Ministry of Higher Education and Scientific Research
BadjiMokhtar Annaba University
Faculty of Technology

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة باجي مختار.عنابة
كلية التكنولوجيا

Département: Génie Civil

Polycopié pédagogique

Dossier numéro: UBMA / F.T / 03 / 2024

Titre

Cours de mécanique des solides déformables

Cours Destiné aux étudiants en Master I Géotechnique

Elaboré par: OTMANI-BENMEHIDI Nadia

Année: 2023/2024

Introduction générale

La mécanique des solides déformables est une branche essentielle de la mécanique qui étudie le comportement des matériaux et des structures sous l'effet des charges extérieures. Contrairement à la mécanique des solides indéformables, qui suppose que les corps conservent leur forme et leurs dimensions sous l'action des forces, la mécanique des solides déformables prend en compte les modifications de forme et les variations internes de contrainte et de déformation.

Ce cours vise à fournir aux étudiants les concepts fondamentaux nécessaires à la compréhension et à l'analyse du comportement mécanique des matériaux de structure. Il couvre les notions de base telles que les tenseurs des contraintes et des déformations, les lois de comportement des matériaux (comme l'élasticité et la plasticité), ainsi que les critères de ruine. L'objectif est de doter les futurs ingénieurs et chercheurs des outils théoriques et pratiques permettant de modéliser et de dimensionner des éléments structurels soumis à diverses sollicitations.

L'étude de la mécanique des solides déformables trouve des applications directes dans de nombreux domaines de l'ingénierie, notamment le génie civil, l'aéronautique, la construction mécanique et l'industrie manufacturière. Comprendre les phénomènes de déformation et de rupture permet d'améliorer la sécurité, la durabilité et la performance des structures et des matériaux utilisés dans ces secteurs.

Ce polycopié de cours présente les principes théoriques accompagnés d'exemples et d'applications pratiques. Il est destiné aux étudiants en génie civil, spécialité Master I géotechnique et à toute personne souhaitant approfondir ses connaissances en mécanique des matériaux et des structures.

Table des matières

Introduction générale……..……1
Syllabus……..2
Liste des figures…….3
Liste des symboles…….5
Chapitre 1 Mécanismes physiques de déformation et de rupture 11
I. Mécanismes physiques de deformation 11
I.1 Introduction et historique..... 11
I.2 Comportement des matériaux 12
I.3 Mécanismes physiques de déformation 14
II. Mécanismes de la rupture 21
II.1 Ruptures fragiles, ruptures ductile 21
II.2 Rupture par clivage 22
II.3 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception 23
II.4 Facteurs influençant les propriétés mécaniques 28
Chapitre 2. Classification rhéologique et caractérisation expérimentale 31
I. Classification rhéologique..... 31
I.1 Introduction 31
I.2 Comportement mécanique des solides Hookiens et des Fluides newtoniens..... 31
I.3 Équations rhéologiques d'état 34
II. Caractérisation expérimentale 34
II.1 Essais mécaniques 35
II.1.2 Comportement en traction des matériaux 36
II.2 Charge-décharge 39
Chapitre 3. Elasticité Viscoélasticité..... 41
I. Elasticité 42
I.1 Introduction 42
I.2 Notion de Contrainte autour d'un point..... 42
I.3 Directions et contraintes principales 46
II.1 Loi de Hooke, Cas d'un chargement uniaxial 53
II.2 Cas de chargement tridimensionnel (3D)..... 54
III. Viscoélasticité 55
III.1 Lois de Comportement et Modèles Rhéologiques 56

Exercices corrigés…….57
Chapitre 4. Plasticité et viscoplasticité..... 64
I.1 Définition 65
I.2 Caractéristiques des courbes de charge uni axiale (1D) 65
I.3 Description mathématique du comportement plastique uni axial (1D)..... 67
I.4 Choix des lois de comportement 68
I.5 Exemples de critères de plasticité..... 69
II. VISCOPLASTICITÉ 73
II.1 Viscoplasticité uni axiale 73
Exercices ...……..73
Références ……...……75

Semestre: 2
Unité d'enseignement: UEF 1.2.1
Matière 1 : Mécanique des solides déformables
VHS: 67h30 (Cours: 1h30, TD: 1h30)
Crédits: 4
Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement:

Ce cours a pour objet d'initier l'étudiant aux notions théoriques et expérimentales de mécanique des solides déformables.

Connaissances préalables recommandées:

Mécanique rationnelle, Thermodynamique, Mécanique des milieux continus.

Contenu de la matière:

Chapitre 1.	Mécanismes physiques de déformation et de rupture	**(2 Semaines)**
Chapitre 2.	Classification rhéologique et caractérisation expérimentale	**(3 Semaines)**
Chapitre 3.	Elasticité et viscoélasticité	**(5 Semaines)**
Chapitre 4.	Plasticité et viscoplasticité	**(5 Semaines)**

Mode d'évaluation:

Contrôle continu: 40%; Examen: 60%

Références bibliographiques:

1. *J. Lemaitre, J.L. Chaboche.* ***Mécanique des solides déformables et endommageables****. Ed. Dunod.*
2. *J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat.* ***Mécanique des matériaux solides****. Ed. Dunod.*
3. *D. François, A. Pineau, A. Zaoui.* ***Elasticité et plasticité****. Ed. Lavoisier.*
4. *S. Timoshenko, J.M. Goodier.* ***Théorie de l'élasticité****. Ed. Librairie Polytechnique Ch. Béranger.*
5. *J. Salençon.* ***Elastoplasticité****. Ed. Ecole polytechnique, France.*
6. *B. Halphen, J. Salençon.* ***Elasto-plasticité****. Ed. Presses desponts, France.*
7. *V.A. Lubarda.* ***Elastoplasticity theory****. Ed. CRC Press.*
8. *R. Richards Jr.* ***Principles of solid mechanics****. Ed. CRC Press.*
9. *Robert J. Asaro, Vlado A. Lubarda.* ***Mechanics of solid and materials****. Ed. Cambridge UniversityPress.*

Liste des figures

Figure 1. Les quatre pôles de base de la science et du génie des matériaux 11
Figure 2. Microsture granulaire : sphérolites dans un polymère semi-cristallin 13
Figure 3. Alliage base Nckel Inconel 718 (microscope optique) 13
Figure 4. Détails des colonnes basaltiques de la Chaussée des Géants en Irlande du Nord. ... 14
Figure 5. Matériaux naturels et matériaux synthétiques..... 14
Figure 6. Distribution du module de Young pour les différentes classes des matériaux. 15
Figure 7. Types de monocristals 16
Figure 8. Monocristal et polycristal de Cuivre. (a) maille cubique à face centrée (cfc) (b) : Traces de glissement. 17
Figure 9. Différentes échelles dans un polycristal : (a) : Monocristal dans ses axes de symétrie. (b) : Grain (à noter la rotation des axes de symétrie). (c) Polycristal (à noter que chaque grain a son orientation propre). 17
Figure 10. Mécanismes de déformation des réseaux atomiques 18
Figure 11. Niveaux des défauts cristallins 18
Figure 12. Création de déformations par glissement..... 19
Figure 13. Polyéthylène (C2H4) n 20
Figure 14. Liaison covalente des atomes Cl..... 20
Figure 15. Liaison van der Waals..... 21
Figure 16. Mécanismes élémentaires de rupture de cristaux de métaux 21
Figure 17. Schéma de la rupture par clivage 22
Figure 18. Contrainte de liaison interatomique 23
Figure 19. Approches utilisées pour le dimensionnement des structures. (a) Approche classique. (b) Approche utilisant la MLR 25
Figure 20. Fissure de longueur 2a dans une plaque infinie 26
Figure 21. Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR..... 26
Figure 22. Modes de déplacement des lèvres de la fissure: (a)- mode I ou mode d'ouverture ; (b)- mode II ou de cisaillement plan ; (c)- mode III ou de cisaillement antiplan..... 27
Figure 23. Schématisation de la traction et du cisaillement sur un élément de volume..... 31
Figure 24. Shématisation d'un solide hookien 32
Figure 25. Classification des fluides selon leur comportement rhéologique 33
Figure 26. Comportements des fluides non-Newtoniens en fontion du temps. (a) Corps thixotropes (b) Corps antithixotropes..... 34
Figure 27. Machine de l'essai de traction 36

Figure 28. Loi de comportement en traction (matériau ductile) 37
Figure 29. Matériaux sensibles à la vitesse de chargement. (a) : mise en évidence de l'influence de la vitesse de chargement..... 37
Figure 30. Essai de fluage (traits pleins : matériau de type solide)..... 38
Figure 31. Résultats d'un essai de traction sur un acier à haute température..... 38
Figure 32. Essai de fluage sur une fonte 38
Figure 33. Essai de relaxation des contraintes (pointillés : matériau de type fluide)..... 39
Figure 34. Essai de charge-décharge. (a) : Comportement élastique (éventuellement non linéaire). (b) : Effet Bauschinger. (c) : Endommagement couplé à la plasticité 39
Figure 35. Shématisation de la déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte..... 42
Figure 36. Solide soumis à un chargement extérieur (à gauche) et solide coupé (à droite)..... 43
Figure 37. Vecteur contrainte sur la facette n en M..... 43
Figure 38. (a) Projection d'un vecteur sur un axe. (b) Vecteur contrainte sur la facette ι en M 44
Figure 39. Efforts sur les facettes n et $-\ n$ 44
Figure 40. Equilibre du tétraèdre (Cauchy)..... 44
Figure 41. Vecteurs contraintes sur les trois facettes $i, j\ et\ k$ en M..... 45
Figure 42. Solide en équilibre 46
Figure 43. Face et contrainte principale en M..... 47
Figure 44. Faces et contraintes principales en M 47
Figure 45. Projection des forces suivant les droites portant σ, τ 48
Figure 46. Cercle de mohr pour la famille des plans σ_2 49
Figure 47. Triangle curviligne formé par les cercles de mohr (1), (2) et (3) 49
Figure 48. Transformation du vecteur $dx0$ 50
Figure 49. Solide dans un état principal 52
Figure 50. Cercle de Mohr des déformations 53
Figure 51. Déformation d'un corps dans le plan (à 2 D)..... 53
Figure 52. Modèle viscoélastique de Maxwell..... 57
Figure 53. Modèle de Kelvin-Voigt 58
Figure 54. Test de fluage : réponse d'un matériau viscoélastique à l'application d'une contrainte 59
Figure 55. Test de relaxation: réponse d'un matériau viscoélastique à l'application d'une déformation constante pendant un temps t et à son relâchement. 59

Figure 56. Courbe de charge monotone jusqu'à rupture pour un métal en traction uni axiale. (a) Représentation en valeurs nominales (courbe de l'ingénieur). (b) Représentation en valeurs vraies 65
Figure 57. Courbe de charge présentant un cycle de charge/décharge 66
Figure 58. Courbe de charge présentant plusieurs cycles de charge/décharge 66
Figure 59. Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle de plasticité parfaite (gauche) et modèle rhéologique associé, représentant un patin à frottement sec (droite). 67
Figure 60. Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle d'élasto-plasticité parfaite (gauche) et modèle rhéologique associé, représentant un patin à frottement sec en série avec un ressort élastique (droite). 68
Figure 61. Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle de comportement plastique rigide écrouissant général (gauche) et pour le cas simplifié de l'´ecrouissage linéaire (droite). 68
Figure 62. Critère de Rankine 70
Figure 63. Critère de Tresca. 70
Figure 64. Critère de Von Mises : a) Dans le repère n_1, n_2, n_(3);b). En projection 71
Figure 65. Critère de Mohr-Coulomb. 72
Figure 66. Modèle de Bingham généralisé. 73
Figure 67. Modèle Bingham élasto-viscoplastique 73

Liste des symboles

σ_E : limite d'élasticité

G_C : valeur de l'énergie de Griffith critique

σ^{∞} : contrainte nominale de traction

Kc : facteur d'intensité de contrainte (ténacité)

a_C : longueur de défaut critique

σ : contrainte normale

τ : contrainte de cisaillement

ε : déformation pure

E : module en traction ou module d'Young

D : la complaisance élastique en traction, inverse du module de traction

G : module de cisaillement

J : complaisance de cisaillement

γ : déformation de cisaillement

$\dot{\gamma}$: vitesse de cisaillement

μ : viscosité dynamique du fluide

$(\dot{\varepsilon})$: tenseur de gradient de vitesse

ν : coefficient de Poisson du matériau

$[\varepsilon(M)]$: tenseur de déformation en un point

$[\Omega(M)]$: tenseur de rotation en un point

σ_y : seuil de plastification

σ_R : résistance à la rupture

ε_R : déformation à rupture

ε_P : déformation plastique

σ_Y: fonction d'écruissage

Chapitre 1

Mécanismes physiques de Déformation et de Rupture

Chapitre 1 Mécanismes physiques de déformation et de rupture

I. Mécanismes physiques de deformation

I.1 Introduction et historique

Un matériau est une matière première choisie en raison de propriétés d'usage spécifiques. Les objets qui nous entourent, que nous manipulons quotidiennement, sont tous constitués d'une matière choisie pour sa bonne adaptation à la fonction de l'objet en question et au procédé utilisé pour conférer à l'objet la forme souhaitée. La notion de matériau est donc rigoureusement indissociable de l''intérêt que peut présenter la substance en question pour l'obtention d'un objet fini.

La maîtrise de nouveaux matériaux a été à l'origine de plusieurs révolutions dans l'histoire des technologies. Les âges de la préhistoire sont d'ailleurs définis par les matériaux employés : Age de la pierre, Age du bronze où celui du fer. Aujourd'hui, le nombre de matériaux ou en tout cas le nombre de références est considérable et en constante augmentation. En effet, la science des matériaux permet d'étudier les matériaux adaptés à chaque nouvelle application. Selon leurs utilisations, on pourra distinguer deux grandes catégories de matériaux :

Les matériaux de structure, qu'on utilise essentiellement pour leurs capacités à soutenir des sollicitations mécaniques et thermiques.

Les matériaux fonctionnels, qu'on utilise pour leurs propriétés physiques, telles que : conductivité ou semi-conductivité électrique, magnétisme, propriétés optiques.

La science des matériaux traite l'ensemble des matériaux, métaux, céramiques, polymères, composites de manière unifiée avec les mêmes concepts théoriques et les mêmes outils expérimentaux. Comme le schématise la (Figure 1) la science et le génie des matériaux comportent quatre pôles principaux : synthèse, fabrication et transformation, composition et structure, propriétés et performances. Les différents comportements (à la fabrication comme à l'utilisation) ainsi que les facteurs économiques qui y sont associés caractérisent la performance d'un matériau.

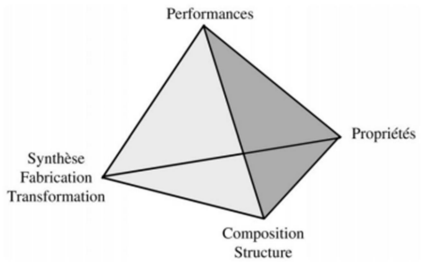


Figure 1. Les quatre pôles de base de la science et du génie des matériaux [3]

Ces quatre pôles sont étroitement associés. Le matériau est élaboré au cours de sa synthèse (polymère) ou de sa fabrication (métaux, alliages, céramiques, etc.). La transformation a comme objectif de mettre en forme le matériau élaboré et d'en préparer un objet fini caractérisé par son comportement. La transformation se fait, en règle générale, en plusieurs étapes. Par exemple, la préparation d'une pièce de carrosserie fait intervenir successivement le laminage de la tôle à partir du lingot d'acier, l'emboutissage de la tôle pour former la pièce et une série d'opérations annexes de finissage (peinture, etc.). Pour atteindre des propriétés optimales, il est indispensable de maîtriser la structure et la composition du matériau et il faut par conséquent posséder une série de techniques d'analyse très sophistiquées.

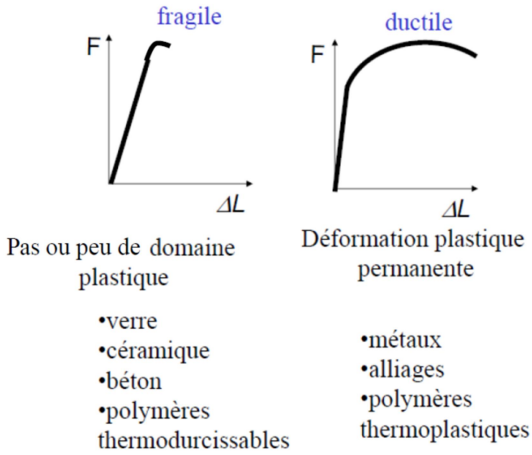
Ce sont les contributions multiples de la science et du génie des matériaux qui ont complètement remodelé le monde qui nous entoure en libérant l'homme d'un grand nombre de contraintes liées à notre environnement.

I.2 Comportement des matériaux

Les matériaux présentent une étonnante diversité de comportement. Lorsqu'on leur applique des efforts, certains matériaux s'écoulent à la manière de fluides, d'autres résistent comme des solides. D'autres enfin commencent par résister mais, si l'on augmente l'effort, finissent par céder et s'écoulent. Parmi ces matériaux dits solides certains sont fragiles et cassent sans déformation apparente importante, d'autres se déforment notablement avant rupture (on les dit ductiles). Néanmoins ces classifications sont toujours relatives (un métal est fragile à froid mais ductile à chaud) et parfois (un milieu granulaire s'´ecoule comme un fluide, mais, une fois compacté, présente la cohésion d'un solide).

I.2.1 Sollicitation monotone (cas de la traction uniaxiale)

On distingue souvent les matériaux cristallins par leur « comportement » fragile ou ductile,



I.2 .2 Microstructure granulaire d'un solide

<u>Exemples</u>

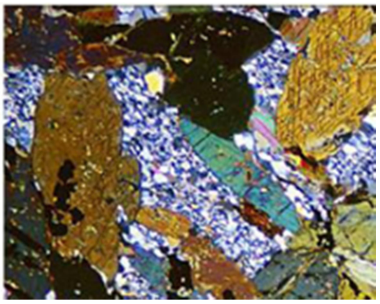


Figure 2. Microsture granulaire : sphérolites dans un polymère semi-cristallin

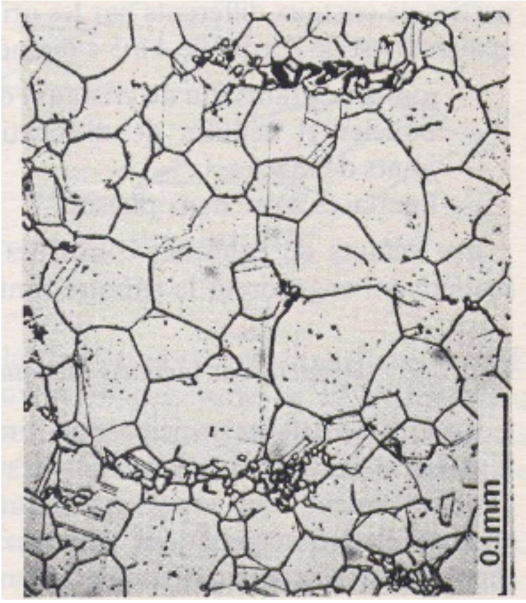


Figure 3. Alliage base Nckel Inconel 718 (microscope optique)

Les géomatériaux sont des matériaux fragiles, comme le béton, qui supportent mal les contraintes de traction. Comme pour le rail du RER, des chocs thermiques peuvent engendrer des tractions assez fortes pour provoquer leur fissuration. C'est le cas par exemple dans les r´egions volcaniques où, après une éruption, les laves se solidifient tout en se fissurant lors de leur refroidissement.

Ces fissures se d´eveloppent suivant un réseau quasi-périodique formant des cylindres, appel´es colonnes ou orgues basaltiques, dont les sections sont des polygones réguliers. Ainsi en Irlande du Nord, à la Chaussée des Géants, on peut observer un réseau de 40 000 colonnes hexagonales verticales juxtaposées. S'il est admis que c'est la contraction thermique qui est à la base de cette fissuration, il n'existe pas aujourd'hui de mode les quantitatifs capable d'expliquer la forme et la taille du réseau périodique.

Figure 4. Détails des colonnes basaltiques de la Chaussée des Géants en Irlande du Nord.

I.3 Mécanismes physiques de déformation

Si la variété des comportements macroscopiques des matériaux est grande, celle des mécanismes microscopiques de déformation l'est plus encore. Les milieux granulaires ont un comportement de type plastique et le mécanisme principal est le glissement relatif (avec frottement) des grains les uns par rapport aux autres. Les polymères ont également un comportement plastique dans une certaine gamme de température et les mécanismes principaux de déformation sont alors le déploiement et les mouvements relatifs des chaines de monomères.

I.3.1 Liaison intermoléculaire dans les matériaux

- Définition

Un matériau est une matière que l'Homme façonne, transforme par découpe, pliage, polissage… pour en faire des objets (ouvrages, machines…).

Il existe plusieurs familles de matériaux (Figure 5): **les matériaux naturels et les matériaux synthétiques** (fabriqués par l'Homme).

Figure 5. Matériaux naturels et matériaux synthétiques

Les matériaux de structure peuvent être classés en quatre grandes familles, selon la nature des liaisons entre les atomes, dont on peut résumer les propriétés principales comme suit :

(A) Les métaux (liaisons métalliques): On les obtient soit par réduction à haute température de leurs oxydes en présence de carbone (ex : fer) ou par électrolyse à haute température (ex : aluminium). Ce sont les matériaux les plus employés pour les applications structurales (90% ferreux, les non-ferreux étant des alliages de Al, Cu, Ni et Ti).

(B) Les céramiques (liaisons ioniques, solides inorganiques): Ce sont les matériaux les plus anciens et les plus couramment utilisés en Génie Civil (pierre, brique, verre…).

(C) Les polymères (liaisons covalentes + Van der Waals ou Hydrogène, solides organiques) : Ces matériaux sont récents. Ce sont de larges macromolécules organiques, comme par exemple le polyéthylène -(-C2H4-)n- dont le nombre de monomères n varie entre 100 et 1000.

(D) Les composites et matériaux structuraux, ce sont des combinaisons hétérogènes de matériaux issus de ces trois familles, mais dont la structure est définie en fonction de l'application (béton armé, composite carbone - époxy etc…) ou bien se développe naturellement sous l'effet des sollicitations mécaniques ou thermique (ex. bois : fibres de lignine dans une matrice de cellulose, ou métaux texturés par déformation plastique intense). La Figure 6 présente la distribution du module de Young pour les différentes classes des matériaux.

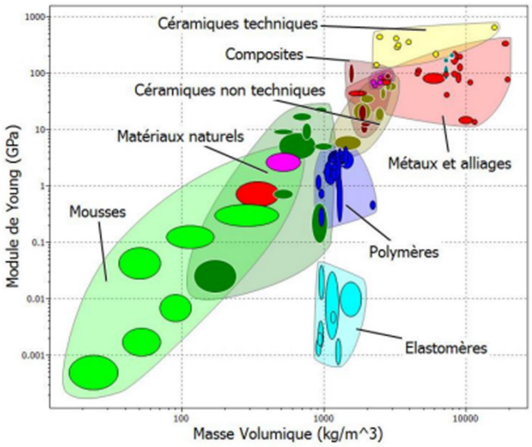


Figure 6. Distribution du module de Young pour les différentes classes des matériaux [3]

Principales propriétés des matériaux

On distingue plusieurs types de propriétés des matériaux selon leurs utilisations. Par exemple, dans le cas du développement des ordinateurs, ce sont essentiellement les propriétés

physiques qui sont en cause. Par contre, dans le cas du développement des moteurs d'avions, ce sont les propriétés mécaniques et chimiques qui sont déterminantes.

Les principales propriétés des matériaux se regroupent donc en :

- **Propriétés mécaniques** : Modules d'élasticité - Limite d'élasticité - Ecrouissage - Ductilité – Viscosité - Vitesse de fluage - Amortissement - Charge à la rupture - Résistance à la fatigue, à l'usure …
- **Propriétés physiques:** Conductibilité thermique, chaleur spécifique, - Température - Chaleur latente de transformation - Energie de surface, de liaison, ...
- **Propriétés chimiques** - Résistance à la corrosion, à l'oxydation, - stabilité chimique,

La caractérisation des propriétés

La caractérisation des matériaux a pour but d'apporter une meilleure connaissanceà leurs égard, (mécanismes physiques qui provoquent ou accompagnent la déformation, effets mécaniques macroscopiques), donc de réduire les incertitudes et d'augmenter la fiabilité des modèles utilisés.

Le travail sur les modèles numériques : permet d'améliorer la représentation des pièces, structures ou domaines calculés (par amélioration des algorithmes, qui autorisent le traitement de modèles numériques plus importants, par exemple 3D au lieu de 2D).

I.3.2 Notion d'élément de volume représentatif (EVR)

A l'´echelle macroscopique de l'ingénieur (longueur caractéristique, le centimètre), un métal parait homogène. Si l'on observe un échantillon de ce métal à l'´echelle de la centaine de microns, on s'aperçoit tout d'abord que l'´echantillon qui paraissait homogène est en fait formé de grains élémentaires, dont on distingue assez nettement les joints : il s'agit en fait d'un polycristal, c'est à dire d'un assemblage de cristaux (Figure 7).

Exemples de motifs élémentaires caractéristiques d'états cristallins

Structure cristalline : caractérisée par une distribution périodique d'atomes ordonnés à grande distance.

Figure 7. Types de monocristals

- (cc) maille cubique centrée
- (cfc) maille cubique à face centrée
- (hc) maille hexagonale compacte

I.3.3 Mécanismes résultants dans la matière

Les mécanismes ou phénomènes qui peuvent prendre naissance dans les matériaux cristallins résultent dans la distribution des motifs élémentaires qui doit être en principe régulière ; suite à une sollicitation extérieure (mécanique ou thermique), des mécanismes de déformation et de rupture apparaissent. Lorsqu'on observe les grains d'un échantillon au laboratoire, on remarque que chacun se déforme en fonction de son orientation propre tout en maintenant la compatibilité de la déformation entre grains adjacents. A une échelle plus fine, la déformation de chaque grain résulte de la déformation du réseau atomique qui le constitue. On peut citer comme exemple le phénomène de glissement d'un réseau atomique (Figure 8(b)).

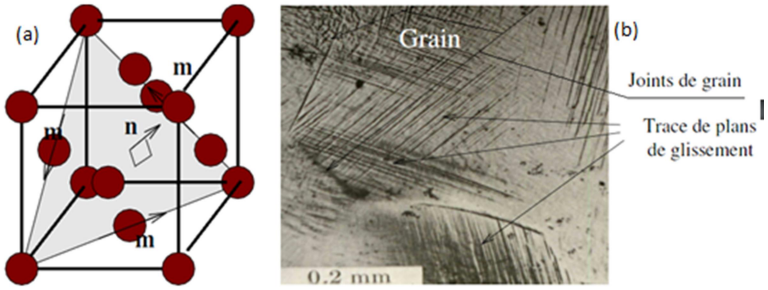


Figure 8. Monocristal et polycristal de Cuivre. (a) maille cubique à face centrée (cfc) (b) : Traces de glissement.

On peut noter que dans des grains d'orientations différentes les glissements s'effectuent dans des directions différentes (Figure 9).

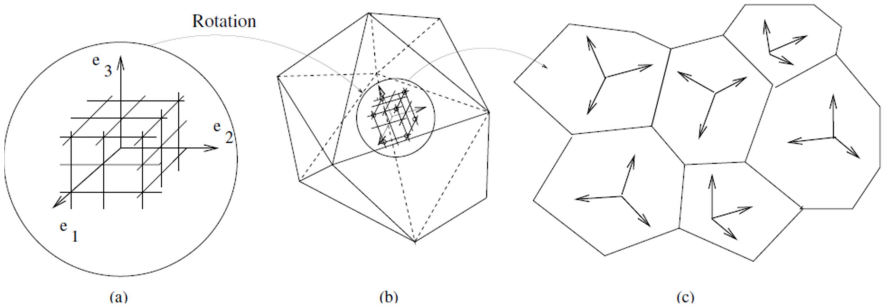


Figure 9. Différentes échelles dans un polycristal : (a) : Monocristal dans ses axes de symétrie. (b) : Grain (à noter la rotation des axes de symétrie). (c) Polycristal (à noter que chaque grain a son orientation propre).

Les réseaux cristallins peuvent également présenter des défauts ponctuels, linéiques et/ou bidimensionnels (Figure 10).

- Ponctuels: <u>"lacunes" ou atomes étrangers</u>

- Linéiques : <u>dislocations (défauts d'empilement d'atomes)</u>

- Bidimensionnels : <u>joints de grains ou défauts d'empilement</u>

- Coin et vis : <u>dislocations (défauts d'empilement d'atomes dans les coins)</u>

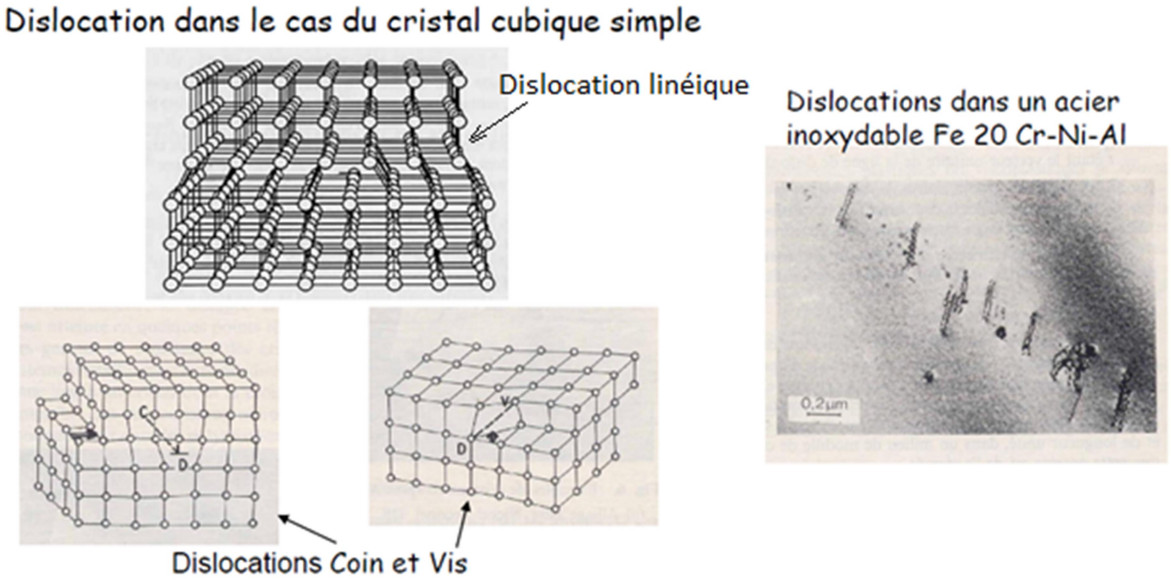


Figure 10. Mécanismes de déformation des réseaux atomiques

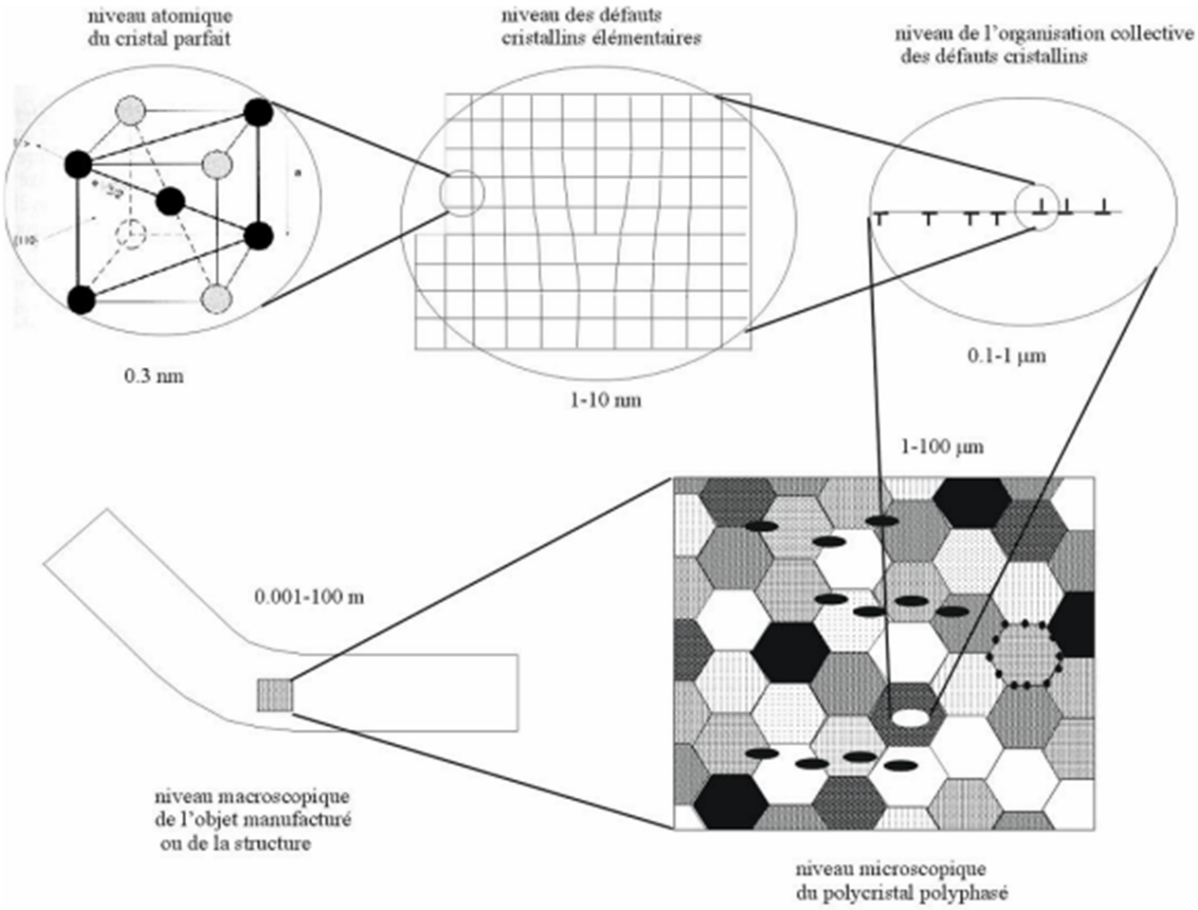
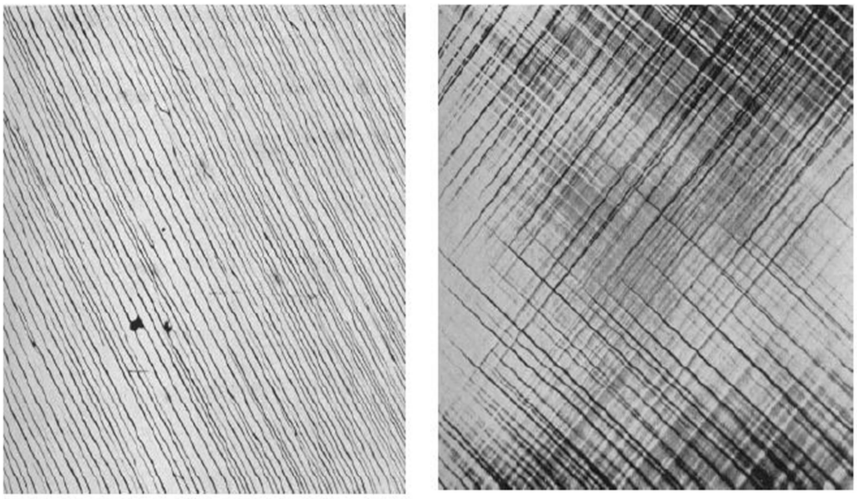


Figure 11. Niveaux des défauts cristallins[3]



Glissement simple Glissement double

Figure 12. Création de déformations par glissement

.

Le glissement est le mécanisme dominant de la plasticité. Les glissements successifs sur les différents plans, même de très faible amplitude lorsqu'ils sont considérés séparément, se cumulent pour former une déformation plastique macroscopique significative. Leurs traces sont visibles à l'´echelle des grains et même à l'´echelle du polycristal (figure 12).

I.3.4 Les polymers

Les **polymères** sont formés de très grosses molécules (jusqu'à des centaines de milliers d'atomes) se présentant sous forme de chaînes reliées entre elles par des liaisons de faible intensité. Ces chaînes se forment par polymérisation c-à-d par adjonction de petites unités (monomère) les unes aux autres.

- Structures et propriétés

Les polymères présentent des caractéristiques mécaniques propres. Ils présentent un comportement vitreux lorsqu'ils sont amorphes, des caractéristiques de fibres lorsqu'ils sont cristallisés mais également un comportement visco-élastique. Ces différents états dépendent principalement de la nature chimique du polymère et de la température. La nature chimique des macromolécules est liée à leur origine qui est soit naturelle, soit synthétique. Le paradoxe des macromolécules est que des chaînes très différentes par leur composition chimique peuvent avoir des propriétés physiques analogues. Certains polyesters ou silicones présentent des propriétés viscoélastiques analogues à certains hydrocarbures insaturés. À l'inverse, des polymères à chaînes chimiquement identiques peuvent avoir des propriétés physiques totalement différentes. Un même composé peut être hautement élastique ou complètement amorphe en fonction de la température et de l'arrangement macromoléculaire.

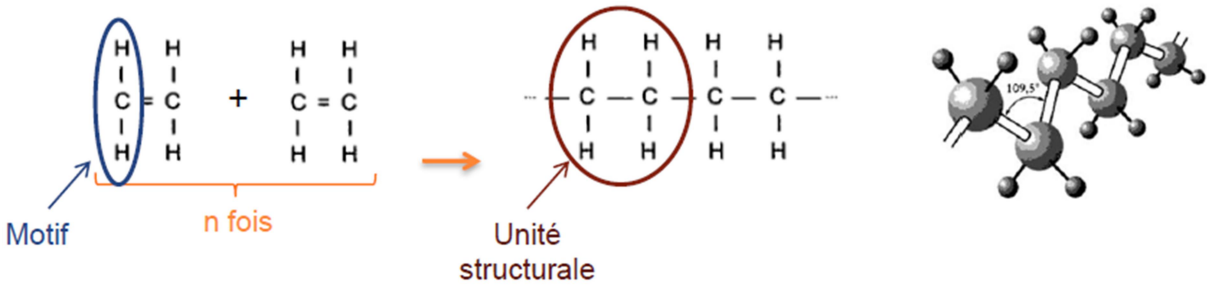


Figure 13. Polyéthylène (C2H4) n

I.3.5 Polymères thermoplastiques et polymères thermodurcissables

Dans le cadre des résines constituées de macromolécules pour réaliser des matières plastiques, deux types de comportement très différents sont décrits en fonction de la nature et de la structure des polymères les constituant :

Une **résine thermoplastique** est constituée de chaînes linéaires ou ramifiées à liaisons covalentes. Ces chaînes sont liées entre elles par des liaisons faibles de type Van der Waals et hydrogène par exemple. Les thermoplastiques peuvent être dissous dans certains solvants et se ramollissent à la chaleur d'où le terme « thermoplastique ».

Une **résine thermodurcissable** est constituée de chaînes linéaires réticulées entre-elles. Les chaînes sont liées dans l'espace par des liaisons fortes de type covalent. Nous sommes donc en présence d'un réseau tridimensionnel insoluble et infusible.

<u>Liaisons covalentes :</u> Une liaison covalente est une liaison chimique dans laquelle deux atomes se partagent deux électrons de leurs couches externes afin de former un doublet d'électrons liant les deux atomes. C'est une des forces qui produisent l'attraction mutuelle entre atomes.

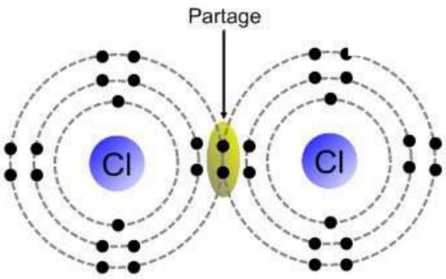


Figure 14. Liaison covalente des atomes Cl

<u>Liaisons van der Waals</u> : En physique et en chimie, une force de van der Waals, interaction de van der Waals ou liaison de van der Waals est un potentiel interatomique dû à une interaction électrique de faible intensité entre deux atomes ou molécules, ou entre une molécule et un cristal.

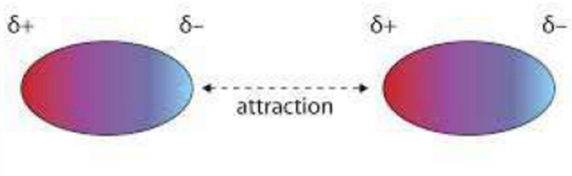


Figure 15. Liaison van der Waals

- Mécanismes des polymères thermoplastiques

Au chauffage → ramollissement → comportement fluide visqueux sous contrainte

Après refroidissement → redevient vitreux ou caoutchouteux

La transition qui se fait lors du chauffage est une transformation physique (non chimique) et réversible de la matière. Les mécanismes principaux de déformation sont alors le déploiement et les mouvements relatifs des chaines de monomères.

- Mécanismes des polymères thermodurcissables

Au chauffage → Dégradation possible (cracking) de la structure du polymère par rupture des chaînes primaires et des liaisons réticulées

Après refroidissement → Etat structural dégradé si le chauffage a été trop intense

-La cause de cette irréversibilité provient de la réticulation (~ jonction) des chaînes de polymère (suite par exemple au chauffage antérieur de ce dernier).

II. Mécanismes de la rupture

II.1 Ruptures fragiles, ruptures ductile

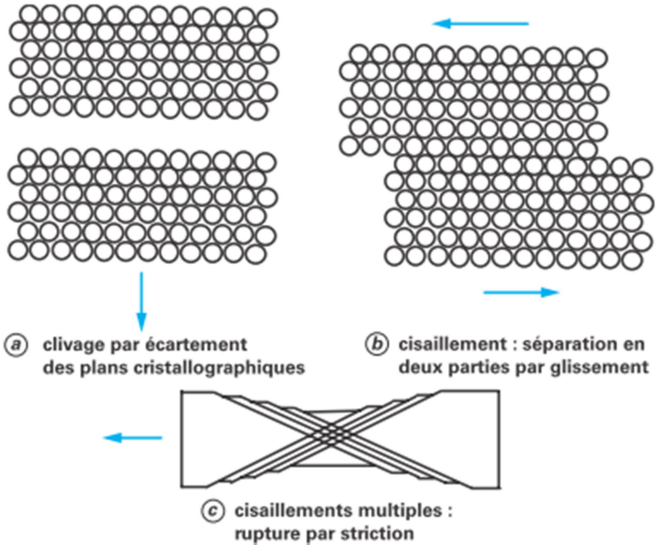


Figure 16. Mécanismes élémentaires de rupture de cristaux de métaux

Les métaux, constitués de cristaux, se rompent essentiellement de deux façons : soit par écartement des plans cristallographiques et il s'agit de rupture par clivage, soit par glissements le long de ces plans séparant la pièce en deux lorsque leurs amplitudes

deviennent excessives et il s'agit de rupture par cisaillement (Figure 16). Lorsque les joints de grains, qui sont à l'intersection de deux cristaux, sont moins résistants que ces derniers, la rupture suit ces joints et il s'agit de rupture intergranulaire.
Les ruptures par clivage sont de nature fragile, alors que les ruptures par cisaillement sont de nature ductile.

II.2 Rupture par clivage

La rupture par clivage est une rupture fragile qui s'accompagne de très peu de déformation plastique. Dans les matériaux métalliques, le clivage opère par rupture des liaisons interatomiques dans une direction perpendiculaire au plan de rupture. La figure 17 montre l'amorçage d'une microfissure associée à la rupture par clivage d'un carbure (particule fragile) selon le modèle de Smith.

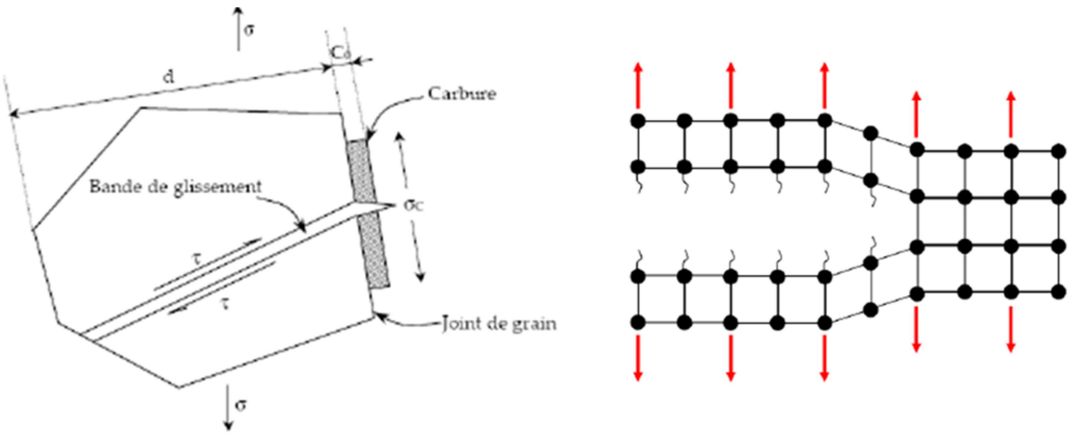


Figure 17. Schéma de la rupture par clivage

La figure 16 schématise ce type d'endommagement par rupture des liaisons interatomiques.
Pour calculer la contrainte de liaison atomique, il est nécessaire d'introduire la distance interatomique r, puis de considérer la relation entre le déplacement des atomes, autour de leur position d'équilibre r_0, et la force appliquée. Cette force est la somme d'une composante d'attraction en $1/r^2$ et d'une composante de répulsion en $-1/r^9$. La contrainte de liaison est de la Forme :

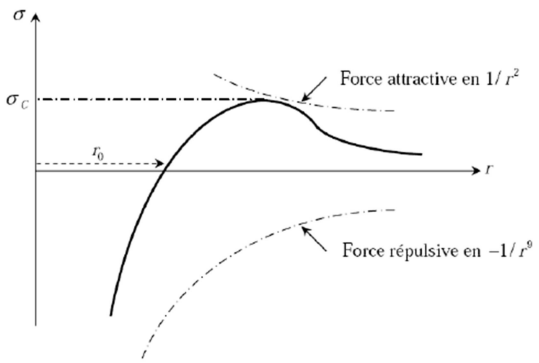


Figure 18. Contrainte de liaison interatomique

La contrainte théorique de clivage σc est définie par la condition :

$$\sigma_c \approx \frac{E}{24}$$

Cette contrainte théorique de clivage est plus élevée de plusieurs ordres de grandeur que la contrainte mesurée expérimentalement. En fait les défauts sous forme d'entaille aiguë concentrent les contraintes dans leur voisinage et provoquent ainsi des mécanismes d'amplification, si bien que la contrainte locale qui correspond à la contrainte théorique de clivage est bien plus élevée que la contrainte appliquée expérimentalement.

II.3 Utilisation de la mécanique de la rupture en conception

II .3.1 Introduction

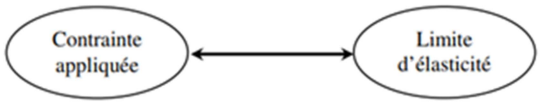
Eviter la rupture n'est pas en soi une idée nouvelle : les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons ou ceux de l'empire romain nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler (pyramides, ponts …). Les matériaux utilisés avant la révolution industrielle étaient cependant limités pour l'essentiel au bois de construction, à la pierre ou à la brique et au mortier. La brique et le mortier sont relativement fragiles lorsqu'ils sont utilisés en traction. Pour ces raisons, toutes ces structures anciennes (pyramides, ponts romains…) qui ont su résister au temps, étaient chargées en compression - en fait, toutes les structures de l'époque précédant la révolution industrielle étaient conçues pour des chargements en compression. Il a fallu attendre la révolution industrielle au début du 19e siècle, avec l'utilisation de l'acier, pour pouvoir enfin concevoir des structures capables de résister à des charges de traction. La comparaison des anciens ponts romains avec les ponts modernes de structure métallique montre bien que les premiers étaient effectivement chargés en compression alors que les seconds le sont plutôt en traction.

L'utilisation de nouveaux matériaux ductiles (acier et autres alliages métalliques) pour des chargements en traction conduisit cependant à quelques problèmes. Des ruptures se

produisaient parfois pour des niveaux de charges bien inférieurs à la limite d'élasticité. Dans un premier temps, ces risques de rupture ont été réduits en sur dimensionnant les structures. Mais cette solution devint insatisfaisante compte tenu des nécessités d'une part d'alléger de plus en plus les structures, et d'autre part de réduire les coûts. La recherche en mécanique de la rupture devait donc être développée. Les premiers essais de rupture ont été menés par Léonard de Vinci (1452-1519) bien avant la révolution industrielle : il a montré que la résistance à la traction d'un fil de fer variait inversement avec la longueur de ce fil. Ce résultat suggérait déjà que les défauts contenus dans le matériau contrôlaient la résistance de celui-ci : plus le volume est important (fil de fer long) plus la probabilité de présence de fissure est importante. Cette interprétation qualitative fût précisée plus tard en 1920 par Griffith [1] qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. Cependant, dans les matériaux ductiles et notamment dans les alliages métalliques, l'avancée d'un défaut s'accompagne d'une importante dissipation d'énergie due à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure, énergie dont la théorie de Griffith ne tient pas compte (puisqu'elle ne considère que l'énergie de création de surface). Il a fallu attendre les travaux d'Irwin en 1948 pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles : Irwin [2] inclut dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification. La mécanique de la rupture passa du stade de curiosité scientifique à celui d'une discipline scientifique largement utilisée dans l'ingénierie de la construction. Les analyses des causes de rupture montraient que celles-ci provenaient de la combinaison de trois paramètres :

- les joints de soudures contenaient des fissures,
- la plupart de ces fissures qui conduisaient à la rupture, se développaient à partir de zones de forte concentration de contrainte,

Deux approches sont utilisées pour le dimensionnement des structures (cf. figure 19). La première, la plus classique, repose sur la limité d'élasticité du matériau σ_E , alors que la seconde s'appuie sur le concept de ténacité KC issu de la mécanique linéaire de la rupture (MLR).



a)

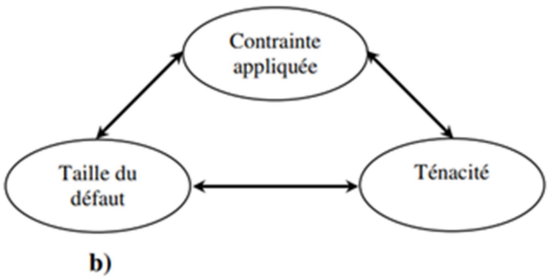


Figure 19. Approches utilisées pour le dimensionnement des structures. (a) Approche classique. (b) Approche utilisant la MLR

Dans le premier cas, les structures sont dimensionnées pour que les contraintes appliquées σ restent inférieures à la limité d'élasticité ($\sigma < \sigma_E$). Un coefficient de sécurité est en général introduit pour prévenir tout risque de rupture fragile ($\sigma < \alpha\sigma_E$ avec $\alpha < 1$). Cette approche, qui est entièrement décrite par les deux variables σ et σ_E, fait donc abstraction de l'existence d'éventuels défauts sous forme de microfissures par exemple.

L'approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture est en revanche à trois variables : la contrainte appliquée σ, la ténacité (qui remplace la limité d'élasticité) et une nouvelle variable attachée cette fois-ci à la taille du défaut.

II.3.2 Critère d'Energie

L'approche énergétique est basée sur le postulat suivant : l'extension d'une fissure qui conduit à la rupture se produit lorsque l'énergie fournie est suffisante pour vaincre la résistance du matériau. Cette résistance se compose de l'énergie de création de surface, de l'énergie de plastification de l'extrémité de la fissure, et éventuellement d'autres types d'énergies dissipatives associées à la propagation d'une fissure. Griffith [1] fut le premier à proposer un critère d'énergie pour la rupture des matériaux fragiles, critère ensuite étendu aux matériaux ductiles par d'autres auteurs (dont Irwin et Orowan).

L'énergie de Griffith notée G (qu'on appelle aussi taux de restitution d'énergie), est définie en liaison avec la variation d'énergie par unité de surface fissurée, associée à la propagation d'une fissure dans un matériau linéaire élastique. La rupture se produit lorsque G atteint une valeur critique G_C. Cette valeur est en fait une mesure de la ténacité du matériau.

Pour une fissure de longueur 2a (figure 20) dans une plaque de dimensions infinies (c'est à dire lorsque la longueur de fissure est très petite par rapport aux dimensions de la plaque dans la plan de chargement) constituée d'un matériau de module d'Young E et soumise à une contrainte nominale de traction σ^{∞}, l'énergie de Griffith G par unité de surface fissurée est donnée par :

$$G = \frac{\pi\left(\sigma^{\infty}\right)^2 a}{E} \qquad 1$$

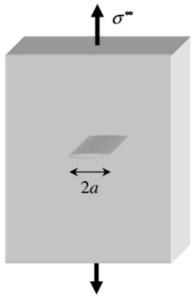


Figure 20. Fissure de longueur 2a dans une plaque infinie [2]

La rupture se produit lorsque la contrainte appliquée σ^{∞}, devenue trop grande, atteint une certaine valeur σ_R. Par conséquent, si G_C désigne la valeur critique de l'énergie obtenue pour la contrainte appliquée σ_R , la relation précédente donne la formule :

$$G_C = \frac{\pi\sigma_R^2 a}{E} \qquad 2$$

Notons que pour une valeur fixée de G_C , la contrainte à rupture σ_R varie avec $1/\sqrt{a}$; de même, si les valeurs G_C et σ^{∞} sont fixées, la longueur de défaut critique a_C à laquelle la rupture se produit, est donnée par :

$$a_C = \frac{EG_C}{\pi\left(\sigma^{\infty}\right)^2} \qquad 3$$

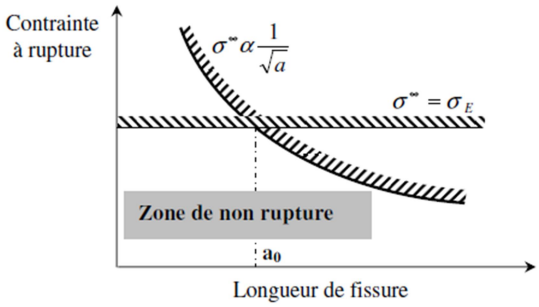


Figure 21. Comparaison entre l'approche classique et celle de la MLR [2].

Cette analogie illustre aussi le concept de similitude. La limite d'élasticité d'un matériau, mesurée à partir d'essais sur des éprouvettes de laboratoire, est indépendante de la taille des éprouvettes et peut donc être utilisée pour des structures de tailles différentes dès lors que le matériau est raisonnablement homogène. Ce principe de similitude est l'une des hypothèses fondamentales de la mécanique de la rupture : la ténacité d'un matériau (mesurée par G_C) est

indépendante de la taille et de la géométrie de la structure fissurée. Cette hypothèse de similitude reste valable tant que le comportement du matériau demeure linéaire élastique.

II.3.3 Modes de sollicitation des fissures

Si on considère une fissure dans un plan, on distingue selon la direction de sollicitation trois modes de déplacement des lèvres de la fissure. Ces modes indiqués sur la figure 22 correspondent à différentes cinématiques de déplacement des lèvres de la fissure :

(a) Mode I ou mode d'ouverture ; le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par :

$$u_1 = 0, \quad u_2(x_1) \neq 0, \quad u_3 = 0$$

(b) Mode II ou mode de cisaillement plan ; le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par :

$$u_1(x_1) \neq 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

(c) Mode III ou mode de cisaillement antiplan ; le champ de déplacement relatif des lèvres de la fissure est défini par :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3(x_1) \neq 0$$

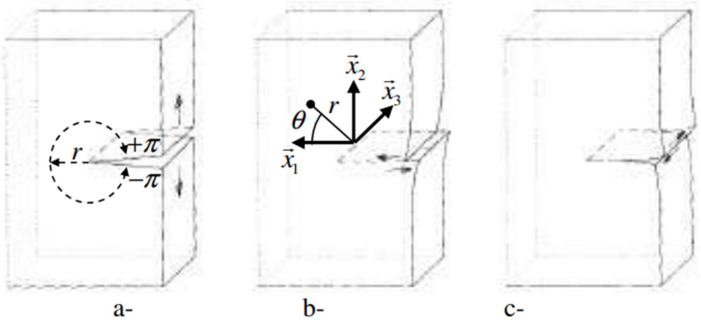


Figure 22. Modes de déplacement des lèvres de la fissure: (a)- mode I ou mode d'ouverture ; (b)- mode II ou de cisaillement plan ; (c)- mode III ou de cisaillement antiplan

II.3.4 Influence des propriétés des matériaux sur la rupture

En mécanique de la rupture, le choix du concept varie selon le comportement physique du matériau.

La classification usuelle de ces concepts est la suivante :

-La mécanique linéaire de la rupture (MLR) pour les matériaux dont le comportement est essentiellement linéaire élastique, tels les alliages d'aluminium à précipitation durcissante, les aciers à haute limite élastique, les céramiques…

-La mécanique élastoplastique de la rupture (MEPR), pour les matériaux ductiles tels les aciers à faible ou moyenne résistance, les inox ou aciers austénitiques, les alliages de cuivre…

-La mécanique dynamique de la rupture (MDR), linéaire ou non linéaire, pour les métaux sollicités à grandes vitesses de déformation – dans ces conditions, le comportement peut aussi être viscoplastique.

- La mécanique viscoélastique de la rupture (MVER), essentiellement pour les polymères sollicités à des températures au dessous de la température de transition vitreuse.
- La mécanique viscoplastique de la rupture (MVPR) pour les polymères au dessus de la température de transition ou encore les métaux et les céramiques sollicités à haute température.

II.4 Facteurs influençant les propriétés mécaniques

Divers facteurs influencent les propriétés mécaniques des matériaux, les deux plus importants sont la température et la microstructure.

À température ambiante, la capacité de déformation plastique (déformation permanente) est :

➢ Pratiquement nulle pour les verres minéraux, les céramiques, les polymères fortement réticulés (thermodurcis) et les élastomères ;

➢ De l'ordre de quelques pourcents pour les alliages durcis et de plusieurs dizaines de pourcent pour les métaux purs ;

➢ De plusieurs centaines de pourcent pour un certain nombre de polymères thermoplastiques.

Il faut noter que les thermoplastiques sont les seuls matériaux polymères ayant une déformation plastique

La capacité de déformation plastique augmente fortement à température élevée. On tire parti de cette caractéristique pour mettre en forme, à haute température, des lingots d'acier ou des plaques de thermoplastiques (thermoformage).

Exercice 1

Soit une pièce en alliage d'aluminium. On a déterminé que, si la longueur maximale d'une fissure interne est $a_1 = 2$ mm, la rupture se produit pour une contrainte $\sigma_1 = 365$ MPa.

- Calculer la contrainte qui provoquera la rupture de cette même pièce si la longueur critique de fissure interne est $a_2 = 3.4$ mm.
- Déterminer le facteur d'intensité de contrainte critique pour ce matériau.

<u>Solution</u>

Pour $a_1 = 2$ mm, la rupture se produit pour une contrainte $\sigma_1 = 365$ MPa.

Contrainte provoquant la rupture de lapièce, $a_2 = 3.4$ mm.

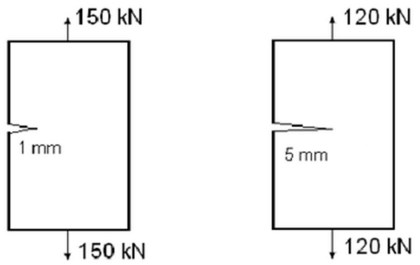
$$K_{IC} = \sigma_2\sqrt{\pi.a_2} = \sigma_1\sqrt{\pi.a_1} \quad \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_1\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} \qquad \Rightarrow \sigma_2 = 365\sqrt{\frac{2}{3.4}} \quad ; \quad \sigma_2 = \ 279.94 \text{ MPa}$$

Facteur d'intensité de contrainte critique

$$K_{IC} = \sigma_2\sqrt{\pi.L_2} = \sigma_1\sqrt{\pi.L_1} = 28.925 MPa\sqrt{m}$$
$$K_{IC} = 28.925\ MPa\sqrt{m}$$

Exercice 2

Un panneau, de 3 mm d'épaisseur et de 10 cm de large contenant une fissure de bord de 1 mm soumis en traction sous une charge de 150 KN (a). Cependant, à une charge de 120 kN, un autre panneau de même matière est rompu en deux pièces lorsque la fissure avait une longueur de 5 mm (b). Avec cette information, calculer la contrainte élastique et la ténacité de rupture du matériau. Tel que le facteur de forme est de Y= 1.12.



Chapitre 2
Classification rhéologique et caractérisation expérimentale

Chapitre 2. Classification rhéologique et caractérisation expérimentale

I. Classification rhéologique

I.1 Introduction

Le terme rhéologie est issu du grec : couler, s'écouler, désigne la science qui s'intéresse à l'écoulement des matériaux et aux phénomènes qui s'y rattachent. La théorie de l'élasticité mise au point par Hooke (1676), Mariotte et Cauchy ou la théorie de la plasticité à laquelle ont participé Coulomb, Tresca, Mises, Hencky et Caquot, la loi de la viscosité des fluides proposée par Newton (1685) sont inadaptées pour étudier, sous tous ses aspects, le comportement mécanique des polymères. Ces matériaux ne sont ni des solides hookiens, ni des fluides newtoniens. Cette remarque n'est pas limitée aux polymères ; on pourrait l'appliquer à d'autre cas comme aux métaux à haute température.

I.2 Comportement mécanique des solides Hookiens et des Fluides newtoniens

I.2.1 Solides Hookiens

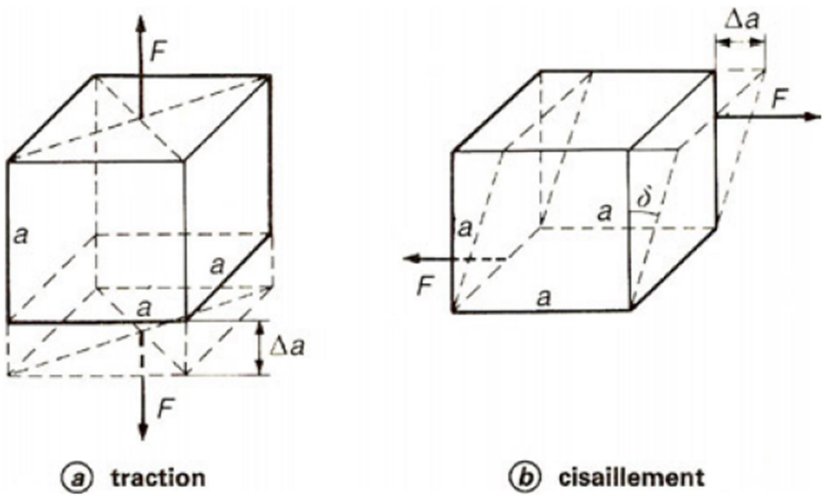


Figure 23. Schématisation de la traction et du cisaillement sur un élément de volume

Par définition, les solides hookiens soumis à des contraintes σ sont l'objet de déformations ε qui sont proportionnelles à σ. Cette proportionnalité est exprimée par un module

$$E = \sigma/\varepsilon \qquad \text{ou son inverse, la complaisance :}$$

$$D = \varepsilon / \sigma \qquad (1)$$

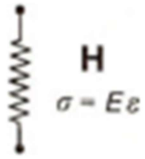


Figure 24. Shématisation d'un solide Hookien

En traction

Si l'on considère un petit cube de matière dont les arêtes ont une longueur a, soumis à une force uniaxiale de traction F (figure 1a), la contrainte, exprimée en pascals (Pa) ou newtons par mètre carré ($N \cdot m^{-2}$), est définie par : $\sigma = F / a^2$

Le cube subit un allongement Δa à partir duquel on peut définir une déformation : $\varepsilon = \Delta a / a$.

Cette déformation élastique est caractérisée par un module d'élasticité E appelé module en traction ou module d'Young, qui est homogène à une contrainte :

$E = \sigma / \varepsilon = 1/D$; D ($m^2 \cdot N^{-1}$) étant la complaisance élastique en traction, inverse du module de traction.

I.2.2 Fluides Newtoniens

En cisaillement

Par définition la contrainte de cisaillement τ en tout point d'un matériau est la variation de la force de cisaillement par rapport à la surface cisaillée.

La déformation est $\varepsilon = \Delta a / a = \tan \delta$.

Le module de cisaillement ou module de Coulomb est :

$$\mathbf{G = \tau / \gamma = 1/J} \qquad \mathbf{2}$$

Avec J complaisance de cisaillement.

$\boldsymbol{\tau} = F / a^2$; τ s'exprime en N/m2

La vitesse de cisaillement est la dérivée de la déformation par rapport au temps et est donnée par l'équation 3.

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} \qquad \mathbf{3}$$

Dans le domaine rhéologique, il existe une relation entre la déformation de cisaillement (shear strain : γ) ou la vitesse de cisaillement (shear rate : $\dot{\gamma}$) et la contrainte de cisaillement (shear stress τ). Cette relation dépend des propriétés et de la nature du matériau. Les rhéogrammes sont des courbes qui traduisent graphiquement l'équation rhéologique d'état et représentent le comportement rhéologique observé expérimentalement.

De nombreux modèles sont proposés afin de décrire les comportements rhéologiques des fluides (Figure 1). Le comportement rhéologique est dit visqueux si la courbe d'écoulement passe par l'origine et viscoplastique si elle ne passe pas par l'origine.

Le modèle rhéologique le plus simple pour décrire les matériaux visqueux est le modèle newtonien selon lequel la contrainte de cisaillement (τ) est proportionnelle à la vitesse de cisaillement ($\dot{\gamma}$):

Le modèle newtonien peut être utilisé pour caractériser certains fluides comme l'eau ou des suspensions très diluées (équation 4).

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \qquad 4$$

Où μ est la viscosité dynamique du fluide, une constante qui le caractérise pour une température et une pression donnée.

Plusieurs fluides visqueux ne suivent pas ce modèle (savon liquide, suspensions de détergents, diverses peintures, etc.) et présentent une variation non linéaire de la contrainte de cisaillement par rapport à la vitesse de cisaillement.

$$\tau = \mu\dot{\gamma}^{n} \qquad 5$$

Avec K: coefficient de consistance et n : indice de fluidité

I.2.3 Classification des fluides selon leur comportement rhéologique

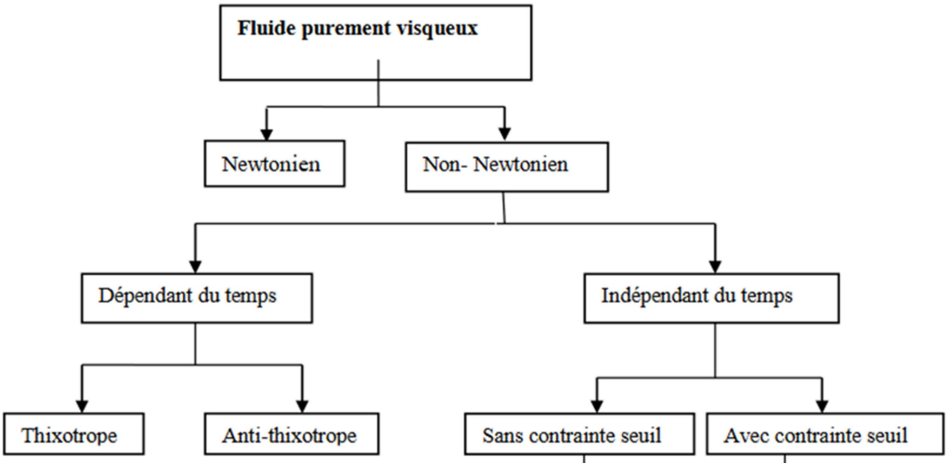


Figure 25. Classification des fluides selon leur comportement rhéologique

Il existe différentes méthodes de classification des matériaux en fonction de leur comportement rhéologique. Une méthode courante consiste à classer les matériaux comme newtoniens ou non newtoniens. Les matériaux newtoniens ont une viscosité constante, ce qui signifie que leur résistance à l'écoulement ne change pas avec les changements de la contrainte appliquée ou du taux de cisaillement. Les matériaux non newtoniens, en revanche, présentent un comportement plus complexe, leur viscosité changeant à mesure que la

contrainte appliquée ou le taux de cisaillement change. Les matériaux non newtoniens peuvent en outre être classés comme rhé fluidifiants, épaississants par cisaillement ou viscoélastiques, en fonction de leur comportement rhéologique spécifique.

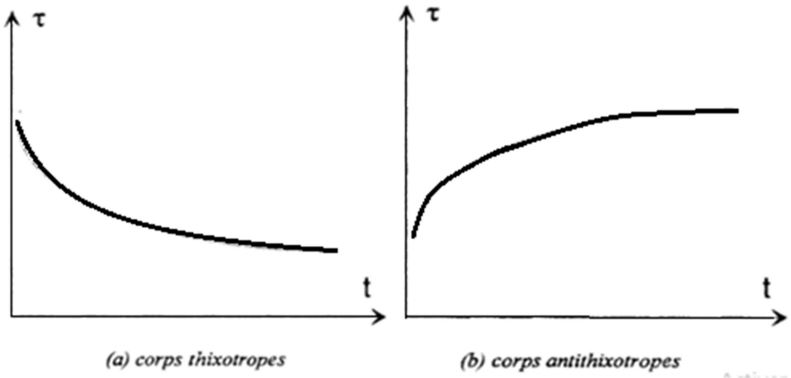


Figure 26. Comportements des fluides non-Newtoniens en fontion du temps. (a) Corps thixotropes (b) Corps antithixotropes

L'analyse des fluides non newtoniens reste encore très empirique et malgré le très grand nombre de fluides non newtoniens.

I.3 Équations rhéologiques d'état

Généralement, en termes mécaniques, la grandeur cinématique correspondant à l'écoulement est le tenseur de gradient de vitesse ($\dot{\varepsilon}$) **[5].** En coordonnées cartésiennes, on suppose que la vitesse v d'un élément représentatif se situant à (x, y, z) à l'instant t est :

$$\vec{v} = v_x.\vec{\imath} + v_y.\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

$$(\dot{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix} \qquad \textbf{6}$$

II. Caractérisation expérimentale

La caractérisation expérimentale implique la mesure et l'analyse des propriétés rhéologiques d'un matériau dans diverses conditions. Certaines méthodes courantes pour caractériser les propriétés rhéologiques d'un matériau comprennent:

Rhéologie de cisaillement à l'état d'équilibre : dans cette méthode, une contrainte de cisaillement ou un taux de cisaillement constant est appliqué au matériau, et la déformation ou le débit résultant est mesuré. Cette méthode est souvent utilisée pour déterminer la viscosité de cisaillement du matériau, son comportement de fluidification par cisaillement et d'autres propriétés rhéologiques.

Fluage et récupération : dans cette méthode, une contrainte ou une déformation constante est appliquée au matériau sur une période de temps, et la déformation ou la réponse à la déformation qui en résulte est mesurée. Cette méthode est souvent utilisée pour déterminer les propriétés viscoélastiques du matériau, y compris sa conformité au fluage et son comportement de récupération.

II.1 Essais mécaniques

Les dimensions des éprouvettes de traction sont réglementées par des normes pour garantir la reproductibilité et la fiabilité des résultats des essais de traction. Les normes les plus couramment utilisées pour la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux par essai de traction sont les normes européennes :

- NF EN 10002-1 : "Essais des matériaux - Essai de traction sur éprouvette normale à température ambiante" ;
- NF EN 10002-2 : "Essais des matériaux - Essai de traction sur éprouvette normale à haute température".

Ces normes définissent les dimensions et les tolérances des éprouvettes de traction, ainsi que les procédures d'essai à suivre pour garantir la reproductibilité et la fiabilité des résultats. Les éprouvettes de traction sont généralement de forme allongée, avec une section transversale de forme et de dimensions normalisées, telles que la section en forme de rectangle ou de cercle.

Il est important de noter que les dimensions et les tolérances des éprouvettes de traction peuvent varier en fonction du matériau et de l'application envisagée. Par exemple, pour les matériaux composites, les dimensions et les tolérances des éprouvettes de traction peuvent être différentes de celles des métaux.

II.1.1 Dispositif expérimental

Le dispositif de traction est composé :

Un bâti rigide ;

Une traverse mobile ;

Le déplacement de la traverse est assuré par des vérins hydrauliques, l’échantillon de matériaux à caractériser est fixé entre deux mors.

L'allongement de l'éprouvette lors de l'essai de traction est une mesure importante pour caractériser les propriétés mécaniques du matériau. Cette mesure peut être effectuée de différentes manières, notamment :

Des jauges de déformation : Ce sont des capteurs qui mesurent la déformation de l'éprouvette lors de l'essai de traction. Les jauges de déformation peuvent être collées sur l'éprouvette avant l'essai, et leur déformation est mesurée à l'aide d'un appareil de mesure approprié. Les jauges de déformation peuvent être utilisées pour mesurer la déformation longitudinale et transversale de l'éprouvette.

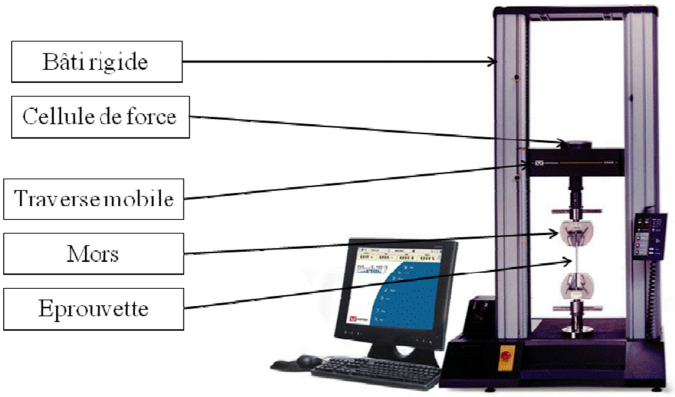


Figure 27. Machine de l'essai de traction

II.1.2 Comportement en traction des matériaux

On peut distinguer plusieurs comportements selon le type de matériaux (métalliques, polymères, céramiques et composites). On présente ci-après trois différents types de comportements mécaniques possibles des matériaux en traction.

✓ Comportement fragile : le matériau ne présentant pas de domaine plastique, la rupture se produit alors que les déformations sont purement élastiques ; le verre, la fonte grise, certains aciers bruts de trempe, les céramiques, le béton et la plupart des polymères thermodurcissables sont des matériaux qui ont un comportement fragile.

✓ Comportement ductile : une déformation plastique permanente accompagnée généralement d'un durcissement du matériau suit la déformation élastique. De nombreux matériaux présentent ce type de comportement : la majorité des métaux et des alliages, et certains polymères thermoplastiques.

✓ Comportement élastique non linéaire : la déformation élastique (réversible) n'est pas proportionnelle à la charge qui la provoque. Un tel comportement est caractéristique de certains polymères thermoplastiques et des élastomères.

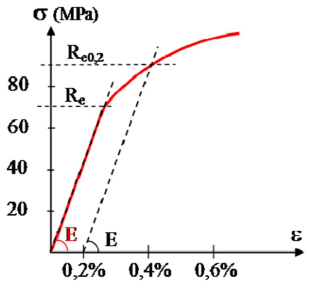


Figure 28. Loi de comportement en traction (matériau ductile)

- La limite d'élasticité

Dans la notion de limite d'élasticité deux grandeurs apparaissent :

La limite d'élasticité vraie (Re)

La limite d'élasticité conventionnelle à 0,2% ($Re_{0,2}$)

Re correspond à la contrainte à partir de laquelle le comportement du matériau s'écarte de la loi de Hooke, moment où apparaît la première déformation plastique.

Re délicat à déterminer dans la pratique car la transition du domaine élastique au domaine plastique s'effectue progressivement. Pour s'affranchir de cette difficulté, une limite $Re_{0,2}$ est souvent utilisée. $Re_{0,2}$ correspond à la contrainte à laquelle une déformation plastique permanente de valeur égale à 0,2% existe.

II.1.3 Comportement sensible à la vitesse de déformation

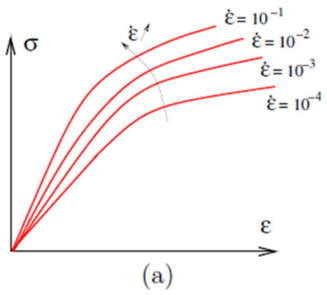


Figure 29. Matériaux sensibles à la vitesse de chargement. (a) : mise en évidence de l'influence de la vitesse de chargement.

La sensibilité des matériaux à la vitesse de déformation a deux conséquences pour la tenue de ces matériaux dans le temps qui sont le fluage et la relaxation.

II.1.3.1 Le fluage

On impose brusquement une contrainte σ qu'on maintient constante au cours du temps. Il en résulte une déformation initiale élastique ε= σ/E puis généralement la déformation augmente avec le temps : c'est le fluage. C'est une expérience que l'on fait souvent (par exemple en sortant du supermarché) lorsqu'on transporte un poids important dans un sac en plastique : on sent celui-ci s'allonger, parfois jusqu'à se déchirer ! Si la déformation de fluage reste limitée lorsque $t \to \infty$ on a coutume de dire que le milieu étudié a un comportement de type solide.

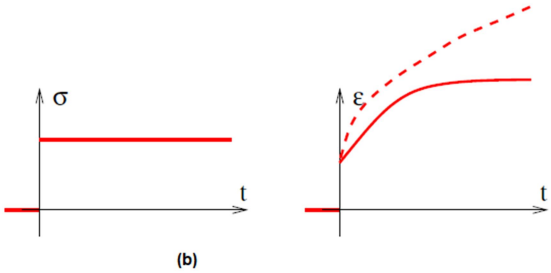


Figure 30. Essai de fluage (traits pleins : matériau de type solide).

Exemples

- Effet de la viscosité : *Comportement sensible à la vitesse de déformation*

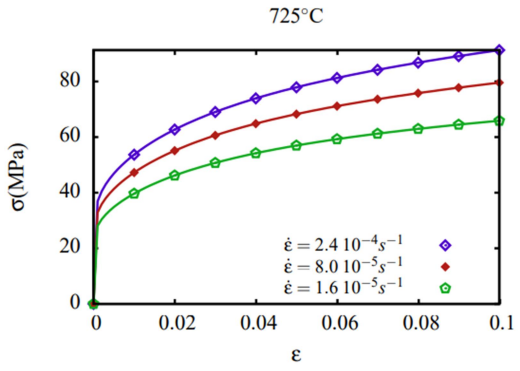


Figure 31. Résultats d'un essai de traction sur un acier à haute température

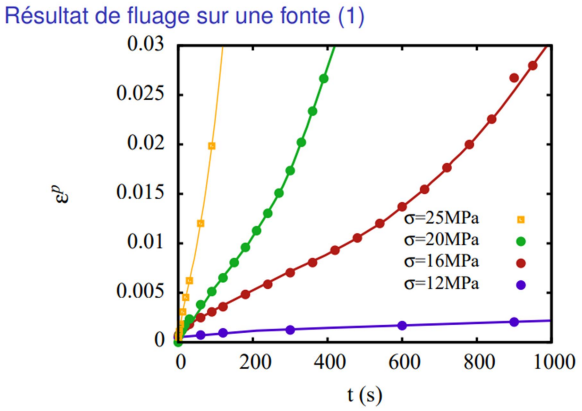


Figure 32. Essai de fluage sur une fonte

II.1.3.2 La relaxation

La relaxation des contraintes est mise en évidence par le test suivant : on impose en t = 0 une déformation " que l'on maintient constante dans le temps. La contrainte prend tout d'abord une valeur donnée par l'élasticité du matériau σ = Eε, puis on constate généralement qu'elle se relâche au cours du temps : c'est la relaxation. Si la relaxation est totale, on a coutume de dire que le matériau étudié a un comportement de type fluide : au bout d'un temps (qui peut être long), le matériau « oublie » la déformation qui lui a été imposée en effaçant toutes les

contraintes créées. La relaxation des contraintes pose des problèmes sérieux dans le béton précontraint.

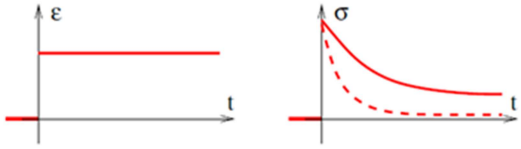


Figure 33. Essai de relaxation des contraintes (pointillés : matériau de type fluide).

II.2 Charge-décharge

On augmente la force F puis on la ramène à 0. Cet essai permet de mettre en particulier en évidence quelques comportements (Figure15).

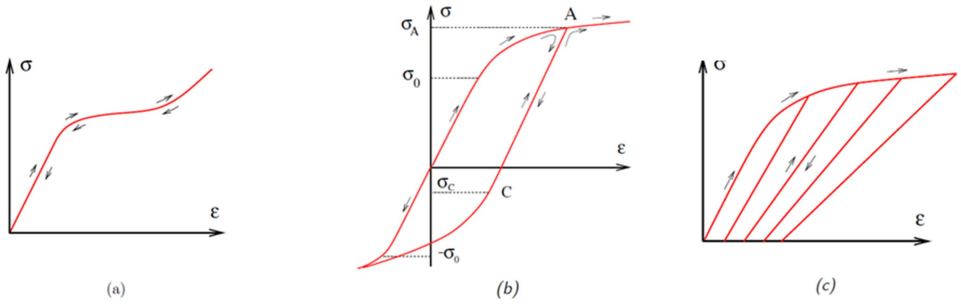


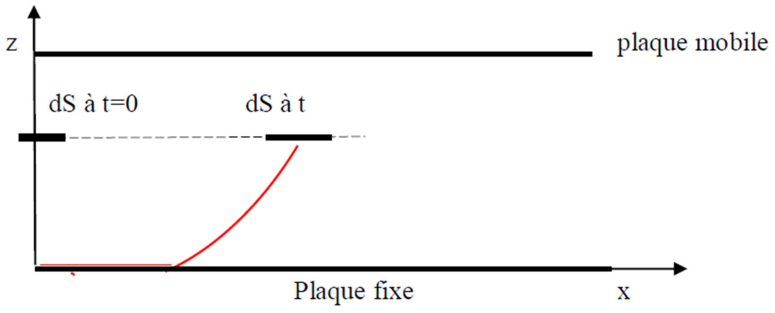
Figure 34. Essai de charge-décharge. (a) : Comportement élastique (éventuellement non linéaire). (b) : Effet Bauschinger. (c) : Endommagement couplé à la plasticité

<u>Bauschinger</u> ($\sigma_C \neq -\sigma_A$).

b) Dans le domaine élastique et dans la plage des petites déformations, la charge et la décharge s'effectuent le plus souvent suivant une droite. Néanmoins, on observe souvent une dissymétrie du seuil d'élasticité en compression par rapport à sa valeur en traction.

Exercice 1

Déterminer la vitesse de cisaillement d'un fluide visqueux (newtoniens)



<u>Solution</u>

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dz}}$$

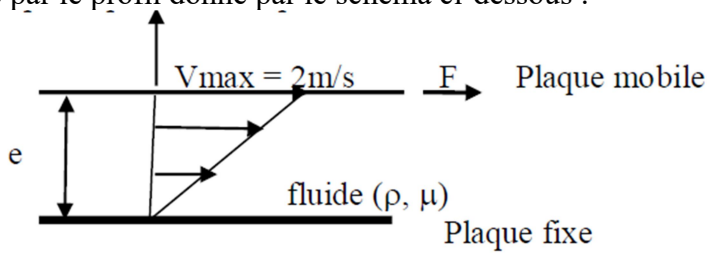
Calculons la variation de la déformation au cours du temps appelée <u>vitesse de cisaillement</u>

La vitesse de déformation est défini par $\frac{d\gamma}{dt}$; $\frac{d(\frac{dx}{dz})}{dt} = \frac{d}{dz}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dz}$

La loi de newton : $\tau = \mu.\frac{d\gamma}{dt} = \mu\ \frac{dv}{dz}$

Exercice 2

Un écoulement d'un liquide de viscosité dynamique μ = 0.02 Pa.s, sur une plaque plane fixe, est caractérisé par le profil donné par le schéma ci-dessous :



Si l'épaisseur de l'écoulement est e = 5 cm, déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement :

Unité de : Pa.s ou Poiseuille dans le S.I. (symbole Pl) ; unité usuelle : le poise : 1 poise = 10-1 Pl (symbole Po)

V = az + b

Z= 0→v=0

0= a.0 + b→ b = 0

Z= 5→ $2 = a.5.10^{-2} \rightarrow a = 40 \rightarrow \mathrm{V(z)} = 40\mathrm{z}$

$\tau = \mu\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dz}} = \mu\ 40 = 0.02\mathrm{x}40 = 0.8\mathrm{n/m2}$

Exercice 3

La mesure de la déformation en compression uni-axiale sur un solide hookien, de 160 mm de largeur et de 320 mm de longueur, a donné : 15%.

1) Calculer le module d'élasticité E si la force est de 223.15 10^3 KN
2) La mesure de la déformation dans le sens transversale a donné 13%, Déterminez le coefficient de poisson
3) Sachant que E = 2(1 + **ν**)G et que la complaisance en cisaillement est donnée par J

   Montrer que la complaisance D = J/[2(1 + μ)]

Chapitre 3

Elasticité et Viscoélasticité

Chapitre 3. Elasticité Viscoélasticité

I. Elasticité

I.1 Introduction

Qu'est-ce que l'´elasticité ? Définition

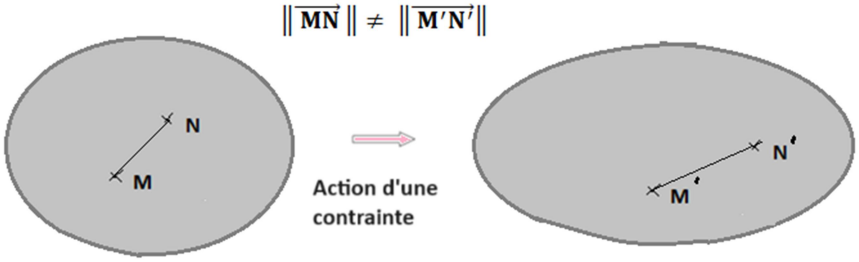


Figure 35. Shématisation de la déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte

$$\|\overrightarrow{MN}\| \neq \|\overrightarrow{M'N'}\|$$

Pourquoi étudier l'´elasticité ?

• Stabilité et instabilité des structures mécaniques

- Pour la construction de ponts, routes, structures en béton (immeubles ...) → forme d'un profilé, taille maximale d'un immeuble, ...
- Fibres, tissus synthétiques, ...
- Comprendre des phénomènes naturels (certains reliefs montagneux, mouvement rapide des végétaux, etc).

• La géométrie est importante.

- Exemple des poutres profilés utilisées dans le bâtiment,
- Exemple du caoutchouc = un élastomère préparé en tubes, en rubans, en fines pellicules

(vernis, sols), en câbles, en tissus, ...

• Fluides visco élastiques : modification de la rhéologie des matériaux complexes par rapport à celle des fluides simples

- Solutions de polymères, gels, caoutchoucs, pates, poudres, sables, cristaux liquides, mousses et émulsions, ...

I.2 Notion de Contrainte autour d'un point

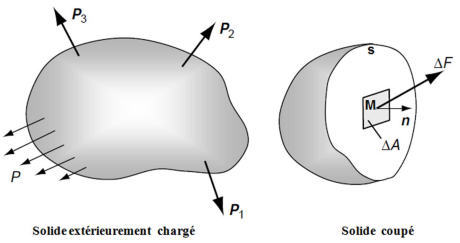


Figure 36. Solide soumis à un chargement extérieur (à gauche) et solide coupé (à droite)

Soit $\overrightarrow{\Delta F}$ la force qui s'exerce sur cette facette.
On appelle **vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M**, la quantité :

$$\vec{\mathbf{T}}(\mathbf{M},\vec{\mathbf{n}}) = \Delta A \xrightarrow{Lim} 0 \ \frac{\overrightarrow{\Delta F}}{\Delta A}$$

Remarque : une contrainte s'exprime en pascal (1 Pa = 1 N/m2) ; dans la pratique, on utilise souvent le mégapascal (1 MPa = 10^6 Pa = 1 N/mm2)

I.2.1 Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contraint peut être décomposé en sa composante suivant $\vec{n}$ et sa projection sur la facette (figure 37) :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

σ_n est la **contrainte normale** et $\vec{\tau}_n$ est le **vecteur cisaillement** ou **contrainte tangentielle**.
σ_n est une valeur algébrique positive (traction) ou négative (compression).

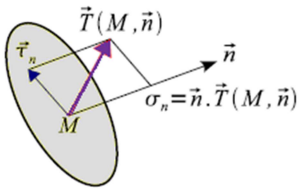


Figure 37. Vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M

La contrainte normale sur la facette $\vec{n}$ en M est égale à :

$$\boldsymbol{\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M,\vec{n})}$$

Sachant que la projection d'un vecteur $\vec{V}$ sur une droite Δ ayant un vecteur unitaire $\vec{n}$ est définie par :

$$\vec{V}_n = V_n \vec{n} \quad \text{avec} \quad V_n = \vec{n} \cdot \vec{V}$$

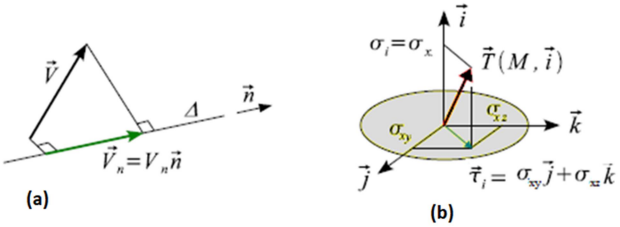


Figure 38. (a) Projection d'un vecteur sur un axe. (b) Vecteur contrainte sur la facette $\vec{\imath}$ en M

Remarque : sur la facette $\vec{\imath}$ (figure 4), le vecteur contrainte est : $\vec{T}(M,\vec{\imath}) = \sigma_x \vec{\imath} + \sigma_{xy} \vec{\jmath} + \sigma_{xz} \vec{k}$

$$\boldsymbol{\sigma_i = \vec{\imath} \cdot \vec{T}(M,\vec{\imath}) = \sigma_x}\ , \qquad \boldsymbol{\tau_i = \sigma_{xy} \vec{\jmath} + \sigma_{xz} \vec{k}}$$

Sur la facette $\vec{\jmath}$, le vecteur contrainte est : $\vec{T}(M,\vec{j}) = \sigma_{yx} \vec{\imath} + \sigma_y \vec{\jmath} + \sigma_{yz} \vec{k}$

Sur la facette $\vec{k}$, le vecteur contrainte est : $\vec{T}(M,\vec{k}) = \sigma_{zx} \vec{\imath} + \sigma_{zy} \vec{\jmath} + \sigma_z \vec{k}$

I.2.2 Tenseur des contraintes (Formule de Cauchy)

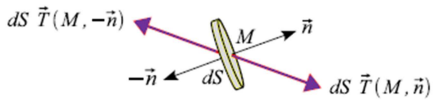


Figure 39. Efforts sur les facettes $\vec{n}$ et $-\vec{n}$

Considérons un cylindre de hauteur *h*, appartenant à un milieu chargé exiérieuremen (Fiure 39).

Quand *h* tend vers 0, le cylindre est en équilibre sous l'action des forces.

$dS\,\vec{T}(M, \vec{n})$ et $dS\,\vec{T}(M,-\vec{n})$

D'où $\qquad \boldsymbol{\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M,\vec{n})}$

Considérons le tétraèdre infiniment petit *MABC* construit sur les axes *x*, *y* et *z* (figure 40). Soient $\vec{n}$ de composantes (n_x, n_y, n_z) la normale unitaire au plan *ABC* dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et *dS* l'aire du triangle ABC [7][8][14].

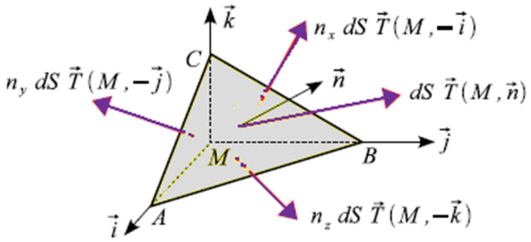


Figure 40. Equilibre du tétraèdre (Cauchy)

Aire (MBC) = n_x dS , aire (MAC) = n_y dS , aire (MAB) = n_z dS

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur ils sont donc négligés) :

$$dS\vec{T}(M, \vec{n}) + n_x\, dS\vec{T}(M, \vec{\imath}) + n_y\, dS\vec{T}(M, \vec{\jmath}) + n_z\, dS\vec{T}(M, \vec{k}) = \vec{0}$$

Il vient après simplification :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_x\vec{T}(M, \vec{\imath}) + n_y\vec{T}(M, \vec{\jmath}) + n_z\vec{T}(M, \vec{k})$$

Cette équation s'´ecrit sous forme matricielle :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\{T(M, \vec{\imath})\}\ \{T(M, \vec{\jmath})\}\ \{T(M, \vec{k})\}]\{n\} \text{ soit :}$$

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)]\ \{n\}\ (\textbf{formule de Cauchy})$$

où $[\sigma(M)]$ est le **tenseur des contraintes de Cauchy** en *M*. Les composantes du tenseur des contraintes (figure 41) dans le repère {0, x, y, z} et la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ sont :

$$\text{Composantes sur } \begin{cases} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Le premier indice représente l'axe perpendiculaire à la section où les contraintes tangentielles sont appliquées.

Le deuxième indice représente l'axe parallèle aux contraintes tangentielles.

$\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$, $\boldsymbol{\sigma_z}$ **:** sont des contraintes normales à la facette perpendiculaire à l'axe x, y et z, $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$, $\boldsymbol{\sigma_{xz}}$, $\boldsymbol{\sigma_{yx}}$, $\boldsymbol{\sigma_{yz}}$, $\boldsymbol{\sigma_{zx}}$, $\boldsymbol{\sigma_{zy}}$ désignés par $\boldsymbol{\tau_{xy}}$, $\boldsymbol{\tau_{xz}}$, $\boldsymbol{\tau_{yx}}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}}$, $\boldsymbol{\tau_{zx}}$, $\boldsymbol{\tau_{zy}}$ **:** sont des contraintes tangentielles ;

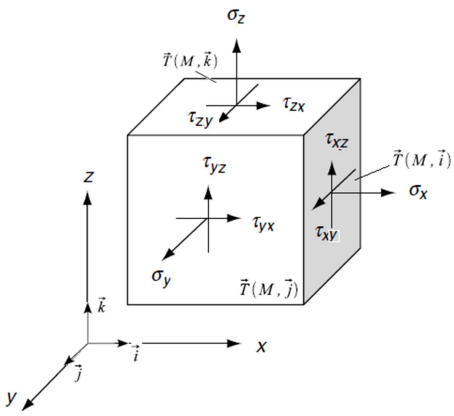


Figure 41. Vecteurs contraintes sur les trois facettes $\boldsymbol{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}}$ en M

I.2.3 Propriétés du tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est symétrique par conséquence des conditions d'équilibre les contraintes sur un petit élément plan passant par un point donné d'un corps chargé dépendent de l'orientation de cet élément.

Lorsque l'élément tourne, les contraintes varient selon une loi bien déterminée ; Cette loi est indispensable pour la résolution des problèmes les plus complexes.

D'après la théorie de l'élasticité, on note qu'une facette peut au plus être sollicitée par trois contraintes :

- une contrainte normale à la facette
- deux contraintes tangentielles tangentes à la facette.

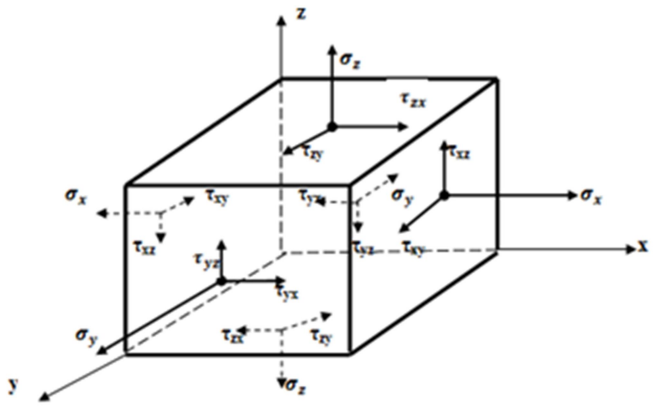


Figure 42. Solide en équilibre

On s'est contenté de représenter, en trait fort, les contraintes sur 3 facettes contigües de l'élément. Pour les 3 facettes cachées, les contraintes (représentées en pointillé) sont égales à celles de la facette opposée et dirigées dans le sens contraire (première condition d'équilibre $\sum \boldsymbol{F}/(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$).

La deuxième condition $\sum \boldsymbol{M}/(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$, conduit aux égalités suivantes:

$\boldsymbol{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$; $\boldsymbol{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$; $\boldsymbol{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$

Ces trois égalités représentent la loi de parité des contraintes tangentielles. Ainsi, sur deux facettes orthogonales, les composantes tangentielles perpendiculaires à l'arête commune, sont égales et dirigées soit vers l'arête, soit dans le sens contraire.

I.3 Directions et contraintes principales

Si il existe en *M* une facette $\vec{n}$ telle que le vecteur contrainte soit colinéaire avec $\vec{n}$ (figure 43), Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ satisfait la relation :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n . \vec{n}$$

soit : $[\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \{n\}$

<u>σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et $\vec{n}$ est le vecteur propre associé.</u>

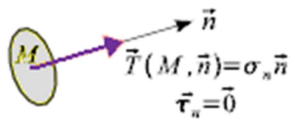


Figure 43. Face et contrainte principale en M

$[\sigma(M)]$ est une matrice symétrique `a coefficients réels. Elle a trois valeurs propres réelles (distinctes ou confondues). Si les trois valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.

Il existe donc en M un repère orthonormé $\{M;\ \vec{n}_1,\ \vec{n}_2,\ \vec{n}_3\}$ tel que sur les facettes $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ le vecteur cisaillement soit nul (figure 44).

Les directions $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont les **directions principales**.

Dans le repère principal $\{M;\ \vec{n}_1,\ \vec{n}_2,\ \vec{n}_3\}$, le tenseur des contraintes s'´ecrit :

$$[\sigma]_{\{M;\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

ou` les contraintes normales σ_1, σ_2 et σ_3 sont les **contraintes principales**.

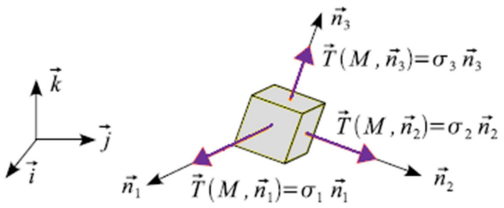


Figure 44. Faces et contraintes principales en M

Les trois contraintes principales sont les racines de l'´equation caractéristique:

$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - \sigma_n [\,I\,]) = 0$ où $[\,I\,]$ est la matrice unité de dimension 3

Soit :

$$det\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_n & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n + I_3 = 0$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.
I_1, I_2 et I_3 sont des invariants :

$$I_1 = \mathrm{tr}\,[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \sigma^2_{xy} - \sigma^2_{xz} - \sigma^2_{yz} = \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_2\,\sigma_3$$

$$I_3 = \det[\sigma] = \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + 2\,\sigma_{xy}\,\sigma_{xz}\,\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\,\sigma^2_{yz} - \sigma_{yy}\,\sigma^2_{xz} - \sigma_{zz}\,\sigma^2_{xy} = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$$

Dans le repère principal $\{M;\ \vec{n}_1,\ \vec{n}_2,\ \vec{n}_3\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ sont :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$$

I.4 Diagramme circulaire des états de contraintes (cercle de mohr)

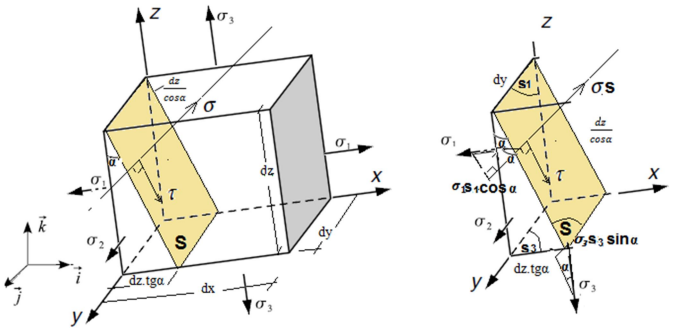


Figure 45. Projection des forces suivant les droites portant σ, τ

Le prisme de la figure 11, a été obtenu en coupant le parallélépipède par un plan oblique parallèle à l'axe principal y de façon à ce que **σ** soit perpendiculaire à $\boldsymbol{\sigma_2}$.

Projetons toutes les forces agissant sur le prisme tronqué sur les axes portant les vecteurs **σ** et **τ** ainsi il vient que :

$$\sigma.s - \sigma_1.s_1 \cos\alpha - \sigma_3.s_3 \sin\alpha = 0$$
$$\tau.s - \sigma_1.s_1 \sin\alpha + \sigma_3.s_3 \cos\alpha = 0$$

En remplaçant s, s_1 et s_3 par les expressions: $s = dy.\frac{dz}{cos\alpha}$, s_1=dz.dy, s_3 = dydz.tg α avec l'utilisation des equations trigonométriques:

$\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$,

$\sin^2 x = 1 - \cos 2x/2$

sin 2x = 2 sin x cos x

il vient que :

$$\sigma = \sigma_1.\cos^2\alpha + \sigma_3.\sin^2\alpha = \sigma_1/2 + \sigma_1\,(\cos 2\alpha)/2 + \sigma_3./2 - \sigma_3.(\cos 2\alpha)/2$$

$$\boldsymbol{\sigma = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)\cos 2\alpha}$$

$\tau = \sigma_{1.}\ \sin\alpha.\cos\alpha - \sigma_{3.}\ \sin\alpha.\cos\alpha = (\sigma_1 - \sigma_3)\ \sin\alpha.\cos\alpha$

$$\boldsymbol{\tau = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \sin 2x}$$

Ou encore

$\left[\boldsymbol{\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}\right]^2 + \boldsymbol{\tau^2} = \left[\boldsymbol{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}\right]^2$.....forme paramétrique dont le paramètre est $\boldsymbol{\alpha}$

Il s'agit de l'équation d'un cercle

Le centre du cercle sur l'axe σ se trouve à $\boldsymbol{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}$ de l'origine

Le rayon du cercle est égal à : R = $\boldsymbol{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}$

A chaque plan sécant **α** correspond un point du cercle si α=0 le plan sécant se réduit au plan principal portant σ_1 (point B). Si α=π/2 le plan sécant coïncide avec le plan principal portant σ_3(point C) diamétralement opposé au point B sur le cercle.

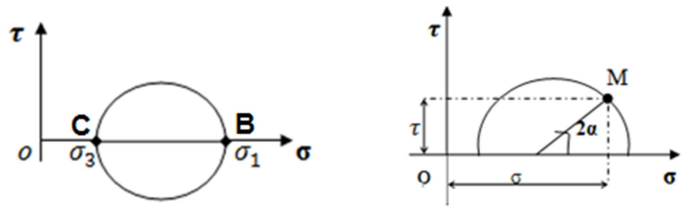


Figure 46. Cercle de mohr pour la famille des plans σ_2

Ce diagramme qui représente le diagramme circulaire de l'état de contraintes est appelé **cercle de Mohr.**

Le point M de coordonnées (σ, τ), est le point figuratif sur le plan incliné d'un angle α qui, sur le cercle de Mohr devient 2α (figure 12). Le cercle est construit pour la famille de plans parallèles à σ_2.

On va également construire d'une manière analogue, les familles de cercles parallèles à σ_1 *et* σ_3 (figure 13).

Pour une raison de symétrie et comme il n'est fait aucune réserve sur le signe de **τ**, on peut représenter uniquement les demi-cercles en tenant compte de : $\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3}$

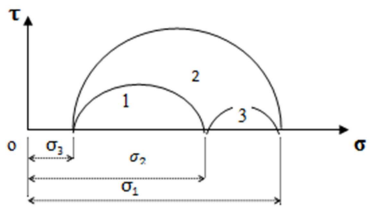


Figure 47. Triangle curviligne formé par les cercles de mohr (1), (2) et (3)

Le cercle (1) ayant pour diamètre $\boldsymbol{\sigma_2 - \sigma_3}$ est construit pour la famille de plans parallèles à σ_1

Le cercle (2) ayant pour diamètre σ_1-σ_2 est construit pour la famille de plans parallèles à σ_3.
Le cercle (3) ayant pour diamètre σ_1-σ_3 est construit pour la famille de plans parallèles à σ_2.

I.4 Théorie des Déformations dans un corps

I.4.1Définition

Sous l'action des forces appliquées, les points d'un solide se déplacent. Il en résulte, pour des fibres infinitésimales de matière, des **variations de longueur** et des **variations d'angle** appelées **déformations**

I.4.2 Configuration, vecteur déplacement

Le volume occupé par le solide à l'instant t est noté C_t et appelé **configuration courante**.
La **configuration initiale** C_0 est la configuration de référence.
Le point M_0 de la configuration initiale devient le point M de la configuration courante

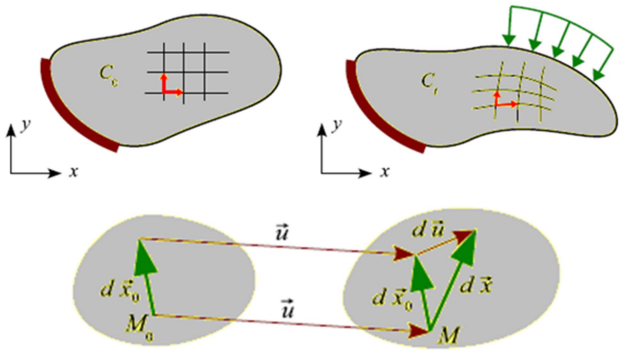


Figure 48. Transformation du vecteur $\overrightarrow{dx_0}$

Les coordonnées du point **M** s'´ecrivent sous forme matricielle :

Le vecteur infiniment petit $d\vec{x}_0$ en M_0 devient $d\vec{x}$ en M dans la configuration C_t

$$d\vec{x} = d\vec{x}_0 + d\vec{u}$$

I.4.3 Etat des déformations

Pour caractériser la déformation en un point d'un solide, on s'intéresse à l'étude de l'évolution dans le temps du vecteur déplacement de ce point. L'idée générale est de suivre l'évolution dans le temps d'un domaine élémentaire du milieu continu et de comparer une situation à l'instant t à une situation à un instant initial pris comme référence à l'instant t_0.

- **Le tenseur des déformations**

En utilisant les coordonnées cartésiennes:

$$U(M_o + dM_o) = U(Mo) + dU(Mo) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \frac{\partial U_1}{\partial y} & \frac{\partial U_1}{\partial z} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial y} & \frac{\partial U_2}{\partial z} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x} & \frac{\partial U_3}{\partial y} & \frac{\partial U_3}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Le tenseur des déformations s'écrit sous forme matricielle pour un point M donné:

$$U(M_o + dM_o) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x} & \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x}\right) & \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial x}\right) \\ & \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial y} & \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_3}{\partial y}\right) \\ \text{Sym} & & \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial z} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) & \Omega_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right) \\ \Omega_{21} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \Omega_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right) \\ \Omega_{31} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right) & \Omega_{32} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

- **Décomposition du vecteur déplacement**

L'équation devient dans ce cas :

$$\vec{U}(\vec{M_0} + d\vec{M_0}) \quad = \quad \vec{U}(\vec{M_0}) + \left[\Omega\,(M)\right] d\vec{M_0} + \left[\varepsilon\,(M)\right] d\vec{M_0}$$

Suivant les valeurs des tenseurs de déformations et de rotations, plusieurs cas apparaissent.

1. Cas où $[\varepsilon(M)] = 0$ *et* $[\Omega(M)] = 0$; $\vec{U}(M_0 + \overrightarrow{dM_0}) = \vec{U}(M_0)$

L'ensemble des points du domaine matériel subissent le même déplacement qui est une translation du vecteur $\overrightarrow{U}(M_0)$: <u>translation du corps solide</u>

2. Cas où $\vec{U}(\vec{M_0}) = \vec{0}$ et $\left[\underset{\sim}{\varepsilon}\,(M)\right] = 0$:

$$\vec{U}(\vec{M_0} + d\vec{M_0}) \quad = \quad \left[\underset{\sim}{\Omega}\right] d\vec{M_0}$$

<u>Rotation du corps solide</u>

3. Cas où $\vec{U}(\vec{M_0}) = \vec{0}$ et $\left[\underset{\sim}{\Omega}(M)\right] = 0$:

$$\vec{U}(\vec{M_0} + d\vec{M_0}) \quad = \quad \left[\underset{\sim}{\varepsilon}\right] d\vec{M_0}$$

Déformation pure

- **Conclusion**

au cours de la transformation du domaine matériel, celui-ci peut subir :

1 translation rigide du corps solide,

1 rotation rigide autour de M_0 du corps solide,

1 déformation pure caractérisée par le tenseur **[ε(M)]**

I.4.4 Déformations et directions principales

On considère un état de déformation local au point matériel M_0 du solide étudié. On voit que, parlant de déformation, il convient de préciser soit la direction d'intérêt, soit l'angle (et donc le plan) concerné. Dès lors, il devient légitime de s'interroger sur l'existence d'axes, centrés sur un point matériel donné dans le solide étudié, selon lesquels les distorsions seraient nulles. Si de telles directions existent c'est qu'elles restent perpendiculaires entre elles alors même que le solide se déforme.

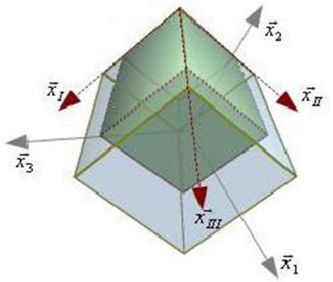


Figure 49. Solide dans un état principal

On appelle déformation principale toute valeur propre du tenseur des déformations.

Remarque : Un petit élément de volume parallélépipédique dont les arêtes sont orientées par les directions principales reste parallélépipédique après transformation géométrique

- **Déformations principales**

Les déformations principales sont solutions de l'équation: $det([\varepsilon\,] - \lambda[I]) = 0$

Cette equation du troisième degree est appelée équation caractéristiques de la matrice [ε].

Le tenseur des déformations s'écrit ainsi:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon_{II}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon_{III}} \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}\}}$$

$\mathbf{e_I}$, e_{II}, e_{III} : Sont les directions principales ou vecteurs propres

Représentation graphique d'un état de déformation

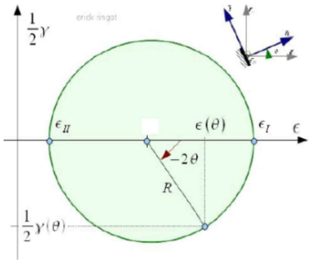


Figure 50. Cercle de Mohr des déformations

I.4.5 Interprétation physique des états de déformations dans le plan

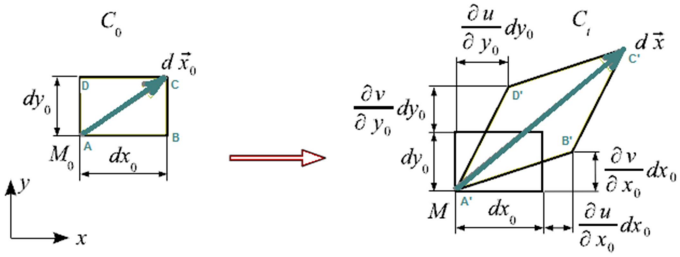


Figure 51. Déformation d'un corps dans le plan (à 2 D)

Rappels : si x et y sont petits devant l'unité, on a les relations :

$$\sqrt{1+x} \cong 1+\frac{x}{2}$$

$$A'B' = \sqrt{\left(dx_0 + \frac{\partial u}{\partial x_0}dx_0\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0}dx_0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 + 2\frac{\partial u}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0}\right)^2\right)(dx_0)^2} = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

En procédant de la même façon nous obtenons : $A'D' = \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$

II. Relation entre contraintes et déformation

II.1 Loi de Hooke, Cas d'un chargement uniaxial

Les expériences montrent que dans le cas d'un corps isotrope, chargé par une contrainte normale σ_x sur deux faces opposées (traction ou compression), cette contrainte ne détermine aucune distorsion γ_{ij} mais provoque une déformation linéique ε_x (allongement ou raccourcissement unitaire). Dans ce cas la contrainte et la déformation sont liées par une loi de comportement traduisant le comportement élastique linéaire du matériau dite loi de Hooke et qui s'exprime par :

σ_x =E. ε_x **loi de Hooke**

Ou encore : $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ **:**

σ_x : Contrainte suivant l'axe x.

ε_x : Déformation linéique suivant x.

E : *Module d'élasticité longitudinal (module de Young) ayant l'unité d'une contrainte.*

La loi de Hooke exprime la relation fonctionnelle entre la contrainte et la déformation linéique dans un domaine élastique linéaire.

L'extension de l'élément dans la direction x, sous la contrainte σ_x, est accompagnée de contractions (déformations) latérales suivant y et z qui sont données par :

$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$ contraction provoquée par σ_x dans le sens y

$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$ contraction provoquée par σ_x dans le sens **z**

ν **:** est le coefficient de **Poisson du matériau,** sans dimension, compris généralement entre : **0**< ν ≤**0,5.** Il représente le rapport de la déformation transversale sur la déformation longitudinale, pour les matériaux **incompressibles,** c'est-à-dire déformation à **volume constant,** il vient $\nu = 0,5$

<u>Remarque</u>: pour les matériaux auxétiques le coefficient de poisson peut être negative (Ils gonflent quand on les étire. Leur potentiel d'application est très vaste.)

II.2 Cas de chargement tridimensionnel (3D)

Si l'élément considéré est sollicité dans les trois directions x, y, z par des contraintes σ_x , σ_y, σ_z, la loi de **Hooke généralisée** s'obtient en appliquant le principe de superposition. Ainsi on peut écrit alors :

L'élément étant chargé dans les directions x,y et z donc :

Suivant l'axe x: σ_x =E. ε_x ; $\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$; $\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$

Suivant l'axe y: σ_y =E. ε_y ; $\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$; $\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$

Suivant l'axe z: σ_z =E. ε_z : $\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ $\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$

La superposition de ces états donne la **loi de Hooke généralisée** qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_z}=\frac{1}{E}[\boldsymbol{\sigma_z}-\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\sigma_x}+\boldsymbol{\sigma_z})]$$

$\boldsymbol{\gamma_{xy}}=\frac{\tau_{xy}}{G}$: dans le plan xy

$\boldsymbol{\gamma_{yz}}=\frac{\tau_{yz}}{G}$: dans le plan yz

$\boldsymbol{\gamma_{zx}}=\frac{\tau_{zx}}{G}$: dans le plan xz

G : étant le module d'élasticité au cisaillement (module de glissement) et a l'unité d'une contrainte.

On peut montrer que la relation entre l'effort de cisaillement et la déformation transversale est définie par le coefficient d'élasticité longitudinal **E** et le coefficient de Poisson **ν.**

$$\mathbf{G}=\frac{\mathbf{E}}{2(1+\nu)}$$

En écriture matricielle:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}=\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}=\frac{1}{\mathrm{E}}(\sigma_{xx}-\vartheta(\sigma_{yy}+\sigma_{ZZ})) & \varepsilon_{xy}=\frac{1+\vartheta}{\mathrm{E}}\sigma_{xy} & \varepsilon_{xz}=\frac{1+\vartheta}{\mathrm{E}}\sigma_{xz} \\ \dots & \varepsilon_{yy}=\frac{1}{\mathrm{E}}(\sigma_{yy}-\vartheta(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})) & \varepsilon_{yz}=\frac{1+\vartheta}{\mathrm{E}}\sigma_{yz} \\ \dots & \dots & \varepsilon_{zz}=\frac{1}{\mathrm{E}}(\sigma_{zz}-\vartheta(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})) \end{pmatrix}$$

- **Variation volumique**

Considérons un corps de volume initial égale à l'unité ($V_0=1$), après déformation les côtés du solide ont pour dimensions : $1+\varepsilon_x$; $1+\varepsilon_y$; $1+\varepsilon_z$

Le volume du corps est : $V=(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$

On démontre que :

$$\frac{V-V_0}{V_0}=[(1+\varepsilon x)(1+\varepsilon y)(1+\varepsilon z)-1]/1$$

En négligeant les quantités $\varepsilon_x.\varepsilon_y.\varepsilon_z$; $\varepsilon_x.\varepsilon_y$; $\varepsilon_y.\varepsilon_z$ et $\varepsilon_x.\varepsilon_z$

$$\frac{\Delta\mathbf{V}}{\mathbf{V_0}}=\boldsymbol{\varepsilon_x}+\boldsymbol{\varepsilon_y}+\boldsymbol{\varepsilon_z}$$

III. Viscoélasticité

Les caractéristiques essentielles du caractère viscoélastique d'un corps solide sont la dépendance de sa réponse à la vitesse de sollicitation et l'existence d'un retour (à contrainte nulle et aux temps longs) à l'´etat initial du matériau non déformé. On parle de "réversibilité de la déformation", mais le processus est thermodynamiquement irréversible à cause de la dissipation visqueuse. Pour mieux comprendre ce phénomène complexe, nous resterons dans

le domaine des petites déformations, ou le comportement peut être décrit par une théorie linéaire.

III.1 Lois de Comportement et Modèles Rhéologiques

- Un certain nombre de corps sont viscoélastiques car ils présentent à la fois des propriétés visqueuses et d'autres élastiques.
- On les représente par modèles rhéologiques qui sont utilisés pour modéliser le comportement d'un matériau, c'est-à-dire pour simuler sa réponse à une sollicitation mécanique.
- Dans la viscoélasticité linéaire, des modèles analogiques empiriques ont été proposés ; ils sont composés d'une combinaison de connexions en série et/ou parallèle de ressorts (de coefficients d'élasticité Ei) et d'amortisseurs (de coefficients de viscosité ηi) élémentaires, représentant les composantes élastiques et visqueuses, respectivement.

<u>Ressort</u>

Ce modèle (analogique) représente le solide hookéen : comportement mécanique purement élastique. Le modèle mathématique correspondant est la loi de Hooke : $\boldsymbol{\sigma = E.\varepsilon}$

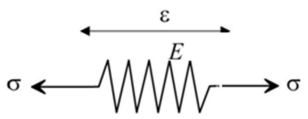
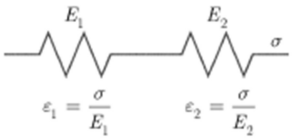


Schéma du ressort

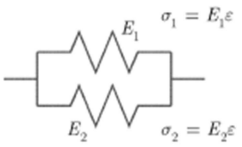
Assemblage en série



La déformation $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$; La contrainte est : $\sigma = \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\right)\varepsilon$

Assemblage en parallèle

La contrainte $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$



La déformation $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1 + E_2}$

<u>Amortisseur</u>

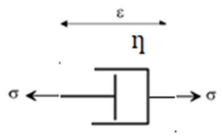
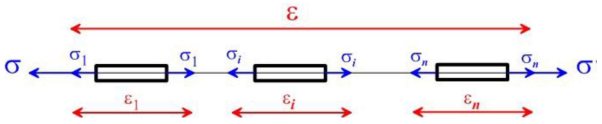


Schéma de l'amortisseur

Ce modèle représente le fluide (liquide) newtonien : comportement visqueux. Le modèle mathématique est la loi de Newton : $\boldsymbol{\sigma} = \eta.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

- **Association d'éléments en série**

L'association est analogue à celle des circuits électriques. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ correspond au courant électrique et la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ correspond à la tension (différence de potentiel).



$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma_i} \quad \forall\, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \boldsymbol{n}$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_1^n \boldsymbol{\varepsilon_i}$

III.1.1 Modèle viscoélastique de Maxwell

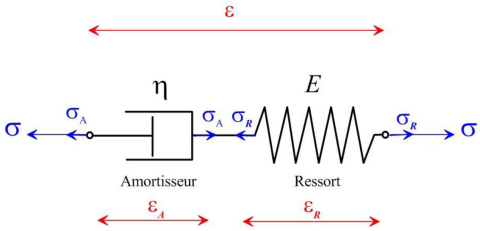


Figure 52. Modèle viscoélastique de Maxwell [11]

Loi élastique linéaire $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}.\boldsymbol{\varepsilon_R}$ et loi visqueuse linéaire $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\eta}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_A$

Additivité des déformations : $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon_R} + \boldsymbol{\varepsilon_A}$

Le modèle de Maxwell est représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort hookéen mis en série comme l'indique le schéma ci-contre. Dans cette configuration, lorsqu'une contrainte axiale est appliquée, la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont définies de la manière suivante :

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma_A} = \boldsymbol{\sigma_R}$

Avec : $\boldsymbol{\sigma_A} = \boldsymbol{\eta}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\boldsymbol{\sigma_R} = E.\boldsymbol{\varepsilon}$

Et : $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon_A} + \boldsymbol{\varepsilon_R}$

Dérivons la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_A}{dt} + \frac{d\varepsilon_R}{dt}$$

$$= \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}$$

III.1.2 Modèle de Kelvin-Voigt

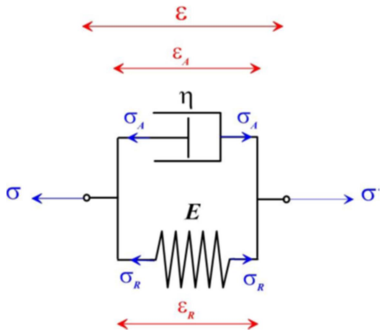


Figure 53. Modèle de Kelvin-Voigt [11]

Le modèle de Kelvin-Voigt est représenté par un amortisseur purement visqueux et un ressort hookéen mis en parallèle comme l'indique le schéma ci-contre. Dans cette configuration, lorsqu'une contrainte axiale est appliquée, la contrainte totale $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont définies de la manière suivante :

Dans ce modèle en parallèle, la déformation totale est la même que celle de l'amortisseur et celle du ressort:

$$\varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_R$$

Par ailleurs, la contrainte totale est la somme des contraintes du ressort et de l'amortisseur :

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_R \quad ;$$

$$\sigma_A = \eta . \dot{\varepsilon} \quad ; \quad \sigma_R = E . \varepsilon$$

III.1.3 Aspects phénoménologiques

La réponse typique d'un solide viscoélastique à l'application rapide d'une contrainte et à son relâchement après un temps t est montrée en figure 20. On remarque la séparation entre une réponse élastique instantanée AB et une réponse retardée qui tend aussi à se stabiliser après un certain temps BC (dit temps de fluage). De même, après le relâchement de la contrainte, on a un retour élastique instantané partiel DE, et ensuite une recouvrance presque totale de la déformation initiale après un temps EF (dit temps de recouvrance).

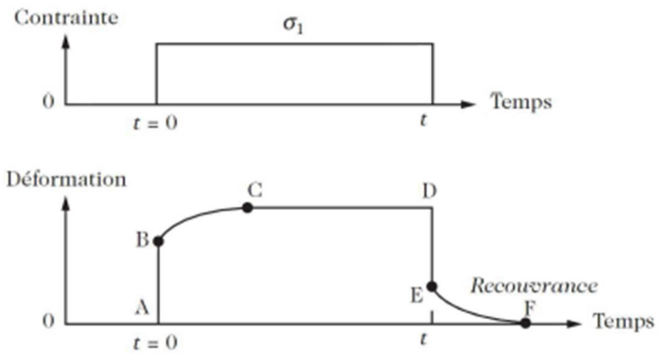


Figure 54. Test de fluage : réponse d'un matériau viscoélastique à l'application d'une contrainte [11]

Si on impose plutôt une déformation constante comme en figure 21, les solides viscoélastiques présentent encore une fois une élasticité instantanée AB, suivie cette fois par une diminution progressive de la contrainte pendant un temps BC (dit temps de relaxation).

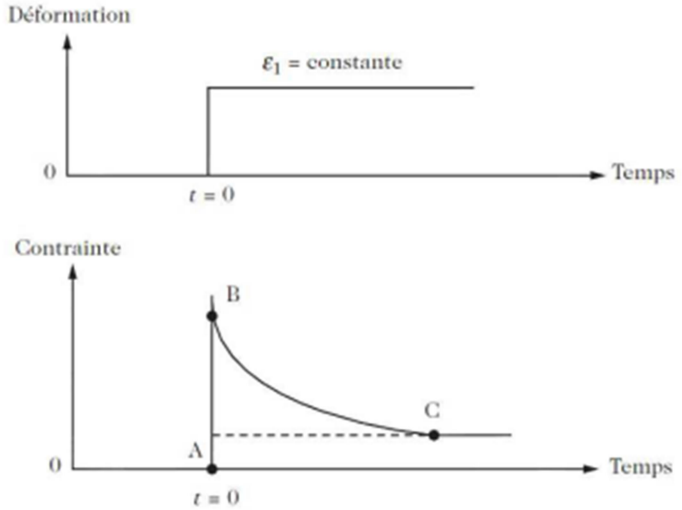


Figure 55. Test de relaxation: réponse d'un matériau viscoélastique à l'application d'une déformation constante pendant un temps t et à son relâchement [11]

En général, l'´etat de contrainte est fonction de l'histoire de la déformation passée, et vice versa l'´etat de déformation est fonction de l'histoire de la contrainte passée. Si on représente les courbes de charge-décharge sur un diagramme $\sigma - \varepsilon$, on observe l'apparition d'une hystérésis qui augmente avec la rapidité du chargement. Ce phénomène est d'autant plus marqué que le temps d'application des contraintes s'approche du temps de relaxation viscoélastique, pour diminuer ensuite.

Exercices corrigés

Exercice 1

Soit l'état de contrainte d'un solide déformable définie par rapport au repère orthonormé $\{o, x_1,\ x_2,\ x_3\}$, en un point M qui a pour coordonnées : M(1,1,0), par le tenseur :

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1x_1} & \mathbf{-2x_3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-2x_3} & \mathbf{4x_2} & \mathbf{2x_3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2x_3} & \mathbf{-5x_3} \end{bmatrix}_{\overrightarrow{(Ei)}}$$

1. Donner une représentation physique de cet état de contrainte
2. Calculer le vecteur des contraintes dans la direction $\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{E_1} + \sqrt{3}.\overrightarrow{E_2}$
3. Calculer les contraintes principales
4. Quelle est la contrainte tangentielle maximale.

Exercice 2

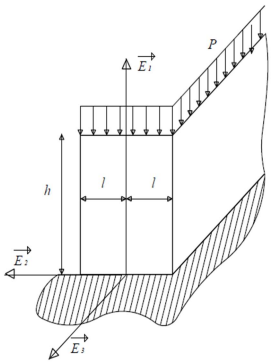
Soit le massif parallélépipède rectangle de grande longueur (voir Figure1) caractérisé par le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u_1 = Ax_1 + Cx_2 \\ u_2 = -Cx_1 + Bx_2 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$ A, B et C sont des constantes.

* Le matériau a un comportement élastique linéaire dont les forces de volume sont négligeables.

* La face inférieure repose sur un appui plan indéformable

Calculer le tenseur des déformations.



Massif parallélépipède

Exercice 3

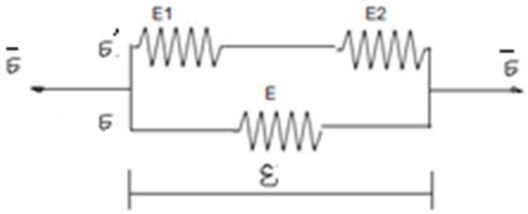
En un point M d'un solide élastique isotrope, le tenseur des contraintes, par rapport au repère orthonormé {o ; x, y, z} est donné par : $[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ Mpa

1. Déterminer les contraintes principales du tenseur
2. Déterminer le tenseur déformation $[\varepsilon]$ pour un matériau ayant une loi de comportement élastique linéaire définie par un module d.Young E et un coefficient de Poisson ν.
E= 3000 MPa et ν = 0,3.
3. Calculer les longueurs des arrêtes du solide après déformation sachant que les dimensions initiales sont : 0.2x0.2x0.3 m.
4. Calculer la variation de volume du solide.

Exercice 4

Un matériau Viscoélastique suit le modèle de la figure 2. Avec E_1=2 10^4 Mpa ; E_2=3 10^4 Mpa $\varepsilon = 910^{-6}$; $(\sigma' = \sigma)$.

Déterminer E, σ et $\bar{\sigma}$



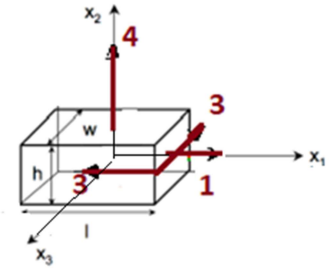
Modèle de comportement Viscoélastique

SOLUTIONS

Exercice 1

$$\overline{\overline{\sigma(M)}} = \begin{bmatrix} 1x_1 & -2x_3 & -3 \\ -2x_3 & 4x_2 & 2x_3 \\ -3 & 2x_3 & -5x_3 \end{bmatrix} \quad \overline{(Et)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Représentation physique de cet état de contrainte



2. Vecteur des contraintes dans la direction $\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{E_1} + \sqrt{3})\overrightarrow{E_2}$

$$\overrightarrow{T}(M, \overrightarrow{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 2\sqrt{3} \\ -3/2 \end{Bmatrix}$$

3. Les contraintes principales

$$\mathrm{Det}[[\sigma(M)] - \lambda[I]] = 0$$

$$Det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 + (-3)\begin{vmatrix} 0 & 4-\lambda \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda) - 3(3)(4-\lambda) = 0$$

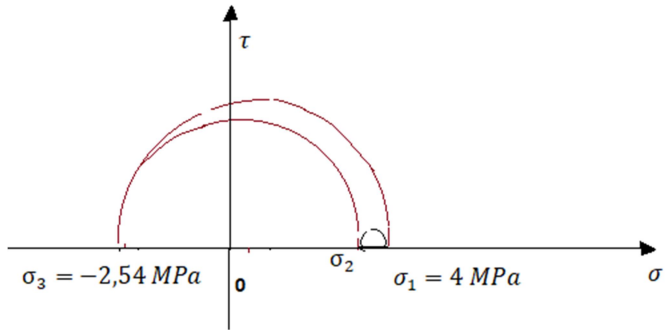
$$(4-\lambda)[(-\lambda)(1-\lambda) - 9] = 0$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 9) = 0$$

$$\lambda_1 = 4\ MPa\ ; \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{37}}{2} = 3{,}54\ MPa\ ; \qquad \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{37}}{2} = -2{,}54\ MPa$$

4. Tri-cercle de mohr

$$\sigma_1 = 4\ \text{MPa} \ > \ \sigma_2 = 3{,}54\ \text{MPa} \ > \ \sigma_3 = -2{,}54\ \text{MPa}$$



5. Quelle est la contrainte tangentielle maximale.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{4-(-2.54)}{2} = 3{,}27\ \text{MPa}$$

Exercice 2

$$\begin{cases} u_1 = Ax_1 + Cx_2 \\ u_2 = -Cx_1 + Bx_2 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$ A, B et C sont des constantes.

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M})}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon(M)}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice 3

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & 11 \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

$$\text{Det}[[\sigma(M)] - \lambda[I]] = 0$$

$$Det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 9-\lambda & 5 \\ 0 & 5 & 11-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} 9-\lambda & 5 \\ 5 & 11-\lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 = 0$$

$(7-\lambda)[(9-\lambda)(11-\lambda) - 25)] = 0$; $(7-\lambda)(\lambda^2 - 20\lambda + 74) = 0$

$$\lambda_1 = 7\ \text{MPa} \ ; \quad \lambda_2 = 15{,}09\ \text{MPa} \ ; \quad \lambda_3 = 4{,}9\ \text{MPa}$$

D'après la loi de Hooke sous forme matricielle (en 3D)

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \vartheta(\sigma_{yy} + \sigma_{ZZ})) & \varepsilon_{xy} = \frac{1+\vartheta}{E}\sigma_{xy} & \varepsilon_{xz} = \frac{1+\vartheta}{E}\sigma_{xz} \\ \dots & \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \vartheta(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) & \varepsilon_{yz} = \frac{1+\vartheta}{E}\sigma_{yz} \\ \dots & \dots & \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \vartheta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{E}\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} = (7 - (20)\vartheta) & \varepsilon_{xy} = 0 & \varepsilon_{xz} = 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} = (9 - (18)\vartheta) & \varepsilon_{yz} = 5\frac{1+\vartheta}{} \\ 0 & 5\frac{1+\vartheta}{} & \varepsilon_{zz} = (11 - (16)\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.33 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 21.66 \\ 0 & 21.66 & 20.66 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

Chapitre 4

Plasticité et viscoplasticité

Chapitre 4. Plasticité et viscoplasticité

I. PLASTICITÉ

I.1 Définition

Les métaux, les polymères à l'´etat vitreux, les pates à modeler et d'autres matériaux (dans une moindre mesure) présentent à température ambiante un comportement dissipatif de type plastique, c'est à dire caractérisé par une réponse élastique aux faibles contraintes et l'apparition d'une déformation permanente au delà d'un seuil de contrainte. Les matériaux pouvant supporter une grande déformation plastique avant rupture sont dit ductiles, contrairement aux matériaux fragiles qui présentent une rupture sans déformation plastique. En fonction des types de matériaux, des conditions de température et de sollicitation, le comportement plastique peut présenter plusieurs formes.

Pour bien se focaliser sur les aspects importants du comportement plastique, nous présente-rons d'abord le comportement 1D, c'est à dire concernant la réponse à un test de traction uni axiale.

I.2 Caractéristiques des courbes de charge uni axiale (1D)

I.2.1 Courbe de charge monotone: seuil de plasticité

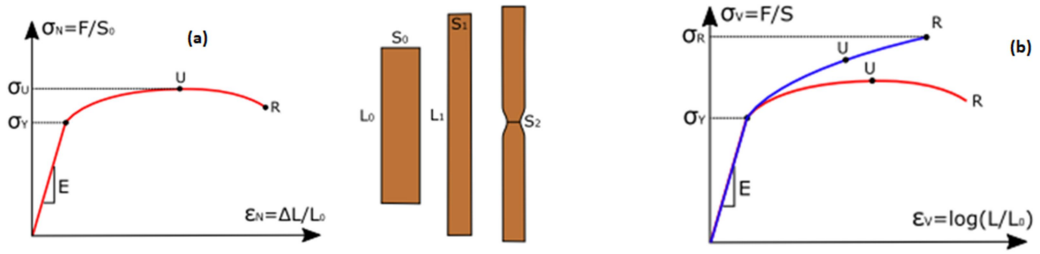


Figure 56. Courbe de charge monotone jusqu'à rupture pour un métal en traction uni axiale. (a) Représentation en valeurs nominales (courbe de l'ingénieur). (b) Représentation en valeurs vraies [8][15].

.

La loi de comportement des métaux à froid se trouve être monotone croissante jusqu'au point de rupture R. C'est sur cette courbe reconstruite en valeurs vraies (c.f. figure 1 (b)) qu'on peut définir et mesurer proprement la résistance à la rupture σ_R et la déformation à rupture ε_R pour un métal à froid, malgré la striction.

I.2.2 Décharge élastique: partage de la déformation

La figure 2 montre l'effet d'une inversion du sens de chargement après un chargement jusqu'au point 1. Des le début de la décharge, le matériau reprend un comportement élastique avec le même module E qu'au premier chargement. Lorsque la décharge est complète, le matériau présente une déformation permanente ε_p, qui prend le nom de déformation plastique.

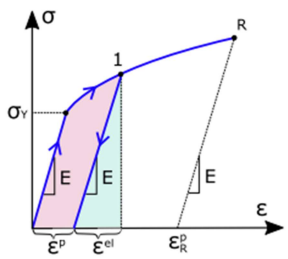


Figure 57. Courbe de charge présentant un cycle de charge/décharge [7] [8][15]

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{P}$$

$$\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E} \qquad \varepsilon^{p} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \qquad 1$$

La détermination expérimentale du seuil de plastification σ_y est fondée sur la détection d'une première déformation plastique permanente après décharge. Comme cette détection est sensible à la précision de la machine de test utilisée, la définition de σ_y est conventionnelle. Une norme internationale fixe la déformation plastique minimale à ε_P seuil = 0.002

I.2.3 Effet de la plastification sur les propriétés mécaniques

Si après le cycle de charge/décharge décrit dans la figure 2 on effectue un nouveau chargement, la réponse est décrite dans la figure 3. Le chargement s'effectue en suivant la même courbe que lors de la décharge, ce qui veut dire que le module élastique E n'est pas affecté par la plastification.

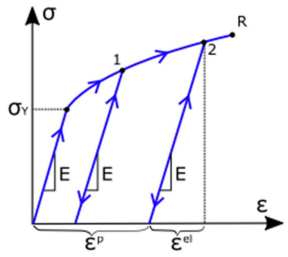


Figure 58. Courbe de charge présentant plusieurs cycles de charge/décharge [7] [15]

Le chargement se poursuit de façon élastique jusqu'`a rencontrer la valeur de contrainte maximale σ_1 atteinte dans le premier cycle de chargement, et se poursuit en suivant la même courbe de plastification qui aurait ´et´e suivie en l'absence du cycle de décharge. On dit alors que le matériau a été durci ou écroui par la plastification, et on entend par cela que sa dureté, c'est à dire sa nouvelle contrainte de plastification, se trouve augment´ee par rapport `a la valeur initiale σ_y. D'un point de vue de l'application, il faut voir un matériau écroui comme un mat´eriau différent qui inclut sa preplastification dans le procédé d'´elaboration. La plupart

des métaux sont vendus dans un état écroui (EN: work hardened) pour en améliorer les propriétés de dureté.

I.3 Description mathématique du comportement plastique uni axial (1D)

I.3.1 Fonction d'´ecrouissage

En appelant σ(ε) la courbe de charge jusqu'à rupture (en valeurs vraies), la fonction d'´ecrouissage Y (ε p) est définie de façon implicite par:

$$\sigma = Y(\varepsilon^P)$$

Modèles simplifiés de comportement plastique

- **Plasticité parfaite**

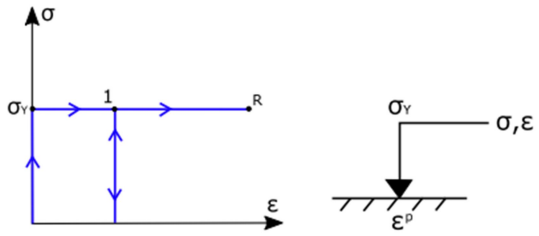


Figure 59. Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle de plasticité parfaite (gauche) et modèle rhéologique associé, représentant un patin à frottement sec (droite).

Le comportement plastique parfait, représenté en figure 4, correspond à un matériau totalement rigide E = ∞ et ne présentant pas de durcissement pendant la plastification, c'est à dire ayant une fonction d'´ecrouissage constante Y (ε_p)= σ_Y.

$$\varepsilon_{el} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_p$$

La partie droite de la figure 4 représente un nouveau élément rhéologique qui contient l'essence du comportement plastique: il représente un curseur, ou bien un patin à frottement sec, ayant la propriété de couler plastiquement (déformation ε_p libre) dans la même direction que la contrainte appliquée, quand la valeur absolue de la contrainte dépasse l'unique paramètre σ_y du modèle.

I.3.2 Elasto-plasticité parfaite

Le comportement élasto-plastique parfait, représenté en figure 5, correspond à un matériau élastique de module d'Young E , ne présentant pas de durcissement pendant la plastification. La fonction d'´ecrouissage est constante Y(ε_p) = σ_Y et c'est la même que pour le modèle rigide (vu en 3.2.1). Encore une fois on décide de rajouter un point de rupture sur la courbe de chargement pour représenter la ductilité finie de tout matériau. Le comportement élasto-plastique parfait peut être représenté par un modèle rhéologique constitué d'un patin plastique en série avec un ressort élastique, comme illustré dans la partie droite de la figure 5.

Le comportement en compression est identique à celui du modèle rigide précédent, sauf pour la présence d'une énergie élastique stockée correspondante à une déformation élastique en compression.

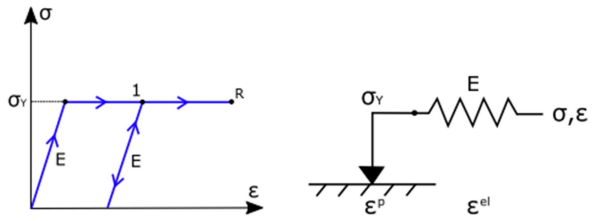


Figure 60. Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle d'élasto-plasticité parfaite (gauche) et modèle rhéologique associé, représentant un patin à frottement sec en série avec un ressort élastique (droite).

I.3.3 Comportement plastique rigide écrouissant

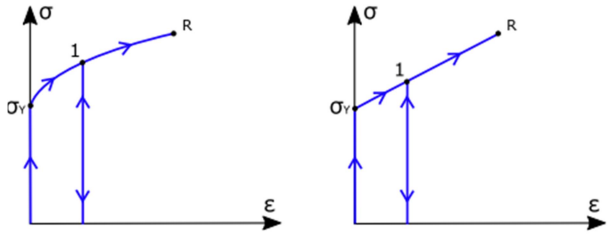


Figure 61. Courbe de charge/décharge/recharge pour un modèle de comportement plastique rigide écrouissant général (gauche) et pour le cas simplifié de l'´ecrouissage linéaire (droite)[7][15][16].

$$Y(0) \equiv \sigma_y$$

$$Y(\varepsilon^p) \equiv \sigma(\varepsilon) \quad ; \qquad \varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E} \qquad 2$$

$$Y(\varepsilon_R^p) \equiv \sigma_R$$

La condition de plastification est :

$$\sigma = Y(\varepsilon^P) \qquad 3$$

I.4 Choix des lois de comportement

a-Comportements viscoélastique :

Pour les polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion, Pour les verres au voisinage de la température de transition, Pour les bétons frais.

b-Comportements rigides-parfaitement plastiques :

Pour l'étude des sols, Pour l'analyse limite,

Pour la mise en forme des métaux.

c-Comportements plastiques :

Pour les métaux à des températures inférieures au quart de la température de fusion,
Pour les sols et roches.

d-Comportements viscoplastiques

Pour les métaux à moyenne et haute température, Pour le bois, les sols (dont le sel), Pour les céramiques à très haute température.

Il faut noter que chacun de ces types de modèles est approché, et que le choix de l'une ou l'autre modélisation du comportement va dépendre de l'application visée. Ainsi un acier à température ambiante peut être considéré comme élastique linéaire pour le calcul des flèches d'une structure mécanique, viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations, rigide-parfaitement plastique pour un calcul de charge limite, élasto-viscoplastique pour l'étude de contraintes résiduelles, ...

Un polymère peut être considéré comme un solide pour un problème de choc, et comme un fluide pour l'étude de sa stabilité sur de longues durées.

I.5 Exemples de critères de plasticité

Il existe de nombreux critères de plasticité adaptés à différentes classes de matériaux. Un bon critère doit être cohérent avec les observations expérimentales, être aussi simple que possible, et être défini par un nombre limité de paramètres qui peuvent être facilement identifiés par des essais expérimentaux standard[9][10][11][12].

I. 5.1 Critère de Rankine

Le critère de Rankine est un critère de plasticité qui porte sur les limites de contraintes normales. Ce critère est largement utilisé pour les matériaux fragiles, tels que les céramiques et les verres.

Dans ce critère, la limite élastique est définie par une contrainte normale maximale, qui peut être identifiée à partir d'un essai de traction, et une contrainte normale minimale, qui peut être identifiée à partir d'un essai de compression. La limite élastique est donc déterminée par la contrainte normale la plus faible entre ces deux valeurs.

Le critère de Rankine peut être représenté graphiquement dans le plan de Mohr, comme indiqué dans la figure 7. Dans ce graphique, les contraintes normales sont représentées sur l'axe horizontal et les contraintes de cisaillement sont représentées sur l'axe vertical. La limite élastique est représentée par une ligne droite qui relie la contrainte normale maximale et la contrainte normale minimale.

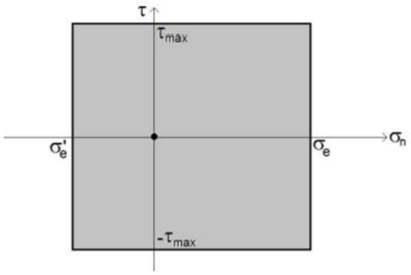


Figure 62. Critère de Rankine [12]

$$f(\bar{\bar{\sigma}}) = max\{(\sigma_1 - \sigma_e\,); (\sigma'_e - \sigma_3)\} \qquad 4$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_e - \sigma'_e}{2} \qquad 5$$

Le critère de Rankine est en général assez imprécis, et il est par exemple très peu probable de trouver un matériau conduisant à la même valeur de τ_{max} que l'équation (4.I.6) si on le soumet à un essai de cisaillement ou de torsion. Le critère de Rankine est donc seulement utilisé dans un cadre mécanique où l'on sait que les matériaux étudiés seront principalement soumis à des sollicitations de traction - compression.

I.5.2 Critère de Tresca

Effectivement, contrairement au critère de Rankine, le critère de Tresca s'intéresse à la valeur maximale de la contrainte de cisaillement, qui peut être obtenue à partir d'un essai de cisaillement, d'un essai de torsion ou d'un essai triaxial de révolution selon le matériau étudié. Ce critère se formalise mathématiquement par :

$$f(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_e \qquad 6$$

On reconnaît dans cette expression le terme $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ qui correspond au rayon du grand cercle de Mohr défini par les contraintes principales maximale et minimale, et qui correspond également au cisaillement maximal décrit par ce cercle de Mohr. Graphiquement, le critère de Tresca est représenté par deux lignes horizontales parallèles, comme sur la Figure 8.

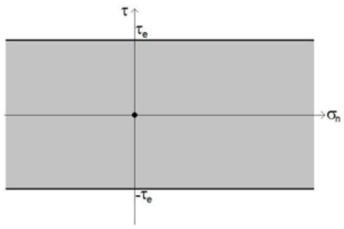


Figure 63. Critère de Tresca.

Il apparaît sur la Figure 8 que le critère de Tresca délimite un domaine élastique infini selon l'axe horizontal. Un tel matériau ne peut donc pas plastifier par compression

hydrostatique ou par traction hydrostatique. Une telle propriété est peu réaliste physiquement. C'est pourquoi on utilise ce critère dans le cas de matériaux soumis à du cisaillement, ou on le combine avec un critère de Rankine convenablement choisi.

Le critère de Tresca est très utilisé en mécanique des sols, car il décrit correctement les limites du comportement élastique des argiles saturées en comportement non-drainé. Dans ce cadre, la valeur maximale de cisaillement τ_e est nommée "cohésion non- drainée et notée c_u.

I.5.3 Critère de Von Mises

Ce critère suppose que seule la partie déviatorique du tenseur de contrainte joue un rôle dans la plastification du matériau. Il se définit mathématiquement par l'expression suivante :

$$f(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - \sigma_e^2 \qquad 7$$

Comme on le voit, le critère de Von Mises fait intervenir un seul et unique paramètre qui dépend du matériau, mais a en revanche recours aux valeurs des trois contraintes principales et en particulier à la contrainte principale intermédiaire σ_2.

Il est donc impossible de le représenter graphiquement dans le plan de Mohr, et on utilise une représentation 3D, comme dans la Figure 9.

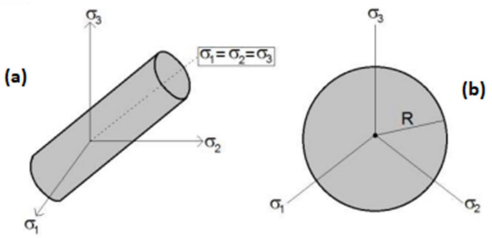


Figure 64. Critère de Von Mises : a) Dans le repère n_1, n_2, n_(3);b). En projection[12]

I.5.4 Critère de Mohr Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb est le critère de plasticité royal de la mécanique des sols. Il dépend de deux paramètres. Le premier est noté φ, s'exprime en degrés, et s'appelle "angle de frottement interne". Le second est noté c, prend les dimensions d'une pression (généralement le kilopascal), et s'appelle "cohésion". Ce critère est défini mathématiquement par :

$$f(\bar{\bar{\sigma}}) = \sigma_1(1 + sin\varphi) - \sigma_3(1 + sin\varphi) - 2c.cos\varphi \qquad 8$$

Ce critère permet de bien représenter le comportement des matériaux granulaires, de types sables ou argiles. Dans le cas où la cohésion est nulle, le matériau est dit pulvérulent. C'est le cas par exemple du sable sec. Quand l'angle de frottement est nul, on

retrouve le critère de Tresca, qui s'applique avec succès aux argiles en conditions non-drainées.

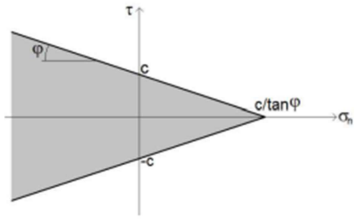


Figure 65. Critère de Mohr-Coulomb [12]

D'une manière générale, il est nécessaire d'effectuer au moins deux essais triaxiaux de révolution (ou autres essais de cisaillement) pour déterminer la cohésion et l'angle de frottement. On notera que, dans l'équation (8) et dans la Figure 65, on a utilisé les conventions de signes de la mécanique des milieux continus. Dans le cadre de la mécanique des sols où ce critère est utilisé, on utilise généralement la convention inverse, qui compte comme positive une contrainte de compression et négative une traction.

I.6 Critères de rupture relatifs aux domaines de la géotechnique

Le « modèle de Mohr-Coulomb » (MCM), est un modèle élastique linéaire parfaitement plastique qui fait intervenir les paramètres suivants :

- Module d'Young et coefficient de poisson (caractère élastique)
- Cohésion, angle de frottement et angle de dilatation (caractère plastique).

Il s'agit d'un modèle simple, mais mal adapté au calcul des écrans de soutènement, en particulier pour ce qui concerne la détermination des tassements en tête d'écran. Dans le cas du modèle Hardening Soil (HSM), le critère de rupture est également un critère de rupture de Mohr Coulomb. Cependant, le mécanisme plastique avec écrouissage cinématique permet de modéliser plus fidèlement le comportement du sol.

I.6.1 Hardening soil model (HSM) dans l'etude du creusement de tunnels superficiels.

Le Hardening Soil Model (HSM) a été introduit par (Schanz et al., 1999). Il a été intégré dans PLAXIS depuis plus de dix ans et s'est diffusé dans d'autres suites logicielles. PLAXIS, ZSOIL et FLAC recommandent explicitement l'utilisation du modèle HSM pour la modélisation de creusement de tunnel. En particulier (PLAXIS 2D, 2015) met en avant la complémentarité des mécanismes qui doivent permettre au modèle de traiter une large gamme de matériaux (graviers, sables, limons et argiles surconsolidés) et de situations géotechniques (fondations, excavations, tunnels, remblais, barrages…).

Le HSM est un modèle de comportement du sol isotrope non-linéaire à deux mécanismes de plasticité indépendants avec écrouissage [17]. Il propose une synthèse de différents modèles développés dans la seconde moitié du 20e siècle notamment le modèle de (Duncan et Chang, 1970) et le modèle Cam-Clay (Potts et Zdrazkovic, 2001).

II. VISCOPLASTICITÉ

II.1 Viscoplasticité uni axiale

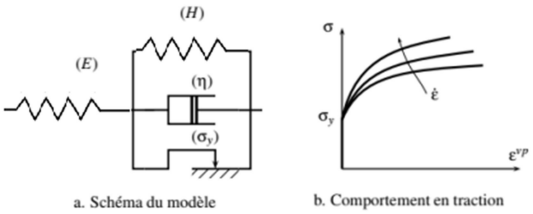


Figure 66. Modèle de Bingham généralisé [13].

La figure 66.a indique comment, en rajoutant un simple amortisseur, il est possible de passer très simplement d'un modèle ayant un comportement plastique indépendant du temps à un modèle viscoplastique : le modèle obtenu est le modèle de Bingham généralisé. On retrouverait l'original de ce modèle en enlevant le ressort en série (E → ∞, pas d'élasticité instantanée, on obtient alors un modèle rigide viscoplastique), et en supprimant le ressort en parallèle, (H = 0, pas d'écrouissage). La déformation élastique se lit aux bornes du ressort de caractéristique E, la déformation viscoplastique, que l'on nommera ε^{vp}, aux bornes de l'assemblage en parallèle. La détermination des équations de ce modèle s'effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

$$X = H\varepsilon^{vp} \qquad \sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}^{vp} \qquad \sigma_p \leq \sigma_y \qquad 9$$

Avec, H : Caractéristique de l'écrouissage ; η : viscosité

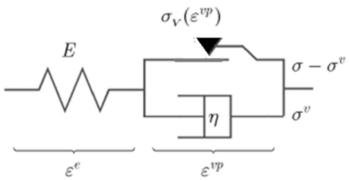


Figure 67. Modèle Bingham élasto-viscoplastique

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{vp} \qquad 10$$

E : module d'élasticité, σ_Y : limite élastique, η : viscosité

II.2 Viscoplasticité tridimensionnelle (3D)

Le tenseur symétrique des déformations [ε] est décomposé en trois parties :

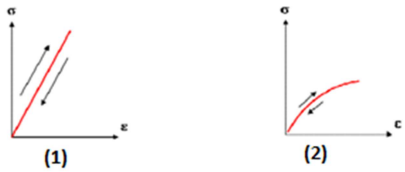
- Une partie élastique [ε_e] fonction de la variation du tenseur de contrainte [σ] entre l'état actuel et l'état initial (contrainte à l'état de référence, [σ_I] ; dans un grand nombre d'applications, il s'agit de l'état de contraintes nulles, mais il est par exemple toujours présent en géotechnique). En élasticité linéaire : $\boldsymbol{\varepsilon}^e$
- Une partie de dilatation thermique ε_{th} fonction de la température actuelle T et de la température à l'état de référence T_I.
- Une partie non élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{ne}$, elle même décomposée en une partie plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ et une partie viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$, (régies par des lois d'écoulement en élasto-plasticité et en élasto-viscoplasticité).

$$[\varepsilon] = [\varepsilon^e] + [\varepsilon^{th}] + [\varepsilon^{ne}] = [\varepsilon^e] + [\varepsilon^{th}] + [\varepsilon^p] + [\varepsilon^{vp}] \qquad 11$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Considérons deux Solides définis par leurs lois de comportement présentées dans les figures ci-dessous. Donner un titre pour chaque figure



<u>Solution</u>

(1) Solide élastique linéaire, (2) Solide élastique non linéaire

Exercice 2

Dans un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini par:

$$\begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 20 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{MPA}$$

1- Déterminer les contraintes principales.
2- Déssiner le tricercle de Mohr
3- La limite élastique identifiée est de 300 MPa
   Calculer les contraintes principales

4- Appliquer le critère de Tresca.
5- Appliquer le critère de Von Mises.

<u>Solution</u>

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 20 & 0 \\ 20 & 12-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

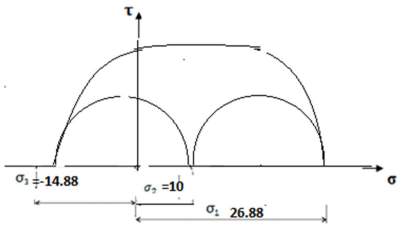
$-\lambda\begin{vmatrix} 12-\lambda & 10 \\ 10 & 10-\lambda \end{vmatrix}$ $-20\begin{vmatrix} 12-\lambda & 10 \\ 10 & 10-\lambda \end{vmatrix}$ $+0 = 0$

$= -\lambda.[(12-\lambda)(12-\lambda)-0]-20[20(12-\lambda)] = 0 = (10-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda - 400)$

$\lambda 1 = 10$ Mpa

$\lambda 2 = (12 + 41.76)/2 = 26.88$ MPa ; $\lambda 3 = (12 - 41.76)/2 = -14.88$

$$\sigma_1 = 26.88 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 10 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -14.88$$



Tricercle de Mohr

Critère de Tresca

$$\tau_e = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{26.88 + 14.88}{2} = 20.88 \text{ MPa}$$

Critère de Von Mises

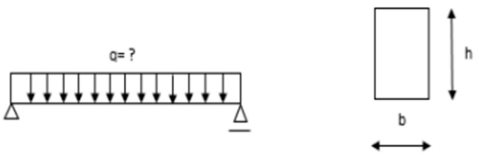
$$\sigma_e = \left[\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2]\right]^{1/2}$$

$$\sigma_e = \left[\frac{1}{2}[(26.88-10)^2 + (26.88+14.88)^2 + (10+14.88)^2]\right]^{1/2}$$

Exercice 3

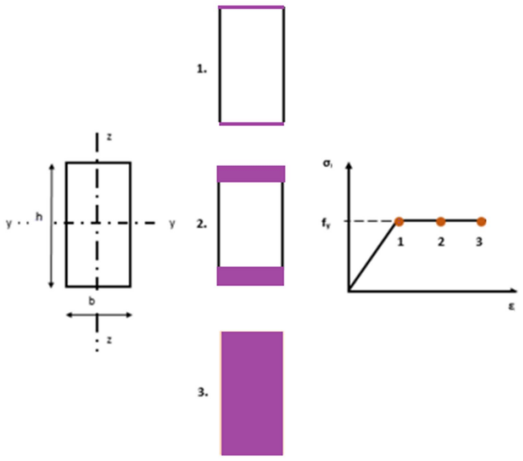
Déterminer l'évolution du chargement pour une poutre rectangulaire dans un cycle de chargement (on supposera que le matériau est parfaitement élasto-plastique).

l= 6m,b = 20mm ,h= 80mm,f y = 235MPa

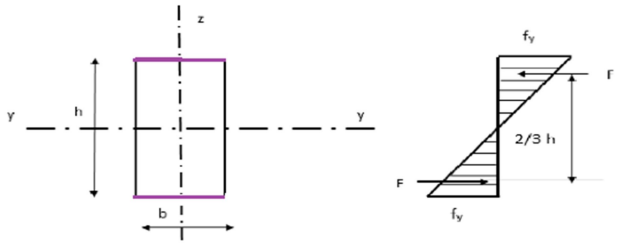


Solution

1. Stades de plastification



2. Calcul du chargement maximal sur la poutre
Stade 1



$M_{y1} = F.r$

$M_{y1} = \frac{1}{2}.f_y.\frac{h}{2}.b.\frac{2}{3}h$

$M_{y1} = \frac{1}{6}b.h^2 f_y$

$M_{y1} = f_y.W_{y1} \rightarrow W_{y1} = \frac{M_{y1}}{f_y} = \frac{1}{6}b.h^2 = W_{yel}$

$M_{el} = M_{max} = \frac{q_{el}.l^2}{8}$

$w_{el} = \frac{1}{6}b.h^2 = \frac{1}{6}20.80^2$

$w_{el} = \frac{1}{6}20.80^2$

$w_{el} = 2{,}13.10^4 mm^3$

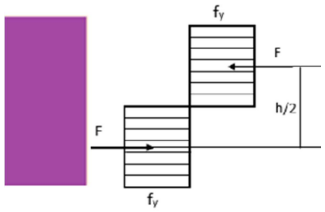
$w_{el} = 2{,}13.10^{-5} m^3$

$\sigma_{max} = fy = \frac{M_{el}}{w_{el}} = \frac{q_{el}.l^2}{8w_{el}} \rightarrow q_{el} = \frac{8.w_{el}.f_y}{l^2}$

$q_{el} = \frac{8.2{,}13.10^{-5}.235.1000}{6^2}$

$q_{el} = 1{,}11\ KN/m$

Stade 3



$$M_{y3} = F.r$$

$$M_{y3} = f_y.\frac{h}{2}.b.\frac{h}{2}$$

$$M_{y3} = \frac{1}{4}b.h^2 f_y$$

$$W_{y3} = \frac{M_{y3}}{f_y} = \frac{1}{4}b.h^2 = W_{ypl}$$

$$M_{pl} = \frac{q_{pl}.l^2}{8}$$

$$W_{pl} = \frac{1}{4}b.h^2$$

$$W_{pl} = \frac{1}{4}20.80^2$$

$$W_{pl} = \frac{1}{4}20.80^2$$

$$W_{pl} = 3{,}2.10^4 mm^3$$

$$W_{pl} = 3{,}2.10^{-5} m^3$$

$$\sigma_{max} = f_y = \frac{M_{pl}}{w_{pl}} = \frac{q_{pl}.l^2}{8w_{pl}} \rightarrow q_{pl} = \frac{8.w_{pl}.f_y}{l^2}$$

$$q_{pl} = \frac{8.3{,}2.10^{-5}.235.1000}{6^2}$$

$$q_{pl} = 1{,}67 \text{ KN/m}$$

Références bibliographiques

Références

1. Griffith, A.A. The Phenomena of rupture and and flow in solids, Mech. Eng. A, 221, pp. 163–198, 1920.
2. Irwin, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, J. of Appl. Mech., 1957, 24, pp. 361–364.
3. Abdelghani, M. Cours : Science Des Matériaux, Laboratoire Génie des matériaux, Ecole Militaire Polytechnique, 2017.
4. Zeghloul, A. Concepts fondamentaux de la mecanique de la rupture. Univ-Loraine, 2017.
5. Chong, H. Rheologie Des Betons Fluides. Thèse de doctorat, Ecole nationale des ponts et chaussees, Spécialité : Structures et Materiaux, 1995.
6. Mandel, J.: Mécanique des Milieux Continus. Tome II, Gauthier-Villars, 1966.
7. Timoshenko S., Goodier J.M. Théorie de l'élasticité. Ed. Librairie Polytechnique Ch. Béranger
8. Lemaitre J., Chaboche J.L. Mécanique des solides déformables et Endommageables. 3eme Ed. Dunod, 2020.
9. Ciccotti, M. : Mécanique des Solides et des Matériaux 2, Elasticité-Viscoélasticité-Plasticité-Rupture. ESPCI Paris - Laboratoire de Science et Ingénierie de la Matière Molle, 2021.
10. Biot, M.: 'Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena'. J. Appl. Phys. 25(11) (1954), 1385–1391, 2016.
11. François D., Pineau A., Zaoui A. Elasticité et plasticité. Ed. Lavoisier, 2009.
12. Lafifi, B. Cours : Mécanique des Solides Déformables. Université 08 Mai 1945 de Guelma, 2023.
13. Bonelli, S. Modèles Rhéologiques et Lois de Comportement - Aide-Mémoire Simplifié, National Research Institute of Sciences and Technology for Environment and Agriculture, 2019.
14. Richards R., Jr. Principles of solid mechanics. Ed. CRC Press, 2001.
15. Salençon J. Elastoplasticité. Thèse de doctorat. Ecole polytechnique, France, 2002.
16. Robert J. Asaro, Vlado A. Lubarda. Mechanics of solid and materials. Ed. Cambridge UniversityPress, 2010.
17. Gilleron N., Bourgeois E., Saitta A. Utilisation du hardening soil model dans l'étude du creusement de tunnels superficiels. Journées Nationales de Géotechnique et de Géologie de l'Ingénieur, Nancy, France, 2016.