

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2014/2015

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Option : Mathématiques Appliquées

**BIFURCATIONS DES CYCLES CANARD
DANS DES
SYSTEMES LENTS-RAPIDES**

Présentée Par

MAHMOUDI LILIA

Sous la direction de :

ENCADREUR: Prof. Ammar Makhlof Univ. Badji Mokhtar. Annaba

CO-ENCADREUR: Prof. Robert Roussarie Univ. De Bourgogne. Dijon

Devant le jury

PRESIDENT	Laouar Abdelhamid M.C.A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR	Bebbouchi Rachid Prof	U STHB ALGER
EXAMINATEUR	Mehidi Nouredine Prof	U. De BEJAIA
EXAMINATEUR	Benhamadi Zoubeida M.C.A	U.B.M. ANNABA

Remerciements

Je tiens à exprimer mon profond respect et ma gratitude envers mon encadreur Monsieur Ammar Makhoul Professeur de l'université de Badji Mokhtar Annaba de m'avoir beaucoup soutenu dans cette épreuve, et dirigé grâce à ses précieux conseils.

Je remercie du fond du cœur et sincèrement mon co-encadreur Monsieur Robert Roussarie Professeur émérite de l'université de Bourgogne de m'avoir proposé le sujet de ma thèse, et aussi de m'avoir guidé avec efficacité, dévouement, et sérieux.

Je tiens à remercier Monsieur Laouar Abdel Hamid M.C.A de l'université de Badji Mokhtar Annaba pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury.

J'exprime aussi ma gratitude à l'égard des deux professeurs Monsieur Rachid Bebbouchi Professeur de l'université USTHB Alger et Monsieur Nouredine Méhiri Professeur de l'université de Béjaia pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner mon mémoire de thèse.

Je remercie également Mme Zoubeida Benhamadi M.C.A de l'université de Badji Mokhtar Annaba d'avoir accepté d'examiner mon mémoire de thèse.

Résumé

L'idée générale de la thèse est l'étude des bifurcations de cycles canard avec deux paramètres de cassures, le sujet proposé a été la reprise de l'étude des systèmes lents-rapides quadratiques là où l'a laissé Smith, avec l'idée d'appliquer à cette étude les progrès récents de la théorie des systèmes lents-rapides et plus précisément dans le cas des équations de Liénard.

Un modèle local pour l'application de retour au voisinage du cycle canard a été obtenu en 2006 par les deux professeurs Mr Roussarie et Mr Dumortier dans le cas générique de codimension 2.

Les résultats que j'ai obtenus sur les bifurcations de cycles canard à deux paramètres de cassures et de codimension quelconque généralisent complètement les résultats précédents.

Mots clés : Système lent-rapide, Bifurcation, Cycle Canard, Equation de Liénard, Système De Chebychev.

Classification AMS : 34C05, 34C07, 34C23, 34C26, 34C15.

Abstract

The general idea of the thesis is the study of canard cycles bifurcations with two breaking parameters, I have retake the same study of slow-fast systems as Smith with the recent progress of slow-fast systems theory and more precisely in the case of Lienard equations .

A local model for the return application in the vicinity of the canard cycle was obtained in 2006 by the two professors Roussarie and Dumortier in the generic case of codimension 2.

The results which I have obtained about the canard cycles bifurcations with two breaking parameters and any codimension generalise completely the precedent results.

Key words : Slow-fast system, Bifurcation, Canard Cycle, Liénard Equation, Chebychef system.

Classification AMS : Classification AMS : 34C05, 34C07, 34C23, 34C26, 34C15.

ملخص :

الفكرة العامة للأطروحة هي دراسة تفرع لدورة كنار ذات وسيطين للتكسير .

الموضوع المقترح هو مواصلة الدراسة التي قام بها سميث للجمل البطيئة – السريعة التربيعة ، مع فكرة تطبيق البحوث المتقدمة و الحديثة في نظرية الجمل البطيئة – السريعة و خاصة في حالة معادلات لينار .

نموذج محلي للتطبيق الرجوع في جوار دورة كنار تحصل عليه الأستاذين روساري و دمورتي في حالة عامة ذو بعد مرافق 2 في عام 2006 .

النتائج المتحصل عليها في هذا العمل من أجل تفرع لدورة كنار ذات وسيطين للتكسير ، و ذات بعد مرافق كيفي تعمم كليا النتائج السابقة .

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Le cadre conceptuel	4
1.2	Enoncés des résultats	7
1.2.1	Définitions	7
1.2.2	Théorèmes	9
2	Introduction aux systèmes lents-rapides	13
2.1	Quelques définitions	13
2.2	Exemples de systèmes lents-rapides	19
2.2.1	Les circuits électriques	19
2.2.2	Ecologie, biologie	21
2.3	Systèmes lents-rapides à la frontière des systèmes différentiels réguliers	23
3	les systèmes lents-rapides dans le plan	27
3.1	Outils géométriques	27
3.1.1	Modèle local près des points réguliers de la courbe lente	28

3.1.1.1	La courbe lente	28
3.1.1.2	Variétés centrales aux points réguliers	29
3.1.1.3	Modèle local le long de $L_\lambda[a, b]$	31
3.1.1.4	Le cas d'une dynamique lente sans singularités	35
3.1.2	La dynamique lente pour un système quelconque	37
3.1.2.1	Application au système de Liénard	39
3.2	Les cycles lents-rapides communs	40
3.2.1	Bifurcation des cycles lents-rapides communs	40
3.3	Les cycles canard	43
3.3.1	Conditions de création de cycles canard	43
3.3.2	Mécanismes de bifurcation des cycles canard	45
3.3.3	Bifurcations des cycles canard	49
3.3.3.1	L'intégrale de divergence lente	50
3.3.3.2	Transition d'un point de saut ou de Hopf	51
3.3.3.3	Résultats de bifurcation	55
4	Cycles canard de codimension finie avec deux paramètres de cassure	62
4.1	Introduction	62
4.2	Le cadre	78
4.3	Preuve Des Théorèmes	82
4.3.1	Preuve du Théorème 4.1.3	82
4.3.2	Preuve du Théorème 4.1.11	96

4.4 Exemple 111

Chapitre 1

Introduction

1.1 Le cadre conceptuel

La question centrale dans l'étude des champs de vecteurs polynomiaux du plan est la résolution du 16ième problème de Hilbert, et pour commencer, sa résolution dans le cas quadratique. Dans [10] les auteurs ont lancé un programme pour solution du "problème de Hilbert existentiel" pour les champs quadratiques (montrer qu'il existe une borne uniforme du nombre des cycles limites, valable pour tous les champs quadratiques). Dans cet article une liste de tous les déploiements (germes de familles) quadratiques susceptibles de créer des cycles limites. Pour résoudre le problème, on doit démontrer que tous ces déploiements ont une cyclicité (borne du nombre de cycles limites) finie. Depuis, beaucoup de cas ont été résolus (en particulier tous les cas de déploiements de graphiques hyperboliques, semi-hyperboliques, la plu-

part des graphiques incluant un point nilpotent et en règle générale tous les graphiques qui ont un déploiement de codimension finie, au sens usuel). Restent les cas les plus durs : celui des graphiques de codimension infinie (avec application de retour identique), et celui des systèmes lents-rapides (perturbations singulières) quadratiques (déploiement d'un champ à singularités non isolées) ; les cas les plus durs combinant les deux difficultés (un système lent-rapide "de type central "). Les systèmes lents-rapides quadratiques ont déjà été étudiés par un élève de F. Dumortier : B. Smits, avec des résultats très partiels, et dans le cas de codimension finie (au sens des perturbations singulières), où seul a été introduit le cas ne produisant qu'un cycle limite par bifurcation (aussi appelé dans ce contexte : oscillation de relaxation). Voir la thèse de B. Smits, Université de Limburgs, résumée dans [34].

Le cadre conceptuel de la thèse est la théorie des systèmes différentiels lents-rapides qui sont des systèmes différentiels très particuliers car dégénérés. Ils ont cependant une grande importance dans les applications. Nous avons obtenu des résultats généraux pour les cycles canard avec deux paramètres de cassure et de codimension quelconque. Ces résultats généralisent les résultats précédents obtenus en 2006 pour la codimension 2 dans l'article de Dumortier et Roussarie [14]. On a réussi à trouver une borne du nombre de cycles limites qui bifurquent d'une région contenant un cycle canard exprimée en fonction des intégrales de divergence lente associées pour une codimension quelconque avec deux paramètres de cassure. L'article [25] qui a servi de base à la rédaction de ma thèse, a été publié dans la revue

internationale "Qualitative Theory Of Dynamical Systems". Dans cet article on a considéré les systèmes lents-rapides bi-dimensionnels avec des cycles canard qui se produisent à partir de l'équation limite pour une valeur de $\varepsilon = 0$. Les cycles canard sont cassés par deux mécanismes indépendants : soit le point tournant ou le point saut entre deux points de contacts. Chacun de ces deux mécanismes est associé à un paramètre permettant une cassure générique (ici générique veut dire général) du cycle canard. Pour cette raison les cycles canard considérés sont appelés cycles canard avec deux paramètres de cassure. Ils passent aussi à travers deux niveaux horizontaux indépendants paramétrés par u, v . Pour un système donné on a un ensemble de famille de cycles canard à 2-paramètres Γ_{uv} . Le mémoire est divisé en 4 chapitres :

1. Le chapitre 1 est une introduction au sujet avec un aperçu du cadre conceptuel et l'exposition des importants résultats de la thèse.
2. le chapitre 2 est aussi une introduction aux systèmes lents -rapides avec des définitions basiques, des théorèmes ainsi que des exemples concrets de systèmes lents-rapides.
3. Le chapitre 3 est consacré à l'étude des cycles lents-rapides dans le plan. On y introduit les outils géométriques, avec lesquels on étudie les cycles canard et les communs.
4. Le chapitre 4 est le coeur du sujet de cette thèse, puisqu'il contient les détails des démonstrations des plus importants résultats publiés dans [25].

1.2 Enoncés des résultats

1.2.1 Définitions

On va se limiter aux systèmes lents-rapides de type Liénard :

$$X_{\lambda,\varepsilon} \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \lambda) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (1.1)$$

où F, g sont des fonctions \mathcal{C}^∞ .

1. La courbe lente

Rappelons que la courbe lente, pour la valeur λ du paramètre est définie par $L_\lambda : \{y = F(x, \lambda) = F_\lambda(x)\}$. Elle est formée par les points singuliers de l'équation limite $X_{\lambda,0}$. En dehors de la courbe lente les orbites sont des arcs ouverts horizontaux (dynamique rapide).

2. **Les cycles lents-rapides** : Un cycle lent rapide est une courbe fermée de segments hyperboliques qui sont des orbites rapides régulières.
3. **Les cycles canard** : Un cycle canard pour la valeur λ_0 est un cycle lent-rapide qui passe à la fois par des arcs attractifs et des arcs répulsifs de la courbe lente L_{λ_0} .
4. **L'intégrale de divergence lente** : Considérons un intervalle $[x_1, x_2]$ et une valeur du paramètre λ , la fonction $g(x, F_\lambda(x), \lambda)$ n'a pas de zéros

sur cet intervalle. On appelle intégrale de divergence lente l'intégrale :

$$I_\lambda(x_1, x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{g(x, F_\lambda(x), \lambda)} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x) \right)^2 dx \quad (1.2)$$

Par la suite on aura les intégrales de la divergence lente I, J, K, L qui sont données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} I(u, \lambda) = \text{Int}(\gamma_I(u, \lambda)), & K(u, \lambda) = -\text{Int}(\gamma_K(u, \lambda)) \\ J(v, \lambda) = -\text{Int}(\gamma_J(v, \lambda)), & L(v, \lambda) = \text{Int}(\gamma_L(v, \lambda)). \end{cases} \quad (1.3)$$

5. **La définition de la multiplicité d'intersection** Soit α et β deux arcs \mathcal{C}^∞ de courbe simple passant par le même point $m \in \mathbb{R}^2$. On dit qu'ils ont une multiplicité d'intersection égale à $k \geq 1$ en m si et seulement s'il existe des coordonnées locales (s, t) en m , avec $m = (0, 0)$, tel que α (respectivement β) sont graphes de deux fonctions \mathcal{C}^∞ $\{t = \varphi_\alpha(s)\}$ (respectivement $\{t = \varphi_\beta(s)\}$) dans le voisinage de m , avec la propriété que la fonction $\psi(t) = \varphi_\alpha(t) - \varphi_\beta(t)$ a un zéro de multiplicité k en $t = 0$:

$$\psi(0) = \frac{d\psi}{dx}(0) = \dots = \frac{d^{k-1}\psi}{dx^{k-1}}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^k\psi}{dx^k}(0) \neq 0$$

Si l'arc α est donné par une équation $\{H(u, v) = 0\}$ la multiplicité d'intersection peut être définie comme la multiplicité de zéro en $t = 0$ de la fonction $H \circ \varphi_\beta(t)$.

6. La définition du versel :

Soient α_λ et β_λ les deux déploiements des arcs \mathcal{C}^∞ des courbes simples par $m \in \alpha_0 \cap \beta_0$, avec $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ définis près de m pour $\lambda \sim 0$. On suppose que les courbes α_0 et β_0 ont une multiplicité d'intersection en m égale à $k \geq 1$. Choisissons des coordonnées locales (s, t) en m , avec $m = \{(s, t) = (0, 0)\}$, telles que α_λ et β_λ sont des graphes de déploiements de fonctions $\varphi_\alpha(t, \lambda)$ et $\varphi_\beta(t, \lambda)$ respectivement, avec $\varphi_\alpha(0, 0) = \varphi_\beta(0, 0) = 0$. Alors, on dira que la paire de λ -déploiements $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ est versel (ou que λ est un paramètre versel en m) si et seulement si :

- (a) La dimension de l'espace de λ -paramètre est égale à $k - 1$: $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{k-1}$.
- (b) Considérons le développement de Taylor

$$\psi(t, \lambda) = \varphi_\alpha(t, \lambda) - \varphi_\beta(t, \lambda) = \sum_{i=0}^k \Omega_i(\lambda) t^i + o(t^k),$$

quand les coefficients Ω_i sont \mathcal{C}^∞ . Comme la multiplicité d'intersection est égale à k en m , on a :

$$\Omega_0(0) = \dots = \Omega_{k-1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Omega_k(0) \neq 0.$$

1.2.2 Théorèmes

Dans le premier Théorème nous donnons une borne du nombre de cycles limites qui bifurquent d'une région contenant un cycle canard exprimée

en fonction des intégrales de divergence lente associées à cette région :

Théorème 1.2.1. *prenons le rectangle $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2] \subset]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$. Supposons que les deux courbes simples $\{I - J = 0\}$ et $\{K - L = 0\}$ aient juste des points d'intersection avec une multiplicité finie dans $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$ pour $\lambda = 0$. Soit $k < +\infty$ le nombre de ces points d'intersection comptés avec leur multiplicité d'intersection. Alors, pour $\varepsilon_0 > 0$ et $W_1 \times W_2$ assez petit, le nombre de cycles limites de $X_{(a,b),\lambda,\varepsilon}$, pour $((a, b), \lambda, \varepsilon) \in W_1 \times W_2 \times]0, \varepsilon_0]$, qui cassent les sections $\{X_1\} \times [U_1, U_2]$ et $\{X_2\} \times [V_1, V_2]$, est inférieur à $k + 2$.*

Dans le deuxième Théorème on montre qu'un λ -déploiement est $(c - 2)$ versel au point λ , en donnant la valeur du paramètre versel pour un cycle limite de codimension c .

Théorème 1.2.2. *On suppose que pour $(u_0, v_0) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$, les courbes*

$$\{I(u, 0) - J(v, 0) = 0\} \quad \text{et} \quad \{K(u, 0) - L(v, 0) = 0\}$$

aient une multiplicité d'intersection égale à $c - 1$ en (u_0, v_0) pour un certain $c \geq 2$ et que le λ -déploiement $(\{I(u, \lambda) - J(v, \lambda) = 0\}, \{K(u, \lambda) - L(v, \lambda) = 0\})$ est $(c - 2)$ -versel en ce point $(\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{c-2})$. Rappelons que $\mu = (a, b, \lambda)$. Alors, il existe une courbe continue $:\varepsilon \rightarrow (u_0(\varepsilon), v_0(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$, définie pour $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, tel que $u_0(0) = u_0$, $v_0(0) = v_0$, $\mu(0) = 0$, avec $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$:

- (a) Il existe un cycle limite $\gamma(\varepsilon)$ de $X_{\mu(\varepsilon),\varepsilon}$ de codimension c passant à travers le point $(u_0(\varepsilon), v_0(\varepsilon))$. Ce cycle limite tend vers le cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ au sens de Hausdorff, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (b) Le déploiement défini par $X_{\mu,\varepsilon}$ dans le voisinage de $\gamma(\varepsilon)$, ε étant fixé, est c -versel avec un paramètre versel : $\mu - \mu(\varepsilon) \sim 0$.

Dans le troisième Théorème on va appliquer les conditions de c -versalité du Théorème 4.1.11 pour le λ -déploiement ($\{I(u, \lambda) - J(v, \lambda) = 0\}, \{K(u, \lambda) - L(v, \lambda) = 0\}$) sont réalisées dans certains systèmes lents-rapides de Liénard du type $(3, 4c + 1)$ (les fonctions F, g sont des polynômes de degré 4 et $4c + 1$ respectivement).

Théorème 1.2.3. . Pour $c \geq 2$, considérons le système de Liénard suivant :

$$X_{(a,b,\bar{v},\tau),\varepsilon} \begin{cases} \dot{x} = y - \left(ax + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) \\ \dot{y} = \varepsilon(b - xh(x, \bar{v}, \tau)), \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{c-1})$ et

$$h(x, \bar{v}, \tau) = 1 + \tau \left(\bar{v}_1 x^4 + \dots + \bar{v}_{c-1} x^{4(c-1)} + x^{4c} \right).$$

On a deux sections Σ_l, Σ_r comme dans la Figure 4.1 qui sont paramétrées par $u = \sqrt{1 - 4y}$ et $v = \sqrt{1 - 4y}$ respectivement. Le système a une famille à 2-paramètres de cycles canard Γ_{uv} avec $(u, v) \in]0, 1[\times]0, 1[$. Les intégrales de la divergence lente associées I, J, K, L sont paramétrées par (u, v, \bar{v}, τ) .

Alors, il existe un sous-ensemble fini $\Sigma_c \subset]0, 1[$ et une application \mathcal{C}^∞ $(u_0, \tau) \rightarrow (v, \bar{v})$, définie dans un voisinage ouvert \mathcal{W} de $(]0, 1[\setminus \Sigma_c) \times \{0\}$ dans l'espace $(]0, 1[\setminus \Sigma_c) \times \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $(u_0, \tau) \in \mathcal{W}$, avec $\tau > 0$:

(a) Les courbes $\{I(u, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) - J(v, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) = 0\}$ et

$$\{K(u, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) - L(v, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) = 0\}$$

ont une multiplicité égale à $c - 1$ au point $(u_0, v(u_0, \tau))$.

(b) Cette intersection est déployée versellement, si on prend une valeur fixée de (u_0, τ) , par le paramètre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{c-2})$ avec $\lambda_i = \bar{v}_i - \bar{v}_i(u_0, \tau)$ pour $i = 1, \dots, c - 2$ (bien sûr, il n'y a pas de paramètre λ quand $c = 2$).

Chapitre 2

Introduction aux systèmes lents-rapides

2.1 Quelques définitions

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ on considère le système différentiel :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\varepsilon \in (\mathbb{R}^+, 0)$ est un petit paramètre positif suffisamment petit et λ est un autre paramètre dans $(\mathbb{R}^p, 0)$. Ce système est appelé *perturbation singulière* car pour $\varepsilon = 0$ la dimension du système, qui est égale à $n + q$ pour $\varepsilon \neq 0$, tombe à q . Plus précisément, si f est localement inversible

en x , au voisinage de (x_0, y_0) vérifiant $f(x_0, y_0, \lambda) = 0$, on peut résoudre $x = x(y, \lambda)$ et pour $\varepsilon = 0$ le système se réduit à la *dynamique lente* :

$$\dot{y} = g(x(y, \lambda), y, \lambda) \quad (2.2)$$

Le temps t du système (2.1) est appelé *temps lent* (on a par exemple $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$). Pour $\varepsilon \neq 0$ on peut faire le changement de variable temps : $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Ce nouveau temps τ est appelé *temps rapide*. On a $x' = \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon \dot{x}$ et $y' = \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon \dot{y}$, ce qui fait que le système (2.1) est remplacé par le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \lambda) \\ y' = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce système est appelé :*équation de relaxation*. Ce n'est plus un système singulier au sens précédent, mais seulement une (λ, ε) -famille de champs de vecteurs $X_{\lambda, \varepsilon}$ qui dégénère pour $\varepsilon = 0$ au sens où pour cette valeur le champ $X_{\lambda, 0}$ a un ensemble de zéros en général non-isolés donnés par $\{f(x, y, \lambda) = 0\}$.

Le système lent-rapide est donné par l'une ou l'autre forme (2.1) ou (2.3). Nous travaillerons uniquement avec la présentation sous la forme d'équation de relaxation pour éviter le problème singulier, contrairement à l'approche faite dans [1] où l'on donne un sens à la limite singulière dans le cadre de l'Analyse Non Standard.

Le **Théorème de Poincaré-Bendixson** peut être énoncé comme

suit :

Soit X un champ défini sur un ouvert $U \subset S^2$. Alors, X n'a pas de récurrence non triviale (si x est un point récurrent, alors $X(x) = 0$, ou bien γ_x est périodique).

Pour cette présentation nous allons nous limiter à $n = q = 1$. Dans ce cas, on a une dynamique du plan avec des récurrences triviales, d'après le Théorème de Poincaré-Bendixson : le seul élément d'intérêt de la dynamique est la considération de ses *cycles limites* (les orbites périodiques isolées). Il n'y a pas de tels cycles limites pour l'*équation limite* quand $\varepsilon = 0$. La dynamique de l'équation limite est très simple. On a un *ensemble critique* formé par des zéros : $L_\lambda = \{f(x, y, \lambda) = 0\}$. En dehors de cet ensemble critique, les orbites sont régulières et horizontales (des segments ouverts de droite parallèles à l'axe des x). Ces orbites horizontales forment la *dynamique rapide*. La question principale est alors :

Comment les cycles limites bifurquent-ils de l'équation limite, c'est-à-dire lorsque ε passe de 0 à de petites valeurs non nulles ? Peut-on calculer leur nombre et la façon dont ils se comportent (bifurquent) en fonction du paramètre λ , lorsque ε est fixé à une petite valeur positive ?

Pour préciser cette question, nous avons besoin de quelques définitions.

Définition 2.1.1. *Soit X_μ une famille de champ de vecteurs du plan avec $\mu \in P$, espace des paramètres. Un ensemble limite périodique (e.l.p.*

en abrégé) de X_μ pour la valeur $\mu_* \in P$, est un compact Γ invariant par X_{μ_*} avec la propriété suivante. Il existe une suite (μ_i) convergant vers μ_* dans P et pour chaque μ_i un cycle limite γ_i du champ de vecteurs X_{μ_i} tels que la suite (γ_i) converge vers Γ au sens de Hausdorff.

Remarque 2.1.2. On rappelle que l'on définit une distance de Hausdorff d_H entre les compacts non vides d'un espace métrique (M, d) par :

$$d_H(K_1, K_2) = \text{Sup}\{\text{Sup}_{x \in K_1} d(x, K_2), \text{Sup}_{y \in K_2} d(y, K_1)\},$$

où, lorsque K est un compact non vide de M et $a \in M$, on définit la distance de a à K par

$$d(a, K) = \text{Inf}_{x \in K} d(a, x)$$

d_H est une distance sur l'ensemble $\mathcal{C}(M)$ des compacts non vides de M . Un résultat plus profond est que $(\mathcal{C}(M), d_H)$ est compact si (M, d) est compact.

Définition 2.1.3. Soit Γ un e.l.p. de X_μ pour la valeur $\mu_* \in P$ supposé muni d'une distance d_P . Pour tout $\delta > 0$, désignons par $N(\delta) \in \mathbb{N} \cup \infty$ le nombre de cycles limites γ de X_μ pour $d_P(\mu, \mu_*) < \delta$ et tels que $d_H(\gamma, \Gamma) < \delta$.

On définit la cyclicité de Γ dans la famille X_μ par :

$$\text{Cycl}(X_\mu, \Gamma) = \underline{\text{Lim}}\{N(\delta), | \delta \rightarrow 0\}$$

Une conjecture centrale pour les familles analytiques de champs de

vecteurs du plan est de prouver que dans une telle famille tout e.l.p. est de *cyclicité finie*. Cette conjecture vaut également pour les équations de relaxation que nous considérons ici, si elles sont analytiques.

Définition 2.1.4. *Un cycle lent-rapide de (2.3) est un e.l.p. Γ pour $\varepsilon = 0$ (et une valeur quelconque de λ).*

Dorénavant, nous allons nous limiter aux systèmes lents-rapides *de type Liénard*. Ces systèmes sont représentés par des équations de relaxation de la forme :

$$X_{\lambda,\varepsilon} \begin{cases} x' = y - F_\lambda(x) \\ y' = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (2.4)$$

On supposera que F, g sont des fonctions de classe C^∞ (dans la définition classique de Liénard, F, g sont des polynômes de x). L'ensemble critique L_λ pour l'équation de Liénard (2.4) est la courbe $L_\lambda = \{y = F_\lambda(x)\}$. pour cette raison, on l'appelle aussi *courbe lente*. Il est très facile de déduire du Théorème de Poincaré-Bendixson la caractérisation suivante des e.l.p. de (2.4) (voir [29]).

Proposition 2.1.5. *Supposons que la fonction F_{λ_0} soit non constante avec un nombre finie d'oscillations : F_{λ_0} n'a qu'un nombre fini de points critiques formant l'ensemble C_{λ_0} . Alors un cycle lent-rapide pour la valeur λ_0 est soit un point de L_{λ_0} soit une courbe simple homéomorphe au cercle, formé de l'union d'un nombre finie de trajectoires horizontales de la dynamique rapide et d'un nombre fini d'arcs fermeture d'arcs de*

$L_{\lambda_0} - C_{\lambda_0}$ (voir Figure 2.1).

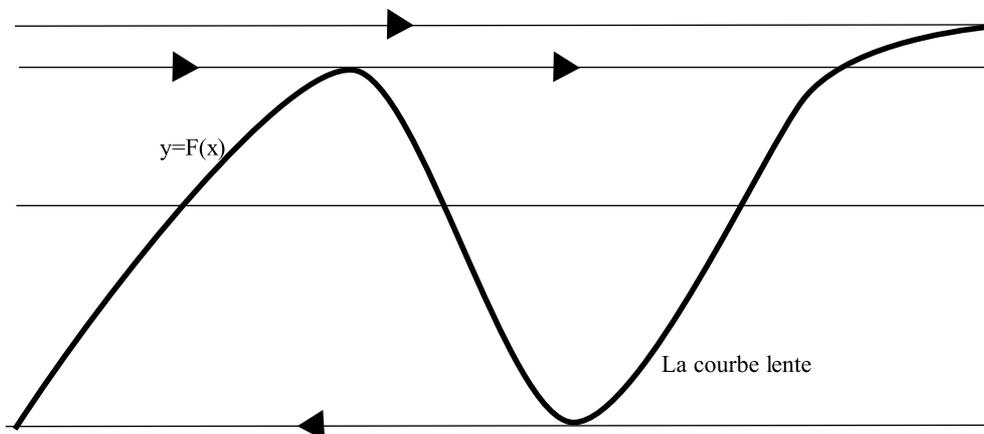


FIG. 2.1 – Equation limite

Sous l'hypothèse de la Proposition, la dynamique lente est définie sur L_{λ_0} , en dehors des points critiques de F_{λ_0} . Nous montrerons plus loin la condition nécessaire suivante pour les cycles lents-rapides :

Lemme 2.1.6. *Chaque cycle lent-rapide pour la valeur λ_0 a une orientation compatible avec l'orientation définie par la dynamique lente sur les arcs de $L_{\lambda_0} - C_{\lambda_0}$ qu'il contient et avec l'orientation des orbites de la dynamique rapide qu'il contient.*

On peut illustrer cela avec l'exemple de l'équation de Van der Pol donnée par $F(x) = x^2 + x^3$ (il n'y a pas de paramètre λ). La Figure 2.2 montre les différents cycles lents-rapides pour cette équation.

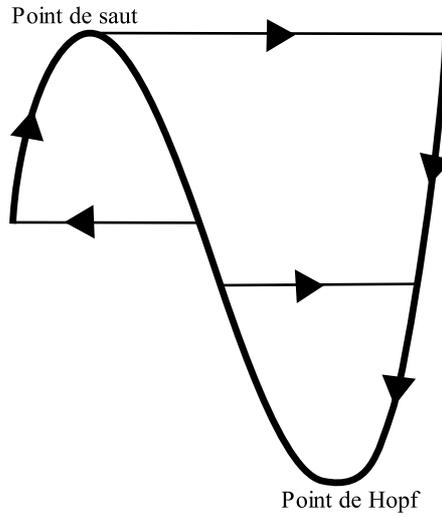


FIG. 2.2 – Cycles Lents-rapides de l'équation de Van der Pol.

2.2 Exemples de systèmes lents-rapides

2.2.1 Les circuits électriques

Cet exemple a été introduit et étudié par Van der Pol [VdP]. On considère un circuit formé par un condensateur de capacité C , une bobine d'inductance L et une résistance avec une loi $R = f(i)$ non-linéaire (un résistor), disons quadratique. Le terme $\frac{LC}{R_{\text{moy}}}$ est très petit : c'est le paramètre ε . Après normalisation, l'équation différentielle sur la tension aux bornes du résistor prend la forme :

$$\varepsilon \ddot{x} + (x + x^2)\dot{x} + x - a = 0$$

On passe dans l'espace de phase : $(x, y = \dot{x})$. Le changement $(x, y) \rightarrow (x, Y = \varepsilon y)$ transforme le système en

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = Y \\ \dot{Y} = a - x - \frac{Y}{\varepsilon}(x + x^2) \end{cases}$$

On opère maintenant la *transformation de Liénard* : $y = Y + F(x)$ avec

$$F(x) = \int_0^x (s + s^2) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En passant au temps rapide (c'est à dire qu'on abandonne la notation x' par la dérivation dans le temps rapide, on obtient l'équation de Van der Pol :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = \varepsilon(a - x) \end{cases}$$

remarque qu'en remplaçant x par $x - a$ et on remplace la seconde ligne par $\dot{y} = -\varepsilon x$ et l'on introduit le paramètre a dans la première ligne. Plus généralement, Liénard, dans le même cadre de l'électrotechnique, a introduit des équations plus générales dites maintenant équation de Liénard :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \lambda) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, \lambda) \end{cases}$$

où F, g sont des polynômes. le cas classique correspond à $g = -x$.

2.2.2 Ecologie, biologie

On rencontre dans ces disciplines des systèmes avec des *échelles de temps différentes*. On considère par exemple en écologie deux populations de X et Y nombre d'individus, chacune divisée en sous-populations :

$$X = \sum X_i \quad \text{et} \quad Y = \sum Y_j$$

Une dynamique s'établit globalement entre les populations X, Y . On a des dynamiques rapides entre les sous-populations de X et de Y respectivement (par exemple X et une population de proies et Y une population de prédateurs; X se divise entre une sous-population à l'abri X_1 et une sous-population à découvert X_2 ; l'échelle des échanges entre X et Y est l'année et celle entre X_1 et X_2 est le jour). Posons : $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$, $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_l)$. On peut modéliser le système écologique par le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{X}_i = F_i^1(\underline{X}) + \varepsilon G^1(\underline{X}, \underline{Y}) \\ \dot{Y}_j = F_j^2(\underline{Y}) + \varepsilon G^2(\underline{X}, \underline{Y}) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de conservation $\sum F_i^1(\underline{X}) = 0$, $\sum F_i^2(\underline{Y}) = 0$, on peut éliminer les équations en X_1 et Y_1 au bénéfice des populations globales X, Y . Posons aussi $\tilde{X} = (X_2, \dots, X_k)$, $\tilde{Y} = (Y_2, \dots, Y_l)$. On obtient le

système lent-rapide suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = \tilde{F}^1(\tilde{X}) + \varepsilon \tilde{G}^1(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ \dot{\tilde{Y}} = \tilde{F}^2(\tilde{Y}) + \varepsilon \tilde{G}^2(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ \dot{X} = \varepsilon f(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \\ \dot{Y} = \varepsilon g(X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}) \end{cases}$$

En biologie moléculaire, les interactions entre gènes et protéines sont de type lent-rapide. Plus précisément, les changements dans les gènes sont lents (mutations,...). Par contre la production et l'évolution des protéines est rapide.

D'une manière générale beaucoup de systèmes naturels sont de type lent-rapide car ils couplent des milieux avec des échelles de temps très différentes : par exemple l'interaction atmosphère (dynamique rapide)-océan (dynamique lente), propagation de l'influx nerveux, mouvements cardiaques, etc... Evidemment, une modélisation par équations différentielles ordinaires est en général très insuffisante mais peut servir de première approximation. Cette première approximation peut expliquer quelques traits importants de l'évolution.

2.3 Systèmes lents-rapides à la frontière des systèmes différentiels réguliers

Cette partie est une transcription de l'article [31]. Considérons un système de Liénard classique et régulier (pas de type lent-rapide) et de degré impair $2n + 1$:

$$\mathcal{L}_a^n \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, a) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $F(x, a) = x^{2n+1} + \sum_{i=0}^{2n} a_i x^i$. La dynamique d'un tel système est très simple : on a à l'origine, un unique point singulier, qui est de type foyer. Le cercle à l'infini est répulsif, autrement dit il existe un grand disque dans \mathbb{R}^2 qui attire toutes les trajectoires (cela vient du fait que le terme principal de F est de degré impair avec un coefficient positif, et rend le système réaliste pour les applications). En fait il existe une application de Poincaré définie sur l'axe des y et pour cette application $+\infty$ est répulsif. Il en résulte que pour chaque $a \in \mathbb{R}^{2n+1}$, l'équation \mathcal{L}_a^n n'a qu'un nombre fini de cycles limites. On peut facilement montrer plus : pour chaque $K \in \mathbb{R}^+$, il existe un borne finie $L(n, K)$ pour le nombre des cycles limites des équations \mathcal{L}_a^n dès que $\|a\| \leq K$. Une question importante est la suivante : *Que peut-on dire de \mathcal{L}_a^n lorsque $\|a\| \rightarrow +\infty$?* Une conjecture de S. Smale (l'un des problèmes qu'il

a posé pour ce siècle) est qu'il existe un $L(n)$ fini qui majore $L(n, K)$ pour tout K , c'est-à-dire qui est valable pour tout \mathcal{L}_a^n (plus précisément Smale conjecture que l'on peut trouver C, k , tel que $L(n) = Cn^k$).

Une façon d'aborder la question de l'*existence* d'un $L(n) < +\infty$ est la suivante. On considère le système élargi :

$$\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, a) \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases} \quad (2.6)$$

Evidemment, on a que $\mathcal{L}_a^n = \mathcal{S}_{a,1}^n$. Le système $\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n$ est quasi-homogène au sens suivant. Pour tout $\tau > 0$, on considère le difféomorphisme de l'espace de phase

$$T_\tau : x = \tau\bar{x}, \quad y = \tau^{2n+1}\bar{y},$$

et le changement de paramétrage :

$$U_\tau : a_i = \tau^{2n+1-i}\bar{a}_i, \quad \varepsilon = \tau^{4n}\bar{\varepsilon}.$$

alors T_τ conjugue les systèmes $\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n$ et $\tau^{2n}\mathcal{S}_{\bar{a},\bar{\varepsilon}}^n$. D'autre part, U_τ est un groupe à 1-paramètre linéaire dans l'espace (a, ε) dont les trajectoires hors $0 \in \mathbb{R}^{2n+2}$ tendent vers 0 pour $\tau \rightarrow -\infty$ et vers l'infini pour $\tau \rightarrow +\infty$.

Le plan $\{\varepsilon = 1\}$ dans l'espace des paramètres (a, ε) coupe transversalement chaque trajectoire du groupe U_τ située en dehors du plan $\{\varepsilon = 0\}$

en un point et un seul. Ainsi l'espace des équations de Liénard \mathcal{L}_a^n est en bijection avec l'espace des U_τ -trajectoires situées dans le demi-espace ouvert $\{\varepsilon > 0\}$.

L'espace des U_τ -trajectoires situées dans le demi-espace fermé $\{\varepsilon \geq 0\}$ peut être considéré comme la fermeture de l'espace des équations de Liénard \mathcal{L}_a^n . Cet espace, qui contient un représentant de chaque élément dans $\{\mathcal{S}_{a,\varepsilon}^n \mid \varepsilon \geq 0\}$, est homéomorphe à la demi-sphère fermée $\{\|a\|^2 + \varepsilon^2 = 1, \varepsilon \geq 0\}$ qui coupe chacune des U_τ -orbites de $\{\varepsilon \geq 0\}$ en un point et un seul. Le bord de cet espace est la sphère $\{\|a\|^2 = 1, \varepsilon = 0\}$ et son intérieur s'identifie donc à l'espace des équations de Liénard : autrement dit, l'espace des U_τ -orbites dans $\{\varepsilon \geq 0\}$ est une compactification de l'espace des équations de Liénard. Il est commode de remplacer la demi-sphère $\{\|a\|^2 + \varepsilon^2 = 1, \varepsilon \geq 0\}$ par la demi-sphère topologique :

$$\Sigma = \Delta \times \{\varepsilon_0\} \cup \partial\Delta \times [0, \varepsilon_0],$$

où $\Delta = \{a \mid \|a\| = 1\}$ et $\varepsilon_0 > 0$ peut être choisi arbitrairement petit. Le cylindre $\partial\Delta \times [0, \varepsilon_0]$ est un voisinage du bord $\partial\Delta \times \{0\}$ de Σ . Il devient arbitrairement proche de ce bord quand $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. D'autre part, si $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, on voit que le complémentaire de ce cylindre : $\Delta \times \{\varepsilon_0\}$, est en bijection avec l'ensemble des équations \mathcal{L}_a^n pour $\|a\| \geq K(\varepsilon_0)$ avec un $K(\varepsilon_0) \rightarrow +\infty$ lorsque $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

En conséquence, on voit que Σ est une compactification de l'espace

des équations de Liénard \mathcal{L}_a^n . Le bord de cet espace s'identifie avec les équations limites ($\varepsilon = 0$) du système lent-rapide :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x, a) \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $\|a\| = 1$ et $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, où $\varepsilon_0 > 0$ peut être choisi arbitrairement petit.

Une conséquence de cette compactification est que pour montrer qu'il existe une borne finie $L(n)$ au nombre des cycles limites des équations de Liénard \mathcal{L}_a^n , il suffit de montrer que chaque cycle lent-rapide du système (2.7) a une cyclicité finie.

Chapitre 3

les systèmes lents-rapides dans le plan

3.1 Outils géométriques

On se limite aux systèmes lents-rapides de type Liénard :

$$X_{\lambda,\varepsilon} \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \lambda) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (3.1)$$

où F, g sont des fonctions \mathcal{C}^∞ .

3.1.1 Modèle local près des points réguliers de la courbe lente

3.1.1.1 La courbe lente

Rappelons que la courbe lente, pour la valeur λ du paramètre est définie par $L_\lambda : \{y = F(x, \lambda) = F_\lambda(x)\}$. Elle est formée par des points singuliers de l'équation limite $X_{\lambda,0}$. En dehors de la courbe lente les orbites sont des arcs ouverts horizontaux (dynamique rapide). On appelle *point de contact* tout point de la forme

$$\{(x, F_\lambda(x)) \mid \frac{\partial F}{\partial x}(x, \lambda) = 0\},$$

autrement dit les points de L_λ correspondant aux points singuliers de F_λ (points où la courbe lente a un contact avec la direction horizontale de la dynamique rapide). Nous désignerons par C_λ l'ensemble des points de contact pour la valeur λ . Un point de contact $(x_0, y_0 = F_\lambda(x_0))$ est de l'un des deux types suivants :

- (a) *Point de contact régulier* si $g(x_0, y_0, \lambda) \neq 0$,
- (b) *Point de contact singulier* si $g(x_0, y_0, \lambda) = 0$.

Considérons un point $(x, y) \in L_\lambda$. La différentielle de $X_{\lambda,0}$ est donnée par :

$$DX_\lambda(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En conséquence les valeurs propres de cette différentielle sont égales à 0 (avec pour direction propre la direction tangente à L_λ) et à $-\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}$ (avec pour direction propre la direction horizontale).

Supposons que $(x, y) \in L_\lambda$ ne soit pas un point de contact. On dira que c'est un *point régulier* de la courbe lente. Alors ce point est un *point normalement hyperbolique* de L_λ et $L_\lambda - C_\lambda$ est une union d'arcs normalement hyperboliques, *attractants* si $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} > 0$ et *répulsifs* si $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} < 0$. Pour une valeur de λ fixée, l'espace central à un point de $L_\lambda - C_\lambda$ est la direction tangente à L_λ . En un point de contact, l'espace central est \mathbb{R}^2 .

3.1.1.2 Variétés centrales aux points réguliers

Pour chaque λ fixé, on va considérer $X_{\lambda, \varepsilon}$ comme un champ de vecteurs \mathcal{X}_λ de \mathbb{R}^3 d'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F_\lambda(x) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit $[a, b] \subset Ox$ tel que $\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Désignons par $L_\lambda[a, b]$ le graphe de F_λ au-dessus de $[a, b]$. C'est un arc de points réguliers. Chacun de ces points est normalement hyperbolique pour \mathcal{X}_λ , en dimension 3 (et pas seulement pour $X_{\lambda, \varepsilon}$ en dimension 2). En un tel

point $(x, y, 0) \in L_\lambda[a, b]$, on a :

- (a) une valeur propre non nulle : $-\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x)$ avec l'axe des x comme direction propre hyperbolique,
- (b) deux valeurs propres nulles avec comme espace propre central la somme directe : $O\varepsilon \oplus T_{(x,y,0)}L_\lambda$ ($T_{(x,y,0)}L_\lambda$ est la droite tangente à L_λ , considérée comme courbe de \mathbb{R}^3).

On peut alors appliquer la Théorie des variétés invariantes de Fenichel[F]. Dans notre cas on peut énoncer le résultat de la façon suivante :

Théorème 3.1.1. *(Fenichel) Soit $[a, b]$ comme ci-dessus et soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Il existe un plongement $\Phi_\lambda(x, \varepsilon) = (\phi_\lambda(x, \varepsilon), \varepsilon)$, de classe \mathcal{C}^k du rectangle $[a, b] \times [0, \varepsilon_k]$ dans \mathbb{R}^3 (ε_k dépendant de k), transverse à $\{\varepsilon = 0\}$. Si on pose $W_\lambda[a, b] = \Phi_\lambda([a, b] \times [0, \varepsilon_k])$, ce plongement est tel que :*

- (a) $W_\lambda[a, b] \cap \{\varepsilon = 0\} = L_\lambda[a, b]$
- (b) $X_{\lambda, \varepsilon}$ est tangent à $W_\lambda[a, b]$ en chaque point (on dit que $W_\lambda[a, b]$ est une variété (invariante) centrale le long de $L_\lambda[a, b]$).

Remarque 3.1.2. *(a) La variété centrale $W_\lambda[a, b]$ dépend de façon \mathcal{C}^k de λ au sens que l'application $\phi_\lambda(x, \varepsilon)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^k de $(x, \lambda, \varepsilon)$. Cela découle en fait du Théorème de Fenichel lui-même, qu'il suffit d'appliquer au champ de vecteurs de \mathbb{R}^{3+p} dont l'équation différentielle est obtenue en ajoutant $\dot{\lambda} = 0$ au système (3.2). On obtient alors une variété centrale $W[a, b]$ de classe \mathcal{C}^k*

dans \mathbb{R}^{3+p} . La variété centrale à paramètre $W_\lambda[a, b]$ est obtenue en intersectant $W[a, b]$ par les espaces $\{\lambda = \text{Cste}\}$.

(b) On peut choisir k arbitrairement grand. Evidemment $\varepsilon_k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$. Une remarque importante est que les différentes variétés centrales obtenues en fonction de k ne coïncident pas en général. Par contre si on considère les deux variétés centrales $W_\lambda^{k_1}[a, b]$ et $W_\lambda^{k_2}[a, b]$ de classe $k_1 \leq k_2$ respectivement, ces deux variétés ont un contact de classe k_1 le long de $L_\lambda[a, b]$. Cela implique qu'il existe une variété centrale formelle unique donnée $\hat{W}_\lambda[a, b]$ par une série formelle unique : $\hat{\phi}_\lambda(x, \varepsilon) = \sum_i \phi_\lambda^i(x) \varepsilon^i$, avec des fonctions \mathcal{C}^∞ , $\phi_\lambda^i(x)$, qui donne les développements de Taylor d'ordre infini de chaque fonction $\phi_\lambda(x, \varepsilon)$.

L'intérêt de l'existence des variétés centrales est de préciser quelles sont les conditions initiales qui contraignent le flot de $X_{\lambda, \varepsilon}$ à rester près de $L_\lambda[a, b]$ pour ε petit. Précisément, pour ε assez petit, la variété $W_\lambda[a, b]$ coupe le plan $\mathbb{R}^2 \times \{\varepsilon\}$ transversalement le long d'une courbe invariante : pour une condition initiale sur cette courbe, le flot y reste contenu.

3.1.1.3 Modèle local le long de $L_\lambda[a, b]$

Choisissons une variété centrale $W_\lambda[a, b]$ de classe \mathcal{C}^{k+3} à préciser plus tard. On utilise cette variété pour choisir de nouvelles coordonnées (X, Y) de classe \mathcal{C}^{k+3} telles que $W_\lambda[a, b]$ soit définie par $\{Y = 0\}$.

L'équation de $X_{\lambda,\varepsilon}$ prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon U(X, Y, \lambda, \varepsilon) + YZ(X, Y, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{Y} = YV(X, Y, \lambda, \varepsilon), \end{cases} \quad (3.3)$$

Les fonctions U, V, Z sont de classe \mathcal{C}^k . En fait, le changement de coordonnées \mathcal{C}^{k+3} transporte $X_{\lambda,\varepsilon}$ en un champ de classe \mathcal{C}^{k+2} , que l'on continuera de noter $X_{\lambda,\varepsilon}$ par abus d'écriture ; comme la fonction V est obtenue par division par Y , elle est seulement de classe \mathcal{C}^{k+1}). Même remarque pour la fonction Z qui est aussi de classe \mathcal{C}^{k+1} , car obtenue par division par Y . La fonction U est obtenue à partir d'une fonction \mathcal{C}^{k+1} par division par ε , elle est donc de classe \mathcal{C}^{k+1} .

Remarquez que la seconde composante de (3.3) est divisible par Y car on a choisi que $\{Y = 0\}$ soit la variété invariante $W_\lambda[a, b]$. On peut supposer que $x \equiv X$. On a alors $[a, b] \subset OX$ et on conservera la notation $W_\lambda[a, b]$ pour la variété centrale qui est contenue dans $\{Y = 0\}$. L'hyperbolicité normale se traduit par $V(X, 0, \lambda, 0) \neq 0$ pour tout $X \in [a, b]$ et tout λ . La forme particulière de la première composante traduit le fait que pour $Y = 0$, elle est divisible par ε , puisque $L_\lambda[a, b]$ est une ligne de zéros.

Nous allons maintenant améliorer l'écriture (3.3) en utilisant le résultat de Takens sur les champs de vecteurs partiellement hyperboliques [T1]. Par rapport aux hypothèses très générales du résultat de Takens nous

avons deux grandes simplifications :

- (a) La dimension normalement hyperbolique est égale à 1. Les hypothèses de *non-résonance* sont trivialement vérifiées.
- (b) On se place au voisinage d'une singularité (ici au voisinage de $\varepsilon = 0$) de la variété centrale considérée.

Nous allons énoncer une version du Théorème de Takens sous ces hypothèses simplificatrices :

Théorème 3.1.3. *Considérons un système différentiel tel que (3.3) avec U, V, Z de classe \mathcal{C}^k . Il existe $K(k) \ll k$ qui tend vers $+\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$ et un changement de coordonnées de classe $\mathcal{C}^{K(k)+2}$:*

$$(X, Y, \lambda, \varepsilon) \rightarrow (\tilde{X}(X, Y, \lambda, \varepsilon), Y\tilde{Y}(X, Y, \lambda, \varepsilon), \lambda, \varepsilon)$$

qui transporte sur un voisinage de $L_\lambda[a, b]$, l'équation (3.3) de $X_{\lambda, \varepsilon}$ sur l'équation, dite forme normale de Takens :

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon \tilde{g}(X, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{Y} = V(X, \lambda, \varepsilon)Y \end{cases} \quad (3.4)$$

où \tilde{g}, V sont de classe $\mathcal{C}^{K(k)}$.

On peut considérer que X est la variable initiale x . L'interprétation de la forme normale de Takens est que l'on a linéarisée la composante normale et de plus que l'on a séparée la dynamique centale (première

composante). Pour $\varepsilon = 0$, la fonction $V(x, \lambda, 0)$ est la valeur propre transverse. On a donc :

$$V(x, \lambda, 0) = -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x) \quad (3.5)$$

D'autre part, la première composante de (3.4), après division par ε et pour $\varepsilon = 0$, est égale à la dynamique lente (2.2), exprimée dans la variable x . Explicitement, on a :

$$\dot{x} = \tilde{g}(X, \lambda, 0) = \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}\right)^{-1} g(x, F_\lambda(x), \lambda) \quad (3.6)$$

Finalement, comme $V(x, \lambda, 0) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et tout λ on peut diviser l'équation différentielle (3.4) par la valeur absolue de cette fonction (dans une équivalence, on veut préserver le sens des trajectoires). On obtient

Corollaire 3.1.4. *A équivalence de classe $\mathcal{C}^{K(k)+2}$ près, l'équation (3.3) s'écrit sur un voisinage de $L_\lambda[a, b]$:*

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon G(X, \lambda, \varepsilon) \\ \dot{Y} = \pm Y \end{cases} \quad (3.7)$$

où G est de classe $\mathcal{C}^{K(k)}$. Le signe \pm dépend du caractère attractif ou bien répulsif de l'arc $L_\lambda[a, b]$.

3.1.1.4 Le cas d'une dynamique lente sans singularités

Supposons que tout $x \in [a, b]$ soit un point régulier de la dynamique lente, c'est-à-dire d'après (3.6), que $g(x, F_\lambda(x), \lambda) \neq 0$ et donc que $G(X, \lambda) \neq 0$ dans (3.7). On peut alors conjuguer la famille de champs $\mathcal{C}^{K(k)}$ unidimensionnel $G(X, \lambda) \frac{\partial}{\partial X}$ au champ constant $\frac{\partial}{\partial X}$ (par une famille de difféomorphismes $\mathcal{C}^{K(k)}$) :

Proposition 3.1.5. *Supposons que $g(x, F_\lambda(x), \lambda) \neq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ et tout λ . Alors, au voisinage de $L_\lambda[a, b]$, le champ $X_{\lambda, \varepsilon}$ est équivalent en classe $\mathcal{C}^{K(k)}$ à :*

$$\begin{cases} \dot{X} = \varepsilon \\ \dot{Y} = \pm Y \end{cases} \quad (3.8)$$

La proposition précédente nous dit que le champ (3.8) est un modèle en classe \mathcal{C}^K quelque soit K , à priori dans des voisinages de plus en plus petits lorsque $K \rightarrow +\infty$.

On se place dans les coordonnées (X, Y) données par la Proposition 3.1.5. On peut supposer que ces coordonnées sont définies pour $(X, Y) \in [a - \eta, b + \eta] \times [-2, 2]$ pour un certain $\eta > 0$. Il est évidemment trivial d'intégrer l'équation (3.8). Choisissons des valeurs $X_1, X_2 \in [a, b]$ avec $X_1 < X_2$. On considère la section Σ donnée par $\Sigma = \{(X, \varepsilon) \in [X_1, X_2] \times [0, \varepsilon_0], Y = 1\}$. Cette section est transverse au champ. La

trajectoire par un point $(X, \varepsilon) \in \Sigma$ est donnée par :

$$X(t, X, \varepsilon) = \varepsilon t + X, \quad Y(t) = e^{-t}$$

Considérons maintenant une section de sortie \mathcal{T} paramétrée par (Y, ε) à une hauteur $X > X_1$ avec $X < b + \eta$. Le temps d'arrivée sur cette section à partir du point $(X, \varepsilon) \in \Sigma$ est égal à $t_T = \frac{X_1 - X}{\varepsilon}$. L'application de transition $T : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$ est égale à :

$$\begin{cases} Y = e^{-\frac{X_1 - X}{\varepsilon}} \\ \varepsilon = \varepsilon \end{cases} \quad (3.9)$$

Comme $X_1 - X > 0$, le rectangle Σ est envoyé sur un secteur $T(\Sigma)$ exponentiellement plat pour $\varepsilon = 0$. La saturation de tout segment $\{X = X_0\}$ avec $X_1 \leq X_0 \leq X_2$ contient une variété centrale le long de $L_\lambda[X_0, X_2]$ qui est \mathcal{C}^∞ sauf en $(X_0, 0)$ dans les coordonnées (X, Y) et donc \mathcal{C}^K dans les coordonnées initiales. Si X varie dans $[X_1, X_2]$ on obtient un feuilletage par variétés centrales dont les feuilles ont un contact plat le long de la courbe lente.

3.1.2 La dynamique lente pour un système quelconque

Ici on veut exhiber la formule de la dynamique lente pour un système qui n'est pas obligatoirement un système de Liénard, toujours dans le plan. Le Champ X est donné par l'équation suivante :

$$X_\varepsilon = f.Z + \varepsilon.G \quad (3.10)$$

Z, G sont des vecteurs, Z n'a pas de zéros sur le domaine de définition, on note la courbe lente L telle que : $L = \{f(x, y) = 0\}$. L'ensemble des points de contact est C qui est donné par : $C = \{m, df(m)[Z(m)] = 0\}$, avec m dans L . On choisit une carte (x, y) , et on introduit une paramétrisation s telle que : $s \rightarrow (x(s), y(s))$ et $f(x(s), y(s)) = 0$, on prend la variété centrale $W = (x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))$, s est l'abscisse curviligne. W est la variété centrale dont le champ X est tangent. Pour chaque (ε, s) on a : $(\varepsilon, x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))$ ici la dynamique c'est l telle que : $\dot{s} = \varepsilon(l(s) + o(\varepsilon))$ en passant à la dérivée on obtient : $\dot{s} \left(\frac{dx_\varepsilon}{ds}, \frac{dy_\varepsilon}{ds} \right) = X_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. On a :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

Alors l'équation (3.10) devient :

$$\begin{cases} \dot{s} \frac{dx_\varepsilon}{ds} = f(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) Z_1(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + \varepsilon G_1(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \\ \dot{s} \frac{dy_\varepsilon}{ds} = f(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) Z_2(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + \varepsilon G_2(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \end{cases}$$

à l'ordre 1 en ε on a $x_\varepsilon(s) = x_0(s) + \varepsilon x_1(s)$, et $y_\varepsilon(s) = y_0(s) + \varepsilon y_1(s)$

avec $f(x_0, y_0) = 0$, pour $\varepsilon = 0$

$$f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) = f(x_0, y_0) + \varepsilon \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y_1 \right)$$

on choisit la variété $W = \{x_\varepsilon(y)\}$ telle que $x_\varepsilon(y) = x_0(y) + \varepsilon x_1(y)$,

donc :

$$\begin{cases} x'_\varepsilon(y_\varepsilon) \dot{y}_\varepsilon = f(x_\varepsilon(y_\varepsilon), y_\varepsilon) Z_1(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + \varepsilon G_1(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \\ x'_0(y) l = \left(\frac{\partial f}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 \right) Z_1 + G_1 \\ l = \left(\frac{\partial f}{\partial x} x_1 + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 \right) Z_2 + G_2 \end{cases}$$

alors on a :

$$(Z_2 x'(y) - Z_1) l = Z_2 G_1 - Z_1 G_2 \quad (3.11)$$

3.1.2.1 Application au système de Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x) \\ X_\varepsilon = (y - F) \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon g \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

on a $Z = \frac{\partial}{\partial x}$ et $G = \frac{\partial}{\partial y}$ par comparaison avec l'équation (3.11) on peut identifier Z_1, Z_2, G_1, G_2

on aura : $Z_1 = 1, Z_2 = 0, G_1 = 0, G_2 = g$ et on remettons tout cela dans l'équation (3.11) on aura $-l = -g$ donc la dynamique lente est $g = l$ On a $f(x(y), y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} x'(y) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ donc $x'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$ on aura l'équation de la courbe lente : $df(Z)l = \frac{\partial f}{\partial x} (Z_2 G_1 - Z_1 G_2)$, comme $\frac{dy}{dt} = l(y)$ et $\frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = l(y(s))$ et $\dot{s} = \frac{l(y(s))}{y'(s)}$, on sait que $(x(s), y(s)) = (x(y(s)), y(s))$ donc $[Z_2 x'(y) y'(s) - Z_1 y'(s)] \frac{l(y)}{y'(s)} = Z_2 G_1 - Z_1 G_2$ et $\tilde{l}(s) = \dot{s}$ c'est la dynamique lente.

Définition 3.1.6. *un cycle lent rapide est une courbe fermée de segments hyperboliques qui sont des orbites rapides régulières.*

3.2 Les cycles lents-rapides communs

3.2.1 Bifurcation des cycles lents-rapides communs

Nous allons appliquer l'étude du passage des points de saut pour étudier les bifurcations des cycles lents-rapides les plus simples, appelés cycles lents-rapides communs.

Définition 3.2.1. *Un cycle lent-rapide est de type commun si tous les arcs lents sont de même nature, c'est à dire soit qu'ils sont tous attractifs ou bien tous répulsifs. donc on a qu'un cycle lent rapide est soit un commun soit un cycle canard. On dit que le cycle est attractif ou répulsif selon que les arcs qu'il contient sont attractifs ou répulsifs.*

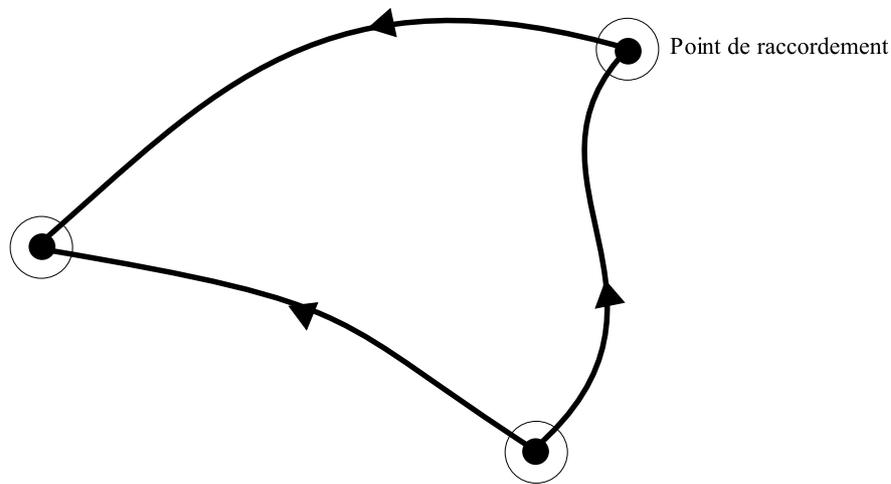


FIG. 3.1 – Cycle lent-rapide commun

Proposition 3.2.2. *Un cycle lent-rapide commun attractif (respectivement répulsif) bifurque pour $\varepsilon > 0$ en produisant un cycle limite hyperbolique attractif (respectivement répulsif), voir [9].*

Démonstration. Supposons que le cycle commun γ soit attractif (s'il est répulsif, il suffit de renverser le sens du temps). Chaque arc contenu dans γ part d'un point régulier de la courbe lente pour arriver à un point de saut. Ces arcs sont séparés le long de γ par des orbites régulières rapides. Notons par L_1, \dots, L_k les différents arcs de la courbe lente rencontrés, et R_1, \dots, R_k les orbites régulières. Choisissons des sections $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ transverses à chacune de ces orbites régulières. Nous allons considérer l'application de retour sur Σ_1 (pour les $\varepsilon > 0$). Cette application est composée des transitions : $\Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$ (avec $k+1 \sim 1$). D'après ce qui précède, la transition $\Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$ envoie la section Σ_i sur un secteur exponentiellement plat en $\varepsilon = 0$ et à fortiori leur composition. □

Dans le cas d'une équation classique de Liénard de type lent-rapide, les cycles lents-rapides sont génériquement communs :

Théorème 3.2.3. *Considérons une équation classique de Liénard de type lent-rapide*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F_\lambda(x) \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases} \quad (3.12)$$

où $F_\lambda(x) = \sum_{i=0}^{2n} \lambda_i x^i + x^{2n+1}$ est un polynôme général de degré $2n+1$.

Soit λ_0 tel que F_{λ_0} soit un polynôme de Morse générique (les points critiques sont quadratiques avec des valeurs deux à deux différentes) et que 0 ne soit pas un point critique ($\frac{\partial F_{\lambda_0}}{\partial x}(0) \neq 0$). Alors, tous les cycles lents-rapides sont de type commun et en nombre borné par n . En conséquence, pour $\lambda \sim \lambda_0$ et $\varepsilon \sim 0$, il bifurque au plus n cycles limites, tous hyperboliques. D'autre part, il existe des valeurs de λ_0 pour lesquelles il bifurque exactement n cycles limites.

Démonstration. Considérons un cycle lent-rapide quelconque et supposons que ce cycle passe par un point attractant de la courbe lente. En suivant la dynamique lente, on doit arriver à un point de contact qui est de type saut (par hypothèse tous les points de contact contenus dans le cycle sont de type saut). On saute alors, le long d'une trajectoire rapide, vers un point de type attractant (on ne peut pas aller vers un point de contact car les points de contact ont des valeurs 2 à 2 différentes ; on ne peut pas aller à l'infini, car un cycle lent-rapide est compact par définition). On passe ainsi par des arcs uniquement de type attractant de la courbe lente. En conséquence le cycle lent-rapide est commun et de type attractant (s'il avait contenu un point répulsif, on a la même preuve en reversant le sens du temps : le cycle n'aurait contenu que des points répulsifs et serait commun de type répulsif). Les cycles lents-rapides sont 2 à 2 disjoints (cela suit à nouveau du fait que les valeurs critiques sont 2 à 2 distinctes). Chacun de ces cycles doit passer par au moins deux points de contact différents de la courbe

lente. Aussi leur nombre est au plus n . Le fait qu'ils bifurquent en au plus n cycles limites tous hyperboliques suit de la Proposition 3.2.2. Le maximum n de cycles limites est obtenu en prenant une valeur de λ_0 pour laquelle la courbe lente fait n oscillations emboîtées voir [9]. \square

3.3 Les cycles canard

On va se limiter comme plus haut aux équations lentes-rapides de type Liénard (3.1) :

$$X_{\lambda,\varepsilon} \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \lambda) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \lambda) \end{cases} \quad (3.13)$$

où F, g sont de classe \mathcal{C}^∞ .

Définition 3.3.1. *Un cycle canard pour la valeur λ_0 est un cycle lent-rapide qui passe successivement par des arcs attractifs et des arcs répulsifs de la courbe lente L_{λ_0} .*

3.3.1 Conditions de création de cycles canard

Nous allons nous placer dans le cas le plus simple où tous les points de contact traversés sont quadratiques. Nous allons seulement parler des 2 mécanismes génériques de créations de cycles canard de codimension 1 :

(a) *Mécanisme de bifurcation de Hopf.* C'est le mécanisme le plus

classique, à l'oeuvre dans l'équation de Van der Pol étudié dans [1],[11],[12] par exemple. On suppose qu'un zéro simple de la dynamique lente croise un point critique de la courbe lente, avec une vitesse non nulle. Cela se traduit de la façon suivante : pour simplifier, supposons que $\lambda_0 = 0$ et que le point critique soit à l'origine ; on peut alors supposer que $F(x, \lambda) = x^2 + O(x^3)$ et que d'autre part, $\lambda = (a, \nu)$ avec $a \in (\mathbb{R}, 0)$ et on peut écrire $g(x, y, \lambda) = x + a + O(x^2)$.

On voit que pour $a = 0$ (en codimension 1 !) l'origine est un point de contact quadratique avec un zéro simple de g . Comme conséquence la dynamique lente descend à gauche et monte à droite de ce point de contact, et donc garde la même direction (de gauche à droite). Nous allons montrer que cela va permettre l'existence de trajectoires pour $\varepsilon > 0$ mais arbitrairement petit, qui sont proches à la fois d'un arc à gauche et d'un arc à droite du point de contact. C'est ce que l'on appelle le *phénomène canard*. Le point de contact est appelé : *point tournant*.

- (b) *Mécanisme de saut entre valeurs critiques* : Ce cas a été étudié avant dans [13]. Le mécanisme saut c'est le passage d'un arc attractant vers un arc répulsif. On suppose que pour λ_0 , on a 2 points critiques $p_1 < p_2$, qui sont des maxima (ou bien des minima) quadratiques qui ont la même valeur et dont les valeurs se croisent génériquement. Pour λ_0 , une orbite rapide "saute" entre

les deux valeurs critiques. On suppose de plus que g n'est pas nulle en ces points p_1, p_2 .

Cela se traduit de la façon suivante. Pour simplifier, supposons que $\lambda_0 = 0$ et que les points critiques soient des maxima quadratiques (on peut supposer que leur position p_1, p_2 est indépendante du paramètre). On suppose de plus que $\lambda = (b, \nu)$, que $F(p_1, 0, \nu) \equiv F(p_2, 0, \nu)$ et que

$$\frac{\partial}{\partial b} \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, 0, \nu) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_2, 0, \nu) \right] \neq 0.$$

On peut choisir le paramètre b d'être précisément le *paramètre de casure* du saut :

$$b \equiv F(p_2, b, \nu) - F(p_1, b, \nu)$$

C'est ce que l'on supposera dans la suite.

3.3.2 Mécanismes de bifurcation des cycles canard

Nous allons maintenant examiner comment des cycles limites peuvent bifurquer dans les deux cas considérés.

(1) *Le cas de saut (entre valeurs critiques)*

Bien qu'il soit d'étude plus récente, nous allons commencer par ce cas, car le mécanisme y est plus simple. Supposons que les points $P_1(\lambda) = (p_1, F(p_1, \lambda))$ et $P_2(\lambda) = (p_2, F(p_2, \lambda))$ soient des maxima.

Pour qu'un cycle lent-rapide contienne ces deux points, il est nécessaire que la dynamique lente ait une même direction à gauche de $P_1(\nu, 0)$ et à droite de $P_2(\nu, 0)$. On va supposer par exemple que $g(p_1, 0, \nu) > 0$ et $g(p_2, 0, \nu) < 0$: la dynamique va de gauche à droite et est localement attractante. Cela suppose l'existence de zéros de la fonction g entre p_1 et p_2 . Nous allons nous mettre dans le cas le plus simple : les points $P_1(\nu, 0), P_2(\nu, 0)$ font partie d'un cycle canard qui ne contient pas d'autre point de contact. Le cycle canard Γ^ν considéré est alors formé de 2 orbites rapides : $]P_1(\nu, 0), P_2(\nu, 0)[$ entre les 2 maxima (le saut!), $]m_1', m_2'[,$ orientée de droite à gauche de m_2' vers m_1' et joignant 2 points réguliers sur la courbe lente et 2 arcs de la courbe lente : l'un γ_1' entre m_1' et $P_1(\nu, 0)$ et l'autre γ_2' entre m_2' et $P_2(\nu, 0)$. On peut alors construire une variété centrale W^λ multi-valuée de la façon suivante. On choisit un point $A_\nu \in]m_1', m_2'[,$ et une section \mathcal{T} transverse à $]P_1(\nu, 0), P_2(\nu, 0)[$. Rappelons que les points p_1, p_2 sont critiques pour tout λ correspondant aux points de contact quadratiques $P_1(\lambda), P_2(\lambda)$. Pour tout λ , on considère les trajectoires du champ $X_{\lambda, \varepsilon}$ issues du segment $\{A_\nu\} \times [0, \varepsilon_0]$ pour les temps positifs. En utilisant les modèles locaux de Takens on obtient que ces orbites forment une variété centrale W_+^λ qui coupe la section \mathcal{T} le long d'un arc l_+^λ . De même les trajectoires issues de $\{A_\nu\} \times [0, \varepsilon_0]$ pour les temps négatifs forment une variété centrale W_-^λ qui coupe \mathcal{T} selon l'arc l_-^λ . La réunion $W^\lambda = W_-^\lambda \cup W_+^\lambda$ est une variété centrale multi-valuée, puisque les deux branches W_-^λ, W_+^λ coupent \mathcal{T} selon deux

arcs à priori distincts. On pourrait prolonger indéfiniment W^λ au-delà des arcs l_+^λ, l_-^λ qui sont les premières intersections avec \mathcal{T} , mais cela sera inutile.

Les arcs l_+^λ, l_-^λ sont graphes de fonctions $y = l_+^\lambda(\varepsilon)$ et $y = l_-^\lambda(\varepsilon)$. Le point important, démontré à l'aide des modèles locaux, est que ces fonctions sont ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en λ au sens suivant :

Définition 3.3.2. *Considérons un fonction $f(\lambda, \varepsilon)$ définie pour (λ, ε) au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+$. On dit que f est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en λ si toutes les dérivées partielles dans les composantes de λ existent et sont continues en ε (y compris en $\varepsilon = 0$), Voir [14].*

Par hypothèse, pour $b = \varepsilon = 0$ on a : $l_-^{\nu,0}(0) = F(p_1, 0, \nu)$ et $l_+^{\nu,0}(0) = F(p_2, 0, \nu)$. Il en résulte que les 2 arcs vont se croiser quand le paramètre b varie. Pour $b = 0$ ces deux arcs se coupent au moins en $y = 0$. Les cycles limites proches de Γ^ν sont en correspondance biunivoque avec les intersections des 2 arcs.

(2) *Le cas de bifurcation de Hopf*

Dans ce cas l'auto-intersection de la variété centrale va apparaitre après un éclatement de l'origine. Rappelons l'écriture locale du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F_\nu(x) = y - x^2 + O(x^3) \\ \dot{y} = \varepsilon(a - x + O(x^2)) \end{cases} \quad (3.14)$$

On considère l'éclatement des variables x, y, ε, a donné par :

$$x = \rho\bar{x}, \quad y = \rho^2\bar{y}, \quad \varepsilon = \rho^2\bar{\varepsilon}, \quad a = \rho\bar{a}$$

Le domaine de l'espace éclaté le plus important est obtenu en prenant $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}) \in S_+^2 = S^2 \cap \{\varepsilon \geq 0\}$ et $\rho \in (\mathbb{R}^+, 0)$, $a \in (\mathbb{R}, 0)$ (dans des voisinages arbitraires de 0). Dans ce domaine, le champ éclaté $\bar{X}_{(\nu, \bar{a})}$ peut être considéré comme une famille de champ en dimension 3 et de paramètre (ν, \bar{a}) . En particulier dans la carte de ce domaine donnée par $\bar{\varepsilon} = 1$, ce champ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} - \bar{x}^2 + O(\rho) \\ \dot{\bar{y}} = \bar{a} - \bar{x} + O(\rho) \end{cases} \quad (3.15)$$

Le champ a 4 point singuliers sur ∂S_+^2 : s_1, s_2, l_1, l_2 . Pour $\bar{a} = 0$ le champ est invariant par la symétrie : $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (-\bar{x}, \bar{y})$. Il en résulte qu'une séparatrice S joint les deux points l_1, l_2 et le champ est de type central. Cette connection est cassée de façon générique (avec une vitesse non nulle) par la variation du paramètre. On va se placer dans le cas le plus simple : on considère un cycle canard Γ formé par une orbite rapide joignant deux points $m_1^\nu = (X_1^\nu, F_\nu(X_1^\nu))$ et $m_2^\nu = (X_2^\nu, F_\nu(X_2^\nu))$ où X_1^ν, X_2^ν sont choisis tels que $F_\nu(X_1^\nu) = F_\nu(X_2^\nu)$, et deux 2 arcs de la variété lente : γ_1^ν entre m_1^ν et 0 et γ_2^ν entre m_2^ν et 0. Le premier est répulsif et le second est attractant. On va construire une variété

centrale W^λ *multi-valuée* comme dans le cas précédent mais cette fois dans l'espace éclaté. On choisit un point $A_\nu \in]m_1^\nu, m_2^\nu[$ et une section \mathcal{T} transverse à la séparatrice S . Comme dans le cas précédent on construit deux branches W_\pm^λ d'une variété centrale $W^{(\nu, \bar{a})}$ en considérant les trajectoires du champ éclaté $\bar{X}_{(\nu, \bar{a})}$ issues du segment $\{A_\nu\} \times [0, \varepsilon_0]$ pour les temps positifs et négatifs. Ces deux branches coupent la section \mathcal{T} le long d'arcs $l_\pm^{(\nu, \bar{a})}$. En utilisant les modèles locaux de Takens (en particulier au voisinage des points singuliers l_1, l_2) on montre que ces arcs sont graphes de fonctions $y = l_+^{(\nu, \bar{a})}(\rho)$ et $y = l_-^{(\nu, \bar{a})}(\rho)$ qui sont ρ -régulièrement C^∞ en (ν, \bar{a}) .

Par hypothèse, pour $\bar{a} = \varepsilon = 0$ on a : $l_-^{\nu, 0}(0) = l_+^{\nu, 0}(0)$. D'autre part, il suit facilement de la forme de l'équation (3.15) que $\frac{\partial}{\partial \bar{a}} (l_-^{(\nu, \bar{a})} - l_+^{(\nu, \bar{a})})|_{\bar{a}=0}(0) \neq 0$. Il en résulte que les 2 arcs vont se croiser régulièrement quand le paramètre \bar{a} varie. Pour $\bar{a} = 0$ ces deux arcs se coupent au moins en $y = 0$. Les cycles limites proches de Γ^ν sont en correspondance biunivoque avec les intersections des 2 arcs.

3.3.3 Bifurcations des cycles canard

Nous allons maintenant préciser les bifurcations des cycles canard introduits dans le paragraphe précédent. nous considérons les systèmes lents-rapides (3.1).

3.3.3.1 L'intégrale de divergence lente

Définition 3.3.3. *Considérons un intervalle $[x_1, x_2]$ et une valeur du paramètre λ tel la fonction $g(x, F_\lambda(x), \lambda)$ n'est pas de zéros sur cet intervalle. On appelle intégrale de divergence lente l'intégrale :*

$$I_\lambda(x_1, x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{g(x, F_\lambda(x), \lambda)} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x}(x) \right)^2 dx \quad (3.16)$$

Plus généralement, on définit l'intégrale de divergence lente I_Γ le long d'un cycle lent-rapide Γ comme étant égal à la somme des intégrales de divergence lente des différents arcs de courbe lente que Γ contient, compte tenu de leur orientation.

Les cycles canard des deux types considérés font partie d'une famille paramétrée par la y -hauteur de l'orbite rapide horizontale arbitraire qu'il contient. On note ce cycle canard $\Gamma_{y,\nu}$ où y est cette hauteur et ν la valeur du paramètre (rappelons que les cycles canard sont définis quand le paramètre de cassure a ou b est nul). On note par $I(y, \nu)$ l'intégrale de divergence lente du cycle canard $\Gamma_{y,\nu}$. Les formules pour $I(y, \nu)$ sont les suivantes :

(a)

$$I(y, \nu) = \int_{x_1(y,\nu)}^{p_1(\nu)} + \int_{p_2(\nu)}^{x_2(y,\nu)}$$

(b)

$$I(y, \nu) = \int_{x_1(y,\nu)}^{x_2(y,\nu)}$$

où $x_1(y, \nu), x_2(y, \nu)$ sont racines de $y = F_\nu(x_i(y, \nu))$.

3.3.3.2 Transition d'un point de saut ou de Hopf

Remarquez que la divergence de (3.1), est égale à $\operatorname{div} X_\lambda = -\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} + O(\varepsilon)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{div} X_\lambda dt &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} + O(\varepsilon) \right) dy \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x} \right)^2 dx + O(\varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

car le long de la courbe lente on a : $dy = \frac{\partial F_\lambda}{\partial x} dx$. L'intérêt de l'intégrale de divergence lente vient alors de la formule de Leontovitch-Sotomayor :

Proposition 3.3.4. *Soit X un champ de vecteur du plan et T l'application de transition entre deux sections : $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ transverses à une même trajectoire γ entre les instants t_1, t_2 . Soit s une paramétrisation de Σ_1 telle que 0 corresponde à $\gamma \cap \Sigma_1$. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des paramétrisations de Σ_1, Σ_2 ($C = 1$ si $\Sigma_1 = \Sigma_2$), telle que :*

$$\frac{dT}{ds}(0) = C \exp \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{div} X dt \quad (3.18)$$

Nous allons appliquer cette formule. Considérons la transition le long

d'un arc régulier de la courbe lente de (3.1), sans point singulier de la dynamique lente : on choisit un intervalle $[x_1, x_2]$ sur lequel F_λ n'ait pas de point singulier et aussi tel que $g(x, F_\lambda(x), \lambda)$ n'ait pas de zéro ; soient $y_1^\lambda = F_\lambda(x_1)$ et $y_2^\lambda = F_\lambda(x_2)$ et pour fixer les idées, supposons que $y_1^\lambda < y_2^\lambda$ (l'arc est attractant) ; soit Σ une section verticale dans $\{x = x'_1\}$ pour un $x'_1 > x_1$, paramétré par y au voisinage de y_1^λ ; soit une section horizontale \mathcal{T} dans $\{y = y_2^\lambda\}$, paramétrée par x au voisinage de $x = x_2$. Posons $X = x - x_2$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.3.5. *L'application de transition $\Pi_\lambda : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$ est égale à*

$$\Pi_\lambda(y, \varepsilon) = (X = \pi_\lambda(y, \lambda, \varepsilon), \varepsilon)$$

avec $\pi_\lambda(y, \lambda, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)}$, où $\tilde{I}(y, \nu, \varepsilon)$ est une fonction \mathcal{C}^∞ . Soit $x_\lambda(y) \in [x_1, x_2]$ défini par l'équation : $y = F_\lambda(x_\lambda(y))$. De plus $\tilde{I}(y, \nu, 0) = I_\lambda(x_\lambda(y), x_2)$, l'intégrale de divergence lente sur le segment $[x_\lambda(y), x_2]$.

Preuve

En recouvrant l'arc $L_\lambda[x_1, x_2]$ par des cartes où l'on a le modèle de Takens de classe \mathcal{C}^K donné dans la Proposition 3.1.5, on trouve que l'application de transition est de la forme $(X = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)}, \varepsilon)$, avec \tilde{I} une fonction \mathcal{C}^K . Comme K est arbitrairement grand, la fonction M est en fait de classe \mathcal{C}^∞ . Par dérivation, on obtient que $\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \tilde{I}}{\partial y} \right| e^{-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon) + O(\varepsilon \log \varepsilon))}$. On obtient facilement des formules (3.17) et (3.18) que $\tilde{I}(y, \nu, 0) = I_\lambda(x_\lambda(y), x_2)$. \square

Nous allons maintenant considérer la transition par un des points de contact rencontré par dans les cycles canard étudié. Le paramètre est égal à $\lambda = (\nu, a)$ dans le cas de saut ou bien $\lambda = (\nu, b)$ dans le cas de Hopf, où a, b sont les paramètres de cassure de la situation canard (qui existe pour $a, b = 0$).

On peut tout d'abord avoir la transition par un point de saut $P_\lambda = (p_\lambda, F_\lambda(p_\lambda))$. Supposons pour fixer les idées que p_λ soit un maximum et que $g(p_\lambda, F_\lambda(p_\lambda), \lambda) > 0$. Les trajectoires "sautent" alors de gauche à droite. Considérons un point $x_1 < p_\lambda$, une section verticale Σ dans une droite $\{x = x'_1 > x_1\}$ et une section verticale \mathcal{T} à l'orbite rapide sortante de P_λ et située dans une droite $\{x = x'_2 > p_\lambda\}$. La section Σ est paramétrée par y au voisinage de $F_\lambda(x_1)$ et la section \mathcal{T} par $z = y - F_\lambda(p_\lambda)$ au voisinage de 0. Pour étudier la transition $\Pi_\lambda : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$, on utilise l'éclatement du point P_λ décrit plus haut. Après avoir quitté la section Σ , les orbites du champ éclaté suivent tout d'abord le relevé de l'arc $L_\lambda[x_1, p_\lambda]$ dans l'espace éclaté. Ce relevé aboutit à un point singulier l_1 situé sur le bord S^1 du diviseur S^2_+ . Après être passé au-dessus de ce point, les orbites longent la séparatrice σ pour aboutir au voisinage du point singulier $s_2 \in S^1$. les orbites longent ensuite l'orbite rapide quittant le point de saut P_λ et finissent par aboutir sur la section \mathcal{T} . On considère l'application Π_λ comme composition de ces différents passages. Les calculs à faire pour contrôler les passages au voisinage des points l_1, s_2 utilisent des formes normales en ces points

singuliers du champ éclaté et sont assez techniques. Le résultats final est heureusement que ces passages, à des termes de translation près (la fonction φ ci-dessous), n'apportent pas de contribution et que la forme de la transition est essentiellement déterminée par le passage le long de l'arc régulier $L_\lambda[x_1, p_\lambda]$ (voir [7]). Le résultat est donc similaire à celui du cas régulier :

Proposition 3.3.6. *La transition par le point de saut entre les sections Σ et \mathcal{T} définies ci-dessus est égale à*

$$\Pi_\lambda(y, \varepsilon) = (z = \pi(y, \lambda, \varepsilon), \varepsilon)$$

avec

$$\pi(y, \lambda, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)} + \varphi(\lambda, \varepsilon),$$

où $\tilde{I}(y, \lambda, \varepsilon)$ est une fonction ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en (y, λ) et $\varphi(\lambda, \varepsilon)$ est une fonction ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en λ , telle que $\varphi(\lambda, 0) = 0$. Soit $x_\lambda(y) \in [x_1, p_\lambda]$ défini par l'équation : $y = F_\lambda(x_\lambda(y))$. De plus $\tilde{I}(y, \lambda, 0) = I_\lambda[x_\lambda(y), p_\lambda]$, l'intégrale de divergence lente sur le segment $[x_\lambda(y), p_\lambda]$.

Pour étudier les cycles canard de type Hopf on doit considérer des transitions entre une section σ transverse aux orbites rapides, comme plus haut, et une section \mathcal{T} transverse à la séparatrice joignant les points l_1, l_2 sur le diviseur. Considérons par exemple la transition par le point l_1 . La seule difficulté est le passage au voisinage de ce point, qui était aussi à considérer dans le cas précédent. L'étude est donc plus facile est

avait été faite antérieurement dans [11]. Le résultat est complètement similaire à celui du cas précédent.

3.3.3.3 Résultats de bifurcation

Dans le deux cas étudiés (bifurcation de Hopf, croisement de valeurs extrémales), il suit facilement des résultats rappelés dans le paragraphe précédent que l'intégrale de divergence lente contrôle les bifurcations de cycles limites bifurquant du cycle canard. Ces résultats de bifurcation ont été établis dans [12] dans le cas de la bifurcation de Hopf et dans [13] dans l'autre cas. Nous allons résumer ces résultats en deux Théorèmes. Le premier majore le nombre des cycles limites pouvant bifurquer et précise la région des paramètres où se passe cette bifurcation, région dite *région canard*. Rappelons que $I(y, \nu)$ désigne l'intégrale de divergence lente le long du cycle canard $\Gamma_{y, \nu}$ lorsque les paramètres de cassure a, b sont nuls. Le paramètre y est choisi dans un intervalle $[y_1, y_2]$ qui ne contient pas la valeur singulière de F_λ du saut ou de la bifurcation de Hopf.

Cette fonction I est de classe \mathcal{C}^∞ .

Théorème 3.3.7. (a) *Supposons que pour une valeur ν_0 la fonction*

$y \rightarrow I(y, \nu_0)$ ait au plus n zéros comptés avec leur multiplicité sur l'intervalle $[y_1, y_2]$. Alors il bifurque au plus $n + 1$ cycles limites de l'anneau union des cycles canard : $\cup_{y \in [y_1, y_2]} \Gamma_{y, \nu_0}$.

(b) *Désignons par c le paramètre a ou b selon le cas. Alors il existe une*

fonction $c(\varepsilon, \nu)$ ε -régulièrement C^∞ en ν et une constante $K > 0$ telles que, pour qu'il existe un cycle limite, il faut que le paramètre c vérifie :

$$|c - c(\varepsilon, \nu)| \leq e^{-\frac{K}{\varepsilon}} \quad (3.19)$$

Preuve

Nous allons nous contenter de faire la démonstration dans le cas du mécanisme de saut, la démonstration dans l'autre cas est très similaire. Rappelons que $\lambda = (\nu, b)$ où b est le paramètre de cassure du saut. $p_1 < p_2$ sont des maxima fixes et on pose $P_1(\lambda) = (p_1, F(p_1, \lambda))$, $P_2(\lambda) = (p_2, F(p_2, \lambda))$. On a $y(\nu) = F(p_1, \nu, 0) = F(p_2, \nu, 0)$ (hypothèse de saut) et le saut est entre les points de contact $P_1(\nu, 0)$ et $P_2(\nu, 0)$. Le paramètre de cassure du saut est $b = F(p_2, \lambda) - F(p_1, \lambda)$. L'intervalle $[y_1, y_2]$ est choisi tel que $y_1 < y_2 < y(\nu_0)$ et ν est choisi dans un voisinage assez petit de ν_0 de façon que $y_2 < y(\nu)$ pour tout ν . On suppose que l'on peut résoudre par fonction implicite l'équation $y = F(x_i(y, \lambda), \lambda)$ pour $y \in [y_1, y_2]$, $i = 1, 2$ avec $x_1(y, \lambda) < p_1$ et $p_2 < x_2(y, \lambda)$: $(x_1(y, \lambda), y)$ est un point sur l'arc attractant aboutissant à $P_1(\lambda)$ et $(x_2(y, \lambda), y)$ est un point sur l'arc répulsif sortant de $P_2(\lambda)$. Evidemment on suppose aussi que $g(x, F(x, \lambda), \lambda) > 0$ pour $x \in [x_1(y_1, \lambda), p_1]$ et que $g(x, F(x, \lambda), \lambda) < 0$ pour $x \in [p_2, x_2(y_1, \lambda)]$. Posons $I_1(y, \nu) = I[x_1(y, \nu, 0), p_1]$ et $I_2(y, \nu) = I[x_2(y, \nu, 0), p_2]$. On a que $I_1, I_2 > 0$.

Soit x_0 choisi tel que $p_1 < x_0 < p_2$. Considérons la section $\Sigma = \{x_0\} \times [y_1, y_2]$ et une section verticale \mathcal{T} également choisie dans la droite $\{x = x_0\}$, et telle que $(x_0, y(\nu)) \in \mathcal{T}$ pour tout ν . On considère les applications de transition $\Delta_1(y, \lambda, \varepsilon), \Delta_2(y, \lambda, \varepsilon) : \Sigma \rightarrow \mathcal{T}$, la première est définie en suivant les trajectoires du champ $X_{\lambda, \varepsilon}$ pour les temps positifs et la seconde, en les suivant pour les temps négatifs. L'équation des cycles limites coupant Σ est alors

$$\Delta(y, \lambda, \varepsilon) = \Delta_2(y, \lambda, \varepsilon) - \Delta_1(y, \lambda, \varepsilon) = b \quad (3.20)$$

En effet, pour $\varepsilon > 0$, y est racine de (3.22) si et seulement si l'orbite par (x_0, y) est un cycle limite de $X_{\lambda, \varepsilon}$. Par la Proposition 3.3.6 on a que $\Delta_i(y, \lambda, \varepsilon) = e^{-\frac{\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} + \varphi_i(\lambda, \varepsilon)$, pour $i = 1, 2$ avec les propriétés données dans l'énoncé et le fait que $\tilde{I}_i(y, \nu, 0, 0) = I_i(y, \nu)$. l'équation (3.22) s'écrit donc

$$e^{-\frac{\tilde{I}_1(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\tilde{I}_2(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} = b + \varphi_2(\lambda, \varepsilon) - \varphi_1(\lambda, \varepsilon) \quad (3.21)$$

Pour pouvoir se débarrasser du terme constant $b + \varphi_2(\lambda, \varepsilon) - \varphi_1(\lambda, \varepsilon)$ et pouvoir prendre le logarithme, l'idée est de dériver cette équation. Remarquez que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon) \right) e^{-\frac{\tilde{I}_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} = e^{-\frac{J_i(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}}$$

pour une nouvelle fonction J_i , ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en (y, λ) et qui vérifie encore $J_i(y, \nu, 0, 0) = I_i(y, \nu)$. L'équation

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y}(y, \lambda, \varepsilon) = 0 \quad (3.22)$$

est donc équivalente à

$$e^{-\frac{J_1(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} = e^{-\frac{J_2(y, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}} \quad (3.23)$$

En prenant le logarithme des deux membres de (3.21) et en multipliant par ε , lorsque $\varepsilon > 0$, on obtient finalement que pour $\varepsilon > 0$, l'équation (3.22) est équivalente à

$$J(y, \lambda, \varepsilon) = J_1(y, \lambda, \varepsilon) - J_2(y, \lambda, \varepsilon) = 0 \quad (3.24)$$

où $J(y, \lambda, \varepsilon)$ est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en (y, λ) et est telle que

$$J(y, \nu, 0, 0) = I_1(y, \nu, 0, 0) - I_2(y, \nu, 0, 0) = I(y, \nu).$$

Supposons maintenant que pour une valeur ν_0 la fonction $y \rightarrow I(y, \nu_0)$ ait au plus n zéros comptés avec leur multiplicité sur l'intervalle $[y_1, y_2]$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il en est de même pour la fonction : $y \rightarrow \frac{\partial \Delta}{\partial y}(y, \lambda, \varepsilon)$. En appliquant le Théorème de Rolle on obtient alors que la fonction $y \rightarrow \Delta(y, \lambda, \varepsilon)$ a au plus $n + 1$ zéros sur $[y_1, y_2]$ pour $\varepsilon > 0$

assez petit et ν assez proche de ν_0 \square

Le second Théorème qui est plus délicat à démontrer, donne une condition nécessaire pour une bifurcation générique :

Théorème 3.3.8. *Supposons qu'au point $y_0 \in]y_1, y_2[$ et pour la valeur du paramètre ν_0 , la fonction $y \rightarrow I(y, \nu_0)$ ait un zéro d'ordre k et la famille $I(y, \nu)$ bifurque génériquement en fonction de $\nu - \nu_0$. Alors il existe une famille continue Γ^ε de cycles limites, bifurquant du cycle canard ($\Gamma^0 = \Gamma_{y_0, \nu_0}$), telle que Γ^ε soit un cycle limite d'ordre $k + 1$ qui bifurque génériquement en fonction du paramètre $(c, \nu - \nu_0)$ (c désigne le paramètre de cassure a ou b selon le cas).*

Remarque 3.3.9. *Une fonction $f(y)$ a un zéro d'ordre k en y_0 si*

$$f(y_0) = \frac{df}{dx}(y_0) = \dots = \frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}(y_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^k f}{dx^k}(y_0) \neq 0.$$

Considérons un déploiement $f(y, \lambda)$ du germe (f, y_0) pour un paramètre $\lambda \in (\mathbb{R}^p, \lambda_0)$ ($f(x) \equiv f(x, \lambda_0)$.) Par le Théorème de Préparation de Weierstrass, il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty : \beta_0(\lambda), \dots, \beta_{k-1}(\lambda)$ et une fonction $\mathcal{C}^\infty : U(y, \lambda)$ telle que $U(y_0, \lambda_0) \neq 0$, et que :

$$f(y, \lambda) = U(y, \lambda) \left((y - y_0)^k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i(\lambda) (y - y_0)^i \right)$$

On dit que le déploiement $f(y, \lambda)$ est générique si l'application

$$\lambda \rightarrow \beta(\lambda) = (\beta_0(\lambda), \dots, \beta_{k-1}(\lambda))$$

est de rang maximum en λ_0 (cela suppose que $p \geq k$).

On trouvera cette preuve dans [12] pour le cas de Hopf et dans [13] dans le cas de croisement de valeurs critiques. Considérons le cas de croisement de valeurs critiques. L'idée de la preuve est de faire un changement d'échelle dans la variable $Y = y - y_0$ en posant : $\bar{Y} = \frac{Y}{\varepsilon}$. Dans cette variable \bar{Y} la fonction $\Delta(y, \lambda, \varepsilon) - b$ pour $\varepsilon > 0$ fixé, est équivalente à un déploiement générique à $p + 1$ paramètres : ν_1, \dots, ν_p et $\tilde{b} = e^{\frac{\tilde{I}(y_0, \lambda, \varepsilon)}{\varepsilon}}(b + \varphi_2(\lambda, \varepsilon) - \varphi_1(\lambda, \varepsilon))$ (cette écriture de \tilde{b} , qui doit être considéré comme un nouveau paramètre, permet de retrouver le confinement donné par (3.19)). On considère les systèmes lents-rapides bi-dimensionnels avec des cycles canard qui se produisent à partir de l'équation limite pour une valeur de $\varepsilon = 0$. Les cycles canard sont coupés par deux mécanismes indépendants : soit le point tournant ou le point saut entre deux points de contact. Chacun de ces deux mécanismes est associé à un paramètre permettant une cassure générique du cycle canard. Pour cette raison les cycles canard considérés sont appelés cycles canard avec deux paramètres de cassure. Ils passent aussi à travers deux niveaux horizontaux indépendants paramétrés par u, v . Alors, pour un système donné on a un ensemble de famille de cycles

canard à 2-paramètres Γ_{uv} .

Les propriétés de ce système dépendent des quatre intégrales de la divergence lente-rapide, elles sont des fonctions de u, v et aussi du paramètre λ . Premièrement, en termes de ces intégrales on obtient une borne supérieure pour le nombre total des cycles limites qui bifurquent d'une région contenant des cycles canard. Après, la codimension de chaque cycle canard est définie en termes de ces intégrales. La cyclicité du cycle canard de codimension finie c est bornée par $c + 1$. On donne aussi des conditions pour les quatre intégrales de la divergence lente dans le but d'avoir le déploiement versel. Si $c = 2$ les paramètres versels sont les deux paramètres de cassures, mais si $c > 2$, on a besoin d'un paramètre $(c - 2)$ -dimensionnel λ pour avoir le déploiement versel. En fin, pour tout $c \geq 2$, fini on donne un exemple polynomial de famille de Liénard en exhibant le déploiement versel d'un tel cycle canard de codimension c . Ces résultats généralisent le cas $c = 2$ qui a été étudié dans [14].

Chapitre 4

Cycles canard de codimension finie avec deux paramètres de cassure

4.1 Introduction

Rappelons juste que le 4ième chapitre est la traduction de l'article [25]. Dans cette partie on veut continuer l'étude des cycles canard avec deux paramètres de cassure déjà utilisés dans [14], on a supposé que le cycle canard est de codimension ≤ 2 . Ici, on essaie d'étendre le résultat à un autre plus général c'est à dire un cycle canard de codimension finie quelconque $c \geq 2$.

On considère les cycles canard qui apparaissent dans les systèmes lents-

rapides de Liénard \mathcal{C}^∞ . Ces systèmes là sont des familles de systèmes lents-rapides dans le plan qui ont la forme suivante :

$$X_{\mu,\varepsilon} = \begin{cases} \dot{x} = y - F(x, \mu) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, \mu). \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\varepsilon \geq 0$ est un petit paramètre, $\mu \in \mathbb{R}^{p+2}$ avec $p \in \mathbb{N}$ est un paramètre multi-dimensionnel. On suppose que (ε, μ) est restreint à un petit voisinage arbitraire $[0, \varepsilon_0] \times W$ de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{p+2}$. Les fonctions F et g sont \mathcal{C}^∞ . On restreint le domaine d'étude à un intervalle en $x : [x_1, x_2]$. On suppose que les deux fonctions $g(x, 0)$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(x, 0)$ ont un nombre fini de zéros, comptés avec leurs multiplicité. Choisisant W suffisamment petit, on peut supposer que cela reste vrai pour tout $\mu \in W$. Cette condition est vérifiée si, F, g sont des polynômes en x .

Dans [14] une classe particulière de cycles canard créée à partir de deux mécanisme seulement, mais dans [15] ils démontrent qu'il existe plusieurs possibilités même avec deux mécanismes.

Dans cette partie on continue l'étude déjà initiée dans [14], les *cycles canard qui dépendent de deux mécanismes canard*. Maintenant on va considérer n'importe quel cycle canard dans les systèmes avec un nombre arbitraire de paramètres. Comme dans [14] on suppose que les fonctions associées $a(\mu)$ et $b(\mu)$ ont des différentielles $da(0)$ et $db(0)$ in-

dépendantes. Prenons W assez petit, cela implique que l'application $\mu \rightarrow (a(\mu), b(\mu))$ est une submersion. Alors, on peut changer l'ensemble des paramètres μ , à un difféomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^{p+2}$, pour avoir $\mu = (a, b, \lambda)$, ce dernier est défini comme suit :

Chaque paramètre a ou b , avec $(a, b) \in W_1$, un certain voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$, est associé à un mécanisme canard : le premier mécanisme existe pour $a = 0$ et le second pour $b = 0$. Chacun d'eux soit c'est un mécanisme saut, soit un mécanisme de Hopf. De plus on suppose que pour n'importe quel $\lambda \in W_2$, pour un certain voisinage de $0 \in \mathbb{R}^p$, il y a des cycles canard créés simultanément par deux mécanismes en $\mu = ((0, 0), \lambda) \in W = W_1 \times W_2$.

Les deux paramètres a et b sont appelés *paramètres de cassure* (car ils cassent les cycles canard). Les cycles canard qui existent pour $a = b = 0$ ont la structure suivante :

- (a) Il existe deux sections ouvertes transverses à l'orbite rapide : $\Sigma_l = \{X_1\} \times]u_1, u_2[$ et $\Sigma_r = \{X_2\} \times]v_1, v_2[$ pour X_1, X_2 tel que $x_1 < X_1 < X_2 < x_2$. On suppose qu'elles sont paramétrées par la coordonnée y rebaptisée par : $u \in]u_1, u_2[$ et $v \in]v_1, v_2[$ (pour tout μ).
- (b) Pour chaque $(u, v) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$ et $\lambda \in W_2$ il existe un cycle canard $\Gamma(u, v, \lambda)$ pour l'équation limite qui correspond à $\mu = (0, 0, \lambda)$. Ce cycle canard coupe Σ_l au point (X_1, u) et Σ_r au point

(X_2, v) .

(c) Le cycle canard $\Gamma(u, v, \lambda)$ est une union de quatre segments réguliers : les segments $\gamma_I(u, \lambda)$ et $\gamma_L(v, \lambda)$ sont attractifs et commencent respectivement aux points $(X_1, u) \in \Sigma_l$ et $(X_2, v) \in \Sigma_r$; les segments $\gamma_K(u, \lambda)$ et $\gamma_J(v, \lambda)$ qui sont répulsifs se terminent respectivement aux points $(X_1, u) \in \Sigma_l$ et $(X_2, v) \in \Sigma_r$. Un mécanisme canard se produit entre les segments $\gamma_I(u, \lambda)$ et $\gamma_J(v, \lambda)$ et un autre entre les segments $\gamma_K(u, \lambda)$ et $\gamma_L(v, \lambda)$.

Comme dans [14], les cycles canard $\Gamma(u, v, \lambda)$ sont nommés *cycles canard avec deux paramètres de cassure*. La Figure 4.1 montre un exemple d'équation limite avec deux mécanismes canard, un mécanisme saut et autre de Hopf, avec la position des deux transverses et les quatre segments réguliers. Les deux mécanismes canard, vont donner naissance à un cycle canard avec deux paramètres de cassure. L'un d'eux est représenté par le trait épais dans la Figure.

Considérons maintenant la courbe lente entre \bar{x}_1 et \bar{x}_2 pour l'équation limite $X_{\mu,0}$. On suppose que toutes les racines possibles de $g(x, \mu)$ sur $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ sont simples et localisées aux points singuliers de F . On peut alors définir l'*intégrale de la divergence lente* de la courbe lente comme suit :

$$\text{Int}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \mu) = - \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{1}{g(x, \mu)} \left(\frac{dF}{dx}(x, \mu) \right)^2 dx \quad (4.2)$$

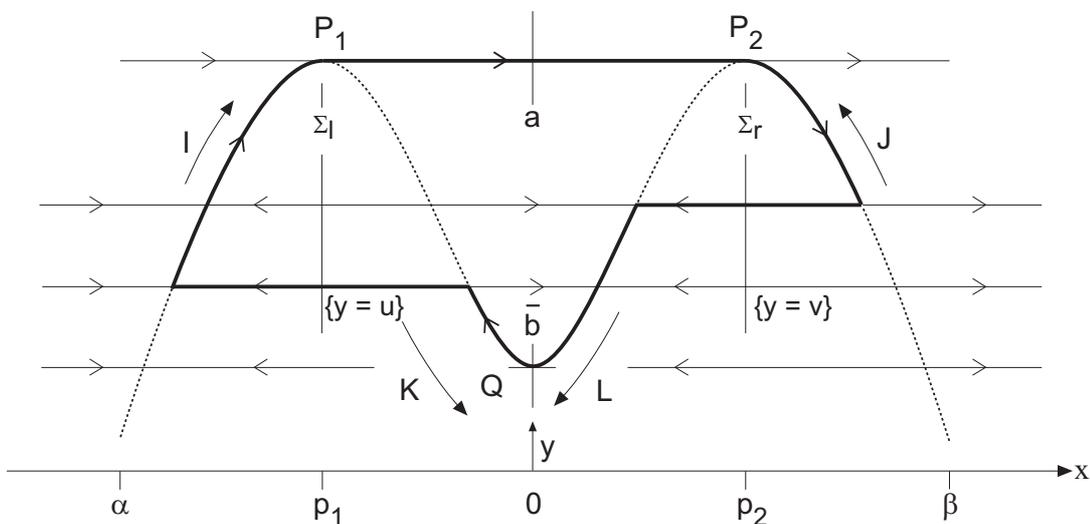


FIG. 4.1 – cycles canard avec deux paramètres de cassure.

Si un segment régulier γ de $X_{\mu,0}$ est une union de courbes régulières, on définit son intégrale de la divergence lente $\text{Int}(\gamma)$ par la somme des intégrales de la divergence lente des différentes courbes régulières qu'elle contient. La notion de l'intégrale de la divergence lente est expliquée dans [14].

Maintenant, considérons le système avec deux mécanismes canard comme ci-dessus. On lui associe quatre intégrales de la divergence lente :

$$\begin{cases} I(u, \lambda) = \text{Int}(\gamma_I(u, \lambda)), & K(u, \lambda) = -\text{Int}(\gamma_K(u, \lambda)) \\ J(v, \lambda) = -\text{Int}(\gamma_J(v, \lambda)), & L(v, \lambda) = \text{Int}(\gamma_L(v, \lambda)). \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce sont des familles de quatre fonctions \mathcal{C}^∞ . I, K sont définies sur $]u_1, u_2[\times W_2$ et J, L sont définies sur $]v_1, v_2[\times W_2$. C'est clair qu'elles

sont strictement négatives et pour tout $(u, v, \lambda) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[\times W_2$

on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial u}(u, \lambda) > 0, & \frac{\partial K}{\partial u}(u, \lambda) < 0 \\ \frac{\partial J}{\partial v}(v, \lambda) > 0, & \frac{\partial L}{\partial v}(v, \lambda) < 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans le but d'exposer les résultats, on a besoin des définitions suivantes :

Définition 4.1.1. *Soit α et β deux arcs C^∞ de courbe simple passant par le même point $m \in \mathbb{R}^2$. On dit qu'ils ont une multiplicité d'intersection égale à $k \geq 1$ en m si et seulement s'il existe des coordonnées locales (s, t) en m , avec $m = (0, 0)$, tel que α (respectivement β) sont graphes de deux fonctions C^∞ $\{t = \varphi_\alpha(s)\}$ (respectivement $\{t = \varphi_\beta(s)\}$) dans le voisinage de m , avec la propriété que la fonction $\psi(t) = \varphi_\alpha(t) - \varphi_\beta(t)$ a un zéro de multiplicité k en $t = 0$:*

$$\psi(0) = \frac{d\psi}{dx}(0) = \dots = \frac{d^{k-1}\psi}{dx^{k-1}}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^k\psi}{dx^k}(0) \neq 0$$

Si l'arc α est donné par une équation $\{H(u, v) = 0\}$ la multiplicité d'intersection peut être définie comme la multiplicité de zéro en $t = 0$ de la fonction $H \circ \varphi_\beta(t)$.

Remarque 4.1.2. *Bien sûr, la multiplicité d'intersection est indépendante du choix des coordonnées locales (s, t) . Quand il existe un k fini comme dans la définition 4.1.1, on dit que les deux courbes ont une*

intersection de multiplicité finie en m , on peut dire que la multiplicité d'intersection en m est zéro si et seulement si $m \notin \alpha \cap \beta$. La multiplicité d'intersection est égale à 1 en m si et seulement si les courbes sont transverses en m . La multiplicité d'intersection égale à 2 si les courbes sont tangentes avec un contact quadratique. La multiplicité d'intersection est infinie uniquement si les dérivées de φ_α et φ_β sont égales à n importe quel ordre (donc on dit que les deux courbes ont un contact plat en m). Notons que les points d'intersection d'une multiplicité finie sont isolés. Si les courbes sont connectées et analytiques, alors leurs points d'intersection ont une cyclicité finie ou les courbes coïncident localement.

On choisit des intervalles fermés $[U_1, U_2] \subset]u_1, u_2[$ et $[V_1, V_2] \subset]v_1, v_2[$. D'après (4.4) on remarque que les équations $\{I - J = 0\}$ et $\{K - L = 0\}$ définissent des courbes simples dans le rectangle $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$, pour tout $\lambda \in W_2$. Leurs extrémités appartiennent au bord de ce rectangle.

On a le résultat suivant :

Théorème 4.1.3. *Choisissons n'importe quel rectangle $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2] \subset]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$ comme ci-dessus. Supposons que les deux courbes simples $\{I - J = 0\}$ et $\{K - L = 0\}$ aient juste des points d'intersection avec une multiplicité finie dans $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$ pour $\lambda = 0$. Soit $k < +\infty$ le nombre de ces points d'intersection comptés avec leur multiplicité d'intersection. Alors, pour $\varepsilon_0 > 0$ et $W_1 \times W_2$ assez petit, le nombre*

de cycles limites de $X_{(a,b),\lambda,\varepsilon}$, pour $((a,b), \lambda, \varepsilon) \in W_1 \times W_2 \times]0, \varepsilon_0]$, qui coupent les sections $\{X_1\} \times [U_1, U_2]$ et $\{X_2\} \times [V_1, V_2]$, est inférieur à $k + 2$.

Soit Γ un cycle lent-rapide pour la valeur du paramètre μ_0 dans un système lent-rapide $X_{\mu,\varepsilon}$.

Définition 4.1.4. *La cyclicité $\text{Cycl}(X_{\mu,\varepsilon}, \Gamma)$ du cycle lent-rapide Γ dans le système $X_{\mu,\varepsilon}$ c'est la borne supérieure du nombre de cycles limites près de Γ (au sens de Hausdorff) qui existe pour μ près de μ_0 et ε près de 0 (on trouvera des définitions plus précises dans [30]).*

Choisissons n'importe quel $(u_0, v_0) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$. Supposons que les courbes $\{I - J = 0\}$ et $\{K - L = 0\}$ aient une multiplicité d'intersection égale à $k < +\infty$. Choisissons un voisinage $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$ de (u_0, v_0) assez petit, le point (u_0, v_0) c'est le seul point d'intersection de $\{I - J = 0\}$ et $\{K - L = 0\}$. Alors, appliquons le Théorème 4.1.3 à ce voisinage $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$, on obtient :

Corollaire 4.1.5. *Choisissons n'importe quel $(u_0, v_0) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$. Supposons que les courbes $\{I - J = 0\}$ et $\{K - L = 0\}$ aient une multiplicité d'intersection égale à $k < +\infty$ au point (u_0, v_0) , pour $\lambda = 0$. Alors,*

$$\text{Cycl}(X_{(a,b),\lambda,\varepsilon}, \Gamma(u_0, v_0, 0)) \leq k + 2.$$

Considérons un quelconque $(u_0, v_0) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$ comme dans le

corollaire 4.1.5. La quantité

$$D(u_0, v_0, \lambda) = I(u_0, \lambda) - J(v_0, \lambda) + L(v_0, \lambda) - K(u_0, \lambda)$$

c'est l'intégrale de la divergence lente du cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, \lambda)$. Dans [14], on a défini le début d'une classification par codimension d'un voisinage du cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ dans "l'espace des cycles canard avec deux paramètres de cassure" :

- (a) Si $D(u_0, v_0, 0) \neq 0$, alors le cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ est de codimension 0. Il bifurque en donnant un unique cycle limite hyperbolique pour $\varepsilon > 0$ assez petit (attractant ou répulsif, dépendant du signe de $D(u_0, v_0, 0)$) (voir [9]).
- (b) Si $D(u_0, v_0, 0) = 0$ mais $I(u_0, 0) - J(v_0, 0) \neq 0$ (ou équivalent à $K(u_0, 0) - L(v_0, 0) \neq 0$), le cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ est dit de codimension 1. Un déploiement générique à un paramètre de type pli bifurque du cycle canard, pour $\varepsilon > 0$ assez petit.
- (c) Si $I(u_0, 0) - J(v_0, 0) = K(u_0, 0) - L(v_0, 0) = 0$ (on aura $D(u_0, v_0, 0) = 0$), et si toutefois les deux courbes $\{I(u, 0) - J(v, 0) = 0\}$ et $\{K(u, 0) - L(v, 0) = 0\}$ sont transverses au point (u_0, v_0) , le cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ est de codimension 2. Un déploiement générique avec deux paramètres de type fronce bifurque du cycle canard, pour $\varepsilon > 0$ assez petit.

Maintenant on peut étendre la définition pour une codimension finie

quelconque :

Définition 4.1.6. *Le cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ est dit de codimension $c \geq 2$ si et seulement si les courbes $\{I(u, 0) - J(v, 0) = 0\}$ et $\{K(u, 0) - L(v, 0) = 0\}$ ont une multiplicité d'intersection égale à $c - 1$ au point (u_0, v_0) (bien sûr, cette définition coïncide avec la précédente quand $c = 2$).*

Dans [14] il est prouvé, pour $c = 1, 2$, qu'un cycle limite de codimension c bifurque et que, dans le cas $c = 2$, les deux paramètres (a, b) jouent le rôle du paramètre versel, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. On veut étendre ce résultat pour toute codimension finie. Dans le but de définir le paramètre versel pour le cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ de codimension $c > 2$, on a besoin de la définition suivante :

Définition 4.1.7. *Soient α_λ et β_λ les deux déploiements des arcs \mathcal{C}^∞ des courbes simples par $m \in \alpha_0 \cap \beta_0$, avec $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ définis près de m pour $\lambda \sim 0$. On suppose que les courbes α_0 et β_0 ont une multiplicité d'intersection en m égale à $k \geq 1$. Choisissons des coordonnées locales (s, t) en m , avec $m = \{(s, t) = (0, 0)\}$, telles que α_λ et β_λ sont des graphes de déploiements de fonctions $\varphi_\alpha(t, \lambda)$ et $\varphi_\beta(t, \lambda)$ respectivement, avec $\varphi_\alpha(0, 0) = \varphi_\beta(0, 0) = 0$. Alors, on dira que la paire de λ -déploiements $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ est versel (ou que λ est un paramètre versel en m) si et seulement si :*

- (a) *La dimension de l'espace de λ -paramètre est égale à $k - 1$: $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{k-1}$.*

(b) *Considérons le développement de Taylor*

$$\psi(t, \lambda) = \varphi_\alpha(t, \lambda) - \varphi_\beta(t, \lambda) = \sum_{i=0}^k \Omega_i(\lambda) t^i + o(t^k),$$

quand les coefficients Ω_i sont \mathcal{C}^∞ . Comme la multiplicité d'intersection est égale à k en m , on a :

$$\Omega_0(0) = \dots = \Omega_{k-1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Omega_k(0) \neq 0.$$

On suppose de plus que l'application $\lambda \rightarrow (\Omega_0(\lambda), \dots, \Omega_{k-2}(\lambda))$ est un difféomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^{k-1}$ (envoyant 0 sur 0). Si $k = 1$, et si α_0 et β_0 sont transverses en m , donc pas de paramètre λ et cette dernière condition n'est pas vérifiée.

Remarque 4.1.8. (a) *Comme pour la codimension, cette définition de la versalité est indépendante du choix des coordonnées locales (s, t) .*

(b) *Le déploiement de fonction $\psi(t, \lambda)$ est bien définie à multiplicité près par une fonction \mathcal{C}^∞ non nulle $U(t, \lambda)$ (cela veut dire que $U(0, 0) \neq 0$) et aussi un λ -déploiement à difféomorphisme près en t . Comme conséquence, si le déploiement d'arc β_λ est donné par une équation $\{H_\lambda(s, t) = 0\}$ on peut prendre la $\psi(t, \lambda) = H_\lambda(t, \varphi_\alpha(t, \lambda))$.*

(c) *Supposons que les déploiements de courbes soient données par une*

paire de déploiements de fonctions $\{(M_\lambda(u, v) = M(u, v, \lambda) = 0)\}$,
 et $\{(N_\lambda(u, v) = N(u, v, \lambda) = 0)\}$ avec $dM_0(0, 0) \neq 0$ et $dN_0(0, 0) \neq 0$.
 On peut trouver un système de coordonnées locales (s, t) qui sont
 définies implicitement par une paire de déploiements de fonctions
 $s_1(t, \lambda), s_2(t, \lambda)$ par les équations :

$$M(s_1(t, \lambda), t, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad N(s_2(t, \lambda), t, \lambda) = 0.$$

Le système d'équations $M = N = 0$ est réduit à une seule équation
 $\psi(t, \lambda) = s_2(t, \lambda) - s_1(t, \lambda) = 0$ et cela permet de définir la versalité
 comme une paire de déploiements d'équation, voir la Définition
 4.1.7.

- (d) Cette propriété de versalité est préservée par un changement de
 coordonnées dans l'espace- (u, v) ou dans l'espace- (M, N) donc si
 on multiplie M ou N par un déploiement de fonction \mathcal{C}^∞ non nulle
 $W(u, v, \lambda)$. En conséquence, la notion de versalité est invariante
 par ces transformations. Par exemple, on peut remplacer la paire
 (M, N) par la paire $(aM + bN, cM + dN)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et
 $ad - bc \neq 0$.
- (e) Pour $k = 1$, le paramètre versel est trivial (de dimension 0) : ceci
 est lié au fait que la propriété d'intersection transverse est stable
 sous perturbations.

Dans le Théorème suivant on considère les cycles limites bifurquant

d'un cycle canard donné $\Gamma(u_0, v_0, 0)$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ces cycles limites sont transverses à la section Σ_l (paramétrée par u) et correspondent aux points fixes de l'application de retour locale $P(u, \bar{\mu}, \varepsilon)$ qui est définie pour $u \sim u_0, \mu \sim 0, \varepsilon \sim 0$.

Rappelons la définition de la codimension d'un déploiement versel pour un cycle limite (voir [30] par exemple pour plus de détails.)

Définition 4.1.9. *Soit γ un cycle limite d'un champ de vecteur dans le plan X_0 . Soit Σ une section transverse à γ , paramétrée par u avec $\Sigma \cap \gamma = \{u = 0\}$, et $P_0(u)$ est l'application de retour de X_0 dans Σ . Le cycle limite est dit de codimension $c \geq 0$ si $P_0(u) = u + \delta_{c+1}u^{c+1} + o(u^{c+1})$ avec $\delta_{c+1} \neq 0$ ($c = 0$ correspond à un cycle limite hyperbolique). Soit X_ν un déploiement de X_0 près de γ dépendant du paramètre $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_c) \sim 0 \in \mathbb{R}^c$. L'application de retour P_0 déployée est :*

$$P_\nu(u) = u + \sum_{i=0}^{c+1} \delta_i(\nu)u^i + o(u^{c+1}).$$

On dit que le déploiement X_ν est c -versel si X_0 est de codimension c (cela veut dire que $\delta_0(0) = \dots = \delta_c(0) = 0$ et $\delta_{c+1}(0) \neq 0$) et si l'application $\nu \rightarrow (\delta_0(\nu), \dots, \delta_{c-1}(\nu))$ est localement un difféomorphisme en $0 \in \mathbb{R}^c$ (si $c = 0$ cette condition est vide).

Remarque 4.1.10. *Il y a $c + 1$ cycles limites qui bifurquent dans un déploiement c -versel.*

Ces définitions étant déjà rappelées, maintenant on peut donner le ré-

sultat suivant :

Théorème 4.1.11. *On suppose que pour $(u_0, v_0) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$, les courbes*

$$\{I(u, 0) - J(v, 0) = 0\} \quad \text{et} \quad \{K(u, 0) - L(v, 0) = 0\}$$

aient une multiplicité d'intersection égale à $c-1$ en (u_0, v_0) pour un certain $c \geq 2$ et que le λ -déploiement $(\{I(u, \lambda) - J(v, \lambda) = 0\}, \{K(u, \lambda) - L(v, \lambda) = 0\})$ est $(c-2)$ -versel en ce point $(\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{c-2})$. Rappelons que $\mu = (a, b, \lambda)$. Alors, il existe une courbe continue $:\varepsilon \rightarrow (u_0(\varepsilon), v_0(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$, définie pour $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, tel que $u_0(0) = u_0$, $v_0(0) = v_0$, $\mu(0) = 0$, avec $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$:

- (a) *Il existe un cycle limite $\gamma(\varepsilon)$ de $X_{\mu(\varepsilon), \varepsilon}$ de codimension c passant à travers le point $(u_0(\varepsilon), v_0(\varepsilon))$. Ce cycle limite tend vers le cycle canard $\Gamma(u_0, v_0, 0)$ au sens de Hausdorff, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*
- (b) *Le déploiement est défini par $X_{\mu, \varepsilon}$ dans le voisinage de $\gamma(\varepsilon)$, ε étant fixé, est c -versel avec un paramètre versel $:\mu - \mu(\varepsilon) \sim 0$.*

Remarque 4.1.12. (a) *Le Théorème 4.1.11 a été prouvé dans [14] pour $c = 2$.*

- (b) *L'ensemble de bifurcation pour un déploiement versel de cycle limite de codimension c est la bifurcation classique des catastrophes de codimension c (nommée aussi bifurcation de singularité de codimension c ou singularité de type A_c). Cette ensemble de bifurca-*

tion est une fronce pour $c = 2$, et une queue d'aronde pour $c = 3$.

(c) Le Théorème 4.1.11 ne dit rien au sujet de la taille du domaine dans lequel le résultat est valide (dans la direction de u et μ). Cette taille peut être réduite à zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Cette situation est en contraste avec le résultat affirmé dans le Corollaire 4.1.5 quand la borne c pour un nombre de cycles limites qui bifurquent est obtenue au voisinage de (u, μ) indépendante de $\varepsilon > 0$.

Dans la section *Exemple* on va montrer que les conditions de c -versalité du Théorème 4.1.11 pour le λ -déploiement ($\{I(u, \lambda) - J(v, \lambda) = 0\}, \{K(u, \lambda) - L(v, \lambda) = 0\}$) sont réalisées dans certains systèmes lents-rapides de Liénard du type $(3, 4c + 1)$ (les fonctions F, g sont des polynômes de degré 4 et $4c + 1$ respectivement). Plus précisément on va prouver le résultat suivant :

Théorème 4.1.13. *Pour $c \geq 2$, considérons le système de Liénard suivant :*

$$X_{(a,b,\bar{v},\tau),\varepsilon} = \begin{cases} \dot{x} = y - (ax + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \\ \dot{y} = \varepsilon(b - xh(x, \bar{v}, \tau)) \end{cases}$$

avec $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{c-1})$ et

$$h(x, \bar{v}, \tau) = 1 + \tau(\bar{v}_1 x^4 + \dots + \bar{v}_{c-1} x^{4(c-1)} + x^{4c}).$$

On a deux sections Σ_l, Σ_r comme dans la Figure 4.1 qui sont paramétrées par $\sqrt{1 - 4y}$, variable notée u et v respectivement. Le sys-

tème a une famille à 2-paramètres de cycles canard Γ_{uv} avec $(u, v) \in]0, 1[\times]0, 1[$. Les intégrales de la divergence lente associées I, J, K, L sont paramétrées par (u, v, \bar{v}, τ) . Alors, il existe un sous-ensemble fini $\Sigma_c \subset]0, 1[$ et une application $\mathcal{C}^\infty (u_0, \tau) \rightarrow (v, \bar{v})$, définie dans un voisinage ouvert \mathcal{W} de $(]0, 1[\setminus \Sigma_c) \times \{0\}$ dans l'espace $(]0, 1[\setminus \Sigma_c) \times \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $(u_0, \tau) \in \mathcal{W}$, avec $\tau > 0$:

(a) Les courbes $\{I(u, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) - J(v, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) = 0\}$ et

$$\{K(u, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) - L(v, \bar{v}(u_0, \tau), \tau) = 0\}$$

ont une multiplicité égale à $c - 1$ au point $(u_0, v(u_0, \tau))$.

(b) Cette intersection est déployée versellement, si on prend une valeur fixée de (u_0, τ) , par le paramètre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{c-2})$ ou $\lambda_i = \bar{v}_i - \bar{v}_i(u_0, \tau)$ pour $i = 1, \dots, c - 2$ (bien sûr, il n'y a pas de paramètre λ quand $c = 2$).

Remarque 4.1.14. (a) Comme conséquence du Théorème 4.1.11, il y a $c + 1$ de cycles limites qui bifurquent du cycle canard $\Gamma_{u_0, v(u_0, \tau)}$.

(b) Dans le cas $c = 2$, un meilleur résultat que celui du Théorème 4.1.13 a été obtenu dans [14]. On a inclu le cas $c = 2$ dans le Théorème 4.1.13, juste pour avoir les énoncés généraux (voir aussi la Remarque 4.4.5).

4.2 Le cadre

On considère le système lent-rapide $X_{(a,b),\lambda,\varepsilon}$ défini comme avant. On choisit une section à l'orbite rapide pour chaque mécanisme canard. Dans le cas du mécanisme saut la section est transverse à l'orbite rapide qui joint les deux points saut. Dans le cas du mécanisme de Hopf la section est transverse à la demi-sphère obtenue par l'éclatement du point tournant et coupe transversalement la séparatrice à l'infini dans la demi-sphère (voir [11] ou [12]). L'une des sections est associée aux extrémités des segments réguliers $\gamma_I(u, \lambda)$ et $\gamma_J(v, \lambda)$ et au paramètre de cassure a . On l'appelle C_1 . La seconde section est associée aux extrémités des segments réguliers $\gamma_K(u, \lambda)$ et $\gamma_L(v, \lambda)$ et associée au paramètre de cassure b . On l'appelle C_2 . voir un exemple dans la Figure 4.1 comme un exemple. Le cadre est défini pour $(u, v) \in]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$, un rectangle ouvert dépendant d'un système donné. A partir d'ici on doit restreindre (u, v) à un rectangle fermé arbitraire $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2] \subset]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$. Pour l'éclatement du point tournant dans le cas du mécanisme de Hopf, on doit introduire dans un tel cas un paramètre de cassure *changé d'échelle* $\bar{a} = \frac{a}{\varepsilon}$ ou $\bar{b} = \frac{b}{\varepsilon}$ choisi dans un intervalle arbitraire fermé T , au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ (alors le paramètre de cassure est restreint à l'intervalle εT). Ce choix n'est pas une limitation pour établir les résultats : car si le paramètre de cassure est en dehors de l'intervalle (après avoir changé d'échelle) aucun cycle limite ne peut couper l'intervalle

$\{X_1\} \times [U_1, U_2]$ et $\{X_2\} \times [V_1, V_2]$. De plus, prenant ε_0 assez petit, on peut prendre T arbitrairement petit. Dans le cas du mécanisme saut on choisit le paramètre de cassure dans un intervalle fermé au voisinage de 0, qui peut être choisi arbitrairement petit. A partir de maintenant et pour simplifier les notations, on utilise la notation \bar{a} ou \bar{b} pour le paramètre de cassure dans le cas du mécanisme saut et après changé d'échelle dans le paramètre de cassure dans le cas de mécanisme de Hopf et on nomme *changé d'échelle dans le paramètre de cassure* la paire (\bar{a}, \bar{b}) . On écrit $(\bar{\mu} = \bar{a}, \bar{b}, \lambda)$ et prendre μ comme une fonction de $(\bar{\mu}, \varepsilon)$.

Rappelons qu'on a choisi un rectangle fixé $[U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$. Dans cette section le paramètre λ est choisi dans le disque fermé W_2 centré en $0 \in \mathbb{R}^p$. Ce voisinage peut être pris arbitrairement petit. Le paramètre (\bar{a}, \bar{b}) est choisi maintenant dans un rectangle \bar{W}_1 , produit de deux intervalles fermés, avec une taille arbitrairement petite. Alors le paramètre $(\bar{\mu}, \varepsilon)$ est pris arbitrairement près de $(0, 0) \in \mathbb{R}^{p+2} \times \mathbb{R}^+$, un choix qu'on peut aussi écrire $\bar{\mu} \sim 0, \varepsilon \sim 0$.

Pour tout choix d'intervalles $[U_1, U_2], [V_1, V_2]$, on peut définir les applications de transitions suivantes :

- (a) $\Pi_I(u, \bar{\mu}, \varepsilon) : [U_1, U_2] \rightarrow C_1$ le long du flot $X_{\mu, \varepsilon}$,
- (b) $\Pi_J(v, \bar{\mu}, \varepsilon) : [V_1, V_2] \rightarrow C_1$ le long du flot $-X_{\mu, \varepsilon}$,
- (c) $\Pi_L(v, \bar{\mu}, \varepsilon) : [V_1, V_2] \rightarrow C_2$ le long du flot $X_{\mu, \varepsilon}$,

(d) $\Pi_K(u, \bar{\mu}, \varepsilon) : [U_1, U_2] \rightarrow C_2$ le long du flot $-X_{\mu, \varepsilon}$.

Comme on a vu ci-dessus, ces applications sont définies pour $\bar{\mu} \sim 0, \varepsilon \sim 0$. La structure de ces applications a été établie dans les précédents articles voir ([11],[12],[7],[8],[13]) par exemple. Pour présenter cette structure on a besoin de la définition suivante :

Définition 4.2.1. *Soit $f(z, \varepsilon)$ une fonction avec $z \in D$ un domaine compact dans \mathbb{R}^l pour un certain l (le produit de disques fermés) et $\varepsilon \sim 0 \in \mathbb{R}^+$. Cette fonction est dite ε -régulièrement affine en z (ou ε -régulièrement C^∞ en z) si toutes ces dérivées partielles en z existent et sont continues en (z, ε) .*

Les applications de transitions ont la structure suivante :

Théorème 4.2.2. *Il y a des fonctions \tilde{I}, \tilde{K} de $(u, \bar{\mu}, \varepsilon)$ et les fonctions \tilde{J}, \tilde{L} de $(v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ qui sont ε -régulièrement C^∞ en $(u, v, \bar{\mu})$ et réduites aux fonctions I, J, K, L pour $\varepsilon = 0$ et les fonctions f_I, f_J, f_K, f_L du paramètre $(\bar{\mu}, \varepsilon)$ qui sont ε -régulièrement C^∞ en $\bar{\mu}$ tel que*

$$\Pi_I = \exp\left(\frac{\tilde{I}}{\varepsilon}\right) + f_I, \quad \Pi_J = \exp\left(\frac{\tilde{J}}{\varepsilon}\right) + f_J,$$

$$\Pi_L = \exp\left(\frac{\tilde{L}}{\varepsilon}\right) + f_L, \quad \Pi_K = \exp\left(\frac{\tilde{K}}{\varepsilon}\right) + f_K.$$

De plus $f_J - f_I = \bar{a}f_{IJ}(\bar{\mu}, \varepsilon)$ et $f_L - f_K = \bar{b}f_{KL}(\bar{\mu}, \varepsilon)$ ou les fonctions f_{IJ}, f_{KL} sont strictement positives et ε -régulièrement C^∞ en $\bar{\mu}$.

Remarque 4.2.3. *Alternativement on peut écrire $\tilde{I} = I + o(1)$ ou le*

terme $o(1)$ est une fonction de $(u, \bar{\mu}, \varepsilon)$ qui est ε -régulièrement C^∞ en $(u, \bar{\mu})$ et tend vers zéro pour $\varepsilon \rightarrow 0$ (uniformement comme $\bar{\mu}$ est dans un compact). On utilise des notations similaires pour $\tilde{J}, \tilde{K}, \tilde{L}$. Se souvenir que les termes $o(1)$ dans \tilde{I}, \tilde{K} dépendent juste de $(u, \bar{\mu}, \varepsilon)$ (pas de v) et les termes $o(1)$ dans \tilde{J}, \tilde{L} dépendent juste de $(v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ (pas de u).

Le champ de vecteur $X_{\mu, \varepsilon}$ a un cycle limite passant par les deux points (X_1, u) et (X_2, v) si et seulement si (u, v) vérifient

$$\Pi_I(u, \bar{\mu}, \varepsilon) = \Pi_J(v, \bar{\mu}, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \Pi_K(u, \bar{\mu}, \varepsilon) = \Pi_L(v, \bar{\mu}, \varepsilon).$$

On aura pour (u, v) un système de deux équations pour les cycles limites possibles :

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{I(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{J(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) = \bar{a} f_{IJ}(\bar{\mu}, \varepsilon) \\ \exp\left(\frac{K(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{L(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) = \bar{b} f_{KL}(\bar{\mu}, \varepsilon) \end{cases}$$

Comme cela a déjà été expliqué dans [14] c'est possible d'inclure les deux fonctions f_{IJ} et f_{KL} dans les termes exponentiels dans la partie gauche du système. L'idée est juste que, pour $M = I, J, K$ ou L , on peut faire entrer n'importe quel facteur positif de $\exp\left(\frac{M + o(1)}{\varepsilon}\right)$ en dehors de l'exponentielle, sans changer la forme de cette expression. Par exemple on peut écrire :

$$\frac{1}{f_{IJ}(\bar{\mu}, \varepsilon)} \exp\left(\frac{I(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) =$$

$$\exp\left(\frac{I(u, \lambda) - \varepsilon \ln(f_{IJ}(\bar{\mu}, \varepsilon)) + o(1)}{\varepsilon}\right) = \exp\left(\frac{I(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right),$$

et le terme à droite a exactement les mêmes propriétés qu'auparavant. En particulier la fonction $I(u, \lambda) + o(1)$ ne dépend pas de v et elle est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en $(u, \bar{\mu})$. Finalement on a pour (u, v) le système suivant avec les mêmes propriétés qu'auparavant :

$$\begin{cases} \exp\left(\frac{I(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{J(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) = \bar{a} \\ \exp\left(\frac{K(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{L(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) = \bar{b} \end{cases} \quad (4.5)$$

4.3 Preuve Des Théorèmes

4.3.1 Preuve du Théorème 4.1.3

On choisit un rectangle $T = [U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$ qu'on garde fixé dans cette sous-section. Pour prouver le Théorème 4.1.3 on doit estimer le nombre de solutions $(u, v) \in [U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$ du système (4.5) pour $\varepsilon > 0$ assez petit. La difficulté vient du fait que les membres à gauche de ce système tendent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors, pour $\varepsilon = 0$ le système dégénère en tout (u, v) est solution si $\bar{a} = \bar{b} = 0$. Cette limite ne permet pas d'étudier la solution pour $\varepsilon > 0$.

Pour faciliter l'étude on étend le système (4.5) par un changement dans les termes de droite dans (4.5) par deux paramètres indépendants α et

β tel que le système d'équation devient :

$$(E) : \begin{cases} \exp\left(\frac{I(u,\lambda)+o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{J(v,\lambda)+o(1)}{\varepsilon}\right) & = \alpha \\ \exp\left(\frac{K(u,\lambda)+o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{L(v,\lambda)+o(1)}{\varepsilon}\right) & = \beta \end{cases}$$

Le système étendu (E) dépend de $(\bar{\mu}, \varepsilon) = (\bar{a}, \bar{b}, \lambda, \varepsilon)$ par les termes de gauche et de (α, β) par les termes de droite. On pourra récupérer (4.5) par la factorisation : $\alpha = \bar{a}, \beta = \bar{b}$.

Pour prouver le théorème 4.1.3 il suffit de prouver que, sous les suppositions faites dans l'énoncé sur $I - J$ et $K - L$, le système d'équations (E) a moins de $k + 2$ solutions pour $(\bar{\mu}, \varepsilon) \in \bar{W}_1 \times W_2 \times [0, \varepsilon_0]$, un voisinage de petite taille. Rappelons que (u, v) sont recherchés dans un rectangle fixé $T = [U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$.

Pour contourner la difficulté dû au fait que le système (E) dégénère pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on va le remplacer par un système avec une limite non dégénérée pour $\varepsilon = 0$. Ceci doit être réalisé par l'utilisation d'une idée qui vient de Khovanskii [21] et déjà utilisée pour l'étude d'un champ de vecteur polynômial dans le plan au voisinage d'un polycycle voir ([28],[20]). Dans ces dernières références, l'idée de Khovanskii était utilisée pour éliminer les fonctions transcendentes dans les séries de Dulac pour l'application de retour le long d'un polycycle. Ici, notre but est d'éliminer les fonctions dégénérées comme $\exp\left(\frac{\tilde{I}(u,\bar{\mu},\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$ par exemple.

On écrit $F(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ et $G(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ pour les membres de gauche dans

les deux lignes de (E) . Pour le reste de ce paragraphe on suppose que le paramètre $(\bar{\mu}, \varepsilon)$ est fixé, avec $\varepsilon > 0$.

On remarque que les dérivées partielles de F et G en terme de u et v ne sont pas nulles pour n'importe quelle valeur de $(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ dès que $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour ε_0 suffisamment petit. A partir de maintenant on suppose que cette condition est satisfaite.

En conséquence, pour tout α , l'ensemble $\{F(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon) = \alpha\}$ est vide ou définit une courbe simple *connectée* $f(\alpha, \bar{\mu}, \varepsilon)$ dans T . Cette courbe est difféomorphe à un intervalle fermé avec des extrémités dans la frontière ∂T de T et un graphe de l'application $u \rightarrow v$ ainsi que le graphe de l'application $v \rightarrow u$. Le fait que $f(\alpha, \bar{\mu}, \varepsilon)$ est connectée c'est la conséquence de l'observation suivante : la fonction F croît strictement vers la gauche de l'intervalle $[U_1, U_2] \times \{V_1\}$ et puis vers le haut de l'intervalle $\{U_1\} \times [V_1, V_2]$ et puis vers le haut de l'intervalle $\{U_2\} \times [V_1, V_2]$ et puis vers la gauche de l'intervalle $[U_1, U_2] \times \{V_2\}$.

La collection de courbes $f(\alpha, \bar{\mu}, \varepsilon)$, pour chaque valeur fixée de $(\bar{\mu}, \varepsilon)$, définit un feuilletage $\mathcal{F}(\bar{\mu}, \varepsilon)$ de rectangle ouvert $\text{Int}(T) =]U_1, U_2[\times]V_1, V_2[$, si on restreint ces courbes à ce rectangle $\text{Int}(T)$. De la même manière $\{G(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon) = \beta\}$ est une courbe simple connectée $g(\beta, \bar{\mu}, \varepsilon)$ avec les mêmes propriétés et la collection de ces courbes définit un feuilletage $\mathcal{G}(\bar{\mu}, \varepsilon)$ d'un rectangle ouvert $\text{Int}(T)$.

L'ensemble des points (u, v) ou les différentielles dF et dG sont dépen-

dantes (ou équivalentes, ou l'application $(u, v) \rightarrow (F, G)$ est de rang < 2) est donné par l'équation $\{\Delta(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon) = 0\}$ ou $\Delta = \text{Det}(F, G) = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial G}{\partial u}$. Cet ensemble peut être interprété comme l'ensemble des points de contact des deux feuilletages $\mathcal{F}(\bar{\mu}, \varepsilon)$ et $\mathcal{G}(\bar{\mu}, \varepsilon)$. L'ensemble des points (u, v) où la feuille de $\mathcal{F}(\bar{\mu}, \varepsilon)$ est tangente à la feuille de $\mathcal{G}(\bar{\mu}, \varepsilon)$.

On va calculer cette fonction Δ . Pour cela, notons que :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\exp \left(\frac{\tilde{I}}{\varepsilon} \right) \right] = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial u} + o(1) \right) \exp \left(\frac{\tilde{I}}{\varepsilon} \right),$$

où le terme $o(1)$ est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ dans $(u, v, \bar{\mu})$. Comme $\frac{\partial \tilde{I}}{\partial u} > 0$, la fonction $\ln \left(\frac{\partial \tilde{I}}{\partial u} + o(1) \right)$ est aussi ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ dans $(u, v, \bar{\mu})$.

On utilise aussi que, $\varepsilon \ln \varepsilon = o(1)$, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\exp \left(\frac{\tilde{I}}{\varepsilon} \right) \right] = \exp \left(\frac{I + o(1)}{\varepsilon} \right). \quad (4.6)$$

On a les expressions similaires des dérivées partielles dans les autres termes avec des exponentielles, avec un signe dépendant du signe des dérivées partielles de J, K, L respectivement (voir (4.4)). De plus, on a aussi que $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\exp \left(\frac{\tilde{I}}{\varepsilon} \right) \right]$, comme \tilde{J} est indépendant de u et les mêmes remarques pour les autres dérivées partielles de F, G . Utilisant cela, on obtient :

$$\Delta = \exp \left(\frac{I + o(1)}{\varepsilon} \right) \exp \left(\frac{L + o(1)}{\varepsilon} \right) - \exp \left(\frac{J + o(1)}{\varepsilon} \right) \exp \left(\frac{K + o(1)}{\varepsilon} \right),$$

qui peut s'écrire :

$$\Delta = \exp\left(\frac{I + L + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{J + K + o(1)}{\varepsilon}\right).$$

Il suit de cette expression le résultat suivant :

Lemme 4.3.1. *L'ensemble des points de contact entre les feuilletages $\mathcal{F}(\bar{\mu}, \varepsilon)$ et $\mathcal{G}(\bar{\mu}, \varepsilon)$, donné par l'équation $\{\Delta = 0\}$, est équivalent pour $\varepsilon > 0$ à une équation :*

$$\tilde{\Delta}(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon) = I(u, \lambda) - K(u, \lambda) + L(v, \lambda) - J(v, \lambda) + o(1) = 0, \quad (4.7)$$

ou le terme $o(1)$ est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ dans $(u, v, \bar{\mu})$. Cela est équivalent à dire que les deux fonctions $\tilde{\Delta}$ et Δ ont une différence égale à un facteur \mathcal{C}^∞ , partout non nul.

On a $\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial u} = \frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u} + o(1)$ et $\frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial J}{\partial v} + o(1)$. Comme $\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u} > 0$ et $\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial J}{\partial v} < 0$, la fonction $\tilde{\Delta}$ a les mêmes propriétés comme F, G (mais avec un excellent avantage c'est qu'elle n'est pas singulière pour $\varepsilon = 0$, contrairement à la fonction Δ elle même).

Parenthèse sur la paire de feuilletages réguliers

Dans le but de faire ultérieurement une récurrence, on introduit la notion suivante :

Définition 4.3.2. *Soient $F(u, v)$ et $G(u, v)$ deux fonctions \mathcal{C}^∞ défi-*

nies dans le rectangle $T = [U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$. On suppose que les dérivées partielles d'ordre un de F et G en termes de u et v ne sont pas nulles pour tout (u, v) . On suppose aussi que l'équation de l'ensemble des points de contact $\{\text{Det}(F, G) = 0\}$ est équivalente à une équation $\{\tilde{\Delta} = 0\}$ et que les dérivées partielles d'ordre un de la fonction \mathcal{C}^∞ $\tilde{\Delta}$ sont partout non nulles (en particulier l'ensemble des points de contact est une courbe simple). Comme ci-dessus, équivalent veut dire que les deux fonctions $\text{Det}(F, G)$ et $\tilde{\Delta}$ ont une différence égale à un facteur multiplicatif \mathcal{C}^∞ , partout non nul. Les courbes $f(\alpha) = \{F(u, v) = \alpha\}$ et $g(\beta) = \{G(u, v) = \beta\}$ sont les feuilles des deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{G} . On appelle cette paire $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ une paire de feuilletages réguliers (sur T).

L'équation (E) définie pour chaque $(\bar{\mu}, \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$, la paire de feuilletages réguliers. Exactement comme dans ce cas particulier, on peut montrer que pour chaque feuille $f(\alpha)$ ou $g(\beta)$ est une courbe simple connectée difféomorphe à un intervalle avec des extrémités sur ∂T . C'est aussi vrai pour la courbe des points de contact $\{\tilde{\Delta} = 0\}$. On veut relier la multiplicité d'intersection des deux feuilletages $f(\alpha)$ et $g(\beta)$ avec la multiplicité d'intersection d'une de ces feuilles avec la courbe des points de contact $\{\tilde{\Delta} = 0\}$. On écrit $\text{Mult}_m(\gamma, \gamma')$ la multiplicité d'intersection des deux courbes simples γ, γ' en un point m (rappelons que $\text{Mult}_m(\gamma, \gamma') = 0$ si $m \notin \gamma \cap \gamma'$). La figure 4.2 montre l'intersection des deux feuilles.

Lemme 4.3.3. *Supposons que pour une paire (α, β) les feuilles $f(\alpha)$*

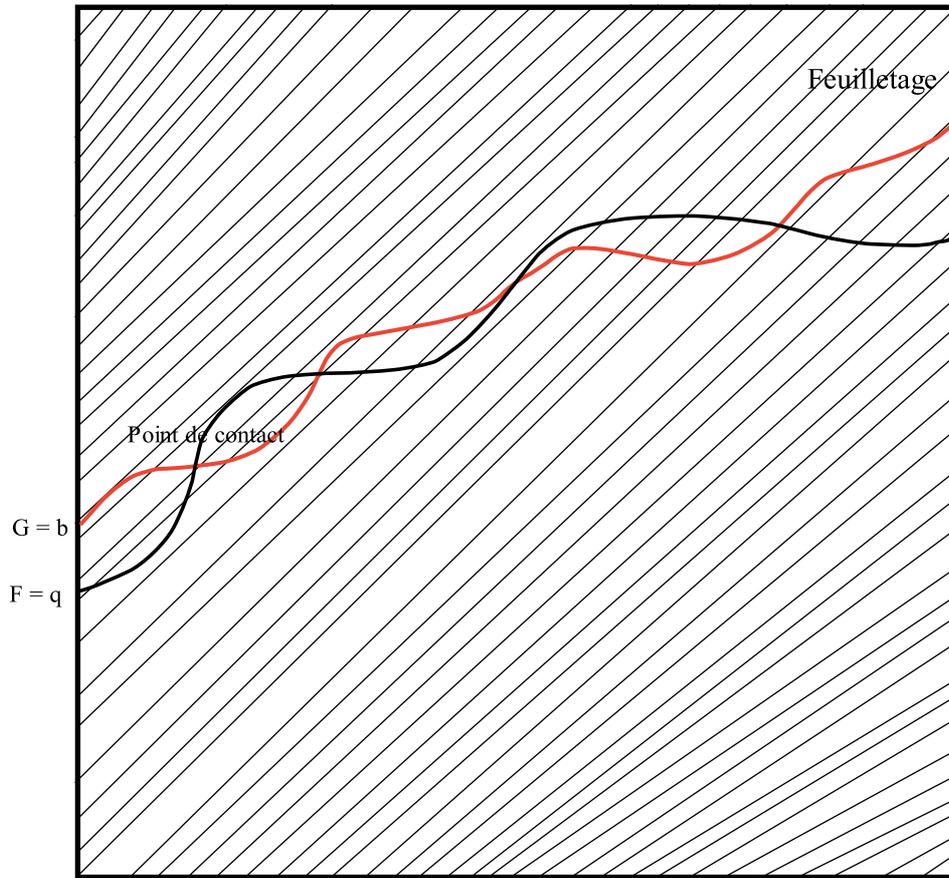


FIG. 4.2 – Intersection des deux feuilles.

et $g(\beta)$ s'intersectent en un certain point m . On a :

$$\begin{aligned} \text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) &= \text{Mult}_m(f(\alpha), \{\tilde{\Delta} = 0\}) + 1 \\ &= \text{Mult}_m(g(\beta), \{\tilde{\Delta} = 0\}) + 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Démonstration. Comme les deux feuilletages jouent un rôle symétrique,

c'est suffisant de prouver l'égalité :

$$\text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) = \text{Mult}_m(f(\alpha), \{\tilde{\Delta} = 0\}) + 1.$$

(1) si $f(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont transverses en m , on a :

$$\text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) = 1$$

et que $m \notin \{\tilde{\Delta} = 0\}$, cela implique que $\text{Mult}_m(f(\alpha), \{\tilde{\Delta} = 0\}) = 0$, cela donne (4.8) dans ce cas.

(2) On suppose maintenant que $\text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) \geq 2$ (cela veut dire que $f(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont tangentes en m). On peut choisir des coordonnées locales (s, t) en m tel que $m = (0, 0)$ et $F \equiv s + \alpha$ (alors localement : $f(\alpha) = \{s = 0\}$). Soit $\tilde{G}(s, t) + \beta$ est l'expression de G en coordonnées (s, t) . Comme $f(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont tangentes en m , on aura $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial s}(0, 0) \neq 0$ et $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(0, 0) = 0$: $g(\beta)$ est localement le graphe d'une fonction $s = \varphi(t)$ avec $\varphi(0) = 0$ et

$$\frac{d\varphi}{dt}(0) = -\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(0, 0) / \frac{\partial \tilde{G}}{\partial s}(0, 0) = 0.$$

Par récurrence sur un k commençant avec $k = 0$, avec l'équation im-

plícite $\tilde{G}(\varphi(t), t) = 0$, on obtient pour tout $k \geq 1$ que :

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial s}(\varphi(t), t) \frac{d^k \varphi}{dt^k}(t) = -\frac{\partial^k \tilde{G}}{\partial t^k}(\varphi(t), t) \quad \text{modulo} \quad \frac{d\varphi}{dt}(t), \dots, \frac{d^{k-1} \varphi}{dt^{k-1}}(t).$$

Alors $\text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) = k \geq 2$ si et seulement si

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(0, 0) = \dots = \frac{\partial^{k-1} \tilde{G}}{\partial t^{k-1}}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k \tilde{G}}{\partial t^k}(0, 0) \neq 0. \quad (4.9)$$

(3) Dans les coordonnées (s, t) on a que $\text{Det}(F, G)(s, t) = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(s, t)$. Dans le calcul des multiplicités d'intersection on peut remplacer $\tilde{\Delta}$ par la fonction équivalente à $\text{Det}(F, G)$.

(4) On Suppose tout d'abord que $\text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) = 2$. D'après (4.9) on a que $\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial t^2}(0, 0) \neq 0$. Alors, on peut résoudre l'équation implicite $\{\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(s, t) = 0\}$ en une fonction $t = \psi(s)$. La courbe de contact est donc transverse en $m = (0, 0)$ à $f(\alpha) = \{s = 0\}$ et on a $\text{Mult}_m(f(\alpha), \{\tilde{\Delta} = 0\}) = 1$. Cela donne (4.8) dans ce cas.

(5) On suppose maintenant que $\text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) > 2$. D'après (4.9) on a que $\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial t^2}(0, 0) = 0$. Comme par hypothèse l'équation $\{\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(s, t) = 0\}$ définit une courbe régulière passant à travers $(0, 0)$, on aura $\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial s \partial t}(0, 0) \neq 0$. Alors, on peut résoudre $\{\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(s, t) = 0\}$ en une fonction $s = \psi(t)$. On peut faire maintenant le même calcul comme ci-dessus pour avoir (4.9). Par récurrence sur l , commençant par $l = 0$ et utilisant l'équation implicite $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(\psi(t), t) = 0$, on obtient que $\text{Mult}_m(f(\alpha), \{\tilde{\Delta} = 0\}) = l \geq$

1 si et seulement si

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(0,0) = \dots = \frac{\partial^l \tilde{G}}{\partial t^l}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{l+1} \tilde{G}}{\partial t^{l+1}}(0,0) \neq 0. \quad (4.10)$$

La comparaison entre (4.9) et (4.10) donne (4.8) dans le cas $k > 2$. \square

Proposition 4.3.4. *Soient $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ une paire de feuilletages réguliers définis pour $(u, v) \in T = [U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$. On considère tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $N(\alpha, \beta)$ le nombre des points d'intersection de $f(\alpha)$ avec $g(\beta)$, comptés avec leurs multiplicités. Soit $N'(\beta)$ le nombre des points d'intersection de $g(\beta)$ avec $\tilde{\Delta}(u, v)$, comptés avec leurs multiplicités.*

On suppose maintenant que $N'(\beta)$ est fini. Alors $N(\alpha, \beta)$ est aussi fini pour tout β et,

$$N(\alpha, \beta) \leq N'(\beta) + 1. \quad (4.11)$$

On a bien sûr, le même résultat pour le nombre de points d'intersection de $f(\alpha)$ avec $\tilde{\Delta}(u, v)$.

Démonstration. Considérons n'importe quelle paire (α, β) tel que $f(\alpha) \cap g(\beta) \neq \emptyset$ (sinon on a rien à prouver!). On peut paramétrer $g(\beta)$ comme une courbe simple paramétrée $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ avec $s \in [0, 1]$ et tel que $\gamma(0), \gamma(1) \in \partial T$. Soient $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ deux points d'intersection de $f(\alpha)$ avec $g(\beta)$, tel que $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$. On considère la fonction $\tilde{F}(s) = F(u(s), v(s))$. On a que $\tilde{F}(s_1) = \tilde{F}(s_2) = \alpha$. Alors, en utilisant le Théorème de Rolle, on peut trouver une valeur $s' \in]s_1, s_2[$ tel que

$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial s}(s') = 0$. Clairement, $m' = (u', v') = \tilde{F}(s')$ est un point de contact des deux feuilletages de $m' \in g(\beta) \cap \{\tilde{\Delta} = 0\}$. Soit $N_a(\alpha, \beta)$ le *nombre arithmétique* des points d'intersection de $f(\alpha)$ avec $g(\beta)$ (les points sont comptés sans leurs multiplicités) et $N'_a(\beta)$ le nombre arithmétique des points d'intersection de $g(\beta)$ avec $\{\tilde{\Delta}(u, v) = 0\}$. Comme $N'(\beta)$ est fini par hypothèse et $N'_a(\beta) \leq N'(\beta)$, le nombre $N'_a(\beta)$ est aussi fini. Alors $N_a(\alpha, \beta)$ est aussi fini. Si non, on peut trouver $N'_a(\beta) + 2$ points distincts dans $f(\alpha) \cap g(\beta)$ et l'argument de Rolle ci-dessus donne au minimum $N'_a(\beta) + 1$ points d'intersection de $g(\beta)$ avec $\{\tilde{\Delta}(u, v) = 0\}$, ce qui est une contradiction. Alors, $N_a(\alpha, \beta)$ est fini et l'argument de Rolle donne au minimum $N_a(\alpha, \beta) - 1$ points dans $g(\beta) \cap \{\tilde{\Delta} = 0\}$, localisé à l'intérieur de T . Après cela, il en résulte que :

$$N_a(\alpha, \beta) \leq N'_a(\beta) + 1.$$

Maintenant on a envie de prendre dans le compte les multiplicités d'intersection. Considérons un point quelconque dans $m \in f(\alpha) \cap g(\beta)$. $\text{Mult}_m(f(\alpha), g(\beta)) = k$, on a que $k \geq 1$, et pour passer de $N_a(\alpha, \beta)$ à $N(\alpha, \beta)$, on a besoin d'ajouter à contribution près égale à $k-1$ pour le point m . Mais le Lemme 4.3.3 nous dit que $\text{Mult}_m(g(\beta), \tilde{\Delta}) = k-1$. Donc, on a besoin d'ajouter en plus la même contribution $k-1$ pour le point m , pour passer de $N'_a(g(\beta))$ à $N'(g(\beta))$. Finalement l'inégalité $N_a(\alpha, \beta) \leq N'_a(\beta) + 1$ implique l'inégalité $N(\alpha, \beta) \leq N'(\beta) + 1$. \square

Fin de la parenthèse

On peut retourner maintenant à la preuve du Théorème 4.1.3, à l'étude du système d'équations (E) . On a déjà remarqué que les deux termes de gauche de ce système sont les fonctions $F(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ et $G(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ qui définissent une paire régulière de feuilletages, dans le rectangle $T = [U_1, U_2] \times [V_1, V_2]$ pour tout $\bar{\mu} \in \bar{W}_1 \times W_2$ et $\varepsilon > 0$, suffisamment petit. De plus, on a montré dans le Lemme 4.3.1 que la fonction $\text{Det}(F, G)(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon)$ est équivalente à une fonction $\tilde{\Delta}(u, v, \bar{\mu}, \varepsilon) = I(u, \lambda) - K(u, \lambda) + L(v, \lambda) - J(v, \lambda) + o(1)$.

Considérons le système d'équations :

$$(E') : \begin{cases} I(u, \lambda) - K(u, \lambda) + L(v, \lambda) - J(v, \lambda) + o(1) = 0 \\ \exp\left(\frac{K(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{L(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) = \beta \end{cases}$$

La Proposition 4.3.4 compare le nombre $N(\alpha, \beta, \bar{\mu}, \varepsilon)$ de solutions de (E) , comptés avec leurs multiplicités, avec le nombre $N'(\beta, \bar{\mu}, \varepsilon)$ de solutions de (E') , comptés avec leurs multiplicités : $N(\alpha, \beta, \bar{\mu}, \varepsilon) \leq N'(\beta, \bar{\mu}, \varepsilon) + 1$. Comme $\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u} > 0$ et $\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial J}{\partial v} < 0$, les fonctions G et $\tilde{\Delta}$ qui définissent une paire régulière de feuilletages. Alors on peut utiliser encore l'idée de Khovanskii et introduire la fonction $\text{Det}(\tilde{\Delta}, G)$. Cette fonction $\text{Det}(\tilde{\Delta}, G)$ est égale à :

$$-\left(\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u} + o(1)\right) \frac{\partial}{\partial v} \left[\exp \frac{L + o(1)}{\varepsilon} \right] - \left(\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial J}{\partial v} + o(1)\right) \frac{\partial}{\partial u} \left[\exp \frac{K + o(1)}{\varepsilon} \right]$$

Utilisant le calcul fait pour obtenir (4.6) et les inégalités

$$\frac{\partial K}{\partial u} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial v} < 0,$$

on a que : $\frac{\partial}{\partial v} \left[\exp \frac{L+o(1)}{\varepsilon} \right] = - \exp \frac{L+o(1)}{\varepsilon}$ et $\frac{\partial}{\partial u} \left[\exp \frac{K+o(1)}{\varepsilon} \right] = - \exp \frac{K+o(1)}{\varepsilon}$.

Utilisant encore le calcul fait pour obtenir (4.6) et les inégalités $\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u} > 0$ et $\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial J}{\partial v} < 0$, on obtient finalement que :

$$\text{Det}(\tilde{\Delta}, G) = \exp \frac{L + o(1)}{\varepsilon} - \exp \frac{K + o(1)}{\varepsilon}.$$

Après cela, on en déduit que la fonction $\text{Det}(\tilde{\Delta}, G)$ est équivalente à une fonction $L - K + o(1)$, pour $\varepsilon > 0$. Pour appliquer encore l'idée de Khovanskii on considère le système :

$$\begin{cases} I(u, \lambda) - K(u, \lambda) + L(v, \lambda) - J(v, \lambda) + o(1) = 0 \\ K(u, \lambda) - L(v, \lambda) + o(1) = 0 \end{cases}$$

dont le système équivalent est :

$$(E'') : \begin{cases} I(u, \lambda) - J(v, \lambda) + o(1) = 0 \\ K(u, \lambda) - L(v, \lambda) + o(1) = 0 \end{cases}$$

Si $N''(\bar{\mu}, \varepsilon)$ est le nombre de solutions de (E'') , on a que

$$N'(\beta, \bar{\mu}, \varepsilon) \leq N''(\bar{\mu}, \varepsilon) + 1$$

et alors

$$N(\alpha, \beta, \bar{\mu}, \varepsilon) \leq N''(\bar{\mu}, \varepsilon) + 2, \quad (4.12)$$

pour $\bar{\mu} \in \bar{W}_1 \times W_2$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

On peut maintenant finir la preuve du Théorème 4.1.3. Par hypothèse le système (E'') pour $\varepsilon = 0$ et $\lambda = 0$ possède k solutions comptées avec leurs multiplicités (i.e. $N''(\bar{\mu}, 0) = k$ pour $\lambda = 0$). La remarque importante c'est que ce nombre est supérieurement semi-continue pour la topologie \mathcal{C}^∞ . C'est la raison pour la quelle on travaille avec un nombre de solutions *comptées avec leurs multiplicités* et non pas le nombre arithmétique de solutions. Cette semi-continuité supérieure implique que si on choisit un ensemble compact fixé \bar{W}_1 et en suite, $\varepsilon_0 > 0$ et W_2 suffisamment petit, alors

$$N''(\bar{\mu}, \varepsilon) \leq k, \quad (4.13)$$

pour $\bar{\mu} \in \bar{W}_1 \times W_2$ et $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Soit $N_a(\alpha, \beta, \bar{\mu}, \varepsilon)$ le nombre de solutions de (E) (comptées sans leurs multiplicités). On a que

$$N_a(\alpha, \beta, \bar{\mu}, \varepsilon) \leq N(\alpha, \beta, \bar{\mu}, \varepsilon),$$

et en utilisant (4.12) et (4.13) on obtient :

$$N_a(\alpha, \beta, \bar{\mu}, \varepsilon) \leq k + 2,$$

pour $\bar{\mu} \in \bar{W}_1 \times W_2$ et $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. C'est ce qu'on demande dans le Théorème 4.1.3.

4.3.2 Preuve du Théorème 4.1.11

Parenthèse sur les applications régulières dans le plan de rang un

On considère un germe d'applications dans le plan $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. C'est donné par des applications définies dans un voisinage arbitrairement petit (u_0, v_0) :

$$\Phi(u, v) = (F(u, v), G(u, v)) : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (F, G) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.14)$$

On suppose que Φ est de rang un en (u_0, v_0) . Cela veut dire que

$$\text{Det}(d\Phi)(u_0, v_0) = 0$$

mais que $d\Phi(u_0, v_0) \neq 0$. On suppose de plus que Φ est un germe d'application *régulière* : par régulière signifie que l'ensemble $\{\text{Det}(d\Phi)(u, v) =$

$0\}$ est un germe de courbe simple Σ_Φ par (u_0, v_0) (c'est équivalent à dire que la différentielle $d[\text{Det}(d\Phi)](u_0, v_0)$ n'est pas nulle). Soit Σ_Φ l'ensemble singulier de Φ .

En chaque point de $m \in \Sigma_\Phi$, le noyau $\text{Ker}(m)$ de $d\Phi(m)$ est un espace vectoriel de dimension un. On peut définir un germe d'application à l'origine, $\theta : \Sigma_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$, en définissant $\theta(m)$ comme l'angle entre la direction tangent $T_m \Sigma_\Phi$ et le noyau $\text{Ker}(m)$. On va l'appeler la *fonction noyau* de Φ . Bien sûr, cette fonction change par la multiplication d'un facteur non nul si on fait un changement de coordonnées. Pour cette raison, on considère θ à équivalence \mathcal{C}^∞ près, i.e. *multiplication près par un germe \mathcal{C}^∞ non nul de fonction de \mathbb{R}^2 et un change de paramétrisation de Σ_Φ* . Toutes ces notions introduites dépendent de la classe d'équivalence de l'application θ . On choisit n'importe quelle paramétrisation $\rho \in]-\rho_0, \rho_0[$ de Σ_Φ , telle que $(u_0, v_0) = \{\rho = 0\}$. L'application θ devient une fonction $\theta(\rho)$ définie pour $\rho \sim 0 \in \mathbb{R}$.

Définition 4.3.5. *On dit que le germe Φ d'application régulière dans le plan est de rang un est d'ordre k si la fonction noyau $\theta(\rho)$ a un zéro de multiplicité k en $\{\rho = 0\}$ (ordre 0 veut dire que $\theta(0) \neq 0$).*

Si l'ordre est 0, cela signifie que la direction du noyau est transverse à la direction de la tangente $T_{(u_0, v_0)} \Sigma_\Phi$ à l'origine de \mathbb{R}^2 . On a une singularité de type pli si l'ordre est 1. Si la fonction noyau a un zéro simple en $\{\rho = 0\}$, on a une singularité de type fonce. Withney a prouvé que ces deux germes d'applications sont stables et uniques, à

équivalence près par changement de coordonnées (voir [27]).

Par changement de coordonnées près \mathcal{C}^∞ , (u, v) et dans l'espace cible, on suppose que $d\Phi(u_0, v_0)[U, V] = (0, V)$. Cela implique que $\frac{\partial G}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$. L'application est donnée par :

$$t = u - u_0, \quad s = G(u, v) - G(u_0, v_0)$$

est un difféomorphisme local qui définit un système local de coordonnées (s, t) avec $(u_0, v_0) = \{(s, t) = (0, 0)\}$, ou l'application Φ est réduite à la *forme normale* suivante :

$$\Phi(s, t) = (\tilde{F}(s, t), s). \quad (4.15)$$

Pour simplifier, on garde la même notation Φ dans les nouvelles coordonnées (s, t) . Dans ce système de coordonnées l'équation pour l'ensemble critique est juste :

$$\Sigma_\Phi = \left\{ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(t, s) = 0 \right\},$$

avec $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(0, 0) = 0$, comme Φ est supposée être de rang un en $(0, 0)$. En chaque point de $m \in \Sigma_\Phi$ on a que $\text{Ker}(m) = \mathbb{R}\{(1, 0)\}$, la t -direction.

On suppose, à partir de maintenant que Φ est de rang 1, régulière et d'ordre ≥ 1 . Cela implique que Σ_Φ est une courbe simple tangente à la

t -direction à l'origine. Cela est équivalent à dire que :

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t^2}(0,0) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t \partial s}(0,0) \neq 0. \quad (4.16)$$

L'ensemble singulier est le graphe d'une fonction \mathcal{C}^∞ $s = \varphi(t)$, telle que $\varphi(0) = 0$, qui est la solution implicite de l'équation :

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(t, \varphi(t)) = 0 \right\}. \quad (4.17)$$

On choisit t comme le paramètre ρ utilisé ci-dessus. La direction tangente à Σ_Φ au point $(t, \varphi(t))$ est la direction du vecteur $(\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t \partial s}(t, \varphi(t)), \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t^2}(t, \varphi(t)))$. Alors, à une équivalence près, on peut choisir comme fonction noyau :

$$\theta(t) = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t^2}(t, \varphi(t)). \quad (4.18)$$

Lemme 4.3.6. *Soit k n'importe quel entier ≥ 1 . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *La fonction $\varphi(t)$ a un zéro de multiplicité $k + 1$ en $t = 0$.*

(b) *La fonction noyau $\theta(t)$ a un zéro de multiplicité k en $t = 0$.*

(c)

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(0,0) = \dots = \frac{\partial^{k+1} \tilde{F}}{\partial t^{k+1}}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{k+2} \tilde{F}}{\partial t^{k+2}}(0,0) \neq 0.$$

Démonstration. Débutons avec les équations (4.17) et (4.18), nous ob-

tenons par induction :

$$\begin{cases} \frac{d^k \varphi}{dt^k} = \frac{\partial^{k+1} \tilde{F}}{\partial t^{k+1}}(t, \varphi) \text{ modulo } \left\{ \frac{d\varphi}{dt}, \dots, \frac{d^{k-1} \varphi}{dt^{k-1}} \right\} \\ \frac{d^k \theta}{dt^k} = \frac{\partial^{k+2} \tilde{F}}{\partial t^{k+2}}(t, \varphi) \text{ modulo } \left\{ \frac{d\varphi}{dt}, \dots, \frac{d^k \varphi}{dt^k} \right\} \end{cases}$$

pour tout $k \geq 1$. Le résultat suit directement de ces formules. \square

Il est clair que dans la forme normale l'étude de l'équation $\Phi(u, v) = (\alpha, \beta)$ est réduite à l'étude d'une équation de dimension un $\tilde{F}(t, \beta) = \alpha$, obtenue par substitution de $s = \beta$ dans la première équation $\tilde{F}(t, s) = \alpha$.

On a que :

$$\tilde{F}(t, \beta) - \alpha = -\alpha + \beta \xi(\beta)t + O(t^2) = 0. \quad (4.19)$$

ou ξ est une fonction \mathcal{C}^∞ tel que $\xi(0) \neq 0$ (comme conséquence de (4.16)). Du Lemme 4.3.6 on aura que si l'application Φ est d'ordre k alors l'équation (4.19) a au plus $k + 1$ racines.

Maintenant on a envie de penser en termes de bifurcation. Si l'ordre de Φ est zéro, l'expression (4.19) dit que $t \rightarrow \tilde{F}(t, \beta) - \alpha$ est un déploiement versel de type-pli, avec α comme paramètre versel. Si l'ordre est 1, le même déploiement est un déploiement versel de type-fronce avec (α, β) comme paramètre versel.

On veut étendre cette observation en tout ordre fini. Donc, on suppose maintenant qu'on a un déploiement Φ_λ d'applications dans le plan,

$$\Phi_\lambda(u, v) = (F(u, v, \lambda), G(u, v, \lambda)) \quad (4.20)$$

dépendant du paramètre $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^l$ pour un certain l .

On suppose aussi que Φ_0 est une application régulière d'ordre $k \geq 1$ et que

$$\Phi_0(u_0, v_0) = (0, 0).$$

Bien sûr, on peut réduire le déploiement à une forme normale :

$$\Phi_\lambda(t, s) = \Phi(t, s, \lambda) = (\tilde{F}(t, s, \lambda), s).$$

A une translation près dans l'espace cible dépend de façon \mathcal{C}^∞ de λ , on peut supposer que $\tilde{F}(0, 0, \lambda) = 0$ pour tout λ . Alors, à l'ordre un en t , on peut écrire

$$\tilde{F}(t, s, \lambda) = (\tau_1(\lambda) + s\xi(s, \lambda))t + o(t),$$

ou τ_1, ξ sont des fonctions \mathcal{C}^∞ $\tau_1(0) = 0$. Comme Φ_0 est régulière d'ordre ≥ 1 de (4.16) on obtient que $\xi(0, 0) \neq 0$. Alors, l'application $s \rightarrow s\xi(s, \lambda)$ est un déploiement de difféomorphismes en $0 \in \mathbb{R}$. Soit $\nu(s, \lambda)$ le déploiement de difféomorphismes inverses tel que $\nu(0, 0) = 0$. λ -

dépend localement d'un changement de variables

$$(t, \tilde{s}) \rightarrow (t, \nu(\tilde{s} - \tau_1(\lambda)), \lambda),$$

transforme \tilde{F} en $\tilde{F}(t, \tilde{s}, \lambda) = \tilde{s}t + o(t)$. Alors, retournant à la notation (t, s) , on peut supposer que $\tilde{F}(t, s, \lambda) = st + o(t)$.

Utilisant cela, maintenant on développe $\tilde{F}(t, s, \lambda)$ en t à l'ordre $k+2$:

$$\tilde{F} = st + (\tau_2 + O(s))t^2 + \cdots + (\tau_{k+2} + O(s))t^{k+2} + o(t^{k+2}) \quad (4.21)$$

ou les τ_i sont des fonctions \mathcal{C}^∞ du paramètre λ . Comme Φ_0 est d'ordre k , et en utilisant le Lemme 4.3.6, que

$$\tau_2(0) = \cdots = \tau_{k+1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{k+2}(0) \neq 0.$$

On veut calculer le développement de $\theta(t, \lambda)$ à l'ordre k . Pour cette fin, on utilise la formule (4.18). Tout d'abord, de (4.21), on dérive :

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t^2} = 2(\tau_2 + O(s)) + \cdots + (k+1)(k+2)(\tau_{k+2} + O(s))t^k + o(t^k). \quad (4.22)$$

La fonction $\varphi(t, \lambda)$ (dépendant maintenant de λ) qui entre dans (4.18) est définie implicitement par (4.17). On obtient que la fonction $-\varphi(t, \lambda)$

est égale à :

$$2(\tau_2 + O(\varphi))t + \cdots + (k+1)(\tau_{k+2} + O(\varphi))t^{k+1} + o(t^{k+1}). \quad (4.23)$$

Pour obtenir θ on substitue dans (4.22), la variable s par l'expression de φ donnée dans (4.23). En développant en puissance de t , c'est facile d'avoir le résultat suivant :

Lemme 4.3.7. *La fonction θ à une expression :*

$$\theta(t, \lambda) = \Omega_2(\lambda) + \cdots + \Omega_{k+2}(\lambda)t^k + o(t^k), \quad (4.24)$$

avec les coefficients $\Omega_i(\lambda)$ de la forme $\Omega_2 = 2\tau_2$ et

$$\Omega_i = i(i-1)\tau_i + P_i(\tau_2, \dots, \tau_{i-1})$$

pour $i = 3, \dots, k+2$, ou les P_i sont des polynômes sans termes constants à coefficients dans \mathbb{Z} .

Une conséquence directe du lemme 4.3.7 c'est le résultat suivant :

Proposition 4.3.8. *Soit Φ_λ un λ -déploiement d'applications en $0 \in \mathbb{R}^2$ tel que Φ_0 est régulière, de rang 1 et d'ordre $k \geq 1$, et que $\Phi_0(u_0, s_0) = (0, 0)$. On suppose que $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{k-1}$, et on écrit :*

$$\theta_\lambda(t) = \sum_{i=0}^k \Omega_{i+2}(\lambda)t^i + O(t^k)$$

le déploiement du noyau des fonctions. Soit $(\tilde{F}(s, t, \lambda), s)$ la forme normale de Φ_λ . Alors $\tilde{F}(t, \beta, \lambda) - \alpha$ est un déploiement versel de $F(t, 0, 0)$ (avec paramètre versel $(\alpha, \beta, \lambda) \sim (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$) si et seulement si θ_λ est un déploiement versel de θ_0 (avec le paramètre versel $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{k-1}$).

Remarque 4.3.9. (a) Il n'y a pas de paramètre λ si $k = 1$. Dans ce cas la fonction θ_0 a un zéro simple en $t = 0$: cette condition est stable par perturbation. Le diagramme de bifurcation est une fronce dans l'espace des paramètres (α, β) (voir [14]).

(b) Si $k \geq 2$, la condition de versalité pour θ_λ est que l'application

$$\lambda \rightarrow (\Omega_2(\lambda), \dots, \Omega_k(\lambda))$$

est un difféomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^{k-1}$, que $\Omega_{k+1}(0) = 0$ et que $\Omega_{k+2}(0) \neq 0$. La condition de versalité pour $\tilde{F}(t, \beta, \lambda) - \alpha$ en termes de paramètres (α, β, λ) ce réduit à dire que l'application $\lambda \rightarrow (\tau_2(\lambda), \dots, \tau_k(\lambda))$ est un difféomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^{k-1}$, que $\tau_{k+1}(0) = 0$ et que $\tau_{k+2}(0) \neq 0$.

(c) Le déploiement Φ_λ lui-même est un générique, stable et déploiement versel d'applications dans le plan avec $k - 1$ paramètres. Le diagramme de bifurcation de $\tilde{F}(t, \beta, \lambda) - \alpha$ est défini dans le produit de l'espace du paramètre λ par l'espace cible (α, β) . Par exemple, pour $k = 2$ on a un déploiement générique à un paramètre d'appli-

cations du plan, ou de façon équivalente à un déploiement générique à un paramètre de projections sur \mathbb{R}^2 d'une surface plongée dans \mathbb{R}^3 . Le diagramme de bifurcation est une queue d'aronde.

Fin de la parenthèse

On peut maintenant prouver le Théorème 4.1.11. On suppose que pour un certain point (u_0, v_0) dans $]u_1, u_2[\times]v_1, v_2[$, les courbes $\{I(u, 0) - J(v, 0) = 0\}$ et $\{K(u, 0) - L(v, 0) = 0\}$ aient une multiplicité d'intersection égale à $c - 1$ en (u_0, v_0) pour un certain $c \geq 2$ et que le λ -déploiement $(I - J, K - L)$ est versel en ce point ($\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{c-2}$). Comme ci-dessus, on considère en premier le système en extension :

$$(E) : \begin{cases} \exp\left(\frac{I(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{J(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) & = \alpha \\ \exp\left(\frac{K(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{L(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) & = \beta \end{cases}$$

Le terme de gauche définit un déploiement d'applications qui dépend du paramètre λ mais aussi de $(\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)$ (à travers les termes $o(1)$). Rappelant que la dépendance est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en $(u, v, \lambda, \bar{a}, \bar{b})$. On écrit : $\Phi_\lambda^{\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon}$ ce déploiement d'application. Calculons le noyau de l'application pour $\Phi_\lambda^{\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon}$. Tout le long du calcul la notation $o(1)$ représente différentes fonctions qui tendent vers zéro pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et qui sont ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ dans $(u, v, \lambda, \bar{a}, \bar{b})$.

On montre que l'ensemble singulier $\Sigma_{\Phi_{\lambda}^{\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon}}$ est donné par l'équation :

$$D(u, v, \lambda) = I(u, \lambda) - J(v, \lambda) + L(v, \lambda) - K(u, \lambda) + o(1) = 0.$$

Le long de cet ensemble le noyau est colinéaire à un vecteur de la forme

$$\text{Ker}(u, v, \lambda) = \left(\exp\left(\frac{J(v, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right), \exp\left(\frac{I(u, \lambda) + o(1)}{\varepsilon}\right) \right).$$

On peut prendre comme fonction noyau toute fonction équivalente à la fonction

$$dD[\text{Ker}] = \left(\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u} \right) \exp\left(\frac{J + o(1)}{\varepsilon}\right) - \left(\frac{\partial J}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v} \right) \exp\left(\frac{I + o(1)}{\varepsilon}\right).$$

Comme avant, on peut faire entrer les termes positifs $\left(\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u}\right)$ et $\left(\frac{\partial J}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial v}\right)$ à l'intérieur des exponentielles pour obtenir que $dD[K]$ a la forme

$$\exp\left(\frac{J + o(1)}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{I + o(1)}{\varepsilon}\right).$$

Après on peut choisir, comme fonction noyau (pour $\varepsilon > 0$), une fonction équivalente de la forme :

$$(J(v, \lambda) - I(u, \lambda) + o(1)) |_{\{D(u, v, \lambda) = 0\}}$$

De cette manière, on obtient la fonction ψ introduite dans les Défini-

tions 4.1.1 et 4.1.7 pour définir la multiplicité d'intersection et le déploiement versel d'intersection. Comme on l'a expliqué dans Remarque 4.1.8, on peut remplacer la paire de déploiements

$$(J(v, \lambda) - I(u, \lambda) + o(1), D(u, v, \lambda))$$

par la paire

$$(J(v, \lambda) - I(u, \lambda) + o(1), L(v, \lambda) - K(u, \lambda) + o(1)). \quad (4.25)$$

L'hypothèse est que la paire de déploiements $(J(v, \lambda) - I(u, \lambda), L(v, \lambda) - K(u, \lambda))$ est versel en (u_0, v_0) , dans le paramètre $\lambda \sim 0 \in \mathbb{R}^{c-2}$.

Soit $\psi(t, \lambda)$ le déploiement de fonction associé à la paire de déploiements $(J - I, L - K)$ comme dans la Définition 4.1.7, (t, s) sont des coordonnées locales tel que (u_0, v_0) est donné par $\{(t, s) = (0, 0)\}$. Comme $\frac{\partial^{c-1}\psi}{\partial t^{c-1}}(0, 0) \neq 0$, la condition de versalité pour la paire de déploiements est équivalente à dire que l'application :

$$(t, \lambda) \rightarrow \left(\psi(t, \lambda), \dots, \frac{\partial^{c-2}\psi}{\partial t^{c-2}}(t, \lambda) \right) \quad (4.26)$$

est un difféomorphisme local envoyant $(t, \lambda) = (0, 0)$ sur $0 \in \mathbb{R}^{c-1}$.

C'est important de noter que *cette condition est stable par perturbation*.

On considère maintenant le déploiement $\psi(t, \lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)$ associé à la paire (4.25) pour $(\bar{a}, \bar{b}, \lambda, \varepsilon)$ dans le voisinage $\bar{W}_1 \times W_2 \times [0, \varepsilon_0]$ suffisamment

petit.

Considérons le système d'équations suivant, pour chaque $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$: les deux premières lignes sont faites par le système (4.5), écrit dans les coordonnées locales (s, t) , quand on substitue $s = \psi(t, \lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)$. Les autres $c - 1$ lignes sont

$$\frac{\partial^i \psi}{\partial t^i}(t, \lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, c - 2.$$

Ce système a une dimension égale à $c + 1$ et les quantités inconnues sont t, λ, \bar{a} et \bar{b} . Pour $\varepsilon = 0$, le système est inversible pour $(t, \lambda) \sim (0, 0)$: cela provient de la stabilité de l'inversibilité locale de (4.26) et le fait que les deux premières lignes sont réduites à $\bar{a} = 0, \bar{b} = 0$. Comme ce système est ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ dans $(\bar{a}, \bar{b}, \lambda)$, Il reste inversible pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Sa solution qui définit une courbe continue

$$\varepsilon \rightarrow (t(\varepsilon), \lambda(\varepsilon), \bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon)).$$

Soit $(u_0(\varepsilon), v_0(\varepsilon))$ le point qui correspond au point

$$(t(\varepsilon), \psi(t(\varepsilon), \lambda(\varepsilon), \bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon), \varepsilon)),$$

dans les coordonnées locales (t, s) . Soit $\mu(\varepsilon)$ la μ -valeur qui correspond à $\lambda(\varepsilon)$ et $(\bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon))$. On a résolu la première affirmation du Théorème 4.1.11 : *il y a une courbe continue $\varepsilon \rightarrow (u_0(\varepsilon), v_0(\varepsilon), \mu(\varepsilon))$, définie pour*

$\varepsilon > 0$ suffisamment petit, de telle qu'on aura un cycle limite de $X_{\mu(\varepsilon),\varepsilon}$ de codimension c passant à travers le point $(u_0(\varepsilon), v_0(\varepsilon))$.

Considérons le déploiement d'applications

$$(F(u, v, \lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon), G(u, v, \lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)) = \Phi_{\lambda}^{\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon}(u, v) - (\bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon)).$$

Comme dans la Proposition 4.3.8 on considère (F, G) comme un déploiement en λ , mais ce déploiement dépend aussi du paramètre $(\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)$, dans un ε -régulièrement \mathcal{C}^{∞} dans $(u, v, \lambda, \bar{a}, \bar{b})$.

Cela provient de la stabilité de l'inversibilité locale de (4.26) et la propriété que chaque fonction qu'on considère est ε -régulièrement \mathcal{C}^{∞} et que l'application

$$(t, \lambda) \rightarrow \left(\psi(t, \lambda, \bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon), \varepsilon), \dots, \frac{\partial^{c-2}\psi}{\partial t^{c-2}}\psi(t, \lambda, \bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon), \varepsilon) \right)$$

est un difféomorphisme local en $(t, \lambda) = (t(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$, pour ε suffisamment petit. Alors, si $\tilde{F}(t, s, \lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)$ est la première composante de (F, G) écrite dans les coordonnées locales (t, s) , on a que le déploiement :

$$t \rightarrow \tilde{F}(t, \beta, \lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon) - \alpha$$

est versel en $(\alpha, \beta, \lambda) \sim (0, 0, \lambda(\varepsilon))$ (pour toute valeur fixée de $(\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)$),

comme conséquence de la Proposition 4.3.8. Plus précisément on a :

$$\tilde{F}(t, \beta, \bar{a}, \bar{b}, \lambda) - \alpha = -\alpha + \beta t + (\tau_2 + O(\beta))t^2 + \dots + (\tau_{c+1} + O(\beta))t^{c+1} + o(t^{c+1}),$$

dont les coefficients $\tau_i = \tau_i(\lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)$ sont ε -régulièrement \mathcal{C}^∞ en $(\bar{a}, \bar{b}, \lambda)$.

La versalité signifie que pour chaque $(\bar{a}, \bar{b}, \varepsilon) \sim (0, 0, 0)$, l'application

$$\lambda \rightarrow (\tau_2(\lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon), \dots, \tau_{c-1}(\lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon)) \quad (4.27)$$

est un difféomorphisme local en $\{\lambda = \lambda(\varepsilon)\}$. De plus $\tau_i(\lambda(\varepsilon), \bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ pour $i = 2, \dots, c$ et $\tau_{c+1}(\lambda(\varepsilon), \bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon), \varepsilon) \neq 0$.

En regardant la définition de (F, G) , on voit que les cycles limites de $X_{\mu, \varepsilon}$ près du cycle limite $\gamma(\varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ près de 0, coupe la section $\Sigma_l =]u_1, u_2[$ aux racines de l'équation

$$\tilde{F}(t, \bar{b} - \bar{b}(\varepsilon), \bar{a}, \bar{b}, \lambda) - (\bar{a} - \bar{a}(\varepsilon)) = 0, \quad (4.28)$$

Pour $(\lambda, \bar{a}, \bar{b})$ près de $(\lambda(\varepsilon), \bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon))$. Comme l'application (4.27) est un difféomorphisme en λ pour chaque (\bar{a}, \bar{b}) , fixés on a que l'application

$$(\bar{a}, \bar{b}, \lambda) \rightarrow (\bar{a} - \bar{a}(\varepsilon), \bar{b} - \bar{b}(\varepsilon), \tau_2(\lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon), \dots, \tau_c(\lambda, \bar{a}, \bar{b}, \varepsilon))$$

est aussi un difféomorphisme local de \mathbb{R}^c au point $(\bar{a}(\varepsilon), \bar{b}(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et aussi, que le membre de gauche de (4.28)

est un déploiement versel avec pour paramètre versel

$$\bar{\mu} - \bar{\mu}(\varepsilon) = (\bar{a} - \bar{a}(\varepsilon), \bar{b} - \bar{b}(\varepsilon), \lambda - \lambda(\varepsilon)).$$

Bien sûr, pour $\varepsilon > 0$, on peut remplacer $\bar{\mu}$ par μ . Ceci conclut la preuve de la seconde déclaration dans le Théorème 4.1.11.

4.4 Exemple

On considère le système de Liénard suivant :

$$X_{(a,b,\nu),\varepsilon}^c \begin{cases} \dot{x} = y - (ax + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}) \\ \dot{y} = \varepsilon(b - xh(x,\nu)) \end{cases} \quad (4.29)$$

avec $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_c)$ et $h(x, \nu) = 1 + \nu_1 x^4 + \dots + \nu_c x^{4c}$. Un tel système de Liénard est dit de type $(3, 4c + 1)$.

Généralisant le résultat de [14], on veut trouver des cycles canard avec c paramètre de cassure de codimension quelconque $c \geq 2$. On prend (a, b, ν) dans un petit voisinage $A \times B \times C$ de $(0, 0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$ (plus tard on doit remplacer le paramètre ν par un éclatement : $(\bar{\nu}, \tau)$).

Pour commencer on considère en premier l'équation limite pour $a = \varepsilon = 0$. Cette équation limite est indépendante du paramètre (b, ν) . On a deux maxima en $p_1 = -1, p_2 = 1$. La valeur commune en ces deux maxima est égale à $\frac{1}{4}$ et la valeur au minimum 0 est égale à 0. Pour

tout $y \in]0, \frac{1}{4}[$, l'équation en $x : \{F_0(x) = y\}$ a quatre racines simples : $\pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - 4y}}$. Dans l'ordre de simplifier les notations, on utilise la variable $Y = \sqrt{1 - 4y} \in]0, 1[$ (les maxima sont à la hauteur $Y = 0$ et le minimum est à la hauteur $Y = 1$).

On va prendre les notations u, v pour dénoter les hauteurs des segments horizontaux respectivement sur la gauche et sur la droite de 0, définis maintenant en termes de Y et non pas y . Ces coordonnées sont différentes des précédentes par un difféomorphisme $y \rightarrow \sqrt{1 - 4y}$ de $]0, \frac{1}{4}[$ à $]1, 0[$, et maintenant $(u, v) \in]0, 1[^2$. Les extrémités du segment horizontal $\sigma_l(u)$ sont

$$x_1(u) = -\sqrt{1 + u} \quad \text{et} \quad x_2(u) = -\sqrt{1 - u}.$$

Les extrémités du segment horizontal $\sigma_r(v)$ sont

$$\bar{x}_1(v) = \sqrt{1 - v} \quad \text{et} \quad \bar{x}_2(v) = \sqrt{1 + v}.$$

On va dénoter par Γ_{uv} le cycle canard contenant les segments $\sigma_l(u)$ et $\sigma_r(v)$.

L'intégrale de la divergence lente est donnée par une expression de la forme $\int \frac{x(1-x^2)^2}{h(x, \nu)} dx$. On note que :

$$\frac{1}{h(x, \nu)} = \left(1 + \sum_{i=1}^c \nu_i x^{4i}\right)^{-1} = 1 - \sum_{i=1}^c \nu_i x^{4i} + O(\|\nu\|^2).$$

Sur tout intervalle fixé $[-x_0, x_0]$ et pour une certaine norme choisie $\|\cdot\|$ dans \mathbb{R}^c . Alors, il en résulte que :

$$\frac{x(1-x^2)^2}{h(x, \nu)} = p(x) - \sum_{i=1}^c \nu_i q_i(x) + O(\|\nu\|^2),$$

avec $p(x) = x(1-x^2)^2$ et $q_i(x) = x^{4i+1}(1-x^2)^2$ pour $i = 1, \dots, c$.

On introduit maintenant les polynômes $P(x) = \int p(s)ds$, $Q_i(x) = \int q_i(s)ds$. Ils sont donnés par $P(x) = \bar{P}(x^2)$ et $Q_i(x) = \bar{Q}_i(x^2)$, avec :

$$\begin{cases} \bar{P}(X) = \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3, \\ \bar{Q}_i(X) = \frac{1}{2(2i+1)}X^{2i+1} - \frac{1}{2i+2}X^{2i+2} + \frac{1}{2(2i+3)}X^{2i+3} \end{cases}$$

pour tout entier $i \geq 1$. Comme conséquence, on obtient que :

$$\begin{cases} I(u, \nu) = \bar{P}(1) - \bar{P}(1+u) + \sum_{i=1}^c \nu_i (\bar{Q}_i(1) - \bar{Q}_i(1+u)) + O(\|\nu\|^2) \\ J(u, \nu) = \bar{P}(1) - \bar{P}(1+v) - \sum_{i=1}^c \nu_i (\bar{Q}_i(1) - \bar{Q}_i(1+v)) + O(\|\nu\|^2) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} K(u, \nu) = \bar{P}(0) - \bar{P}(1-u) + \sum_{i=1}^c \nu_i (\bar{Q}_i(0) - \bar{Q}_i(1-u)) + O(\|\nu\|^2) \\ L(v, \nu) = \bar{P}(0) - \bar{P}(1-v) - \sum_{i=1}^c \nu_i (\bar{Q}_i(0) - \bar{Q}_i(1-v)) + O(\|\nu\|^2) \end{cases}$$

Pour $\nu = 0$, il est facile de vérifier que chaque fonction $I - J$ et $K - L$ a

0 comme valeur régulière, et ces deux fonctions sont divisibles par $u - v$.
Par le Théorème des Fonctions Implicites, il existe deux fonctions v_1, v_2 ,
avec les expansions suivantes :

$$\begin{cases} v_1(u, \nu) = u + \sum_{i=1}^c \nu_i X_i(u) + O(\|\nu\|^2) \\ v_2(u, \nu) = u + \sum_{i=1}^c \nu_i Y_i(u) + O(\|\nu\|^2) \end{cases} \quad (4.30)$$

elles sont \mathcal{C}^∞ pour $(u, \nu) \in]0, 1[\times C$, telles que :

$$\begin{cases} J(v_1(u, \nu), \nu) - I(u, \nu) = 0 \\ L(v_2(u, \nu), \nu) - K(u, \nu) = 0 \end{cases}$$

Mettons (4.30) dans les expressions de $I - J, K - L$, on obtient, pour
 $i = 1, \dots, c$:

$$\begin{cases} X_i(u) = 2(\bar{P}'(1+u))^{-1}(\bar{Q}_i(1+u) - \bar{Q}_i(1)) \\ Y_i(u) = 2(\bar{P}'(1-u))^{-1}\bar{Q}_i(1-u) \end{cases}$$

Prenons en compte que $\bar{P}'(X) = \frac{1}{2}(1-X)^2$, on a que :

$$\bar{P}'(1+u) = \bar{P}'(1-u) = \frac{1}{2}u^2.$$

Alors on peut simplifier les expressions ci-dessus à :

$$\begin{cases} X_i(u) = 4u^{-2}(\bar{Q}_i(1+u) - Q_i(1)) \\ Y_i(u) = 4u^{-2}\bar{Q}_i(1-u) \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, c$.

Le déploiement de la fonction noyau pour le système est donné par :

$$v_2(u, \nu) - v_1(u, \nu) = \sum_{i=1}^c \nu_i (Y_i(u) - X_i(u)) + O(\|\nu\|^2).$$

On a que : $Y_i(u) - X_i(u) = 4u^{-2}\xi_i(u)$ avec

$$\xi_i(u) = -\bar{Q}_i(1-u) - \bar{Q}_i(1+u) + \bar{Q}_i(1). \quad (4.31)$$

$u \in]0, 1[$, on peut prendre aussi comme déploiement de la fonction noyau :

$$\theta(u, \nu) = \sum_{i=1}^c \nu_i \xi_i(u) + O(\|\nu\|^2). \quad (4.32)$$

Notons que les fonctions $\xi_i(u)$ sont des polynômes en u . C'est pour obtenir de telles fonctions simples qu'on a choisi pour $h(x, \nu)$ un polynôme égal (la raison de restreindre les monômes d'ordre multiple de 4 vont apparaître plus tard).

Parenthèse sur les systèmes de Chebychev

On va rappeler quelques faits au sujet des systèmes de Chebychev pour être appliquer ici à la suite $\mathcal{S}_c = \{\xi_1(u), \dots, \xi_c(u)\}$. Voir les détails et les preuves dans [14].

Définition 4.4.1. Soit $\mathcal{S} = \{\xi_1(u), \dots, \xi_c(u)\}$ une suite de c fonctions analytiques définies sur un intervalle $]u_1, u_2[$. Pour chaque $i = 1, \dots, c$ on définit le déterminant Wronskien $W_i^{\mathcal{S}}(u) = \text{Det}\left(\frac{d^s}{du^s}\xi_l(u)\right)_{l=1, \dots, i}^{s=0, \dots, i-1}$ (bien sûr, $\frac{d^0}{du^0}\xi_l = \xi_l$). On dit que \mathcal{S} est un système de Chebychev de longueur c si pour tout $u \in]u_1, u_2[$ on a que : $W_1^{\mathcal{S}}(u) \neq 0, \dots, W_c^{\mathcal{S}}(u) \neq 0$. On dit que \mathcal{S} est un système de Chebychev de longueur c en $u_0 \in]u_1, u_2[$ si $W_1^{\mathcal{S}}(u_0) \neq 0, \dots, W_c^{\mathcal{S}}(u_0) \neq 0$ (dans ce cas \mathcal{S} est un système de Chebychev sur un certain intervalle ouvert contenant u_0).

Un système de Chebychev de longueur c , a un comportement similaire à la suite des monômes :

$$\{1, u, \dots, u^{c-1}\}.$$

Par exemple, on considère une famille :

$$f_{\nu}(u) = f(u, \nu) = \sum_{i=1}^c \nu_i \xi_i(u) + O(\|\nu\|^2),$$

avec $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_c) \in \mathbb{R}^c$ et $\|\cdot\|$ une certaine norme sur \mathbb{R}^c (on suppose que le terme $O(\|\nu\|^2)$ est uniforme sur tout sous-ensemble compact de $]u_1, u_2[$). Comme on veut se limiter au cas $\nu_c > 0$, on change

ν par un paramètre éclaté $\bar{\nu} = (\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_{k-1}, \tau)$ lié à ν par $\nu_i = \tau \bar{\nu}_i$ pour $i = 1, \dots, c-1$ et $\nu_c = \tau$. La famille $f_\nu(u)$ est remplacée par la famille :

$$\bar{f}_{\bar{\nu}, \tau}(u) = \frac{1}{\tau} f_\nu(u) = \sum_{i=1}^{c-1} \bar{\nu}_i \xi_i(u) + \xi_c(u) + O(\tau), \quad (4.33)$$

où le terme $O(\tau)$ est uniforme si $(u, \bar{\nu})$ est restreint à un sous-ensemble compact, on a le résultat suivant :

Proposition 4.4.2. *Soit $\mathcal{S} = \{\xi_1(u), \dots, \xi_c(u)\}$ un système de Chebyshev de longueur c sur $]u_1, u_2[$, avec $c \geq 2$. On considère une famille \mathcal{C}^∞ (4.33). Supposons que $(u_0, \tau) \in [\bar{u}_1, \bar{u}_2] \times [0, \tau_0]$, ou $[\bar{u}_1, \bar{u}_2] \subset]u_1, u_2[$ et $\tau_0 > 0$. Pour τ_0 suffisamment petit, il existe une application \mathcal{C}^∞ unique $(u_0, \tau) \in [\bar{u}_1, \bar{u}_2] \times [0, \tau_0] \rightarrow \bar{\nu}(u_0, \tau)$ telle que*

- (a) *La fonction $f_{\bar{\nu}(u_0, \tau), \tau}$ a un zéro d'ordre $c-1$ en u_0 .*
- (b) *Si on fixe τ et $\bar{\nu}_{c-1}$ à la valeur $\bar{\nu}_{c-1}(u_0, \tau)$, la famille $f_{\bar{\nu}, \tau}(u)$ définit un déploiement versel de la fonction $f_{\bar{\nu}(u_0, \tau), \tau}(u)$ en u_0 , avec pour paramètre versel*

$$(\bar{\nu}_1 - \bar{\nu}_1(u_0, \tau), \dots, \bar{\nu}_{c-2} - \bar{\nu}_{c-2}(u_0, \tau)) \sim (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{c-2}.$$

Si $c = 2$ la fonction $f_{\nu(u_0), \tau}$ a un zéro simple u_0 et elle est stable.

Fin de la parenthèse

Un système polynômial comme \mathcal{S}_k est en général un système de Che-

bychev presque en tout point u_0 . C'est une conséquence du résultat suivant :

Lemme 4.4.3. *On considère un système de fonctions rationnelles $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_c\}$, pour $c \geq 1$. On suppose que, pour $i = 1, \dots, c$, on a $f_i(u) = a_i u^{r_i} (1 + o(\frac{1}{u}))$ avec $a_i \neq 0$ et $r_i \in \mathcal{Q}$, tel que $r_1 < r_2 < \dots < r_c$. Alors, il existe $A \neq 0$, tel que le Wronskien $W_c^{\mathcal{F}}(u)$ est égal à $Au^{N_c} (1 + o(\frac{1}{u}))$ avec $A \neq 0$ et*

$$N_c = cr_1 + (c-1)(r_2 - r_1 - 1) + \dots + 2(r_{c-1} - r_{c-2} - 1) + (r_c - r_{c-1} - 1).$$

Démonstration. Si $c = 1$ on a rien à prouver. On suppose que $c \geq 2$. Si on écrit $f_i = \varphi g_i$ pour certaines fonctions rationnelles φ, g_1, \dots, g_c , on a que $W_c^{\mathcal{F}} = \varphi^c W_c^{\mathcal{G}}$, ou $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_c\}$. Cela provient de la formule récurrente :

$$f_i = \varphi g_i, \quad \frac{df_i}{du} = \varphi \frac{dg_i}{du} + \frac{d\varphi}{du} g_i, \quad \frac{d^2 f_i}{du^2} = \varphi \frac{d^2 g_i}{du^2} + 2 \frac{d\varphi}{du} \frac{dg_i}{du} + \frac{d^2 \varphi}{du^2} g_i, \dots,$$

pour $i = 1, \dots, c$.

On peut appliquer cette remarque à $\varphi = f_1$. On obtient que

$$W_c^{\mathcal{F}}(u) = a_1 u^{cr_1} (1 + o(\frac{1}{u})) W_{c-1}^{\mathcal{G}}(u)$$

ou \mathcal{G} est le $(c-1)$ -système $\left\{ \frac{d}{du} \left(\frac{f_2}{f_1} \right), \dots, \frac{d}{du} \left(\frac{f_c}{f_1} \right) \right\}$. Comme $\frac{d}{du} \left(\frac{f_i}{f_1} \right)$ est une fonction rationnelle telle que $\frac{d}{du} \left(\frac{f_i}{f_1} \right)(u) = \frac{a_i}{a_1} (r_i - r_1) u^{r_i - r_1 - 1} (1 +$

$o(\frac{1}{u})$), le système \mathcal{G} est similaire au système \mathcal{F} (avec $c-1$ à la place de c et $r_2 - r_1 - 1$ à la place de r_1). On peut alors répéter le même argument que ci-dessus au Wronskien $W_{c-1}^{\mathcal{G}}$. On obtient la formule désirée pour $W_c^{\mathcal{F}}(u)$, en répétant par récurrence cette argument. \square

Considérons le système $\mathcal{S}_c = \{\xi_1, \dots, \xi_c\}$ où les fonctions ξ_i sont données par (4.31). Comme \bar{Q}_i est un polynôme quelconque, on a que $\bar{Q}_i(X) = -\bar{Q}_i(-X)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\xi_i(u) = \bar{Q}_i(u-1) - \bar{Q}_i(u+1) + \bar{Q}_i(1).$$

La fonction $\xi_i(u)$ est un polynôme en u avec un terme $-\frac{1}{4}u^{2i+2}$ et aussi, le système $\mathcal{S}_c = \{\xi_1, \dots, \xi_c\}$ est une suite de polynômes d'ordre strictement croissant. Comme conséquence, on peut appliquer le Lemme 4.4.3 pour chaque Wronskien $\mathcal{W}_i^{\mathcal{S}_c}$ pour $i = 1, \dots, c$. De plus, comme $\mathcal{W}_i^{\mathcal{S}_c}$ est une fonction rationnelle, le Lemme 4.4.3, implique que cette fonction a un nombre fini de zéros dans \mathbb{R} et à fortiori sur l'intervalle $]0, 1[$. Finalement on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.4.4. *Pour chaque $c \geq 2$ le système \mathcal{S}_c est un système de Chebychev de longueur c pour chaque $u_0 \in]0, 1[\setminus \Sigma_c$, où Σ_c est un sous-ensemble de $]0, 1[$.*

On peut maintenant prouver le Théorème 4.1.13. Pour chaque $u_0 \in]0, 1[\setminus \Sigma_c$, on peut trouver un voisinage \mathcal{W}_{u_0} de $(\bar{u}_0, 0)$ dans $(]0, 1[\setminus \Sigma_c) \times$

\mathbb{R}^+ et une application $\mathcal{C}^\infty (u_0, \tau) \rightarrow \bar{\nu}(u_0, \tau)$ définie sur $(]0, 1[\setminus \Sigma_c) \times \mathbb{R}^+$, qui vérifie les conclusions de la Proposition 4.4.2. Par unicité, ces différentes applications sont collées dans une application définie sur $\mathcal{W} = \cup_{u_0} \mathcal{W}_{u_0}$. On prend $v(u_0, \tau) = v_1(u_0, \nu(u_0, \tau))$ avec $\nu(u_0, \tau) = (\tau \bar{\nu}_1(u_0, \tau), \dots, \tau \bar{\nu}_{c-1}(u_0, \tau), \tau)$ (v_1 est défini par (4.30)). Alors, une conséquence de la Proposition 4.4.2, l'application $(u_0, \tau) \rightarrow (v, \bar{\nu})$ satisfait les conclusions du Théorème 4.1.13.

Remarque 4.4.5. *Le choix de la fonction h a été fait pour avoir une vérification simple du fait que le système correspondant $\mathcal{S}_c = \{\xi_1, \dots, \xi_c\}$ soit génériquement un système de Chebychev : le fait que h se développe en termes monômes d'ordre multiple de 4 implique que le ξ_i sont des polynômes avec des ordres indépendants à $+\infty$, comme cela a été prouvé dans le Lemme 4.4.3. Comme on l'a vu, une conséquence facile de cette propriété d'indépendance est que le système \mathcal{S}_c est génériquement un système de Chebychev. Le choix des termes monômes d'ordre égal donne des fonctions polynômiales ξ_i , mais les ordres à $+\infty$ sont dépendants et on a pas une manière facile pour obtenir une propriété générique de Chebychev. Bien sûr, il serait intéressant de travailler avec un polynôme h de plus bas degré : $h(x, \nu) = 1 + \sum_{i=1}^c \nu_i x^i$. Il est raisonnable de penser que même pour ce choix le système correspondant $\mathcal{S}_c = \{\xi_1, \dots, \xi_c\}$ est aussi génériquement un système de Chebychev. Mais dans ce cas les fonctions ξ_i sont des polynômes en termes de $\sqrt{1+u}$ et $\sqrt{1-u}$. Elles ne sont définies (comme des fonctions réelles) en dehors de l'intervalle*

$] - 1, 1[$, et on ne peut pas les étudier directement à $+\infty$. Au moins, en calculant l'ordre des déterminants (Wronskiens) en $u = 0$, il est facile de prouver le résultat pour $c = 2, 3, 4$ (dans [14] l'exemple pour $c = 2$ a été obtenu, en utilisant le polynôme $h(x, \nu) = 1 + \nu_1 x + \nu_2 x^3$).

Conclusion

Tous les résultats obtenus dans le quatrième chapitre c'est à dire les Théorèmes 4.1.3, 4.1.11, 4.1.13 peuvent être appliqués même dans le cas où le système n'est pas un système de *Liénard* car un système quelconque dans le plan peut être localement mis sous une forme équivalente à un système de *Liénard*.

Le Théorème 4.1.3 sur la cyclicité fonctionne très bien quand on a que deux paramètres de cassure, pour n paramètres on calculera $2n$ intégrales de la divergence lente et les énoncés changent en conséquence. Le problème qu'on a rencontré c'est qu'à partir de $n \geq 3$ la méthode de Khovanskii[21] utilisée dans le Théorème 4.1.3 peut être appliquée, mais elle ne permet pas d'éliminer les fonctions exponentielles, donc le problème de cyclicité reste ouvert.

Bibliographie

- [1] E.BENOIT, J.L.CALLOT, F.DIENER, M.DIENER *Chasse au canard*, Collectanea Mathematica, 31-32 (1-3),37-119 (1981).
- [2] H.W.BROER, V.NAUDOT, R.ROUSSARIE *Catastrophe Theory in Dulac Unfoldings*, Ergod. Th. and Dynam Syst. 26 (2006) 1363-1397.
- [3] H.W.BROER, V.NAUDOT, R.ROUSSARIE, K. SALEH *Bifurcations of a predator-prey model with non-monotonic response function*, C.R. Acad.Sci.Paris Ser. 1,341 (2005), 601-604.
- [4] H.W.BROER, V.NAUDOT, R.ROUSSARIE, K. SALEH *Bifurcations of a predator-prey model with non-monotonic response function*, Regul.Chaoic Dyn. 11 (2006) n°2, 155-165.
- [5] M. CAUBERGH, DUMORTIER, R. ROUSSARIE *Alien limit cycles in rigid unfoldings of a hamiltonian 2-saddle cycle*, Com. on Pure and Applied Analysis, Vol. 6, no 1(2007) 1-21.
- [6] M. CAUBERGH, S. LUCA, F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE *Detecting alien limit cycles near a Hamiltonian 2-saddle cycle*. Discrete

Contin. Dyn. Syst. 25(2009), no. 4,1081-1108.

- [7] P. DE MAESSCHALK AND F. DUMORTIER *Canard solutions at generic turning points*, Trans. Amer. Math. Soc, **358** (2006), 2291–2334.
- [8] P. DE MAESSCHALK AND F. DUMORTIER *Time analysis and entry-exit relation near planar turning point*, Journ. Diff. Equa., Vol. **215**, (2005), 225–267.
- [9] P. DE MAESSCHALK, F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Cyclicity of common slow-fast cycles*, INDAG. Math.NS 22,No.3-4, 165-206 (2011).
- [10] F. DUMORTIER, R. ROUSSARIE AND R. ROUSSEAU *Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields*, Journ. Diff. Equa. vol. **110**, n°1, 86-133 (1994).
- [11] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Canard Cycles and Center Manifolds*, Memoirs of Amer. Math. Soc. Vol. 121, n° **577**, (1996), 1–100.
- [12] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Multiple Canard Cycles in Generalized Liénard Equations*, Journ. Diff. Equa. vol. **174**, (2001), 1–29.
- [13] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Bifurcations of relaxation oscillations in dimension two*, Disc. And Cont. Dyn. Sys. Vol. **19**, n°4, (2007), 631–674.

- [14] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Canard cycles with two breaking parameters*, Discrete Contin. Dyn. Sys. **17**, n°4, (2007), 787–806.
- [15] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Multi-Layer canard cycles and translated power functions*, Jour. Diff. Eq. ,**244**, (2008), 1329–1358.
- [16] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Abelian integrals and limit cycles*, J. Diff. Eq. n°1,11 (2006), 116-165.
- [17] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Smooth normal linearization of vector fields near line of singularities*. Qual. Th. Dyn. Syst. 9, no.1-2, 39-87, (2011) .
- [18] F. DUMORTIER AND R. ROUSSARIE *Birth of canard cycles*. Discrete. Contin. Dyn. Syst. Ser.S2 52009), no. 4,723-781.
- [19] F. DUMORTIER, D. PANAZZOLO, R. ROUSSARIE *More limit cycles than expected in Liénard equations*, (2007). Proceedings of A.M.S. Vol. 135, n°6, (2007) 1895-1904.
- [20] V. KALOSHIN *The existential Hilbert 16th problem and an estimate for cyclicity of elementary polycycles*, Invent. Math., **151**, no. 3, (2003), 451–512.
- [21] A.G. KHOVANSKII *Fewnomials*, Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska. Translations of Mathematical Mo-

- nographs, American Mathematical Society, Providence RI, **88** (1991), viii+139 pp.
- [22] HIROSHI KOKUBU, R. ROUSSARIE *Existence of singularly degenerate heteroclinic cycle in Lorenz system and its dynamic consequence* : Part 1, Volume in honor of S.N.Chow, J. Dynam. Differential Equations 16, n°2, 513-557 (2004).
- [23] C.LI, P.MARDESIC, R. ROUSSARIE *Perturbation of symmetric elliptic Hamiltonians vector fields of degree four*, J.D.E. 231 (2006)78-91.
- [24] CHENGZHI .LI, R. ROUSSARIE *The cyclicity of the elliptic segment loops of the reversible quadratic Hamiltonian systems under quadratic perturbations*, J. Diff. Eq. 205 (2004) 488-520.
- [25] L. MAHMOUDI AND R. ROUSSARIE *Canard cycles of finite codimension with two breaking parameters*, Qual. Th. of Dyn Systems 11, No. 1, 167-198(2012) Springer.Link.
- [26] P. MARDESIC, R. ROUSSARIE, C. ROUSSEAU *Modulus of Analytic classification for unfoldings of generic parabolic diffeomorphisms*, Moscou Mathematical Journal. Vol.4, number 2, (2004) 455-500.
- [27] M. GOLUBITSKY AND V. GUILLEMIN *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 209pp. (1973).

- [28] R. MOUSSU AND C. ROCHE *Théorie de Hovanskii et problème de Dulac*, Invent. Math., **105** n°2 (1991), 431–441.
- [29] D. PANAZZOLO, R. ROUSSARIE *Bifurcations of the cuspidal loop preserving the nilpotent singularity*, Mosc. Math. J. 5 n°1, 207-244 (2005).
- [30] R. ROUSSARIE *Bifurcations of Planar Vector Fields and Hilbert's sixteenth Problem*, Progress in Mathematics Vol. **164**, Birkhauser ed. (1998), 1–204.
- [31] R. ROUSSARIE *Putting a boundary to the space of Liénard Equations*, Discr. Dyn. Sys. Vol.17, Number 2(2007)441-448.
- [32] R. ROUSSARIE *Melnikov functions and Bautin Ideal*, Qualitative Th. of Dyn. Sys. Vol. 2, number 1 (2001), 67-78.
- [33] R. ROUSSARIE, D. SCHLOMIUK *The geometric structure of the class of planar quadratic differential systems*, Qualitative Th. of Dyn. Syst. 3 (2002), 93-120.
- [34] B. SMITS *Singular perturbations arising in Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields* ZAMM Z. ANGEW. MATH. Mech. 78 (1998), no. 2,133-136.
- [35] R. THOM *Structural stability and morphogenesis. An outline of a general theory of models*, Translated from the French by D.H. Fowler. With a foreword by C.H. Waddington. Second printing.

*W.A. Benjamin, Inc., reading, Mass.-London-Amsterdam, 348pp.
(1976).*