme réduite du système des équations de base :

L'arrangement des équations (II-12) (II-17) (II-30) et (II-31) nous conduit au système d'équations à résoudre, et pour éviter la confusion entre les masses volumiques, nous utiliserons ρ_f et ρ_m correspondant au fluide et au matériau.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g (J - \sin \alpha) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial \dot{U}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\nu R}{e} \frac{\partial P}{\partial t} - E \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = 0 \\ \left[\frac{1}{K} + \frac{(2R(1-\nu^2))}{eE} \right] \frac{\partial P}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-32})$$

Ce système d'équation est un système d'équation différentielle aux dérivées partielles du type hyperbolique.

II-4 : Condition aux limites :

Dans notre installation, nous avons un réservoir (amont) relié à une conduite. A l'extrémité aval de celle-ci nous avons une vanne à fermeture rapide.

A. Conditions aux extrémités :

Au niveau des extrémités les valeurs de la pression et de la vitesse sont imposées.

B. Condition au support rigide :

- La conduite est ancrée rigidement.
- La pression de part et d'autre du support est la même, ainsi que la vitesse du fluide V .

C. Condition au coude :

On applique l'équation de conservation de la masse sur le volume de contrôle au niveau du coude (**Figure II.4**) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot dV + \int_S \rho \cdot V_r \cdot n \cdot ds = 0 \quad (\text{II-33})$$

où :

V_r : La vitesse relative du fluide.

Par l'application du principe de la conservation de la masse la relation (II-33) devient :

$$\left(V_1 - \dot{U}_1 \right) = \left(V_2 - \dot{U}_2 \right) \quad (\text{II-34})$$

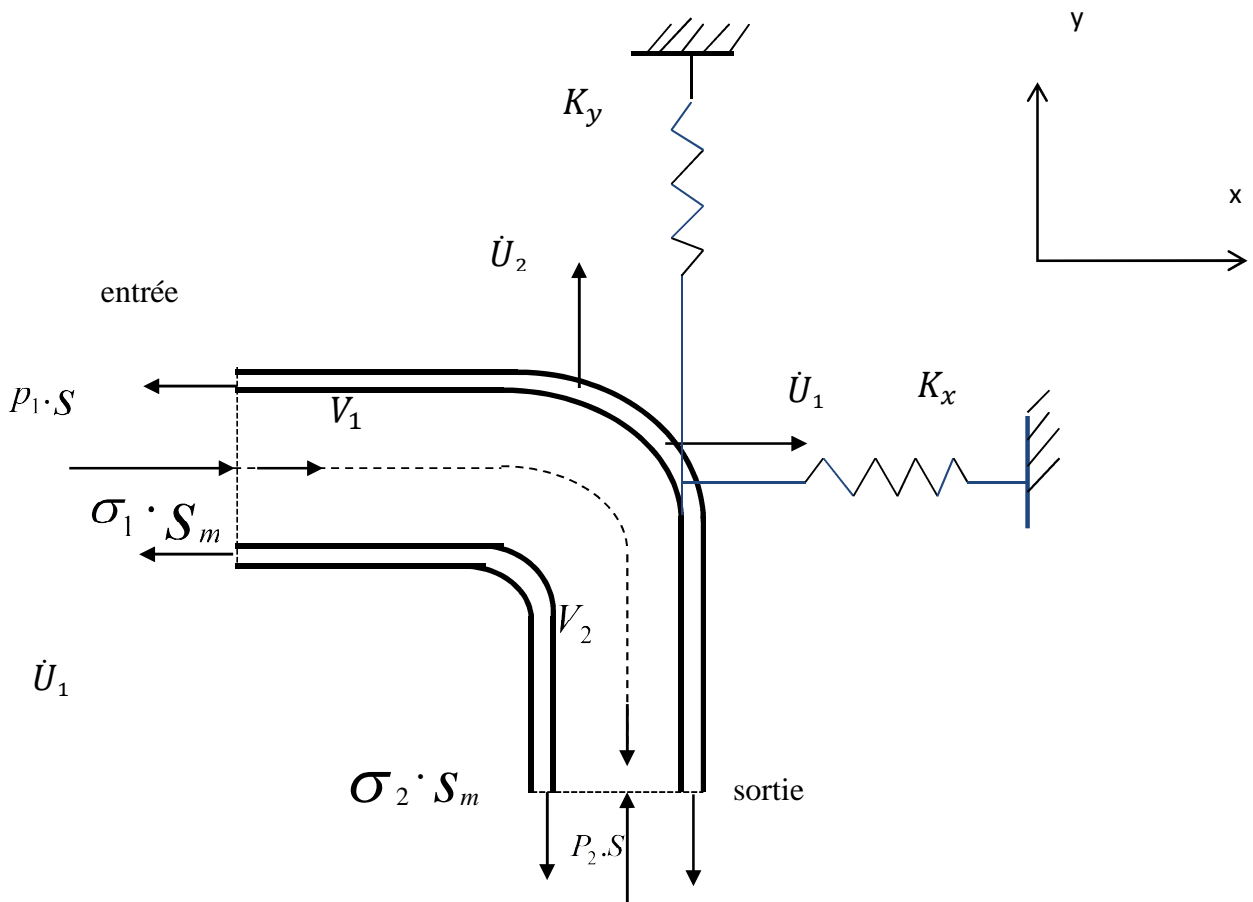


Figure II.4 : Schéma de volume de contrôle au niveau du coude.

Par application de l'équation de conservation de la quantité du mouvement sur le volume de contrôle au niveau du coude on arrive à écrire :

Sur l'axe (x) : $P_1 S_1 - \sigma_1 \cdot S_m = k_x u_1$ (II-35)

$$\text{Sur l'axe (y) : } P_2 S_2 - \sigma_2 \cdot S_m = k_y u_2 \quad (\text{II-36})$$

Les coefficients de rigidité K_x et K_y sont de la forme :

- $K = \frac{3EI}{L^3}$ Si la conduite rattachée au coude est en flexion.
- $K = \frac{E.S}{L}$ Si celle-ci est en mouvement axial (rigidité axiale).

où :

I : est le moment d'inertie.

L : est la longueur de la conduite rattachée au coude.

$$I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} \quad (\text{II-37})$$

où :

D : est le diamètre extérieur.

d : est le diamètre intérieur.

CHAPITRE III

- Description de types d'ancrage

III. Description de l'ancrage :

1. Définition :

L'ancrage des tuyauteries a longtemps été sous-estimée et a conduit, avec l'élévation des conditions de service, à des déboires de plus en plus nombreux, tant sur le plan technique que sur le plan économique.

Alors qu'à l'origine le terme ancrage ne couvrait que les dispositifs destinés à limiter les contraintes et les déformations dans la tuyauterie, l'usage a étendu de ce terme à l'ensemble des dispositifs destinés à maintenir les contraintes, les efforts sur les déformations, quelle qu'en soit leur origine, à un niveau admissible. Etant donné ce rôle de régulateur de contraintes, et par conséquent d'efforts que remplit l'ancrage, que toute étude ou réalisation défectueuse puisse conduire à des troubles fonctionnels importants, comme une perte d'étanchéité d'un jeu de brides ou une fissuration d'une tubulure.



Figure III .1 : Ancrage d'une conduite

2. Terminologie et symboles [30] :

Comme dans toutes les techniques, il est nécessaire d'utiliser une terminologie précise, concrétisée sur les documents d'exécution par représentation symbolique non équivoque.

La terminologie précisée ci-après est conforme à celle donnée dans le code français de construction des tuyauteries industrielles « CODETI » publié par le SNCT.

2.1 Terminologie :

- **Support :**

Dispositif destiné à :

- supporter le poids de la tuyauterie ainsi que celui de tous les équipements qui lui sont associés ;
- orienter et reporter les effets des sollicitations exercées par la tuyauterie sur l'environnement et sur elle-même et d'une façon générale, supprimer ou limiter un à six degrés de liberté d'un point particulier de la tuyauterie.
- le support élastique, dont la réaction varie linéairement avec la position de la tuyauterie, et dont la réalisation la plus courante est le ressort hélicoïdal.
- le support à portance constante, dont la réaction, égale au poids de la portion de tuyauterie à supporter, ne varie pratiquement pas, quelle que soit la position verticale de la tuyauterie qui est fonction de la dilatation. Le contrepoids est le type parfait de ce genre de support.

- **Ancrage :**

L'ancrage est un point fixe de tuyauterie généralement réalisé au raccordement d'un appareil et pouvant de ce fait subir des déplacements imposés.

- **Butée :** dispositif limitant ou annulant une ou plusieurs composantes du déplacement ou de la rotation de la tuyauterie. La butée est définie par la direction du mouvement interdit.
- **Butée dynamique :** dispositif, auto-freinant ou autobloquant, limitant dans une ou plusieurs directions le déplacement rapide de la tuyauterie sous l'effet d'efforts dynamiques, mais permettant dans ces directions les déplacements lents tels que ceux dus à la dilatation.
- **Guide :** butée limitant la ou les composantes de déplacements perpendiculaires à l'axe du mouvement autorisé. Le guide est défini par la direction du mouvement autorisé.
- **Point fixe :** disposition de sup-portage limitant toutes les translations et rotations de la tuyauterie par rapport à la structure environnante.
- **Suspension par pendentif :** type de support comportant une ou plusieurs tiges de suspension et s'opposant à la composante verticale négative du déplacement.
- **Support posé libre :** dispositif maintenant la tuyauterie contre l'effet de la composante verticale d'effort et ne s'opposant pas de façon notable à des déplacements ou rotations.

2.2 Symboles

Il est très utile, qu'à la vue d'un plan, on puisse distinguer le type de support prévu, et vérifier rapidement la conformité de l'installation par rapport au plan. Chaque bureau d'études possède son propre système de repérage. Nous donnons ci-après, à titre d'exemple, un des systèmes utilisé depuis plusieurs années avec satisfaction :

Type de support	Symbole
point fixe	PF
support pendu	S
à portance variable	SR
à portance constante	SE
rigide	SF
support posé	P
rigide verticalement, libre dans le plan	PL
Rigide verticalement, guidé longitudinalement	PG
rigide verticalement, guidé transversalement	PT
support spécial	X
amortisseur	XA

3. Emplacement du support :

La détermination de chaque support nécessite la connaissance du déplacement du point de la tuyauterie sur lequel on doit fixer le support, lorsque la tuyauterie est soumise aux diverses sollicitations et particulièrement à la déformation. Spécialement, lorsque les extrémités sont soumises au choc de la surpression, la tuyauterie se déforme et ses différents points subissent des déplacements par rapport à la position d'origine avant l'application.

- **Règles particulières de positionnement des supports :**

Pour définir la position précise du support sur la tuyauterie, le concepteur devra respecter un certain nombre de règles :

— éviter de se fixer sur des composants tels que les vannes, les coudes, les brides ; en particulier la fixation d'attaches soudées à l'extrados de coudes à faible rayon ($R = 1$ ou $1,5 D$) peut entraîner, dans le cas des tuyauteries à haute température, un état de contrainte dangereux, difficilement calculable, et une modification importante des propriétés de flexibilité de ces coudes ;

— ne pas installer de supports sur des tronçons qui sont destinés à être démontés périodiquement ;

— multiplier les supports autour des charges concentrées importantes (par exemple, vannes très lourdes, à supporter de part et d'autre) ;

— s'assurer que la conception du support et de ses liaisons à la charpente et à la tuyauterie permet de suivre le déplacement prévu de la tuyauterie, sans déformation ;

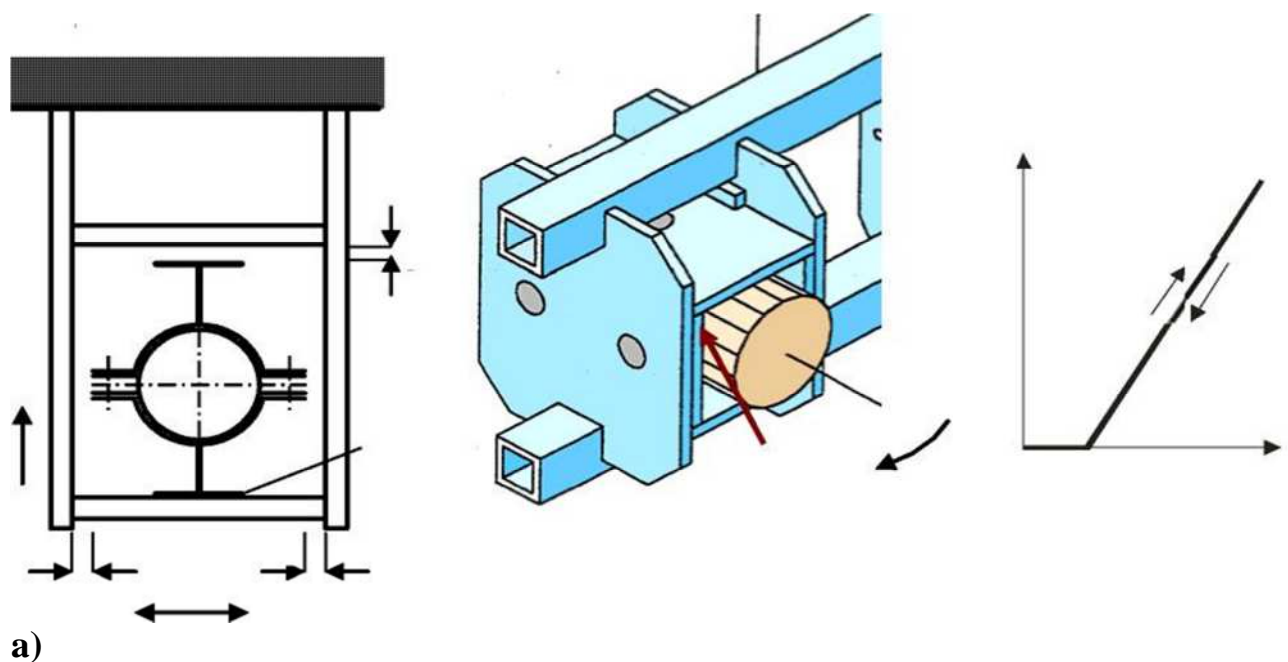
— vérifier que, en service et lors des essais hydrauliques, les charpentes secondaires et même les charpentes principales peuvent reprendre les efforts introduits par la liaison.

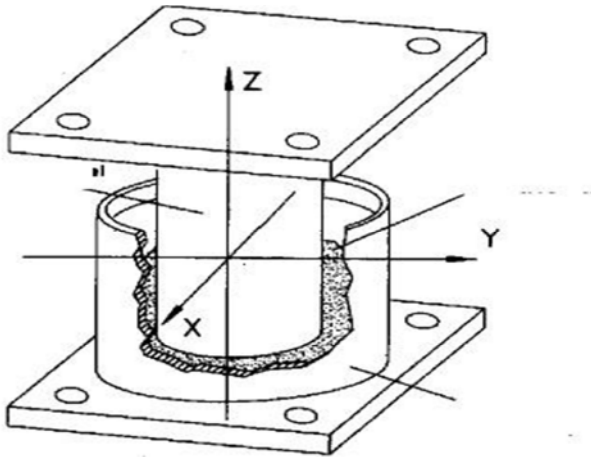
Ces deux derniers points impliquent que, lors de l'étude du support, le concepteur ait pu déterminer, même approximativement, le déplacement de la tuyauterie au droit du support, et l'effort exercé en ce point par cette tuyauterie.

4. Le support de type amortisseur: [21]

Pour l'analyse linéaire, les amortisseurs visqueux (voir figure III. 2) sont généralement considérés comme les supports, définis par une caractéristique d'élasticité linéaire. Cette raideur du ressort de remplacement, généralement fourni par le constructeur, ne donne qu'une approche grossière de la performance réelle. Elle ne peut être appliquée que dans une gamme de fréquences basse de vibration de la tuyauterie.

Pour une simulation réaliste de plus le rendement de l'amortisseur, il doit être considéré que la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse de la substance visqueuse. En outre, comme le montre la figure (III.2) lui-même la résistance d'amortissement dépend de la fréquence de la vibration de tuyauterie. La mise en œuvre dans le calcul a été faite de telle sorte que la force d'amortissement est calculée en utilisant les vitesses actuelles; cette force est mise dans l'équation du mouvement comme une force externe supplémentaire à l'emplacement respectif.





b)

Figure III.2 : a) schéma d'un support avec jeu de 3mm, b) caractéristique d'un amortisseur visqueux.

5. Effet du support sur la paroi de la conduite : [21]

Les charges du fluide, appliquées sur la paroi de la conduite provoquent la déviation par rapport au comportement linéaire élastique. Le résultat de ces études sur la modélisation d'accompagnement non linéaire est les effets sur la réduction de la charge et leur répartition sur d'autres éléments comme les supports. Ces résultats dépendent fortement de la relation entre les conditions du système, les forces du fluide et des fixations. Un paramètre crucial est le rapport entre la fréquence de la pression et les fréquences de la structure. Une caractéristique non-linéaire des performances des supports est obtenue si un jeu est pris en considération lors de la conception du support. Les forces de fluide sont amorties considérablement par l'effet du jeu. En cas de hautes fréquences et de basses fréquences de vibrations structurales, causées par une inertie élevée de la tuyauterie, les forces de soutien peuvent être réduites. La raison en est que l'amplitude du déplacement du tube, induite par des oscillations de fluide à haute fréquence à la position de support en direction du déplacement annulé peut être inférieure à la largeur du jeu.

La figure III.3 [21] montre une comparaison des résultats de déplacement et de forces sur un support réalisé avec un comportement élastique linéaire et compte tenu d'un jeu de 3mm. Les résultats s'appliquent à la portée de point fixe, qui est construit par deux paliers de guidage. Lorsqu'un écart est inséré, le support réduit la charge d'environ 30% et l'oscillation harmonique est interrompue. La raison peut être clairement vue du comportement de déplacement à l'appui: sans restriction par le support, la déviation de la canalisation atteint à environ 4 mm, le jeu subi une sollicitation de 1 mm entravée par le support.

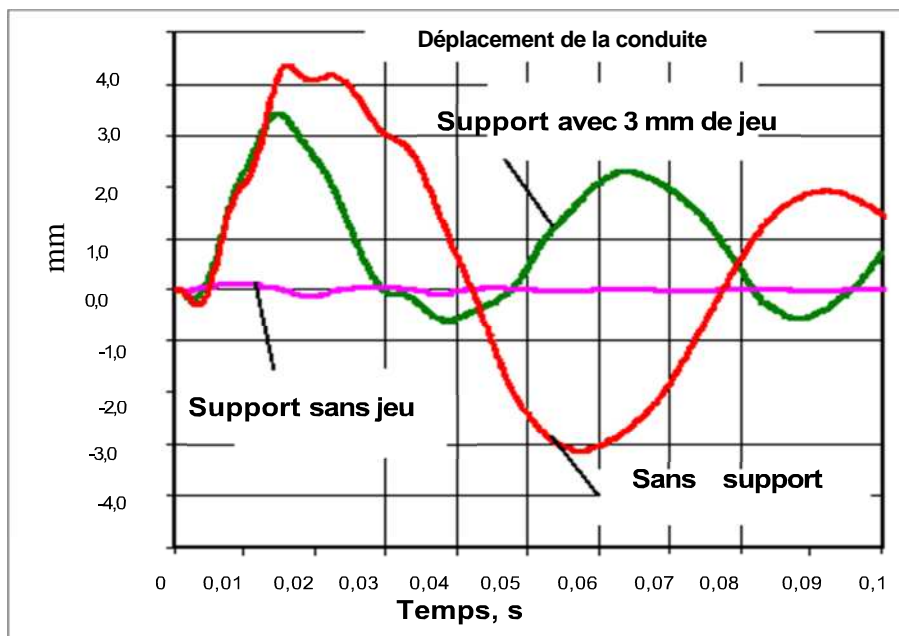


Figure III.3: A) Influence du jeu au support sur le déplacement de la conduite.

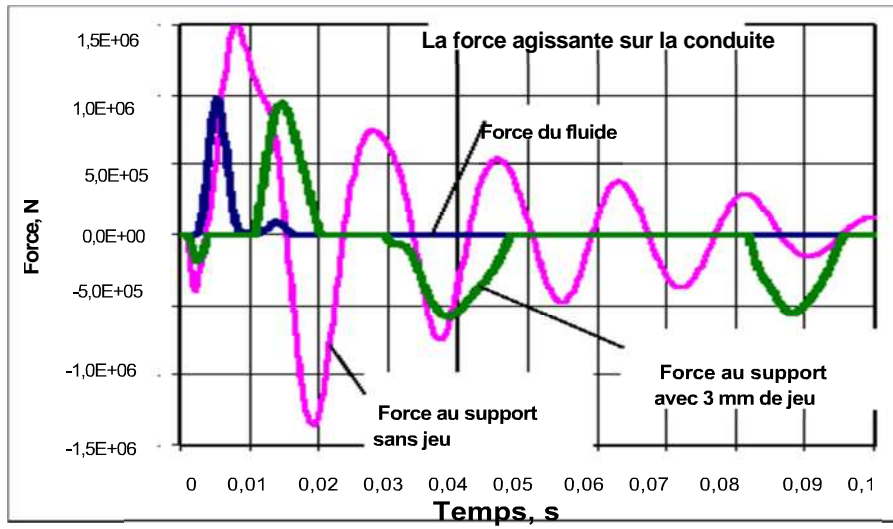


Figure III.3 : B) Influence du jeu au support sur la force exercée par le fluide sur la conduite

CHAPITRE IV

- **Méthodes de résolution**

IV -1- Méthode basée sur les caractéristiques :

Parmi les différentes méthodes de résolution du système d'équations différentielles aux dérivées partielles (II-32) de type hyperbolique, on a utilisé la méthode des caractéristiques avec les différences finies.

A-Recherche des droites caractéristiques :

Les systèmes d'équation (II-32) est un système d'équation aux dérivées Partielles de type hyperbolique dont les directions caractéristiques peuvent être obtenues en considérant les dérivées des fonctions P, V, \dot{u}, σ le long des courbes du plan (x, t) ou ces dérivées sont indéterminées :

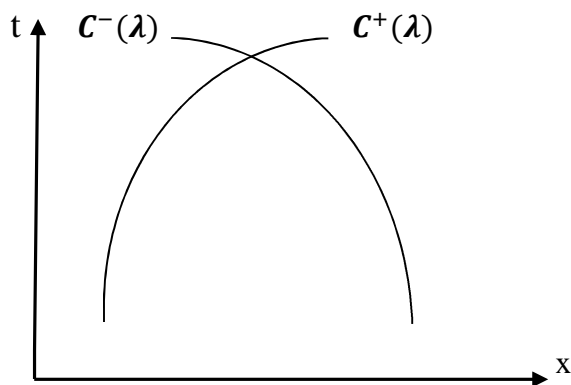


Figure IV.1 : courbes caractéristiques.

On a ainsi pour les courbes $c(2)$ du plan (x, t) définie paramétriquement par les coordonnées $x=x(t), t=t(\lambda)$:

On écrit l'expression des dérivées totales des fonctions P, V, \dot{u}, σ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial V}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial V}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = dP \\ 0 \frac{\partial P}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = dV \\ 0 \frac{\partial P}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial P}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial V}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = d\dot{u} \\ 0 \frac{\partial P}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial P}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial V}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial V}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = d\sigma \end{array} \right. \quad (\text{IV-1})$$

Le système (II-32) peut être écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_f \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g (J - \sin \alpha) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial \dot{U}}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\nu R}{e} \frac{\partial P}{\partial t} - E \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = 0 \\ M. \frac{\partial P}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV-2})$$

Avec :

$$M = \frac{1}{K} + \frac{2R(1-\nu^2)}{eE}$$

On introduisant les expressions de dx et dt dans l'équation (IV-1) et (IV-2),

on trouve finalement le système d'équation suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial V}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial V}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = dP$$

$$0 \frac{\partial P}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = dV$$

$$0 \frac{\partial P}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial P}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial V}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = d\dot{u}$$

$$0 \frac{\partial P}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial P}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial V}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial V}{\partial t} dt + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dx + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt = d\sigma$$

$$1 \frac{\partial P}{\partial x} + 0 \frac{\partial P}{\partial t} + 0 \frac{\partial V}{\partial x} + \rho_f \frac{\partial V}{\partial t} + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = A$$

$$0 \frac{\partial P}{\partial x} + 0 \frac{\partial P}{\partial t} + 0 \frac{\partial V}{\partial x} + 0 \frac{\partial V}{\partial t} + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \rho_m \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + 1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

(IV-3)

$$0 \frac{\partial P}{\partial x} + M \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + 1 \frac{\partial V}{\partial x} + 0 \frac{\partial V}{\partial t} - 2v \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

$$0 \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{Rv}{e} \frac{\partial P}{\partial t} + 0 \frac{\partial V}{\partial x} + 0 \frac{\partial V}{\partial t} - E \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + 0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + 0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Sachant que :

$$A = \rho g (J - \sin \alpha)$$

Sous la forme matricielle le système (IV-3) devient :

$$\begin{vmatrix} dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt \\ 1 & 0 & 0 & \rho_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & M & 1 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dp \\ dV \\ d\dot{u} \\ d\sigma \\ A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (IV-4)$$

On déduit la solution pour les dérivées partielles (voir annexe A.I):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P_x}{\Delta} ; \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\Delta P_t}{\Delta} ; \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\Delta V_x}{\Delta} ; \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\Delta V_t}{\Delta}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \frac{\Delta \dot{u}_x}{\Delta} ; \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\Delta \dot{u}_t}{\Delta} ; \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\Delta \sigma_x}{\Delta} ; \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\Delta \sigma_t}{\Delta}$$

Où :

$$\alpha = \rho_m , \beta = 2\nu , \gamma = E , \lambda = \frac{R\nu}{e}$$

$\Delta ; \Delta P_x ; \Delta P_t ; \Delta V_x ; \Delta V_t ; \Delta \dot{u}_x ; \Delta \dot{u}_t ; \Delta \sigma_x ; \Delta \sigma_t$ (sont les déterminants habituels).

Dans les cas particuliers, les courbes $c(\lambda)$ correspondant à des valeurs de dx et dt telle que $\Delta=0$.

Il n'y aura de solution finie que si $\Delta p_x ; \Delta p_t ; \Delta V_x ; \Delta V_t ; \Delta \dot{u}_x ; \Delta \dot{u}_t ; \Delta \sigma_x ; \Delta \sigma_t$

sont simultanément des numérateurs.

• Les courbes $c(\lambda)$ ou la relation $\Delta=0$ est vérifiée sont appelées **courbes caractéristiques** (voir figure IV-1) et la condition $\Delta=0$ qui est définie en chaque point (x,t) sur les courbes $c(\lambda)$, la pente de ces courbes **condition de direction**.

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt \\ 1 & 0 & 0 & \rho_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & M & 1 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -\alpha M \rho_f (dx)^4 - \gamma (dt)^4 + [(\alpha + \rho_f (M\gamma + \lambda\beta))(dt)^2 (dx)^2] = 0$$

$$\Delta = -\rho_m M \rho_f (dx)^4 - E (dt)^4 \left[\rho_m + \rho_f \left(ME + 2 \frac{Rv^2}{e} \right) \right] (dx)^2 (dt)^2 = 0$$

• On divise par $(dt)^4$ on trouve :

$$\Delta = -\rho_m M \rho_f \frac{(dx)^4}{(dt)^4} - E + \left[\rho_m + \rho_f \left(ME + 2 \frac{Rv^2}{e} \right) \right] \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = -\left(\frac{dx}{dt} \right)^4 + \frac{\left[\rho_m + \rho_f \left(ME + 2 \frac{Rv^2}{e} \right) \right]}{\rho_m \rho_f M} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{E}{\rho_m \rho_f M} = 0$$

On pose :

$$\bullet C = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\bullet I = \frac{\left[\rho_m + \rho_f \left(ME + 2 \frac{Rv^2}{e} \right)\right]}{\rho_m \rho_f M}$$

$$\bullet F = \frac{E}{\rho_m \rho_f M}$$

$$\Rightarrow \Delta = -C^2 + IC - F$$

$$\Delta' = I^2 - 4(-1)(-F) \Rightarrow \Delta' = I^2 - 4F$$

$$C_{f,m} = \frac{-I \pm \sqrt{\Delta'}}{-2}$$

$$C_{f,m} = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho_m + \rho_f \left(ME + \frac{2Rv^2}{e} \right)}{\rho_m \rho_f M} \right] \pm \left[\left[\frac{\rho_m + \rho_f \left(ME + \frac{2Rv^2}{e} \right)}{\rho_m \rho_f M} \right]^2 - \frac{4E}{\rho_m \rho_f M} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV-5})$$

(C_m) : Pour le matériau.

(C_f) : Pour le fluide.

On pose :

$$a_f^2 = \frac{1}{M\rho_f}, a_m^2 = \frac{E}{\rho_m}, b = \frac{\rho_m}{\rho_f}, d = \frac{R}{e}$$

L'équation (IV-5) devient :

$$C_{f,m} = \frac{1}{2} \left(a_f^2 + a_m^2 + \frac{a_f^2 \cdot d \cdot 2v^2}{b} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(a_f^2 + a_m^2 + \frac{2v^2 \cdot d \cdot a_f^2}{b} \right)^2 - 4a_m^2 \cdot a_f^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV-6})$$

où

C_m^+, C_m^- : est la vitesse de propagation de l'onde des contraintes et des déformations longitudinal de la paroi de la conduite.

C_f^+, C_f^- : est la célérité l'onde des perturbations des pressions et des vitesses du fluide.

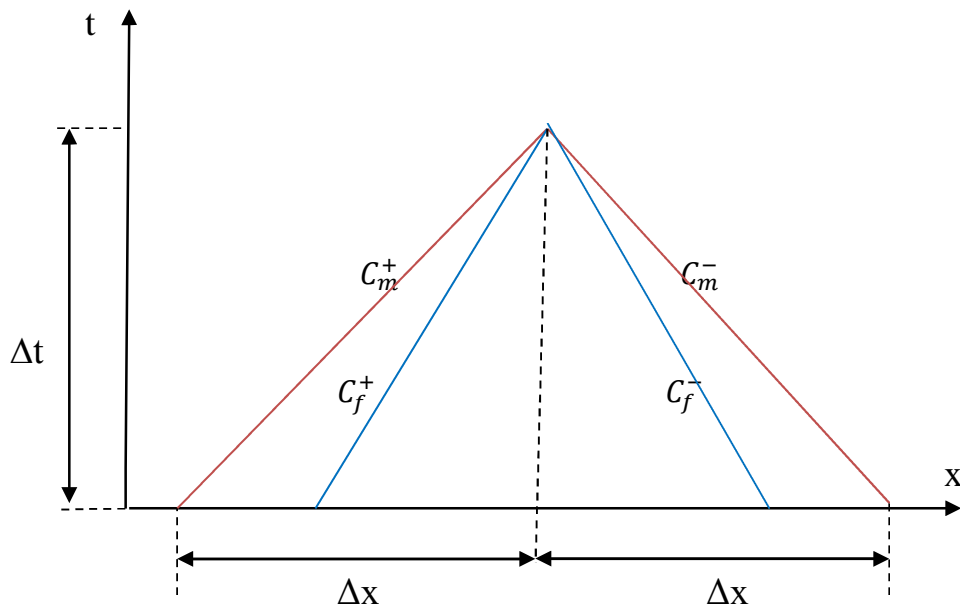


Figure IV.2 : schéma numérique des droites caractéristiques.

$$\Delta P_x = \begin{vmatrix} dP & dt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ dV & 0 & dx & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d\dot{u} & 0 & 0 & 0 & dx & dt & 0 & 0 \\ d\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & dx & dt \\ A & 0 & 0 & \rho_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & M & 1 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{IV-7})$$

Après calculs :

$$\Delta P_x = 0$$

$$\begin{aligned} & \rho_f \cdot \gamma \cdot M \cdot dt^2 \cdot dx \cdot dP - \gamma \cdot A \cdot dt^4 + \rho_f \cdot \gamma \cdot dt^3 \cdot dV - \rho_f \cdot \alpha \cdot M \cdot dx^3 \cdot dP + \alpha \cdot A \cdot dx^2 \cdot dt^2 - \rho_f \cdot \alpha \cdot dx^2 \cdot dV \cdot dt \\ & + \rho_f \cdot \alpha \cdot \beta \cdot dx^2 \cdot d\dot{u} \cdot dt - \rho_f \cdot \beta \cdot dx \cdot dt^2 \cdot d\sigma + \rho_f \cdot \beta \cdot \lambda \cdot dx \cdot dt^2 \cdot dP = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-8})$$

On divise l'équation (IV-7) sur dt^3 , elle devient :

$$\frac{\Delta P_x}{dt^3} = 0 \text{ et on pose } C = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \rho_f \cdot \gamma \cdot M \cdot C \cdot dP - \gamma \cdot A \cdot dt + \rho_f \cdot \gamma \cdot dV - \rho_f \cdot \alpha \cdot M \cdot C^3 \cdot dp + \alpha \cdot A \cdot C \cdot dx - \rho_f \cdot \alpha \cdot dV \cdot C^2$$

$$+ \rho_f \cdot \alpha \cdot \beta \cdot C^2 \cdot d\dot{u} - \rho_f \cdot \beta \cdot C \cdot d\sigma + \rho_f \cdot \beta \cdot \lambda \cdot C \cdot dP = 0$$

$$\Rightarrow \rho_f \cdot C [\gamma \cdot M - \alpha \cdot M \cdot C^2 + \beta \cdot \lambda] dP - \gamma \cdot A \cdot dt + [\rho_f \cdot \gamma - \alpha \cdot \rho_f \cdot C^2] dV$$

(IV-9)

$$+ [\rho_f \cdot \alpha \cdot \beta \cdot C^2] d\dot{u} - [\rho_f \cdot \beta \cdot C] d\sigma + \alpha \cdot A \cdot C \cdot dx = 0$$

On introduisant les termes C_f et C_m l'équation (IV-9) devient :

$$C_m^\pm : \pm [\rho_f \cdot C_m (\gamma \cdot M - \alpha \cdot M \cdot C_m^2 + \beta \cdot \lambda)] dP - \gamma \cdot A \cdot dt + [\rho_f \cdot \gamma - \alpha \cdot \rho_f \cdot C_m^2] dV \\ + [\rho_f \cdot \alpha \cdot \beta \cdot C_m^2] d\dot{u} - [\rho_f \cdot \beta \cdot C_m] d\sigma + [\alpha \cdot A \cdot C_m] dx = 0 \quad (IV-10)$$

$$C_f^\pm : \pm [\rho_f \cdot C_f (\gamma \cdot M - \alpha \cdot M \cdot C_f^2 + \beta \cdot \lambda)] dP - \gamma \cdot A dt + [\rho_f \cdot \gamma - \alpha \cdot \rho_f \cdot C_f^2] dV \\ + [\rho_f \cdot \alpha \cdot \beta \cdot C_f^2] d\dot{u} - [\rho_f \cdot \beta \cdot C_f] d\sigma + [\alpha \cdot A \cdot C_f] dx = 0 \quad (IV-11)$$

B-Recherche des relations de compatibilités :

De façon analogue, les conditions :

$\Delta p_x, \Delta p_t, \Delta V_x, \Delta V_t, \Delta \dot{u}_x, \Delta \dot{u}_t, \Delta \sigma_x, \Delta \sigma_t = 0$ nécessaire pour obtenir une

solution éventuellement finie sont appelé (conditions de compatibilité).

Le long des quatre dissections (IV-6), la condition de compatibilité devient Δp_x .

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\Delta P_x}{\Delta} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\Delta P_t}{\Delta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\Delta V_x}{\Delta} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\Delta V_t}{\Delta} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = \frac{\Delta \dot{u}_x}{\Delta} = \rho; \quad \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\Delta \dot{u}_t}{\Delta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\Delta \sigma_x}{\Delta} = \rho; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\Delta \sigma_t}{\Delta} = 0$$

Pour trouver les relations de compatibilités, on calcul les déterminants :

$$(\Delta p_x, \Delta p_t, \Delta V_x, \Delta V_t, \Delta \dot{u}_x, \Delta \dot{u}_t, \Delta \sigma_x, \Delta \sigma_t)$$

Mais dans ce problème-il est suffisant de calculer l'un de ces déterminants par

Par exemple en prend Δp_x .

Le calcul de Δp_x est comme suit :

De l'équation (IV-9), on tire les quartes équations de compatibilité :

$$C_f^\pm : \pm BF \cdot dp + DF \cdot dt + FF \cdot dV + GF \cdot d\dot{u} \mp IF \cdot d\sigma \pm LF \cdot dx = 0 \quad (\text{IV-12})$$

$$C_m^\pm : \pm BM \cdot dp + DM \cdot dt + FM \cdot dV + GM \cdot d\dot{u} \mp IM \cdot d\sigma \pm LM \cdot dx = 0 \quad (\text{IV-13})$$

En notant que :

•Pour le fluide :

$$BF = \rho_f \cdot C_f \cdot [-\alpha \cdot M \cdot C_f^2 + (M\gamma + \lambda\beta)]$$

$$FF = \rho_f (-\alpha \cdot C_f^2 + \gamma)$$

$$GF = \rho_f \cdot \alpha \cdot \beta \cdot C_f^2$$

$$IF = -\rho_f \cdot \beta \cdot C_f$$

$$DF = -\gamma \cdot A$$

$$LF = \alpha \cdot A \cdot C_f$$

● Pour le matériau :

$$BM = \rho_f \cdot C_m \cdot [-\alpha \cdot M \cdot C_m^2 + (M\gamma + \lambda\beta)]$$

$$FM = \rho_f (-\alpha \cdot C_m^2 + \gamma)$$

$$GM = \rho_f \cdot \alpha \cdot \beta \cdot C_m^2$$

$$IM = -\rho_f \cdot \beta \cdot C_m$$

$$DM = -\gamma \cdot A$$

$$LM = \alpha \cdot A \cdot C_m$$

IV-1.1- Schéma de calcul (point courant) par la méthode de différences finies :

Le but étant de connaître à chaque instant, la pression P ; la vitesse de l'écoulement V ; la vitesse du déplacement de la structure u et la contrainte axiale σ en tout point de la conduite, on est conduit à résoudre uniquement et simultanément la relation pour chaque partie de la conduite.

Le calcul de la pression au point (I) à l'instant actuel ($t + \Delta t$) figure (III-7-1), se fait en fonction des points (I-1) et (I+1) et à l'instant précédent (t).

Pour ce faire, nous utilisons le maillage régulier dans le plan (x,t) d'une division de la conduite en N tronçon de pas Δx et Δt .

Le critère de stabilité du schéma numérique (critère de courant-Hilbert)

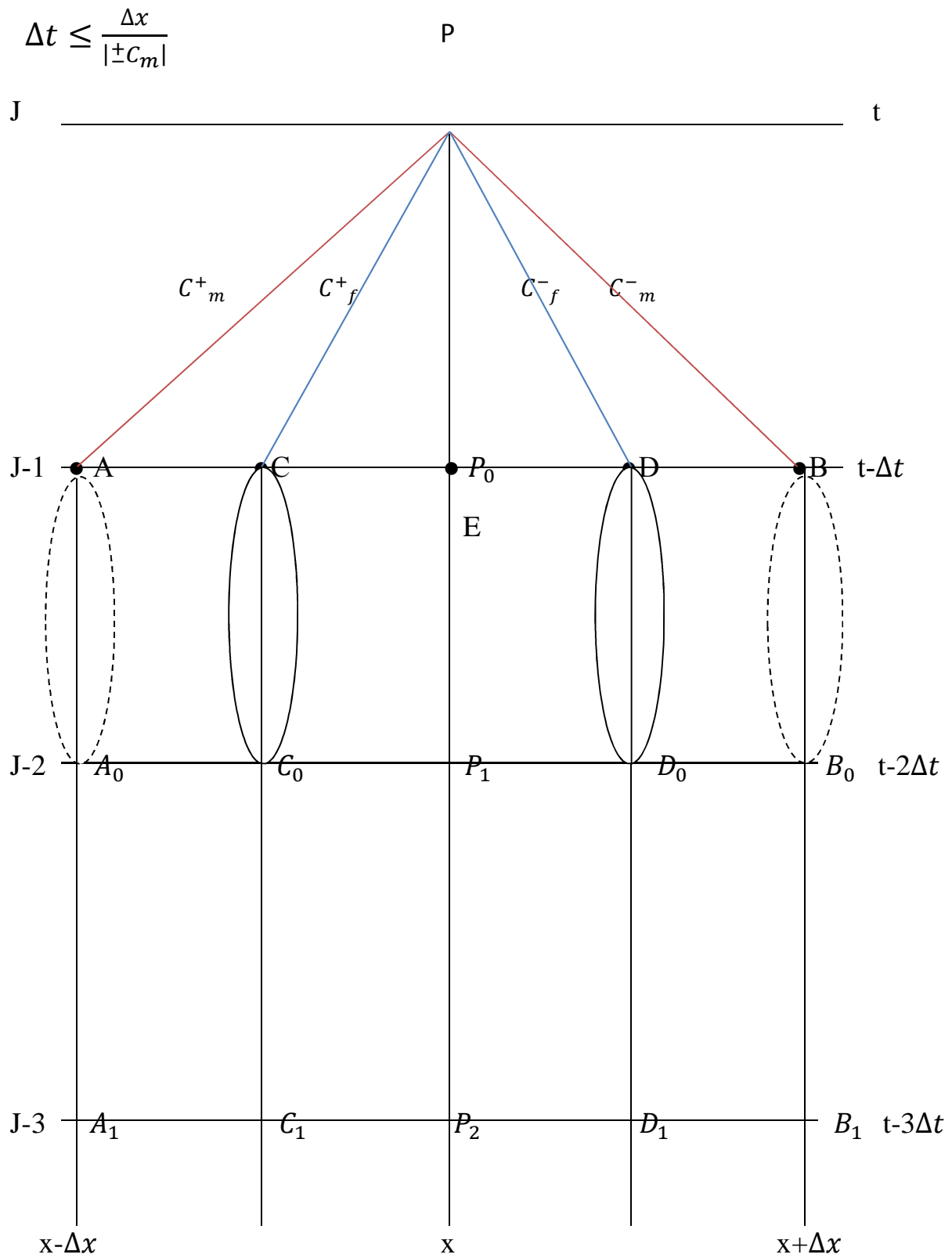


Figure IV.3 : Schéma numérique explicite

IV.1.1 Interpolation :

Pour calculer les quatre paramètres au point C et D (**figure IV.3**) ; on utilise l'interpolation linéaire entre les deux points A et E et entre les deux points E et B respectivement. On choisit \emptyset comme paramètre général ; \emptyset peut être (P, V, \dot{u}, σ) .

Alors d'après (**figure IV.3**) on a :

$$\frac{EC}{EP} = \frac{EA - CA}{EP} ; \text{ et } \frac{x_E - x_C}{(x_E - x_A) - (x_C - x_A)} = 1$$

$$\frac{\emptyset_E - \emptyset_C}{(\emptyset_E - \emptyset_A) - (\emptyset_C - \emptyset_A)} = \frac{x_E - x_C}{\Delta x - (x_C - x_A)}$$

$$x_E - x_A = x_B - x_E = \Delta x ;$$

$$(x_C - x_A) = (\emptyset_C - \emptyset_A) = 0$$

On trouve que :

$$\emptyset_C = \emptyset_E - \frac{(x_E - x_C) \cdot (\emptyset_E - \emptyset_A)}{\Delta x} \quad (\text{II.14})$$

Même chose pour le point D :

$$\frac{\emptyset_D - \emptyset_E}{(\emptyset_B - \emptyset_E) - (\emptyset_B - \emptyset_D)} = \frac{x_D - x_E}{\Delta x - (x_B - x_D)}$$

$$(\emptyset_B - \emptyset_D) = (x_B - x_D) = 0$$

$$\frac{\emptyset_D - \emptyset_E}{(\emptyset_B - \emptyset_E)} = \frac{x_D - x_E}{\Delta x}$$

Donc :

$$\emptyset_D = \emptyset_E + \frac{(x_D - x_E)(\emptyset_B - \emptyset_E)}{\Delta x} \quad (\text{IV-15})$$

Sachant que :

$$x_A = x_E - C_m \Delta t \quad (\text{IV-16})$$

$$x_C = x_E - C_f \Delta t \quad (\text{IV-17})$$

$$x_B = x_E - C_m \Delta t \quad (\text{IV-18})$$

$$x_D = x_E - C_f \Delta t \quad (\text{IV-19})$$

IV .1 .2 Calcul de P, V, \dot{u} , σ (intégration)

Par intégration des équations (IV-12 et 13) suivant les droites caractéristiques, on peut écrire:

$$C_m^+ : \int_A^P BM dp + \int_A^P FM dV + \int_A^P GM d\dot{u} - \int_A^P IM d\sigma = -DM_A \cdot \Delta t - LM_A \Delta x$$

$$C_m^- : - \int_B^P BM dp + \int_B^P FM dV + \int_B^P GM d\dot{u} + \int_B^P IM d\sigma = -DM_B \cdot \Delta t + LM_B \Delta x$$

$$C_f^+ : \int_C^P BF dp + \int_C^P FF dV + \int_C^P GF d\dot{u} - \int_C^P IF d\sigma = -DF_C \Delta t - LF_C \cdot \Delta x$$

$$C_f^- : - \int_D^P BF dp + \int_D^P FF dV + \int_D^P GF d\dot{u} + \int_D^P IF d\sigma = -DF_D \Delta t + LF_D \cdot \Delta x$$

Donc :

$$BM(p_p - p_A) + FM(V_P - V_A) + GM(\dot{u}_p - \dot{u}_A) - IM(\sigma_p - \sigma_A) = -DM_A\Delta t - LM_A\Delta x \quad (\text{IV-20})$$

$$-BM(p_p - p_B) + FM(V_P - V_B) + GM(\dot{u}_p - \dot{u}_B) + IM(\sigma_p - \sigma_B) = -DM_B\Delta t + LM_B\Delta x \quad (\text{IV-21})$$

$$BF(p_p - p_C) + FF(V_P - V_C) + GF(\dot{u}_p - \dot{u}_C) - IF(\sigma_p - \sigma_C) = -DF_C\Delta t - LF_C\Delta x \quad (\text{IV-22})$$

$$-BF(p_p - p_D) + FF(V_P - V_D) + GF(\dot{u}_p - \dot{u}_D) + IF(\sigma_p - \sigma_D) = -DF_D\Delta t + LF_D\Delta x \quad (\text{IV-23})$$

Ce qui implique :

$$BMP_p + FMV_p + GM\dot{u}_p - IM\sigma_p = Hm_A \quad (\text{IV-24})$$

$$-BMP_p + FMV_p + GM\dot{u}_p + IM\sigma_p = Hm_B \quad (\text{IV-25})$$

$$BFP_p + FFV_p + GF\dot{u}_p - IF\sigma_p = Hf_c \quad (\text{IV-26})$$

$$-BFP_p + FFV_p + GF\dot{u}_p + IF\sigma_p = Hf_D \quad (\text{IV-27})$$

Avec :

$$Hm_A = BMP_A + FMV_A + GM\dot{u}_A - IM\sigma_A - DM_A\Delta t - LM_A\Delta x$$

$$Hm_B = -BMP_B + FMV_B + GM\dot{u}_B + IM\sigma_B - DM_B\Delta t + LM_B\Delta x$$

$$Hf_c = BFP_C + FFV_C + GF\dot{u}_C - IF\sigma_C - DF_C\Delta t - LF_D\Delta x$$

$$Hf_D = -BFP_D + FFV_D + GF\dot{u}_D + IF\sigma_D - DF_D\Delta t + LF_D\Delta x$$

•la solution du problème transitoire commence d'habitude par les conditions

matricielles d'un état permanent à $t=0$, dans ce cas les valeurs de p, V, \dot{u}, σ sont supposées connues à $t=0$. La solution consiste alors à trouver p, V, \dot{u}, σ en chaque point du maillage le long de $t= \Delta t$; puis faire la même chose pour $t=2\Delta t \dots$ etc, jusqu'à l'intervalle de temps ($t=t_{\max}$).

$$(IV-24) + (IV-25) \Rightarrow 2FMV_p + 2GM \dot{u}_p = Hm_1 \quad (IV-28)$$

$$(IV-26) + (IV-27) \Rightarrow 2FFV_p + 2GF \dot{u}_p = Hf_1 \quad (IV-29)$$

Sachant que :

$$Hm_1 = Hm_A + Hm_B$$

$$Hf_1 = Hf_c + Hf_d$$

(IV-28) + (IV-29) \Rightarrow

$$2(FM + FF)V_p + 2(GM + GF)\dot{u}_p = Hm_1 + Hf_1$$

$$\dot{u}_p = \frac{Hm_1 + Hf_1 - 2(FM + FF)V_p}{2(GM + GF)} \quad (IV-30)$$

On remplace (IV-30) dans (IV-28) on trouve :

$$V_p = \frac{GF.Hm_1 - GM.Hf_1}{2(FM.GF - GM.FF)} \quad (IV-31)$$

$$(IV-24)-(IV-25) \Rightarrow 2BM.P_p - 2IM\sigma_p = Hm_2 \quad (IV-32)$$

$$(IV-26)-(IV-27) \Rightarrow 2BF.P_p - 2IF\sigma_p = Hf_2 \quad (IV-33)$$

Avec :

$$Hm_2 = Hm_A - Hm_B$$

$$Hf_2 = Hf_C - Hf_D$$

$$(IV-32) + (IV-33) \Rightarrow 2P_p(BM + BF) - 2\sigma_p(IM + IF) = Hm_2 + Hf_2$$

$$\sigma_p = \frac{2P_p(BM + BF) - (Hm_2 + Hf_2)}{2(IM + IF)} \quad (IV-34)$$

On remplace (IV-34) dans (IV-32) on trouve :

$$P_p = \frac{IF.Hm_2 - IM.Hf_2}{2(BM.IF - BF.IM)} \quad (IV-35)$$

Remarque :

Notons tout de suite que les termes de (p, V, \dot{u}, σ) entrant dans les expressions $Hm_A, Hm_B, Hm_1, Hf_D, Hm_2, Hf_1, Hf_2$ sont ceux des points « i-1 » et « i+1 » relèves ou connus au temps « t » alors que le point « i ».

Sachant que « i » correspond au point « E ».

Et « i-1 » correspond au point « A ».

« i+1 » correspond au point « B ».

IV .1.3 : Calcul et modélisation numérique du terme de frottement (Brunone) [15]:

L'estimation du terme de frottement se fait au temps précédent et en raison de la présence du terme de l'accélération convective on adapte ici le schéma explicite montré sur la **figure IV.3**.

Dans le cas du schéma avec interpolation, le terme s'écrit selon les directions respectives :

$$J_A = \frac{\lambda V_A |V_A|}{2gD} + \left[\frac{K_B}{2g} \left(\frac{V_A - V_{A0}}{\Delta t} + \lambda_f \text{sign}(V_C) \left| \frac{V_{P1} - V_{A0}}{\Delta x} \right| \right) \right]$$

$$J_B = \frac{\lambda V_B |V_B|}{2gD} + \left[\frac{K_B}{2g} \left(\frac{V_B - V_{B0}}{\Delta t} + \lambda_f \text{sign}(V_B) \left| \frac{V_{P1} - V_{B0}}{\Delta x} \right| \right) \right]$$

$$J_C = \frac{\lambda V_C |V_C|}{2gD} + \left[\frac{K_B}{2g} \left(\frac{V_C - V_{C0}}{\Delta t} + \lambda_f \text{sign}(V_C) \left| \frac{V_{P1} - V_{C0}}{\Delta x} \right| \right) \right]$$

$$J_D = \frac{\lambda V_D |V_D|}{2gD} + \left[\frac{K_B}{2g} \left(\frac{V_D - V_{D0}}{\Delta t} + \lambda_f \text{sign}(V_C) \left| \frac{V_{P1} - V_{D0}}{\Delta x} \right| \right) \right]$$

IV-1-4- Nœuds extrêmes :

Dans cette partie, nous avons donné les différents schémas numériques concernant les deux extrémités amont et aval, ainsi qu'au niveau du support, le coude et la vanne.

A-Extrémité amont (réservoir) :

En ce point, nous avons deux conditions imposées (sur la pression p et sur la vitesse de déplacement de la conduite \dot{u}), il nous faut deux autres équations, qui sont les équations de compatibilité selon C_f^- et C_m^- (figure IV.5).

$$1/ P_i = P_{réservoir}$$

$$2/ \dot{u}_i = 0$$

$$3/ -BM.P_p + FMV_p + \overset{0}{\nearrow} GM \dot{u}_p + IM.\sigma_p = Hm_B \quad (IV-36)$$

$$4/ -BF.P_p + FF.V_p + \overset{0}{\nearrow} GF.\dot{u}_p + IF.\sigma_p = Hf_D \quad (IV-37)$$

$$(IV-36) + (IV-37) \Rightarrow$$

$$-(BM + BF)P_p + (FM + FF)V_p + (IM + IF)\sigma_p = Hm_B + Hf_D$$

$$V_p = \frac{(BM + BF)P_p - (IM + IF)\sigma_p + Hm_B + Hf_D}{(FM + FF)} \quad (IV-38)$$

On remplace (IV-38) dans (IV-36) on trouve :

$$\sigma_p = \frac{Hm_B.FF - FM.Hf_D + (BM.FF - FM.BF)P_p}{IM.FF - FM.IF} \quad (IV-39)$$

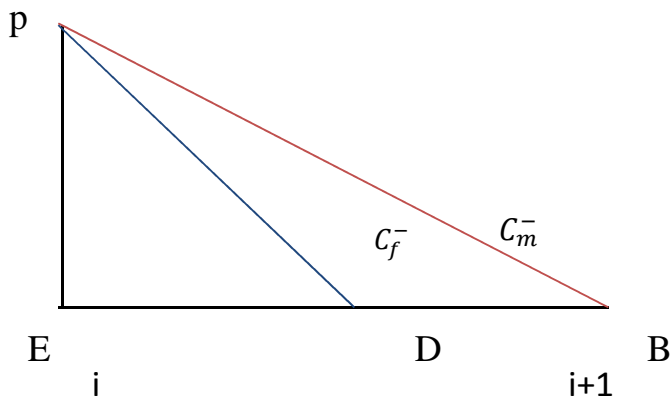


Figure IV.5 : schéma numérique au niveau de l'extrémité amont (réservoir).

B-Extrémité aval (vanne) :

Dans le cas où la vanne est rigidement fixée, on considère la vitesse de déplacement nulle, et on impose une loi de fermeture de la vanne.

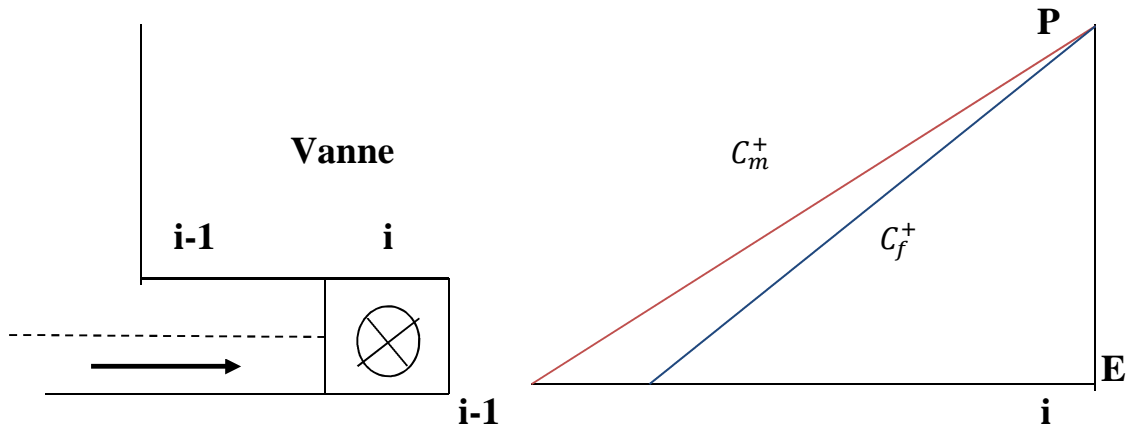


Figure IV.6: schéma numérique au niveau de l'extrémité aval (vanne).

$$1^\circ / \dot{u}_p = 0$$

$$2^\circ / V_p = V_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{0,5}$$

$$3^\circ/ BM.P_p + FMV_p + \overset{\bullet}{GM}.u_p - IM.\sigma_p = Hm_A \quad (IV-40)$$

$$4^\circ/ BF.P_p + FF.V_p + \overset{0}{\overset{\bullet}{GF}.u_p} - IF.\sigma_p = Hf_C \quad (IV-41)$$

(IV-40) + (IV-41) \Rightarrow on trouve :

$$P_p = \frac{(Hm_A + Hf_C) + \sigma_p (IM + IF) - V_p (FM + FF)}{(BM + BF)} \quad (IV-42)$$

On remplace (IV-42) dans (IV-40) on trouve :

$$\sigma_p = \frac{(BM.FF - FM.BF)V_p + BF.Hm_A - BM.Hf_C}{(BM.IF - IM.BF)} \quad (IV-43)$$

IV-1-5 : Nœuds au support fixe (figure IV.7) :

Ici, nous avons huit inconnus ($p_1, V_1, \overset{\bullet}{u}_1, \sigma_1, p_2, V_2, \overset{\bullet}{u}_2, \sigma_2$) il nous faut huit équations :

$$1) P_1 = P_2$$

$$2) V_1 = V_2$$

$$3) \overset{\bullet}{u}_1 = 0$$

$$4) \overset{\bullet}{u}_2 = 0$$

$$5) BM.P_1 + FM.V_1 + GM.\overset{\bullet}{u}_1 - IM.\sigma_1 = Hm_A \quad (IV-44)$$

$$6) -BM.P_1 + FM.V_1 + GM.\overset{\bullet}{u}_1 - IM.\sigma_2 = Hm_B \quad (IV-45)$$

$$7) BF.P_1 + FF.V_1 + \cancel{GF}.u_1 - IF.\sigma_1 = Hf_C \quad (IV-46)$$

$$8) -BF.P_1 + FF.V_1 + \cancel{GF}.u_1 + IF.\sigma_2 = Hf_D \quad (IV-47)$$

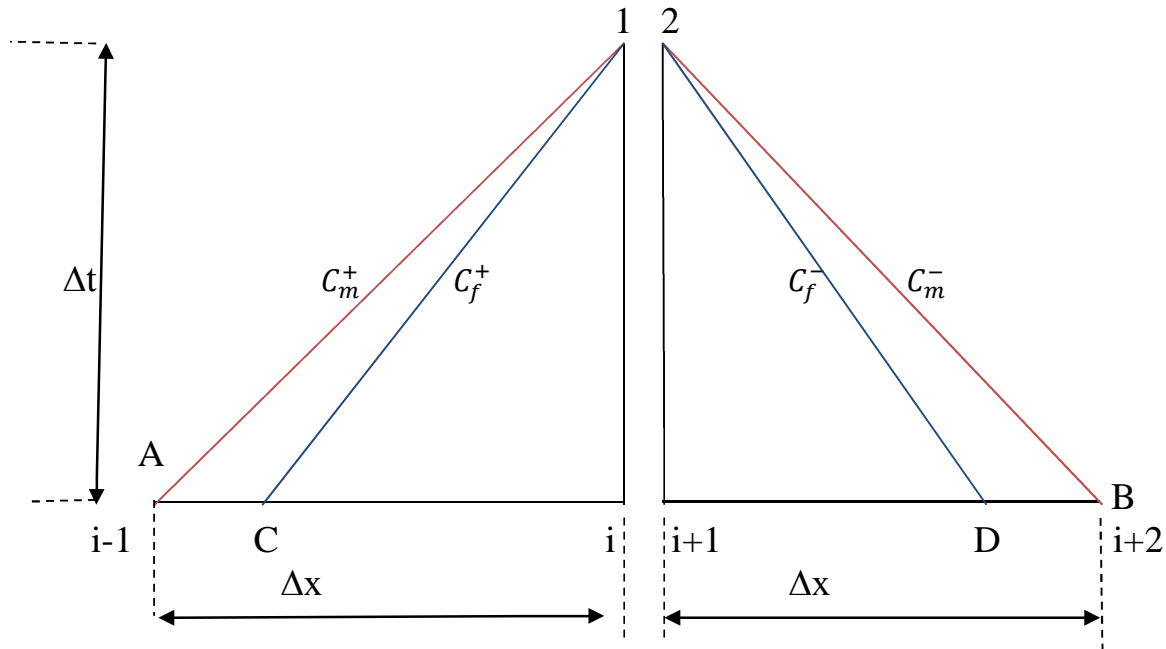


Figure IV.7: schéma numérique au niveau de support fixe.

Dans l'équation (IV-44) on trouve :

$$P_1 = \frac{IM.\sigma_1 + Hm_A - FM.V_1}{BM} \quad (IV-48)$$

On remplace (IV-48) dans (IV-45) on trouve :

$$\sigma_1 = \frac{2FM.V_1 + IM\sigma_2 - (Hm_A + Hm_B)}{IM} \quad (IV-49)$$

$$(IV-44)*BF \Rightarrow BF.BM.P_1 + BF.FM.V_1 - BF.IM.\sigma_1 = BF.Hm_A \quad (IV-50)$$

$$(IV-46)*BM \Rightarrow BM.BF.P_1 + BM.FF.V_1 - BM.IF.\sigma_1 = BM.Hf_C \quad (IV-51)$$

$$(IV-47)*BM \Rightarrow -BM.BF.P_1 + BM.FF.V_1 + BM.IF.\sigma_2 = BM.Hf_D \quad (IV-52)$$

$$(IV-50) - (IV-51) \Rightarrow$$

$$BM.FF.V_1 - BF.FM.V_1 - BM.IF.\sigma_1 + BF.IM.\sigma_1 + BF.Hm_A = BM.Hf_C \quad (IV-53)$$

$$(IV-50) + (IV-52) \Rightarrow$$

$$BF.FM.V_1 + BM.FF.V_1 - BF.IM.\sigma_1 + BM.IF.\sigma_2 - BF.Hm_A = BM.Hf_D \quad (IV-54)$$

$$(IV-51) + (IV-52) \Rightarrow$$

$$2BM.FF.V_1 - BM.IF.\sigma_1 + BM.IF.\sigma_2 = BM.Hf_C + BM.Hf_D \quad (IV-55)$$

On remplace (IV-49) dans (IV-55) on trouve :

$$V_1 = \frac{IM (Hf_C + Hf_D) - IF (Hm_A + Hm_B)}{2(FF .IM - FM .IF)} \quad (IV-56)$$

$$\sigma_2 = \frac{(BM .FF - BF .FM) V_1 + BF .Hm_B - BM .Hf_D}{(IM .BF - BM .IF)} \quad (IV-57)$$

IV-1-6 : Nœuds au coude (IV.8):

Ici nous avons 12 inconnus $\left(P_1, V_1, \dot{u}_1, \sigma_1, u_1, \ddot{u}_1, P_2, V_2, \dot{u}_2, \sigma_2, u_2, \ddot{u}_2 \right)$, il nous faut 12 équations suivantes :

$$1) P_1 = P_2$$

$$2) V_1 - \dot{u}_1 = V_2 - \dot{u}_2 \Rightarrow V_1 = V_2 - \dot{u}_2 + \dot{u}_1 \quad (\text{IV-58})$$

$$3) P_1.S - \sigma_1.S_m = K_x.u_1 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{P_1.S - K_x.u_1}{S_m} \quad (\text{IV-59})$$

$$4) P_2.S - \sigma_2.S_m = K_y.u_2 \Rightarrow \sigma_2 = \frac{P_2.S - K_y.u_2}{S_m} \quad (\text{IV-60})$$

$$5) \dot{u}_1 = \frac{3}{\Delta t} \left(u_1 - u_{10} \right) - 2\dot{u}_{10} - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{10} \quad (\text{IV-61})$$

$$6) \dot{u}_2 = \frac{3}{\Delta t} \left(u_2 - u_{20} \right) - 2\dot{u}_{20} - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{20} \quad (\text{IV-62})$$

$$7) \ddot{u}_1 = \frac{6}{\Delta t^2} (u_1 - u_{10}) - \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_{10} - 2\ddot{u}_{10} \quad (\text{IV-63})$$

$$8) \ddot{u}_2 = \frac{6}{\Delta t^2} (u_2 - u_{20}) - \frac{6}{\Delta t} \dot{u}_{20} - 2\ddot{u}_{20} \quad (\text{IV-64})$$

$$9) BM.P_1 + FMV_1 + GM \dot{u}_1 - IM\sigma_1 = Hm_A \quad (\text{IV-65})$$

$$10) -BM.P_1 + FMV_2 + GM \dot{u}_2 + IM\sigma_2 = Hm_B \quad (\text{IV-66})$$

$$11) BFP_1 + FFV_1 + GF \dot{u}_1 - IF\sigma_1 = Hf_C \quad (\text{IV-67})$$

$$12) -BFP_1 + FFV_2 + GF \dot{u}_2 + IF\sigma_2 = Hf_D \quad (\text{IV-68})$$

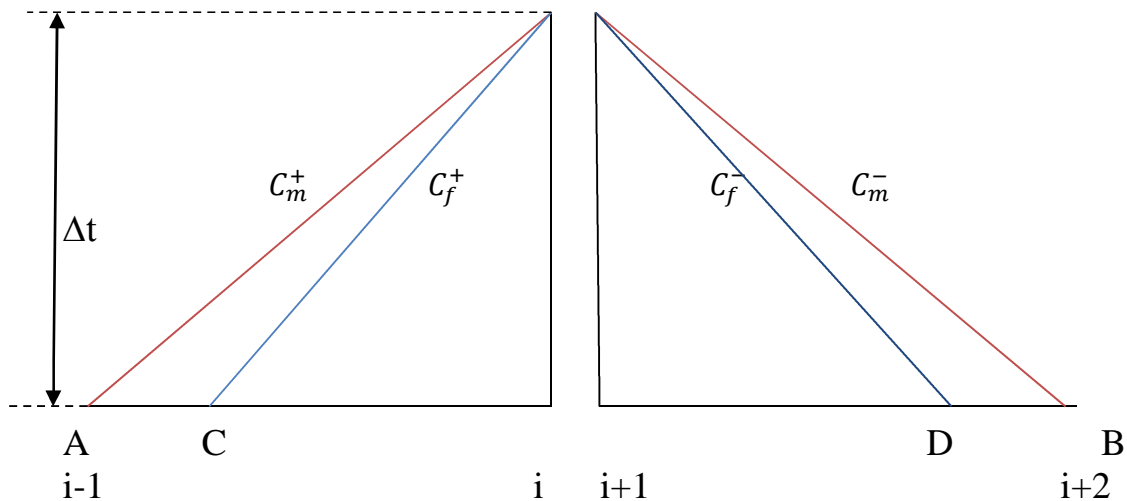


Figure IV.8: schéma numérique au niveau du coude.

De l'équation (IV-61) et (IV-62) on trouve :

$$u_1 = \frac{\Delta t}{3} \dot{u}_1 + A_1 \quad (\text{IV-69})$$

$$u_2 = \frac{\Delta t}{3} \dot{u}_2 + A_2 \quad (\text{IV-70})$$

$$\text{Avec : } A_1 = \frac{\Delta t}{3} \left(2\dot{u}_{10} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{10} \right) + u_{10}$$

$$A_2 = \frac{\Delta t}{3} \left(2\dot{u}_{20} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{20} \right) + u_{20}$$

On remplace (IV-69) dans (IV-59) et (IV-70) dans (IV-60) :

$$\sigma_1 = \frac{P_1 \cdot S - K_x \left(\frac{\Delta t}{3} \dot{u}_1 + A_1 \right)}{S_m}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2 \cdot S - K_y \left(\frac{\Delta t}{3} \dot{u}_2 + A_2 \right)}{S_m}$$

$$\text{On pose : } \frac{S}{S_m} = S' \text{ et } \frac{K_x}{S_m} = K_x' \text{ et } \frac{K_y}{S_m} = K_y'$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = S'P_1 - K_x' \left(\frac{\Delta t}{3} \dot{u}_1 + A_1 \right) \quad (\text{IV-71})$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = S'P_2 - K_y' \left(\frac{\Delta t}{3} \dot{u}_2 + A_2 \right) \quad (\text{IV-72})$$

On remplace (IV-71) dans (IV-65) et (IV-67) et on remplace (IV-72) dans (IV-66) et (IV-68) :

$$\bullet BMP_1 + FMV_2 - FM\dot{u}_2 + \left(FM + GM + IMK_x' \frac{\Delta t}{3} \right) \dot{u}_1 - IMS'P_1 + IMK_x' A_1 = Hm_A \quad (\text{IV-73})$$

$$\bullet -BMP_1 + FMV_2 + GM\dot{u}_2 + IM \left[S'P_1 - K_y' \left(\frac{\Delta t}{3} \dot{u}_2 + A_2 \right) \right] = Hm_B \quad (\text{IV-74})$$

$$\bullet (BF - IFS')P_1 + \left(FF + GF + IFK_x' \frac{\Delta t}{3} \right) \dot{u}_1 + FFV_2 - FF\dot{u}_2 + IFK_x' A_1 = Hf_C \quad (\text{IV-75})$$

$$\bullet -BFP_1 + FFV_2 + GF\dot{u}_2 + IF \left[S'P_1 - K_y' \left(\frac{\Delta t}{3} \dot{u}_2 + A_2 \right) \right] = Hf_D \quad (\text{IV-76})$$

De l'équation (IV-73) \Rightarrow

$$P_1 = \frac{Hm_A + FM\dot{u}_2 - FMV_2 - \left(FM + GM + IMK_x' \frac{\Delta t}{3} \right) \dot{u}_1 - IMK_x' A_1}{BM - IMS'} \quad (\text{IV-77})$$

On remplace (IV-77) dans (IV-74) (IV-75) et (IV-76) on trouve :

$$\bullet \alpha_1 \dot{u}_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 \dot{u}_1 + \alpha_4 = \gamma_7 \quad (\text{IV-78})$$

$$\bullet \alpha_5 \dot{u}_2 + \alpha_6 \dot{u}_1 + \alpha_7 V_2 + \alpha_8 = \gamma_6 \quad (\text{IV-79})$$

$$\bullet \gamma_1 \dot{u}_2 + \gamma_2 V_2 + \gamma_3 \dot{u}_1 + \gamma_4 = \gamma_5 \quad (\text{IV-80})$$

De l'équation (IV-78) on trouve :

$$\dot{u}_2 = \frac{\gamma_7 - \alpha_2 V_2 - \alpha_3 \dot{u}_1 - \alpha_4}{\alpha_1} \quad (\text{IV-81})$$

On remplace (IV-81) dans (IV-79) et (IV-80) on trouve :

$$\bullet (\alpha_1 \alpha_7 - \alpha_5 \alpha_2) V_2 + (\alpha_1 \alpha_6 - \alpha_5 \alpha_3) \dot{u}_1 + \alpha_5 (\gamma_7 - \alpha_4) + \alpha_8 \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_6 \quad (\text{IV-82})$$

$$\bullet (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) V_2 + (\gamma_3 \alpha_1 - \alpha_3 \gamma_1) \dot{u}_1 + \gamma_1 (\gamma_7 - \alpha_4) + \alpha_1 \gamma_4 = \alpha_1 \gamma_5 \quad (\text{IV-83})$$

De l'équation (IV-82) on trouve :

$$\dot{u}_1 = \frac{(\alpha_5 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_7) V_2 + \alpha_5 (\alpha_4 - \gamma_7) - \alpha_1 \alpha_8 + \gamma_6 \alpha_1}{\alpha_6 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_5} \quad (\text{IV-84})$$

On remplace l'équation (IV-84) dans (IV-83) on trouve :

$$V_2 = \frac{B_1 - B_2 - B_3 - B_4}{B_5 + B_6} \quad (\text{IV-85})$$

CHAPITRE V

- **Application du modèle numérique et résultats**

Dans ce chapitre nous avons donné une comparaison du modèle obtenu par cette étude avec les résultats pour deux cas de figure suivants :

- Pour le premier cas, les résultats obtenus avec prise en compte de la fixation du coude.
- Le deuxième cas le coude est libre de se déplacer (non ancré), les résultats obtenus ont été validés par Heinsbroek [27].

V.1. Configuration de l'installation, Ahmadi et al (Heinsbroek [27]):

L'installation étudiée par Ahmadi et al [27] et au paravant par Heinsbroek se compose d'une conduite en acier de diamètre 0.0254 m et d'épaisseur de 6.35 mm à un réservoir, ce dernier est maintenu à une pression constante à l'aide d'un compresseur d'air. Une vanne est connectée en aval de l'installation.

La conduite a une longueur totale de 330 m, divisée en deux tronçons attachés par un coude le premier tronçon est d'une longueur de 310 m, le deuxième et d'une longueur de 20 m, le temps de fermeture de la vanne est de 0,5s.

Le fluide utilisé est l'eau de coefficient de viscosité cinématique 10^{-6} m²/s. La vitesse de fluide en régime permanent de service est 4 m/s.

L'installation schématisée sur la figure (V.1) se compose essentiellement de :

- un réservoir à l'amont ;
- une conduite en acier ;
- un coude ;
- une vanne en aval.

K (N/m ²)	E (N/m ²)	L ₁ (m)	L ₂ (m)	ρ_m (kg/ m ³)	ρ_f (kg/m ³)	ν	Pres (bar)	e (mm)	d (mm)	N
1.55E 9	2.1E11	310	20	7900	880	0.3	0	6.35	206.4	133

Tableau v.1. Spécifications de la canalisation selon l'étude de cas présentée par Heinsbroek[27].

V.2.Schéma de l'installation :

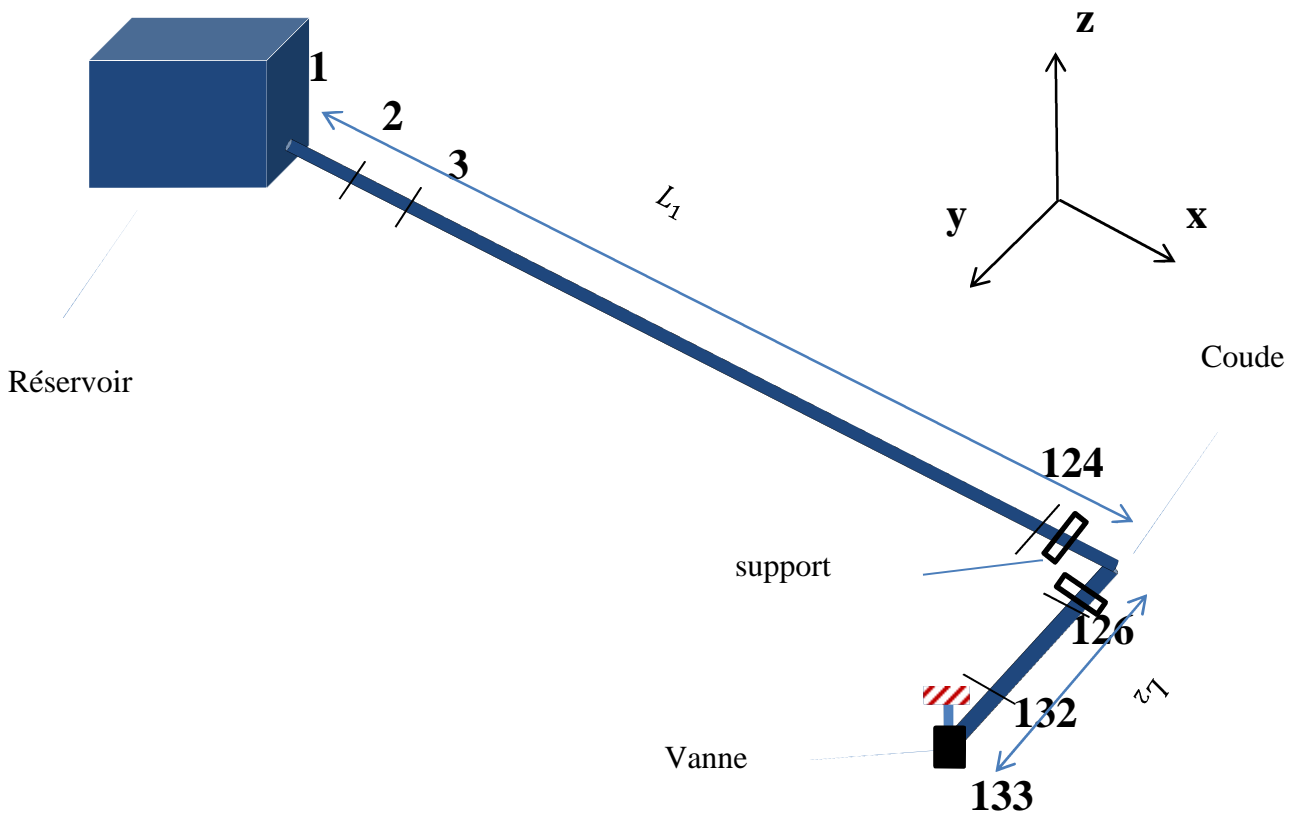
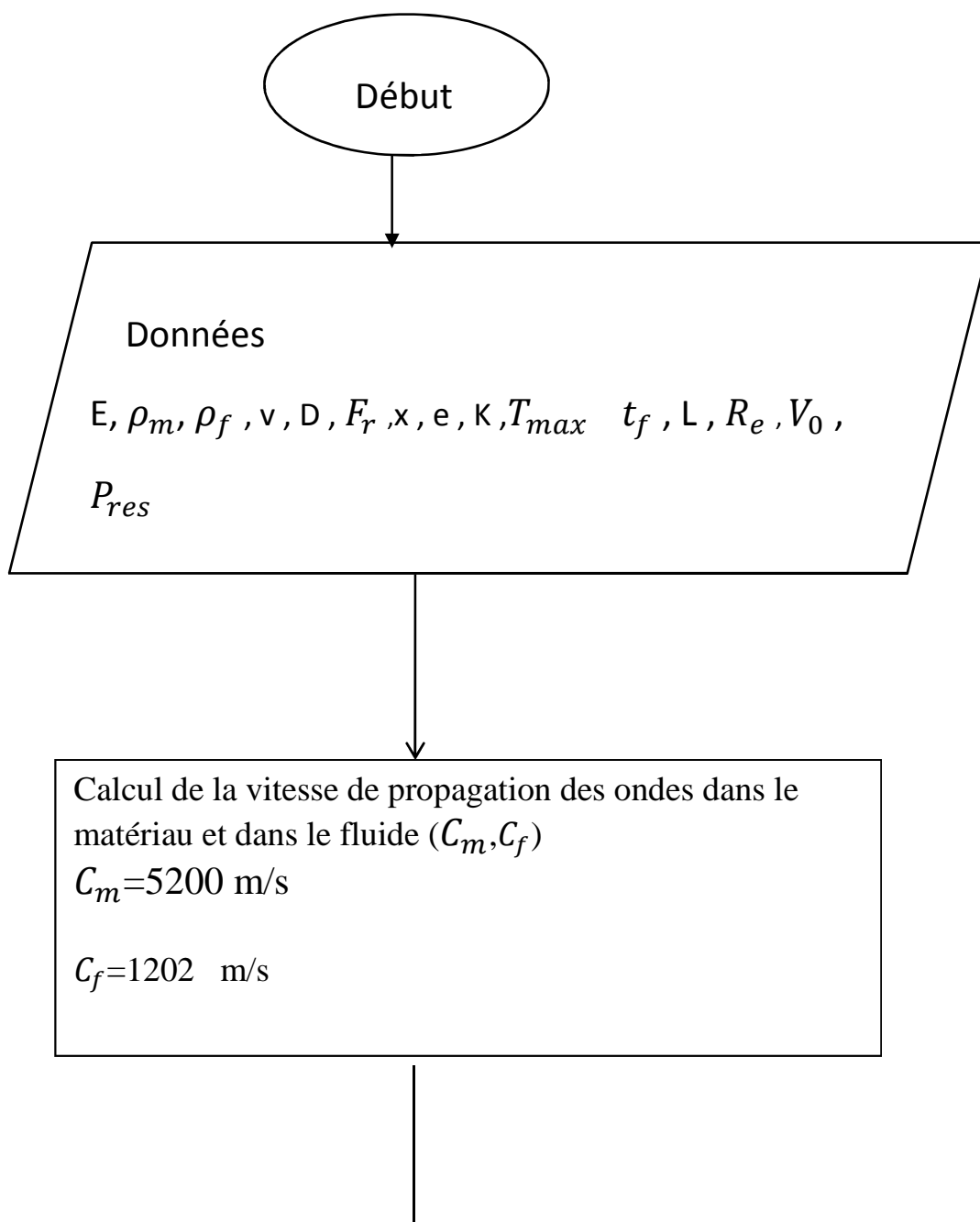


Figure V.1 : schéma de l'installation Heinsbroek (1997)

V.3. Organigramme :

Dans cette partie, on donne un organigramme montrant les différentes étapes suivies pour le calcul en régime permanent et en régime instationnaire (transitoire). Des différents paramètres du problème savoir, la pression P , la vitesse du fluide V , la contrainte axiale et la vitesse de déplacement de la structure ainsi que les déplacements au niveau du coude.

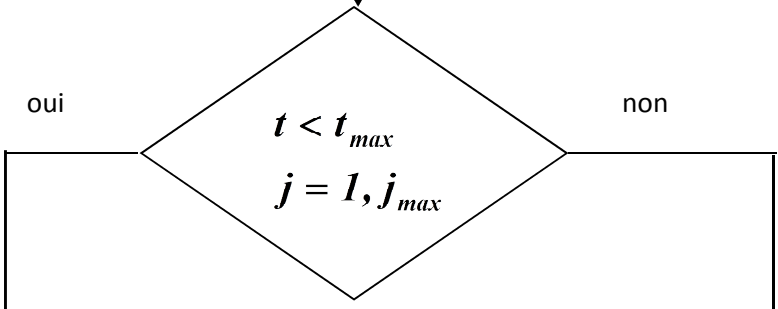
Suite à cela, un code de calcul a été développé en utilisant le langage FORTRAN.

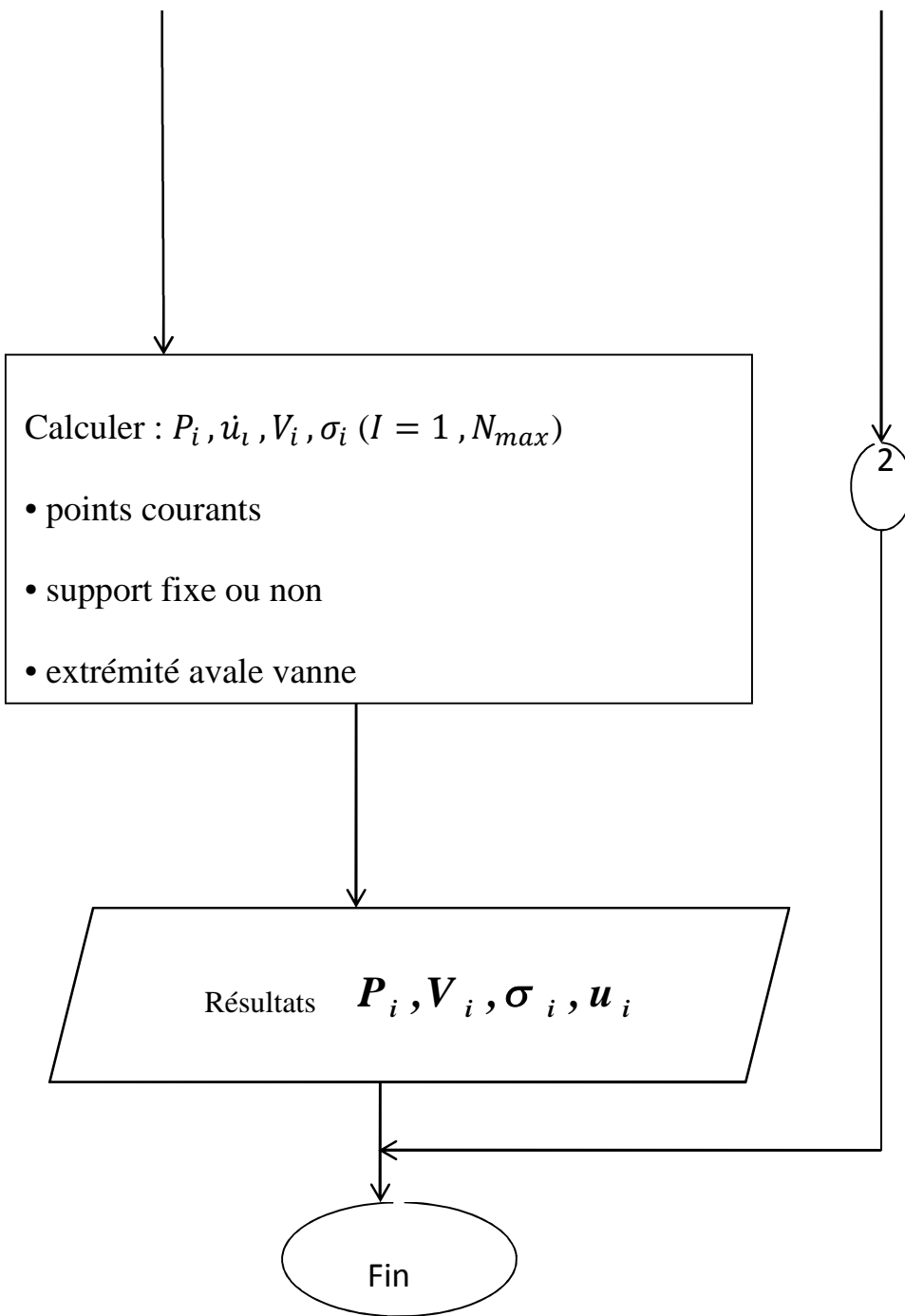


Choix de l'incrément de l'espace
 $dx = \frac{L}{N} = 2.5m ; L=330m ; N=133$
 Calcul de l'incrément du temps
 $\Delta t = \frac{\Delta x}{C_m} = 4.80 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
 Calcul des constantes pour le terme de frottement
 $C_1 = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot d} ; C_2 = \frac{K_3}{g} ; C_3 = \frac{1}{\Delta t} ; C_4 = \frac{C_f \cdot \sin |V|}{\Delta x}$

Condition initiales (régime permanent), $t=0$
 $I = 1, N_{max} ; V_i = V_o$
 $\sigma_i = 0$
 $U_i = 0$
 $p_i = P_{res} - \frac{\lambda L}{d} \cdot \frac{V^2}{2g}$

1





V.4.Résultats et discussions :

V.4.1 / 1^{ère} cas : résultats avec prise en compte de l'ancrage (un coude fixé) :

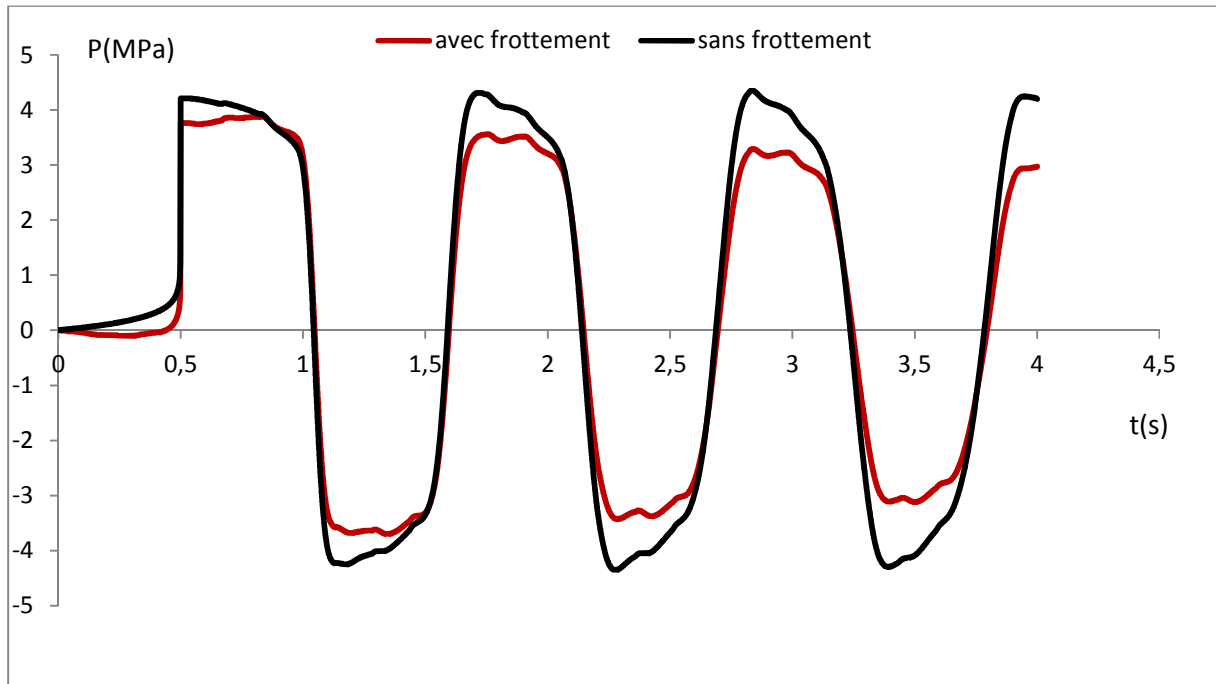


Figure V.1 .1 : la pression au niveau de la vanne ($x=330\text{m}$, $N=133$).

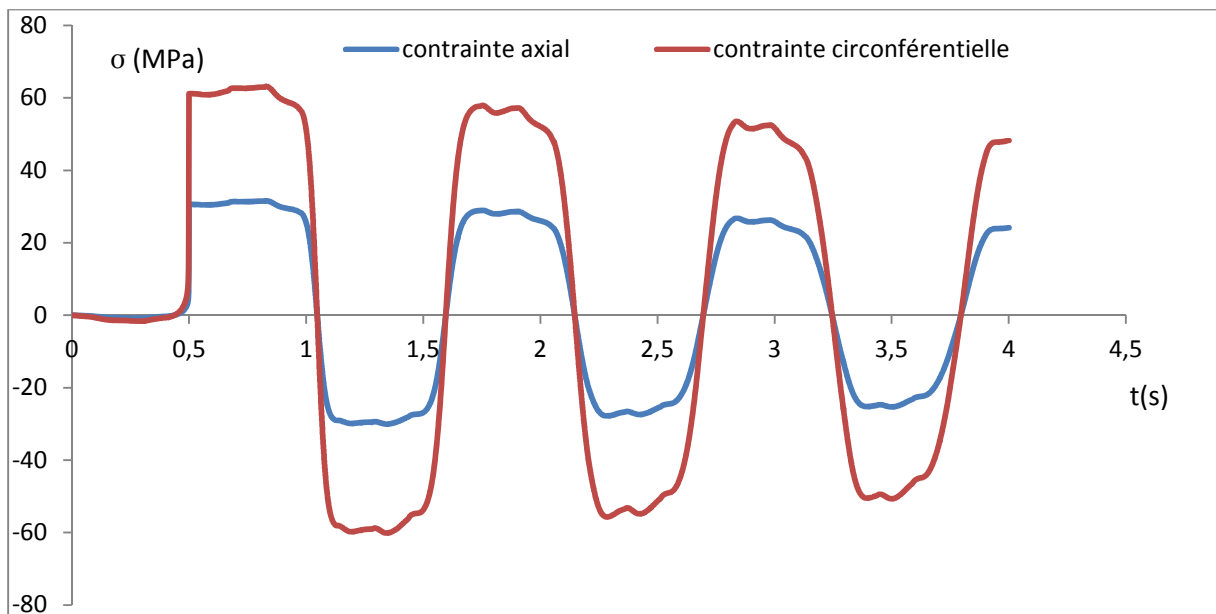


Figure V.1 .2 : la contrainte au niveau de la vanne ($x=330\text{m}$, $N=133$).

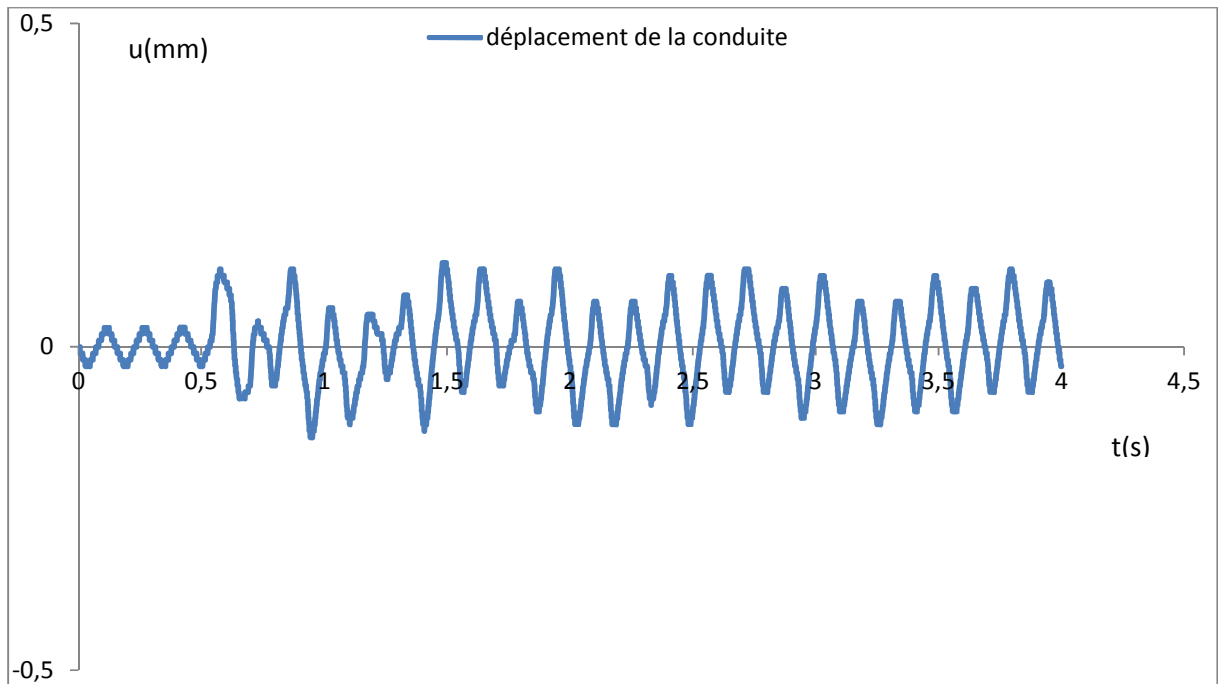


Figure V.1 .3 : déplacement de la conduite à $x=155\text{m}$ ($N=62$).

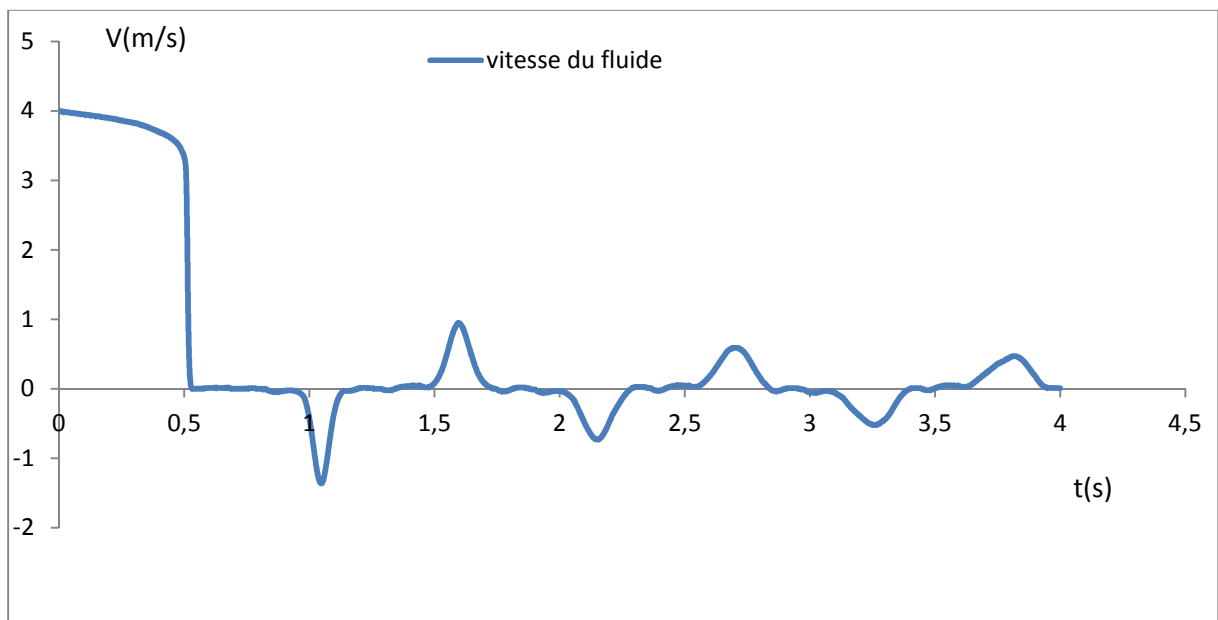


Figure V.1 .4 : vitesse du fluide au niveau du coude ($x= 310\text{m}$, $N=125$).

Interprétation :

Sur la figure (V.1.1), on donne la pression au niveau de la vanne.

Au temps $t=0$, la valeur de la pression p est celle du régime stationnaire, donc la pression est de référence égale à zéro mégapascal. Lors de la fermeture de la vanne qui dure 0,5 seconde, on remarque la montée progressive de la pression ,jusqu'à la valeur maximale $P=4,23$ MPa ,qui correspond à la valeur du coup de bélier classique $\Delta p = \rho.C_f.V_0$.

La vitesse de l'onde de propagation des perturbations des pressions étant $C_f=1202$ m/s.

Le palier dure un temps $T=2L/C_f=0.54$ s ,correspond au temps d'aller-retour d'onde . A partir de ce temps, la pression commence à diminuer jusqu'à atteindre la pression initiale.

Lorsque l'onde va se propager pour la deuxième fois vers le réservoir, la pression diminue encore jusqu'à une valeur $p=-4.02$ MPa ($t=1.19$ s). Le phénomène de cavitation est supposé absent, parce qu'on se réfère à une pression initiale de 0MPa

A partir de ce temps qui correspond à l'arrivée du retour de l'onde de pression du réservoir vers la vanne, on constate une augmentation de la pression jusqu'à atteindre la valeur initiale du régime permanent à $t=1.59$ s qui est égale à $4L/C_f$.

Par la suite le phénomène se répète quasi-périodiquement mais avec atténuation si on prend en considération une valeur importante de frottement du fluide avec la paroi de la conduite, si non le phénomène se répète sans diminution de la valeur de Δp .

Sur la figure (V1.2), on donne les résultats concernant les contraintes circonférentielle et axiale. On constate que le maximum des contraintes dynamiques se trouve sur la courbe des contraintes circonférentielle au point correspondant au temps $t=0,5s$ où $\sigma_{\theta} = 62,78$ MPa, ($\sigma_x=31.39$ MPa). On remarque que ce maximum de contrainte est en valeur absolue presque le double de la contrainte en régime permanent.

Le critère de résistance est

$$\sigma_{\theta} \leq [\sigma_e] = 200 \text{ MPa}$$

Donc jusqu'à la durée de phénomène on n'aura pas de rupture par chargement limite.

La Figure (V.1.3), est celle de déplacement de la conduite pour une longueur $x=155m$ avec $N=62$, on peut dire que le déplacement est négligeable, parce que à un ordre de grandeur inférieur à $0,5$ mm.

Sur la figure (V.1.4), on donne l'évolution de la vitesse du fluide au niveau du coude. Au temps $t=0$, la vitesse d'écoulement est celle du régime stationnaire $V=4m/s$. La fermeture soudaine de la vanne génère une onde de surpression, qui se déplace à la vitesse de propagation des ondes dans le sens contraire de l'écoulement. Elle engendre une diminution de vitesse qui atteint la valeur zéro au temps $t=0,52s$, et dure $0,49s$ puis commence à diminuer jusqu'à une valeur de $V= -1,12$; au temps $t=1,02s$. Par la suite l'état initial est de nouveau atteint et le processus peut se dérouler une nouvelle fois, mais avec diminution considérable.

V.4.2 /2^{eme} cas : validation des résultats pour le coude libre (non ancré):

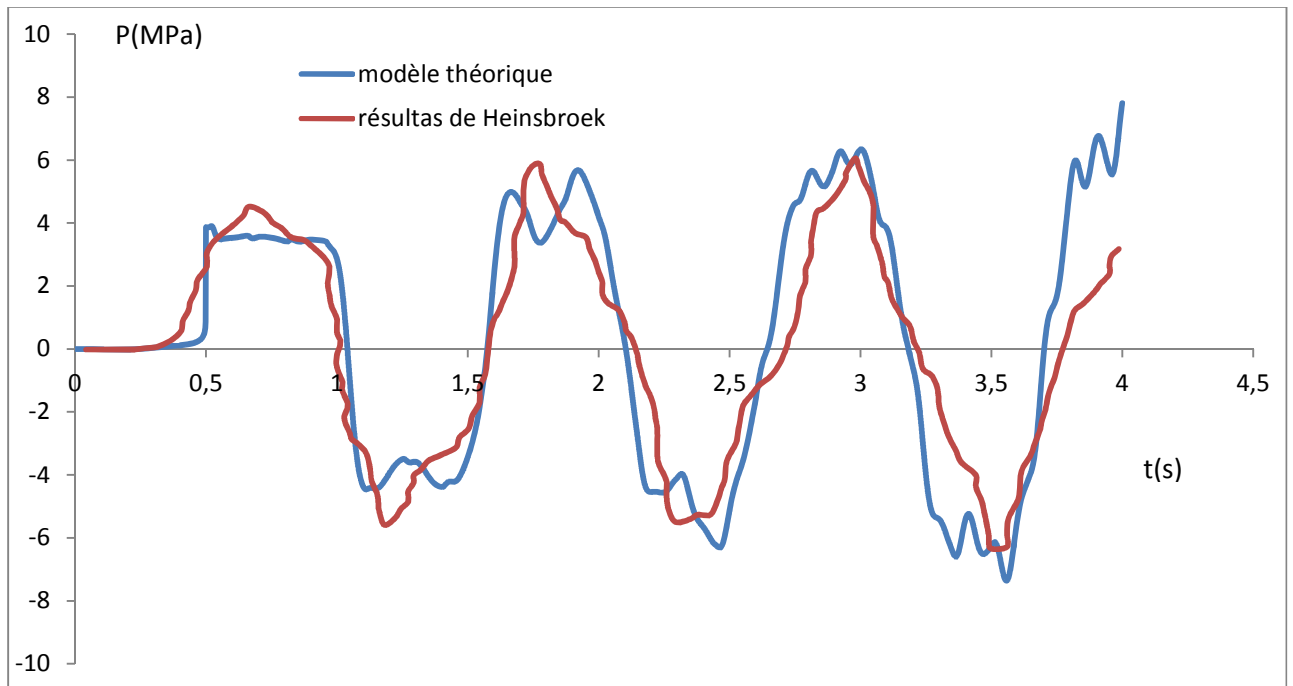


Figure V.2.1 : la pression au niveau de la vanne ($x=330$ m, $N=133$).

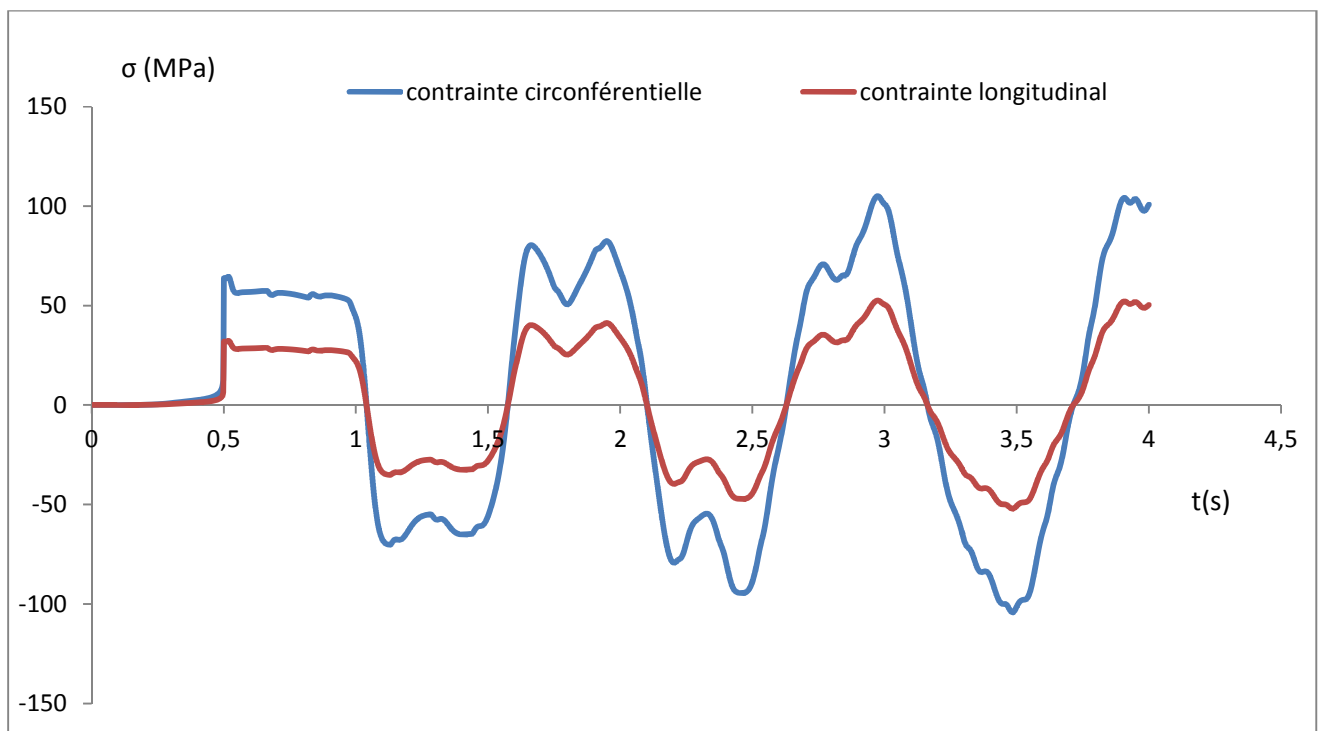


Figure V.2.2 : les contraintes au niveau de la vanne ($x=330$ m, $N=133$).

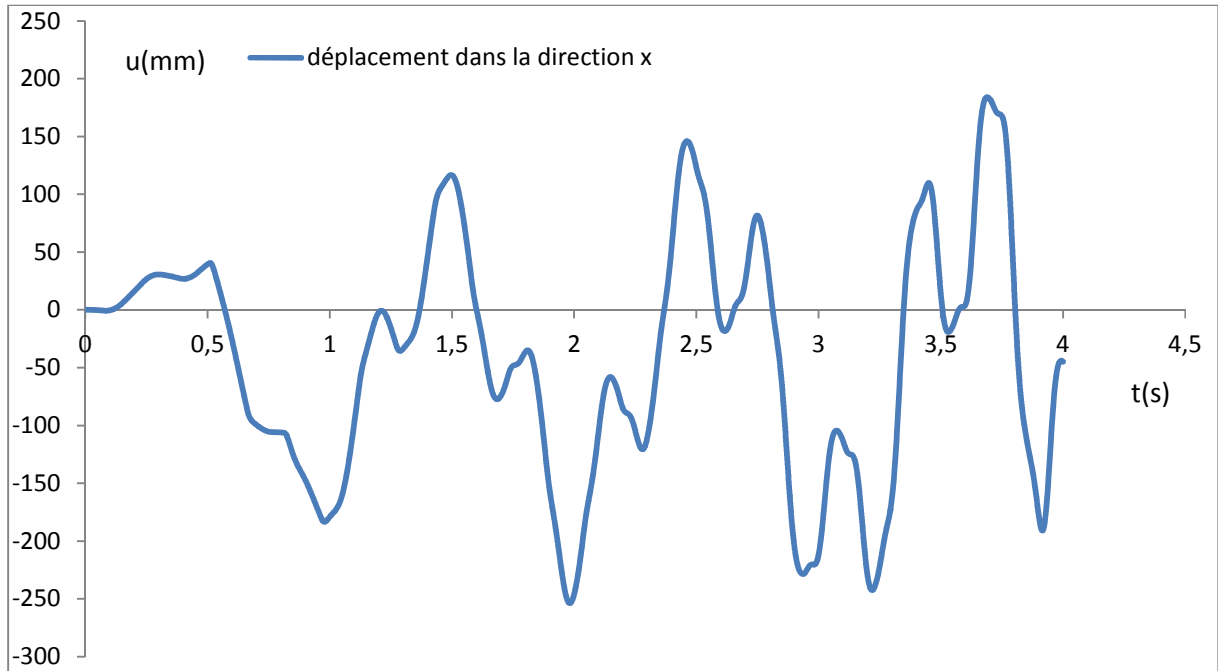


Figure V.2.3 : le déplacement axial au niveau du coude($x=310m$, $N=124$).

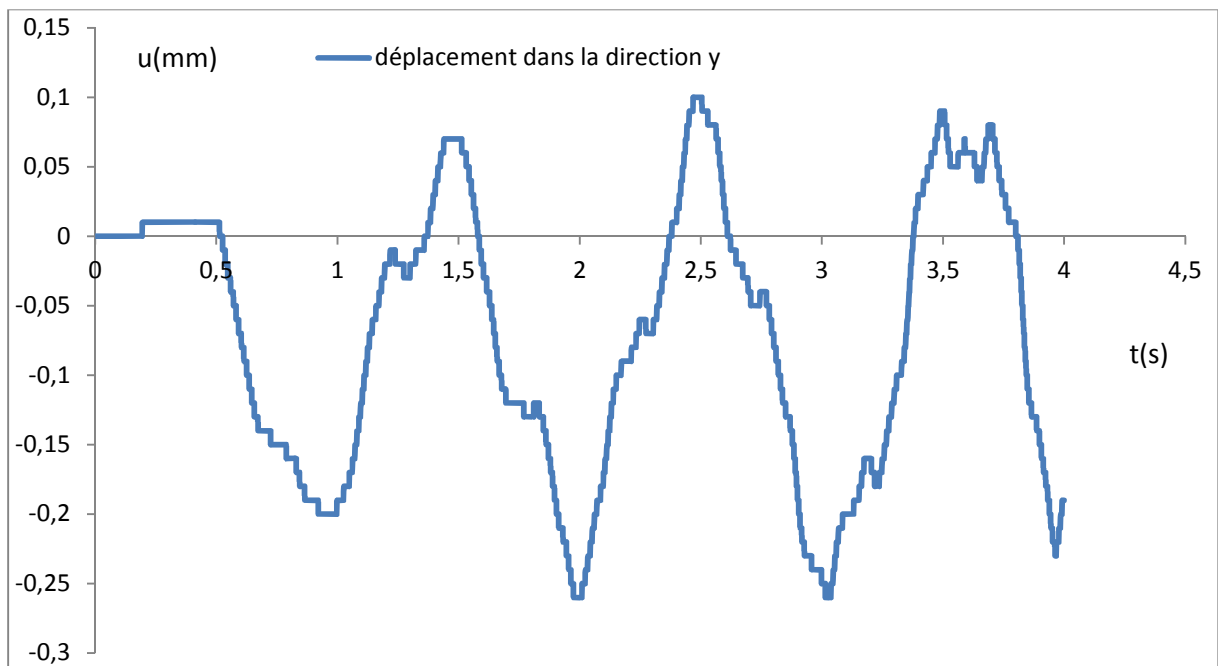


Figure V.2.4: le déplacement axial au niveau du coude($x=310m$, $N=126$).

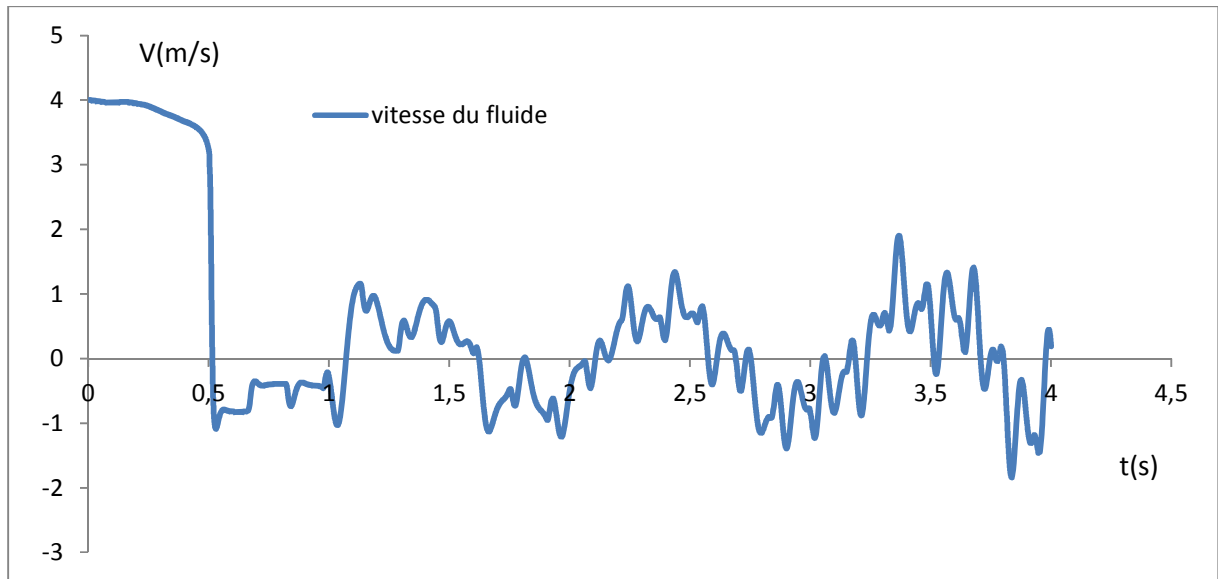


Figure V.2.5 : la vitesse du fluide au niveau du coude($x=310$ m, $N=125$).

Interprétation :

Sur la **figure V.2.1**, on donne la comparaison des résultats de calcul du modèle développé avec ceux de Heinsbroek [37]. Globalement, la comparaison des deux résultats montre une bonne corrélation. Sur cette figure, au temps $t=0$, la pression initiale du régime permanent au niveau de la vanne est $P=0$ Mpa.

Après fermeture de la vanne en un temps de fermeture $t_f = 0,5$ sec ; la pression augmente jusqu'à une valeur $P=4,23$ Mpa, ce qui correspond à la surpression engendrée par le coup de bélier $\Delta P = \rho \cdot C_f \cdot V_0$. La vitesse de propagation de l'onde dans le milieu fluide C_f étant de 1202 m/sec. vitesse initiale du fluide étant $V_0=4$ m/s.

L'évolution de la pression reste dans cet ordre de grandeur (4,23Mpa) avec quelques oscillations dus au déplacement du coude. Ce premier palier de

pression due un temps égale à 0,549sec correspondant à une durée d'un aller-retour d'onde $T = \frac{2L}{C_f}$.

A partir du temps $t=0,99$ sec, la pression commence à diminuer jusqu'à la valeur de la pression initiale, ici $P=0$, $t=1,01399$ sec à ce moment l'onde de pression arrivée à la vanne, va redémarrer vers le réservoir pour faire un deuxième aller-retour d'onde.

La pression continue à diminuer d'une amplitude équivalente à ΔP .

Sur ce deuxième palier la pression oscille entre les valeurs suivantes de pression $P=-4,32$ Mpa à $t=1,13$ sec, $P=3,59$ Mpa à $t=1,23$ sec et $P=-4,23$ Mpa à $t=1,36$ sec.

Au niveau du troisième palier de pression entre le temps $t=1,5$ sec et $t=2$ sec, on observe clairement les oscillations de la pression du au mouvement du coude qui est libre à se déplacer. Une amplification de la pression par rapport à la pression du coup de bélier jusqu'à une valeur maximale $P=5,6$ Mpa à $t=1,9086$ sec, ce qui donne une augmentation en valeur absolue de 1,38Mpa ; correspondant à une élévation de 32%.Le phénomène de l'écoulement du fluide en conduite avec la prise en compte des interactions au niveau du coude continu à se manifester, par un signal du coup de bélier classique perturbé par des petites oscillations au niveau des paliers de pression correspondant aux fréquences propres de la conduite.

Sur la figure (V.2.2), on donne les résultats concernant les contraintes circonférentielle et axiale. On constate que le maximum des contraintes dynamiques se trouve sur la courbe des contraintes circonférentielle au point correspondant au temps $t= 3,92$ s où $\sigma_{\theta} =101,8$ MPa, ($\sigma_x=(50.96$ MPa). Par contre la valeur maximale de la contrainte circonférentielle pour un coude fixe (voir figure (V.1.2)) était 47,8 MPa ,la contrainte axiale ($\sigma_x=(23.74$ MPa).

Le critère de résistance est $\sigma_{\theta \max} \leq [\sigma_e] = 200$ MPa

On peut conclure que le risque de rupture de la canalisation est écarté.

Sur la figure (V.2.5), on donne l'évolution de la vitesse du fluide au niveau du coude ($x=310$ m). Au temps $t=0$, la vitesse d'écoulement est celle du régime stationnaire ($v=4$ m/s). La fermeture brusque de la vanne génère une onde de surpression, qui se déplace à la vitesse de propagation des ondes dans le sens contraire de l'écoulement. Elle engendre une diminution de vitesse qui atteint la valeur zéro au temps $t= L/c_f=28.8$ ms, une onde de dépression se dirige vers la vanne et atteint celui-ci au temps $t=2 L/c_f=57.67$ ms, elle est accompagnée d'une modification de la vitesse qui passe à la valeur $-V_0$. par la suite une onde de dépression se dirige de la vanne vers le réservoir, elle engendre une diminution de vitesse qui atteint la valeur zéro au temps $3L/c_f=86.5$ ms, et elle redirige une autre fois vers la vanne avec une augmentation de vitesse. La vitesse du fluide passe à la valeur V_0 au temps $t=4L/C_f=0.1153$ ms. Quant $t=4L/C_f$ l'état initial est de nouveau atteint et le processus peut se dérouler une nouvelle fois.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons mis au point un modèle mathématique et numérique du phénomène d'écoulement instationnaire dans une conduite en matériau élastique, avec la prise en compte du système d'ancrage.

L'écriture du modèle mathématique de ce phénomène aboutissant à un système d'équations différentielles a été faite à partir des équations de conservation de la masse, la quantité de mouvement et de l'énergie concernant le fluide et le matériau de la paroi de la conduite et celles de comportement mécanique et thermodynamique.

Dans cette modélisation, nous avons pris en compte l'influence du système d'ancrage au niveau de jonctions sur les paramètres de l'écoulement et sur la contrainte, la déformation de la conduite.

La résolution du système d'équations final, a été faite en utilisant la méthode des caractéristiques couplée à celle des différences finies.

A l'issue de ce travail, nous avons montré que les conditions au niveau des jonctions et la loi de fermeture de la vanne peuvent être introduites comme conditions aux limites.

Ce modèle mathématique et numérique proposé peut prédire les contraintes circonférentielles et axiales dans le matériau de la paroi de la conduite générées par la pression et la vitesse du fluide.

On a montré aussi que dans le cas de figure où le coude est libre de se déplacer une amplification du pic de pression et des contraintes peut apparaître et atteindre 30% par rapport à la valeur de la surpression du coup de bélier classique.

Ces résultats de calcul des contraintes sont très utiles pour la vérification de la fiabilité d'une installation de réseau de conduite.

ANNEXE

Méthode des caractéristiques

A.I.

On suppose qu'un phénomène acoustique représenté dans le domaine du temps par le système d'équations suivant :

$$A(\partial/\partial t)\Phi(x,t) + B(\partial/\partial x)\Phi(x,t) + C\Phi(x,t) = r(x,t) \quad (A1-1)$$

Φ : vecteur des inconnus physiques (vitesse, pression...etc)

r : vecteur des termes d'excitation des source d'environnement

C : matrice des termes de dispersion

A, B : matrices qui contiennent des constantes

Dans le domaine du temps, la méthode la plus répandue pour résoudre un tel système, est la méthode des caractéristiques.

Elle est utilisée pour transformer le système d'équation (A1-1) en un système d'équation aux dérivées ordinaire, bien qu'elle soit valable que dans des directions particulières, celles des caractéristiques.

Posant:

$$\eta(x,t) = S^{-1}\Phi(x,t) \text{ ou } \Phi(x,t) = S\eta(x,t) \quad (A1-2)$$

Tel que chaque η_i représente une combinaison linéaire des variables d'origine Φ_i

Substituant l'équation (A2-2) dans l'équation (A2-1), donc nous aurons:

$$AS(\partial/\partial t)\eta(x,t) + BS(\partial/\partial x)\eta(x,t) = r(x,t) \quad (A1-3)$$

Et multipliant par $S^{-1}A^{-1}$, ceci donne:

$$(\partial/\partial t)\eta(x,t) + \Lambda(\partial/\partial x)\eta(x,t) = \eta_r(x,t) \quad (A1-4)$$

Dans laquelle

$$\Lambda = S^{-1}A^{-1}BS \quad (A1-5)$$

Et

$$\eta_r(x,t) = S^{-1}A^{-1}\{r(x,t) - CS\eta(x,t)\} \quad (A1-6)$$

Le système d'équation sans le terme de droite, est obtenu, si Λ est une matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\text{A1-7})$$

La substitution de (A2-7) dans (A2-5) et la solution pour S indique qu'une solution non triviale existe seulement si les éléments de A sont des valeurs propres, et qui satisfont l'équation suivante:

$$\det(B - \lambda A) = 0 \quad (\text{A1-8})$$

De sorte que S comprend les vecteurs propres ζ_i , associés aux λ_i ,

$$S = (\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n) \quad (\text{A1-9})$$

L'équation (A1-4) devient:

$$\partial \eta_i(x, t) / \partial t + \lambda_i \partial \eta_i / \partial x = \eta_{ri}(x, t) \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{A1-10})$$

Par conséquent:

$$d\eta_i(x, t) / dt = \eta_{ri}(x, t) \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{A1-11})$$

Considérons le long des lignes caractéristiques définies sur le plan (x,t) par:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{A1-12})$$

La solution des équations différentielles ordinaires (A2-11) et (A2-12) est la suivante:

$$\eta_i(x, t) = \eta_i(x - \lambda_i \Delta t, t - \Delta t) + \int_{(x-\lambda_i \Delta t, t-\Delta t)}^{(x,t)} \eta_{ri}(x, t) dt \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{A1-13})$$

Ou bien

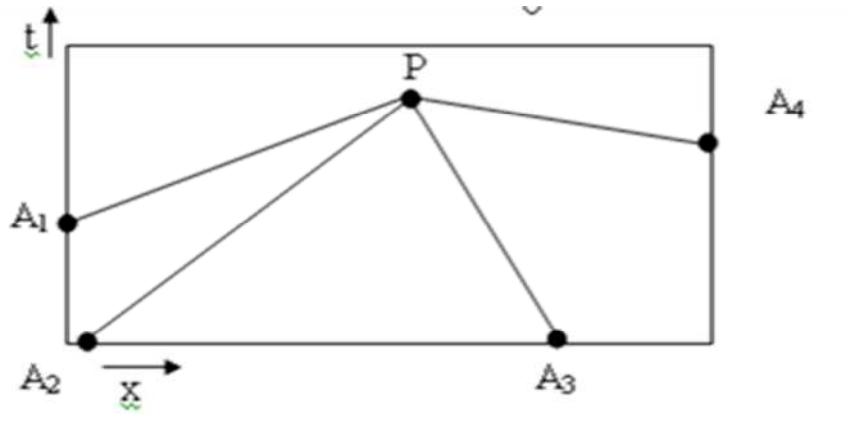
$$\eta_i(P) = \eta_i(A_i) + \int_{A_i}^P \eta_{ri}(x, t) dt \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{A1-14})$$

Suivant la définition (A1-6), il faut noter que η_{ri} dépend η_i ($i=1,2,\dots,n$), si $C \neq 0$

Les variables inconnus η_i au point P appartenant au plan (x,t), peuvent être exprimées en fonction de leurs valeurs aux points A_i

La combinaison de ceci avec le schéma d'intégration numérique donnera la solution $\eta(P)$ pourvu que les conditions initiales et les conditions aux limites soient indiquées.

Par conséquent les inconnus sont obtenus à partir de l'équation (A1-2)



Figure(A1.1): Les lignes caractéristiques au point P dans le plan (x, t),

les A_i sont choisis inclinés d'une pente $1/\lambda_i$

Le système d'origine (A1-1) peut être remplacé par un autre, dont ses coordonnées sont les directions caractéristiques pour qu'il soit résolu d'une manière plus simple.

Maintenant, si les dérivées existent, on aura dans tous les cas

$$d\Phi_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} dt \quad (A1-15)$$

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \lambda + \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad (A1-16)$$

Posant :

$$r(x, t) - C\Phi(x, t) = r'(x, t) \quad (A1-17)$$

Les deux systèmes d'équations (A1-17), (A1-16) peuvent être regroupés sous une autre forme matricielle :

$$D\Phi = A'd\Phi \quad (A1-18)$$

Tel que:

$$D\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \frac{d\Phi_1}{dt} \\ \cdot \\ \frac{d\Phi_n}{dt} \\ r'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ r'_n \end{array} \right\} \quad d\Phi = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \end{array} \right\}$$

(A1-19)

A' : matrice augmentée

$$A' = \left\{ \begin{array}{cccccccc} \lambda & I & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & I \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{2n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{2n2n} \end{array} \right\}$$

(A1-20)

La solution du (A2-18) existe et unique que si:

$$\det(A') = \det(B - \lambda A) = 0$$

(A1-21)

Cette équation définit les caractéristiques.

En outre il n'y pas de solution, à moins que les autres déterminants du système disparaissent également, de sorte que:

$$\det \left\{ \begin{array}{cccccccc} \frac{d\Phi_1}{dt} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{12n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\Phi_n}{dt} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r'_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r'_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a'_{nn} \end{array} \right\} = 0$$

(A2-22)

Cette dernière relation est dite condition de compatibilité.

A.II.

- $\alpha_1 = (BM - IMS')GM + FM(IMS' - BM) - IMK'_y \frac{\Delta t}{3}(BM - IMS')$
- $\alpha_2 = FM(BM - IMS') + (BMFM) - (IMFM S')$
- $\alpha_3 = BM \left(FM + GM + IMK'_x \frac{\Delta t}{3} \right) - IM \left(FM + GM + IMK'_x \frac{\Delta t}{3} \right)$
- $\alpha_4 = (IMS' - BM) \left(Hm_A - IMK'_x A_1 \right) - IMK'_y A_2$
- $\alpha_5 = FM(BF - IFS') - FF(BM - IMS')$
- $\alpha_6 = (IFS' - BF) \left(FM + GM + IMK'_x \frac{\Delta t}{3} \right) + (BM - IMS') \left(FF + GF + IFK'_x \frac{\Delta t}{3} \right)$
- $\alpha_7 = (IFS' - BF)FM + FF(BM - IMS')$
- $\alpha_8 = (BF - IFS') \left(Hm_A - IMK'_x A_1 \right) + (BM - IMS') \left(IFK'_x A_1 \right)$
- $\gamma_1 = (IFS' - BF)FM + \left(GF - IFK'_y \frac{\Delta t}{3} \right) (BM - IMS')$
- $\gamma_2 = (BF - IFS')FM + FF(BM - IMS')$

- $\gamma_3 = (BF - IFS') \left(FM + GM + IMK_x' \frac{\Delta t}{3} \right)$
- $\gamma_4 = (IFS' - BF) \left(Hm_A - IMK_x' A_1 \right) - IFK_y' A_2 (BM - IMS')$
- $\gamma_5 = Hf_D (BM - IMS')$
- $\gamma_6 = Hf_C (BM - IMS')$
- $\gamma_7 = Hm_B (BM - IMS')$

- $B_1 = \alpha_1 \gamma_5 (\alpha_6 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_5)$
- $B_2 = (\gamma_3 \alpha_1 - \alpha_3 \gamma_1) (\alpha_4 - \gamma_7) \alpha_5$
- $B_3 = \alpha_1 (\gamma_6 - \alpha_8) (\gamma_3 \alpha_1 - \alpha_3 \gamma_1)$
- $B_4 = (\alpha_6 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_5) [\gamma_1 (\gamma_7 - \alpha_4) + \alpha_1 \gamma_4]$
- $B_5 = (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) (\alpha_6 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_5)$
- $B_6 = (\gamma_3 \alpha_1 - \alpha_3 \gamma_1) (\alpha_5 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_7)$

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

Références bibliographiques

1. **Zielke, W.** (1968). *Frequency-dependent friction in transient pipe flow*. Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, 90(1), 109-115.
2. **M.Meunier**(1980) . Les coups de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression .édition DOUND.
3. **Brunone, B., Golia, M.U., Greco, M.** (1991). *Some remarks on the momentum equation for fast transients*. International Meeting on Hydraulic Transients with Column Separation, 9th Round Table, IAHR, Valencia, Spain, 140-148.
4. **Vardy, A.E., Hwang, K.L.** (1991). *A characteristics model of transient friction in pipes*. Journal of Hydraulic Research, IAHR, 29(5), 669-684.
5. **Vardy, A.E., Hwang, K.L., Brown, J.M.B.** (1993). *A weighting function model of transient turbulent pipe flow*. Journal of Hydraulic Research, IAHR, 31(4), 533-548.
6. **Djemili A.** (1993).*Influence de l'ancrage de la conduite élastique ou viscoélastique sur les écoulements en régime transitoire .1^{er} congrès de mécanique, Maroc.*
7. **Wylie, E.B., et Streeter, V.L.** (1993). *Fluid transients in systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA.

8. **Brinis H, encadreur Djemili A** (1994) .*Influence du terme de frottement lié à la vitesse moyenne instantannée sur les écoulements instationnaires* .
Mémoire de PFE, Département de Génie Mécanique, Université Annaba.
9. **Brunone, B., Golia, M.U., Greco, M.** (1995). Effects of two-dimensionality on pipe transients modeling. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 121(12), 906-912.
10. **Ghidaoui, S.M., Karney, W.B.** (1995). *Modified transformation and integration of 1D wave equations*. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 121(10), 758-760.
11. **Silva-Araya, F. W., Chaudhry, M.H.** (1997). *Computation of energy dissipation in transient flow*. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 123(2),108-115.
12. **Nash, G., Karney, B.** (1999). *Efficient inverse transient analysis in series pipe systems*. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 125(7), 761-764.
13. **Brunone, B., Morelli, L.** (1999). *Automatic control valve-induced transients in operative pipe system*. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 125(5),534-542.
14. **Pezzinga, G.** (2000). *Evaluation of unsteady flow resistances by quasi-2D or 1D models*. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 126(10), 778-785.
15. **Brunone, B., Karney, B., Mecarelli, M., Ferrante, M.** (2000). *Velocity profiles and unsteady pipe friction in transient flow*. *Journal of Water Resources Planning and Management*, ASCE, 126(4), 236-244.

16. **Boukhezna M , Djemili A** (2000) .Influence de la déformation de la conduite sur les écoulements instationnaires . Mémoire de PFE. Département de Génie Mécanique, Université Annaba.
17. **Covas, D., Ramos, H.** (2001). *Hydraulic transients used for leakage detection in water distribution systems*. Water Pipeline Systems BHR Group, 227-241.
18. **Ghidaoui, S. M., Kolyshkin A. A.** (2001). *Stability analysis of velocity profiles in water – hammer flows*. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 127(6), 499-512.
19. **Brunone, B., Ferrante, M.** (2001). *Detecting leaks in pressurised pipes by means of transients*. Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 39, NO.4.
20. **Wang, X-J., Lambert, F. M., Simpson, R. A., Liggett, A. J., Vitkovsky, P. J.**(2002). *Leak Detection in pipelines using the damping of fluid transients*. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 128(7), 697-711.
21. **Tilman Diesselhorst, Peter Diatschuk** « Considering dynamic friction and proper structural response in hydraulic load cases for realistic piping design » 18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 18)Beijing, China, August 7-12, 2005 ,SMiRT18- J01-1
22. **Chebicheb Z. encadreur Otmani A. et Djemili A.** (2006). « *Contribution à l'étude de l'influence de la déformation de la conduite viscoélastique sur les écoulements instationnaires* ». Magister, Département de Génie Mécanique, Université Annaba.

23. **Tijsseling AS** (2007). *Water hammer with fluid-structure interaction in thick-walled pipes*, Computers and Structures 85 844-851.
24. **He S, Ariyaratne C, Vardy AE. A.** *Computational study of wall friction and turbulence dynamics in accelerating pipe flows*. Computers & Fluids 2008;37:674-689.
25. **M.H. Afshar, and M. Rohani.** (2008). *Water hammer simulation by implicit method of characteristic*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Volume 85, Issue 12, , Pages 851-859 .
26. **Lohrasbi A.R. and Attarnejad R;** (2008). *Water Hammer Analysis by Characteristic Method*. American J. of Engineering and Applied Sciences 1 (4): 287-294.
27. **Ahmad Ahmadi, Ali Reza Keramat,** (2008). «Investigation of the Junction Coupling due to Various types of the Discrete Points in a Piping System » The 12th International Conference of *International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*
Goa, India
28. **El Hassan Achouyab , Bennasser Bahrar**(avril 2011). *Numerical modeling of phenomena of waterhammer using a model of fluid–structure interaction*. Comptes Rendus Mécanique Volume 339, numéro 4 pages 262-269 .
29. **P. G. PROVENZANO, F. BARONI et R. J. AGUERRE;** (2011).The closing function in the water hammer modeling; Departamento de Tecnología,

Universidad Nac. de Luján (CONICET), 6700 Luján, Argentina Latin American Applied Research.

30. **Jean SCHIMA**, le supportage 'Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique' Ingénieur à la Direction Technique du Syndicat National de la Chaudronnerie, de la Tôlerie et de la Tuyauterie industrielle (SNCT)

31. **HASSANI Mohamed et DJEMILI Abdelouaheb** (2011). ''détermination des contraintes lors de l'interaction fluide conduit avec prise en compte du phénomène de cavitation''. Département Génie mécanique, université BADJI Mokhtar, ANNABA.