

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Badji Mokhtar - Annaba
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique



Domaine : Electrotechnique
Filière : Génie électrique
Spécialité : Licence 3^{eme} année

Polycopié de cours : Théorie de Champ Electromagnetique
Programme de 3^{eme} année Licence (Génie Electrique) semestre 5

Responsable de l'unité d'enseignement fondamentale UEF31

Tourab Wafa : Maitre conférence B

Email : wtourab@gmail.com

Table de Matière

AVANT –PROPOS

i

Chapitre I - Electrostatiques

1.1 Charge et Interaction	01
1.1.1 La charge électrique	01
1.1.2 Quantification de la charge	01
1.2 La loi de Coulomb	01
1.3 Le champ électrostatique	02
1.4 Principe de superposition	04
1.4.1 Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques	05
1.4.2 Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques	06
1.4.3 Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques	06
1.5 Propriétés du champ électrostatique	07
1.5.1 Le potentiel électrostatique	07
1.5.2 Relation entre champ et potentiel électrostatique	09
1.5.3 Topographie d'un champ électrique	10
1.6 Théorème de Gauss	12
1.6.1 Définition	12
1.6.2 Notion d'angle solide	12
1.6.3 Le flux électrique	12
1.6.4 symétrie et invariance	16
1.6.4.1 Symétries des sources et des effets créés : Principe de Curie	16
1.6.4.2 Invariance de la distribution de charge	17
1.7 Formulation du théorème de Gauss	19

Chapitre 2 – Magnétostatique

2.1 Loi d'Ampère	41
2.2 Direction du champ magnétique (règle de la main droite)	41
2.3 Potentiel Magnétique	42
2.4 Théorème d'Ampère	43
2.5 Théorème de Maxwell –Ampère	44
2. 6 Flux Magnétique	44
2.6.1 Flux élémentaire	44
2.6.2 Flux d'un champ magnétique uniforme à travers une spire	45
2.7 Force de Laplace	45
2.8 Energie Magnétique	47
2.8.1 Définition	47
2.8.2 Énergie du champ électromagnétique.	47

Chapitre 3 : Phénomènes dépendant du temps (Régimes quasi-stationnaires)

3.1 Loi de Faraday	54
3.2 Loi de Lenz	54
3.3 Induction mutuelle et auto-induction	55
3.3.1 Induction mutuelle entre deux circuits fermés	55
3.3.2 Auto-induction	56
3.4 Comparaison entre le régime stationnaire et le régime Quasi-stationnaire	57

Chapitre 4 : Régimes variables -Equations de Maxwell

4.1 Régime variable	58
4.2 Principe de conservation de la charge	58
4.3 Équation locale de conservation de la charge	58
4.4 Loi d'ohm	59
4.4.1 Vecteur densité de courant	59
4.4.2 Convention récepteur - générateur	60
4.4.3 Puissance électrique	61
4.5 Equations de Maxwell	61
4.5.1 Introduction	61
4.5.2 Constantes fondamentales de l'électromagnétisme	62
4.5.3 Equations de Maxwell dans le vide	62

Chapitre 5 : Propagation du champ électromagnétique

5.1 Equation d'onde	65
5.2 Equation de propagation du champ électromagnétique dans le vide	66
5.3 Caractéristiques des ondes planes	67
5.3.1 Définition	67
5.3.2 Caractéristiques des ondes planes	68
5.4 Vitesse et longueur d'onde	68
5.5 Spectre de rayonnement électromagnétique	69

Chapitre 6 : Réflexion et transmission des ondes électromagnétique

6.1 Définition d'une onde électromagnétique	70
6.2 Réflexion et transmission des ondes	70
6.2.1 Réflexion par un conducteur parfait	70
6.2.2 Réflexion par un diélectrique	70
6.3 Ondes guidées	71
6.4 Réflexion et transmission	72

ANNEXE : Analyse vectorielle	74
-------------------------------------	----

Bibliographie	81
---------------	----

AVANT –PROPOS

Ce polycopié de cours est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants du cycle 3^{ème} année licence. Il s'agit d'un cours de théorie de champ. Le but de rédaction de ce manuscrit est de mettre à la disposition des étudiants un outil simple et pertinent pour aborder une partie intégrante dans le domaine de la matière enseignée.

L'ouvrage est formé d'un résumé de cours portant sur l'électrostatique, la magnétostatique, les régimes stationnaires et variables, les ondes électromagnétiques et les équations de Maxwell. Il contient aussi des exercices classiques d'électrostatique et de magnétostatique, des notions qui traitent les connaissances nécessaires de théorie de champ. A la fin une annexe comportant les opérateurs mathématiques utilisés dans les démonstrations et calculs est présentée.

Ce manuscrit de cours théorie de champ a été rédigé conformément aux recommandations du comité pédagogique et destiné aux étudiants du premier cycle universitaire. Nous espérons qu'il leur sera une aide précieuse dans leurs études et qu'il guidera leurs pas dans la compréhension du cours.

Chapitre 1 : Electrostatique

1.1 Charge et interactions électrostatiques

1.1.1 La charge électrique

La charge électrique d'une particule est une grandeur **scalaire** (algébrique) qui caractérise les actions électromagnétiques subies ou exercée par la particule. La **charge** électrique joue dans l'interaction électrostatique le même rôle que joue la **masse** (scalaire positive) dans l'interaction gravitationnelle.

1.1.2 Quantification de la charge

A l'échelle microscopique, l'expérience montre (Millikan, 1913), montre que la charge électrique varie de façon discontinue et se présente par unité sous forme de quantité bien déterminée. On dit qu'elle est quantifiée. Sa valeur est un multiple entier d'une charge qu'on peut prendre comme **charge élémentaire**, notée e . C'est la valeur absolue de la charge de l'électron $e = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Les particules élémentaires, constituants de la matière, ont pour charges:

- électron : $q = -e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- proton : $q = +e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- neutron : la charge est nulle.

L'unité de la charge est le coulomb C dans le SI. (MKSA). C'est la quantité de charge transportée par un courant de 1 Ampère pendant 1 seconde ($Q = I t$).

$$1 \text{ C} = 6,25 \cdot 10^{18} e$$

C'est un nombre élevé de particules. Dans la pratique, on utilise le mC et le μC .

1.2 La loi de Coulomb

Considérons **dans le vide**, deux **charges ponctuelles** q_1 et q_2 , **fixées** en M_1 et M_2 . Les deux charges **stationnaires** q_1 et q_2 exercent l'une sur l'autre une force proportionnelle à chacune des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. La force électrostatique est dirigée suivant la droite qui joint les charges (figure I-1). Elle attractive si les charges sont de signes contraires (figure I-1-a), répulsive lorsque les charges sont de même signe (figure I-1-b).

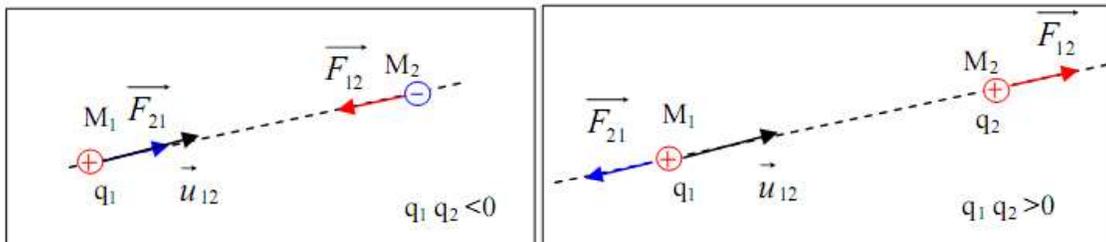


Figure 1-a

Figure 1-b

La force \vec{F}_{12} exercée par q_1 sur la charge q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad (1)$$

où r est la distance entre q_1 et q_2 et \vec{u}_{12} le vecteur unitaire défini par :

$$\vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{r}$$

Conformément au principe de l'action et de la réaction, la force F_{21} exercée par q_2 sur

la charge q_1 est égale et opposée à \vec{F}_{12} :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

La constante de proportionnalité est liée aux unités choisies pour exprimer la force, la longueur et la charge. Dans le système d'unités international (S.I.), sous sa forme rationalisée, K s'écrit :

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 910^9 \text{ SI } (V m / C)$$

Où ϵ_0 est la permittivité du vide et a pour valeur :

$$\epsilon_0 = 8,85410^{-12} \text{ F m}^{-1}$$

1.3 Le champ électrostatique

Considérons la force F définie par (I-4). Divisons l'expression (I-4) par la charge q . Nous obtenons une grandeur vectorielle qui dépend de la structure des n charges et de la position du point M : cette grandeur est appelée le champ électrostatique, $E(M)$, crée au point M par le système de charges $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixées en $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$.

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|^3} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \quad (5)$$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ qui résulte de \vec{F} est la somme vectorielle des champs $\vec{E}_i(M)$ créés par les charges q_i :

$$\vec{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|} \text{ et } r_i = \|\overrightarrow{P_i M}\|$$

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) \quad (6)$$

Où $\vec{E}_i(M)$ est le champ crée en M par la charge q_i ponctuelle placée en P_i (Figure I-3)

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \quad (7)$$

Nous venons de définir une grandeur vectorielle, fonction du point M, caractéristique du système de charges $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, sources du champ E . En chaque point de l'espace on fait correspondre un vecteur E , fonction du point considéré (Figure I-3).

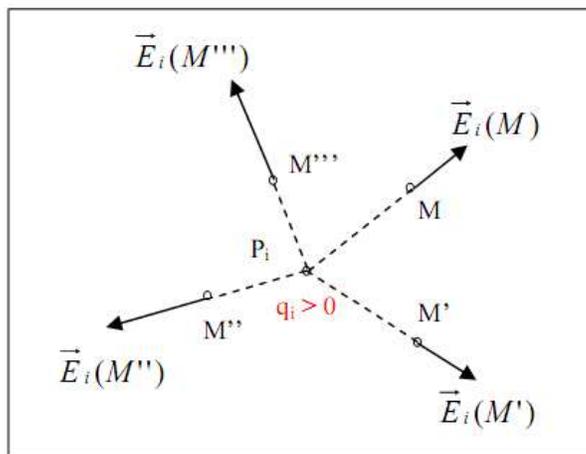
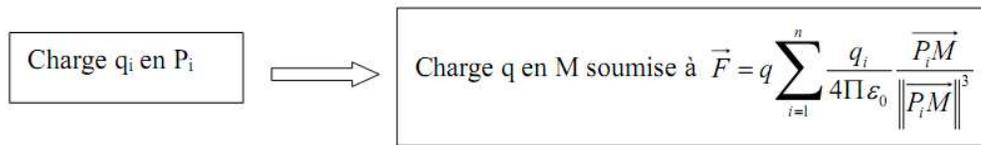


Figure 3

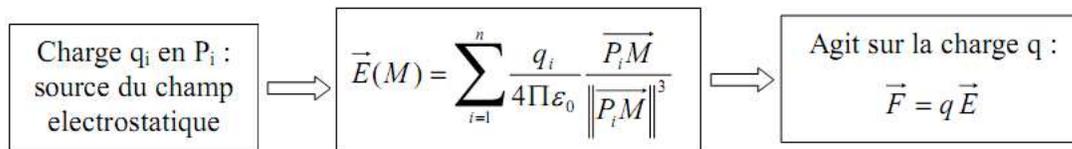
L'ensemble des vecteurs \vec{E} constitue un champ de vecteurs. Le champ \vec{E} étant déterminé, la force \vec{F} que subit une charge q placée en un point M est donnée par la relation :

$$\vec{F} = q\vec{E}(M) \quad (8)$$

L'introduction du champ E aboutit à une nouvelle description de l'interaction électrostatique. Nous avons remplacée l'action à **distance** contenue dans la loi de Coulomb par la notion de champ électrostatique, grandeur locale. Au lieu de considérer les charges q_i et q en présence interagissant par l'intermédiaire de la force de Coulomb:



On exprime le champ \vec{E}_{i_i} créée par la charge q_i dans tout l'espace entourant cette charge. Ce champ existe indépendamment du fait qu'il existe ou non une autre charge q en présence de la charge q_i , source du champ \vec{E}_i . La force F subie par q placée en M résulte de l'existence en ce point d'un champ électrostatique :



1.4 Principe de superposition

Considérons trois charges ponctuelles q_1, q_2 et q **fixées** respectivement en P_1, P_2 et M (Figure I-2).

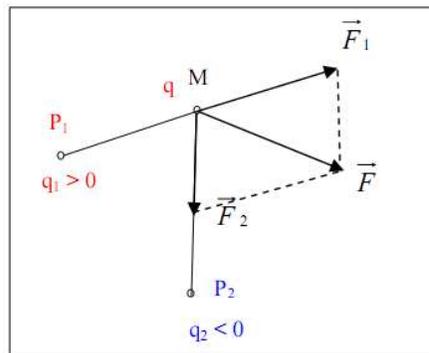


Figure 2

Quelle est la force F que subit la charge q placée en présence des charges q_1 et q_2 ? La loi de Coulomb permet de calculer la force F_1 subie par la charge q lorsqu'elle est uniquement en présence de q_1 . On peut de la même manière calculer F_2 force subie par q lorsque seule q_2 est en présence de la charge q .

L'expérience montre que la force F subit par q lorsqu'elle est en présence des deux charges q_1 et q_2 est la somme vectorielle des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{q q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_1M}}{\|\vec{P_1M}\|^3} + \frac{q q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_2M}}{\|\vec{P_2M}\|^3} \quad (3)$$

Ce résultat est vérifié quel que soit le nombre de charges en présence. La force résultante subie une charge q placée en M , en présence de n chargées $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixées en $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ est la somme vectorielle des forces dues à l'interaction des charges avec q , calculées séparément :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = q \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_iM}}{\|\vec{P_iM}\|^3} \quad (4)$$

Cette expression exprime le principe de superposition. la force totale F due à un ensemble de charges est la somme vectorielle de l'effet de chaque charge prise individuellement. Ce qui suppose que la force s'exerçant entre deux charges n'est pas modifiée par la présence d'une troisième charge

1.4.1 Champ électrique créé par une distribution linéique de charges électriques

On considère une portion de courbe $\Gamma = AB$ portant une densité linéique de charge notée λ (figure 8).

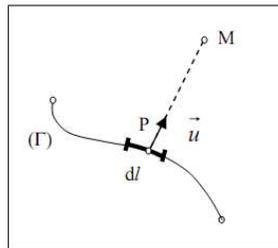


Figure 8

Un élément dl entourant un point P porte une charge : $dq = \lambda dl$

Cette charge crée en M un champ et un potentiel donné par les expressions suivantes :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)dl}{r}$$

avec, $\vec{PM} = \|\vec{PM}\| \vec{u} = r \vec{u}$

1.4.2 Champ électrique créé par une distribution surfacique de charges électriques

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges, on considère une charge dq portée par un élément de surface dS (figure 9).

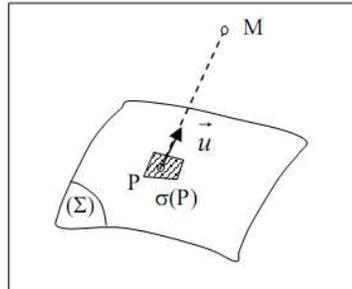


Figure 9

Un élément ds de surface de la couche entourant un point P porte une charge :

$$dq = \sigma dS$$

Le champ créé en M par dq est donné par :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS_P}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS_P}{r}$$

avec, $\vec{PM} = \|\vec{PM}\| \vec{u} = r \vec{u}$

1.4.3 Champ électrique créé par une distribution volumique de charges électriques

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume v ; $\rho(P)$ est la densité volumique de charges en un point P du volume v (figure 10).

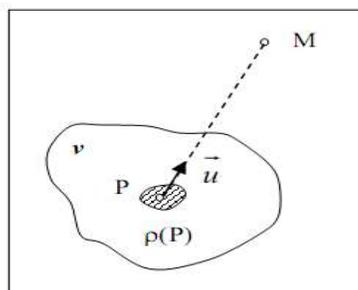


Figure 10

La charge contenue dans l'élément de volume entourant le point P $d\tau_P$ est :

$$dq = \rho(P)d\tau_P$$

Cette charge crée en M un champ $d\vec{E}$ comme le ferait une charge ponctuelle dq placée en P (Figure 1) :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad \text{et} \quad dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

avec, $\vec{PM} = \|\vec{PM}\| \vec{u} = r \vec{u}$ et $dq = \rho(P)d\tau_P$

1.5 Propriétés du champ électrostatique

1.5.1 Le potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique $V(M)$ associé au champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est une fonction scalaire contrairement à \vec{E} . Nous verrons, dans beaucoup de cas, que le potentiel sera un intermédiaire commode dans le calcul du champ vectoriel $\vec{E}(M)$. Le potentiel se rattache physiquement à la notion d'énergie potentielle, d'où son appellation.

➤ a/ cas d'une charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle $q (>0)$ fixée en P et un point M de l'espace (figure 1) :

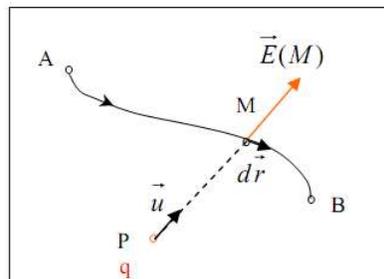


Figure 1

La circulation élémentaire dC du champ E correspondant à un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ point M sur la courbe AB est :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Or, $d\vec{r} = d(\overrightarrow{PM}) = d(r\vec{u}) = dr\vec{u} + r d\vec{u}$ et $d\vec{r} \cdot \vec{u} = (dr\vec{u} + r d\vec{u}) \cdot \vec{u} = dr + r d\vec{u} \cdot \vec{u}$

Puisque : $d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$; on a : $d\vec{r} \cdot \vec{u} = dr$

La circulation élémentaire dC s'écrit alors :

$$dC = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}\right) \quad (2)$$

Posons alors ;

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV(r)$$

V est le potentiel électrostatique $V(M)$ créée par la charge q fixée en M :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cste \quad (3)$$

Nous venons de définir un nouveau champ, le potentiel électrostatique ; c'est un champ scalaire défini à une constante près. On choisit en général la valeur de la constante de telle sorte que le potentiel soit nul lorsque le point M est infiniment éloigné de la charge :

$V(r \rightarrow \infty) = 0$. Dans ce cas, la constante est nulle et le potentiel s'écrit :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4)$$

➤ **Cas d'une distribution de n charges ponctuelles :**

Soient n charges ponctuelles $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixés aux points $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$. Soit M un point de l'espace..

La circulation élémentaire dC_i du champ \vec{E}_i créée par la charge q_i seule est donnée par :

$$dC_i = \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -dV_i(r)$$

$$\text{Avec } \vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{\|\overrightarrow{P_iM}\|^3} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \text{ et } \overrightarrow{P_iM} = r_i \vec{u}_i$$

Ainsi, le potentiel électrostatique $V_i(M)$ dû à la charge q_i .

$$V_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

$$\text{avec: } r_i = \|\overrightarrow{P_iM}\|$$

Le potentiel $V(M)$ dû à l'ensemble des n charges est la somme des potentiels en application du principe de superposition :

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \quad (5)$$

Remarque : Dans cette relation, nous avons choisi la constante nulle pour chaque potentiel V_i créée par la charge q_i ; ceci n'est pas valable que si les charges q_i sont réparties dans un volume fini.

1.5.2 Relation entre champ et potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique a été défini à partir de la circulation élémentaire du champ \vec{E} :

$$dC = \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV$$

Or,

$$dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\vec{r}$$

d'où la relation entre \vec{E} et V :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}V}(M) \quad \text{: relation locale} \quad (6)$$

Le champ électrostatique \vec{E} dérive du potentiel scalaire V . Cette relation implique des conditions de continuité et de dérivabilité sur la fonction $V(M)$. l'unité du potentiel électrostatique dans le système MKSA est le Volt (V). D'après la relation qui lie le champ électrostatique \vec{E} et le potentiel électrostatique V , l'unité du champ électrostatique est le Volt par mètre (V/m).

La circulation C_{AB} du champ \vec{E} le long du contour AB est :

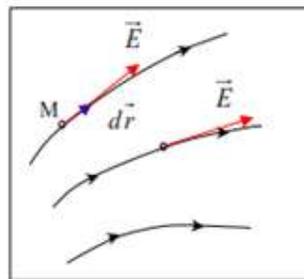
$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (7)$$

- La circulation du champ de vecteur \vec{E} , le long de AB, est donc égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$.
- La circulation de \vec{E} est nulle le long de tout contour fermé.

1.5.3 Topographie d'un champ électrique

- Lignes de champ

Pour avoir une idée sur l'allure du champ \vec{E} , on trace les lignes de champ, c'est à dire les courbes tangentes en chaque point au vecteur \vec{E} défini en ce point. Ces courbes sont orientées par convention dans le sens du vecteur.

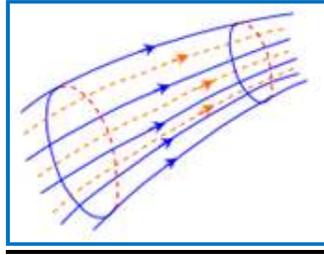


Soit M un point d'une ligne de champ et $d\vec{r}$ le vecteur déplacement élémentaire sur une ligne de champ (Figure 3) Puisque \vec{E} et $d\vec{r}$ sont colinéaires, les équations des lignes de champs sont données par :

$$d\vec{r} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (9)$$

- Tube de champ :

L'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de champ (Figure 5)..



- **Surface équipotentielle :**

Ce sont des surfaces d'équation $V = \text{cste}$, c'est à dire d'égal potentiel.

D'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}$, le champ \vec{E} est normal aux surfaces équipotentielle et dirigé vers les potentiels décroissants (sens le signe moins dans cette relation, \vec{E} est dirigé vers les potentiels croissants (cas d'une charge ponctuelle positive). Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en O, point où se trouve la charge.

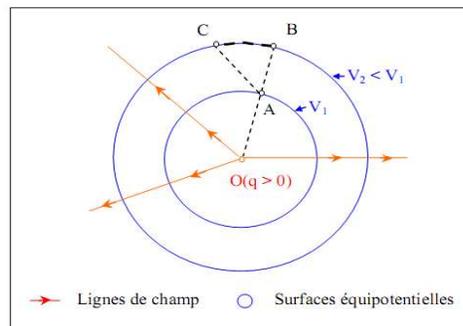


Figure 6

NB : La direction du champ E , c'est à dire du gradient de V est la direction de la normale aux surfaces équipotentielles, celle où V varie le plus rapidement ; il est clair que pour passer de la valeur V_1 à la valeur V_2 , le chemin le plus court est le segment AB .

1.6 Théorème de Gauss

1.6.1 Définition

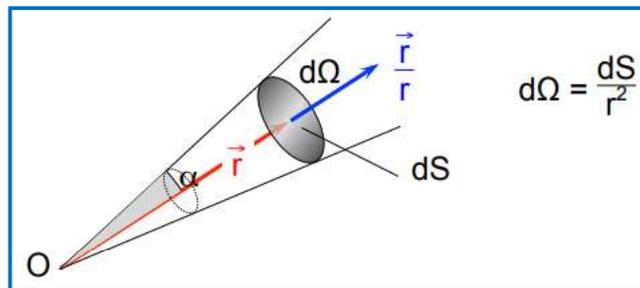
le théorème de Gauss permet de calculer le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée connaissant les charges électriques qu'elle renferme. Il trouve son utilité pour calculer le champ électrique en un certain point, calcul qui serait plus complexe si la loi de Coulomb était utilisée.

Enoncé :

Le flux du champ électrique à travers une surface S fermée est égal à la somme des charges électriques contenues dans le volume V délimité par cette surface, divisée par la permittivité du vide.

1.6.2 Notion d'angle solide

Extension tridimensionnelle de la notion d'angle définie dans le plan. L'angle solide $d\Omega$, délimité par un cône de demi-angle α coupant un élément de surface élémentaire dS situé à une distance r de son sommet O , vaut :



- $d\Omega$: - est toujours positif
- est indépendant de r puisque $dS \propto r^2$
- s'exprime en stéradian (sr)
- pour tout l'espace, $\theta : 0 \rightarrow \pi$ avec $\Omega = 4\pi$

1.6.3 Le flux électrique

-Flux élémentaire :

Soit une charge ponctuelle $q > 0$ placée en O et M un point de l'espace

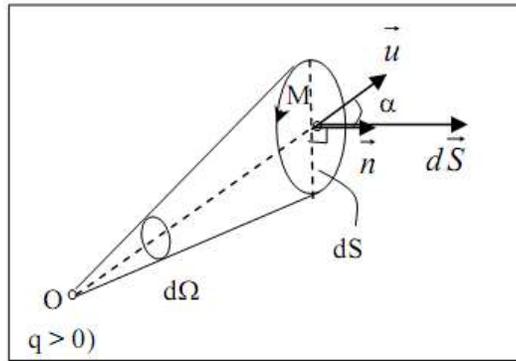


Figure 1

Le champ $E(M)$ créé par q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{r^2}$$

avec, $\vec{u} = \overrightarrow{OM} / \|\overrightarrow{OM}\|$ et $r = \|\overrightarrow{OM}\|$

Soit dS un élément de surface entourant le point M ; orientons la surface dS (figure 1). Le flux élémentaire de \vec{E} à travers la surface orientée est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1)$$

où, $d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{r^2} dS$:

angle solide élémentaire sous lequel du point O on voit la surface élémentaire. Le signe de $d\Omega$ dépend de l'orientation de la surface :

- $d\Omega > 0$ si $\alpha = (\vec{u}, \vec{n}) < \Pi/2$
- $d\Omega < 0$ si $\alpha > \Pi/2$

-Flux sortant à travers une surface fermée

Soit une surface fermée Σ . On se propose de calculer le flux du champ électrostatique \vec{E} créé par une charge ponctuelle q à travers la surface fermée Σ . Plus précisément on s'intéresse au flux sortant, donc on a choisi d'orienter le vecteur \vec{n} dans le sens de la normale sortante à Σ . Deux cas seront envisagés :

- le cas où la charge q est située à l'extérieur de la surface Σ
- et celui où la charge q est située à l'intérieur de la surface Σ

Nous désignons par l'indice i les charges situées à l'intérieur de Σ et par l'indice e les charges extérieures à Σ . Soit \vec{E}_i le champ créé par q_i et \vec{E}_e le champ créé par la charge q_e .

➤ **1^{er} Cas : La charge est située à l'extérieur de Σ**

$$d\Omega_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}_1}{r_1^2} dS_1 = -d\Omega'_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}'_1}{r_1'^2} dS'_1 \quad (2)$$

Si on considère le flux du champ \vec{E}_e créé par la charge q_e située en O , sortant des surfaces dS_1 et dS'_1 , d'après (1) et (2), on obtient :

$$d\Phi_1 + d\Phi'_1 = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_1 + \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} d\Omega'_1 = 0$$

On en conclut que le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'extérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est nul :

$$\Phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_e \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3)$$

➤ **2^{ème} Cas : La charge est située à l'intérieur de Σ**

Le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle située à l'intérieur d'une surface fermée Σ , sortant de la surface Σ est égal à :

$$\Phi_i = \oiint_{\Sigma} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Ainsi, le flux total du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est :

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Cette relation relie le flux à travers une surface fermée (Σ) et les échanges à l'intérieur de cette surface.

-Cas de n charges ponctuelles :

Considérons n_i charges à l'intérieur d'une surface fermée (Σ) et n_e charges situées à l'extérieur de cette surface. Le champ \vec{E} créé par les n charges ($n = n_i + n_e$) est la somme vectorielle des champs créés par chacune des charges :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n_i} \vec{E}_i + \sum_{e=1}^{n_e} \vec{E}_e$$

Le flux du champ \vec{E} sortant de la surface Σ est :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \left(\sum_i \vec{E}_i + \sum_e \vec{E}_e \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \Phi_i + \sum_e \Phi_e$$

D'après (3) et (4), on a :

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0} \text{ et } \Phi_e = 0$$

d'où :

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \text{ avec } , Q_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_i} q_i$$

Le flux sortant de la surface fermée Σ est égal à la somme, divisée par ϵ_0 , des charges intérieures à la surface Σ :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Avec, Q_{int} : charge totale intérieure à Σ (**Ce résultat constitue le théorème de Gauss.**).

1.6.4 symétrie et invariance

1.6.4.1 Symétries des sources et des effets créés : Principe de Curie

➤ **Distribution de charge présentant un plan de symétrie pair (Π) :**

On dit qu'une distribution de charge (D) est symétrique par rapport à un plan Π , si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π

$$\rho'(P') = \rho(P)$$

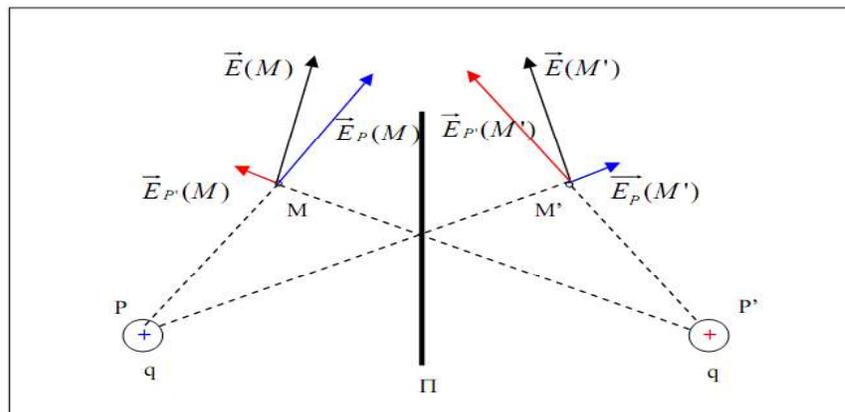


Figure 6

$$\vec{E}(M') = \text{sym} \vec{E}(M) \text{ et } V(M') = \text{sym} V(M)$$

➤ **Distribution de charge présentant un plan de symétrie impair (Π') :**

Une distribution de charge possède un plan de symétrie impair Π' , si pour deux points P et P' symétriques par rapport à Π' , on a

$$\rho'(P') = -\rho(P)$$

Pour illustrer ce cas, nous prenons deux charges q et -q placées en P et P', où P' est le symétrique de M par rapport au plan Π' .

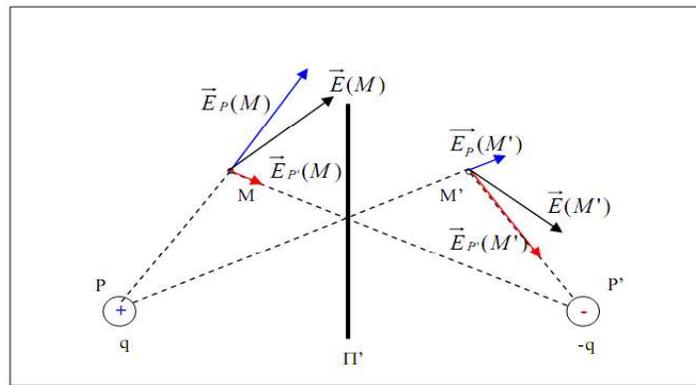


Figure 8

Soit M' un point symétrique de M par rapport à Π' , On peut constater que le champ en M' est l'opposé du symétrique du champ en M :

$$\vec{E}(M') = -\text{sym}\vec{E}(M) \text{ et } V(M') = -\text{sym}V(M)$$

1.6.4.2 Invariance de la distribution de charge

➤ **Invariance par translation le long d'un axe**

Considérons l'exemple d'un fil rectiligne caractérisé par une densité linéique λ uniforme. Si on translate le fil parallèlement à lui même d'un vecteur \vec{T} , la nouvelle distribution D' coïncide avec D (puisque le fil est considéré infini et la distribution de charge est uniforme).

On a :

$$\lambda'(P) = \lambda(P)$$

D'après le principe de Curie, le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ sont inchangés en un point M quelconque de l'espace homogène et isotrope :

$$\vec{E}(M') = \vec{E}(M) \text{ et } V(M') = V(M)$$

➤ **Invariance par rotation autour d'un axe**

Considérons une répartition de charge D de densité volumique uniforme ρ présentant un axe de révolution, c'est à dire si on fait subir à cette distribution une rotation d'angle θ autour de cet axe, la nouvelle distribution D' coïncide avec la précédente (la distribution reste invariante

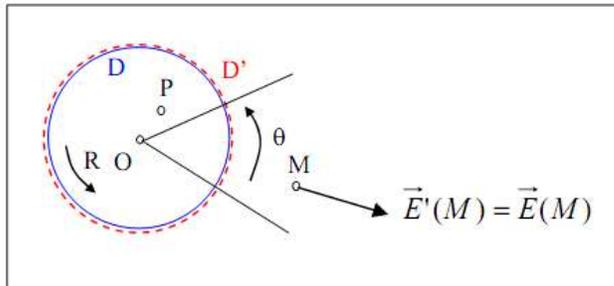


Figure 11-a

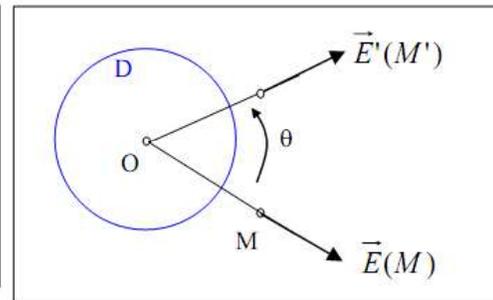


Figure 11-b

$$\rho'(P) = \rho(P)$$

Si on considère un point M' quelconque obtenu par rotation du point M d'un angle θ on aura

$$E'(M') = E(M')$$

1.7 Formulation du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet d'affirmer que le flux électrique mesuré sur une surface fermée quelconque est proportionnel à la charge électrique se trouvant à l'intérieur de la surface en question. de charges génère un champ électrique total respectant le principe de superposition vectoriel :

Soit une surface fermée de forme quelconque contenant une charge totale Q_{int} . Le flux du champ électrostatique à travers cette surface vaut $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$ ce qui s'écrit :

$$\Phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Le théorème de Gauss est un outil très puissant pour déterminer le champ électrostatique mais uniquement pour des distributions de charges possédant des symétries (typiquement sphérique, cylindrique, plane) ce qui sera toujours le cas en classes préparatoires. Les calculs de champs électrostatiques avec des distributions de charges complexes se font

Pour déterminer le champ électrique à partir du théorème de Gauss, il faudra suivre la démarche suivante :

- Déterminer **direction** du champ E à partir des considérations de **symétries** (radiale pour des géométries cylindriques et sphériques, normale pour des géométries planes). Les symétries permettent aussi de réduire le nombre de variables d'espace dont dépend la norme de E .
- Choisir une **surface de Gauss imaginaire** dans la région où l'on souhaite déterminer E . Il faudra que la surface de Gauss possède les mêmes propriétés de symétrie que la distribution de charges et donc que du champ électrostatique.
- Calculer le **flux du champ électrostatique** à travers la surface de Gauss choisie. Le calcul de l'intégrale de surface sera très simple si l'on choisie une surface de Gauss ayant les mêmes symétries que E . La plupart du temps nous allons rencontrer les cas suivants :
 - Sphère de rayon r
 - Un cylindre de rayon r et de longueur L
 - Les deux bases d'un cylindre de base A

Calculer la **charge intérieure** à la surface de Gauss Q_{int} . Il faudra calculer Q_{int} avec la densité de charge appropriée :

- Densité linéique
 - Densité surfacique
 - Densité volumique
- Appliquer le **théorème de Gauss** et en déduire E .

Calcul de la force et du champ électrostatiques créés par des charges ponctuelles

1-Force électrostatique créée par des charges ponctuelles identiques aux sommets d'un carré en chaque sommet du carré

1 Enoncé

Quatre charges ponctuelles identiques $-q$ ($q > 0$) sont fixées aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté a . Une cinquième charge $q_0 > 0$ est maintenue fixe au centre O du carré. Déterminer la valeur de q_0 en fonction de q pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle.

1 Solution

La force électrostatique $\vec{F}(O)$ exercée par les quatre charges identiques $-q$ sur la charge q_0 est nulle quelle que soit la valeur de q_0 . Il reste à évaluer la force totale exercée sur chacune des charges $-q$, par exemple la charge placée en A (figure 1).

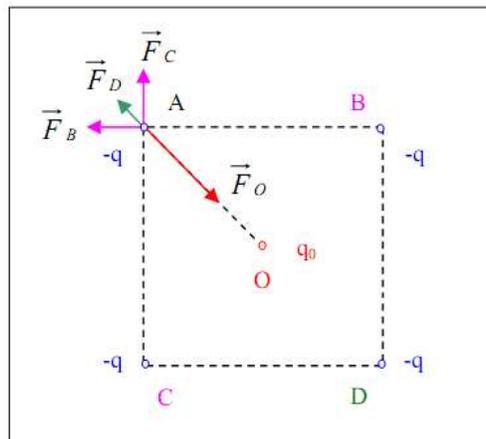


Figure 1

D'après le principe de superposition :

$$\vec{F}(A) = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_O = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3} + \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|^3} + \frac{\vec{DA}}{\|\vec{DA}\|^3} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|^3}$$

Or,

$$* \|\vec{BA}\| = \|\vec{CA}\| = a$$

$$* DA^2 = AB^2 + BD^2 = 2a^2 \text{ ainsi, } \|\vec{DA}\| = \sqrt{2} a$$

$$* OA = \frac{DA}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

Ainsi,

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \left(\vec{BA} + \vec{CA} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \vec{DA} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 \vec{OA}$$

$$\text{Or, } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3} \left(\vec{BA} + \vec{CA} + \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{DA} \right) - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} 2\sqrt{2} \vec{OA}$$

$$\text{Puisque : } \vec{BO} = -\vec{CO}$$

$$\vec{BA} + \vec{CA} = (\vec{BO} + \vec{OA}) + (\vec{CO} + \vec{OA}) = 2\vec{OA} ; \vec{DA} = 2\vec{OA};$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(q\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 2\right) - q_0 2\sqrt{2} \right) \vec{OA} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(q\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - q_0 2\sqrt{2} \right) \vec{OA}$$

La force $\vec{F}(A)$ est nulle lorsque :

$$q\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - q_0 2\sqrt{2} = 0$$

Ainsi,

$$q_0 = q \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = q \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$$

2 - Champ électrostatique créée par des charges ponctuelles identiques aux sommets d'un triangle au centre géométrique du triangle

2 Enoncé

Déterminer le champ électrostatique créée par trois charges ponctuelles identiques $q > 0$ placées aux sommets d'un triangle équilatéral, en son centre géométrique G.

2 Solution

D'après le principe de superposition, on a (figure 1):

$$\begin{aligned}\vec{E}(G) &= \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{AG}}{\|\vec{AG}\|^3} + \frac{\vec{BG}}{\|\vec{BG}\|^3} + \frac{\vec{CG}}{\|\vec{CG}\|^3} \right)\end{aligned}$$

$$\text{Or, } \|\vec{AG}\| = \|\vec{BG}\| = \|\vec{CG}\|$$

$$\vec{E}(G) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BG}\|^3} (\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG})$$

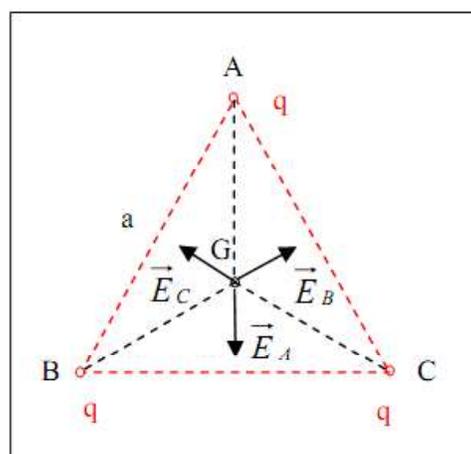


Figure 1

Soit, O étant un point quelconque de l'espace.

$$\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} = \vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + 3\vec{OG} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{OG} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \vec{OA}_i$$

$$\vec{E}(G) = \vec{0}$$

Calcul direct du potentiel et du champ électrostatique créés par une distribution continue de charges

1 Énoncé : Segment de droite uniformément chargé avec la densité linéique

Soit un segment AB uniformément chargé avec une densité linéique $\lambda > 0$ (figure 1)

On désigne par O le milieu du segment AB. Calculer le champ \vec{E} créée par cette distribution en tout point M sur une distance a de la médiatrice de AB et en un point M appartenant au segment AB.

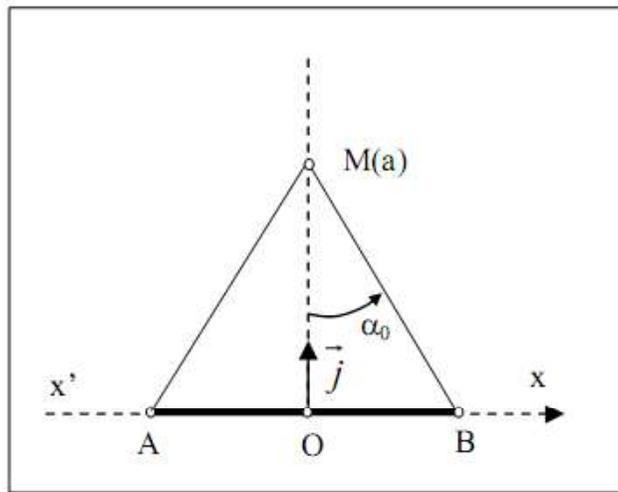


Figure 1

1 Solution

Cas 1 : Le point M est sur la médiatrice de AB

Considérons les points A et B sur l'axe $x'x$ tel que l'origine O soit le milieu de AB (figure 2).

Deux éléments de charges dq_1 et dq_2 , centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à

O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice (OM), par exemple l'axe $y'y$ de vecteur \vec{j} .

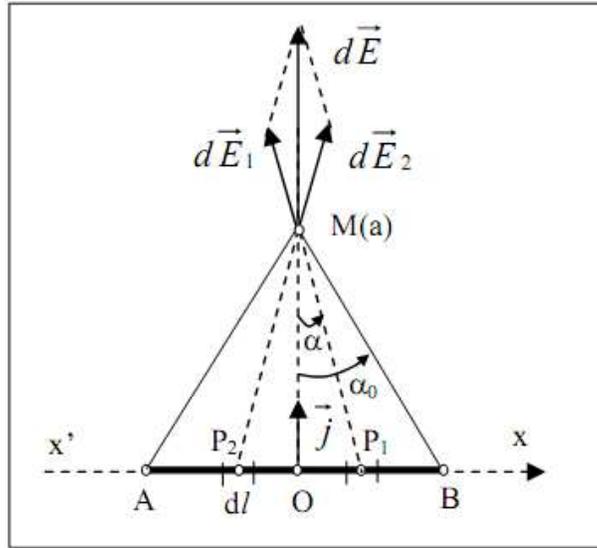


Figure 2

Le champ électrostatique \vec{E} créé par l'ensemble de la charge portée par le segment AB est donc, par raison de symétrie, dirigé suivant l'axe des y. Soit,

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P_1M}}{\|\vec{P_1M}\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}}{\|\vec{PM}\|^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{\vec{u}}{\|\vec{PM}\|^2} \cos\alpha \vec{j}$$

Si on choisit α comme variable d'intégration, on aura :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\epsilon_0} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\cos\alpha}{a} d\alpha \vec{j}$$

avec, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}$

$$dx = a(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

$$\frac{1}{\|\vec{PM}\|^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2}$$

Pour $x = -L$, $\alpha = -\alpha_0$ et pour $x = +L$, $\alpha = \alpha_0$

Soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\epsilon_0 a} \sin\alpha_0 \vec{j} = \frac{\lambda}{2\Pi\epsilon_0 a} \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} \vec{j}$$

Cas limite

- Si le point M est très éloigné de l'origine O ($a \gg L$), on a :

$$\sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}} \cong \alpha_0 \cong \frac{L}{a}$$

et donc,

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{2\Pi\epsilon_0 a^2} \vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge $Q = 2\lambda L$ concentrée en O.

- Si le point M est très proche du segment ($L \gg a$), on a :

$$\alpha_0 \rightarrow \frac{\Pi}{2}$$

et

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\epsilon_0 a} \vec{j}$$

Cas 2 : Le point M appartient à (AB)

Un élément de charge $dq=\lambda dx$ centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par \vec{i} (figure 3) :

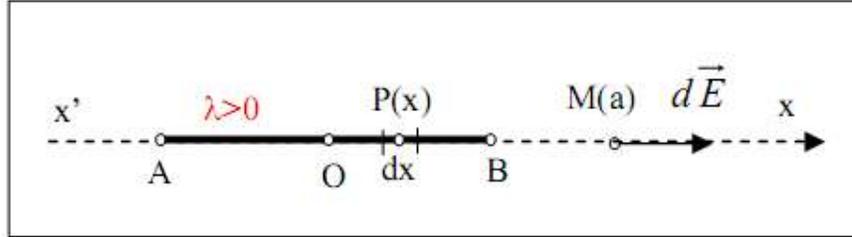


Figure 3

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{i}}{\|\vec{PM}\|^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx}{(a-x)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{dx}{(a-x)^2} \vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{d(a-x)}{(a-x)^2} \vec{i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{L}{(a^2 - L^2)} \vec{i}$$

soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{L}{(a^2 - L^2)} \vec{i}$$

Cas limite

Si le point M est très éloigné du segment [AB] ($a \gg L$), on a :

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{i}$$

C'est équivalent du champ créé en M par une charge $Q=2\lambda L$ concentrée en O.

2 Enoncé : Boucle circulaire portant une charge linéique uniforme

Soit une boucle circulaire de centre O, de rayon R, uniformément chargée avec une densité linéique $\lambda_0=\lambda$ (figure 1). Calculer le champ \vec{E} créée par cette distribution de charges, en un point M de l'axe \vec{z} de la boucle :

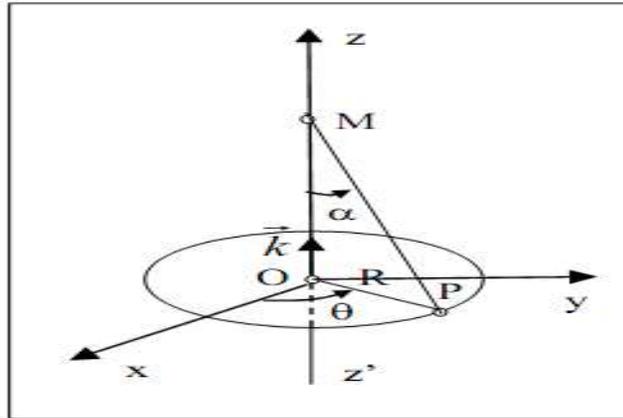


Figure 7

- a) A partir du potentiel électrostatique
- b) Directement

2 Solution

Cas 1 : Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel

Le potentiel $dV(M)$ créé en un point $M(0, 0, z)$ par la charge $dq=\lambda dl$ portée par un élément dl de la boucle entourant P (figure 8) est :

La charge $dq=\lambda_0 dl=\lambda_0 R d\theta$ crée en M le potentiel $V(M)$:

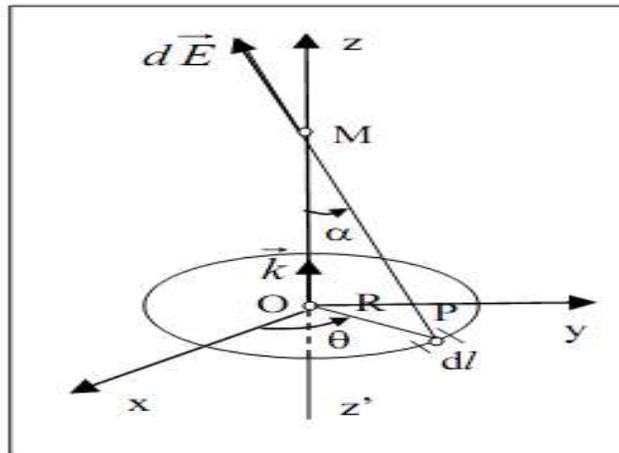


Figure 8

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|} = \frac{\lambda_0 dl}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{PM}\|}$$

avec, $dl = R d\theta$ et $\|\overrightarrow{PM}\| = (R^2 + z^2)^{1/2}$

Le potentiel $V(M)$ est obtenu par intégration sur le contour C de la boucle :

$$V(M) = \oint_C dV(M) = \frac{\lambda_0 R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

Ce qui donne :

$$V(M) = \frac{\lambda_0 R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = V(0,0,z) = V(0,0,-z)$$

Le champ $\vec{E}(M)$ est déduit du potentiel par dérivation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) = -\frac{dV}{dz} \vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = \vec{E}(0,0,z) = -\vec{E}(0,0,-z)$$

Cas 2 : Calcul direct du champ en un point $M(0,0,z)$

Examinons d'abord la symétrie du problème : la distribution présente une symétrie de révolution autour de $\vec{z}'z$. le champ E en un point de l'axe $\vec{z}'z$ est porté par \vec{k} :

La charge $dq = \lambda_0 dl = \lambda_0 R d\theta$ crée en M le champ $d\vec{E}$:

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} = E_z \vec{k}$$

Le champ $\vec{E}(M)$ étant porté par \vec{k} , seule la composante dE_z est à considérer :

$$dE_z = d\vec{E}_z \cdot \vec{k} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_0 R d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{(R^2 + z^2)^{1/2} \cos\alpha}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \text{ avec, } \cos\alpha = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\vec{E}(M) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dE_z \vec{k} = \frac{\lambda_0 R z}{2\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Calcul du champ et du potentiel électrostatique à partir du théorème de Gauss

1- Enoncé : Nappe chargée uniformément en surface

Considérons un plan uniformément avec une densité surfacique $\sigma > 0$ (nappe chargée) de dimension infinie et contenue dans le plan xOy. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

1- Solution

1/ Variable dont dépend \vec{E} et sa direction

La nappe chargée en surface est contenue dans le plan (xOy) comme le montre la figure 1.

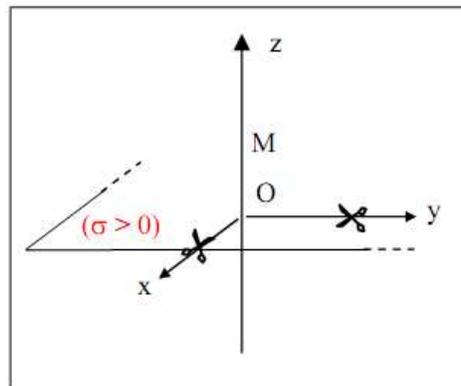


Figure 1

Le plan chargé est invariant par translations suivant Ox et Oy. Le système des coordonnées le plus adapté au calcul de \vec{E} est le système cartésien de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le champ \vec{E} est indépendant de x et y :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$$

- Le plan $\Pi_1 = (M, \vec{j}, \vec{k})$ passant par M et perpendiculaire à (Ox) est un plan de symétrie pair. $\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_y + \vec{E}_z$
- Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{i}, \vec{k})$ passant par M et perpendiculaire à (Oy) est un plan de symétrie

pair. $\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_z$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où :

$$\vec{E} = E(z) \vec{k}$$

De plus, le plan chargé xOy étant un plan de symétrie paire, le champ \vec{E} en un point M' symétrique de M par rapport à ce plan est :

$$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) \text{ avec, } \vec{E}(M') = \vec{E}(-z) = E(-z) \vec{k} \text{ et } \vec{E}(M) = \vec{E}(z) = E(z) \vec{k}$$

$$\text{Ainsi, } E(-z) = -E(z)$$

2/ Calcul du champ électrostatique

Tenant compte de la symétrie de la distribution plane de charge, nous choisissons comme surface fermée Σ le parallélépipède droit, dont les génératrices sont normales au plan chargé, fermé par deux sections droites notées Σ_1 et Σ_2 d'aire S, passant respectivement par M(x, y, z) et par M'(x, y, -z) le symétrique de M par rapport au plan xOy (figure 2).

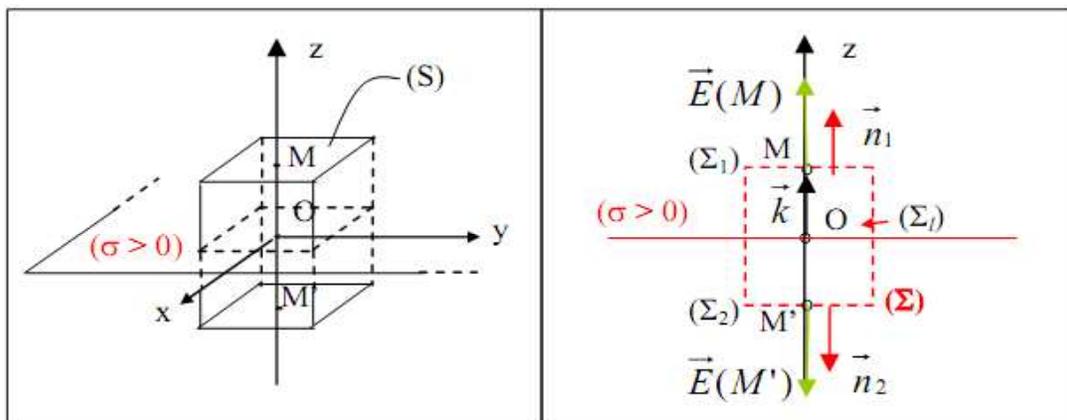


Figure 2

Le flux \vec{E} sortant de la surface latérale Σ_l du cylindre est nul, car en tout point de Σ_l ,

$$\vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}_l = 0$$

Le flux sortant de Σ se réduit au flux sortant de Σ_1 et Σ_2 :

$$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\Sigma}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M') \cdot d\vec{\Sigma}_2$$

$$\Phi = E(z)(\vec{k} \cdot \vec{n}_1) \iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 + E(-z)(\vec{k} \cdot \vec{n}_2) \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2$$

Avec, $(\vec{k} \cdot \vec{n}_1) = 1$; $(\vec{k} \cdot \vec{n}_2) = -1$ et $\iint_{\Sigma_1} d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} d\vec{S}_2 = S$

$$\Phi = [E(z) - E(-z)]S \quad \text{avec } E(-z) = -E(z)$$

$$\Phi = 2E(z)S$$

La charge à l'intérieure de la surface de Gauss est :

$$Q_{\text{int}} = \iint_S \sigma d\vec{S} = \sigma S$$

D'après le théorème de Gauss :

D'où le champ \vec{E}

- pour $z > 0$: $\vec{E} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$
- pour $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k}$

Ces deux résultats peuvent être condensés sous la forme :

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{k} \quad (z \neq 0)$$

Ce résultat peut être retrouvé en choisissant comme surface de Gauss Σ la surface fermée formé par le cylindre droit, dont les génératrices sont normales au plan chargé, fermé par deux sections droites d'aire S , passant par $M(x, y, z)$ et par $M'(x, y, -z)$.

Le champ \vec{E} change de sens à la traversée de la nappe chargée et subit une discontinuité égale à $0 / \sigma/\epsilon_0$ (figure 3).

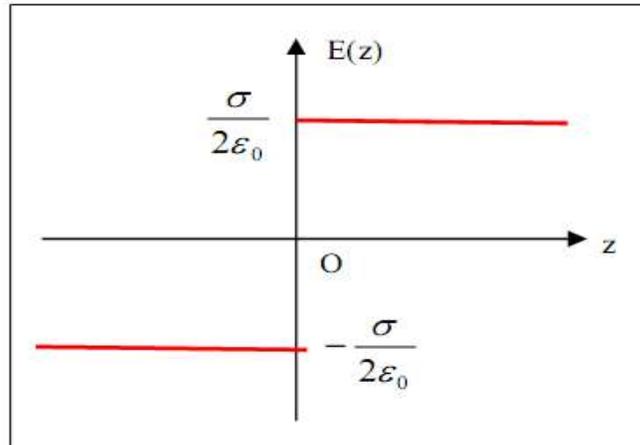


Figure 3

En réalité, il n'existe pas de distribution plane de dimensions infinies. Cependant, la distribution plane est considérée comme infinie si on ne considère que des points placés loin des bords de la distribution, c'est à dire des points dont la distance à la surface chargée est petite par rapport aux dimensions de celle-ci.

3/ Calcul du potentiel électrostatique $V(M)$

En choisissant l'origine des potentiels dans le plan xOy : $V(z=0)=0$

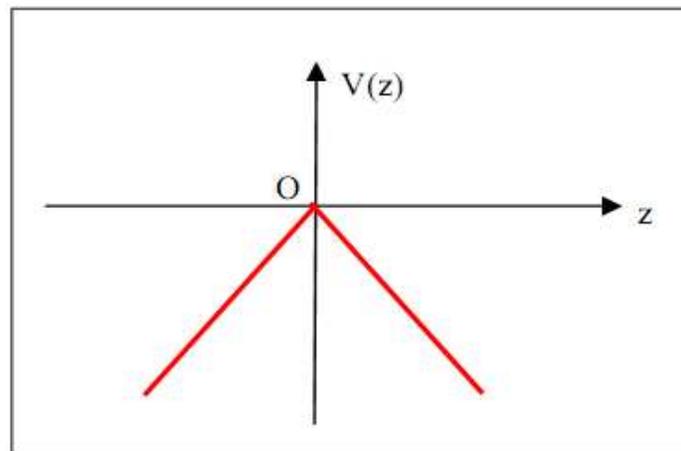


Figure 4

$$V(z) = \int_0^z dV = - \int_0^z \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ avec, } d\vec{l} = dz\vec{k}$$

$$\text{Pour } z > 0 ; V(z) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

$$\text{Pour } z < 0 ; V(z) = + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^z dz = + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

Soit,

$$V(z) = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|$$

A la traversée du plan chargé, le potentiel y est continu (figure 4).

2- Enoncé : *Cylindre chargé uniformément en surface*

Soit un cylindre (C) d'axe $z z'$, de rayon R, de longueur infinie, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

2- Solution

a) Variable dont dépend le champ électrostatique et sa direction

Le cylindre chargé a un axe de révolution Oz (figure 5). Le système de coordonnées le plus adapté est le système cylindrique de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Cette distribution de charge est invariante par translation suivant Oz et par rotation d'angle θ autour de Oz.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$$

- Le plan $\Pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ passant par M et l'axe (Oz) est un psp (plan de symétrie pair). $\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_z$
- Le plan $\Pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par M et perpendiculaire à (Oz) est un psp (plan de symétrie pair). $\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi : $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où, le champ est radial :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$

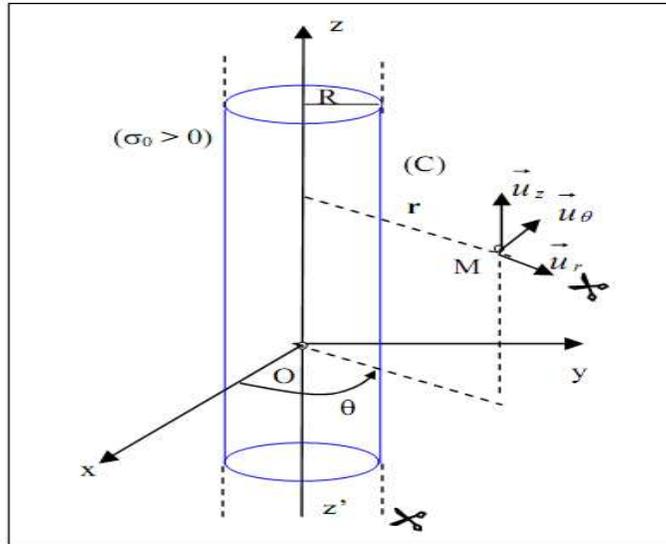


Figure 5

Le système possède une symétrie de révolution par rapport à l'axe z z' et de translation parallèlement à cet axe : le champ E en un point M situé à la distance r de l'axe est donc de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

c) Calcul du champ électrostatique

La surface fermée Σ que nous choisissons pour calculer le flux de \vec{E} est une surface de même type que la surface chargée constitué d'un cylindre d'axe z z' , de rayon r , de hauteur h (figure 6).

* Si M est extérieur au cylindre chargé (C) : $r > R$

La charge à l'intérieur du cylindre Σ de rayon $r > R$:

$$Q_{\text{int}} = \iint_S \sigma dS \text{ avec, } dS = R d\theta dz$$

Puisque σ est uniforme, on a :

$$Q_{\text{int}} = \sigma R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = 2\pi R h \sigma \quad (\text{surface latérale} * \sigma)$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$\phi = 2\pi r h E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} 2\pi R h \sigma$$

En simplifiant par $(2\pi h)$, la norme du champ électrostatique $E(r)$:

$$E(r > R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Par raison de symétrie, on sait que $\vec{E}(M)$ est porté par \vec{u}_r . On obtient finalement :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} \frac{\vec{u}_r}{r}$$

* Si M est intérieur au cylindre chargé (C) : $r < R$

Dans ce cas, la charge à l'intérieur du cylindre Σ de rayon $r < R$ étant nulle,

$$Q_{\text{int}} = 0$$

Il s'ensuit, d'après le théorème de Gauss, que la norme du champ est nulle :

$$E(r) = 0$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

Le champ \vec{E} normal à la surface chargée, subit une discontinuité égale à σ_0 / ϵ_0 (figure 7).

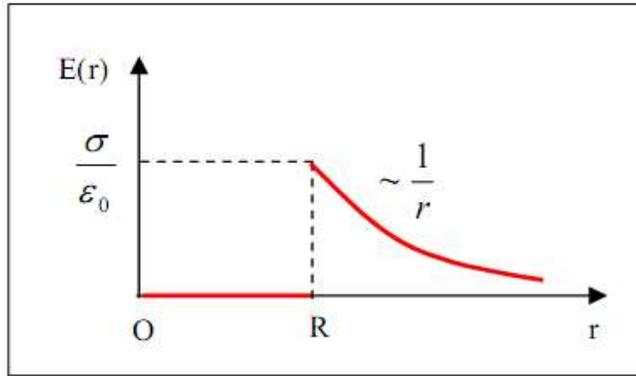


Figure 7

d) Calcul du potentiel électrostatique $V(M)$

$$V(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ avec, } d\vec{l} = dr\vec{u}_r$$

D'où :

$$V(r) = -\int E(r)dr$$

* Si M est à l'extérieur du cylindre : $r \geq R$

$$V(r) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \text{Log}r + cste$$

Dans le cas d'une distribution surfacique portée par le cylindre infiniment long, on prendra l'origine des potentiels, à une distance finie r_0 de l'axe du cylindre (par exemple $r_0 > R$; $V(r_0) = 0$)

$$V(r = r_0) = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \text{Log}r_0 + cste = 0$$

$$cste = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \text{Log}r_0$$

$$V(r \geq R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \text{Log} \frac{r_0}{r}$$

* Si M est à l'intérieur du cylindre : $r \leq R$

$$V(r \leq R) = cste$$

La constante est déterminée par continuité du potentiel en $r=R$:

$$V(r \geq R)_{r=R} = V(r \leq R)_{r=R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \text{Log} \frac{r_0}{R}$$

Calcul du champ électrostatiques créés par un dipôle électrostatique

1- Enoncé : Champ électrique sur l'axe d'un système $(-q, +q)$.

Soient deux charges électriques ponctuelles, portées par un axe $x'Ox$: $-q$ en A ($-a$) et $+q$ en B ($+a$) avec q positive.

1. Exprimer le champ électrique créé en $M(x)$ par cette distribution dans le vide, M appartenant à l'axe $x'Ox$.
2. Représenter E_x en fonction de x

1- Solution

Champ électrique sur l'axe d'un système $(-q, +q)$.

1. Champ électrique en un point de l'axe $x'Ox$.

Le plan perpendiculaire (P) à l'axe $x'Ox$ et passant par le point O est un plan d'antisymétrie de la distribution des deux charges. On a donc en un point M' appartenant à l'axe $x'Ox$ et symétrique d'un point M de ce même axe par rapport au plan (P) :

$$\vec{E}(M') = -\text{Sym}_{(P)}(\vec{E}(M)) \quad \vec{E}(M') = -\text{Sym}_{(P)}(\vec{E}(M))$$

$$E_x(-x) = E_x(x) \quad E_x(-x) = E_x(x)$$

On étudie alors les propriétés de cette distribution en un point:

$$M \in [0, +\infty[$$

On exprime le champ créé par les charges en un point M de l'axe $x'Ox$:

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM^2} \vec{u}_{BM} - \frac{1}{AM^2} \vec{u}_{AM} \right)$$

Pour $x > a$:

$$\vec{u}_{AM} = \vec{u}_{BM} = \vec{u}_x$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x-a+x-a)(x+a-x+a)}{(x-a)^2(x+a)^2} \right)$$

$$E_x = \frac{qax}{\pi\epsilon_0(x^2-a^2)^2}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{qa}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x^2-a^2)^2 - 2x(x^2-a^2)2x}{(x^2-a^2)^4} \right)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{qa}{\pi\epsilon_0} \frac{(x^2-a^2) - 4x^2}{(x^2-a^2)^3} = -\frac{qa}{\pi\epsilon_0} \frac{3x^2+a^2}{(x^2-a^2)^3} < 0$$

E_x est une fonction décroissante pour $x > a$

pour :

$$0 \leq x < a$$

$$\overset{+}{u_{AM}} = -\overset{+}{u_{BM}} = \overset{+}{u_x}$$

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(x^2+2ax+a^2) + (x^2-2ax+a^2)}{(x-a)^2(x+a)^2} \right)$$

$$E_x = -\frac{q(x^2+a^2)}{2\pi\epsilon_0(x^2-a^2)^2}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{2x(x^2-a^2)^2 - (x^2+a^2)2(x^2-a^2)2x}{(x^2-a^2)^4} \right) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} 2x \left(\frac{(x^2-a^2)^2 - 2(x^2+a^2)(x^2-a^2)}{(x^2-a^2)^4} \right)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} 2x \left(\frac{(x^2-a^2)^2 - 2(x^4-a^4)}{(x^2-a^2)^4} \right) = -\frac{q}{\pi\epsilon_0} x \left(\frac{x^4 - 2a^2x^2 + a^4 - 2x^4 + 2a^4}{(x^2-a^2)^4} \right)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = -\frac{q}{\pi\epsilon_0} x \left(\frac{-x^4 - 2a^2x^2 + 3a^4}{(x^2-a^2)^4} \right) = -\frac{q}{\pi\epsilon_0} x \left(\frac{4a^4 - (x^2-a^2)^2}{(x^2-a^2)^4} \right) < 0$$

E_x est une fonction décroissante pour $0 \leq x < a$

Pour $x = 0$ on a :

$$\frac{dE_x}{dx} = 0$$

la fonction passe un extremum

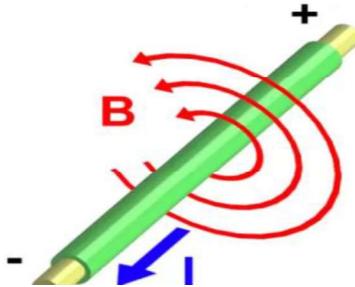
$$E_x(0) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^2}$$

Chapitre 2 : Magnétostatique

2.1 Loi d'Ampère

La loi d'Ampère stipule :

- La circulation du champ magnétique des courants constants le long de tout circuit fermé est proportionnelle à la somme des forces des courants qui traversent la surface du circuit.
- Si le courant continu est utilisé, le champ magnétique est continu.
- Si un courant alternatif est utilisé, le champ magnétique est alternatif.



La loi d'Ampère peut être représentée par l'équation suivante :

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_T$$

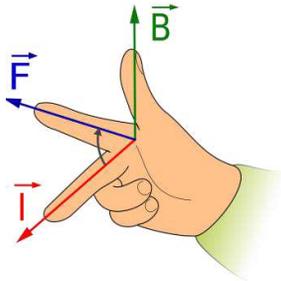
Dans cette formule de calcul du champ magnétique, l'intégrale représente la circulation des lignes de champ le long d'un chemin fermé, et :

- μ_0 est la perméabilité du vide
- $d\vec{l}$ est un vecteur tangent au chemin choisi en chaque point
- I_T est l'intensité nette du courant qui traverse la surface délimitée par le chemin, et elle sera positive ou négative selon la direction dans laquelle elle traverse la surface.

2.2 Direction du champ magnétique (règle de la main droite)

La règle de la main droite est un moyen de se rappeler comment sont liées diverses directions. Elle utilise les doigts de la main. Il y a deux règles (les plus connues) : celle qui imite un tire-bouchon avec une rotation et une translation et celle qui indique un repère direct.

En électromagnétisme, ces règles permettent de déterminer le sens et la direction des forces de Laplace (machines électriques...) et de donner la forme et la direction des lignes de champ magnétique produites par un courant électrique, entre autres.



- Pouce = sens de la force (« pousse »)
- Index = sens du courant (I comme Index)
- Majeur = direction du champ magnétique (comme M Magnétique)

2.3 Potentiel Magnétique

Le potentiel vecteur du champ magnétique, ou, plus simplement potentiel vecteur quand il n'y a pas de confusion possible, est une quantité physique assimilable à un champ de vecteurs intervenant en électromagnétisme. Elle n'est pas directement mesurable, mais sa présence est intimement liée à celle d'un champ magnétique. Son unité SI est le $\text{Kg.C}^{-1}.\text{m.s}^{-1}$

En électrostatique, le potentiel électrostatique en un point M s'écrit :

$$V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(P)}{PM}$$

P étant un point de la distribution de charges \mathcal{D} et

pour une distribution volumique : $dq(P) = \rho(P) d^3V$ [$\rho(P)$ densité volumique de charge en P],

pour une distribution surfacique : $dq(P) = \sigma(P) dS$ [$\sigma(P)$ densité surfacique de charge en P],

pour une distribution linéique : $dq(P) = \lambda(P) dl$ [$\lambda(P)$ densité linéique de charge en P].

Par analogie, le potentiel magnétostatique en un point M s'écrit :

$$\vec{A}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{\mathcal{C}}(P)}{PM}$$

P étant un point de la distribution de courant \mathcal{D} et

pour un courant volumique : $d\vec{\mathcal{C}}(P) = \vec{J}(P) d\mathcal{V}$ [$\vec{J}(P)$ courant volumique au point P],

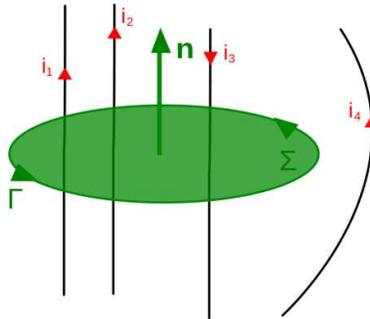
pour un courant surfacique : $d\vec{\mathcal{C}}(P) = \vec{J}_s(P) d\mathcal{S}_s$ [$\vec{J}_s(P)$ courant surfacique au point P],

pour un courant linéique : $d\vec{\mathcal{C}}(P) = I d\vec{l}$ (I intensité du courant).

2.4 Théorème d'Ampère

La circulation de l'excitation magnétique \vec{H} le long d'une courbe fermée \mathcal{C} est égale à l'intensité totale qui traverse n'importe quelle surface s'appuyant sur \mathcal{C} . Cela suppose bien sûr que nous soyons en régime permanent auquel cas le vecteur densité de courant \vec{J} est à flux conservatif et l'intensité ne dépend que de \mathcal{C} et pas du choix de la surface s'appuyant sur \mathcal{C} .

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ créé par éléments de courant Le théorème d'Ampère est l'analogue du théorème de Gauss en électrostatique. Le champ magnétique B créé par un courant I est donné par le théorème d'Ampère :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

où Γ est une courbe fermée quelconque traversée par le courant électrique I .

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

2.5 Théorème de Maxwell–Ampère

Le théorème d'Ampère peut être généralisé à condition de l'appliquer au courant total. La relation de Maxwell-Ampère qui en est la traduction s'écrit :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \mu_0 \vec{j}_T \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La relation intégrale du théorème d'Ampère généralisé est :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_T = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On obtient le résultat fondamental : Un champ électrique variable crée un champ magnétique.

2.6 Flux Magnétique

2.6.1 Flux élémentaire

On considère une surface élémentaire dS au voisinage du point M . Soit \vec{n} un vecteur normal à cette surface. Le choix du sens de \vec{n} définit l'orientation de la surface. On définit alors $d\vec{S} = dS \vec{n}$ le vecteur surface élémentaire. Le flux du champ magnétique à travers la surface orientée dS est défini par :

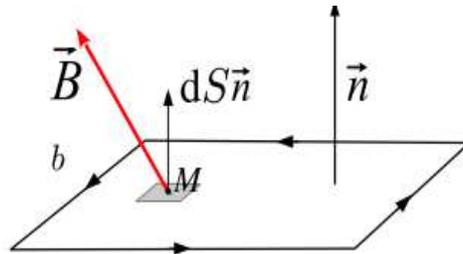
$$d\phi = \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$$

-L'unité de flux est le weber (Wb) 1 Wb = 1 T.m²

-Le signe de $d\phi$ dépend du sens d'orientation choisi.

2.6. 2 Flux d'un champ magnétique uniforme à travers une spire

On considère une spire rectangulaire, de côtés a et b , placée dans un champ magnétique uniforme. Le sens de \vec{n} se déduit du sens d'orientation choisi pour la spire par la règle du tire-bouchon.



Par définition le flux total de \vec{B} à travers la surface orientée délimitée par la spire est

$$\phi = \iint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B}(M) \cdot dS \vec{n}$$

Le champ magnétique \vec{B} étant uniforme, on peut le sortir de l'intégrale. De plus, la surface étant plane, tous les vecteurs $d\vec{S}$ sont colinéaires au même vecteur \vec{n} :

$$\phi = \vec{B} \cdot \iint dS \vec{n} = \vec{B} \cdot \left[\iint dS \right] \vec{n} = \vec{B} \cdot S \vec{n}$$

où $S = ab$ représente l'aire de la surface délimitée par la spire .

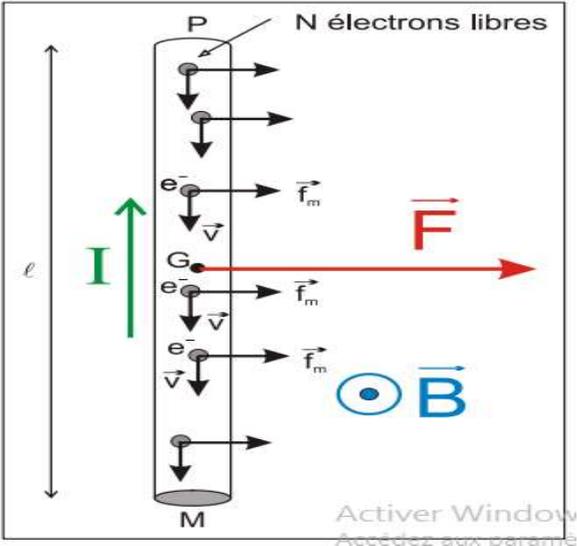
Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée S quelconque est nul. On dit que le champ magnétostatique est à flux conservatif. Cette propriété est traduite par l'intégrale suivante :

2.7 Force de Laplace

On considère un conducteur rectiligne de longueur $l = PM$ parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à PM . Les N électrons libres contenus dans ce conducteur et constituant le courant, de charge $q = -e$, se déplacent avec une certaine vitesse à travers \vec{B} . Ils subissent donc tous une force de Lorentz :

$$f_m = |qvB \sin \alpha| = evB \sin \alpha$$

La résultante des N forces de Lorentz constitue la force électromagnétique de Laplace s'exerçant sur le conducteur tout entier.



Afin de déterminer la force, nous raisonnons sur le modèle simplifié du courant électrique où les N électrons libres se déplacent à la même vitesse constante v.

Dans ces conditions, les N électrons subissent la même force de Lorentz. La Force de Laplace est donnée par :

$$F = Nf_m = N|qvB \sin \alpha| = NevB \sin \alpha \quad \text{avec } \alpha = \text{angle entre } q\vec{v} \text{ et } \vec{B}.$$

2.8 Energie Magnétique

2.8.1 Définition

Considérons d'abord le cas d'une barre conductrice MN se déplace sur des rails parallèles conducteurs. L'ensemble est alimenté par une source de courant continu qui débite à travers le circuit, ainsi formé, un courant I . Ce circuit est placé dans un champ magnétique uniforme B ρ avec la normale θ perpendiculaire à la barre MN et faisant un angle θ avec la normale du plan du circuit.

Le conducteur MN, est soumis à la force de Laplace :

$$\vec{F} = I \overline{MN} \wedge \vec{B} \Rightarrow |\vec{F}| = I |\overline{MN}| |\vec{B}| \text{ soit } F = I MN B$$

Au cours d'un déplacement élémentaire dM , le travail de la force est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{M} \text{ soit } dW = F dM \cos \theta$$

En remplaçant la force par son expression il vine que :

$$dW = I MN dM B \cos \theta \text{ soit } dW = I dS B \cos \theta$$

Avec : dS est la surface balayée par le conducteur MN au cours de ce déplacement.

Si on fait intervenir le flux coupé par le conducteur :

$$d\Phi = B dS \cos \theta$$

On obtient par la suite :

$$dW = I d\Phi$$

2.8.2 Énergie du champ électromagnétique.

Un champ électromagnétique contient et transporte de l'énergie. On définit :

➤ L'énergie électromagnétique volumique.

La quantité homogène décrite par l'équation à une énergie volumique (exprimée en SI en $\mathbf{J/m^3}$) est appelée énergie électromagnétique volumique (ou improprement densité volumique d'énergie électromagnétique).

$$\varpi = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$$

Cette expression montre que l'énergie est localisée dans le champ électromagnétique lui-même. En isolant les contributions dues aux champs E et B on distingue:

$$\varpi_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2, \text{ énergie électrique volumique } \quad \text{et} \quad \varpi_{mag} = \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}, \text{ énergie magnétique volumique.}$$

➤ **Le vecteur Poynting**

On note $\vec{\Pi}$ le vecteur, appelé vecteur de Poynting, défini par : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

$\|\vec{\Pi}\|$ est homogène à une puissance surfacique, exprimé en SI en $W.m^{-2}$

En résumé :

En guise de résumé voici des conseils sur les méthodes à employer pour calculer le champ magnétique.

- **La formule de Biot et Savart :** elle n'est pratique que lorsqu'on sait faire l'addition vectorielle des champs dB créés par un petit élément du circuit (souvent des circuits filiformes).
- **La conservation du flux :** à n'utiliser que si l'on connaît déjà son expression dans une autre région de l'espace.
- **Le théorème d'Ampère :** il faut être capable de calculer la circulation du champ sur un contour choisi. Cela nécessite donc une symétrie relativement simple des courants.

Exercices Magnétostatique

Exercice : 1 Champ magnétique créée par une spire

En utilisant la formule de Biot et Savart, déterminer les caractéristiques du champ magnétique créée au centre d'une bobine plate de N spires, de rayon R et parcourue par un courant I . Application numérique : $R = 5$ cm, $N = 100$ et $I = 100$ mA.

Exercice : 2 Champ magnétique créée par un câble

On considère un câble de rayon R , de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti dans la section du conducteur. A l'aide du théorème d'Ampère, déterminer l'intensité du champ magnétique en un point situé à la distance r de l'axe du câble. Tracer la courbe $B(r)$.

Exercice : 3 Champ magnétique créée par un câble coaxial

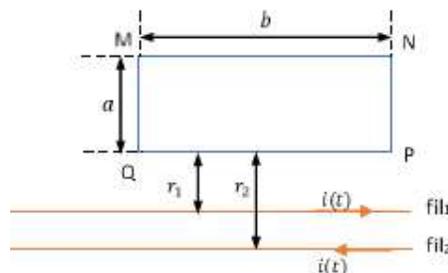
On considère un câble coaxial infini cylindrique de rayons R_1 , R_2 et R_3 . Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.

Exercice : 4

Deux conducteurs 1 et 2 filiformes et parallèles, transportant un même courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos \omega t$, dans des sens opposés. Un cadre rectangulaire $MNPQ$ est fixé dans le plan des conducteurs.

1- Déterminer le flux magnétique φ à travers le cadre.

2- Déterminer la force électromotrice induite $e(t)$ dans le cadre et donner le sens conventionnel du courant induit i' .



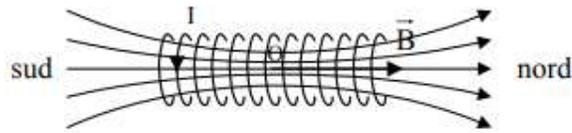
Corrigés

Exercice : 1

a/ Le spectre magnétique d'un solénoïde est semblable à celui d'un aimant droit.

On oriente les lignes de champ avec la règle de la main droite (il faut au préalable définir le sens du courant). On en déduit les faces nord et sud du solénoïde.

Le champ magnétique au centre du solénoïde est tangent à la ligne de champ passant par O et de sens donné par l'orientation de la ligne de champ.



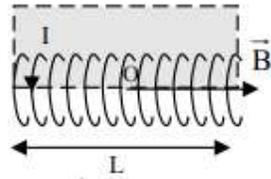
b/ On suppose qu'à l'intérieur du solénoïde le champ est uniforme et qu'à l'extérieur il est nul.

La circulation du champ magnétique le long du contour (C) est : $C = BL$ (voir figure)

L'application du théorème d'Ampère donne : $C = N\mu_0 I$

$$\text{D'où : } B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

$$\text{A.N. } B = 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



c) L'aiguille s'oriente vers le nord magnétique (champ magnétique terrestre).

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell R}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{R^2}$$

Au totale, la longueur de la bobine est $N2\pi R$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{N2\pi R}{R^2} = N \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$\text{A.N. } B = 0,126 \text{ mT}$$

Exercice : 2

Un morceau de bobine de longueur $d\ell$ apporte la contribution :

Un morceau de bobine de longueur $d\ell$ apporte la contribution :
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

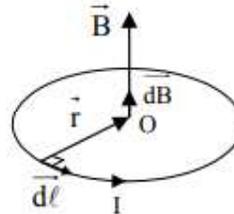
Ce champ élémentaire est dirigé suivant l'axe et son sens dépend du sens du courant (voir figure).

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell R}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{R^2}$$

Au totale, la longueur de la bobine est $N2\pi R$.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{N2\pi R}{R^2} = N \frac{\mu_0 I}{2R}$$

A.N. $B = 0,126 \text{ mT}$



Le sens du champ magnétique s'obtient avec la règle de la main droite.

- Champ magnétique à l'extérieur du câble ($r > R$) :

Appliquons le théorème d'Ampère avec un contour circulaire (C) centré sur le câble.

La circulation s'écrit : $C = B 2\pi r$

Théorème d'Ampère : $C = \mu_0 I$

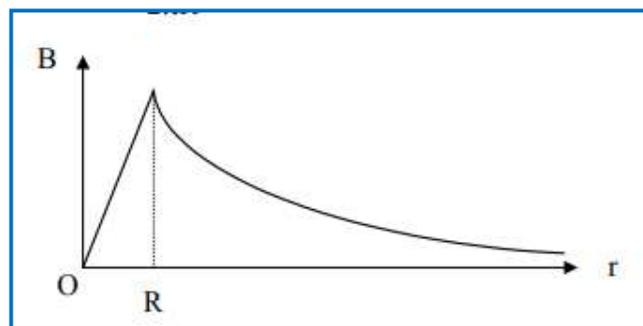
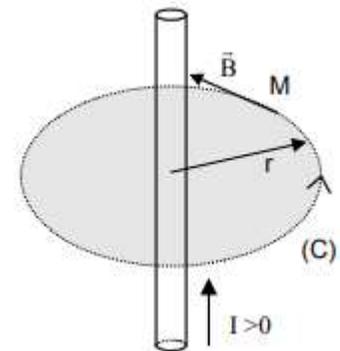
$$\text{D'où : } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Champ magnétique à l'intérieur du câble ($r \leq R$) :

Dans la section de rayon r passe le courant : $J = I \frac{\pi r^2}{S} = I \frac{r^2}{R^2}$

$$C = B 2\pi r = \mu_0 J$$

$$\text{D'où : } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$



Exercice : 4

1- • On peut alors calculer le flux Φ du champ magnétique \vec{B} à travers le cadre. D'après le sens de la normale, le cadre est orienté de c vers A.

Le flux à travers chaque spire du cadre est identique. Donc le flux à travers le cadre est égal à N fois le flux à travers une spire.

On a $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ où S représente la surface du cadre et $d\vec{S} = dS\vec{n} = dS(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y)$.

Soit : $\Phi = NB_0 a^2 \sin\theta \cos\omega t$.

• D'après la loi de Faraday, $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ lorsque la force électromotrice e est orienté de C vers A.

On en déduit : $e(t) = NB_0 a^2 \omega \sin\theta \cos\omega t$.

2- On calcule le potentiel vecteur \vec{A} proposé, en un point $M(x, y, z)$ quelconque dans la base cartésienne.

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} zB \\ 0 \\ -xB \end{pmatrix}$$

On vérifie qu'il est bien potentiel vecteur du champ magnétique \vec{B} .

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{zB}{2} \\ 0 \\ -xB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{B}$$

$$e(t) = \int_C^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

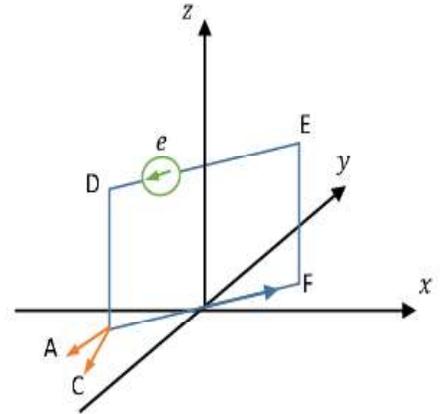
Sur FE et DA, $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$ et donc $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz$

$$\int_F^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a \frac{-\frac{asin\theta}{2}}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin\theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin\theta}{4} B_o \omega \sin\omega t$$

3- Le champ électromoteur \vec{E}_m est défini par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \\ 0 \\ \frac{x}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \end{pmatrix}, \text{ dans la base cartésienne}$$

On calcule la circulation de ce champ électromoteur entre les deux points C et A ($d\vec{l}$ va de C vers A), et on obtient la force électromotrice d'induction e .



$$\int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_a^0 \frac{\frac{asin\theta}{2}}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dz = -\frac{a^2 \sin\theta}{4} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{a^2 \sin\theta}{4} B_o \omega \sin\omega t$$

Sur CF et ED, $d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$ et donc $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{z}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx$, soit :

$$\int_C^F \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{asin\theta}{2}}^{\frac{asin\theta}{2}} 0 dx = 0 \text{ car le segment [CF] est à une altitude } z = 0.$$

$$\int_E^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{\frac{asin\theta}{2}}^{\frac{asin\theta}{2}} -\frac{a}{2} \frac{\partial B}{\partial t} dx = \frac{a^2 \sin\theta}{4} B_o \omega \sin\omega t$$

On obtient donc :

$$e(t) = NB_o a^2 \omega \sin\theta \cos\omega t$$

4- L'amplitude de la force électromotrice est une grandeur toujours positive.

Donc $e(t) = NB_o a^2 \omega |\sin\theta|$

Application numérique : $e_\theta = 942 \text{ mV}$.

Chapitre 3 : Phénomènes dépendant du temps (Régimes quasi-stationnaires)

3.1 Loi de Faraday

En physique, la loi de Lenz-Faraday, ou loi de Faraday, permet de rendre compte des phénomènes macroscopiques d'induction électromagnétique. On doit d'admettre qu'une variation temporelle du champ magnétique engendre un champ électrique, cet effet physique interprète le phénomène électromagnétique d'induction.

Que se passe-t-il si on déplace un circuit (rigide ou non) dans un champ magnétique variable ?

Quelle expression faut-il utiliser ?

En fait, il faut revenir à la force de Lorentz dans le cas général de champs variables. On aura alors une fém induite :

$$\begin{aligned} e &= \oint_{\text{circuit}} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} - \frac{d\Phi_c}{dt} \\ &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_{\text{circuit}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \frac{d\Phi_c}{dt} \end{aligned}$$

Le premier terme décrit la circulation non nulle d'un champ électromoteur, associé à la variation temporelle du champ magnétique, tandis que le deuxième terme décrit la présence d'un flux coupé dû au déplacement du circuit et/ou à sa déformation.

3.2 Loi de Lenz

Enoncé : l'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance. Cette loi est, comme la règle du flux maximum, déjà contenue dans les équations et donc n'apporte rien de plus, hormis une intuition des phénomènes physiques. En l'occurrence, la loi de Lenz n'est que l'expression du signe « - » contenu dans la loi de Faraday.

Exemple : si on approche un circuit du pôle nord d'un aimant, le flux augmente et donc la fém

induite est négative. Le courant induit sera alors négatif et produira lui-même un champ magnétique induit opposé à celui de l'aimant. Deux conséquences :

1. L'augmentation du flux à travers le circuit est amoindrie.
2. Il apparaît une force de Laplace négative, s'opposant à l'approche de l'aimant

Remarque sur la convention de signe

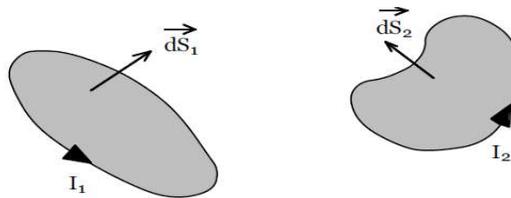
La détermination du sens du courant induit se fait de la façon suivante :

1. On se choisit arbitrairement un sens de circulation le long du circuit.
2. Ce sens définit, grâce à la règle du bonhomme d'Ampère, une normale au circuit.
3. Le signe du flux est alors déterminé en faisant le produit scalaire du champ magnétique par cette normale.
4. En utilisant ensuite la loi de Faraday, on obtient la valeur et le signe de la fém.
5. Enfin, le courant est obtenu à partir de la loi d'Ohm (son signe peut aussi être directement connu en utilisant la loi de Lenz).

3.3 Induction mutuelle et auto-induction

3.3.1 Induction mutuelle entre deux circuits fermés

Soient deux circuits fermés, orientés, traversés par des courants I_1 et I_2 .



Le premier crée un champ magnétique B_1 dont on peut calculer le flux Φ_{12} à travers le deuxième circuit,

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}_2 = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_2} \oint_{C_1} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \cdot \vec{dS}_2 \right] I_1$$

où P est un point quelconque du circuit C_1 (l'élément de longueur valant $dl = dOP$) et M un point quelconque de la surface délimitée par C_2 , à travers laquelle le flux est calculé. De même, on a pour le flux créé par le circuit C_2 sur le circuit C_1

$$\Phi_{21} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1 = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_1} \oint_{C_2} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} \cdot \vec{dS}_1 \right] I_2$$

où P est cette fois-ci un point du circuit C_2 et M un point de la surface délimitée par C_1 , à travers laquelle le flux est calculé. Les termes entre crochets dépendent de la distance entre les

deux circuits et de facteurs uniquement géométriques liés à la forme de chaque circuit. Comme, dans le cas général, ils sont difficiles voire impossible à calculer, il est commode de poser :

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= M_{12} I_1 \\ \Phi_{21} &= M_{21} I_2\end{aligned}$$

Le signe des coefficients dépend de l'orientation respective des circuits et suit la même logique que pour le courant induit. D'après les choix pris pour le sens de circulation le long de chaque circuit (voir figure), les flux sont négatifs pour des courants I_1 et I_2 positifs. Donc les coefficients sont négatifs.

Le coefficient d'induction mutuelle ou inductance mutuelle met en jeu une énergie potentielle d'interaction magnétique entre les deux circuits

$$W_m = -MI_1 I_2 + \text{Constante}$$

3.3.2 Auto-induction

Si on considère un circuit isolé, parcouru par un courant I , on s'aperçoit qu'on peut produire le même raisonnement que ci-dessus. En effet, le courant I engendre un champ magnétique dans tout l'espace et il existe donc un flux de ce champ à travers le circuit lui-même,

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \left| \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \oint_C \frac{d\vec{l} \wedge \overline{PM}}{\|PM\|^3} \cdot \vec{dS} \right| I$$

Qu'on peut simplement écrire :

$$\Phi = LI$$

Où L est le coefficient d'auto-induction ou auto-inductance (ou self), exprimé en Henry. Il ne dépend que des propriétés géométriques du circuit et est nécessairement positif (alors que le signe de l'inductance mutuelle dépend de l'orientation d'un circuit par rapport à l'autre).

3.4 Comparaison entre le régime stationnaire et le régime Quasi-stationnaire

Il existe trois régimes distincts en électromagnétisme, chacun différent de l'autre suivant la variation en fonction du temps.

- a) **Régime stationnaire** (R.S) Phénomènes indépendants du temps $\partial/\partial t=0$; Toutes les grandeurs électriques et magnétiques (E, H, q...) sont constantes.
- b) **Régime quasi-stationnaire** (RQS) Phénomènes variables avec le temps $\partial/\partial t \neq 0$
Exemple: $\cos(2\pi ft)$ $q_0 = q$ Si $f < 1$ kHz \Rightarrow Régime variable.
- c) **Régime variable** (R.V) Phénomènes très variables avec le temps Ne concerne que les hautes fréquences > 1 kHz. Dans le RV le champ électromagnétique devient une onde électromagnétique qui se propage dans l'air.

Chapitre 4 : Régimes variables -Equations de Maxwell

4.1 Régime variable

Le régime variable est caractérisé par des propriétés spécifiques liées à la dépendance des champs en fonction du temps. Ces particularités sont :

Le phénomène d'induction : Un circuit filiforme au repos et parcouru par un courant invariable n'entraîne l'apparition d'aucune f.é.m ou d'aucun courant dans un autre circuit filiforme au repos. Il n'en est pas de même si le courant varie ou si les circuits en présence se déplacent l'un par rapport à l'autre : la f.é.m ou le courant qui apparaissent sont dus au phénomène d'induction. Ce phénomène entraîne l'apparition d'un champ électrique supplémentaire (appelé champ induit); ce qui conduit à modifier la propriété fondamentale du champ électrique.

Le phénomène de capacité : Un circuit comprenant un condensateur alimenté par une source de tension variable en fonction du temps, est parcouru par un courant variable bien que la continuité électrique soit interrompue par l'espace entre les armatures du condensateur. Dans ce cas l'intensité du courant n'est plus conservée tout au long du circuit puisqu'elle est nulle dans l'espace entre les armatures. Il n'est donc plus possible d'appliquer le théorème d'Ampère. Pour conserver la validité de ce dernier, nous serons amenés à introduire le courant de déplacement.

Le phénomène de propagation : Considérons un ensemble constitué par des circuits parcourus par des courants et par des distributions de charge variant en fonction du temps : cet ensemble pouvant être au repos ou en mouvement. Au voisinage de ces distributions règnent un champ électrique et un champ magnétique. Contrairement au cas stationnaire, ces champs ne sont pas synchrones avec les sources, c'est-à-dire qu'à un instant t donné, ces champs dépendent des valeurs des sources à un instant antérieur qui est fonction de la distance séparant le point d'observation des sources. Nous exprimons ce fait en disant qu'il y a propagation à vitesse finie des champs à partir des sources qui leur donnent naissance et le retard est d'autant plus grand que le point où l'on désire connaître les champs est éloigné des sources.

4.2 Principe de conservation de la charge

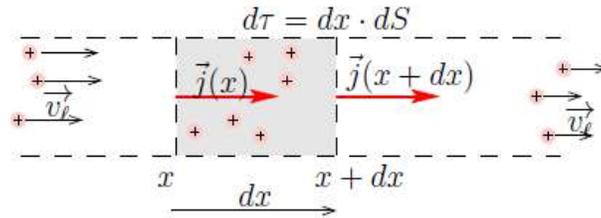
La conservation de la charge électrique est un principe physique. Il exprime que la charge électrique d'un système isolé est un invariant. La charge électrique ne peut donc être qu'échangée avec un autre système mais ni créée ni annihilée. On dit qu'il s'agit d'une grandeur conservative.

4.3 Équation locale de conservation de la charge

La charge électrique est une grandeur conservative d'après le principe de conservation de l'électricité. Entre deux instants voisins t et $t+dt$, la variation de la charge contenue dans une

surface fermée délimitant un système doit être attribuée exclusivement à un échange avec le milieu extérieur.

Considérons pour cela un conducteur cylindrique en déséquilibre électrostatique constitué de charges libres identiques, de charge q , de concentration n et se déplaçant à la vitesse v uniforme.



Appliquons le principe de conservation de la charge :

$$\begin{aligned}
 & \text{la variation de } dq \text{ au cours du temps} \\
 & = dq_{\text{entrant}} \text{ (ce qui est entré dans } d\tau \text{ pendant la durée } dt) - \\
 & \quad dq_{\text{sortant}} \text{ (ce qui est sorti de } d\tau \text{ pendant la durée } dt)
 \end{aligned}$$

D'ou :

Equation locale de conservation de la charge :

$$dq_{\text{intérieur}} = dq_{\text{entrant}} - dq_{\text{sortant}}$$

- A une dimension, suivant l'axe Ox : $-\frac{dj}{dx} \cdot d\tau dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau \Leftrightarrow -\frac{dj}{dx} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dj}{dx} = 0$$

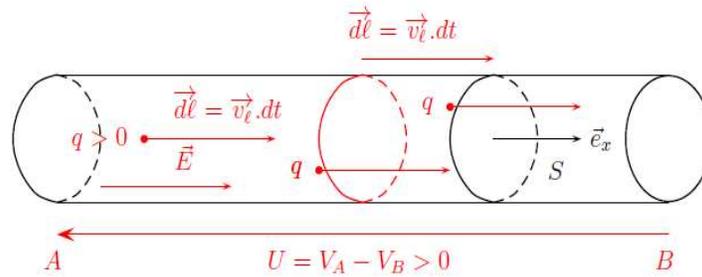
- Généralisation à trois dimensions : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$

4.4 Loi d ohm

4.4.1 Vecteur densité de courant

Observons ce qui se passe dans une tranche de longueur L d'un conducteur cylindrique de section S lorsqu'on applique à ses bornes une différence de potentiels $U = V_A - V_B$.

On admet qu'il apparaît un champ uniforme E qui va provoquer la mise en mouvement des porteurs de charges $q > 0$ sur la figure suivante :



Pendant la durée élémentaire dt la quantité d'électricité dq qui traverse une surface S dans le sens positif désigné par e_x est la charge contenue dans le cylindre de génératrice $d\ell$ et de base S .

L'intensité du courant I est égale au débit des charges qui traversent S :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

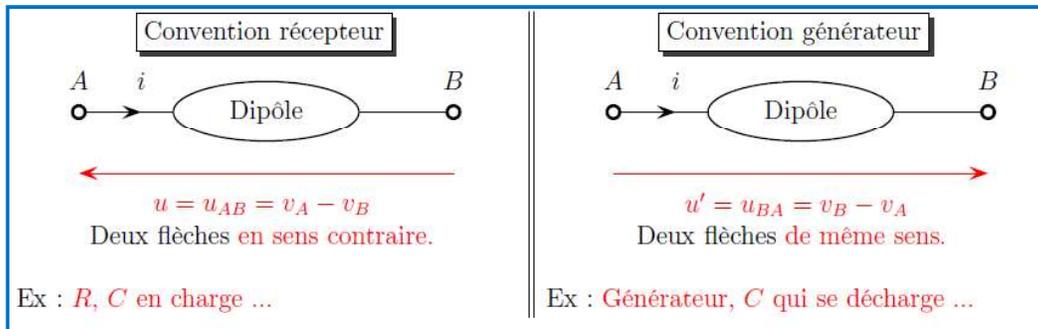
La loi d'ohm permet de déterminer la résistance d'un conducteur cylindrique de longueur l , de section S , de conductivité γ .

$$I = \iint \vec{j} d^2\vec{S} = \gamma E_0 \cdot S \text{ et } U = \int \overrightarrow{grad} V d\vec{\ell} = l \cdot E_0. \text{ Donc : } U = R \cdot I \text{ avec } R = \frac{l}{\gamma \cdot S}.$$

4.4.2 Convention récepteur - générateur :

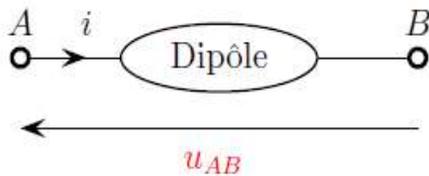
L'orientation de la tension est indépendante de celle du courant.

Une fois qu'on a fixé arbitrairement un sens pour l'intensité i du courant qui traverse un dipôle, on peut définir la tension U à ses bornes de deux manières :



4.4.3 Puissance électrique

En convention récepteur, la puissance algébrique reçue par un dipôle AB est :

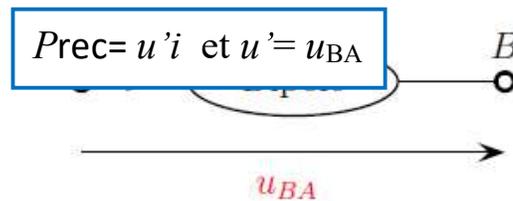


$$P_{\text{rec}} = ui \quad \text{et} \quad u = u_{AB}$$

Remarques :

- L'unité légale est le **Watt W**.
- Si $P_{\text{rec}} > 0$ alors le dipôle **reçoit** effectivement de l'énergie donc de la puissance.
- Si $P_{\text{rec}} < 0$ alors en fait, le dipôle fournit effectivement de la puissance et il fonctionne en générateur.

En convention générateur, la puissance algébrique reçue par un dipôle AB est :



$$P_{\text{rec}} = u'i \quad \text{et} \quad u' = u_{BA}$$

Un dipôle peut être **générateur** à un instant et **récepteur** à un autre instant (condensateur, batterie auto par exemple).

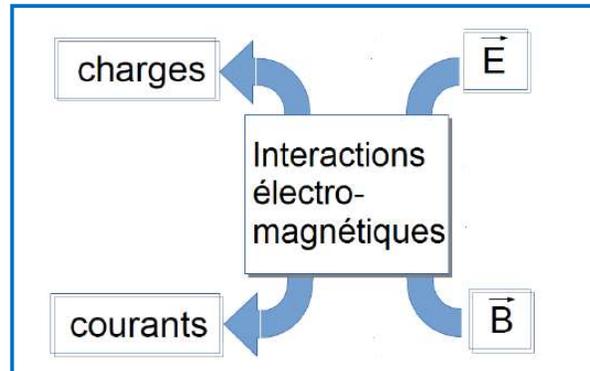
4.5 Equations de Maxwell

4.5.1 Introduction

Les équations de Maxwell, aussi appelées équations de Maxwell-Lorentz, sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent, avec l'expression de la force électromagnétique de Lorentz, les postulats de base de l'électromagnétisme.

Ces équations traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme avant que Maxwell ne les réunisse sous forme d'équations intégrales. Elles donnent ainsi un cadre mathématique précis au concept fondamental de champ introduit en physique par Faraday.

Ces équations montrent notamment qu'en régime stationnaire, les champs électrique et magnétique sont indépendants l'un de l'autre, alors qu'ils ne le sont pas en régime variable.



4.5.2 Constantes fondamentales de l'électromagnétisme

➤ Permittivité du vide :

La permittivité du vide, permittivité diélectrique du vide ou encore constante (di)électrique est une constante physique. Elle est notée ϵ_0 (prononcée « epsilon zéro »).

$$\epsilon_0 = 854\,187\,812\,8(13) \times 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}.$$

➤ Perméabilité du vide :

La perméabilité du vide, également nommée perméabilité magnétique du vide ou constante magnétique, est une constante physique symbolisée par μ_0 .

La constante magnétique est souvent exprimée en henry par mètre :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}.$$

➤ Vitesse de la lumière dans le vide :

La vitesse de la lumière dans le vide, notée c pour « célérité », est une constante physique universelle et un invariant relativiste. Cette notion est employée pour décrire en optique la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide et d'une onde mécanique dans la matière ; elle est aussi dite pseudo-vitesse.

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s ou } 300\,000 \text{ km/s}$$

4.5.3 Equations de Maxwell dans le vide

➤ Equation de Maxwell-Gauss

Cette équation locale donne la divergence du champ électrique en fonction de la densité de la charge électrique:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{aussi notée} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

➤ **Equation de Maxwell-Thomson**

Cette équation est aussi appelée équation de Maxwell-flux ; elle exprime que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{aussi notée} \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

➤ **Equation de Maxwell-Faraday**

Cette équation locale traduit le phénomène fondamental d'induction électromagnétique découvert par Faraday.; elle donne le rotationnel du champ électrique en fonction de la dérivée temporelle du champ magnétique. Elle indique que la variation du champ magnétique crée un champ électrique.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{aussi notée} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

➤ **Equation de Maxwell-Ampère**

Cette équation est héritée du théorème d'Ampère. Sous forme locale, elle s'écrit en termes du vecteur densité de courant.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

En résumé dans le vide les équations de Maxwell s'écrivent :

	Forme locale	Forme intégrale
Théorème de Gauss pour \vec{E} ou équation de Maxwell-Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho \, d\tau$
Equation du flux magnétique ou équation de Maxwell-Thomson	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
Equation de Maxwell-Faraday	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Equation de Maxwell-Ampère	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$	$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S}$

Chapitre 5 : Propagation du champ électromagnétique

5.1 Equation d'onde

L'équation des ondes (parfois appelée équation d'onde ou équation de d'Alembert) est l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde, qui peut être représentée par une grandeur scalaire ou vectorielle.

Une onde progressive se déplace dans l'espace au cours du temps, elle est donc régit par une équation qui relie les variations dans temps aux variations dans l'espace.

Dans le cas de 1D on a :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{v \partial t} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{v \partial t} \right) = 0$$
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0$$

Dans le cas de 3D on a :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0$$

Cette équation ne fait appel que des opérateurs linéaires ce qui permet d'appliquer la principe de superposition:

Pour une fonction de dépendance spatio-temporelle $f(z-vt)$ on a :

$$\frac{\partial f(z-vt)}{\partial z} = f'(z-vt)$$

$$\frac{\partial f(z-vt)}{\partial t} = -v f'(z-vt)$$

$$\text{soit : } \left(\frac{\partial f(z-vt)}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial f(z-vt)}{\partial t} \right) = 0$$

$$\frac{\partial f(z+vt)}{\partial z} = f'(z+vt)$$

$$\text{et } \frac{\partial f(z+vt)}{\partial t} = v f'(z+vt)$$

$$\text{soit : } \left(\frac{\partial f(z+vt)}{\partial z} - \frac{1}{v} \frac{\partial f(z+vt)}{\partial t} \right) = 0$$

Pour avoir une équation qui régit le comportement de $f(z-vt)$ et de $f(z+vt)$ en même temps on doit calculer la dérivé seconde, on a :

$$\frac{\partial^2 f(z-vt)}{\partial z^2} = f''(z-vt) \qquad \frac{\partial^2 f(z+vt)}{\partial z^2} = f''(z+vt)$$

$$\frac{\partial^2 f(z-vt)}{\partial t^2} = v^2 f''(z-vt) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f(z+vt)}{\partial t^2} = v^2 f''(z+vt)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0$$

Soit pour les deux cas :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) = 0$$

En 3D cela donne:

- L'équation d'onde est une équation locale, c'est-à-dire que l'on doit travailler à l'échelle locale (petit élément de l'espace).
- Déterminer la grandeur physique qui va varier au passage de l'onde (onde électromagnétique: champ électrique et magnétique, onde sonore: pression).
- Ecrire équations dynamiques (variation dans l'espace et dans le temps) à l'échelle locales.
- Travailler ces équations de façon à trouver une équation d'onde du type 3D.

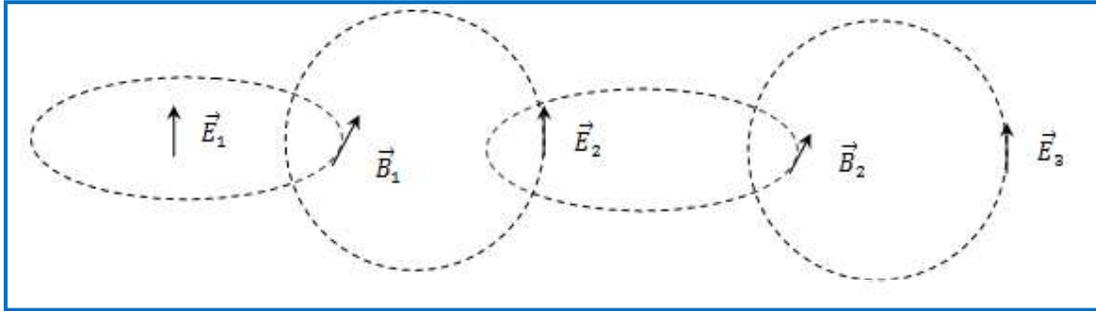
5.2 Equation de propagation du champ électromagnétique dans le vide

Le phénomène de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide peut être expliqué en considérant les deux dernières équations de Maxwell établies en l'absence des sources de courants

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} \sim \partial \vec{B} / \partial t \\ \text{rot} \vec{B} \sim \partial \vec{E} / \partial t \end{cases}$$

Cela signifie qu'un champ E(ou B) variable dans le temps engendre un champ B(ou E) tournant de même nature. En effet si on choisie dans un premier temps un champ électrique variable E1, celui-ci va engendrer un champ d'induction magnétique tournant B1 (voir figure ci-dessous). Mais comme ce champ B1 s'établit progressivement, il est variable dans le

temps. Il va donc à son tour produire un champ électrique E2 qui en s'établissant dans le temps va produire un champ d'induction magnétique B2, et ainsi de suite. De cette manière, le couple de champs (E ,B) s'auto-entretient dans le temps avec une progression dans l'espace .



Les équations décrivant la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide sont :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \equiv 0 \\ \Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \equiv 0 \end{cases}$$

On remarque que ces équations sont du type de l'équation d'Alembert que l'on retrouve pour tout phénomène de propagation en physique.

5.3 Caractéristiques des ondes planes

5.3.1 Définition

L'onde plane est un concept issu de la physique de la propagation des ondes. C'est une onde dont les fronts d'onde sont des plans infinis, tous perpendiculaires à une même direction de propagation désignée par son vecteur unitaire.

$$\Delta \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

On doit résoudre l'équation d'onde :

On a alors dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde une amplitude et une phase constantes. On parle alors d'onde harmoniques planes. Pour une onde se propageant suivant les r croissants:

$$\psi = A \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \quad \vec{k} \text{ est le vecteur d'onde } |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} n(\lambda)$$

$$\omega = 2\pi\nu \text{ où } \nu = \text{fréquence optique}$$

$$\vec{r} = \text{vecteur position d'un point de l'onde}$$

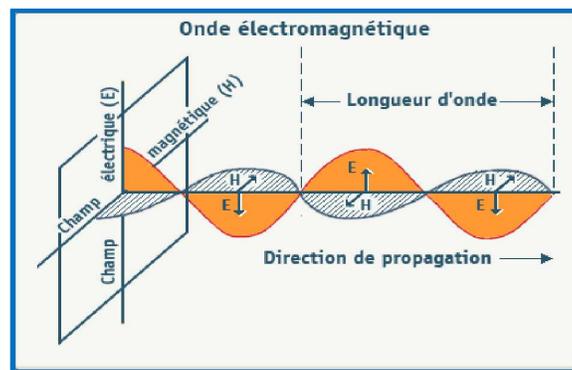
$$\nu = \frac{C}{\lambda} \text{ avec } C = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \text{ où } C = \text{vitesse de la lumière dans le vide.}$$

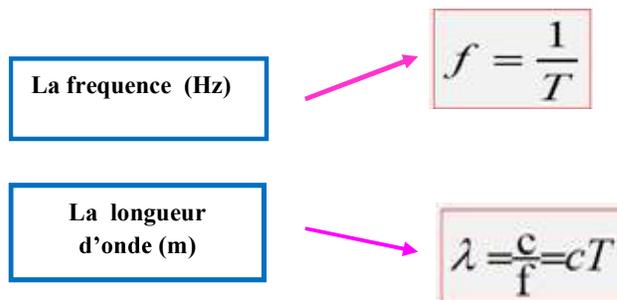
5.3.2 Caractéristiques des ondes planes

- Une seule direction de propagation
- Constante dans le plan d'équation: Ψ Perturbation : $k_x x + k_y y + k_z z = \text{constante}$
- Ce plan est appelé le front d'onde et est perpendiculaire à la direction de propagation de l'énergie
- L'onde à extension infinie = énergie dans tout le plan transverse à la direction de propagation

5.4 Vitesse et longueur d'onde

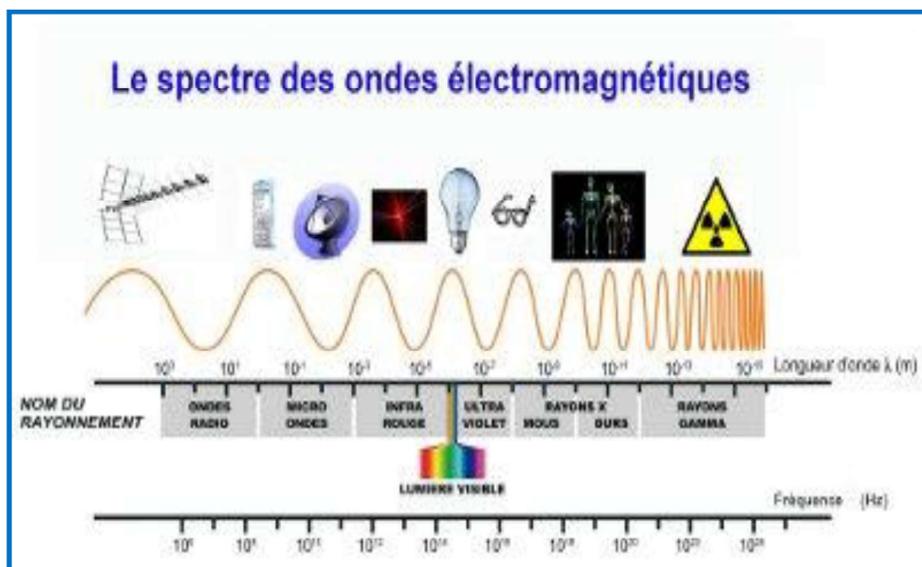
Une onde électromagnétique: peut donc se concevoir comme une perturbation électrique de la matière qui se propage. Elle est caractérisé par sa fréquence f et sa longueur d'onde λ .





5.5 Spectre de rayonnement électromagnétique

Le spectre électromagnétique regroupe toutes les sources de rayonnement électromagnétique qui sont classé par leur fréquence, leur longueur d'onde et leur énergie. IL s'étend théoriquement de zéro à l'infini en fréquence (ou en longueur d'onde), de façon continue et il regroupe les rayonnements **ionisants** et **non ionisant**.

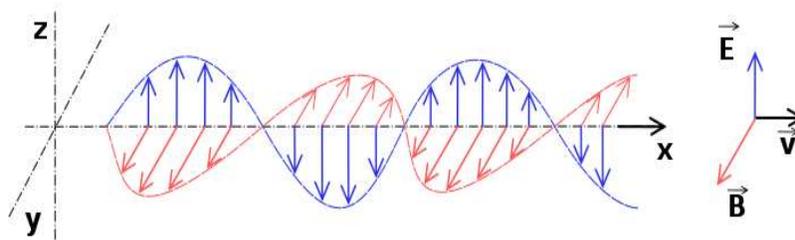


Le rayonnement non ionisant est encore subdivisé en champs statiques (0 Hz), les champs de fréquences extrêmement basses (**ELF**), champs de fréquences intermédiaires (**IF**), des champs et des micro-ondes de fréquence radio (**RF**).

Chapitre 6 : Réflexion et transmission des ondes électromagnétique

6.1 Définition d une onde électromagnétique

Une onde électromagnétique est une catégorie d'ondes qui peut se déplacer dans un milieu de propagation comme le vide ou l'air, avec une vitesse avoisinant celle de la lumière, soit près de 300 000 kilomètres par seconde. Ces ondes sont par exemple produites par des charges électriques en mouvement. Elles correspondent aux oscillations couplées d'un champ électrique et d'un champ magnétique, dont les amplitudes varient de façon sinusoïdale au cours du temps.



- Les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie mais elles sont aussi capables de transporter de l'information. C'est pourquoi elles sont utilisées dans le domaine de la communication.
- Les ondes électromagnétiques se différencient et sont caractérisées par leur fréquence, c'est-à-dire le nombre d'oscillations en une seconde.

La **fréquence** est exprimée en Hertz. Une autre caractéristique des ondes électromagnétiques est la **longueur d'onde**, **c'est-à-dire la distance qui sépare deux oscillations de l'onde**. Elle est inversement proportionnelle à la fréquence. Elles sont classées en fonction de leur fréquence dans ce que l'on appelle le « **spectre électromagnétique** ».

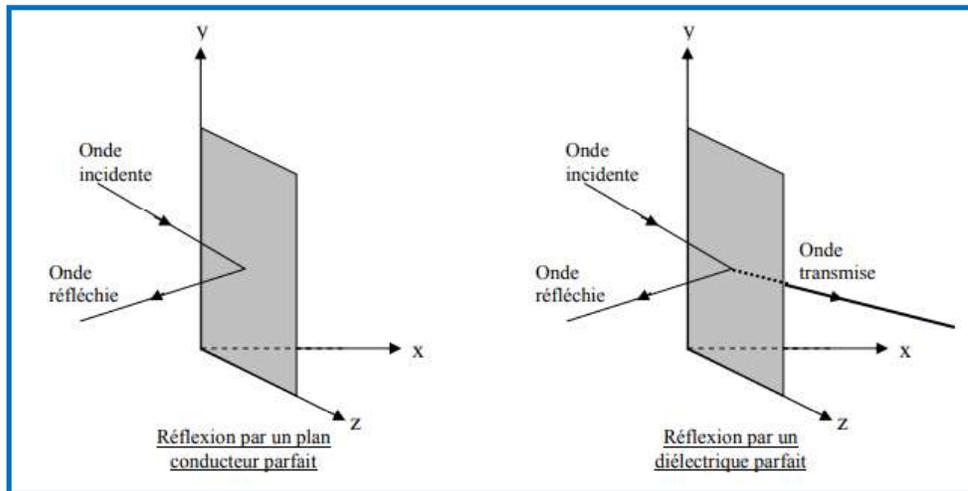
6.2 Réflexion et transmission des ondes

6.2.1 Réflexion par un conducteur parfait

L'onde incidente est totalement réfléchi, il n'y a pas d'onde transmise à travers le conducteur, car le champ électrique dans le conducteur est nul.

6.2.2. Réflexion par un diélectrique

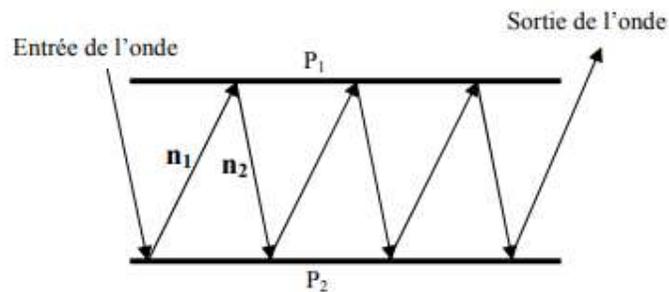
Vu que le champ électrique pénètre à l'intérieur d'un diélectrique, contrairement à un matériau conducteur, l'onde incidente donne naissance en plus de l'onde réfléchi à une onde transmise.



6.3 ONDES GUIDEES

Soient P1 et P2 deux plans métalliques parallèles .

L'onde qui entre à l'intérieur subit une succession de réflexions multiples qui sort de l'autre côté : on dit que l'onde est guidée.



Exemples de guide d'onde :

- fibre optique : c'est un tube métallique cylindrique
- Guide d'ondes radio : Les ondes émises par la station radio sont réfléchies d'une part par la surface de la terre et d'autre part par la couche atmosphérique de l'ionosphère.
- Guide d'ondes TV par satellite : Le satellite réfléchit vers la terre les ondes émises par la station TV.

6.4 Réflexion et transmission :

Les directions des trois vecteurs u_i , u_r et u_t sont liées entre elles par les lois suivantes, vérifiées expérimentalement :

- 1) les directions d'incidence, de réflexion et de transmission sont contenues dans un même plan normal à la surface de séparation.
- 2) L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, c'est-à-dire :

$$3) \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{v_i}{v_r}$$

Supposons qu'une onde incidente soit écrite comme suit :

Supposons qu'une onde incidente soit écrite comme suit :

$$E_i = E_{oi} \sin(\omega t - \beta_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}),$$

les ondes réfléchies et transmises sont :

$$E_r = E_{or} \sin(\omega t - \beta_r \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r})$$

et

$$E_t = E_{ot} \sin(\omega t - \beta_t \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r})$$

dans le milieu (1) on trouve les ondes incidente et réfléchie, tandis que dans le milieu (2) n'existe que l'onde transmise. On a alors à la surface de séparation

$$E_i + E_r = E_t$$

Pour que cette relation soit satisfaite à chaque instant en tout point de la surface de séparation, il faut que les phases soient identiques dans les équations suivantes ;

$$\omega t - \beta_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \omega t - \beta_r \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} = \omega t - \beta_t \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r} (**)$$

soit,

$$\beta_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \beta_r \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} = \beta_t \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r} (4)$$

Comme l'indique la figure, la surface de séparation coïncide avec le plan XZ. L'égalité (4) ne sera donc vérifiée qu'en posant $y = 0$. Par conséquent

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + z \mathbf{u}_z .$$

D'autre part, la direction d'incidence est contenue dans le plan XY, donc :

$$\mathbf{n}_i = n_{ix} \mathbf{u}_x + n_{iy} \mathbf{u}_y$$

$$\beta_1 \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r} = \beta_1 x n_{ix} \quad (5)$$

Comme $\mathbf{n}_r = n_{rx} \mathbf{u}_x + n_{ry} \mathbf{u}_y + n_{rz} \mathbf{u}_z$

et

$$\mathbf{n}_t = n_{tx} \mathbf{u}_x + n_{ty} \mathbf{u}_y + n_{tz} \mathbf{u}_z$$

nous obtenons également

$$\beta_1 \mathbf{n}_r \cdot \mathbf{r} = \beta_1 x n_{rx} + \beta_1 z n_{rz}$$

et

$$\beta_2 \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{r} = \beta_2 x n_{tx} + \beta_2 z n_{tz}$$

On obtient :

$$\beta_1 n_{ix} = \beta_1 n_{rx} = \beta_2 n_{tx} \quad \text{et} \quad \beta_1 n_{iz} = \beta_2 n_{tz} = 0$$

nous retrouvons donc après quelques simplifications, sous une forme plus analytique, les lois de la réflexion et la transmission et les relations entre les amplitudes des trois ondes :

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$$

ANNEXE : ANALYSE VECTORIELLE

1-Coordonnées polaires cylindrique et sphériques

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O , à tout point M donc à tout couple (x, y) , on associe ses coordonnées polaires (r, θ) . Les relations qui lient x, y, r, θ , sont :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, r \in \mathbf{R}^+, \theta \in [0, 2\pi[.$$

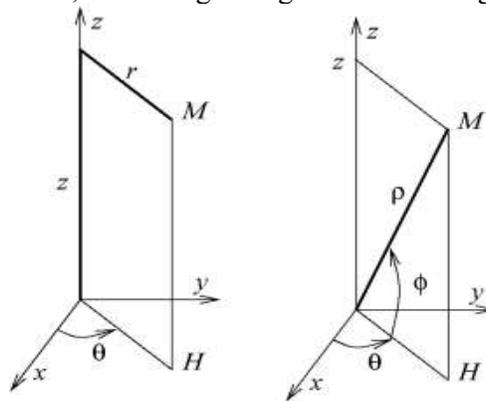
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O , à tout point M donc à tout couple (x, y, z) , on associe ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les relations qui lient x, y, z, r, θ, z , sont :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, r \in \mathbf{R}^+, \theta \in [0, 2\pi[.$$

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O , à tout point M donc à tout couple (x, y, z) , on associe les coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) . Les relations qui lient $x, y, z, \rho, \theta, \phi$, sont :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \cos \theta \\ y = \rho \cos \phi \sin \theta \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}, \rho \in \mathbf{R}^+, \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi[.$$

ϕ est l'angle latitude, θ est l'angle longitude. Voir la figure.



Coordonnées cylindriques et sphériques

On peut remplacer la latitude ϕ par la Co-latitude ψ , ces 2 angles sont complémentaires : $\psi + \phi = \frac{\pi}{2}$, on a donc les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \sin \psi \cos \theta \\ y = \rho \sin \psi \sin \theta \\ z = \rho \cos \psi \end{cases}, \rho \in \mathbf{R}^+, \psi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi[.$$

Exercice

Soit $M \in \mathbf{R}^3$, on appelle (r, θ, z) les coordonnées cylindriques et (ρ, θ, ϕ) les coordonnées sphériques. Rappeler les relations permettant d'obtenir (x, y, z) en fonction de ces coordonnées. Exprimer r et ρ à l'aide de x, y, z

Solution

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, r \in \mathbf{R}^+, \theta \in [0, 2\pi[, z \in \mathbf{R}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \begin{cases} x = \rho \cos \phi \cos \theta \\ y = \rho \cos \phi \sin \theta \\ z = \rho \sin \phi \end{cases}, \rho \in \mathbf{R}^+, \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi[$$

2-Vecteur gradient

Définition et propriétés du gradient

Soit f une fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} différentiable, on appelle vecteur gradient de f et on note $\overrightarrow{\text{grad}} f$, le champ de vecteurs dont les composantes sont données par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}, \text{ on note également } \overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \vec{\nabla} f(M)$$

On a défini le vecteur gradient d'une fonction différentiable sur \mathbf{R}^3 , on pourrait bien sûr définir de façon similaire le gradient d'une fonction différentiable sur \mathbf{R}^2 et de façon plus générale sur \mathbf{R}^n .

Si α est une constante réelle, si f et g sont deux fonctions différentiables, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(f + g) &= \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g \\ \overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f) &= \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f \end{aligned}$$

3-Gradient en coordonnées polaires et cylindrique

Si f est une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} différentiable, si le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , le vecteur gradient en M est défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}$$

Si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point M de \mathbf{R}^2 , différent de O , on définit une nouvelle base orthonormée du plan (\vec{u}, \vec{v}) :

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, \quad \vec{v} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Si f est une fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , différentiable en M , on définit la fonction g par $g(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. On a alors l'expression du gradient suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)\vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)\vec{v}$$

Si r , θ et z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de \mathbf{R}^3 n'appartenant pas à Oz , on définit les vecteurs :

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}, \quad \vec{v} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Si f est une fonction de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R} , différentiable en M , on définit la fonction g par $g(r, \theta, z) = f(r \cos\theta, r \sin\theta, z)$. On a alors l'expression du gradient suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos\theta, r \sin\theta, z) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z)\vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, z)\vec{v} + \frac{\partial g}{\partial z}(r, \theta, z)\vec{k}$$

4-Vecteur rotationnel

Soit \vec{V} un champ de vecteurs dont les composantes P, Q, R sont des fonctions différentiable sur \mathbf{R}^3 , on dit que \vec{V} est différentiable.

On appelle rotationnel de \vec{V} et on note $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$, le champ de vecteurs dont les composantes sont données par :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, on a les relations :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{V}_1) + \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{V}_2),$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{V}),$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V}$$

5-Champ dérivant d un potentiel (scalaire)

Soit \vec{V} un champ de vecteurs défini sur \mathbf{R}^3 dont les composantes P, Q, R admettent des dérivées partielles premières continues, supposons que le rotationnel de \vec{V} soit nul, alors il existe une fonction f , définie à une constante additive près, qui vérifie $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{V}$.

On dit alors que le champ \vec{V} dérive du potentiel scalaire f .

Exemple

Soit le champ de vecteurs défini par :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2xyz^3 + \cos y \\ x^2z^3 - x \sin y + e^z \\ 3x^2yz^2 + ye^z \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$, donc le champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel f que nous allons calculer maintenant.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xyz^3 + \cos y \implies f(x, y, z) = x^2yz^3 + x \cos y + f_1(y, z)$$

On procède comme pour le calcul de primitives de fonctions d'une variable, ici y, z jouent le rôle de paramètres et bien sûr la "constante" additive est une fonction de y, z . On tient compte de ce premier résultat dans la suite des calculs.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2z^3 - x \sin y + e^z = x^2z^3 - x \sin y + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y, z) \implies f_1(y, z) = ye^z + f_2(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3x^2yz^2 + ye^z = 3x^2yz^2 + ye^z + f_2'(z) \implies f_2(z) = c$$

On a donc obtenu :

$$f(x, y, z) = x^2yz^3 + x \cos y + ye^z + c$$

6- Divergence d un champ de vecteur

Soit \vec{V} un champ de vecteurs dont les composantes P, Q, R sont différentiables, on définit la fonction divergence par :

$$\text{div } \vec{V}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

Si f est une fonction différentiable,

si α est une constante, si \vec{V}_1, \vec{V}_2 sont des champs de vecteurs différentiables, on a les relations :

$$\text{div } (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \text{div } (\vec{V}_1) + \text{div } (\vec{V}_2),$$

$$\text{div } (\alpha \vec{V}) = \alpha \text{div } (\vec{V}),$$

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f \operatorname{div}(\vec{V}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{V}$$

$$\operatorname{div}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_2$$

Remarque : la divergence d'un champ de vecteurs est un scalaire

7- Champ dérivant d'un potentiel vecteur

On dit que le champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel vecteur, s'il existe un champ de vecteurs \vec{A} deux fois continûment différentiable qui vérifie

$$\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} est que

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

8- Laplacien d'une fonction

Soit f une fonction définie sur \mathbf{R}^3 qui admet des dérivées partielles secondes, on définit la fonction laplacien par :

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$$

Si α est une constante réelle, si f et g sont deux fonctions qui admettent des dérivées partielles secondes, on a :

$$\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g - g \overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = f \Delta g - g \Delta f$$

Expressions du Laplacien en coordonnées polaires, cylindrique et sphérique

Si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point M de \mathbf{R}^2 ($M \neq O$), si f est une fonction de 2 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

Si r, θ, z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de \mathbf{R}^3 ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r, \theta, z)$$

Si ρ, θ, ϕ sont les coordonnées sphériques d'un point M de \mathbf{R}^3 ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \cos \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \phi)$, on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(\rho \cos \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \phi) =$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta, \phi) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta, \phi) + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta, \phi) - \frac{\tan \phi}{\rho^2} \frac{\partial g}{\partial \phi}(\rho, \theta, \phi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(\rho, \theta, \phi)$$

Bibliographie

- [1] Michel Chrysos « L'essentiel d'électromagnétisme - Licence, IUT », Dunod, février 2020 .
- [2] Yves Granjon « Electromagnétisme et électrostatique - Exercices et méthodes », (Dunod 2019) .
- [3] J.M. Raimond « Theorie Classique des Champs » Université Pierre et Marie Curie Laboratoire Kastler Brossel, September 12, 2016.
- [4] A. Fizazi, " Electricité et Magnétisme", OPU, 2012.
- [5].Zouhaier HAFSIA « Notes de cours d'électrostatique (classes préparatoires) Exercices et examens corrigés » , Ecole Supérieure des Sciences et Technique de Tunis ; 2009-2010.
- [6] émile amzallag - joseph cipriani - jocelyne ben aïm - norbert piccioli « la physique en fac électrostatique et électrocinétique) », dunod, paris, 2006 .
- [7] J. Faget et J. Mazzaschi, "Travaux dirigés de physique, Généralités", Vuibert, 1970.
- [8] E. Amzallag, J. Cipriani, J. Ben Naim et N. Piccioli "La physique du Fac, Electrostatique et Electrocinétique" 2ième Edition, Edi-Science, 2006.
- [9]. J-P. perez, r. carles, r. fleckinger. Electromagnétisme - Fondements et applications Ed. Masson Paris (2001).
- [10] D. Sivoukhine, "Cours de physique Général, tome III électricité" Union Soviétique, traduction Française, Edition Mir, 1987.
- [11] J.L. Queyrel, J. Mesplède, " Précis de physique, Electricité 2, cours, exercices résolus", Bréal,1985.
- [12] M.Berlin, J.P. Faroux et J. Renault, "Electromagnétisme 1, Electrostatique", Dunod, 1977.
- [13] Tilmatine Amar « propagation du champ électromagnétique », polycopié de cours.