



وزارة التعليم العالي العلمي
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR - ANNABA
BADJI MOKHTAR – ANNABA UNIVERSITY



Faculté : Technologie
Département : Génie mécanique
Domaine : Sciences et techniques
Filière : Génie mécanique
Spécialité : Énergétique

Mémoire :

Présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master

Thème :

**Traitement semi-analytique de l'écoulement d'un
nano-fluide hybride à travers un dièdre**

Présenté par : Nouaouria Yasmine

Encadrant : SARI Mohamed Rafik

Grade : Professeur

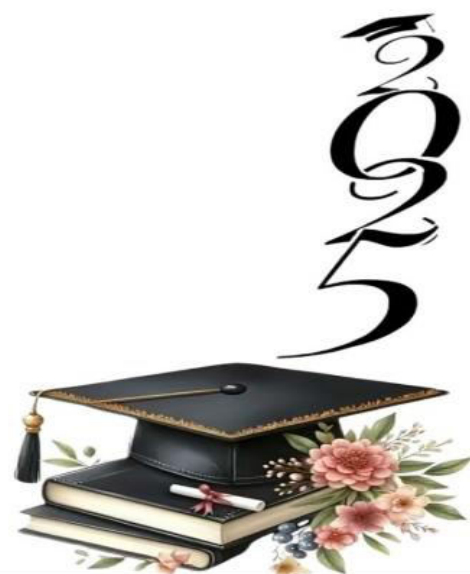
Jury de Soutenance :

Pr MZAD Hocine	Président	Université Badji Mokhtar - Annaba
Pr MECHIGHEL Farid	Examineur	Université Badji Mokhtar - Annaba
Pr SARI Mohamed Rafik	Rapporteur	Université Badji Mokhtar - Annaba

Année Universitaire : 2024/2025

Remerciement

Avant toute chose, je remercie beaucoup Allah, qui m'a accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur SARI Mohamed Rafik, professeur à l'Université Badji Mokhtar – Annaba, pour avoir accepté de diriger ce mémoire. Je le remercie sincèrement pour la confiance qu'il m'a accordée, la richesse de ses conseils, la rigueur scientifique dont il a fait preuve et pour l'encadrement attentif tout au long de cette recherche. Sa disponibilité, sa pédagogie et sa vision critique ont été d'un apport précieux à l'aboutissement de ce travail. Je remercie également l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce mémoire et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de l'évaluer. Mes remerciements s'adressent aussi à toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, m'ont soutenu(e) tout au long de cette étape importante. Je pense particulièrement à ma famille, à mes amis et à mes collègues pour leur soutien moral et leur encouragement constant. Je suis particulièrement reconnaissante à mes parents, Tahar et Leila, pour leur amour inconditionnel, leurs sacrifices et leur présence indéfectible. Un remerciement sincère va également à mon frère Mohcen, pour son soutien et ses encouragements. Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, que ce soit par leur appui scientifique, leurs conseils ou leur collaboration.



Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude semi-analytique des effets conjoints du champ magnétique, du gradient de pression externe et de la fraction volumique des nanoparticules sur le comportement dynamique de la couche limite laminaire se développant à travers un dièdre dans un écoulement uniforme d'un nanofluide hybride. En utilisant les variables de similitude appropriées, les équations différentielles partielles non linéaires gouvernantes ont été transformées en une équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre. Cette équation a été résolue analytiquement à l'aide de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), une méthode semi-analytique efficace pour résoudre des équations différentielles non linéaires. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux fournis par la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), utilisée comme guide. Cette comparaison a montré un excellent accord entre les solutions analytiques et numériques, validant ainsi l'efficacité de la méthode ADM dans ce contexte. Les effets du champ magnétique, du gradient de pression et du type de nanofluide sur l'évolution du profil de vitesse et du coefficient de frottement ont été illustrés graphiquement, mettant en évidence des comportements intéressants, notamment une stabilisation du profil de vitesse due à l'effet de la force de Lorentz qui s'oppose à la direction de l'écoulement.

Mots clés : Nanofluide hybride – Couche limite – Vitesse – Coefficient de frottement – Méthode décompositionnelle – Runge-Kutta d'ordre 4

Abstract

This thesis is dedicated to the semi-analytical study of the combined effects of the magnetic field, external pressure gradient and nanofluid volume fraction on the dynamic behavior of the laminar boundary layer developing through a wedge in a uniform hybrid nanofluid flow. By employing appropriate similarity variables, the governing nonlinear partial differential equations were transformed into a third-order nonlinear ordinary differential equation. This equation was then solved analytically using the Adomian Decomposition Method (ADM), an effective semi-analytical technique for solving nonlinear differential equations. The results obtained were compared with those provided by the fourth-order Runge-Kutta numerical method (RK4), used as a guide. This comparison demonstrated excellent agreement between the analytical and numerical solutions, thereby validating the effectiveness of the ADM technique. The effects of the magnetic field, pressure gradient, and nanofluid type on the evolution of the velocity profile and Skin friction coefficient were graphically illustrated, highlighting interesting behaviors, notably the stabilization of the velocity profile due to the opposing Lorentz force. The results obtained were compared with those provided by the fourth-order Runge-Kutta numerical method (RK4), used as a reference. This comparison demonstrated excellent agreement between the analytical and numerical solutions, thereby validating the effectiveness of the ADM in this context. The effects of the magnetic field, pressure gradient, and nanofluid type on the evolution of the velocity profile and friction coefficient were graphically illustrated, highlighting interesting behaviors, notably the stabilization of the velocity profile due to the opposing Lorentz force.

Keywords : Hybrid nanofluid – Boundary Layer – Velocity – Skin Friction Coefficient – Decomposition Method – Fourth order Runge-Kutta

ملخص

يُكرّس هذا البحث لدراسة التأثيرات المشتركة للمجال المغناطيسي وتدرج الضغط الخارجي على السلوك باستخدام الديناميكي للطبقة الحدودية اللامينية التي تتطور عبر زاوية في تدفق موحد للسوائل النانوية المتغيرات المناسبة للتشابه، تم تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية الحاكمة إلى معادلة تم حل هذه المعادلة بعد ذلك تحليليًا باستخدام طريقة التحليل. تفاضلية عادية غير خطية من الرتبة الثالثة ، وهي تقنية شبه تحليلية فعّالة لحل المعادلات التفاضلية غير الخطية (ADM) بالتفكيك لأدوميان

، (RK4) تمت مقارنة النتائج المستخلصة مع تلك المقدمة من طريقة رانج-كوتا من الرتبة الرابعة أظهرت هذه المقارنة تطابقًا ممتازًا بين الحلول التحليلية والعديّة، مما يثبت فعالية .المستخدمة كمرجع تم توضيح تأثيرات المجال المغناطيسي وتدرج الضغط ونوع السائل .في هذا السياق ADM طريقة النانوي على تطور ملف السرعة ومعامل الاحتكاك من خلال الرسوم البيانية، مما أبرز سلوكيات مثيرة للاهتمام، لا سيما استقرار ملف السرعة بسبب القوة المغناطيسية المعاكسة

الكلمات المفتاحية

المائع النانوي الهجين – الطبقة الحدية – السرعة – معامل الاحتكاك – الطريقة التفكيكية – رانج-كوتا من الرتبة الرابعة

Nomenclature

Symbole	Description	unité
U	La vitesse libre (extérieure)	(m /s)
u	Composante de la vitesse dans la direction x	(m /s)
v	Composante de la vitesse dans la direction y	(m /s)
ρ	Masse volumique	(Kg /m ³)
P	Pression	(Pa)
μ	Viscosité dynamique	Kg /m.s
ν	Viscosité cinématique	(m ² /s)
η	Variable de similitude	(-)
δ	Épaisseur de la couche limite dynamique.	(m)
δ_*	Épaisseur de déplacement	(m)
θ	Epaisseur de quantité de mouvement	(m)
H	Facteur de forme (couche limite)	(-)
δ_3	Epaisseur d'énergie cinétique	(m)
Δ	Epaisseur d'enthalpie d'arrêt	(m)
Δ_2	Epaisseur d'enthalpie	(m)
C_f	Coefficient de frottement local	(-)
ψ	Fonction de courant	(m ² /s)
ϕ	Fraction volumique des nanoparticules solides	(-)
x	Abscisse dans le sens de l'écoulement	(m)
y	Coordonnée normale à la plaque/Fonction	(m)
f	Fonction de courant adimensionnelle	(-)
f'	Fonction de vitesse adimensionnelle	(-)
σ	Conductivité électrique	(S/m)
T	Partie linéaire	(-)
L	Opérateur différentiel inversible	(-)
n	Facteur de forme (nanoparticules solides)	(-)
N	Partie non linéaire	(-)
R	Résidu de l'opérateur linéaire	(-)
A_n	Polynômes d'Adomian	(-)
M	Paramètre magnétique adimensionnel	(-)
Re	Nombre de Reynolds	(-)
B	Champ magnétique variable	(-)
B_0	Intensité du champ magnétique	(-)
β	Paramètre du gradient de pression	(-)
K	Conductivité thermique	(W/m K)
C_p	Capacité calorifique a pression constante	(J/Kg K)
$(.)_{nf}$	Nanofluide	(-)
$(.)_f$	Fluide de base	(-)
$(.)_s$	Solide	() _f

Sommaire

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Notions de base de la MDF et Généralités sur la Théorie de la couche limite hydromagnétique :	
I.1. Introduction	3
I.2. Domaines d'application de la mécanique des fluides	4
I.3 Classification des écoulements des fluides	5
I.3.1 Domaines visqueux ou fluides d'un écoulement	5
I.3.2 Ecoulement interne ou externe	6
I.3.3 Ecoulement laminaire ou turbulent	7
I.3.4 Ecoulement naturel ou forcé	8
I.3.5 Ecoulements incompressibles et compressibles.....	9
I.3.6 Ecoulements uni dimensionnels et bidimensionnels.....	9
I.3.7 Écoulement stable	9
I.3.7.1 Écoulement instable	10
I.3.7.2 Ecoulement stationnaire.....	10
I.3.7.3 Ecoulement non stationnaire.....	10
I.4. Définition du fluide	10
I.4.1 Fluide réel ou visqueux	11
I.4.2 Fluide incompressible	11
I.4.3 Fluide compressible	11
I.5. Propriétés des fluides	11
I.5.1. Système d'unités	11
I.5.2. Masse volumique (ρ) d'un fluide	12
I.5.3. La pression.....	12
I.5.4. Pression absolue et pression effective.....	12
I.5.5. La densité	12
I.5.6. Le volume massique (Volume spécifique)	13
I.5.7. La viscosité.....	13
I.5.7.1. Viscosité dynamique d'un fluide.....	14
I.5.7.2 Viscosité cinématique	15
I.5.8 Equation de continuité	15
II. La Couche limite	16

II.1. Introduction	16
II.2 .Définition du problème Et Notation	16
II .3. Couche limite dynamique	17
II.4.Couche limite thermique.....	17
II.5.Paramètres caractéristiques de la couche limite	18
II.5.1. Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique	18
II.5.2.Epaisseur de déplacement	18
II.5.3. Epaisseur de quantité de mouvement.	19
II.5.4. Facteur de forme	19
II.6 Domaine d'application de la couche limite	19
II.6.1 Aéronautique et Aérodynamique	20
II.6.2 Automobile	20
II.6.3 Architecture et Génie Civil.....	20
II.6.4 Énergie Renouvelable.....	20
II.6.5. Systèmes de Refroidissement	20
II.6.6. Météorologie et Climatologie.....	21
II.7 Magnéto hydrodynamique	21
II.7.1 Définition	21
II.8 Les nano-fluides	22
II.8.1 Fabrication et préparation des nano fluides	22
II.8.1.1 Procédé en un étape (one-step method).....	23
II.8.1.2. Procédé en deux étapes (two-step method)	23
II.8.2 Les nano fluides hybrides	25
II.8.3 Propriétés thermo physiques des nano fluides	26
II.8.3.1. La fraction volumique(ϕ).....	26
II.8.3.2 Conductivité thermique (K).....	26
II.8.3.3 Viscosité dynamique (μ)	28
II.8.3.4 La masse volumique (ρ)	28
II.8.3.5 Chaleur massique (C_p)	28
III. Le kérosène	29
III.1 Définition	29
III.2 Composition chimique du kérosène	29
III.3 Types de kérosène	29

III.4 Utilisation du kérosène	30
Chapitre II : Etude dynamique de l'écoulement des nano fluides hybrides	
I. Formulation mathématique du problème	31
Chapitre III : Méthode Décompositionnelle D'Adomian et Application	
I.1 Introduction.....	35
I.2 Principe général de la méthode	35
I.3 Polynômes d'Adomian	37
I.4 Application de la méthode ADM sur le probleme étudié	38
Chapitre IV : Résultats et Discussions	
IV.1 Introduction	42
IV.2 Profil de vitesse	43
IV.2 .1 Effets des principaux parametres physiques sur l'évolution de la vitesse	43
IV.3 Evolution du coefficient de frottement	50
IV.4 Comparaisons.....	53
Conclusion Générale	56
Références Bibliographiques	58
Liste des Figures	61
Liste des tableaux	63

Introduction Générale

Introduction Générale

L'étude expérimentale de l'écoulement d'un fluide incompressible à des nombres de Reynolds relativement élevés révèle la présence de deux zones distinctes dans le champ d'écoulement : d'une part, une couche limite proche des surfaces solides, où les effets de viscosité sont prépondérants, et d'autre part, une région externe où le fluide peut être approximé comme étant parfait, c'est-à-dire non visqueux. C'est au sein de la couche limite que les mécanismes de convection et de diffusion visqueuse interagissent fortement, donnant lieu à des gradients de vitesse significatifs ainsi qu'à des efforts de cisaillement non négligeables. Tous les phénomènes de transfert entre le fluide et la paroi se manifestent à travers cette mince région d'écoulement.

Le présent mémoire porte sur l'analyse dynamique de l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) d'un nanofluide hybride incompressible s'écoulant au voisinage d'un dièdre soumis à un gradient de pression, en présence d'un champ magnétique transversal. L'approche retenue pour la résolution des équations différentielles non linéaires issues de la modélisation est semi-analytique, et repose sur l'application de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM). Une étude numérique via la technique de Runge-Kutta d'ordre 4 a été également réalisée dont les résultats obtenus sont utilisés comme guide pour justifier l'efficacité de l'approche semi-analytique adoptée.

Les principaux objectifs de ce travail peuvent être résumés comme suit :

Élaborer la formulation mathématique rigoureuse du problème physique étudié ;

Résoudre semi-analytiquement les équations différentielles non linéaires associées, en appliquant la méthode ADM ;

Étudier l'influence des paramètres physiques tels que la fraction volumique, la nature des nanoparticules, l'intensité du champ magnétique et le gradient de pression sur le comportement de l'écoulement au sein de la couche limite. Une attention particulière a été dédiée à la distribution des vitesses et l'évolution du coefficient de frottement.

Le mémoire est structuré en quatre chapitres, précédés d'une introduction générale et suivis d'une conclusion générale, comme suit :

Chapitre 1 : Présentation des concepts fondamentaux de la mécanique des fluides et de la théorie de la couche limite, incluant les propriétés des fluides, les régimes d'écoulement (laminaire et turbulent), la théorie de Prandtl, ainsi qu'une introduction aux nanofluides (définitions, méthodes de synthèse, propriétés thermophysiques).

Chapitre 2 : Développement de la formulation mathématique de l'écoulement bidimensionnel, stationnaire et visqueux d'un nanofluide hybride en présence d'un champ magnétique et d'un

Introduction Générale

gradient de pression. L'équation obtenue est une équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre, traitée par la méthode de décomposition d'Adomian.

Chapitre 3 : Présentation des outils mathématiques nécessaires à l'implémentation de la méthode ADM. Les principes fondamentaux de cette méthode semi-analytique sont exposés, avec un accent sur leur application aux équations non linéaires issues de l'étude.

Chapitre 4 : Analyse et interprétation des résultats obtenus. Ce chapitre met en évidence les effets du nombre de Hartmann (paramètre magnétique), de la fraction volumique des nanoparticules (Al_2O_3 et Cu), ainsi que du gradient de pression, sur la distribution de la vitesse et sur le coefficient de frottement. Une comparaison des résultats issus de la méthode ADM avec ceux obtenus par la méthode numérique de Runge-Kutta est également présentée.

Ce travail vise à apporter une meilleure compréhension du comportement des nanofluides hybrides soumis à un champ magnétique, dans le cadre des écoulements en couche limite laminaire, en mettant en œuvre une méthode semi-analytique performante et accessible.

**Chapitre I : Notions de base de la
MDF et Généralités sur la théorie
de la couche limite hydromagnétique**

I.1. Introduction :

La **mécanique** est généralement considérée comme l'une des plus anciennes disciplines des sciences physiques. Elle s'attache à l'étude du mouvement des corps, qu'ils soient immobiles ou en déplacement, sous l'effet de forces extérieures. Cette discipline se subdivise en deux branches principales : la **statique**, qui traite des corps au repos, et la **dynamique**, qui s'intéresse aux corps en mouvement.

Parmi les sous-domaines de la mécanique, la **mécanique des fluides** occupe une place particulière. Elle étudie le comportement des fluides – liquides ou gaz – à la fois au repos (statique des fluides) et en mouvement (dynamique des fluides). Elle prend également en compte les interactions qui peuvent se produire aux interfaces entre un fluide et un solide, ou entre plusieurs fluides. Dans ce cadre, la dynamique des fluides est souvent englobée dans la mécanique des fluides, la statique étant considérée comme un cas particulier d'écoulement où la vitesse est nulle (voir Figure 1-1).

La mécanique des fluides se décline en plusieurs spécialités. L'**hydrodynamique** désigne l'étude des fluides faiblement compressibles, tels que les liquides (notamment l'eau) ou les gaz à faible vitesse. L'**hydraulique**, qui en constitue une branche appliquée, se focalise sur l'écoulement des liquides dans les conduites, les canalisations et les canaux ouverts. En parallèle, l'**aérodynamique** étudie le mouvement des gaz – principalement l'air – autour d'objets en déplacement, comme les avions, les fusées ou les véhicules terrestres, à différentes vitesses.

Enfin, des disciplines connexes comme la **météorologie des fluides**, l'**océanographie** ou encore l'**hydrologie** s'intéressent plus spécifiquement aux phénomènes d'écoulement dans des environnements naturels. [1]



Figure I-1 : La mécanique des fluides traite des liquides et des gaz en mouvement ou en repos

I.2. Domaines d'application de la mécanique des fluides :

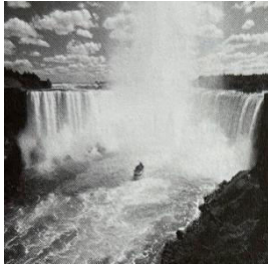
La mécanique des fluides est une discipline omniprésente, tant dans les phénomènes naturels que dans les systèmes technologiques qui façonnent notre quotidien. Sa compréhension est essentielle, non seulement pour l'analyse des phénomènes physiques observables, mais également pour la conception et l'optimisation de nombreux dispositifs d'ingénierie modernes, allant des appareils domestiques aux systèmes de transport avancés.

L'une des manifestations les plus fondamentales de la mécanique des fluides se retrouve dans le fonctionnement du corps humain. Le système cardiovasculaire, par exemple, repose sur le pompage du sang par le cœur à travers un réseau de veines et d'artères, tandis que les poumons assurent le renouvellement de l'air par le biais de l'inspiration et de l'expiration. Ces processus biologiques sont gouvernés par les principes de l'hémodynamique. Par ailleurs, plusieurs dispositifs médicaux modernes, tels que les cœurs artificiels, les respirateurs et les machines de dialyse, ont été conçus sur la base des lois de la dynamique des fluides.

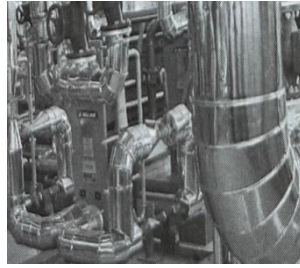
Dans le secteur domestique, la mécanique des fluides intervient dans la conception et le fonctionnement de systèmes essentiels comme les réseaux de plomberie (eau potable, gaz naturel, évacuation des eaux usées), les systèmes de chauffage, de ventilation et de climatisation (CVC), ou encore les réfrigérateurs, qui mettent en œuvre un fluide frigorigène circulant dans un circuit thermodynamique composé de compresseurs et d'échangeurs de chaleur. Chacun de ces composants repose sur une gestion rigoureuse des écoulements et des transferts thermiques.

Dans le domaine automobile, les applications de la mécanique des fluides sont également multiples. Le transport du carburant, du réservoir jusqu'aux chambres de combustion, implique une série d'éléments tels que pompes, conduites, injecteurs et carburateurs, dont le dimensionnement et le fonctionnement relèvent de cette discipline. De même, les processus de mélange air-carburant, de combustion interne, ainsi que l'évacuation des gaz d'échappement sont étudiés à travers les modèles d'écoulement compressible et réactif. Enfin, la conception des systèmes thermiques embarqués, comme le chauffage et la climatisation des véhicules, fait appel à des principes avancés de la mécanique des fluides et du transfert de chaleur.

Ainsi, la mécanique des fluides constitue une science fondamentale indispensable à la compréhension, la modélisation et l'optimisation de nombreux systèmes dans des domaines aussi variés que la médecine, l'habitat ou les transports. **(Figure 1-2). [1]**



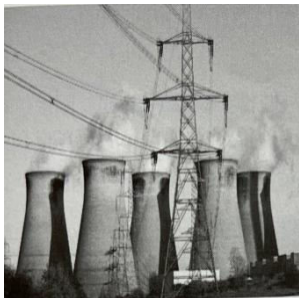
Écoulements naturels



Applications industrielles



Éoliennes.



Usines



Systèmes de canalisation



Avions.

Figure 1-2 : Quelques domaines d'application de la mécanique des fluides.

I.3 Classification des écoulements des fluides :

Nous avons précédemment défini la mécanique des fluides comme la discipline scientifique qui étudie le comportement des fluides, qu'ils soient au repos ou en mouvement, ainsi que leurs interactions avec des solides ou d'autres fluides aux interfaces. Dans la pratique, les problèmes liés à l'écoulement des fluides sont nombreux et variés. Il est donc souvent utile de les classer selon des caractéristiques communes afin de faciliter leur étude collective. Plusieurs méthodes de classification existent pour ces problèmes d'écoulement, et nous allons ici présenter quelques catégories générales.

I.3.1 Domaines visqueux ou fluides d'un écoulement :

Dans le cadre de l'étude des écoulements visqueux, il est observé qu'en présence d'un déplacement relatif entre deux couches fluides, une force de frottement interne, ou force de cisaillement, se manifeste. Cette force tend à ralentir la couche fluide la plus rapide, traduisant ainsi une résistance intrinsèque à l'écoulement. Cette résistance interne est quantifiée par une grandeur physique appelée viscosité, qui reflète le degré de cohésion interne du fluide. La viscosité prend naissance à partir des forces de cohésion moléculaires dans le cas des liquides et des interactions par collisions moléculaires dans les gaz. Il est important de noter qu'aucun fluide réel ne possède une viscosité strictement nulle.

On qualifie d'écoulement visqueux tout écoulement dans lequel les effets de frottement (dus à la viscosité) sont non négligeables. Toutefois, dans de nombreuses situations pratiques, notamment dans des régions éloignées des parois solides, l'influence des forces visqueuses peut être négligée au regard des forces d'inertie ou de pression, permettant ainsi de simplifier l'analyse en considérant localement un écoulement non visqueux tout en conservant une précision acceptable. Ce comportement est illustré dans le cas d'une plaque plane immergée dans un écoulement uniforme (**Figure 1.3**). En vertu de la condition de non-glissement, le fluide adhère à la surface de la plaque, induisant une variation progressive de la vitesse à proximité immédiate de celle-ci. Cette zone, appelée couche limite visqueuse, est caractérisée par la prédominance des effets de viscosité. À l'extérieur de cette couche mince, le fluide peut être considéré comme étant en écoulement parfait (sans viscosité), désigné sous le terme de région d'écoulement potentiel.



Figure 1.3 : Écoulement d'un courant de fluide initialement uniforme sur une plaque : régions d'écoulement visqueux (au voisinage des deux côtés de la plaque) et d'écoulement fluide (loin de la plaque).

I.3.2 Écoulement interne ou externe :

L'écoulement d'un fluide peut être classé en deux grandes catégories, à savoir l'écoulement interne et l'écoulement externe, en fonction de la nature de son confinement spatial. On parle d'écoulement interne lorsque le fluide est totalement enfermé dans une géométrie confinée, telle qu'une conduite ou un canal fermé, contraignant ainsi le fluide à suivre un trajet délimité par des parois solides. En revanche, un écoulement est qualifié d'externe lorsque le fluide s'écoule librement sur une surface étendue sans être intégralement contenu. C'est le cas, par exemple, des écoulements qui se développent autour de corps immergés dans un fluide, tels qu'une plaque plane, un fil, ou un cylindre. À titre illustratif, l'écoulement de l'eau dans une canalisation fermée constitue un écoulement interne, tandis que l'écoulement de l'air autour d'une sphère ou d'un conduit exposé à un courant d'air relève d'un écoulement externe (voir Figure 1-4). Par ailleurs, lorsqu'un conduit est partiellement rempli de fluide, laissant apparaître une surface libre en contact avec l'air, l'écoulement est dit à surface libre. Ce type d'écoulement est typique des cours d'eau naturels, des rigoles ou des canaux d'irrigation. Sur le plan dynamique, les écoulements internes sont généralement caractérisés par des effets visqueux présents dans l'ensemble du domaine d'écoulement, en raison du confinement imposé. En revanche,

pour les écoulements externes, les forces visqueuses sont significatives uniquement au voisinage immédiat des parois solides, dans les couches limites, ainsi que dans les zones de recirculation ou de turbulence générées en aval des obstacles.

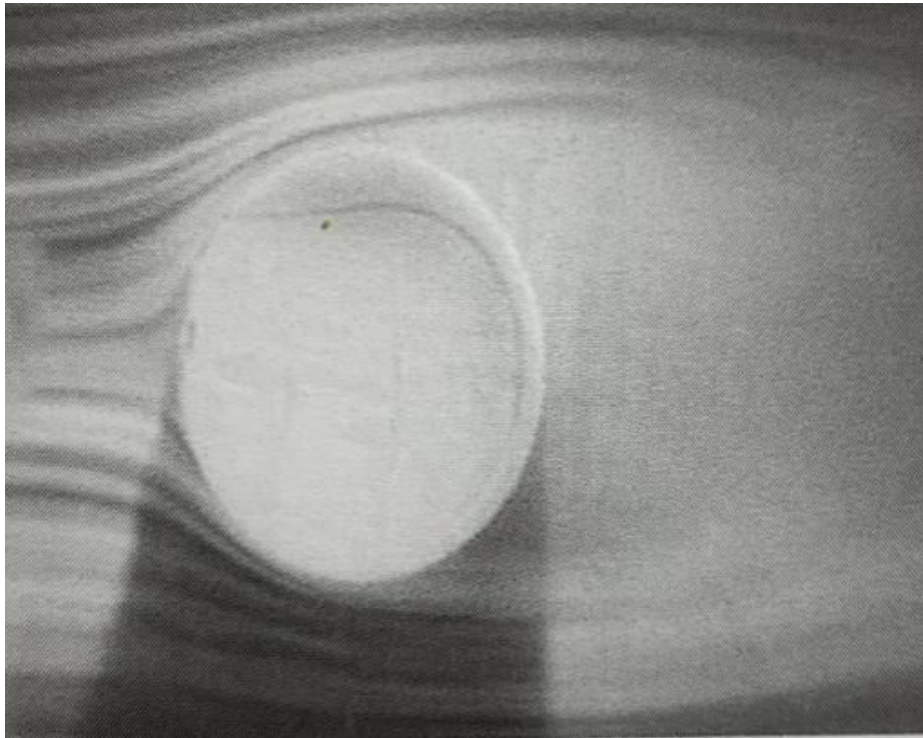


Figure 1.4 : Écoulement externe sur une balle de tennis. À l'arrière apparaît un sillage turbulent.

I.3.3 Écoulement laminaire ou turbulent :

Les écoulements fluides peuvent présenter des comportements très divers, allant d'un mouvement ordonné à un comportement chaotique. Lorsqu'un fluide s'écoule de manière structurée, en couches parallèles et sans mélange transversal, on parle d'écoulement laminaire. Ce type d'écoulement se caractérise par une stratification fluide régulière, dans laquelle les particules suivent des trajectoires bien définies. Il est généralement observé dans les fluides à forte viscosité, tels que les huiles, lorsque la vitesse d'écoulement reste relativement faible. En revanche, lorsque le fluide circule à grande vitesse, le mouvement devient instable et désordonné, avec des fluctuations de vitesse et de pression dans le temps et l'espace : on parle alors d'écoulement turbulent. Ce régime est typique des fluides à faible viscosité comme l'air, en particulier lorsqu'ils se déplacent à grandes vitesses. La Figure 1.5 illustre cette distinction entre écoulement laminaire et turbulent. Il est important de noter que le régime d'écoulement influe considérablement sur les pertes de charge et, par conséquent, sur la puissance nécessaire au pompage. Entre ces deux régimes extrêmes se situe le régime transitoire, dans lequel le fluide oscille entre un comportement laminaire et turbulent. C'est

dans ce contexte que les travaux pionniers d'Osborne Reynolds, au cours des années 1880, ont permis de définir un paramètre adimensionnel fondamental : le nombre de Reynolds (noté Re). Ce dernier constitue un critère déterminant pour l'identification du régime d'écoulement dans les conduites et les systèmes fluidiques en général. [1]

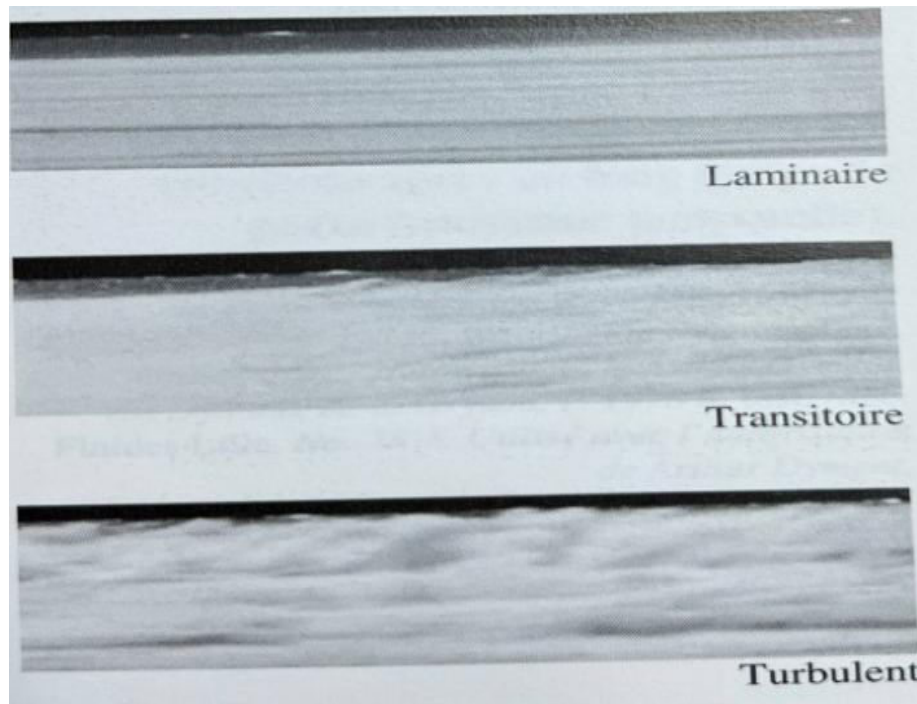


Figure 1.5 : Ecoulement laminaire, transitoire et turbulent.

I.3.4 Ecoulement naturel ou forcé :

L'écoulement d'un fluide peut être classé en écoulement naturel ou écoulement forcé, selon le mécanisme à l'origine de son mouvement. Dans le cas d'un écoulement forcé, le fluide est mis en mouvement par une action externe, généralement assurée par des dispositifs mécaniques tels qu'une pompe, un ventilateur ou un compresseur, permettant ainsi de faire circuler le fluide à travers une surface ou une conduite donnée. À l'inverse, un écoulement naturel est induit par les seules forces de flottabilité, résultant des différences de densité au sein du fluide, causées par des variations de température. Dans ce type d'écoulement, les régions plus chaudes et donc moins denses tendent à s'élever, tandis que les zones plus froides, plus denses, ont tendance à descendre, générant ainsi un mouvement de convection spontanée. Un exemple typique d'écoulement naturel est observé dans les systèmes solaires thermiques utilisés pour la production d'eau chaude sanitaire. Dans ce cas, le phénomène de thermosiphon est souvent exploité de manière passive, en disposant le réservoir de stockage

au-dessus des capteurs solaires, évitant ainsi le recours à des pompes et permettant la circulation du fluide grâce aux seules différences de température [1]

I.3.5 Ecoulements incompressibles et compressibles

On dit qu'un fluide est incompressible si sa masse spécifique varie faiblement avec la pression ou la température. Pour juger de l'effet de compressibilité dans un fluide en mouvement il faut faire intervenir à la fois la célérité du son (C) et la vitesse de l'écoulement (V). Le rapport de ces deux grandeurs définit un paramètre adimensionnel appelé nombre de Mach:

$$M = V/C \quad (I.1)$$

Le nombre de Mach permet de distinguer les régimes subsoniques ($M < 1$), supersonique $1 < M \leq 5$ et hypersonique $M \geq 5$. En outre, pour des écoulements à nombre de Mach inférieur à 0.2 le résultat du calcul de la vitesse fait en considérant le fluide incompressible ne diffère pas de plus de 1% de la valeur trouvée en prenant en compte la compressibilité. C'est la raison pour laquelle on distingue au sein du régime subsonique, la plage des écoulements incompressibles et celle des écoulements où les effets de compressibilité due au mouvement ne peuvent être négligés [2].

I.3.6 Ecoulements unidimensionnels et bidimensionnels

Dans certains cas particuliers d'intérêt scientifique ou technique, un problème physique initialement tridimensionnel peut être simplifié et réduit à l'étude d'un écoulement théorique bidimensionnel, voire unidimensionnel. Cette approximation est justifiée lorsque les variations des grandeurs physiques selon un axe – souvent l'axe z – sont négligeables ou nulles. Ainsi, pour les écoulements s'étendant largement dans le plan (x,y) et présentant une uniformité selon l'axe z , il est raisonnable de considérer l'écoulement comme bidimensionnel, c'est-à-dire que les grandeurs cinématiques (vitesse, pression, température, etc.) ne dépendent que des deux variables spatiales x et y . Cette hypothèse permet une simplification notable de la modélisation mathématique, tout en conservant une bonne représentativité du phénomène physique étudié. [2]

I.3.7 Écoulement stable :

Dans le cas d'un écoulement fluide stationnaire, la vitesse du fluide demeure constante en tout point de son trajet. Un fluide est qualifié d'écoulement stationnaire lorsque ses caractéristiques, notamment la vitesse et la direction, ne varient pas au cours du temps dans un repère donné

I.3.7.1 Écoulement instable

Dans le cas d'un écoulement instationnaire, la vitesse du fluide peut varier d'un point à un autre au cours du temps. L'écoulement d'un fluide peut ainsi être classifié en fonction de son évolution temporelle.

I.3.7.2 Ecoulement stationnaire

Un écoulement est dit stationnaire lorsque toutes les grandeurs physiques caractérisant le mouvement du fluide sont indépendantes du temps. Dans ce cas, des paramètres tels que la pression P , la vitesse V , la densité et l'énergie E demeurent constantes à chaque point de l'écoulement, quelle que soit l'évolution temporelle.

I.3.7.3 Ecoulement non stationnaire

On dit un écoulement non stationnaire si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps. [3]

I.4. Définition du fluide :

Un fluide est un milieu matériel continu, déformable et dépourvu de rigidité, capable de s'écouler sous l'effet de forces, même faibles. Il se distingue par sa capacité à subir d'importantes déformations sans retrouver spontanément sa forme initiale, contrairement aux solides. En mécanique des fluides classique, il est généralement postulé que les fluides sont homogènes et isotropes, et qu'ils adoptent la forme du récipient qui les contient (voir Figure I.6).

La manière dont un fluide réagit à une contrainte dépend de sa viscosité. Si la déformation se produit avec résistance, le fluide est dit visqueux ; en revanche, en l'absence de résistance, il est qualifié de fluide parfait. En pratique, tous les fluides réels possèdent une certaine viscosité, bien que son intensité puisse varier. Par exemple, un gaz peut souvent être assimilé à un fluide parfait dans certaines conditions simplifiées, mais reste fondamentalement visqueux. Il est à noter que, dans certaines situations, la viscosité peut être négligeable, ce qui autorise une modélisation simplifiée en tant que fluide parfait.

Les fluides se divisent principalement en deux grandes catégories : les liquides et les gaz. Les liquides sont généralement considérés comme incompressibles, bien que cette hypothèse ne soit valable qu'à titre d'approximation. Les gaz, quant à eux, sont compressibles par nature. Toutefois, lorsque les variations de pression et de température sont faibles, un gaz peut être traité comme un fluide incompressible afin de simplifier l'analyse de l'écoulement. [4]

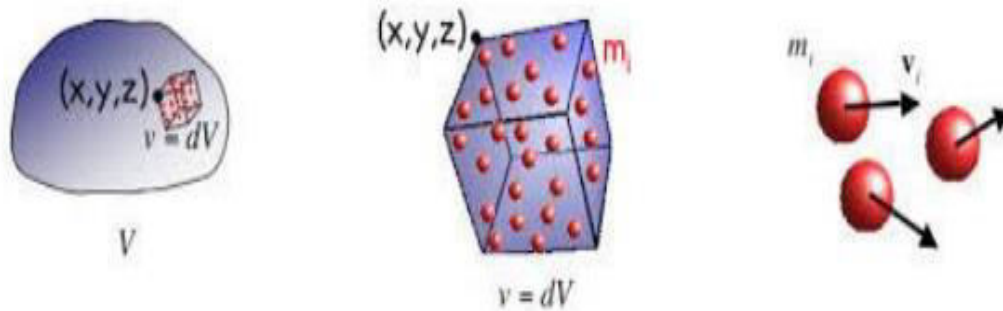


Figure I.6 : Notion de milieu continu

I.4.1 Fluide réel ou visqueux :

Un fluide réel, également appelé fluide visqueux, est soumis, lorsqu'il est en mouvement, à des forces de frottement internes. Ces forces dissipatives induisent une conversion partielle de l'énergie mécanique en énergie thermique, traduisant l'effet de la viscosité dans le comportement du fluide.

I.4.2 Fluide incompressible :

Un fluide est qualifié d'incompressible lorsque le volume associé à une masse donnée demeure constant, quelle que soit la pression exercée de l'extérieur. Cette hypothèse est particulièrement pertinente pour les liquides, tels que l'eau ou l'huile, dont la compressibilité est négligeable dans la majorité des conditions pratiques.

I.4.3 Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume qu'il occupe pour une masse donnée varie en fonction des variations de pression exercées sur lui. Cette caractéristique est typique des gaz, tels que l'air ou l'hydrogène, dont la densité peut changer de manière significative sous l'effet de la pression ou de la température. [5]

I.5. Propriétés des fluides :

I.5.1. Système d'unités :

Les unités de mesure utilisées dans ce document sont celles du système international (SI). Les unités principales de ce système sont rassemblées dans le tableau suivant : [6]

Longueur	Masse	Temps	Pression	Force	Energie	Puissance
Mètre	Kilogramme	Seconde	Pascal	Newton	Joule	Watt
(m)	(Kg)	(s)	(Pa)	(N)	(J)	(W)

I.5.2. Masse volumique (ρ) d'un fluide

La masse volumique (ρ) d'un fluide est définie comme étant le rapport de la masse (m) de ce fluide par le volume (V) qu'elle occupe. Elle est donnée par la formule suivante : [7]

$$\rho = m/V \quad (\text{I.2})$$

▪ ρ : Masse volumique en (kg /m³)

▪ m : Masses-en (kg)

▪ V : Volume en (m³)

I.5.3. La pression.

La pression est définie comme la force normale exercée par un fluide par unité de surface. Elle intervient exclusivement dans l'étude des fluides, c'est-à-dire des gaz et des liquides. L'équivalent mécanique de la pression dans les solides est appelé contrainte normale. Étant une force répartie sur une surface, la pression s'exprime en newtons par mètre carré (N/m²), unité également désignée par le Pascal (Pa), selon la relation suivante :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 \quad (\text{I.3})$$

I.5.4. Pression absolue et pression effective.

En pratique, la pression utilisée est généralement la **pression absolue**, qui est mesurée par rapport au vide absolu. Toutefois, dans de nombreux cas, il est plus commode de mesurer la pression par rapport à une référence arbitraire, souvent choisie comme étant la **pression atmosphérique** P_a . La pression mesurée à partir de cette référence est alors appelée **pression relative** ou **pression effective**. Ainsi, la pression effective correspond à la différence entre la pression absolue et la pression atmosphérique : [7]

$$P_e = P - P_a \quad (\text{I.4})$$

La pression effective peut être soit positive, soit négative. Dans le cas où elle est négative, on parle de **vide**, car cela correspond à des pressions inférieures à la pression atmosphérique. La notion de pression effective est d'une grande importance, car la majorité des manomètres industriels sont calibrés en pression effective, avec un zéro de graduation correspondant à la pression atmosphérique. Cette échelle permet ainsi de mesurer les écarts de pression par rapport à l'atmosphère ambiante.

1.5.5. La densité

La densité d'un fluide est définie comme le rapport de sa masse volumique à celle d'un fluide de référence, généralement l'eau dans le cas des liquides. Cette grandeur sans dimension permet de

comparer la masse d'un fluide par rapport à celle d'un fluide de référence. La densité est exprimée par la relation suivante :

$$d = \frac{\rho_{\text{fluide}}}{\rho_{\text{fluide de référence}}} \quad (I.5)$$

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence. [7].

1.5.6. Le volume massique (Volume spécifique) :

C'est le volume qu'occupe une unité de masse d'une substance. [7]

$$v = V/m = 1/\rho = \frac{m'}{kg} \quad (I.6)$$

1.5.7. La viscosité

La viscosité d'un fluide peut être définie comme une mesure de sa résistance interne à l'écoulement, caractérisant ainsi la "fluidité" ou l'"épaisseur" du fluide. Elle reflète les phénomènes de frottement interne qui opposent une résistance au mouvement des particules de fluide lors d'un écoulement. Plus un fluide est visqueux, plus il est résistant au mouvement, et vice versa.



Figure 1.7 : Comparaison de la viscosité entre l'eau et le miel. [8]

La viscosité d'un fluide caractérise sa capacité à s'écouler plus ou moins facilement, ainsi que la dissipation d'énergie induite par les frottements internes lors de cet écoulement (Figure 1.7). Un fluide visqueux, tel que le miel, présente une forte résistance à l'écoulement et tend à adhérer aux parois du récipient qui le contient, ce qui rend son mouvement plus difficile.

La viscosité peut être mesurée expérimentalement de manière simple à l'aide d'un dispositif appelé **écoulement de Couette** (Figure 1.8), du nom du physicien français Maurice Couette. Ce système consiste à enfermer le fluide entre deux plaques parallèles, l'une étant en mouvement avec une vitesse uniforme UUU selon l'axe xxx , tandis que l'autre plaque est

maintenue fixe par un dispositif externe. La force F_x nécessaire pour maintenir la plaque fixe est alors mesurée en fonction de la vitesse de la plaque supérieure, permettant ainsi de déterminer la viscosité du fluide.

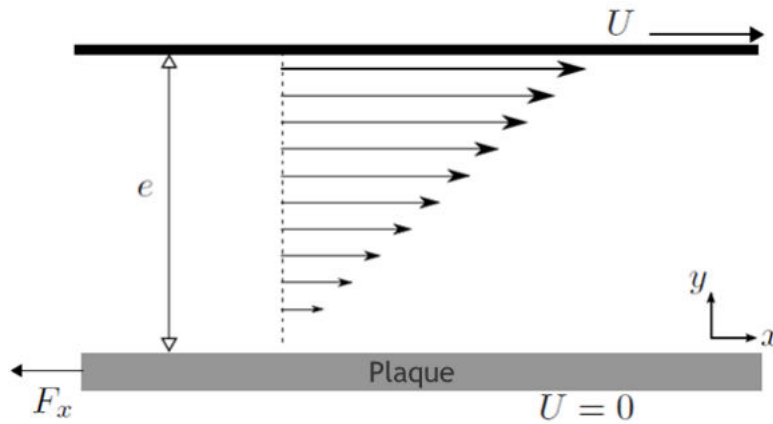


Figure 1.8 : Écoulement de Couette Plan. [8]

La viscosité est une propriété intrinsèque du fluide, qui se manifeste lorsque celui-ci est mis en mouvement. Elle joue un rôle clé dans la transmission de la quantité de mouvement de la plaque mobile à l'ensemble du fluide. Ainsi, la viscosité caractérise la capacité du fluide à transférer la quantité de mouvement, de manière similaire à la manière dont la diffusivité thermique quantifie la capacité d'un milieu à transférer la chaleur, dans le domaine des transferts thermiques. [8]

1.5.7.1. Viscosité dynamique d'un fluide

On considère deux couches adjacentes d'un même fluide distantes de ΔZ . Le coefficient de viscosité dynamique du fluide (μ) est donc proportionnel à cette distance ΔZ et à la force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches (cette force s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre) et inversement proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit ΔV et à leur surface S (Figure 1.9)

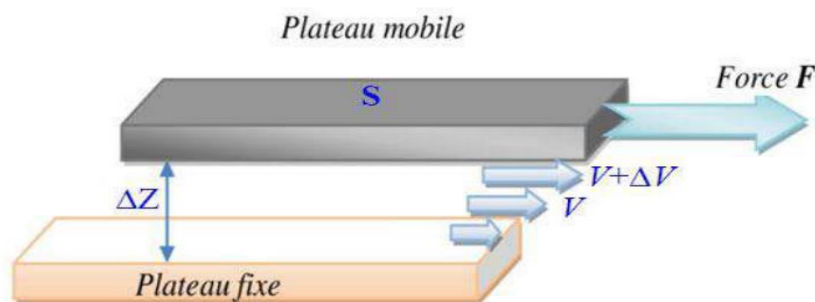


Figure 1.9 : Répartition des vitesses des couches du fluide.

Donc le coefficient de viscosité dynamique du fluide (μ) est donné par la formule suivante :

$$\mu = \frac{F \cdot \Delta Z}{S \cdot \Delta V} \quad (I.7)$$

▪ μ : Viscosité dynamique en ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$) ou en ($\text{Pa} \cdot \text{s}$) ou en Poiseuille (PI) : $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 1 \text{ PI}$

▪ F : Force de glissement entre les couches en (N)

▪ S : Surface de contact entre deux couches en (m^2)

▪ ΔV : Écart de vitesse entre deux couches en ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

▪ ΔZ : Distance entre deux couches en (m) [9]

I.5.7.2 Viscosité cinématique

Dans de nombreuses formules apparait le rapport de la viscosité dynamique et de la masse volumique ρ . Ce rapport est appelé viscosité cinématique, son unité est (m^2/s).

$$\nu = \mu / \rho \quad (I.8)$$

Les fluides possèdent plusieurs propriétés caractéristiques, parmi lesquelles on peut citer :

- Leur faible résistance à la déformation, ou leur résistance modérée, ce qui est décrit par la viscosité.
- Leur capacité à s'écouler, autrement dit leur aptitude à adopter la forme du récipient qui les contient. [10]

I.5.8 Equation de continuité

La conservation de la matière impose que le débit d'un fluide dans un tuyau (ou du Sang dans les veines) est constant (Figure 1.10).

Le débit, noté Q est donné par:

$$Q = S \cdot V \quad \text{m}^3/\text{s} \quad (I.9)$$

L'équation de continuité s'écrit:

$$Q = S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 \quad (I.10)$$

Ce qui signifie que le fluide circule plus vite dans les parties où le tube est plus étroit [11] [12]

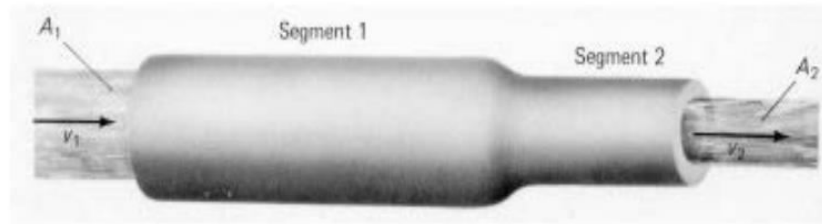


Figure 1.10 : La direction d'un fluide dans un tuyau.

II. La Couche limite :

II.1. Introduction :

Les observations expérimentales des écoulements de fluides réels ont montré que les solutions fournies par la théorie des fluides parfaits (non visqueux) sont en accord avec les données expérimentales uniquement dans les régions éloignées des parois solides. Cependant, ces solutions ne sont pas adaptées dans les zones proches des parois. En effet, dans le voisinage immédiat des parois, les forces de viscosité jouent un rôle déterminant. Cette région particulière de l'écoulement est appelée couche limite. [13]

II.2 .Définition du problème et Notation :

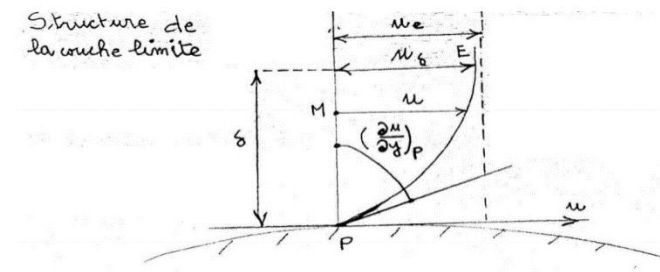


Figure 2.1 : structure de la couche limite

La couche limite (Figures 2.1 et 2.2) est une zone spécifique d'un écoulement, qu'il soit cisailé libre ou à paroi, où se concentrent les gradients de vitesse, de température (et parfois de concentration). Elle peut être classée en deux types : la couche limite dynamique, liée aux variations de vitesse, et la couche limite thermique, associée aux gradients de température. La présence d'une couche limite influence significativement les débits de masse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique dans l'écoulement. Ces modifications peuvent être analysées à l'aide de paramètres caractéristiques, dont l'épaisseur de la couche limite, que l'on peut définir et calculer dans le cadre d'une couche limite laminaire. Ces paramètres sont essentiels pour la compréhension des écoulements réels, car ils permettent de relier ces phénomènes à

des équations intégrales. La résolution approximative de ces équations conduit à de nombreux résultats pratiques et théoriques. [14]

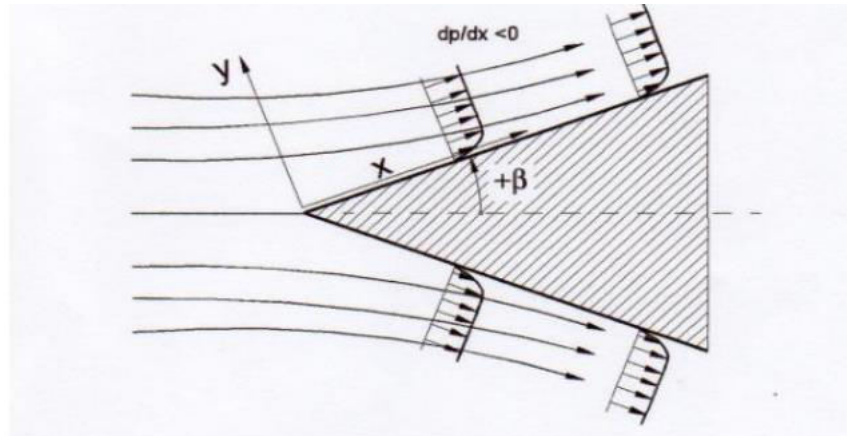


Figure 2.2 : Le développement de la couche limite le long d'un dièdre.

II .3. Couche limite dynamique :

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais. À la paroi, la vitesse du fluide est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci (Figure 2.3) [15]

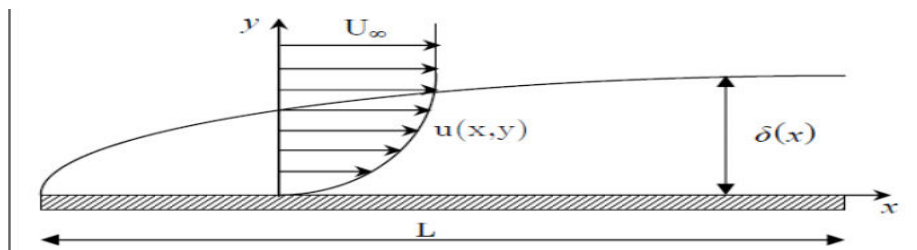


Figure 2.3 : Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane

II.4.Couche limite thermique.

Lorsqu'un fluide, de température T_∞ , s'écoule sur une paroi à température T_p , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact de la paroi. Ces particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme (**Figure 2.4**) [15]

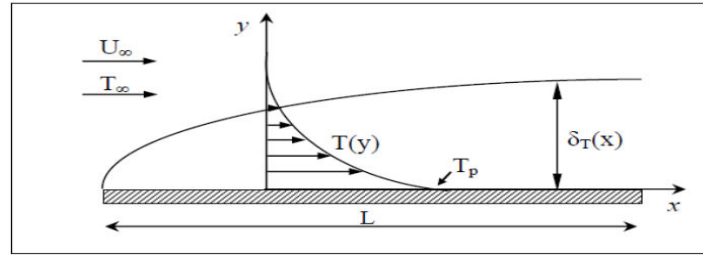


Figure 2.4 : Couche limite thermique sur une plaque plane.

II.5. Paramètres caractéristiques de la couche limite :

II.5.1. Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique :

L'épaisseur de la couche limite (Figure 2.5) est définie comme la distance verticale entre la paroi solide et le point où la vitesse de l'écoulement atteint 99% de la vitesse de l'écoulement libre ($u=0.99U_\infty$) [16]

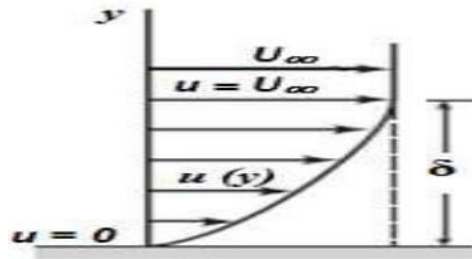


Figure 2.5 : Épaisseur conventionnelle de la couche limite.

II.5.2. Epaisseur de déplacement :

En raison du ralentissement du fluide à proximité de la paroi, le débit de fluide à travers l'épaisseur de la couche limite est inférieur à celui qui serait observé dans un fluide parfait, à une distance équivalente de la paroi, comme illustré dans la Figure 2.6. En négligeant la variation des grandeurs dans le fluide parfait sur une distance transversale de l'ordre de l'épaisseur de la couche limite, ce déficit peut être approximativement évalué par :

$$qp - qv = \int_0^\delta (\rho_E U_E - \rho U) dy \quad (\text{I.11})$$

Par convention, on l'exprime à partir d'une épaisseur δ_1 telle que :

$$qp - qv = \rho_E U_E \delta_1$$

$$\delta_1(X) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \right) dy \quad (\text{I.12})$$

L'épaisseur δ_1 est appelée Epaisseur de déplacement. Comme l'illustre la figure ci dessous, ce qualificatif fait référence à l'interprétation physique de cette grandeur qui correspond à la distance dont il conviendrait de déplacer la paroi pour conserver, en fluide

parfait sur l'épaisseur $(\delta - \delta_1)$ le même débit qu'en fluide visqueux sur toute la section de couche limite.[17]

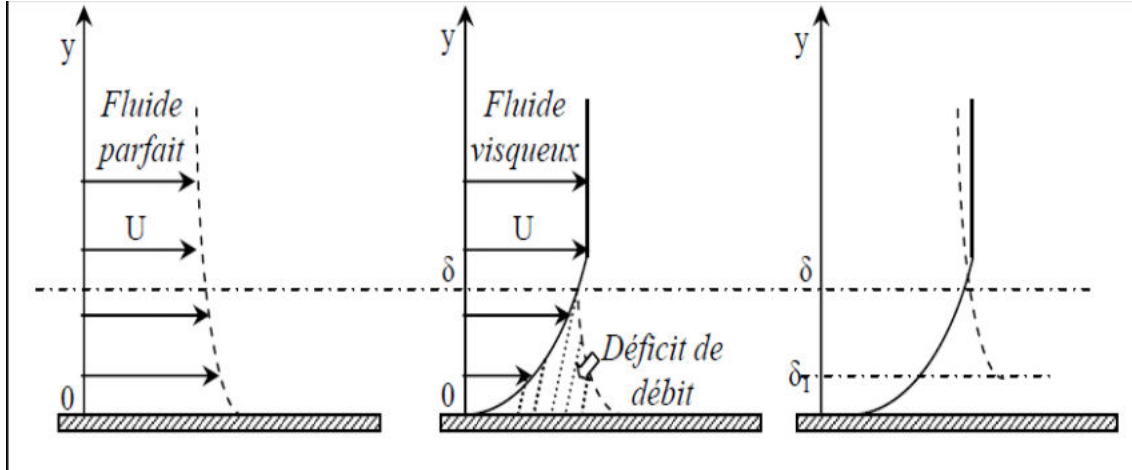


Figure 2.6 : Déficit de débit et épaisseur de déplacement.

II.5.3. Epaisseur de quantité de mouvement.

L'épaisseur de la quantité de mouvement est définie comme l'épaisseur de la couche de fluide ayant une vitesse U_∞ , pour laquelle la variation de la quantité de mouvement est égale à celle qui est dissipée. Cette épaisseur peut être exprimée par la relation suivante :

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \neq \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (\text{I.13})$$

II.5.4. Facteur de forme.

Le facteur de forme H est le rapport entre les épaisseurs de déplacement δ_1 et de quantité de mouvement δ_2 , il définit la forme générale du profil de vitesses de l'écoulement dans la couche limite.[17]

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (\text{I.14})$$

II.6 Domaine d'application de la couche limite :

La théorie de la couche limite constitue un élément central de la mécanique des fluides et trouve des applications diversifiées dans de nombreux domaines techniques et scientifiques.

Voici une synthèse des principales applications de cette théorie :

II.6.1 Aéronautique et Aérodynamique

La gestion de la couche limite joue un rôle crucial dans l'optimisation de la portance et la réduction de la traînée des aéronefs. Une couche limite laminaire bien maîtrisée permet d'améliorer l'efficacité énergétique et la stabilité des avions. Afin de retarder la transition vers la turbulence et réduire le risque de décrochage, des dispositifs tels que les générateurs de tourbillons sont utilisés, contribuant ainsi à maintenir un écoulement laminaire plus longtemps. [18]

II.6.2 Automobile

En conception automobile, la compréhension de la couche limite est essentielle pour minimiser la résistance à l'air, ce qui améliore la performance et l'efficacité énergétique des véhicules. L'optimisation de la forme de la carrosserie et l'intégration de dispositifs aérodynamiques, tels que les spoilers ou les jupes latérales, contribuent à réduire la traînée et à améliorer la stabilité du véhicule à haute vitesse.. [19]

II.6.3 Architecture et Génie Civil

La théorie de la couche limite est utilisée dans la conception de bâtiments pour évaluer l'impact du vent sur les structures. Elle permet d'optimiser la ventilation naturelle, de renforcer la résistance des bâtiments aux charges de vent et de réduire les efforts de conception nécessaires pour assurer leur stabilité. Ainsi, cette théorie contribue à la sécurité des bâtiments tout en améliorant leur efficacité énergétique.. [20]

II.6.4 Énergie Renouvelable

Dans le domaine des énergies renouvelables, la gestion de la couche limite est essentielle pour optimiser l'efficacité des systèmes. Par exemple, l'optimisation de la conception des pales d'éoliennes permet de maximiser la captation de l'énergie éolienne en réduisant la traînée et en améliorant la portance. De même, la compréhension des phénomènes de couche limite thermique contribue à améliorer les performances des capteurs solaires, en optimisant le transfert de chaleur et l'absorption de l'énergie solaire.. [21]

II.6.5. Systèmes de Refroidissement

La couche limite thermique joue un rôle crucial dans le transfert de chaleur au sein des systèmes de refroidissement, tels que les échangeurs thermiques et les dissipateurs thermiques. Une gestion optimale de cette couche permet d'améliorer l'efficacité de la

dissipation thermique, contribuant ainsi à prévenir la surchauffe des composants électroniques et à maintenir leur performance dans des conditions de fonctionnement idéales. [22]

II.6.6. Météorologie et Climatologie

La couche limite atmosphérique joue un rôle fondamental dans la dynamique des vents, la formation des nuages et la dispersion des polluants. Une compréhension approfondie de cette couche est essentielle pour les prévisions météorologiques à court terme ainsi que pour l'étude des phénomènes climatiques, permettant ainsi d'améliorer la précision des modèles météorologiques et d'anticiper les événements climatiques extrêmes. [23]

II.7 Magnéto hydrodynamique :

II.7.1 Définition :

La magnétohydrodynamique (M.H.D.) est une branche de la physique qui étudie les mouvements des fluides conducteurs d'électricité en présence de champs magnétiques. Cette discipline s'applique notamment aux métaux liquides (comme le mercure et les métaux alcalins fondus), aux gaz faiblement ionisés et aux plasmas.

Lorsqu'un fluide conducteur se déplace dans un champ magnétique, un champ électrique est généré, produisant des courants électriques qui modifient le champ magnétique initial. Par ailleurs, les forces de Laplace, appliquées le long des lignes de courant, influencent le mouvement du fluide. Il en résulte une interaction complexe entre les effets électromagnétiques et hydrodynamiques, qui constitue l'objet d'étude de la M.H.D.

L'ampleur de cette interaction est mesurée par un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds magnétique (RM), qui est proportionnel à la conductivité électrique du fluide, à sa vitesse et aux dimensions de l'écoulement. Cette interaction est généralement faible ($RM < 1$) dans les métaux liquides et les gaz faiblement ionisés, mais devient forte ($RM > 1$) dans les plasmas.

Le champ magnétique peut être considéré comme un fluide intégré au fluide matériel, exerçant sur ce dernier une pression magnétique proportionnelle au carré de l'induction magnétique B . Lorsque l'interaction entre le champ et la matière est forte, ces deux fluides se déplacent de manière solidaire, ce qui conduit à un "verrouillage" du champ magnétique dans le fluide. Ce phénomène permet la propagation d'ondes spécifiques à basse fréquence, appelées ondes magnétohydrodynamiques, dont les ondes d'Alfvén, qui se propagent parallèlement aux lignes de forces magnétiques, sont les plus simples.

La magnétohydrodynamique joue un rôle clé dans l'interprétation de nombreux phénomènes naturels, tels que les champs magnétiques et les vitesses de rotation des étoiles et des planètes, ainsi que les taches solaires et d'autres phénomènes astronomiques. [24]

II.8 Les nano-fluides :

Les nanofluides sont des solutions colloïdales composées de nanoparticules de taille nanométrique en suspension dans un fluide de base. Ces fluides ont suscité un intérêt considérable en raison de leurs propriétés thermiques et dynamiques améliorées par rapport aux fluides conventionnels.

La gamme de nanoparticules utilisées pour la préparation de nanofluides est très vaste. Parmi les plus couramment citées, on trouve : [25] :

- L'aluminium, Al et l'oxyde d'aluminium, Al_2O_3 .
- Le cuivre, Cu et l'oxyde de cuivre, CuO.
- L'or, Au.
- L'argent, Ag.
- Les nanotubes de carbone.
- Le dioxyde de titane, TiO_2 .

Le choix du liquide de base est crucial pour la préparation des nanofluides, car il garantit la stabilité de la suspension au fil du temps et prévient les phénomènes d'agglomération des nanoparticules. La sélection de ce fluide dépend principalement de la nature des nanoparticules utilisées. Parmi les solvants les plus fréquemment employés, on trouve des liquides tels que l'eau, l'huile, et divers solvants organiques, choisis en fonction de leurs propriétés physico-chimiques et de leur compatibilité avec les nanoparticules. sont :

- L'eau.
- L'éthylèneglycol, EG.
- Les huiles.
- Le Toluène.

II.8.1 Fabrication et préparation des nano fluides

Les procédés de fabrication de nanoparticules sont nombreux. Ils peuvent être classés en deux catégories :

- Les procédés physiques, comme le broyage mécanique.
- Les procédés chimiques, comme la pyrolyse ou la précipitation chimique.

Par contre pour les nano fluides il existe deux procédés distinct

II.8.1.1 Procédé en une étape (one-step method) :

Cette méthode consiste à disperser directement les nanoparticules dans un fluide de base, également connue sous le nom de synthèse directe dans un fluide de base. Elle permet non seulement d'obtenir une suspension stable, mais aussi de prévenir l'oxydation des particules de métal pur, assurant ainsi leur intégrité et leur performance dans l'application des nanofluides. [25]

II.8.1.2. Procédé en deux étapes (two-step method) :

La fabrication des nanofluides se déroule en deux étapes principales. La première consiste à produire les nanoparticules, tandis que la seconde consiste à les disperser dans un fluide de base. Les procédés de fabrication des nanoparticules peuvent être de nature physique ou chimique. Ces méthodes font l'objet de nombreuses recherches visant à réduire les coûts de production, qui restent parfois élevés en raison des difficultés liées à la fabrication de particules de taille spécifique.

Chaque technique présente des avantages et des inconvénients, et certaines ne sont pas adaptées à la production de grandes quantités de nanoparticules, ce qui limite leur utilisation dans une production à grande échelle. Cela est particulièrement vrai pour les méthodes à une seule étape. Parmi les principales méthodes de fabrication des nanoparticules, on trouve :

- La mécanosynthèse (broyage à haute énergie) ;
- La précipitation chimique (par exemple, réduction de sels métalliques) ;
- Les dépôts chimiques ou physiques en phase vapeur ;
- La condensation de vapeurs par détente brutale dans des tuyères supersoniques ;
- La sublimation par ablation laser (vaporisation d'un échantillon par impulsion laser) ;
- La pyrolyse laser (interaction entre un faisceau laser continu et un flux de réactifs).

La fabrication en deux étapes présente certains risques, notamment en raison de la formation d'agrégats dans la nanopoudre. Les nanoparticules à base d'oxydes métalliques semblent être moins susceptibles de se regrouper que celles à base de métaux purs, dans le cadre des procédés en deux étapes. En revanche, l'intégration en une seule étape directe permet de minimiser ces agglomérations.

Cependant, une des limitations majeures de ces techniques de vaporisation sous atmosphère réside dans le fait qu'elles ne peuvent utiliser que des liquides à faible pression de vapeur saturante, afin d'éviter une vaporisation trop rapide du liquide dans l'enceinte. De plus, le contrôle sur la taille des nanoparticules formées est généralement limité dans ces procédés. Malgré ces contraintes, la méthode en une seule étape est particulièrement recommandée pour la fabrication de nanoparticules métalliques pures, car elle permet de prévenir l'oxydation rapide de ces particules par l'air ambiant.[26]

Tableau 1 : Les Avantages et les inconvénients des nano fluides : [27]

Avantage	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> • Les nanofluides présentent une surface de transfert thermique largement étendue, favorisant ainsi un échange thermique efficace entre les nanoparticules et le fluide porteur. • Leur dispersion est élevée et stable, principalement grâce au mouvement brownien des nanoparticules, qui empêche leur aggrégation et assure une distribution homogène dans le fluide. • Par rapport aux fluides purs, les nanofluides nécessitent un volume inférieur pour atteindre une intensification équivalente du transfert thermique, ce qui les rend plus efficaces. • Les nanoparticules présentent un risque de colmatage réduit par rapport aux boues classiques, ce qui facilite la miniaturisation des systèmes et permet une meilleure gestion des espaces restreints. • Les propriétés des nanofluides, telles que la conductivité thermique et la mouillabilité, peuvent être ajustées en modifiant la 	<ul style="list-style-type: none"> • Les résultats expérimentaux rapportés dans la littérature présentent souvent un manque de consensus, ce qui rend difficile l'établissement de conclusions universelles. • Les mécanismes théoriques expliquant les modifications des propriétés des nanofluides sont encore insuffisamment compris et nécessitent des investigations plus approfondies. • La caractérisation des suspensions de nanoparticules est parfois inadéquate, ce qui complique l'évaluation précise de leurs performances. • La stabilité de la dispersion des nanoparticules peut poser des problèmes, notamment en raison de l'agglomération ou de la sédimentation des particules dans certaines conditions. • L'utilisation de nanofluides peut entraîner une augmentation de la

<p>concentration des nanoparticules, offrant ainsi une grande flexibilité pour répondre aux besoins spécifiques des applications industrielles.</p>	<p>chute de pression et de la puissance nécessaire au pompage, ce qui peut affecter l'efficacité énergétique des systèmes.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Leur viscosité est généralement plus élevée par rapport aux fluides purs, tandis que leur capacité calorifique est souvent plus faible, ce qui peut limiter certaines applications thermiques. • Le coût de production des nanofluides demeure élevé, ce qui constitue un obstacle à leur adoption à grande échelle dans des applications industrielles. • La fabrication et la mise en œuvre des nanofluides présentent des difficultés techniques, notamment en termes de contrôle de la taille des nanoparticules et de la stabilité à long terme des suspensions..
---	---

II.8.2 Les nano fluides hybrides :

Les nanofluides hybrides sont des suspensions colloïdales constituées d'un fluide porteur — tel que l'eau, l'huile ou l'éthylène glycol — dans lequel sont dispersés deux types distincts de nanoparticules solides. Contrairement aux nanofluides classiques, qui contiennent une seule catégorie de nanoparticules, les nanofluides hybrides visent à exploiter les propriétés complémentaires de diverses particules afin d'améliorer simultanément plusieurs caractéristiques thermophysiques, telles que la conductivité thermique, la stabilité colloïdale et l'efficacité des échanges thermiques. Cette configuration innovante permet d'améliorer de manière significative le transfert de chaleur, ce qui rend ces fluides particulièrement adaptés à

des applications industrielles complexes, telles que les systèmes de refroidissement, les échangeurs thermiques et les technologies énergétiques avancées.

Selon les travaux de Saidur et al. (2011), l'ajout de nanoparticules hybrides dans un fluide de base améliore de manière significative ses performances thermiques, constituant ainsi une alternative efficace aux méthodes traditionnelles d'intensification du transfert de chaleur. [28]

II.8.3 Propriétés thermo physiques des nano fluides :

Les propriétés physiques d'un nanofluide dépendent principalement du fluide de base (liquide) et de la phase dispersée (nanoparticules solides). Ainsi, leur définition nécessite d'examiner en détail les propriétés de chacune de ces composantes, à savoir le fluide de base et les nanoparticules.

II.8.3.1. La fraction volumique(ϕ)

La fraction volumique est l'une des propriétés les plus importantes des nano-fluides, car elle constitue la base des calculs des autres propriétés. Elle peut être définie comme le rapport entre le volume des nanoparticules et le volume total (nanoparticules + fluide de base). La valeur de la fraction volumique varie entre 0 (fluide de base pur) et 1. Elle est exprimée par la relation suivante : [29]

$$\phi = \frac{V_s}{V_T} \quad (I.15)$$

V_s : volume de solide (nanoparticules)

V_T : volume totale

II.8.3.2 Conductivité thermique (K)

La conductivité thermique est une propriété cruciale dans le phénomène de transfert de chaleur, car elle permet d'évaluer l'efficacité avec laquelle un fluide ou un matériau peut transférer de la chaleur. La conductivité thermique dépend non seulement de la température, mais aussi de la fraction volumique des nanoparticules présentes dans un nanofluide. Ainsi, elle varie en fonction de la concentration des nanoparticules, ce qui en fait un paramètre essentiel dans la conception des nanofluides pour des applications thermiques. La conductivité thermique d'un nano fluide est calculée selon les deux modèles suivants :

➤ Modèle de Maxwell (1873)

Le modèle de Maxwell, effectivement, est un modèle simplifié pour calculer la conductivité thermique d'un nano-fluide. Cependant, il présente l'inconvénient de ne s'appliquer qu'aux

nanoparticules de forme sphérique. Cela limite son utilisation dans des situations où les nanoparticules ont des formes différentes (comme les nanoparticules allongées, tubulaires, etc.), ce qui est souvent le cas dans les applications pratiques. La formule de Maxwell pour calculer la conductivité thermique d'un nano-fluide est donnée par : [30]

$$K_{nf} = \frac{k_s + 2K_f + 2\phi(K_s - K_f)}{(K_s + 2K_f) - \phi(K_s - K_f)} \quad (I.16)$$

Où K_{nf} : La conductivité thermique du nano fluide.

K_f : La conductivité thermique du fluide de base.

K_s : La conductivité thermique des nanoparticules solides

➤ **Modèle de Hamilton et Crosser**

Le modèle de Hamilton et Crosser [31] a été établi pour résoudre la limite du modèle de Maxwell. Puisque ce dernier n'est valable que dans le cas des particules sphériques, une chose qui rend le modèle moins efficace pour la description du phénomène étudié. Pour cela le modèle de Hamilton et Crosser a été développé pour rendre plus efficace le calcul de la conductivité thermique du nano fluide quel que soit la forme de la nanoparticule, et ça en introduisant la notion du facteur géométrique appelé la sphéricité (ψ). Ce facteur est défini comme étant le rapport de la surface de la sphère ayant le même volume que les nanoparticules sur la surface d'une nanoparticule. La conductivité thermique apparente du milieu est donnée par l'expression suivante :

$$K_{nf} = \frac{K_s + (n-1)K_f - (n-1)(K_f - k_s)\phi}{K_s + (n-1)K_f + (K_f - k_s)\phi} \quad (I.17)$$

Où (n) est un facteur de forme empirique donné par : $n = \frac{3}{\psi}$, $n=3$ pour les particules sphériques et $n=6$ pour les particules cylindriques. Pour ($\psi = 1$) particules sphériques) le modèle de Hamilton et Crosser est identique au modèle de Maxwell.

➤ **Modèle de Brinkman :**

Par contre, Brinkman [32] a étudié la formule d'Einstein pour couvrir une large plage de concentrations volumiques :

$$\mu = \frac{\mu_f}{(1-\phi)^{2.5}} \quad (I.18)$$

➤ **Modèle d'Einstein**

La viscosité dynamique d'un nanofluide, pour un mélange comprenant des suspensions diluées de particules sphériques et rigides, a été déterminée par Einstein [33]. Elle est exprimée sous la forme suivante :

$$\mu_{nf} = (1 + 2,5\phi) \quad (\text{I.19})$$

➤ **Modèle du Pak et Cho :**

Pak et Cho [34] ont utilisé la formule suivante :

$$(Cp)_{nf} = (1 - \phi)(Cp)_{nf} + \phi(Cp)_s \quad (\text{I.20})$$

II.8.3.3 Viscosité dynamique (μ) :

La viscosité est une propriété d'un fluide qui mesure sa résistance aux déformations lorsqu'il est mis en mouvement, représentant ainsi le frottement interne au sein du fluide. Un liquide très visqueux présente une résistance au mouvement plus important en raison de son frottement interne élevé. L'ajout de nanoparticules dans un fluide modifie sa viscosité dynamique, laquelle dépend fortement de la qualité de la dispersion des nanoparticules dans le fluide de base, ainsi que de la température. La viscosité dynamique du nano-fluide peut être déterminée en prenant en compte la viscosité du fluide de base et la fraction volumique des nanoparticules dans le nano-fluide.

II.8.3.4 La masse volumique (ρ) :

La détermination de la masse volumique d'un nano-fluide parfaitement homogène (avec une dispersion adéquate des nanoparticules dans le fluide) en fonction de la fraction volumique à une température donnée s'effectue à partir de la définition de la masse volumique d'un mélange.

$$\rho = \left[\frac{m}{V} \right] = \frac{m_f + m_s}{V_f + V_s} = \frac{\rho_f V_f + \rho_s V_s}{V_f + V_s} \quad (\text{I.21})$$

A partir de la relation (I.21), on déduit alors la masse volumique du nano fluide :

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi \rho_p \quad (\text{I.22})$$

II.8.3.5 La chaleur massique (Cp) :

La chaleur massique ou la chaleur spécifique est la capacité calorifique par unité de masse d'une substance ou d'un système homogène.

$$C_p = \frac{dQ}{mdT} \quad (I.23)$$

III. Le kérosène

III.1 Définition :

Le kérosène, aussi désigné sous le nom de pétrole lampant, est un produit dérivé du pétrole brut, obtenu par distillation. Il s'agit d'un mélange complexe d'hydrocarbures dont la plage de distillation varie entre 140 et 300 °C. Ce carburant est majoritairement constitué de composés hydrocarbonés possédant entre neuf et seize atomes de carbone (C9 à C16). Parmi ses composants, on retrouve principalement des hydrocarbures aliphatiques linéaires et ramifiés (paraffines et iso-paraffines), des hydrocarbures cycliques saturés (naphténiques), ainsi qu'une proportion variable d'hydrocarbures aromatiques, généralement comprise entre 15 et 20 %. Toutefois, cette proportion peut être réduite à moins de 5 % dans les versions désaromatisées. Il convient de souligner que le benzène est généralement absent de ce type de fraction pétrolière. [35]

Le kérosène est principalement utilisé comme carburant pour les moteurs à réaction des aéronefs. Du point de vue de ses caractéristiques physiques, il se situe entre l'essence et le gasoil. En raison de son utilisation dans des conditions extrêmes, telles que celles rencontrées à haute altitude, il doit répondre à des spécifications techniques rigoureuses pour garantir une sécurité maximale. [36]

III.2 Composition chimique du kérosène :

Le kérosène est un carburant complexe, constitué de plusieurs milliers de composés hydrocarbonés. Il se compose principalement d'hydrocarbures paraffinés ou alcanes, qui représentent environ 50 à 65 % de son volume, ainsi que d'hydrocarbures naphténiques ou cycliques saturés, représentant 20 à 30 % de son volume. Il contient également des hydrocarbures aromatiques, qu'ils soient mono- ou poly-aromatiques, qui constituent environ 10 à 20 % de son volume. [37]

III.3. Types de kérosène :

Le kérosène, utilisé comme carburacteur dans le domaine aéronautique, se décline en plusieurs variantes, notamment Jet A-1, Jet A, TR0, et JP-8. Le Jet A-1 est le type de kérosène principalement utilisé dans l'aviation civile à l'échelle internationale. Il présente des caractéristiques proches de celles du Jet A, principalement utilisé aux États-Unis. En France,

la version destinée à l'aviation militaire est désignée sous l'appellation TR0, tandis que son équivalent est connu sous le nom de JP-8 aux États-Unis et AVTUR au Royaume-Uni [38]

III.4. Utilisation du kérosène :

Au XIXe siècle, le "pétrole lampant" était principalement utilisé comme combustible pour les lampes à pétrole, ce qui explique son appellation. Ce n'est qu'à partir des années 1950 que le kérosène a acquis une importance croissante dans l'industrie, devenant un carburant essentiel pour les moteurs à réaction des avions. En dehors de son utilisation dans l'aviation, il trouve également diverses applications dans d'autres secteurs, telles que :

- Son emploi comme diluant pour peintures et vernis,
- En tant que solvant dans la production d'insecticides,
- Dans la fabrication de produits anti-mousse, d'agents de démoulage et de nettoyeurs,
- Comme agent de dégraissage et combustible pour les systèmes de chauffage domestique. [39]

Chapitre II : Etude dynamique de l'écoulement des nano fluides hybrides

I. Formulation mathématique du problème :

Considérons un écoulement bidimensionnel et stationnaire (Figure 2.1) de couche limite laminaire, où un nano fluide visqueux, électriquement conducteur et incompressible se déplace le long d'un dièdre. Ce fluide est soumis à l'influence d'un champ magnétique transversal, noté B , appliqué dans la direction perpendiculaire à la surface, c'est-à-dire selon l'axe y . De plus, cet écoulement est également influencé par un gradient de pression axial. L'écoulement qui génère la couche limite est uniforme et la vitesse libre est notée U .

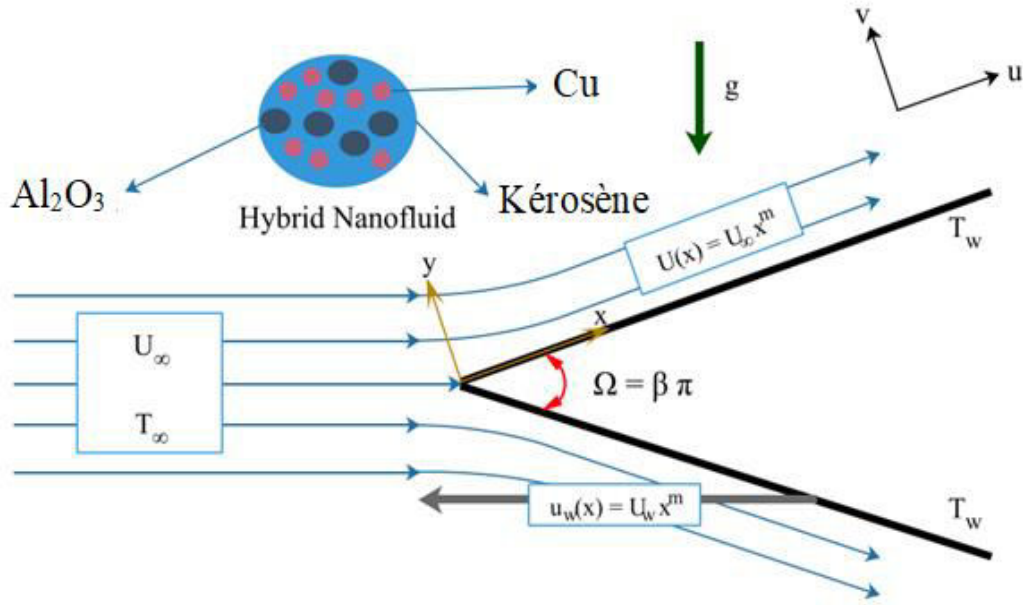


Figure 2.1 Géométrie de l'écoulement étudié.

En vertu de ces hypothèses, le système d'équations dynamiques décrivant la couche limite est :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu_{hnf} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma_{hnf} B^2}{\rho_{hnf}} (u_e - u) \quad (\text{II.2})$$

Où u et v sont les composantes de vitesse dans les directions x et y respectivement, ν_{hnf} , ρ_{hnf} et σ_{hnf} sont respectivement la viscosité cinématique, la masse volumique et la conductivité électrique du nanofluide hybride objet d'étude.

Le terme $\frac{\sigma_{hnf} B^2}{\rho_{hnf}} (u_e - u)$ dans l'équation (II.2) est la force de Lorentz qui résulte de l'interaction entre la vitesse du fluide et le champ magnétique appliqué. Le nombre de Reynolds magnétique est très faible, donc on a négligé l'induction du champ magnétique.

Les conditions aux limites sont telles que:

$$u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, u(x, \infty) = U \quad (\text{II.3})$$

Pour atteindre la similarité de la solution des équations (II.1), (II.2) avec les conditions aux limites (II.3), on pose : $B = B_0 x^{\frac{m}{2}}$ et $U = U_\infty x^m$ où B_0 et U_∞ sont des constantes. Il est commode d'introduire la fonction de courant $\psi(x, y)$ telle que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{II.4})$$

L'équation de continuité est ainsi automatiquement satisfaite, et l'équation de la quantité de mouvement fait apparaître des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y^2} = v_{hnf} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\sigma_{hnf} B^2}{\rho_{hnf}} B^2 (u_e - u) \quad (\text{II.5})$$

Les trois conditions aux limites écrites pour ψ sont :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) = 0, \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \infty) = U \quad (\text{II.6})$$

On peut écrire :

$$\frac{u}{U} = f' \quad (\text{vitesse adimensionnelle})$$

Et on peut utiliser comme variable de similitude :

$$\eta = \left[\frac{(m+1)u_\infty x^m}{2v_f x} \right]^{1/2} y \quad (\text{II.7})$$

D'autre part, si la vitesse axiale est telle que : $u = U f'$; alors la fonction de courant devra avoir pour forme :

$$\psi(x, y) = \left[\frac{2v_f x u_\infty x^m}{m+1} \right]^{1/2} f(\eta) \quad (\text{II.8})$$

Tenant compte de l'équation (II.8), il vient :

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{u_\infty^2 x^{m^2}}{x} m \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{\sigma_{hnf} B^2}{\rho_{hnf}} B^2 (u_e - u) = \frac{\sigma_{hnf} B_0^2 x^m}{\rho_{hnf}} u_e (1 - f') \quad (\text{II.10})$$

On a aussi :

$$v_{hnf} = \frac{\mu_{hnf}}{\rho_{hnf}} \quad (\text{II.11})$$

μ_{hnf} : viscosité dynamique du nanofluide hybride.

ρ_{hnf} : masse volumique du nanofluide hybride.

μ_{hnf} et ρ_{hnf} , pour un nanofluide hybride, selon Birkman [32] s'expriment respectivement par :

$$\mu_{hnf} = \frac{\mu_f}{(1-\phi_1)^{2.5} \cdot (1-\phi_2)^{2.5}} ; \rho_{hnf} = (1-\phi_2) \left((1-\phi_1)\rho_f + \phi_1 \cdot \rho_1 \right) + \phi_2 \cdot \rho_2 \quad (\text{II.12})$$

- L'indice f désigne le fluide de base
- L'indice $s1$ désigne les nanoparticules solides (Cuivre dans notre cas).
- L'indice $s2$ désigne les nanoparticules solides (Alumine dans notre cas).
- L'indice hnf désigne un nanofluide hybride.
- ϕ_1 : fraction volumique des nanoparticules 1.
- ϕ_2 : fraction volumique des nanoparticules 2.

Substituons ces expressions dans l'équation (II.5), on obtient :

$$u_\infty x^m f'^2 m u_\infty x^{m-1} - \left[\frac{m+1}{2} \frac{u_\infty}{x} x^m u_\infty x^m \right] f f'' = \frac{\frac{\mu_f}{(1-\phi_1)^{2.5} \cdot (1-\phi_2)^{2.5}}}{\rho_f (1-\phi_2) \left[(1-\phi) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right]} \frac{\rho_f}{\mu_f} \frac{u_e^2}{x} f''' + \frac{\frac{u_\infty^2 x^{m2}}{x}}{m} + \frac{\frac{\sigma_{hnf} B_0^2 x^m}{\rho_f (1-\phi_2) \left[(1-\phi) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right]}}{\frac{u_e}{x}} (1-f') \quad (\text{II.13})$$

On peut mettre :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sigma_2 + (m+1)\sigma_{nf} - (m-1)\phi_2(\sigma_{nf} - \sigma_2)}{\sigma_2 + (m+1)\sigma_{nf} - \phi_2(\sigma_{nf} - \sigma_2)} ; \quad M = \frac{\sigma_f}{\rho_f U_\infty} B_0^2 x \\ B &= \frac{\sigma_1 + (m+1)\sigma_{nf} - (m-1)\phi_1(\sigma_{nf} - \sigma_1)}{\sigma_1 + (m+1)\sigma_{nf} - \phi_1(\sigma_{nf} - \sigma_1)} ; \quad C1 = (1-\phi_1)^{2.5} ; \quad C2 = (1-\phi_2)^{2.5} \\ D &= \rho_f (1-\phi_2) \left[(1-\phi) + \phi_1 \frac{\rho_{s1}}{\rho_f} + \phi_2 \frac{\rho_{s2}}{\rho_f} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

M : est le paramètre magnétique adimensionnel

Après simplification, en tenant compte du système d'équations (II.14), on obtient l'équation de la couche limite MHD stationnaire sur un dièdre en présence d'un gradient de pression pour l'écoulement d'un nanofluide hybride incompressible et visqueux comme suit :

$$\frac{C_1 C_2}{D} f'''' + \frac{2m}{m+1} (1 - f'^2) + f f'' + \frac{2AB}{D} \frac{M}{m+1} (1 - f') = 0 \quad (\text{II.15})$$

Dans l'équation (II.15), on peut également mettre :

$\beta = \frac{2m}{m+1}$: caractérise le gradient de pression ($\beta < 0$: écoulement décéléré ; $\beta > 0$: écoulement accéléré).

$$P = \frac{D}{C_1 C_2}$$

$$S = \frac{2AB}{D}$$

Tenant compte du nouveau changement de variables, l'équation (II.15) devient finalement :

$$f'''' + \beta P (1 - f'^2) + P f f'' + S P \frac{M}{m+1} (1 - f') = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'équation (II.16) représente l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre régissant l'écoulement hydromagnétique d'un nanofluide hybride à travers un dièdre.

Les conditions aux limites pour $f'(\eta)$ sont obtenues à partir de celles définies pour la fonction de courant ψ , Donc on obtient :

$$f'(0) = 0, f'(0) = 0, f'(\infty) = 1 \quad (\text{II.17})$$

Chapitre III : Méthode Décompositionnelle
D'Adomian et Application

III.1 Introduction

Historiquement, les modèles mathématiques utilisés en physique ont souvent privilégié des formulations linéaires, principalement en raison de la disponibilité d'outils analytiques puissants conçus pour l'étude des systèmes linéaires. Toutefois, cette simplification se fait au détriment de certaines caractéristiques non linéaires fondamentales, qui sont pourtant au cœur de nombreux phénomènes naturels.

Afin de traiter les équations non linéaires décrivant la réalité physique, les chercheurs ont largement eu recours aux méthodes numériques. Les approches traditionnelles, telles que la discrétisation et la linéarisation, permettent de simplifier les équations mais modifient souvent la structure intrinsèque du phénomène étudié.

Dans ce travail, nous avons choisi d'utiliser **la méthode de décomposition d'Adomian**, qui se distingue par sa capacité à résoudre des équations non linéaires sans passer par la linéarisation ni la discrétisation. Cette méthode offre l'avantage de préserver la structure originale des équations, ce qui répond à une exigence fondamentale de la modélisation physique : rester fidèle à la nature des phénomènes observés.

La méthode a été initialement proposée par le physicien américain **Georges Adomian**. Elle a ensuite connu un important développement grâce aux travaux du professeur **Yves Cherruault**, alors directeur du laboratoire Medimat. Sous son impulsion, les fondements théoriques et les aspects pratiques de cette technique ont été consolidés. Ce progrès n'aurait pas été possible sans les contributions décisives de plusieurs de ses collaborateurs, entre autres, qui ont largement participé à sa mise en œuvre et à sa diffusion. [40]

III.2 Principe général de la méthode

La méthode de décomposition d'Adomian est une technique semi-analytique utilisée pour résoudre les équations différentielles. Elle consiste à décomposer l'opérateur non linéaire en une série dont les termes sont calculés de manière récursive.

Pour illustrer le principe général de cette méthode, considérons l'équation fonctionnelle suivante :

$$\mathbf{G} = g(\mathbf{x}) \quad (\text{III.1})$$

Où g est une fonction donnée et T est un opérateur différentiel non linéaire d'un espace de Hilbert H dans H , qui contient des termes linéaires et des termes non linéaires :

$T = \text{des termes linéaire} + \text{des termes non linéaires}$

$$\mathbf{G} = \mathbf{T} + \mathbf{N} \quad (\text{III.2})$$

Avec :

T : Partie linéaire ;

N : Partie non linéaire.

On décompose T en deux termes L et R , tel que : $\mathbf{T} = \mathbf{L} + \mathbf{R}$

Où L : est un opérateur différentiel inversible ;

R : est le reste de la partie linéaire P .

L'équation (III.2) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) + \mathbf{R}(\mathbf{y}) + \mathbf{N}(\mathbf{y}) = \mathbf{g} \quad (\text{III.3})$$

Soit L^{-1} opérateur inverse. A titre d'exemple, on prend L un opérateur différentiel d'ordre 1.

On obtient :

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \frac{d\mathbf{y}}{dt}, \quad L^{-1}(\mathbf{y}) = \int_0^t (\mathbf{y}) dt \quad (\text{III.4})$$

En appliquant l'opérateur inverse L^{-1} à l'équation (III.3) on trouve :

$$L^{-1}L(\mathbf{y}) = L^{-1}\mathbf{g} - L^{-1}R(\mathbf{y}) - L^{-1}N(\mathbf{y}) \quad (\text{III.5})$$

$$L^{-1}L(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{y}(0) \quad (\text{III.6})$$

Alors :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(0) + L^{-1}\mathbf{g} - L^{-1}R(\mathbf{y}) + L^{-1}N(\mathbf{y}) \quad (\text{III.7})$$

On cherche la solution f sous la forme [40], [41] :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=0}^n \mathbf{y}i \quad (\text{III.8})$$

$$\mathbf{y} = \sum_{i=0}^n \mathbf{y}i = \mathbf{y}(0) + L^{-1}\mathbf{g} - L^{-1}R(\sum_{i=0}^n \mathbf{y}i) - L^{-1}N(\sum_{i=0}^n \mathbf{y}i) \quad (\text{III.9})$$

La décomposition du terme non linéaire en séries donne :

$$N(\mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (\text{III.10})$$

Où les A_n sont des polynômes qui dépendent de y_0, y_1, \dots, y_n , appelés les polynômes d'Adomian.

En utilisant les formules (III.9) et (III.10), on trouve :

$$\begin{cases} y_0(x, t) = y(0) + L^{-1}g \\ y_1(x, t) = -L^{-1}R(y_0) - L^{-1}A_0 \\ y_2(x, t) = -L^{-1}R(y_1) - L^{-1}A_1 \\ \vdots \\ y_{n+1}(x, t) = -L^{-1}R(y_n) - L^{-1}A_n \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

Noté bien :

Si L est un opérateur différentiel d'ordre 3, alors :

$$L_{xxx}(y) = \frac{\partial^3(y)}{\partial x^3}, L^{-1}y''' = \int_0^x \int_0^x \int_0^x y''' dx dx dx \quad (\text{III.12})$$

On obtient :

$$L^{-1}y''' = y - y(0) - y''(0)\frac{x^2}{2} - y'(0)x \quad (\text{III.13})$$

Où $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ sont des constantes données.

En général, si L est un opérateur différentiel d'ordre n , on utilise la formule [43] :

$$L^{-1}(y) = y - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} y^{(k)}(t_0) \quad (\text{III.14})$$

Où $y(t_0)$, $y'(t_0)$ et $y''(t_0)$, ... sont données.

III.3 Polynômes d'Adomian :

On sait que :

$$N(y) = N(\sum_{i=0}^n y_i) \quad (\text{III.15})$$

En écrivant (y) sous forme d'une série de polynômes spéciaux, appelés polynômes d'Adomian. On obtient donc :

$$N(y) = \sum_{i=0}^n A_i \quad (\text{III.16})$$

Les polynômes A_i sont donc les polynômes d'Adomian.

Pour obtenir les polynômes, on introduit le paramètre λ comme suit :

$$(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i y_i = y + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \dots + \lambda^i y_i + \dots \quad (\text{III.17})$$

$$N(y(\lambda)) = \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^i A_i + \dots \quad (\text{III.18})$$

En utilisant les deux formules (III.17) et (III.18) :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{dA} N(y(\lambda)) \right]_{y=0}, \quad A_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d}{d^2 A} N(y(\lambda)) \right]_{y=0} \\
 A_3 &= \frac{1}{3!} \left[\frac{d}{d^3 A} N(y(\lambda)) \right]_{y=0}, \quad A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d}{d^n A} N(y(\lambda)) \right]_{y=0}
 \end{aligned}
 \tag{III.19}$$

Noté bien :

Nous pouvons obtenir les polynômes d'Adomian en posant :

$$(\lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda^i y_i, \quad N(y(\lambda)) = \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i \tag{III.20}$$

En développant (λ) sous forme de puissances de λ et en comparant, on trouve que A_n représente le coefficient de λ_n

On suppose que : $(y) = y^2$

Les polynômes d'Adomian s'expriment par :

$$A_0 = y_0^2$$

$$A_1 = 2y_0y_1$$

$$A_2 = y_1^2 + 2y_0y_2$$

$$A_3 = 2y_1y_2 + 2y_0y_3$$

$$A_4 = y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_0y_4$$

$$A_5 = 2y_2y_3 + 2y_1y_4 + 2y_0y_5$$

III.4.Application de la méthode ADM sur le problème étudié :

Dans cette section, nous appliquons la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) pour résoudre les équations non linéaires régissant le comportement dynamique de l'écoulement en couche limite laminaire d'un nanofluide hybride soumis à un champ magnétique (MHD) avec prise en compte de l'effet d'un gradient de pression. Afin de garantir une application optimale de cette méthode, nous procédons à une identification précise des opérateurs linéaires pertinents, qui constitueront les fondations pour la décomposition des équations.

L un opérateur différentiel d'ordre 3, s'exprimant par :

$$L = \frac{d^3}{d\eta^3} \quad (\text{III.21})$$

Par application de (III.21) sur l'équation (II.15), on aura :

$$L(f) + \beta P + S \frac{M}{m+1} = \beta P f'^2 - P f f'' + S \frac{M}{m+1} f' \quad (\text{III.22})$$

Considérons maintenant l'opérateur inverse :

$$L^{-1} = \int_0^\eta \int_0^\eta \int_0^\eta (.) d\eta d\eta d\eta \quad (\text{III.23})$$

Tenant compte (III.23), l'équation (III.22) devient :

$$L^{-1} \left(L(f) + f''' + \beta P + S \frac{M}{m+1} \right) = L^{-1} \left(\beta P f'^2 - P f f'' + S \frac{M}{m+1} f' \right) \quad (\text{III.24})$$

Finalement :

$$f(\eta) = C_5 \frac{\eta^2}{2} - \left(\beta P + S \frac{M}{m+1} \right) \frac{\eta^3}{6} + L^{-1} N f \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$N_f = \beta P f'^2 - P f f'' + S \frac{M}{m+1} f' \quad (\text{III.26})$$

et :

$$C_5 = f''(0)$$

Après application des conditions aux limites, l'équation (III.24) prend la forme suivante :

$$f(\eta) = \sum_{i=0}^n f_n = f_0 + L^{-1} N(f) \quad (\text{III.26})$$

Où f_0 s'exprime par :

$$f_0 = C_5 \frac{\eta^2}{2} - \left(\beta P + S \frac{M}{m+1} \right) \frac{\eta^3}{6}$$

L'application de l'algorithme d'Adomian conduit donc aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_0 = & \frac{C_5^2 x^2}{2} - 0.19333333333333336 C_5 x^3 + 0.01401666666666667 x^4 + C_5^2 x^2 \\ & - 0.29000000000000004 C_5 x^3 + 0.021025000000000005 x^4 + C_5 x \\ & - 0.14500000000000002 x^2 \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

$$\begin{aligned}
A_1 = & 0.05541666666666667c5^2x^4 - 0.011938333333333336c5x^5 \\
& - 0.07333333333333333c5^3x^5 + 0.0005770194444444447x^6 \\
& + 0.030288888888888893c5^2x^6 - 0.0036309841269841284c5x^7 \\
& + 0.0001316231746031747x^8 + 0.06333333333333332c5^2x^4 \\
& - 0.013775000000000003c5x^5 - 0.06666666666666667c5^3x^5 \\
& + 0.0006657916666666667x^6 + 0.0261c5^2x^6 \\
& - 0.003177111111111112c5x^7 + 0.00011517027777777785x^8 \\
& + 0.19(0.16666666666666666c5x^3 - 0.012083333333333337x^4) \\
& - 1.(0.04166666666666664c5^2x^4 - 0.009666666666666667c5x^5 \\
& + 0.00046722222222222244x^6) \\
& + 0.1(0.08333333333333333c5^2x^4 - 0.0145c5x^5 \\
& + 0.00070083333333333334x^6)3333
\end{aligned} \tag{III.28}$$

Avec :

A : Polynômes d'Adomian.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
f_1 = & 0.19(0.04166666666666664c5x^4 - 0.002416666666666672x^5) - \\
& 1.(0.008333333333333333c5^2x^5 - 0.001611111111111113c5x^6 + \\
& 0.00006674603174603178x^7) + 0.1(0.016666666666666666c5^2x^5 - \\
& 0.002416666666666667c5x^6 + 0.00010011904761904763x^7)
\end{aligned} \tag{III.29}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & 0.19(0.0002638888888888888c5x^6 + \\
& 0.14285714285714285(-0.00007652777777777782 - \\
& 0.0011111111111111111c5^2)x^7 + 0.000024454365079365078c5x^8 - \\
& 7.879739858906529 \times 10^{-7}x^9) + 0.1(0.00030158730158730154c5^2x^7 - \\
& 0.125c5(0.00032797619047619054 + 0.001587301587301587c5^2)x^8 + \\
& 0.1111111111111111(0.00001188913690476191 + \\
& 0.0004660714285714286c5^2)x^9 - 0.000004412654320987655c5x^{10} + \\
& 1.163336139169473 \times 10^{-7}x^{11}) - 1.(0.00026388888888888886c5^2x^7 - \\
& 0.125c5(0.0002842460317460318 + 0.0017460317460317456c5^2)x^8 + \\
& 0.1111111111111111(0.000010303918650793654 + \\
& 0.0005408730158730159c5^2)x^9 - 0.000005043033509700179c5x^{10} + \\
& 1.329527016193684 \times 10^{-7}x^{11})
\end{aligned}$$

(III.30)

f_1, f_2 représentent les deux premières itérations, les autres termes (f_3, f_4, \dots, f_n) se déterminent de la même façon.

En fin, la solution du problème de cet écoulement est déterminée par addition des termes ($f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$). Cette addition donne une série exprimée par :

$$f(\eta) = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n \quad \text{(III.31)}$$

Selon l'équation (III.31), il convient de noter que la précision des solutions ADM augmente en augmentant le nombre des itérations (n). Par ailleurs, la constante C_5 se détermine par l'utilisation des conditions aux limites

Chapitre IV : Résultats et Discussions

IV.1 Introduction :

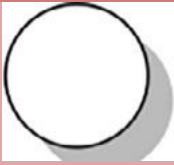

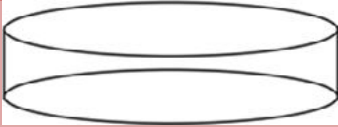
Dans cette étude, le problème non linéaire de l'écoulement d'un nanofluide hybride incompressible et visqueux autour d'un dièdre a été considéré. En effet, une attention particulière a été dédiée à l'étude semi-analytique du problème dynamique dans un écoulement magnéto-hydrodynamique de couche limite laminaire. La méthode de décomposition d'Adomian (Adomian Decomposition Method) a été utilisée pour le traitement semi-analytique ; tandis que la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 associée à la méthode de Tir a été adoptée pour le traitement numérique.

L'impact de plusieurs paramètres physiques d'intérêt, comme le gradient de pression (β), la fraction volumique des nanoparticules (ϕ), le nombre de Hartmann (M) et le facteur de forme (n) sur le profil de vitesse et le coefficient de frottement (quantité $F''(0)$), est visualisé par les Figures (IV.1) à (IV.12). Les propriétés thermo-physiques du nanofluide hybride objet d'étude sont représentées par le Tableau (IV.1). En effet, deux types de nanoparticules sont considérés. Il s'agit du Cuivre (Cu) et d'Oxyde d'aluminium (Al_2O_3). Par ailleurs, le Tableau IV.2 visualise la forme des nanoparticules considérées dans cette étude. Les formes utilisées sont de type : sphérique, colonne et lamina.

Tableau IV.1 Propriétés thermo-physiques du fluide de base et des différentes nanoparticules.

Propriétés thermo-physiques	fluide de base	Nanoparticules	
	Kérosène	Cu	Al_2O_3
Masse volumique ρ (kg /m ³)	783	8933	3970
Conductivité thermique σ (S /m)	21×10^{-6}	$5,9 \times 10^7$	1×10^{-4}
Capacité calorifique C_p (J/Kg .K)	2029	385	765

Tableau IV.2 Facteur de forme

Type des nanoparticules	Forme	Facteur de forme
Sphère		$n = 3$
Colonne		$n = 6.3698$
Lamina		$n = 16.1576$

IV .2 Profils de vitesse

IV. 2.1. Effets des principaux paramètres physiques sur l'évolution de la vitesse

Les Figures (IV.1) à (IV.8) montrent l'évolution de la fonction f' pour le cas d'un écoulement d'un nanofluide hybride a travers un diedre avec gradient de pression sous l'effet d'un champ magnétique externe. La fonction f' représente la valeur adimensionnée de la distribution de vitesse en fonction de la variable de similitude η pour diverses valeurs des paramètres physiques, à savoir : gradient de pression (m), paramètre du champ magnétique (M), fraction volumique des nanoparticules (ϕ) et facteur de forme (n). Dans cette étude, on s'est particulièrement intéressés :

- A un écoulement accéléré : valeurs positives du gradient de pression : $\beta > 0$
- A un écoulement décéléré : valeurs négatives du gradient de pression : $\beta < 0$

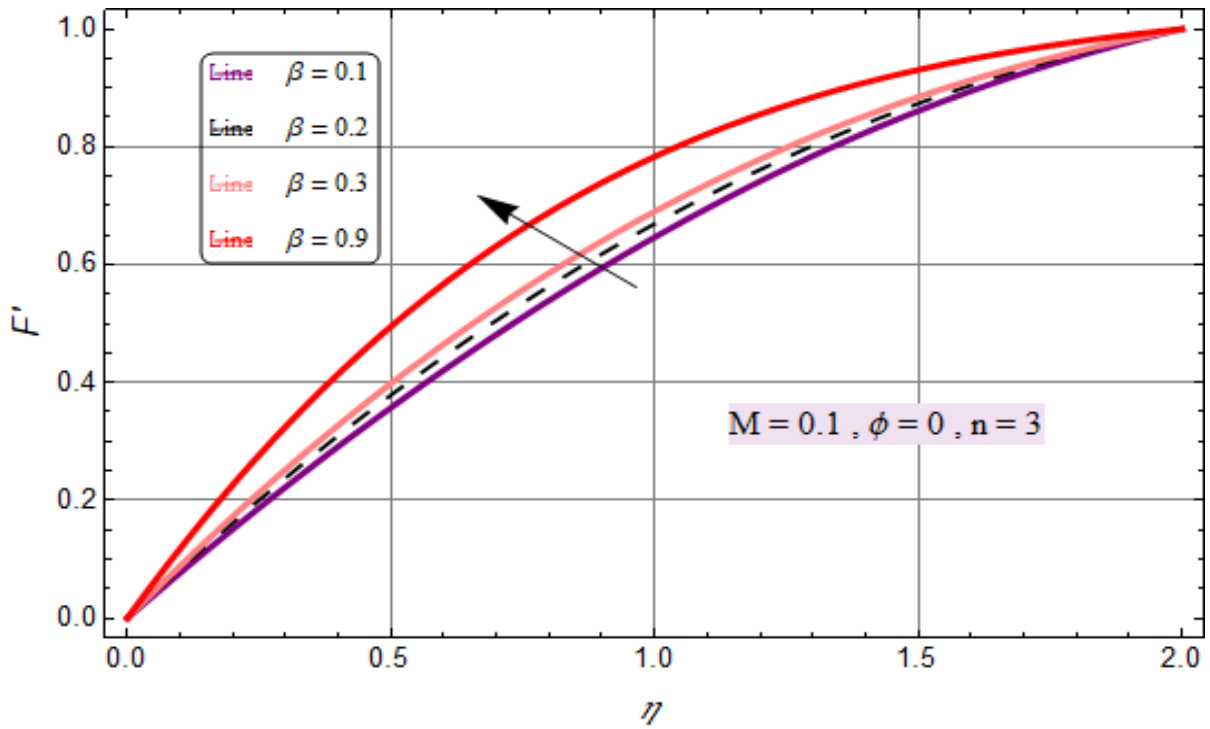


Figure IV.1 Effet du gradient de pression positif β sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)

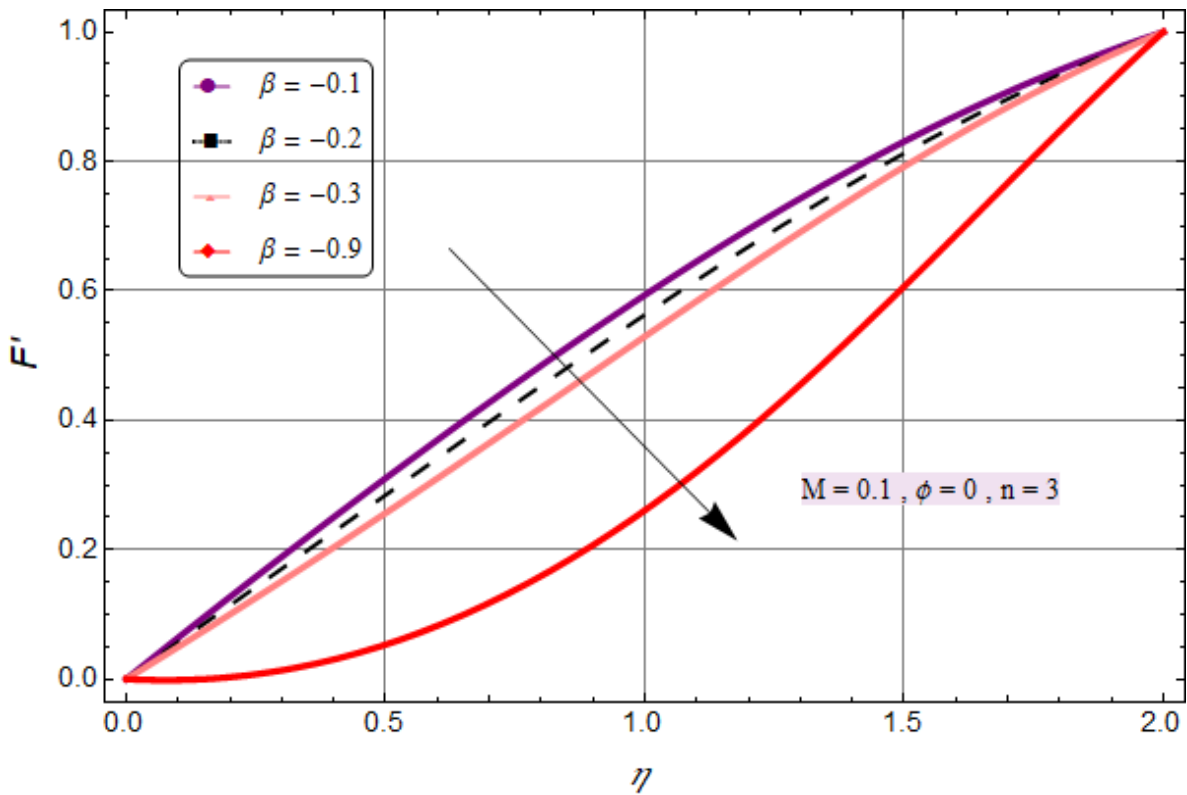


Figure IV.2 Effet du gradient de pression négatif β sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)

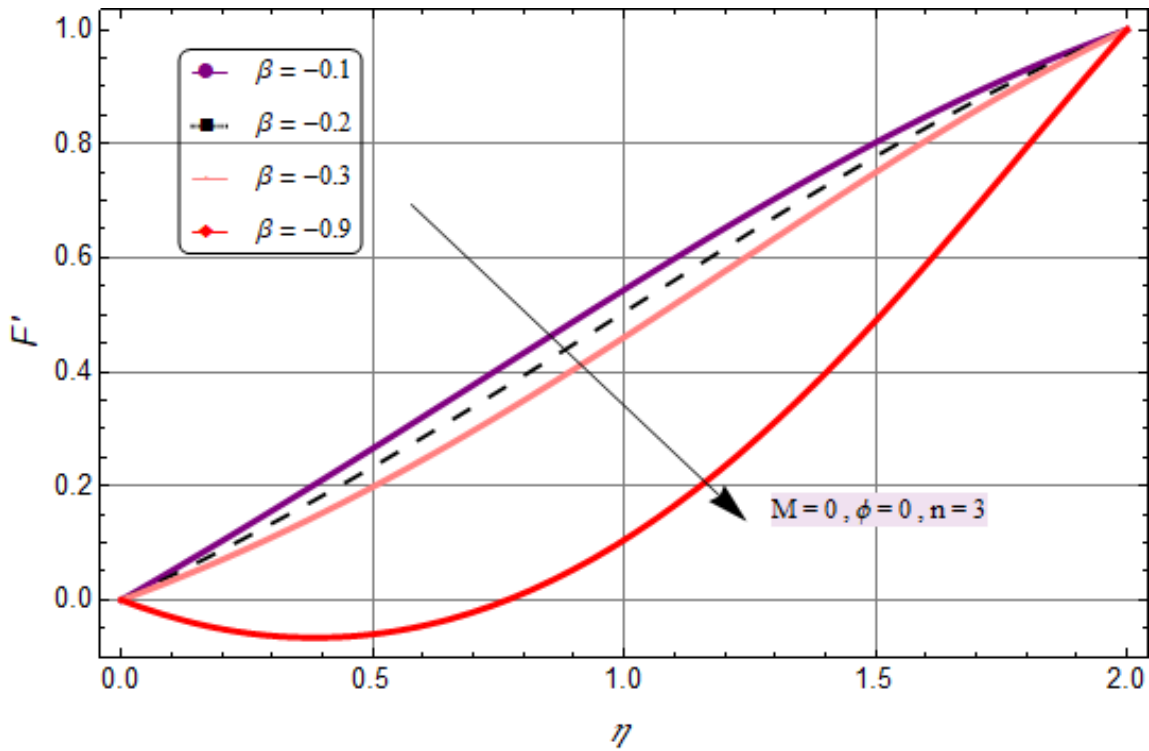


Figure IV.3 Effet du gradient de pression négatif β sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement classique décéléré : $M=\phi=0$)

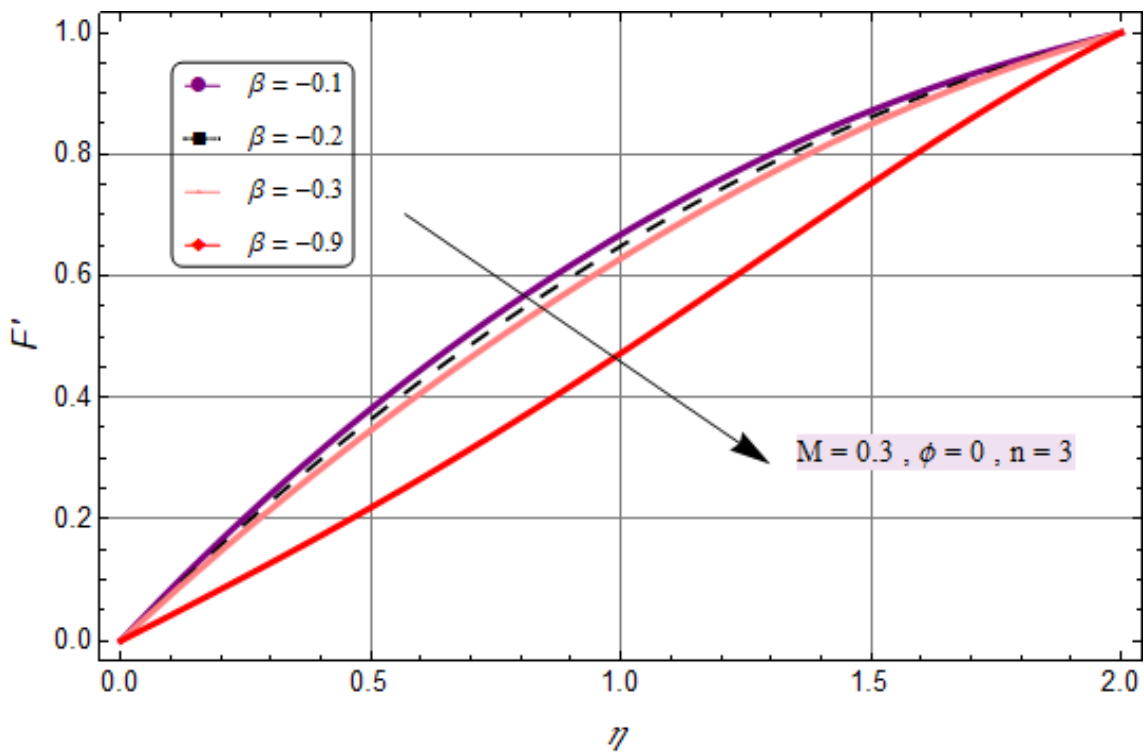


Figure IV.4 Effet du gradient de pression négatif sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré : $M=0.3, \phi=0$)

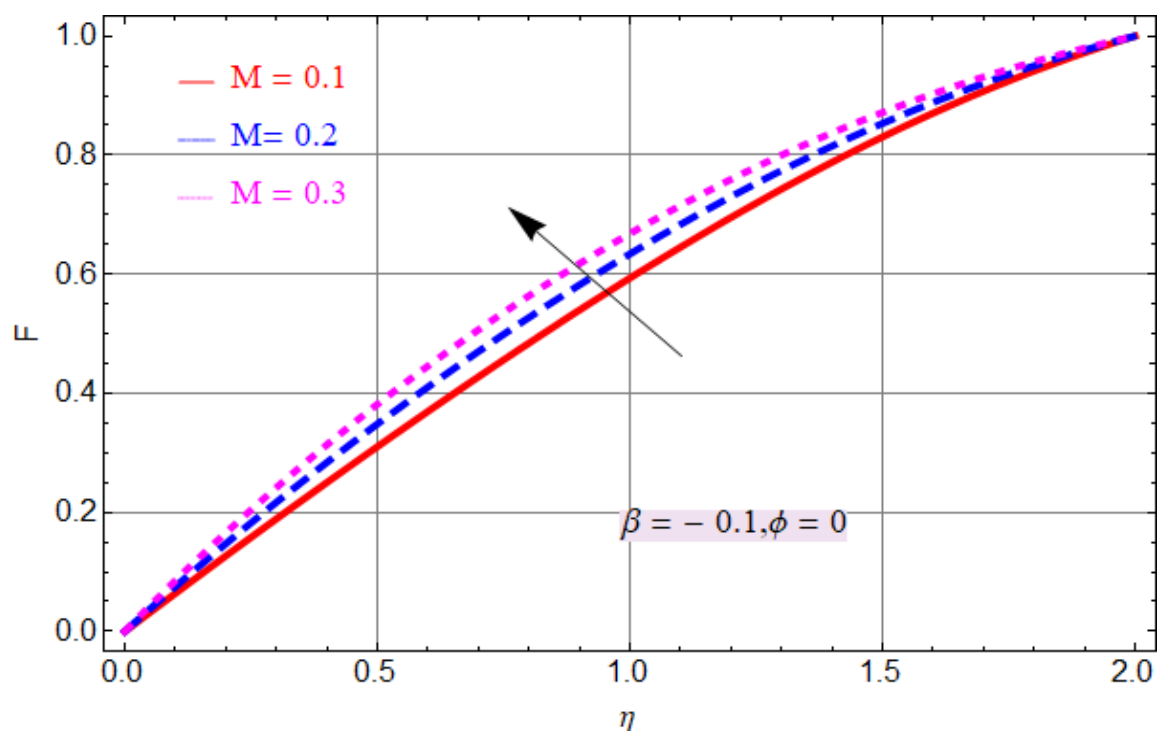


Figure IV.5 Effet du paramètre magnétique M sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)

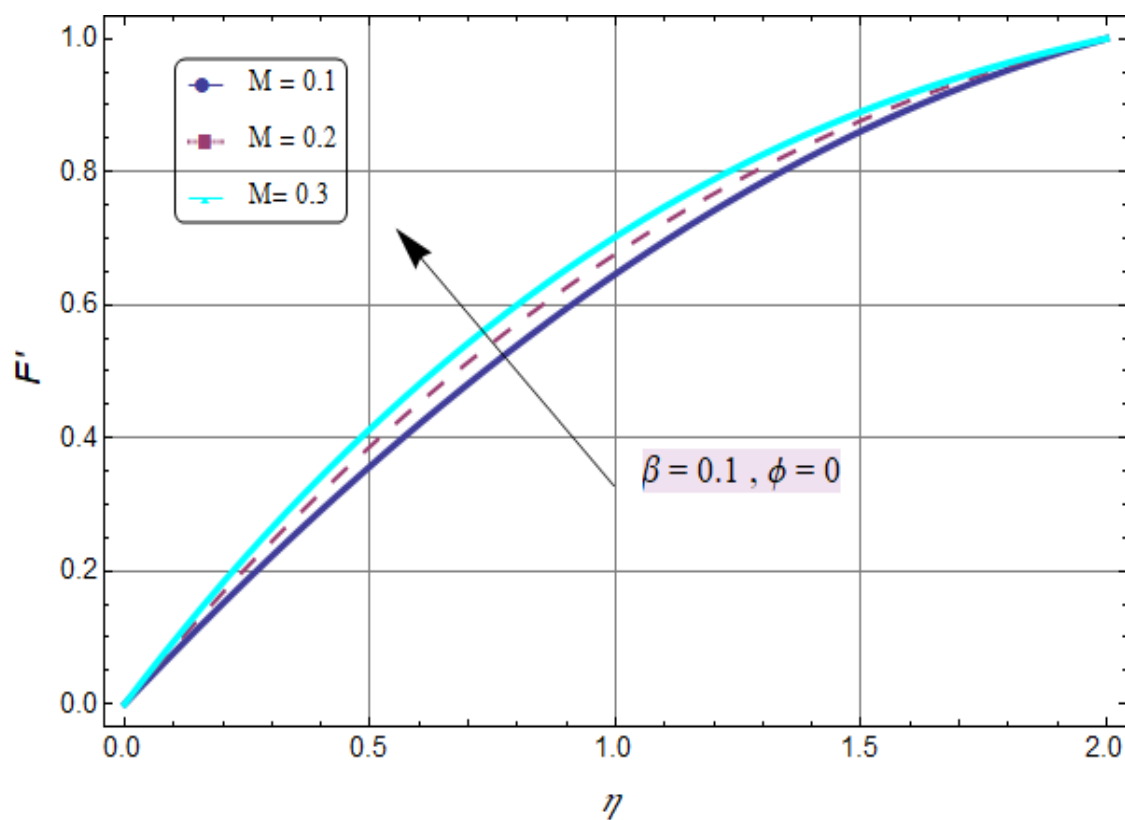


Figure IV.6 Effet du paramètre magnétique M sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)

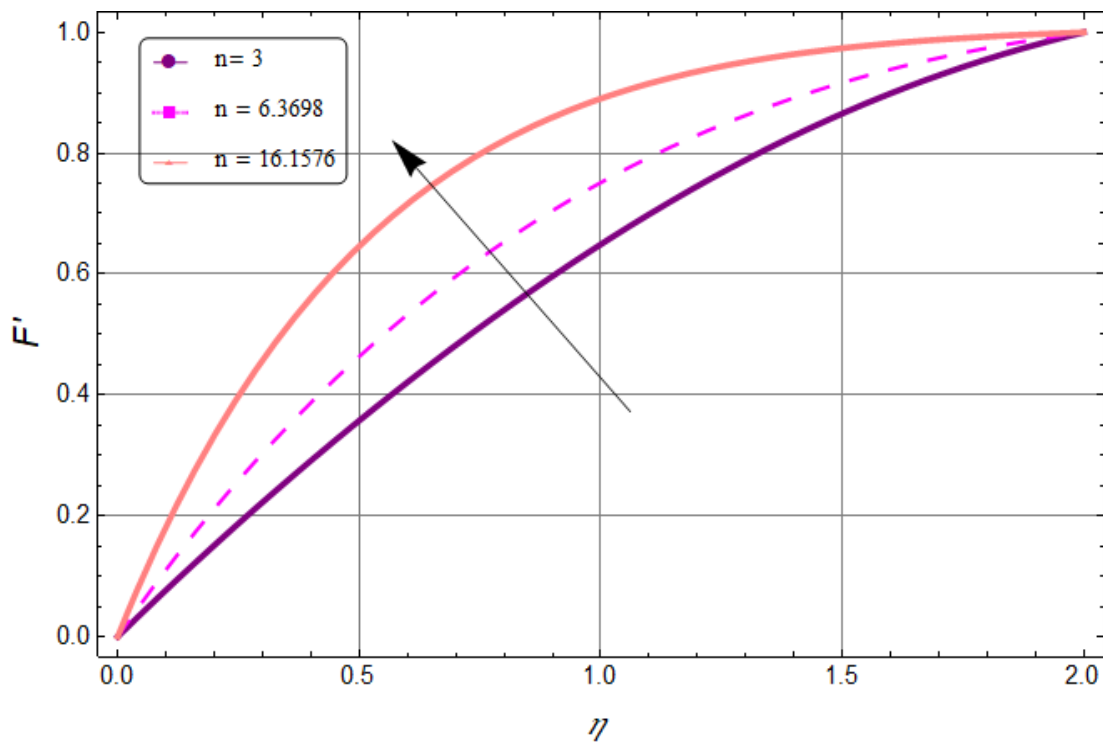


Figure IV.7 Effet du facteur de forme (n) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)

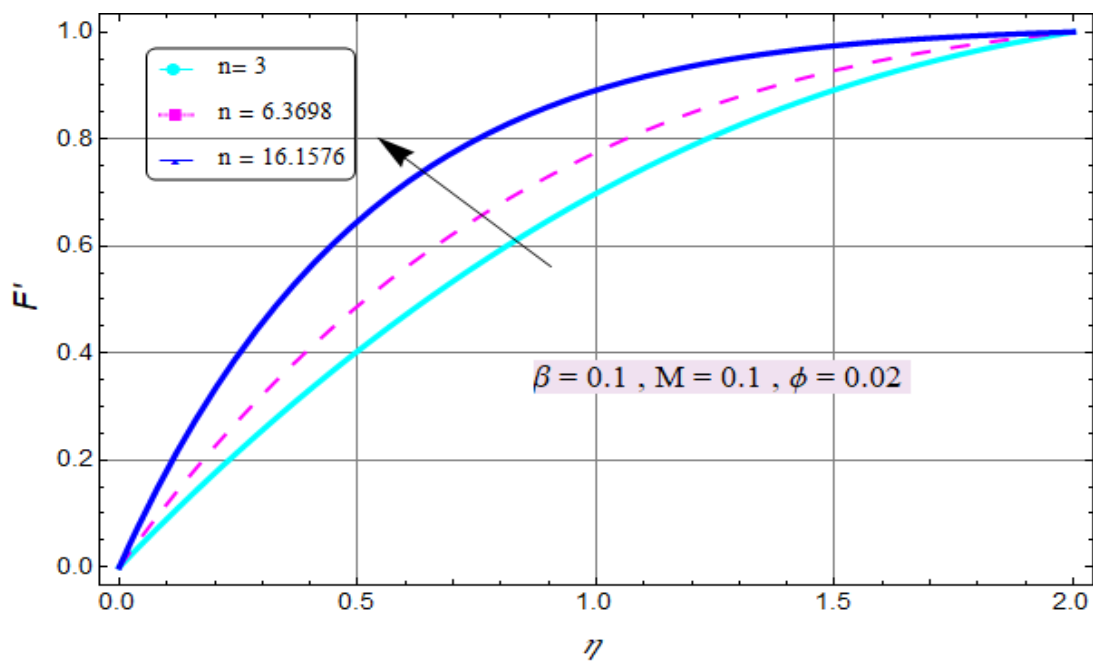


Figure IV.8 Effet du facteur de forme (n) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)

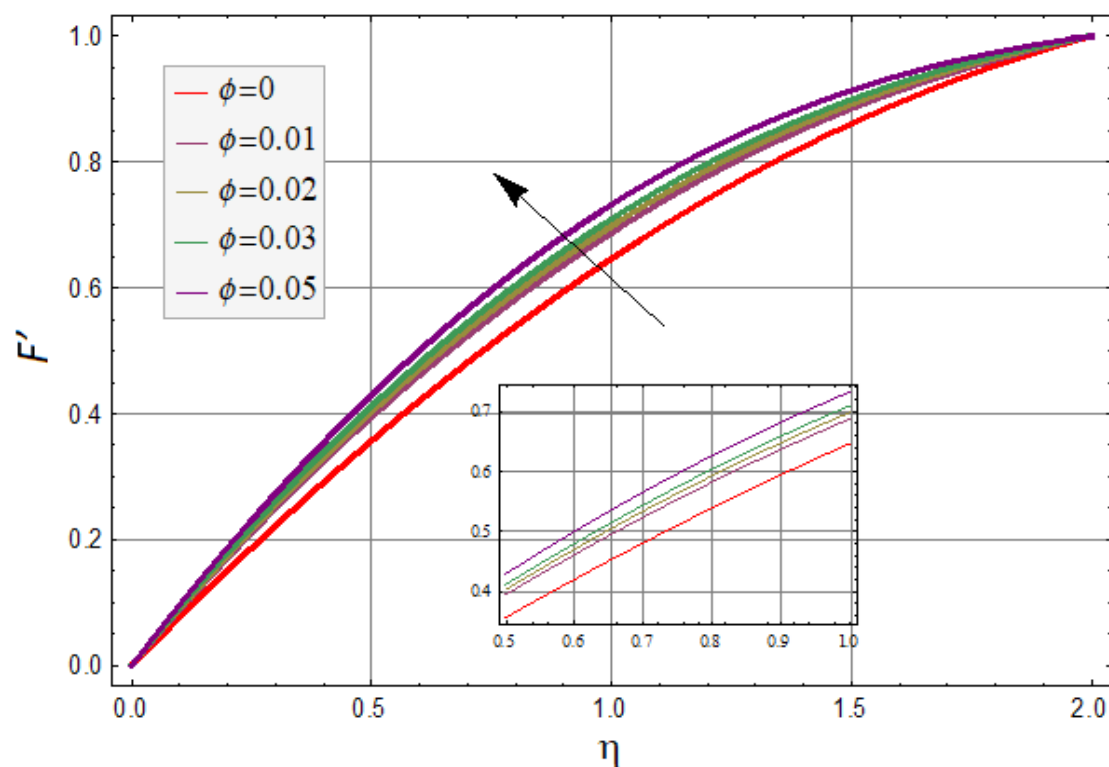


Figure IV.9 Effet de la fraction volumique des nanoparticules (ϕ) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)

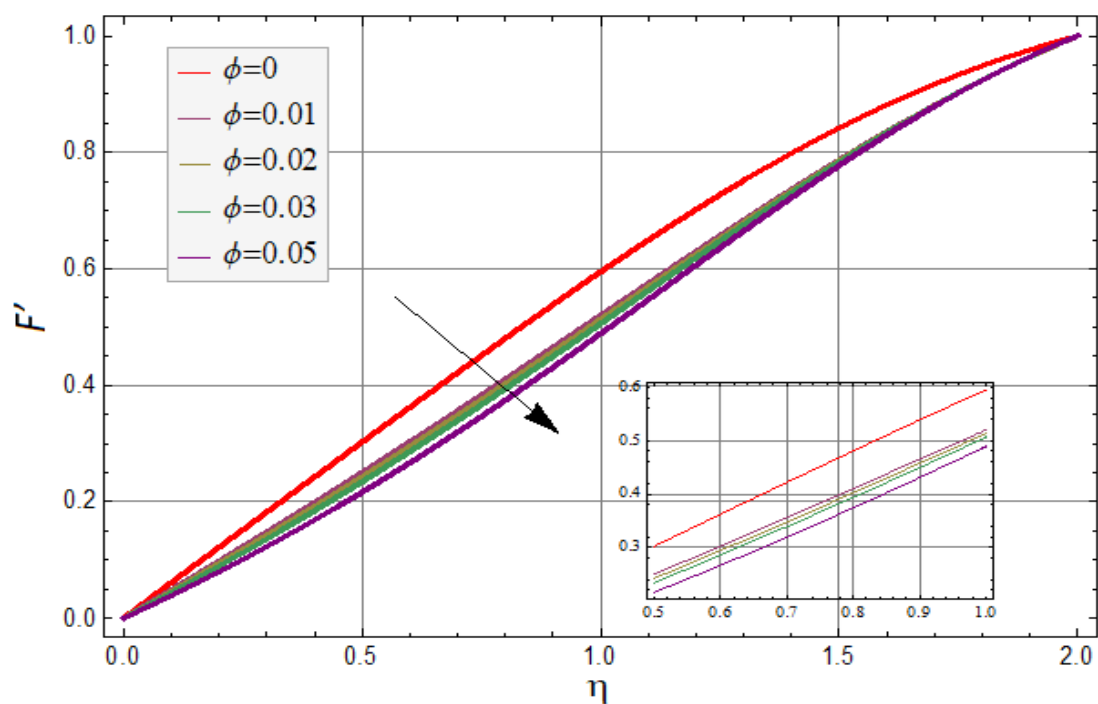


Figure IV.10 Effet de la fraction volumique des nanoparticules (ϕ) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)

Les Figures (IV.1) et (IV.2) montrent l'évolution de la fonction f' pour le cas d'un écoulement MHD pour un nanofluide hybride de type Cu / Al_2O_3 -Kérosène. La fonction f' n'est que la valeur adimensionnée $\frac{u}{U}$ de la distribution de vitesse.

D'après les résultats obtenus (Figures IV.1 et IV.2), on constate que la vitesse croît d'une manière monotone de la valeur ($u=0, f'=0$) sur la paroi jusqu'à la valeur ($u=U, f' = \frac{u}{U} = 1$) au niveau de la frontière de la couche limite. Cette constatation est valable pour tous les cas de figures présentés (IV.1-IV.8).

Pour le cas d'un écoulement accéléré (paramètre du gradient de pression positive ($\beta > 0$)) comme le montre la (Figure IV.1), les résultats visualisés révèlent que la vitesse du nanofluide hybride augmente avec l'augmentation du paramètre β et par conséquent le phénomène de retour d'écoulement est entièrement exclu ce qui donne un profil plus stable. Par contre, la (Figure IV.2) montre un comportement inverse ou la vitesse diminue avec l'accroissement de l'intensité du paramètre du gradient de pression négative ($\beta < 0$) pour le cas d'un écoulement décéléré. Par conséquent, le phénomène de retour d'écoulement est hautement favorisé.

Par ailleurs, comme représenté par la Figure IV.3 (sans présence du champ magnétique, $M=0$), on constate que la vitesse décroît avec l'augmentation du paramètre β et par conséquent le retour d'écoulement apparaît pour des valeurs élevées de β (notamment pour $\beta = -0.9$). Comme le montre la Figure (IV.4), il est bien clair que la présence d'un champ magnétique ($M=0.3$), qui agit comme agent stabilisateur, fait retarder l'apparition du retour d'écoulement. En effet, pour des valeurs élevées du gradient de pression négatif ($\beta = -0.9$), le phénomène de séparation est entièrement disparu.

L'effet du paramètre magnétique M (nombre de Hartmann) sur la vitesse du nanofluide hybride pour les deux régimes d'écoulement : décéléré et accéléré est visualisé par les Figures IV.5 et IV.6. D'après les résultats obtenus, on constate que la vitesse apparaît comme une fonction croissante du paramètre M pour les deux régimes d'écoulement en question. En effet, par application d'un champ magnétique externe, une force qui s'oppose à la direction de l'écoulement, dite de Lorentz, se génère et conduit à la diminution de l'épaisseur de la quantité de mouvement et par conséquent le phénomène de retour se verra notablement exclu. Un champ magnétique a donc un effet stabilisateur et élimine tout défaut susceptible d'apparaître au sein de l'écoulement et en particulier le phénomène de séparation.

Par ailleurs, les Figures IV.7 et IV.8 illustrent l'effet du facteur de forme « n » sur le profil de vitesse. Les résultats sont présentés pour trois formes différentes de nanoparticules : sphère,

colonne et lamina. Il est bien clair que l'interaction entre le fluide de base et les formes des nanoparticules fait croître la température, ce qui réduit la viscosité entre eux et par conséquent l'intensité de la vitesse augmente considérablement avec l'augmentation du facteur de forme (n). Cet accroissement conduit à la diminution de l'épaisseur et la quantité de mouvement et ainsi le phénomène de retour de l'écoulement se verra disparaître.

La Figure IV.9 montre l'impact de la fraction volumique des nanoparticules sur l'évolution de la vitesse du nanofluide hybride dans le cas d'un écoulement accéléré ($\beta=0.1$). Les résultats dessinés indiquent que la vitesse croît au fur et à mesure que la concentration des nanoparticules dans le kérosène augmente, signalant une diminution de l'épaisseur de la couche limite et conduisant à l'élimination du risque d'apparition du phénomène de retour d'écoulement. Par contre un comportement inverse est observé pour le cas d'un écoulement décéléré (Figure IV.10) ou la vitesse décroît avec l'accroissement de la fraction volumique des nanoparticules solides " ϕ ", ce qui fait croître l'épaisseur de la couche limite et par conséquent le phénomène de retour d'écoulement est hautement favorisé.

IV.3. Évolution du coefficient de frottement :

Les Figures IV.11 et IV.12 montrent l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la fraction volumique des nanoparticules dans le cas des écoulements accéléré et décéléré respectivement. Les résultats obtenus révèlent qu'au fur et à mesure que la concentration des nanoparticules augmente, le coefficient de frottement augmente (ce coefficient est caractérisé par l'évolution de la constante $f''(0)$). En effet, cette augmentation est un bon signe du fait qu'elle ne favorise pas l'apparition du phénomène de séparation. Par ailleurs, un comportement tout à fait similaire est observé dans les Figures IV.13 et IV.14. Le coefficient de frottement est une fonction croissante du paramètre magnétique M , ce qui est un bon indicateur sur la disparition du phénomène de séparation. Il est bien clair que la présence d'un champ magnétique a un effet bénéfique sur l'écoulement des nano-fluides en le rendant plus stable

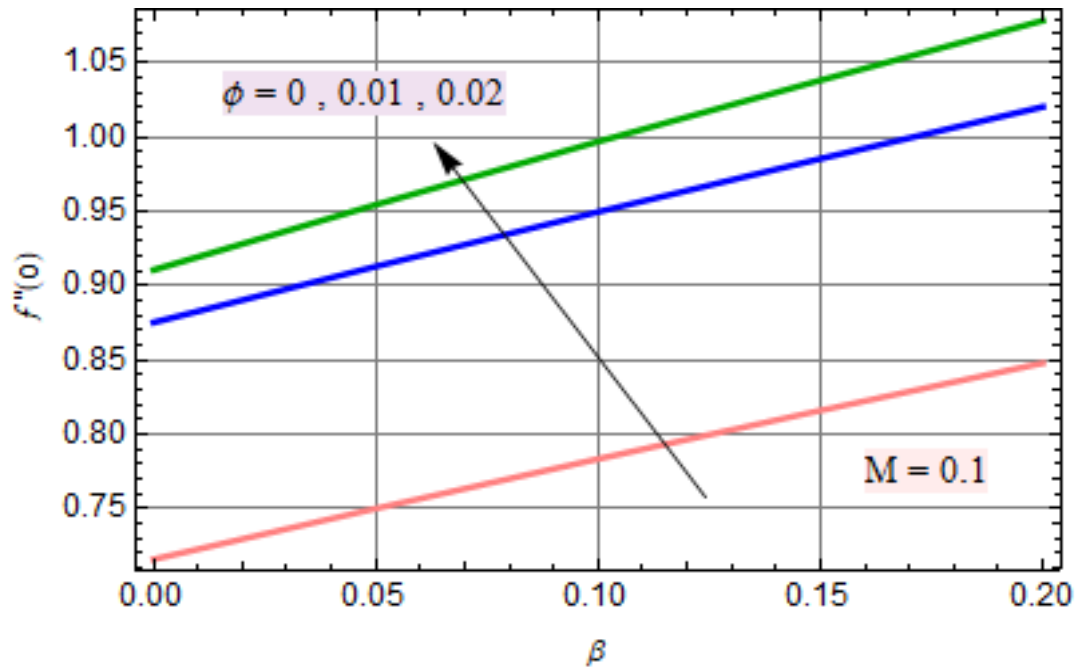


Figure IV. 11 Évolution du coefficient de frottement $f'''(0)$ en fonction de ϕ et β (écoulement accéléré)

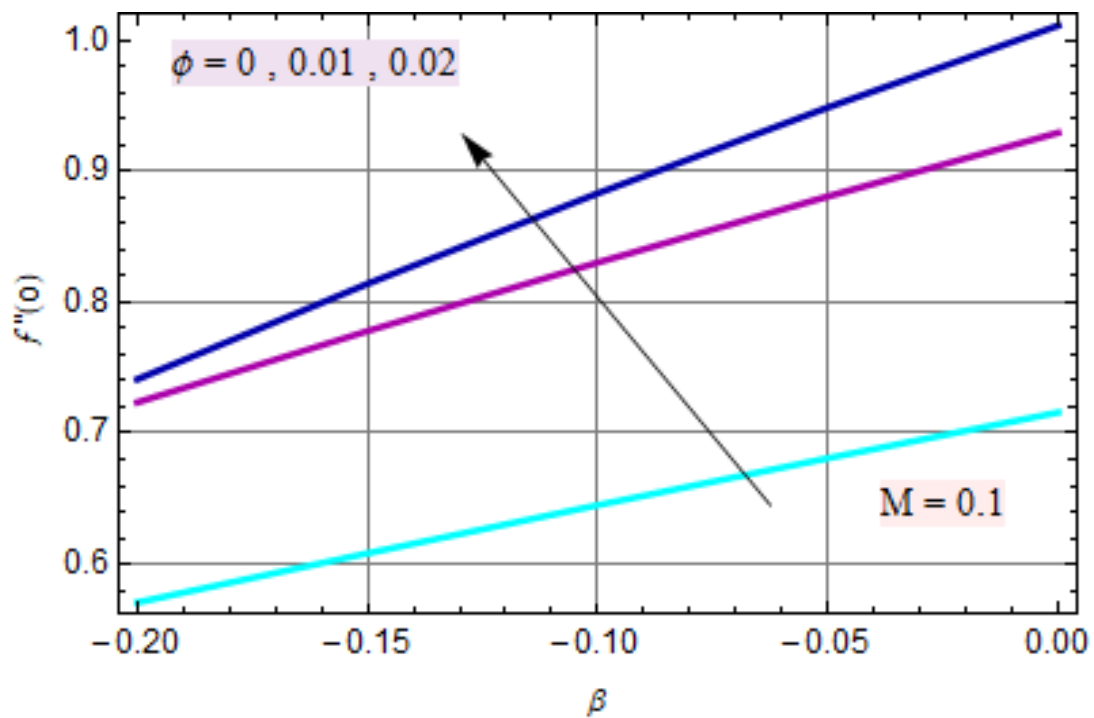


Figure IV.12 Évolution du coefficient de frottement $f'''(0)$ en fonction de ϕ et β (écoulement décéléré)

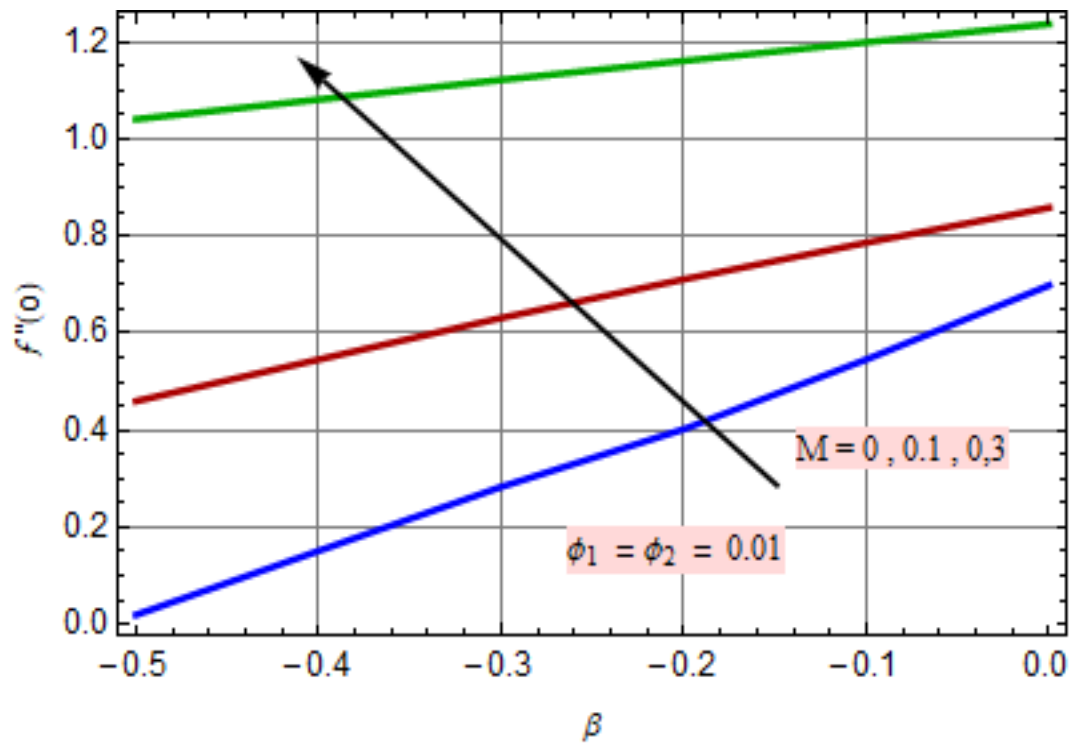


Figure IV.13 Évolution du coefficient de frottement $f'''(0)$ en fonction de M et β (écoulement décéléré)

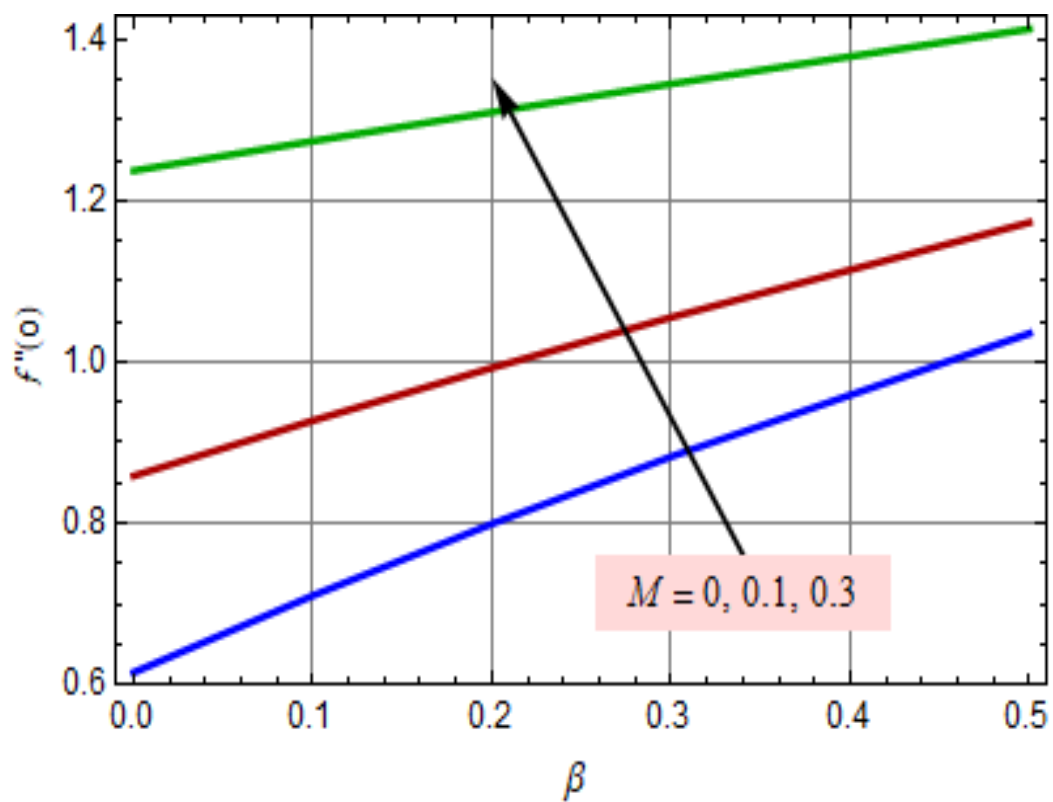


Figure IV.14 Évolution du coefficient de frottement $f'''(0)$ en fonction de M et β (écoulement accéléré)

IV.4. Comparaisons :

Comparaison avec la méthode numérique RK4 :

Afin d'évaluer l'efficacité et la robustesse de la méthode semi-analytique d'Adomian (ADM) utilisée dans cette étude, une comparaison a été effectuée avec la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4), considérée ici comme référence. Le code correspondant à la méthode RK4 est disponible dans la bibliothèque du logiciel *Mathematica*. Cette comparaison porte sur les valeurs du coefficient de frottement $f''(0)$, en fonction du gradient de pression (β) et du paramètre magnétique (M), dans les régimes d'écoulement accéléré et décéléré. Les résultats, présentés dans les Tableaux IV.1, IV.2 et IV.3, mettent en évidence une bonne concordance entre les solutions obtenues par l'ADM et celles issues de la méthode numérique RK4. Cette concordance est confirmée par les faibles valeurs de l'erreur absolue, calculée selon la formule suivante :

$$ERR = |f''_{ADM} - f''_{NUM}|$$

Tableau IV. 3 : Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas d'un nanofluide de type Cu/Al₂O₃ ($M=0.1$; $\phi_1=\phi_2=1\%$)

η	RK4	ADM	$E = f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	-2.71051×10^{-20}	0	-2.71051×10^{-20}
0.25	0.21388425880503306`	0.23873973501897486	-0.024855476213941796
0.5	0.3997457635130587	0.43680868504745185	-0.03706292153439317`
0.75	0.5593978002425551	0.5992524132164869	0.03985461297393178
1	0.6935806262873176`	0.7295789163522018`	0.0359982900648842
1.25	0.8029492872212587`	0.8309831262627081`	0.028033839041449404
1.5	0.8887955061942981	0.9070370778955633	0.004236772372356756`

Tableau IV.4: Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas d'un nanofluide de type Cu/Al₂O₃ ($\beta = -0.3$; $M = 0.1$; $\phi_1 = \phi_2 = 0\%$)

η	RK4	ADM	$E = f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	1.35525271560688 $\times 10^{-20}$	0	$1.35525271560688 \times 10^{-20}$
0.25	0.12563725549752125	0.12563726941812234	$1.392060108851289 \times 10^{-8}$
0.5	0.25651975539455746	0.2565197715348887	$1.614033123820135 \times 10^{-8}$
0.75	0.391964411409761	0.3919643997767887	$1.163297230766247 \times 10^{-8}$
1.	0.5294422739113716	0.5294422507638569	$2.314751468279752 \times 10^{-8}$
1.25	0.6646382413999115	0.6646382046889793	$3.671093218304833 \times 10^{-8}$
1.5	0.7919339464256867	0.7919339243472525	$2.207843419199662 \times 10^{-8}$

Tableau IV.5 : Comparaison du coefficient de frottement $f''(0)$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas d'un nanofluide de type Cu/Al₂O₃ ($\beta = 0.1$, $M = 0.2$; $\phi_1 = \phi_2 = 0\%$)

η	RK4	ADM	$E = f'_{ADM} - f'_{NUM} $
0	0.	0	0
0.25	0.20671053656899735	0.20671064552130827	$-1.089523109232271 \times 10^{-7}$
0.5	0.3871634522962648	0.38716345692968185	$-4.63341703893505 \times 10^{-9}$
0.75	0.5434146707418661	0.5434146892114919	$-1.846962582874312 \times 10^{-8}$
1	0.6765214411840365	0.6765214490480426	$-7.864006112967559 \times 10^{-9}$
1.25	0.7872898692623239	0.787289891450812	$-2.218848804691475 \times 10^{-8}$
1.5	0.8768375720096401	0.8768376603709881	$-8.836134801626372 \times 10^{-8}$

- Validation :

Tableau IV.6 Variation de $f''(0)$ pour diverses valeurs de m avec $M = \phi = 0$

m	$f'' _{\eta=0}$			
	Ashwini ⁴⁴	Ibrahim & Tulu ⁴⁵	Numerical	ADM
0	0.4696	0.4696	0.4696	0.4696
0.0141	0.5046	0.50461	0.50464	0.50464
0.0435	0.569	0.56898	0.56899	0.56899
0.0909	0.655	0.65498	0.65498	0.65498
0.1429	0.732	0.732	0.732	0.732
0.2	0.8021	0.80213	0.80212	0.80212
0.3333	0.9277	0.92765	0.92765	0.92765

Une validation des résultats obtenus pour le calcul de la constante $f''(0)$, caractérisant le coefficient de frottement, avec ceux disponibles dans la littérature a été réalisée. En effet, les résultats semi-analytiques obtenus montrent un excellent accord avec les résultats obtenus par Ashwini et al [44] et Ibrahim & Tulu [45], justifiant d'avantage la robustesse et l'efficacité de la technique adomienne de décomposition adoptée dans ce travail.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Conclusion Générale

Cette étude examine le comportement dynamique de la couche limite laminaire et incompressible dans un écoulement magnétohydrodynamique (MHD) d'un nanofluide hybride se développant à travers un dièdre sous l'effet d'un gradient de pression. Le champ magnétique est appliqué perpendiculairement à la direction de l'écoulement afin d'étudier son interaction avec la vitesse du fluide. Le fluide de base est le kérosène, et les nanoparticules utilisées sont le cuivre (Cu) et l'alumine (Al_2O_3), avec des fractions volumiques variant de 0 à 5 %.

La solution du problème est obtenue à l'aide de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), une approche semi-analytique efficace pour résoudre des équations différentielles non linéaires. Les résultats obtenus illustrent les effets de la fraction volumique des nanoparticules, du type des nanoparticules, de l'intensité du champ magnétique et du gradient de pression sur l'évolution du profil de vitesse et du coefficient de frottement.

Les principales conclusions que l'on peut tirer de cette étude sont les suivantes :

- Le décollement de la couche limite se produit dans un écoulement décéléré, caractérisé par des valeurs négatives du gradient de pression ($\beta < 0$).
- Dans un écoulement accéléré, la vitesse augmente, ce qui conduit à un amincissement de la couche limite, excluant ainsi le phénomène de décollement.
- Le décollement est associé à des valeurs négatives du coefficient de frottement, indiquant un retour d'écoulement.
- Le champ magnétique agit comme un agent stabilisateur, quel que soit le type d'écoulement (accéléré ou décéléré). L'augmentation du paramètre magnétique (nombre de Hartmann, M) entraîne une augmentation de la vitesse et du coefficient de frottement, stabilisant ainsi l'écoulement et en retardant le décollement de la couche limite.
- L'utilisation simultanée des nanoparticules de cuivre et d'Alumine (nanofluide hybride) favorise l'augmentation de la vitesse, conduisant à un écoulement plus stable et empêchant ainsi la séparation de la couche limite dans le cas de l'écoulement accéléré étudié.
- Pour un écoulement décéléré, l'utilisation des nanoparticules de cuivre et d'Alumine agit de manière destructive sur la stabilité de l'écoulement. Le retour d'écoulement peut apparaître avec l'accroissement volumique des nanoparticules utilisées.
- L'impact de l'utilisation simultanée du champ magnétique et des nanoparticules sur l'évolution du coefficient de frottement varie selon deux cas :

Conclusion générale

- Dans un écoulement accéléré, le coefficient de frottement est directement proportionnel à la fraction volumique des nanoparticules (ϕ) et le gradient de pression (β). Dans ce cas, avec l'accroissement de $F''(0)$, le décollement de la couche limite est totalement exclu.
- Dans un écoulement décéléré, le coefficient de frottement est inversement proportionnel à la fraction volumique des nanoparticules (ϕ) et le gradient de pression (β). Dans cette situation, le décroissement de $F''(0)$ peut atteindre des valeurs négatives (changement de sens) fait décoller la couche limite. Ici, le retour d'écoulement est hautement favorisé.
- L'application d'un champ magnétique a un effet stabilisant bénéfique sur la structure de l'écoulement quel que soit sa nature (accéléré ou décéléré). En effet, le décollement de la couche limite est entièrement exclu.
- Les résultats obtenus par le traitement semi-analytique montrent une excellente cohérence avec les méthodes numériques et ceux disponibles en littérature, justifiant ainsi l'efficacité et la fiabilité de la méthode de décomposition d'Adomian (ADM).

Perspectives :

Cette étude offre une analyse approfondie des phénomènes de transport dans les écoulements de nanofluides soumis à des champs magnétiques et à des gradients de pression. Elle ouvre la voie à des applications dans les systèmes de refroidissement et les dispositifs électromagnétiques. Des recherches futures pourraient inclure :

- L'étude du comportement thermique de l'écoulement de la couche limite considérée, visant à visualiser les améliorations apportées aux transferts thermiques, notamment le nombre de Nusselt.
- La validation des résultats analytiques et numériques par des études expérimentales de la littérature caractérisant les nanofluides.

Références Bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] Y. A. Cengel, J. M. Cimbala, Mécanique des fluides Fondements et applications, 2017, Editions De Boeck Supérieur
- [2] S. CANDEL. "Mécanique des fluides". Edition Dunod, Paris, 1995.
- [3] Y. H. Madani, M. Abidat. Etude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour de corps profilés par une méthode combinée d'ordre $O(h^2)$ et $O(h^4)$. Séminaire international de Génie Mécanique. Sigma'02. E.N.S.E.T. Oran. 28-29 Avril 2002
- [4] K. Djafour, A. Ait Moussa, Modélisation de la turbulence : cas de la plaque plane, mémoire de master 2 (énergétique), Année : 2018/2019, Université de Tizi-Ouzou.
- [5] Frank M. White, Fluid mechanics, 1999, 4th edition, McGraw Hill, Inc. New York.
- [6] S. Youcefi, Mécanique des fluides I (Cours et Applications), 2017, USTO Oran.
https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/mdf_sarr.pdf
- [7] https://www.univ-chlef.dz/ft/wp-content/uploads/2020/04/Polycopi%C3%A9_MDF1.pdf
- [8] Ressource électronique : Viscosité – LES FLUIDES.
<https://lesfluides8sciences.weebly.com/viscositeacute.html>
- [9] A. Labdelli, Mécanique des fluides : théorie et applications (polycopié de cours), Département des Classes Préparatoires – ESAM (Mostaganem, Algérie), Année Universitaire : 2021-2022
https://www.esa-mosta.dz/wp-content/uploads/2023/11/A.-POLYCOPIE-MDF_compressed.pdf
- [10] G. K. Batchelor, 1970 An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press
- [11] E. Coustols, Effet des parois rainurées « riblets » sur la structure d'une couche limite laminaire, Mec .Ind, (2001), 2, 421-443.
- [12] I. L. Ryhming, Dynamique des fluides, 2004, Presses polytechniques et universitaires romandes.
- [13] **Latifa SKANDAJI REZG**, Thèse doctorat, Etude de la structure d'une couche limite turbulente soumise à des oscillations transversales de la paroi, école centrale de Lyon, 1997.
- [14] Ahcen Bouguerra, Contribution à l'étude de la couche limite laminaire autour d'un obstacle, Mémoire Master, UBMA, Année : 2014/2015
- [15] Odin BULLIARD-SAURET, Thèse doctorat, Étude expérimentale de l'intensification des transferts thermiques par les ultrasons en convection forcée, CEA/Liten-Grenoble, 2016
- [16] **M Beriache**, Cours MDF, Université Hassiba Benbouali de Chlef, 2019/2020.
https://www.univ-chlef.dz/ft/wp-content/uploads/2020/04/Polycopi%C3%A9_MDF2.pdf
- [17] P. Chassaing, Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours, 2000, CÉPADÈUS, Paris.
- [18] Ressource électronique : **Techno-Science.net** – Définition de la couche limite.
<https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Couche-limite-page-2.html>
- [19] Ressource électronique : StudySmarter.fr – Cours sur la couche limite en mécanique des fluides
<https://www.studysmarter.fr/resumes/ingenierie/mecanique-des-fluides-en-ingenierie/couche-limite>

Références bibliographiques

[20] Ressource électronique : Thermal-Engineering.org – Applications de la théorie de la couche limite.

<https://www.thermal-engineering.org/fr/applications-de-la-theorie-de-la-couche-limite>

[21] Ressource électronique : Cours sur la couche limite dynamique et thermique

<https://lyceedesmetiersparentis.fr/posts/couche-limite-dynamique-et-thermique-21008>

[22] Ressource électronique : Wikipedia – Couche limite atmosphérique

https://fr.wikipedia.org/wiki/Couche_limite_atmosph%C3%A9rique

[23] Ressource électronique : Wikipedia – Turbine de Tesla

https://fr.wikipedia.org/wiki/Turbine_de_Tesla

[24] Ressource électronique: Magnétohydrodynamique.

<https://www.universalis.fr/encyclopedie/magnetohydrodynamique/>

[25] Gladés Bachir, Thèse doctorat, Contribution à l'étude de la convection naturelle dans les nanofluides en configuration de Rayleigh-Bénard, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2010.

[26] A. Behzadmehr, H. Azarkish, An Introduction to the nanofluid, universty of Sistan and Baluchestan, 2000.

[27] R. Saidur, K. Y. Leong, H. A. Mohammad, A review on applications and challenges of nanofluids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 15(3) (2011), 1646–1668. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2010.11.035>

[28] J. Sarkar, P. Ghosh, A. Adil, *A review on hybrid nanofluids: Recent research, development and applications*. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, 43 (2015), 164–177.

[29] A. LAMRI Zeggar, Thèse doctorat, Contribution à l'Etude Théorique des Transferts Thermiques Convectifs dans un Nanofluide. Application aux Modèles Monophasique et Diphasique, Université des Frères Mentouri-Constantine, 2014

[30] **Ressource électronique** : S. FOHANNI, G. POLIDORI, C POPA, Nanofluides et transfert de chaleur par convection naturelle. Université de Reims Champagne-Ardenne, France 2012.

https://www.sft.asso.fr/sites/default/files/evenements/04_JSFT-echangeur-012_GRESPI_Fohanno.pdf

[31] R. L. Hamilton and O. K. Crosser, thermal conductivity of heterogeneous two component systems, *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals* 1(3) (1962), pp.187-191.

[32] H. C. Brinkman, The viscosity of concentrated suspensions and solution, *J.Chem.Phys.*, 20 (1952), pp.571–581.

[33] A. Einstein Investigations on the Theory of the Brownian movement, 1956, Dover Publications, New York.

[34] B. C. Pak, Y. I. Choi, Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles, *Experimental Heat Transfer*, 11(2) (1998), pp.151–170.

[35] **INRS** (1998). *Fiche toxicologique n° 94 : White-spirit*. Cahiers de notes documentaires. Paris : Institut National de Recherche et de Sécurité

Références bibliographiques

https://www.inrs.fr/publications/bdd/fichetox/fiche.html?refINRS=FICHETOX_94

[36] Z. M. Ayissi, Essai d'élaboration et analyse chimico-calorifique d'un biocarburant à base de manioc, Mémoire de master (2007), École normale supérieure d'enseignement technique, Cameron (Douala).

[37] P. DAGAUT, A. EL BAKALI, A. RISTORI, The combustion of kérosène : Experimental results and kinetic modeling using 1 to 3 component surrogate mode fuels, Fuel, vol. 85 (2006), pp. 944-956.

[38] I. SOCHET, F. FAUBERT, P. GILLARD, Combustion et explosion du kérosène : état de l'art, Combustion 1(4) (2001), pp. 229-254.

[39] Ressource électronique : Union française des industries pétrolières. Pétro Dico. Le lexique de l'industrie pétrolière, 2007.

<http://www.ufip.fr> (UFIP : Siège social : 4, avenue Hoche, 75008 Paris).

[40] G. Adomian- Nonlinear Stochastic systems theory and application Inphysics. Kluwer Acad Pub. 1989.

[41] E. A. Awawdah, The Adomian Decomposition Method For Solving Partial Differential Equations, Palestine, 2016.

[42] L. Badreddine, These de doctorat, Contribution à l'étude de l'écoulement de Jeffery-Hamel sous l'effet d'un champ magnétique, Université du 20 Août 1955 Skikda, 2016.

[43] B. Saadoun, Calcul numérique de quelques modèles pour EDP avec conditions non classique, Université Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi, 2009/2010.

[44] G. Ashwini, A. T. Eswara, MHD Falkner-Skan Boundary layer flow with internal heat generation or absorption, Int J Math Comput Sci., 6(5) (2012), pp. 556–559.

[45] I. Wubshet, Tulu Ayele, Magnetohydrodynamic (MHD) boundary layer flow past a wedge with heat transfer and viscous effects of nanofluid embedded in porous media, Math Probl Eng., 2019, 4507852. <http://dx.doi.org/10.1155/2019/4507852>

Liste des Figures

N° Figure	Titre de la figure	page
Figure 1.1	La mécanique des fluides traite des liquides et des gaz en mouvement ou en repos	3
Figure 1.2	Quelques domaines d'application de la mécanique des fluides	5
Figure 1.3	Écoulement d'un courant de fluide initialement uniforme sur une plaque	6
Figure 1.4	Écoulement externe sur une balle de tennis avec sillage turbulent	7
Figure 1.5	Écoulement laminaire, transitoire et turbulent	8
Figure 1.6	Notion de milieu continu	11
Figure 1.7	Comparaison de la viscosité entre l'eau et le miel	13
Figure 1.8	Écoulement de Couette Plan	14
Figure 1.9	Répartition des vitesses des couches du fluide	14
Figure 1.10	La direction d'un fluide dans un tuyau	16
Figure 2.1	Structure de la couche limite	16
Figure 2.2	Développement de la couche limite le long d'un dièdre	17
Figure 2.3	Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane	17
Figure 2.4	Couche limite thermique sur une plaque plane	18
Figure 2.5	Épaisseur conventionnelle de la couche limite	18
Figure 2.6	Déficit de débit et épaisseur de déplacement	19
Figure 2.1	Géométrie de l'écoulement étudié (schéma)	31
Figure IV.1	Effet du gradient de pression positif β sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)	44
Figure IV.2	Effet du gradient de pression négatif β sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)	44
Figure IV.3	Effet du gradient de pression négatif β sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement classique décéléré : $M=\phi=0$)	45
Figure IV.4	Effet du gradient de pression négatif sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré : $M=0.3, \phi=0$)	45
Figure IV.5	Effet du paramètre magnétique M sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)	46
Figure IV.6	Effet du paramètre magnétique M sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)	46

Figure IV.7	Effet du facteur de forme (n) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)	47
Figure IV.8	Effet du facteur de forme (n) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)	47
Figure IV.9	Effet de la fraction volumique des nanoparticules (ϕ) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique accéléré)	48
Figure IV.10	Effet de la fraction volumique des nanoparticules (ϕ) sur la distribution des vitesses au niveau de la couche limite (écoulement hydromagnétique décéléré)	48
Figure IV.11	Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de ϕ et β (écoulement accéléré)	51
Figure IV.12	Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de ϕ et β (écoulement décéléré)	51
Figure IV.13	Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de M et β (écoulement décéléré)	52
Figure IV.14	Évolution du coefficient de frottement $f''(0)$ en fonction de M et β (écoulement accéléré)	52

Liste des tableaux

N° Tableau	Titre de tableau	Page
Tableau I.1	Système d'unités	11
Tableau I.2	Les Avantages et les inconvénients des nano fluides	24
Tableau IV.1	Propriétés thermo-physiques du fluide de base et des différentes nanoparticules.	42
Tableau IV.2 :	facteur de forme.	43
Tableau IV. 3	Comparaison du coefficient de frottement $f''(\mathbf{0})$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas d'un nanofluide de type Cu/Al ₂ O ₃ (M=0.1 ; $\phi_1=\phi_2= 1\%$)	54
Tableau IV.4	Comparaison du coefficient de frottement $f''(\mathbf{0})$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas d'un nanofluide de type Cu/Al ₂ O ₃ ($\beta = -0.3$; M = 0.1 ; $\phi_1=\phi_2= 0\%$)	54
Tableau IV. 5	Comparaison du coefficient de frottement $f''(\mathbf{0})$ obtenu par les méthodes ADM et RK4 dans le cas d'un nanofluide de type Cu/Al ₂ O ₃ ($\beta = 0.1$, M = 0.2 ; $\phi_1=\phi_2= 0\%$)	54
Tableau IV.6	Variation de $f'(0)$ pour diverses valeurs de m avec $M = \varphi = 0$	55