

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI
MOKHTAR-ANNABA**



**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

**Faculty of Sciences
Department of Mathematics**



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de doctorat

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques

REGULARISATION DE CERTAINES CLASSES DE PROBLEMES INVERSES LINEAIRES

Par:

Nabil Saouli

Sous la direction de :

Prof. Fairouz Zouyed

Devant le jury:

PRESIDENT:	Lahcen Chorfi	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	Faouzia Rebbani	Prof.	ESTI. ANNABA
EXAMINATEUR:	Nadjib Boussetila	Prof.	U. GUELMA
EXAMINATEUR:	Leila Alem	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR:	Ibtissem Zerouki	Prof.	U. B.M.ANNABA

Année: 2023

REMERCIEMENTS

Premièrement, je remercie ALLAH qui m'a aidé à réaliser ce travail de recherche.

Je tiens à remercier sincèrement mon directeur de thèse, Pr. Fairouz Zouyed, qui, s'est toujours montrée à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de cette thèse.

Je tiens également à remercier les membres de jury, d'avoir accepté de relire *mon* manuscrit, le professeur Lahcène Chorfi de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse, le professeur Faouzia Rebbani, le professeur Nadjib Boussetila de de Guelma, le profsseur Leila Alem et le professeur Ibtissem Zerouki de l'université de Annaba pour leur participation au jury.

Je tiens à remercier ma famille, mes amis et les autres camarades du Doctorat Mathématiques et Applications et les membres du laboratoire LMA.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

ملخص

نهدف من خلال هذه الأطروحة الى دراسة قسمين من المسائل العكسية والمعتلة.

القسم الاول مخصص لاعادة بناء البيانات الناقصة المتمثلة في المصدر والشرط الاولي لمسألة ذات معادلة تكافئية حيث نقترح لدراستها طريقة تيخونوف المعدلة.

القسم الثاني مخصص لدراسة مسألتين لتفاعل المنتشر. بالنسبة للمسألة الاولي و بهدف استكمال نقص الشرط الاولي اعتمدنا طريقة القيم الحدية المضافة المعدلة. فكرة الطريقة هي استبدال المسألة المعتلة بمسألة جيدة الطرح بحيث نستبدل الشرط النهائي بشرط غير موضعي بوسيط من اجل الحصول على حلول تقريبية مستقرة.

اما لدراسة المسألة الثانية وبهدف استكمال المعطيات الناقصة و المتمثلة في المصدر نقوم باعتماد طريقة الاقتطاع الطيفي حيث نقوم باعطاء تحليل نظري للمسألة المعتلة متبوع بأمثلة عددية.

الكلمات المفتاحية: مسائل سيئة الطرح , مسائل عكسية , طريقة التعديل لتيخونوف , طريقة القيم الحدية المضافة , الاقتطاع الطيفي.

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, on étudie deux classes de problèmes inverses en EDP.

- La première classe est consacrée à l'étude d'un problème parabolique abstrait mal posé. En se basant sur la méthode de régularisation de Tikhonov, on développe une stratégie de régularisation pour stabiliser le problème en question.

- Dans la deuxième classe, on étudie deux systèmes de réaction-diffusion mal posés. Dans le premier problème on s'intéresse à l'identification de la condition initiale à partir d'une donnée supplémentaire, pour régulariser le problème et neutraliser son caractère mal posé, on propose une variante de la méthode des conditions aux limites auxiliaires.

Pour le second problème et en se basant sur la méthode de troncature spectrale, on reconstruit le terme source et on établit des résultats de convergence. Chaque méthode est suivie par des tests numériques validant les résultats théoriques .

Mots clés : *Problèmes inverses, problèmes mal posés, systèmes de réaction-diffusion, méthode de régularisation de Tikhonov , méthode des valeurs aux limites auxiliaires modifiée, méthode de troncature spectrale.*

ABSTRACT

In this work we consider two classes of inverse problems.

- The first class is devoted to the study of the problem of determining an unknown source and an unknown initial condition in an abstract parabolic problem. To neutralize the instability of the problem a modified Tikhonov regularization method is proposed.
- In the second class, we study two inverse reaction-diffusion systems. For the first problem we propose a simple method, based on a non-local data perturbation, known as the auxiliary conditions method. By using this method we regularize the problem and we establish some convergence results. For the second problem, we suggest a regularization procedure based on the cut-off frequency method to construct the source term. Finally, we put end to this study by introducing some numerical examples.

Key words : *Inverse problems, ill-posed problems, reaction-diffusion systems, Tikhonov regularization method, nonlocal boundary value method, cut-off frequency method.*

Table des matières

Introduction	1
0.1 Thématique de la thèse	1
0.2 Contenu de la thèse	3
1 Préliminaires	4
1.1 Éléments de la théorie spectrale	4
1.1.1 Opérateurs linéaires bornés	4
1.1.2 Spectre et résolvante d'un opérateur non-borné	6
1.1.3 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts	7
1.2 Semi-groupes	10
1.2.1 Semi-groupes fortement continus	10
1.2.2 Semi-groupes analytiques	13
1.3 Problèmes inverses et régularisation	14
1.3.1 Problèmes inverses	14
1.3.2 Caractère mal-posé des problèmes inverses et régularisation .	15
1.4 Décomposition en valeurs singulières des opérateurs compacts	16
1.4.1 Régularisation	19
1.5 Systèmes de réaction diffusion	24
2 Régularisation de Tikhonov modifiée pour une classe de problèmes inverses pa-	25
 raboliques	
2.1 Formulation du problème	25
2.2 Préliminaires	26
2.3 Caractère mal-posé du problème inverse	27
2.4 Méthode de Tikhonov modifiée et résultats de convergence	30
2.5 Implémentation numérique	38
2.5.1 Discrétisation du problème direct	39
2.5.2 Tests numériques	40
3 Méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée pour une classe de sys-	50
 tème de réaction-diffusion mal-posé	
3.1 Position du problème	50
3.2 Résultats préliminaires fondamentaux	51
3.3 Instabilité du problème inverse	54
3.4 Méthode des valeurs aux limites auxiliaires modifiée	56
3.5 Implémentation numérique	61

4	Identification du terme source dans un système de réaction-diffusion	70
4.1	Formulation du problème	70
4.2	Instabilité du problème inverse	71
4.3	Stabilisation et approximation	73
4.4	Implementation numérique	75
4.4.1	Résolution numérique du problème direct	76
4.4.2	Tests numériques (Problème inverse)	80
	Conclusion et perspectives	94
	Bibliographie	95

NOTATIONS PRINCIPALES

Dans tout ce document nous avons utilisé autant que possible une notation unifiée.

En voici la forme générale qui sera utilisée sauf mentions contraires :

E : désigne l'espace de départ pour l'opérateur A qui est un espace de Banach.

F : désigne l'espace d'arrivé pour l'opérateur A qui est un espace de Banach.

H : un espace de Hilbert.

(\cdot, \cdot) : désigne le produit scalaire associé à l'espace H .

$\|\cdot\|$: désigne la norme associée à l'espace H .

$\mathcal{L}(E, F)$: l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de E dans F .

$\mathcal{L}(E)$: l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de E dans E .

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$: désigne la norme de la convergence uniforme.

$D(A)$: le domaine de A .

$N(A)$: le noyau de A .

$R(A)$: l' image de A .

$G(A)$: le graphe de A .

A^* : l'adjoint de l'opérateur A .

A^{-1} : l'inverse de l'opérateur A .

Introduction

0.1 Thématique de la thèse

Dans la nature, les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres interagissant entre eux. Pour représenter ces phénomènes physiques on utilise des modèles mathématiques. Ces modèles utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations constitue ce que l'on appelle le problème direct. Cela ne peut se faire que si tous les paramètres du système sont connus, les conditions initiales et aux limites, les paramètres intervenant dans les équations, ainsi que le domaine spatial. Lorsque l'une (ou plusieurs) des composantes du problème est manquante l'équation ne peut plus être résolue sans informations complémentaires et la résolution de l'équation n'est plus directe mais inverse.

La définition des problèmes inverses n'est pas simple. On peut les caractériser de façon stricte par des définitions mathématiques pour chaque problème. D'après J.B.Keller [59], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un met l'autre en cause. Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes à partir de la connaissance des effets. Ce problème est l'inverse du problème dit direct, consistant à déduire les effets à partir de la connaissance des causes, ce à quoi nous sommes plus souvent habitués [60].

Du point de vue mathématique, ces problèmes (inverses) se répartissent en deux grandes classes. D'une part, il y a les problèmes linéaires qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu ou à la résolution d'un système dans le cas discret. Le recours à l'analyse fonctionnelle et à l'algèbre linéaire permet d'obtenir des résultats précis et des algorithmes efficaces. D'autre part, il y a les problèmes non-linéaires, qui sont le plus souvent des questions d'estimation de paramètres dans des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Les problèmes non-linéaires peuvent se diviser en deux catégories selon la nature du paramètre qu'on cherche à estimer (un vecteur ou une fonction).

Dans la pratique la problématique inverse constitue une thématique extrêmement

vaste, présente dans de nombreux domaines qui peuvent être très différents les uns des autres, on peut citer par exemple l'identification des sources de pollution à partir d'un faible nombre de mesures de concentrations, en sismologie : localiser l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre, en météorologie : l'évolution de la météo à plus au moins long terme repose sur l'identification des conditions initiales grâce à l'ensemble des données disponibles : les données d'observation (température, vent,...) et les données issues de précédentes prévisions météorologiques, l'imagerie médicale est aussi l'un des domaines les plus impliqués dans ce type de problèmes.

Les problèmes inverses constituent donc l'un des sujets où le lien entre la théorie mathématiques et la pratique est le plus fort. Toutefois, malgré son omniprésence dans nombreux domaines, la résolution des problèmes inverses est une problématique qui reste encore aujourd'hui très complexe. Cette complexité provient du caractère mal posés, que partagent les problèmes inverses par opposition aux problèmes directs. Jacques Hadamard a proposé dans son ouvrage célèbre [98] une définition des problèmes bien-posés, qui rassemble les conditions pour que la résolution de ceux-ci soit robuste. Un problème est dit bien-posé au sens d'Hadamard lorsque : la solution existe, elle est unique et stable, c'est à dire elle dépend continûment des données. Si l'une de ces trois conditions n'est pas satisfaite, le problème est considéré mal-posé. Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution (procédé classique en mathématiques). La non-unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori). L'absence de la stabilité de la solution peut engendrer et amplifier un taux d'erreur dans la résolution, en particulier en vue d'une résolution numérique. En effet, si la solution ne dépend pas continûment des données d'entrée du problème, cela signifie qu'une faible variation de ces données peut générer d'importantes variations dans la solution.

Une autre difficulté dans la résolution des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, ce qui se traduit par le fait que dans l'étude de chaque problème inverse on a recours à des éléments spécifiques à ce dernier. Ceci balaie donc l'idée d'une grande méthode "miracle" valable pour tous les problèmes inverses. Il existe toutefois, quelques techniques et méthodes pour traiter ces problèmes et surmonter leurs difficultés, parmi ces méthodes on a les procédures de régularisation. La méthode de régularisation due initialement à Tikhonov [99] consiste à remplacer le problème initial mal posé par un autre proche du premier et bien posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de la stabilité. Dans la littérature mathématiques différentes méthodes de régularisation ont été proposées pour résoudre les problèmes inverses mal-posés. On cite par exemple la méthode de régularisation de Tikhonov [99], la méthode de quasi-réversibilité (Q.R. method) introduite par Lattes et Lions [68] et développée dans les travaux de L. E. Payne [83], [84], R.E Showaler [95], [96], [97], K. Miller [77], la régularisation par conditions non locales (Q.B.V. method), introduite par Abdulkarimov [1] et utilisée par P.N. Vabishchevich [102], I.V. Melnikova et al ([56], [75], [76]), D.N Hào [51], R.E. Showalter ([97], 1982) , G.W. Clark([19], 1994) et V.K. Ivanov ([56], 1995) ,

la méthode itérative alternative proposée par Kozlov et Maz'ya ([64], [63]).

Dans le présent travail, nous traitons certaines classes de problèmes inverses linéaires, en se basant sur des méthodes de régularisation

0.2 Contenu de la thèse

La thèse est composée d'une introduction et de quatre chapitres. Elle est organisée comme suit :

- Dans l'introduction on décrit le contexte de l'étude abordée, développe la problématique et cite certaines méthodes de régularisation proposées dans la littérature, pour traiter les problèmes inverses mal-posés.
- Dans le premier chapitre, on introduit quelques résultats et théorèmes d'analyse fonctionnelle nécessaires pour l'étude, ainsi que certains outils d'analyse des problèmes inverses et mal-posés, indispensables à une bonne compréhension du domaine de recherche abordé.
- Le deuxième chapitre traite un problème inverse engendré par une équation parabolique. En utilisant une procédure de régularisation basée sur la méthode de Tikhonov, nous reconstruisons les données manquantes (condition initiale et terme source) et nous établissons certaines estimations d'erreur. Le chapitre se termine par des exemples numériques justifiant les résultats théoriques. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication de catégorie A dans la revue : *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 181-204. [93]
- Dans le troisième chapitre, nous étudions un problème mal posé engendré par un système de réaction diffusion. En se basant sur une variante de la méthode des valeurs aux limites auxiliaires, il régularise le problème et établit certains résultats de convergence. L'étude est achevée par des tests numériques validant les résultats théoriques.
- Le chapitre quatre est consacré à la régularisation d'un problème inverse d'identification de source dans un système de réaction diffusion. Pour l'étude numérique du problème direct, nous adoptons la méthode des différences finies et pour l'étude du problème inverse, nous utilisons la méthode de troncature spectrale, qui nous permet de construire une solution approchée stable du problème en question. Les résultats théoriques sont suivis par des tests numériques illustrant la précision et l'efficacité de la méthode utilisée.

La thèse est clôturée par une conclusion et des perspectives. Le présent travail est une extension des travaux [26]-[27] dans lesquels des systèmes de diffusion ont été traités.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle quelques définitions, notions et résultats qui seront utilisés par la suite dans notre étude ou qui seront nécessaires à une bonne compréhension de celle-ci, pour plus détails nous renvoyons le lecteur aux références : [15], [25], [31], [32], [36], [60], [65], [85].

1.1 Éléments de la théorie spectrale

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.1 *L'opérateur $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ est dit*

- *symétrique lorsque $(Au, v) = (u, Av), \forall u, v \in D(A)$,*
- *aut-adjoint si $A = A^*$, i.e $D(A) = D(A^*)$ et $(u, Av) = (Au, v), \forall u, v \in D(A)$.*

Définition 1.1.2 *On dit qu'un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est borné s'il est continu, autrement dit :*

$$\exists c > 0, \forall x \in E, \|Ax\| \leq c\|x\|.$$

Théorème 1.1.1 *(Théorème d'isomorphisme de Banach)*

Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijectif alors $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Proposition 1.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Si $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, alors $I - A$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

Proposition 1.1.2 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall u, v \in H, (Au, v) = (u, A^*v)$. De plus,

1. $\|A^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|A\|_{\mathcal{L}(H)}$,
2. si A est inversible dans $\mathcal{L}(H)$, alors A^* est aussi inversible dans $\mathcal{L}(H)$ et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Définition 1.1.3 Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est appelé un projecteur lorsque $P^2 = P$. Si de plus $P^* = P$, on dit que P est un projecteur orthogonal.

Proposition 1.1.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors pour tout $u \in H$,

1. $(Au, u) \in \mathbb{R}$,
2. $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup\{(Au, u) : \|u\| = 1\}$.

Définition 1.1.4 Un opérateur $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ est dit fermé si son graphe est fermé dans $E \times F$, i.e, pour toute suite $(x_n) \subset D(A)$ telle que $x_n \rightarrow x \in E$ et $Ax_n \rightarrow y \in F$. Alors $x \in D(A)$ et $y = Ax$.

Un opérateur linéaire est dit fermable s'il admet une extension fermée.

Théorème 1.1.2 (Théorème du graphe fermé)

Soit A un opérateur linéaire défini de E dans F , alors A est continu si et seulement s'il est fermé.

Théorème 1.1.3 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $A : D(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur fermé, avec $\overline{D(A)} = H_1$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $R(A)$ est fermé.
- (ii) $R(A^*)$ est fermé.
- (iii) $R(A) = N(A^*)^\perp$.
- (iv) $R(A^*) = N(A)^\perp$.

1.1.2 Spectre et résolvante d'un opérateur non-borné

Définition 1.1.5 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur fermé à domaine dense.

- On appelle spectre de A la partie de \mathbb{C} défini par

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(H)\}.$$

Les éléments de $\sigma(A)$ sont appelés valeurs spectrales de A .

- L'ensemble $\mathbb{C} - \sigma(A)$ est appelé ensemble résolvant de A et est noté $\rho(A)$, qui est un ouvert de \mathbb{C} .

Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante de A au point λ par $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Pour tout $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a la formule de l'identité de la résolvante ;

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\mu - \lambda)(R_\lambda(A) - R_\mu(A)).$$

- L'application $\lambda \rightarrow R_\lambda(A)$ ($\lambda \in \rho(A)$) est analytique sur $\rho(A)$.
- L'opérateur $(\lambda I - A)$ peut ne pas être injectif et dans ce cas λ est une valeur propre.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre ponctuel de A et est noté $\sigma_p(A)$.

Un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$ est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

La multiplicité de la valeur propre λ est la dimension de $N(\lambda I - A)$.

- Si $\lambda \in \sigma(A) - \sigma_p(A)$, alors $R(\lambda I - A)$ est injectif mais non surjectif.

Deux cas se présentent :

- ▷ Si $R(\lambda I - A)$ n'est pas dense, on dit que $\lambda \in \sigma_r(A)$ le spectre résiduel de A .
- ▷ Si $R(\lambda I - A)$ est dense, on dit que $\lambda \in \sigma_c(A)$ le spectre continu de A .

Théorème 1.1.4 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors

1. $\sigma(A) \in \mathbb{R}$,
2. $\sigma_r(A) = \emptyset$,

3. si A est coercif i.e il existe $m > 0$ telle que

$$\forall x \in D(A), (Ax, x) \geq m\|x\|^2,$$

alors $\sigma(A) \subset [m, +\infty[$.

Théorème 1.1.5 Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Alors

- 1) $m, M \in [-\|A\|, \|A\|]$,
- 2) $m, M \in \sigma(A)$,
- 3) $\sigma(A) \subset [m, M]$,
- 4) $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$, en particulier $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Corollaire 1.1.1 Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors

$$\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Proposition 1.1.4 Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint, $\sigma(A)$ le spectre de A . Pour $f, g \in C(\sigma(A), \mathbb{K})$, on a :

- 1) $(\lambda f + \mu g)(A) = \lambda f(A) + \mu g(A)$,
- 2) $(f.g)(A) = f(A).g(A)$,
- 3) $(f(A))^* = \overline{f(A)}$,
- 4) $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$,
- 5) l'opérateur $f(A)$ est auto-adjoint positif si et seulement si $f(A) \geq 0$.

1.1.3 Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Un résultat classique d'algèbre linéaire affirme qu'en dimension finie tout opérateur auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormée. Le but de cette section est de généraliser ce résultat en dimension infinie mais, pour ce faire, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse de compacité et donc de considérer des opérateurs auto-adjoints compacts.

Définition 1.1.6 Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que A est compact si $\overline{A(B_E)}$ est une partie compacte de F , où B_E est la boule unité fermée de E .

On note par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F .

▷ Dans le cas où $E = F$, on note simplement cet espace par $\mathcal{K}(E)$.

▷ L'ensemble des opérateurs compacts $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposition 1.1.5 Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

1. A est compact,
2. pour tout ensemble B borné, $\overline{A(B)}$ est compact,
3. si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E , alors $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Proposition 1.1.6 Soient E, F et G trois espaces de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$, alors si A ou B est compact, $A \circ B \in \mathcal{K}(E, G)$.

Corollaire 1.1.2 Si E est de dimension infinie. Alors l'opérateur identité n'est pas compact.

Définition 1.1.7 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit de rang fini si $\dim R(A) < \infty$.

Remarque 1.1.1 Tout opérateur de rang fini est compact : $\overline{A(B_E)}$ est un fermé borné de l'espace de dimension fini $R(A)$ est donc compact.

Proposition 1.1.7 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Alors $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ si et seulement s'il existe une suite $A_n \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ de rang fini telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = 0.$$

Théorème 1.1.6 (Spectre d'un opérateur compact)

Soit $A \in \mathcal{K}(H)$, avec $\dim(H) = \infty$. Alors, on a :

1. $0 \in \sigma(A)$,
2. $\sigma(A) - \{0\} = \sigma_p(A) - \{0\}$,

3. l'une des situations suivantes :

- ou bien $\sigma(A) = \{0\}$,
- ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ est fini,
- ou bien $\sigma(A) - \{0\}$ est une suite qui tend vers zéro.

Définition 1.1.8 Soit $(H, (\cdot, \cdot))$ un espace de Hilbert. Une famille $((e_i)_{i \in I})$ de vecteurs de H est dite

1. orthonormée si $(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i, j \in I$, tels que $i \neq j$, et $(e_i, e_i) = 1$ pour tout $i \in I$,
2. totale si $\text{vect}((e_i)_{i \in I})$ (le sous espace engendré par $(e_i)_{i \in I}$) est dense dans H .
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H .

Théorème 1.1.7 Tout espace de Hilbert séparable i.e (admettant un sous ensemble dense et dénombrable) admet une base hilbertienne.

Théorème 1.1.8 (Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints)

Soit H un espace de Hilbert séparable. Soit $A \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors H admet une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ formée de vecteurs propres de A , de sorte que

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n) e_n, \quad \forall x \in H,$$

où λ_n est la valeur propre associée à e_n pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.1.9 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné. On dit que A est à résolvante compacte s'il existe $\lambda \in \rho(A)$ tel que $R_\lambda(A)$ soit compacte.

► Le résultat suivant nous permet de déterminer le spectre des opérateurs dont la résolvante est compacte. Plus précisément, il affirme que le spectre de tels opérateurs est discret. (valeurs propres isolées et espaces propres de dimension finie).

Théorème 1.1.9 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte. Alors il existe une base hilbertienne dans H , $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset D(A)$ et une

suite réelle $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $|\mu_n| \rightarrow \infty$ et $A\varphi_n = \mu_n\varphi_n$, pour $n \geq 1$.

De plus

$$D(A) = \left\{ u \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |(u, \varphi_n)|^2 < \infty \right\},$$

$$Au = \sum_{n \geq 1} \mu_n (u, \varphi_n) \varphi_n.$$

1.2 Semi-groupes

Cette classe d'opérateurs développée dans les années quarante, permet de résoudre plusieurs types d'équations aux dérivées partielles.

Notons par E l'espace de Banach et $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est une famille d'opérateurs linéaires bornés définis sur E .

1.2.1 Semi-groupes fortement continus

Définition 1.2.1 La famille $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est appelée *semi-groupe* si on a :

1. $T(0) = I$,
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, T(t+s) = T(t)T(s)$.

Définition 1.2.2 Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t > 0}$ est dit *fortement continu*, et est noté C_0 -semi-groupe, si $T(t)$ est continue pour la topologie forte d'opérateurs sur $\mathcal{L}(E)$, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \text{ pour tout } x \in E.$$

Proposition 1.2.1 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe. Alors il existe des constantes réelles $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ telle que

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}.$$

- Si $\omega = 0$, $M = 1$, $\{T(t)\}_{t > 0}$ est dit C_0 -semi-groupe de contractions.

Corollaire 1.2.1 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semi-groupe. Alors pour tout $x \in E$, $t \rightarrow T(t)x$ est une fonction continue de \mathbb{R}^+ dans E , i.e pour tout $t_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(t)x - T(t_0)x\| = 0.$$

Définition 1.2.3 *Le générateur infinitésimal du C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est l'opérateur A défini par :*

$$D(A) := \{x \in E : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ existe dans } E\},$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}, \quad x \in D(A).$$

$D(A)$ est non vide ($0 \in D(A)$) et est un sous-espace vectoriel de E . A est clairement linéaire de $D(A)$ dans E .

Proposition 1.2.2 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ dans E . Alors on a les propriétés suivantes :*

$$(i) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in E, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x,$$

(ii) $\forall t \geq 0, \quad \forall x \in E$, on a :

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A), \quad \text{et} \quad A \left(\int_0^t T(s)x ds \right) = T(t)x - x, \quad \text{pour tout } 0 \leq s \leq t < \infty,$$

(iii) $\forall t \geq 0, \quad \forall x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et $t \rightarrow T(t)x$ est différentiable sur \mathbb{R}^+ avec

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

(iv) $\forall s, t \geq 0, \quad \forall x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_0^t T(\tau)Ax d\tau,$$

(v) A est un opérateur fermé à domaine dense.

Proposition 1.2.3 *Soit A de domaine $D(A)$ le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Alors on a :*

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)} = E,$$

où $D(A^n)$ est le domaine de A^n .

Définition 1.2.4 *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est dit semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés si*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

Remarque 1.2.1 Soit A un opérateur linéaire borné sur E . Alors

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

► Le théorème suivant détermine la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A soit le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Hille-Yosida)

Un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, sur E si et seulement si

- (1) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$,
- (2) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Corollaire 1.2.2 Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contractions $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur E . Alors

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\} \subset \rho(A),$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$,

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda}.$$

Corollaire 1.2.3 Un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur E , vérifiant $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\omega t}$ si et seulement si

- (1) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$,
- (2) $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in]\omega, \infty[$, on a

$$\|R_\lambda(A)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}.$$

Pour un semi-groupe fortement continu quelconque, on donne le théorème suivant

Théorème 1.2.2 Un opérateur linéaire A de domaine $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ sur E vérifiant $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}$ si et seulement si

(1) A est fermé et $\overline{D(A)} = E$,

(2) $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ et pour tout $\lambda \in]\omega, \infty[$, on a

$$\|(R_\lambda(A))^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Il est important de préciser qu'il existe de nombreuses définitions équivalentes pour les opérateurs sectoriels. On utilisera ici celle donnée dans [45].

Définition 1.2.5 *Un opérateur linéaire A sur E est dit sectoriel s'il est fermé et s'il existe $\theta \in]0; \pi[$ tel que $\sigma(A) \subset \overline{S_\theta}$ et $\sup_{\lambda \in \mathbb{C} - \overline{S_\theta}} \|(\lambda A - \lambda I)^{-1}\| < \infty$,*

S_θ est le secteur défini par

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \theta\}.$$

Corollaire 1.2.4 .[52]

(1) Si A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach, alors A est sectoriel,

(2) si A est un opérateur auto-adjoint à domaine dense dans un espace de Hilbert, et s'il est borné inférieurement, alors A est sectoriel.

1.2.2 Semi-groupes analytiques

Définition 1.2.6 Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on dit que l'application $S : S_\theta \cup \{0\} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est un semi-groupe analytique si

1. $S(0) = Id$,
2. $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$ pour tout z_1, z_2 dans S_θ ,
3. pour tout $x \in E$, $S(z)x$ est continue en 0,
4. l'application $z \rightarrow S(z)$ est analytique dans S_θ .

Théorème 1.2.3 Si A est un opérateur sectoriel, alors $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique noté $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$, tel que

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

où Γ est un contour dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ avec $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ quand $|\lambda| \rightarrow +\infty$ pour certain $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

1.3 Problèmes inverses et régularisation

1.3.1 Problèmes inverses

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également en quelques sortes le contraire d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire et l'observer.

Étant donné un phénomène physique, l'analyse de ce dernier consiste en général à déterminer une grandeur non directement observable $x(r)$ à partir d'un ensemble fini de mesures d'une grandeur observée $y(u)$ dépendant de paramètre θ selon le modèle

$$M(y(u), x(r), \theta) = 0. \quad (1.1)$$

Parfois le modèle est explicite i.e.,

$$y(u) = M(x(r), \theta).$$

Nous pouvons dire que

- connaissant M, θ, x , le calcul de y est un problème direct,
- connaissant M, θ, y , le calcul de x est un problème inverse,
- connaissant M, x, y , le calcul de θ est un problème inverse d'identifications de paramètres.

Si M est un opérateur linéaire, la relation peut s'écrire soit comme

$$y = Mx,$$

où M est une matrice dans le cas discret, soit comme une intégrale de Fredholm dite de première espèce

$$y(u) = \int x(r)h(r, u)dr,$$

où $h(r, u)$ est appelé noyau de Green.

Dans le présent travail, on s'intéresse à certaines classes de problèmes inverses linéaires. Afin de mieux cerner les difficultés inhérentes à la résolution des problèmes inverses, on introduit la notion de problème bien et mal-posé.

1.3.2 Caractère mal-posé des problèmes inverses et régularisation

En étudiant les équations aux dérivées partielles et leur résolution, Jacques Hadamard [46] a proposé une définition des problèmes bien posés, qui rassemble les conditions pour que leur résolution de soit robuste.

Soient X et Y deux espaces munis de topologies, on considère le problème abstrait suivant :

$$Ku = y, \quad (1.2)$$

où $y \in Y$,

u est cherché dans X .

On dira que le problème (1.2) est bien posé au sens d'Hadamard si et seulement si :

- i) pour tout y de Y , il existe une solution à (1.2),
- ii) cette solution est unique dans X ,
- iii) la dépendance de u vis à vis de y est continue (pour les topologies de X et Y).

► On voit que le caractère bien posé d'un problème qualifie en fait le triplet (K, X, Y) .

De façon évidente : la condition i) impose que K soit surjectif : $K(X) = Y$,

la condition ii) impose que K soit injectif, si bien que l'ensemble des deux conditions nécessite que K soit inversible. La dernière condition n'est autre que la continuité de l'opérateur inverse de K pour les topologies de X et Y .

Un problème ne satisfaisant pas les trois conditions d'Hadamard est dit mal posé.

En pratique les problèmes inverses sont mal posés : ils ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voire les trois ensembles. Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une grande difficulté. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution. Par exemple, dans le cas d'un système linéaire surdéterminé $Kx = y$, en redéfinissant le problème avec moins d'équations ou en cherchant la solution au sens des moindres carrés.

Deuxièmement, la non-unicité est un problème un peu plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori). Troisièmement, le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue

d'une résolution approchée ou numérique.

Dans ce qui suit, on expose le caractère mal-posé par l'exemple suivant.

Exemple.

Soit le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{1}{n} \sin(nx) = g_n(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

il est clair de voir que $u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny)$ est la solution du problème (1.3).

On remarque que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

par contre

$$\sup |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, \text{ pour tout, } y > 0.$$

Ce qui prouve que le problème est mal-posé.

Pour traiter un problème inverse il convient de disposer d'éléments précis pour évaluer et juger les instabilités causées par l'opérateur associé au problème considéré.

Pour ce but, on introduit la notion de décomposition en valeurs singulières, qui généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints.

1.4 Décomposition en valeurs singulières des opérateurs compacts

Soient X et Y deux espaces de Hilbert séparables. Considérons le problème inverse

$$Kx = y, \quad (1.4)$$

où $K : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire compact.

Définition 1.4.1 Soit $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur compact. On appelle valeur singulière de l'opérateur K , le nombre réel positif $\mu = \sqrt{\lambda}$, où λ est la valeur propre de l'opérateur auto-adjoint compact K^*K .

Théorème 1.4.1 Soient $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur compact et $(\mu_n)_n$ la suite des valeurs singulières de K . Alors il existe deux systèmes orthonormés $(\varphi_n) \subset X$ et $(\psi_n) \subset Y$ tels que

$$K\varphi_n = \mu_n\psi_n, \text{ et, } K^*\psi_n = \mu_n\varphi_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $u \in X$, on a la décomposition suivante

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n)\varphi_n + Pu,$$

où P désigne la projection de X sur $N(K)$ (noyau de K) et

$$Ku = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(u, \varphi_n)\psi_n.$$

$(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)$ est appelé système singulier de K .

Remarque 1.4.1 Le comportement de valeurs singulières aide à déterminer le degré de complexité du problème mal-posé :

- Si la suite des valeurs singulières $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède un comportement polynomial, i.e.

$$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \sim \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}^{-\beta}, \quad \beta > 0,$$

le problème est dit moyennement mal-posé.

- Si la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît exponentiellement vers zéro, i.e.

$$\mu_n \leq (e^{-n^\beta}), \quad \beta > 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

on parlera d'un problème sévèrement mal-posé.

On présente dans ce qui suit un exemple d'un opérateur pour lequel on peut déterminer les valeurs singulières.

Exemple.

Soit $A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$, l'opérateur défini par

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Pour tout $y \in L^2(0, 1)$, on a

$$(Ax, y) = \int_0^1 \int_0^t x(s)y(t)dsdt = \int_0^1 \left(\int_s^1 y(t)dt \right) x(s)ds = (x, A^*y.)$$

D'où l'opérateur adjoint est donnée par

$$A^*y(t) = \int_t^1 x(s)ds.$$

Pour tout $u \in L^2(0, 1)$, on définit

$$A^*Au(t) = \int_t^1 \int_0^s u(\tau)d\tau ds.$$

Il est alors possible de démontrer que le système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ associé à cet opérateur est défini par

$$\mu_n = \frac{2}{(2n-1)\pi}, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right), \quad \psi_n(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi x\right),$$

on remarque que $(\mu_n) \sim (\frac{1}{n})$, la décroissance des valeurs singulière est polynomiale, donc le problème est moyennement mal-posé.

Théorème 1.4.2 (Picard, [65])

Soit $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire compact de système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)$.

L'équation

$$Kx = y$$

est résoluble si et seulement si $y \in N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$ et vérifie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(y, \psi_n)_Y|^2 < \infty.$$

Dans ce cas

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} |(y, \psi_n)_Y| \varphi_n + x_0, \quad x_0 \in N(A) \tag{1.5}$$

est la solution de l'équation (1.4)

Le théorème de Picard illustre bien la nature mal-posé de l'équation (1.4). En effet, un second membre perturbé

$$y^\delta = y + \delta\psi_n,$$

donne la solution

$$x^\delta = x + \delta \frac{\varphi_n}{\mu_n}.$$

Alors le rapport

$$\frac{\|x^\delta - x\|_X}{\|y^\delta - y\|_Y} = \frac{1}{\mu_n},$$

veut dire que l'erreur sur la solution est amplifiée par l'inverse de la plus petite valeur singulière par rapport à l'erreur sur la donnée. Dans le cas où cette petite valeur singulière est petite, cette amplification peut devenir dramatique, ce qui explique l'instabilité rencontrée lors de la résolution du problèmes mal-posés.

1.4.1 Régularisation

Pour résoudre les problèmes inverses et contourner leurs instabilités, on a recours à l'utilisation des méthodes dites de régularisation dont le principe consiste à substituer au problème mal-posé une suite de problèmes bien-posés dépendant d'un paramètre dit de régularisation. Les solutions approchées de ces derniers deviennent stables vis à vis des données perturbées.

Avant d'introduire certaines méthodes de régularisation utilisées dans le présent travail, on commence par introduire la notion de schéma régularisant.

Schéma régularisant

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire.

Idéalement, on souhaite utiliser une donnée $y \in H_2$ pour trouver la solution du problème (1.4). d'un point de vu pratique, ce n'est pas malheureusement toujours possible, seule une mesure approximative de y est disponible. Donc, connaissant la donnée y à une erreur δ près, notée y^δ , i.e.,

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta,$$

on souhaite résoudre le problème

$$Kx^\delta = y^\delta. \tag{1.6}$$

La résolution de l'équation (1.6) préserve des difficultés de stabilité liée à l'opérateur inverse K^{-1} . Pour pallier à ce problème une approximation R_α est introduite, telle que $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ soit une solution approchée stable du problème (1.6).

Définition 1.4.2 (*Stratégie de régularisation*)

Soient X et Y deux espaces normés, $K : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné injectif. La famille des opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : Y \rightarrow X, \alpha > 0$, telle que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Kx = x, \quad x \in X \tag{1.7}$$

est appelée «Schéma régularisant» de l'opérateur K , α est le paramètre de régularisation.

Remarque 1.4.2 Pour un opérateur compact K en dimension infinie :

- la famille d'opérateurs (R_α) ne peut pas être uniformément bornée par rapport à α , autrement dit, il existe une suite (α_k) telle que $\|R_{\alpha_k}\| \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$.
 - La convergence $R_\alpha y \rightarrow K^{-1}y$ n'est pas uniforme, c'est à dire qu'il n'y a pas de convergence de $R_\alpha K$ vers l'identité au sens de la norme des opérateurs.
- Soit $x_\alpha^\delta = R_\alpha y^\delta$ une approximation de la solution x du problème $y = Kx$. On a

$$\|x_\alpha^\delta - x\| = \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y + R_\alpha Kx - x\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Kx - x\|.$$

Cette inégalité montre que l'erreur se compose de deux termes :

- (i) Un premier terme dû aux erreurs sur la donnée multiplié par $\|R_\alpha\|$, qui tend vers l'infini lorsque $\alpha \rightarrow 0$.
- (ii) Un second terme dû à l'approximation de la solution exacte et qui tend vers zéro lorsque α tend vers zéro. Nous voyons donc bien la nécessité d'adapter le paramètre de régularisation au niveau de bruit présent dans les données.

- Une stratégie de régularisation peut se concevoir de deux façon :
 - Une stratégie de régularisation à priori : si l'on possède une estimation du niveau de bruit, on peut en déduire comment il faut choisir $\alpha = \alpha(\delta)$, dans ce cas le choix de α ne dépend pas de la donnée perturbée.
 - Une stratégie de régularisation à posteriori : elle consiste à estimer au cours de calcul la valeur convenable du paramètre, en utilisant les données disponibles, $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter ([35],[50]).
- Soit K est un opérateur compact dont le système singulier est $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. L'idée de régularisation dans ce cas est de régulariser le problème en amortissant ou en filtrant l'influence du rapport $\frac{1}{\mu}$ dans l'identité (1.5).

En effet on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.3 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire injectif compact de système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et soit $q : (0, \infty) \times (0, \|K\|) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante positive $C(\alpha)$, vérifiant

$$|q(\alpha, \mu)| \leq C(\alpha)$$

et

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1,$$

avec $0 \leq \mu \leq \|K\|$. Alors la famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \rightarrow H_1, \alpha > 0$, définis par :

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} q(\alpha, \mu_n)(y, \psi_n), \quad y \in H_2,$$

décrit un schéma régularisant avec $\|R_\alpha\| \leq C(\alpha)$.

Donc $q(\alpha, \mu)$ joue le rôle d'un filtre : on la souhaite proche de 1 si μ est grand, et telle que $\frac{q(\alpha, \mu)}{\mu}$ reste borné lorsque $\mu \rightarrow 0$.

Pour le choix du paramètre de régularisation de nombreuses stratégies ont été proposées, ce sont pour la plupart des méthodes d'estimation à posteriori. Parmi ces stratégies on cite le principe de Morozov [78], consistant à rechercher un résidu $\|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|$ égal au niveau de bruit δ .

A la fin de ce chapitre, on représente quelques méthodes de régularisation.

Méthodes de régularisation

- **Méthode de régularisation de Tikhonov** : Pour résoudre le problème mal-posé $Kx = y$, où $K : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur compact, cette méthode consiste à minimiser la fonctionnelle : $\|Kx - y\|^2$ par rapport à x . Si H_1 est de dimension infinie le problème de minimisation est aussi mal-posé d'après le lemme suivant

Lemme 1.4.1 Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire borné et $y \in H_2$. Alors \hat{x} est solution du problème de minimisation, i.e.

$$\|K\hat{x} - y\| \leq \|Kx - y\|, \quad \text{pour tout } x \in H_1$$

si et seulement si \hat{x} résout l'équation normale

$$K^*K\hat{x} = Ky, \quad 1$$

où $K^* : H_2 \rightarrow H_1$ désigne l'opérateur adjoint de K .

La régularisation de Tikhonov mène alors à la détermination de $x^\alpha \in X$ minimisant la fonctionnelle (dite de Tikhonov) définie par

$$J_\alpha(x) = \|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad \forall x \in X.$$

Le théorème suivant détermine une forme explicite minimisant la fonctionnelle de Tikhonov.

Théorème 1.4.4 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, $K : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire borné et $\alpha > 0$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un minimum unique $x^\alpha \in H_1$, qui est la solution de l'équation normale*

$$\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = K^*y \quad (1.8)$$

La solution de (1.8) s'écrit donc $x^\alpha = R_\alpha y = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*y$.

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + K^*K)^{-1}K^* : H_2 \rightarrow H_1$, décrit un schéma régularisant, avec

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

• Si K est compact, en choisissant un système singulier $(\mu_n, \varphi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour K , alors $R_\alpha y$ admet la représentation

$$R_\alpha y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_n)}{\mu_n} (y, \psi_n) \varphi_n, \quad y \in H_2,$$

avec $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$ est la fonction filtre.

$q(\alpha, \mu)$ est bornée : $0 < q(\alpha, \mu) < 1$ et vérifiée $q(\alpha, \mu) \leq C(\alpha)\mu$, avec $C(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}$.

- **La méthode de quasi-réversibilité (Q.R. method)** : La méthode de quasi-réversibilité introduite par R. Lattes et J.L. Lions [68] et qui a été

1. L'opérateur K^*K est compact, d'où le problème de minimisation est mal-posé.

développée dans les travaux de K. Miller [77], L.E. Payne [83], [84], R. Showalter [95], [96] et [97]. Cette méthode consiste à remplacer le problème original mal-posé par un problème approché bien-posé au sens d'Hadamard et à rechercher des quasi-solutions stables vis-à-vis de faibles variations des données.

- **Régularisation avec conditions non-locales(Q.B.V. method)** : Due initialement à L. Abdulkirimov [1], son principe consiste à perturber les conditions aux limites en lui ajoutant un terme correcteur pour obtenir un problème non-local bien-posé, elle a été développée ensuite par G. W. Clark [19] et D. N. hào [51], I.V. Melnikova et al. [56], [75], [76], R. E. Showalter [97].
- **Régularisation par troncature spectrale** : Si l'on connaît la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur K , on peut proposer une méthode de régularisation appelée troncature spectrale. Cette méthode consiste à tronquer le développement spectral à un certain rang. Ce rang joue le rôle de paramètre de régularisation. Cette méthode est aujourd'hui très largement utilisée puisqu'elle fait partie des outils les plus performants pour résoudre les problèmes inverses mal-posés ([34], [40], [88], [90]).
- **Les méthodes itératives** : Les méthodes itératives consistent à générer une succession de problèmes bien-posés dont les solutions convergent vers la solution du problème considéré et où l'indice d'itération joue le rôle de paramètre de régularisation. Dans leurs travaux ([63], [64]) Kozlov et Maz'ya ont proposé une méthode itérative alternative, la convergence de cette méthode est basée sur la notion d'opérateur quasi-contractant dans le cadre hilbertien. Par la suite, le principe de cette méthode a été utilisé pour la résolution de différentes classes de problèmes mal-posés (elliptiques , paraboliques et hyperboliques), voir les travaux de G. Bastay ([11], 1995) et J. Baumeister et A. Leitao ([12], 2001).

1.5 Systèmes de réaction diffusion

Un système de réaction-diffusion est un modèle mathématique qui décrit l'évolution des concentrations d'une ou plusieurs substances spatialement distribuées et soumises à deux processus : un processus de réactions (chimiques) locales dans lequel les différentes substances se transforment et un processus de diffusion qui provoque une répartition de ces substances dans l'espace.

Cette description implique naturellement que de tels systèmes sont appliqués en chimie. Cependant, ils peuvent aussi décrire des phénomènes dynamiques de nature différente : la biologie, la physique, la géologie ou l'écologie sont des exemples de domaines où de tels systèmes apparaissent ([3], [5], [8], [9], [67], [79] et [82]).

Mathématiquement, les systèmes de réaction-diffusion sont représentés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques qui prennent la forme générale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u, t, x), \quad t > 0, x \in \Omega,$$

avec Ω est ouvert régulier borné de \mathbb{R}^p , le vecteur colonne $u(t, x) = (u_i(t, x))_{i=1}^m$ est la fonction inconnue où chaque composante représente la concentration d'une substance, D est la matrice dite matrice de diffusion, f est une application de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m .

Chapitre 2

Régularisation de Tikhonov modifiée pour une classe de problèmes inverses paraboliques

Dans ce chapitre, on étudie un problème inverse parabolique mal-posé. Pour neutraliser le caractère mal-posé du problème, on adopte une procédure de régularisation basée sur la méthode de régularisation du Tikhonov.

2.1 Formulation du problème

Soit H un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme correspondante $\|\cdot\|$ et $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire auto-adjoint positif et à résolvante compacte. Considérons le problème inverse suivant :

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f, & 0 < t < T_2, \\ u(T_1) = \psi_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $0 < T_1 < T_2$ et $\psi_1 \in H$ est une fonction donnée, notre but est d'identifier la condition initiale $u(0)$ et la source f à partir de la donnée supplémentaire

$$u(T_2) = \psi_2, \quad \psi_2 \in H.$$

Par conséquent, le problème inverse peut être reformulé comme suit : déterminer f et g tels que

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = f, & 0 < t < T_2, \\ u(0) = g, \end{cases} \quad (2.2)$$

à partir des données

$$\begin{cases} u(T_1) = \psi_1, \\ u(T_2) = \psi_2. \end{cases} \quad (2.3)$$

Le problème direct correspondant à (2.2) est une version abstraite du système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x), & (x, t) \in \Omega_T \times [0, T], \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec Ω est un domaine borné suffisamment régulier dans \mathbb{R}^n , Ce dernier consiste à déterminer la distribution de la température $u(x, t)$ en connaissant la température initiale et le terme source. Il est connu que ce problème classique est bien posé. Cependant, l'accessibilité à la mesure de ces grandeurs n'est pas toujours facile à cause de la nature physique du modèle (un environnement "agressif" pour les captures), par exemple les hautes températures et la difficulté d'accès dans la chambre de combustion d'un moteur [28], dans une enceinte contenant un feu [89] ou sur les faces actives d'outils d'usinage [66].

Ce sont des cas où le recours à ce type de problème d'identification est nécessaire.

2.2 Préliminaires

Dans cette section, on présente le cadre fonctionnel et les notations nécessaires pour analyser le problème étudié. Sous les hypothèses faites sur A ce dernier est diagonalisable, on note (λ_n, φ_n) les couples propres, valeurs et vecteurs propres de A :

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

avec

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n, \quad b_n = (b, \varphi_n), \quad \forall b \in H.$$

Pour $p \in \mathbb{R}$, on introduit l'espace de Hilbert H^p , défini par

$$H^p = \{b \in H : \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^p |(b, \varphi_n)|^2 < +\infty\},$$

muni de la norme

$$\|b\|_{H^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^p |(b, \varphi_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b \in H^p.$$

On note par $\{S(t) = e^{-At}\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe analytique engendré par $-A$ sur H ,

$$S(t)b = e^{-tA}b = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\lambda_n} (b, \varphi_n) \varphi_n, \quad \forall b \in H.$$

Théorème 2.2.1 [31]

Pour la famille d'opérateurs $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, on a les propriétés suivantes :

- $\|S(t)\| \leq 1$, pour tout $t \geq 0$,
- la fonction $t \rightarrow S(t)$, $t > 0$ est analytique,
- $S(t) : H \rightarrow D(A^r)$, pour tout $t > 0$ et $r \geq 0$,
- pour tout $b \in D(A^r)$ et $r \geq 0$, $S(t)A^r b = A^r S(t)b$,
- pour tout $t > 0$ et $r \geq 0$, l'opérateur $A^r S(t)$ est borné.

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité de la solution du problème direct.

Théorème 2.2.2 [44] Pour tout $f \in H$ et $g \in H$ le problème (2.2) admet une solution unique $u \in C((0, T], D(A)) \cap C^1((0, T], H)$ donnée par

$$u(t) = S(t)g + K(t)f = e^{-tA}g + A^{-1}(I - e^{-tA})f.$$

De plus, si $g \in D(A)$ alors $u \in C^1([0, T]; H)$.

2.3 Caractère mal-posé du problème inverse

Notre objectif est de déterminer le couple (f, g) dans le système (2.2) à partir des données supplémentaires (2.3). En effet, soit $K(t)$ l'opérateur défini par

$$K(t)b = A^{-1}(I - e^{-tA})b, \quad b \in H.$$

La solution du problème (2.2) se réécrit

$$u(t) = S(t)g + K(t)f.$$

A partir de (2.3), il s'ensuit que

$$\begin{cases} u(T_1) = S(T_1)g + K(T_1)f = \psi_1, \\ u(T_2) = S(T_2)g + K(T_2)f = \psi_2. \end{cases}$$

Par conséquent, on cherche une solution (f, g) du système

$$\begin{cases} S(T_1)g + K(T_1)f = S(T_1)g + A^{-1}(I - S(T_1))f = \psi_1, \\ S(T_2)g + K(T_2)f = S(T_2)g + A^{-1}(I - S(T_2))f = \psi_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

En appliquant à la première équation dans le système (2.5) $S(T_2)$ et à la deuxième $S(T_1)$, on a

$$S(T_2)S(T_1)g + S(T_2)A^{-1}(I - S(T_1))f = S(T_2)\psi_1, \quad (2.6)$$

$$S(T_1)S(T_2)g + S(T_1)A^{-1}(I - S(T_2))f = S(T_1)\psi_2. \quad (2.7)$$

En soustrayant de l'équation (2.6) et (2.7) et en utilisant certaines propriétés des semi-groupes, on obtient

$$A^{-1}(S(T_1) - S(T_2))f = S(T_1)\psi_2 - S(T_2)\psi_1.$$

Par une procédure analogue à celle utilisée précédemment, on obtient

$$K(T_2)S(T_1)g + K(T_2)K(T_1)f = K(T_2)\psi_1, \quad (2.8)$$

$$K(T_1)S(T_2)g + K(T_1)K(T_2)f = K(T_1)\psi_2. \quad (2.9)$$

Par soustraction, il s'ensuit que

$$A^{-1}(I - S(T_2))S(T_1)g - A^{-1}(I - S(T_1))S(T_2)g = K(T_2)\psi_1 - K(T_1)\psi_2.$$

D'où il en découle que

$$A^{-1}(S(T_1) - S(T_2))g = K(T_1)\psi_2 - K(T_2)\psi_1.$$

Ainsi, la résolution du système (2.5) est équivalente à la résolution du système

$$\begin{cases} Bf = \eta_1, \\ Bg = \eta_2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Avec

$$B = K(T_2) - K(T_1) = A^{-1}(S(T_1) - S(T_2)),$$

$$\eta_1 = S(T_1)\psi_2 - S(T_2)\psi_1,$$

et

$$\eta_2 = K(T_2)\psi_1 - K(T_1)\psi_2.$$

Il est facile de vérifier que B est un opérateur linéaire, auto-adjoint, compact et injectif, dont les valeurs singulières sont données par

$$(\sigma_n = \frac{e^{-T_1\lambda_n} - e^{-T_2\lambda_n}}{\lambda_n})_{n=1}^{+\infty}.$$

Remarque 2.3.1 *Comme de nombreux problèmes inverses, l'étude du problème (2.2)-(2.3) est réduite à l'étude d'un système d'équations de Fredholm de première espèce de la forme*

$$Bb = \eta. \quad (2.11)$$

De l'injectivité de B , on a

$$b = B^{-1}\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} (\eta, \varphi_n) \varphi_n.$$

On peut voir que $\frac{1}{\sigma_n} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, le problème inverse est donc mal-posé, i.e, la solution ne dépend pas continument des données. De plus, dans la pratique les données ψ_1 et ψ_2 sont entachées d'erreurs donc on dispose seulement de données bruitées ψ_1^δ et ψ_2^δ , il s'ensuit que

$$\begin{cases} Bf = \eta_1^\delta, \\ Bg = \eta_2^\delta, \end{cases} \quad (2.12)$$

où

$$\eta_1^\delta = S(T_1)\psi_2^\delta - S(T_2)\psi_1^\delta,$$

$$\eta_2^\delta = K(T_2)\psi_1^\delta - K(T_1)\psi_2^\delta,$$

et

$$\|\psi_1 - \psi_1^\delta\| + \|\psi_2 - \psi_2^\delta\| \leq \delta_1 + \delta_2 = \delta, \quad (2.13)$$

avec $\delta > 0$ est le niveau de bruit.

Avant de passer à la régularisation du problème (2.2), on suppose que les solutions cherchées vérifient les conditions de régularité suivantes :

$$\|f\|_{H^{p_1}} \leq E_1, \quad p_1 > 0, \quad (2.14)$$

$$\|g\|_{H^{p_2}} \leq E_2, \quad p_2 > 0, \quad (2.15)$$

où $E_1, E_2 > 0$ sont des constantes données.

2.4 Méthode de Tikhonov modifiée et résultats de convergence

La régularisation de Tikhonov est une méthode très efficace pour résoudre les problèmes mal posés. Dans cette section, on propose une procédure modifiée de cette méthode pour traiter le système (2.10).

La méthode de régularisation de Tikhonov consiste à minimiser les quantités suivantes :

$$\begin{cases} \|Bf - \eta_1^\delta\|^2 + \alpha^2 \|f\|^2, \\ \|Bg - \eta_2^\delta\|^2 + \alpha^2 \|g\|^2. \end{cases} \quad (2.16)$$

La résolution du problème de minimisation de la fonctionnelle de Tikhonov est équivalente à la résolution des équations normales suivantes :

$$\begin{cases} \alpha^2 f_\alpha^\delta + B^* B f_\alpha^\delta = B^* \eta_1^\delta, \\ \alpha^2 g_\alpha^\delta + B^* B g_\alpha^\delta = B^* \eta_2^\delta. \end{cases} \quad (2.17)$$

Comme B est un opérateur linéaire auto-adjoint, on obtient

$$\begin{cases} f_\alpha^\delta = (\alpha^2 I + B^2)^{-1} B \eta_1^\delta, \\ g_\alpha^\delta = (\alpha^2 I + B^2)^{-1} B \eta_2^\delta. \end{cases} \quad (2.18)$$

En utilisant la décomposition spectrale de l'opérateur intervenant dans le système (2.18), on a :

$$\begin{cases} f_\alpha^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\alpha^2 + \sigma_n^2} (\eta_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \beta_n^2} (\eta_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n, \\ g_\alpha^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\alpha^2 + \sigma_n^2} (\eta_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \beta_n^2} (\eta_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n, \end{cases} \quad (2.19)$$

où

$$\beta_n = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{\lambda_n}{e^{-T_1\lambda_n} - e^{-T_2\lambda_n}}.$$

Afin de simplifier l'étude, on propose de remplacer le filtre

$$\frac{1}{1 + \beta_n^2 \alpha^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 \left(\frac{\lambda_n e^{T_1\lambda_n}}{1 - e^{-(T_2-T_1)\lambda_n}} \right)^2},$$

par le filtre possédant le même comportement suivant :

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 (\lambda_n e^{T_1\lambda_n})^2}.$$

Par conséquent, les solutions régularisées de Tikhonov modifiée sont données par

$$\begin{cases} f_\alpha^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 (\lambda_n e^{T_1\lambda_n})^2} (\eta_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n, \\ g_\alpha^\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 (\lambda_n e^{T_1\lambda_n})^2} (\eta_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n. \end{cases} \quad (2.20)$$

Dans ce qui suit, on introduit quelques propriétés et outils nécessaires pour établir le résultat de convergence.

Lemme 2.4.1 *La norme de l'opérateur $K(t) = A^{-1}(I - e^{-tA})$ est donnée par*

$$\|K(t)\| = \frac{1 - e^{-t\lambda_1}}{\lambda_1}.$$

Preuve. On vise à déterminer l'extremum de la fonction $\frac{1 - e^{-t\lambda_n}}{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, pour cela, on fixe t , on pose $\mu = \lambda t$ et on définit la fonction

$$F_1(\mu) = \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu}, \quad \text{pour } \mu \geq \mu_1 = t\lambda_1.$$

On a

$$F_1'(\mu) = \frac{(\mu + 1)e^{-\mu} - 1}{\mu^2}.$$

Posons

$$F_2(\mu) = (\mu + 1)e^{-\mu} - 1,$$

par conséquent

$$F_1'(\mu) = \frac{F_2(\mu)}{\mu^2}.$$

Pour étudier la monotonie de $F_1(\mu)$, il suffit de déterminer le signe de F_2 . On a

$$F_2'(\mu) = -\mu e^{-\mu} < 0, \quad \forall \mu \geq \mu_1 > 0,$$

alors, F_2 est décroissante, de plus $F_2(\mu) \subset]-1, 0[$. D'où $F_2(\mu) < 0, \forall \mu \geq \mu_1$, ce qui implique que $F_1(\mu)$ est décroissante et

$$\sup_{\mu \geq \mu_1} F_1(\mu) = F_1(\mu_1).$$

Donc,

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1 - e^{-t\lambda_n}}{\lambda_n} = \frac{1 - e^{-t\lambda_1}}{\lambda_1}.$$

Ce qui entraîne que,

$$\sup_{t \in [0, T_2]} \|K(t)\| = \sup_{t \in [0, T_2]} \frac{1 - e^{-t\lambda_1}}{\lambda_1} \leq \frac{1}{\lambda_1}. \quad (2.21)$$

.

□

Lemme 2.4.2 *Pour $0 < \alpha < 1$ et $p > 0$, on a les estimations suivantes :*

$$\sup_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}}\right) (1 + \lambda_n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq \max(1, T_1^{p-2}, T_1^p) \max(\alpha, (\ln(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}))^{-p}), \quad (2.22)$$

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \leq \max(1, T_1^{-1}) \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}, \quad i = 1, 2, \quad (2.23)$$

$$\sup_{n \geq 1} \frac{\beta_n}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}) \lambda_n} \leq \max(1, \lambda_1^{-2}) \frac{\gamma}{\alpha}, \quad (2.24)$$

avec $\gamma = \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1(T_2 - T_1)}}$.

Preuve. Posons $\lambda_{n_0} = \frac{1}{2T_1} \ln \frac{1}{\alpha}$, pour de grandes valeurs de λ_n on a :

- pour $\lambda_n \geq \lambda_{n_0}$, on a

$$\begin{aligned} G(\lambda_n) &= \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}}\right) (1 + \lambda_n^2)^{-\frac{p}{2}} \\ &\leq (1 + \lambda_n^2)^{-\frac{p}{2}} \leq \lambda_n^{-p} \leq \lambda_{n_0}^{-p} = T_1^p (\ln(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}))^{-p}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

- pour $\lambda_1 < \lambda_n < \lambda_{n_0}$, on a

$$\begin{aligned} G(\lambda_n) &= \left(\frac{\alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}}\right) (1 + \lambda_n^2)^{-\frac{p}{2}} \\ &\leq \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1} (1 + \lambda_n^2)^{-\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

On distingue deux cas :

si $0 < p \leq 2$, on a

$$\begin{aligned} G(\lambda_n) &\leq \alpha^2 e^{2\lambda_n T_1} \lambda_n^{2-p} \\ &\leq \alpha^2 e^{2\lambda_{n_0} T_1} \lambda_{n_0}^{2-p} = \alpha \left(\frac{1}{2T_1}\right)^{2-p} \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right)^{2-p}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité

$$\alpha \left(\ln \frac{1}{\alpha}\right)^2 \leq 1,$$

on a

$$G(\lambda_n) \leq \frac{1}{T_1^{2-p}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha}\right)^{-p} = T_1^{p-2} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-p}. \quad (2.26)$$

Si $p > 2$, on a

$$G(\lambda_n) \leq \alpha^2 e^{2\lambda_n T_1} \leq \alpha^2 e^{2\lambda_{n_0} T_1} = \alpha. \quad (2.27)$$

De (2.25), (2.26) et (2.27), on déduit (2.22).

Établissons (2.23). De l'inégalité

$$\frac{1}{1 - e^{-\lambda_n(T_2 - T_1)}} \leq \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1(T_2 - T_1)}} = \gamma, \quad (2.28)$$

pour $i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} &= \frac{\lambda_n e^{-\lambda_n(T_i - T_1)}}{(1 - e^{-\lambda_n(T_2 - T_1)})(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1})} \\ &\leq \frac{\gamma \lambda_n e^{-\lambda_n(T_i - T_1)}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \\ &\leq \frac{\gamma \lambda_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

• Si $\lambda_1 \leq \lambda_n < \lambda_{n_0}$, de (2.29) on a

$$\frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \leq \gamma \lambda_n \leq \gamma \lambda_{n_0} = \frac{\gamma}{T_1} \ln \frac{1}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.30)$$

Puisque $0 < \alpha < 1$, $\ln \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, on peut écrire

$$\frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \leq \frac{\gamma T_1^{-1}}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.31)$$

• Si $\lambda_n \geq \lambda_{n_0}$, d'après (2.29) on a

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} &\leq \frac{\gamma \lambda_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \\ &\leq \frac{\gamma \lambda_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_{n_0} T_1}} = \frac{\gamma \lambda_n}{1 + \alpha \lambda_n^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dans ce qui suit, nous considérons les deux cas $T_1 \geq 1$ et $T_1 < 1$.

- Soit $T_1 \geq 1$, il est clair que lorsque $\lambda_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ la fonction $G_1(\lambda_n) = \frac{\lambda_n}{1+\alpha\lambda_n^2}$ atteint son maximum. Comme

$$\lambda_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \geq \frac{1}{T_1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \geq \lambda_{n_0} = \frac{1}{T_1} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

d'après (2.32), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} &\leq \gamma G_1(\lambda_n) \\ &\leq \gamma G_1(\lambda_{n_1}) = \frac{\gamma \lambda_{n_1}}{1 + \alpha \lambda_{n_1}^2} \\ &\leq \gamma \lambda_{n_1} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

- Soit $T_1 < 1$, posons $G_2(\lambda_n) = \frac{\lambda_n}{1 + \alpha \lambda_n^2 T_1^2}$, d'après (2.32)

$$\frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \leq \gamma G_1(\lambda_n) \leq \gamma G_2(\lambda_n). \quad (2.34)$$

On voit clairement que pour $\lambda_{n_2} = \frac{1}{T_1 \sqrt{\alpha}} \geq \lambda_{n_0}$, la fonction $G_2(\lambda_n)$ atteint son maximum, d'après (2.34), on a

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n e^{-\lambda_n T_i}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} &\leq \gamma G_2(\lambda_{n_2}) = \frac{\gamma \lambda_{n_2}}{1 + \alpha T_1^2 \lambda_{n_2}^2} \\ &\leq \gamma \lambda_{n_2} = \frac{\gamma}{T_1 \sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En combinant (2.31), (2.33) et (2.35), on obtient (2.23).

Vérifions (2.24), on a

- si $\lambda_1 \leq \lambda_n < \lambda_{n_0}$,

$$\frac{\beta_n}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}) \lambda_n} \leq \lambda_n^{-1} \beta_n = \frac{\lambda_n e^{\lambda_n T_1}}{(1 - e^{\lambda_n (T_2 - T_1)}) \lambda_n}.$$

En utilisant les inégalités (2.28) et $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\alpha}$, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}) \lambda_n} &\leq \gamma e^{\lambda_n T_1} \\ &\leq \gamma e^{\lambda_{n_0} T_1} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} \leq \frac{\gamma}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

• Si $\lambda_n \geq \lambda_{n_0}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}) \lambda_n} &\leq \frac{\gamma e^{\lambda_n T_1}}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1})} \\ &\leq \frac{\gamma e^{\lambda_n T_1}}{(1 + \alpha^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_n T_1})} \\ &\leq \frac{\gamma}{\min(1, \lambda_1^2)} \frac{e^{\lambda_n T_1}}{(1 + \alpha^2 e^{2\lambda_n T_1})}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Il est facile de vérifier que $2\lambda_{n_0} = \frac{1}{T_1} \ln \frac{1}{\alpha}$ est le point où G_3 admet une valeur maximale avec $G_3(\lambda_n) = \frac{e^{\lambda_n T_1}}{1 + \alpha^2 e^{2\lambda_n T_1}}$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\beta_n}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}) \lambda_n} &\leq \gamma \max(1, \lambda_1^{-2}) G_3(2\lambda_{n_0}) \\ &\leq \gamma \max(1, \lambda_1^{-2}) e^{2\lambda_{n_0} T_1} \\ &\leq \max(1, \lambda_1^{-2}) \frac{\gamma}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A partir de (2.36) et (2.38), on obtient l'inégalité (2.24). \square

Théorème 2.4.1 Soient f_α^δ et g_α^δ les solutions régularisées données par (2.20), f et g les solutions exactes du problème (2.2)-(2.3) vérifiant (2.14) et (2.15) respectivement. Soient ψ_1^δ et ψ_2^δ les données supplémentaires au moment T_1 et T_2 respectivement, vérifiant (2.13). Si le paramètre de régularisation est choisi tel que $\alpha = \left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{\frac{2}{(p_1+2)}}$ et $\alpha = \left(\frac{\delta}{E_2}\right)^{\frac{2}{(p_2+2)}}$ respectivement, alors on a les estimations d'erreur suivantes :

$$\begin{aligned} \|f - f_\alpha^\delta\| &\leq \max(1, T_1^{p_1-2}, T_1^{p_1}) \max\left(\left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{\frac{2}{p_1+2}}, \frac{1}{(\ln(\frac{E_1}{\delta})^{\frac{1}{(p_1+2)}})^{p_1}}\right) E_1 \\ &\quad + \gamma \max(1, T_1^{-1}) \left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{\frac{p_1+1}{(p_1+2)}} E_1^{\frac{p_1}{(p_1+2)}}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

et

$$\begin{aligned} \|g - g_\alpha^\delta\| &\leq \max(1, T_1^{p_2-2}, T_1^{p_2}) \max\left(\left(\frac{\delta}{E_2}\right)^{\frac{2}{p_2+2}}, \frac{1}{(\ln(\frac{E_2}{\delta})^{\frac{1}{(p_2+2)}})^{p_2}}\right) E_2 \\ &\quad + \gamma \max(1, \lambda_1^{-2}) \left(\frac{\delta}{E_2}\right)^{\frac{p_2}{p_2+2}} E_2^{\frac{2+p_2}{(p_2+2)}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Preuve. En appliquant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|f - f_\alpha\| \leq \|f - f_\alpha\| + \|f_\alpha - f_\alpha^\delta\|. \quad (2.41)$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\|f - f_\alpha\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (\eta_1, \varphi_n) \varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} (\eta_1, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}}\right) (1 + \lambda_n^2)^{-p_1/2} (1 + \lambda_n^2)^{p_1/2} (f, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\
&\leq \sup_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}}\right) (1 + \lambda_n)^{-\frac{p_1}{2}} \right) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n^2)^{p_1/2} (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.22) et (2.14), on a

$$\|f - f_\alpha\| \leq \max(1, T_1^{p_1-2}, T_1^{p_1}) \max\left(\alpha, \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)^{-p_1}\right) E_1. \quad (2.42)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha - f_\alpha^\delta\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} (\eta_1, \varphi_n) \varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} (\eta_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} (\eta_1 - \eta_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} e^{-T_1 \lambda_n} (\psi_2 - \psi_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} e^{-T_2 \lambda_n} (\psi_1^\delta - \psi_1, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\
&\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta_n e^{-T_1 \lambda_n}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \right) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_2 - \psi_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\
&\quad + \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta_n e^{-T_2 \lambda_n}}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \right) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1 - \psi_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right\|.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations (2.23) et (2.13), on obtient

$$\|f_\alpha - f_\alpha^\delta\| \leq \max(1, T_1^{-1}) \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}} (\delta_1 + \delta_2) = \gamma \max(1, T_1^{-1}) \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \quad (2.43)$$

En combinant (2.41) avec (2.42) et (2.43), on obtient

$$\|f_\alpha - f_\alpha^\delta\| \leq \max(1, T_1^{p_1-2}, T_1^{p_1}) \max\left(\alpha, \left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)^{-p_1}\right) E_1 + \gamma \max(1, T_1^{-1}) \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Si on choisit $\alpha = \left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{2/(p_1+2)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|f - f_\alpha^\delta\| &\leq \max(1, T_1^{p_1-2}, T_1^{p_1}) \max\left(\left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{\frac{2}{p_1+2}}, \left(\ln\left(\frac{E_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{(p_1+2)}}\right)^{-p_1}\right) E_1 \\
&\quad + \gamma \max(1, T_1^{-1}) \left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{\frac{-1}{(p_1+2)}} \delta \\
&\leq \max(1, T_1^{p_1-2}, T_1^{p_1}) \max\left(\left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{\frac{2}{p_1+2}}, \left(\ln\left(\frac{E_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{(p_1+2)}}\right)^{-p_1}\right) E_1 \\
&\quad + \gamma \max(1, T_1^{-1}) \left(\frac{\delta}{E_1}\right)^{\frac{p_1+1}{(p_1+2)}} E_1^{\frac{p_1}{(p_1+2)}}.
\end{aligned}$$

Maintenant, établissons (2.40), on a

$$\|g - g_\alpha\| \leq \|g - g_\alpha\| + \|g_\alpha - g_\alpha^\delta\|. \quad (2.44)$$

Par un calcul similaire à celui utilisé pour établir (2.42), on obtient

$$\|g - g_\alpha^\delta\| \leq \max(1, T_1^{p_2-2}, T_1^{p_2}) \max(\alpha, (\ln(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}))^{-p_2}) E_2. \quad (2.45)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|g_\alpha - g_\alpha^\delta\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} (\eta_2, \varphi_n) \varphi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} (\eta_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} (\eta_2 - \eta_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \frac{(1 - e^{-T_2 \lambda_n})}{\lambda_n} (\psi_1 - \psi_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}} \frac{(1 - e^{-T_1 \lambda_n})}{\lambda_n} (\psi_2^\delta - \psi_2, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta_n}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}) \lambda_n} \right) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_1 - \psi_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n \right\| \\ &\quad + \sup_{n \geq 1} \left(\frac{\beta_n}{(1 + \alpha^2 \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T_1}) \lambda_n} \right) \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_2^\delta - \psi_2, \varphi_n) \varphi_n \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant les estimations (2.24) et (2.13), on obtient

$$\|g_\alpha - g_\alpha^\delta\| \leq \max(1, \lambda_1^{-2}) \frac{\gamma}{\alpha} (\delta_1 + \delta_2) = \gamma \max(1, \lambda_1^{-2}) \frac{\delta}{\alpha}. \quad (2.46)$$

En combinant (2.44), (2.45) et (2.46), on trouve

$$\|g_\alpha - g_\alpha^\delta\| \leq \max(1, T_1^{p_2-2}, T_1^{p_2}) \max(\alpha, (\ln(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}))^{-p_2}) E_2 + \gamma \max(1, \lambda_1^{-2}) \frac{\delta}{\alpha}.$$

Si on choisit $\alpha = (\frac{\delta}{E_2})^{\frac{2}{p_2+2}}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|g - g_\alpha^\delta\| &\leq \max(1, T_1^{p_2-2}, T_1^{p_2}) \max\left(\left(\frac{\delta}{E_2}\right)^{\frac{2}{p_2+2}}, \left(\ln\left(\frac{E_2}{\delta}\right)^{\frac{1}{(p_2+2)}}\right)^{-p_2}\right) E_2 \\ &\quad + \gamma \max(1, \lambda_1^{-2}) \left(\frac{\delta}{E_2}\right)^{\frac{-2}{(p_2+2)}} \delta \\ &\leq \max(1, T_1^{p_2-2}, T_1^{p_2}) \max\left(\left(\frac{\delta}{E_2}\right)^{\frac{2}{p_2+2}}, \frac{1}{\left(\ln\left(\frac{E_2}{\delta}\right)^{\frac{1}{(p_2+2)}}\right)^{p_2}}\right) E_2 \\ &\quad + \gamma \max(1, \lambda_1^{-2}) \left(\frac{\delta}{E_2}\right)^{\frac{p_2}{p_2+2}} E_2^{\frac{2+p_2}{(p_2+2)}}. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1

• Dans la pratique, $\|f\|_p$ n'est pas généralement connue. Si on choisit $\alpha = C\delta^{\frac{2}{p+2}}$, avec C est une constante positive, on peut obtenir les résultats de convergence. En effet, si $\alpha = C\delta^{\frac{2}{p_1+2}}$ et $\alpha = C\delta^{\frac{2}{p_2+2}}$ respectivement, on obtient à partir de (4.29) et (4.33) respectivement les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \|f - f_\alpha^\delta\| &\leq \max(1, T_1^{p_1-2}, T_1^{p_1}) \max(C\delta^{\frac{2}{p_1+2}}, (\ln(\frac{1}{\sqrt{C}\delta^{\frac{1}{p_1+2}}}))^{-p_1}) E_1 \\ &+ \gamma \max(1, T_1^{-1}) C^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{p_1+1}{p_1+2}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.47)$$

et

$$\begin{aligned} \|g - g_\alpha^\delta\| &\leq \max(1, T_1^{p_2-2}, T_1^{p_2}) \max(C\delta^{\frac{2}{p_2+2}}, (\ln(\frac{1}{\sqrt{C}\delta^{\frac{1}{p_2+2}}}))^{-p_2}) E_2 \\ &+ \gamma \max(1, \lambda_1^{-1}) C^{-1} \delta^{\frac{p_2}{p_2+2}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Par conséquent, f_α^δ et g_α^δ peuvent être considérés comme des approximations des solutions exactes f et g respectivement.

• On peut voir que le terme logarithmique $(\ln(\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{p+2}})^{-p}$ est le terme qui nous donne la convergence dans les estimations (2.47) et (2.48), les autres termes sont négligeables par rapport à lui.

2.5 Implémentation numérique

Dans cette section, on introduit deux exemples pour vérifier l'efficacité de la méthode proposée. On considère le problème inverse qui consiste à déterminer $f(x)$, $g(x)$ et $u(x, t)$ dans le système

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x), & 0 < x < \pi, 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(x, \frac{1}{2}) = \psi_1(x), u(x, 1) = \psi_2(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (2.49)$$

On note

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \text{avec } \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

sont les valeurs propres et les vecteurs propres orthonormés, formant une base pour H . Par la méthode de séparation des variables, on obtient la solution du problème direct correspondant au problème (2.49) comme suit

$$u(x, t) = S(t)g(x) + K(t)f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n^2 t}(g, \varphi_n) + \frac{(1 - e^{-n^2 t})}{n^2}(f, \varphi_n))\varphi_n.$$

Avant d'introduire les tests numériques, on commence par une étude numérique du problème direct en utilisant la méthode des différences finies.

2.5.1 Discrétisation du problème direct

Dans cette section, on adopte le schéma de Crank-Nicolson pour discrétiser le problème direct. Pour ce but considérons une grille uniforme de temps $\Delta t = \frac{1}{m}$, $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, m$ et une grille uniforme d'espace $h = \frac{1}{n}$, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$. Soit le schéma suivant

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h^2} (u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1}) + f_i \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h^2} (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j) + f_i \right), \\ u_0^j = u_n^j = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \\ u_i^0 = g_i, \quad 0 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (2.50)$$

Ici u_i^j désigne l'approximation de $u(x_i, t_j)$ aux points de maillage (x_i, t_j) , $f_i = f(x_i)$ et $g_i = g(x_i)$. En écrivant le système (2.50) sous la forme matricielle, on obtient

$$\begin{cases} AU^{j+1} = BU^j + C, \quad 0 \leq j \leq m-1, \\ U^0 = (g_1, g_2, \dots, g_{n-1})^T, \end{cases} \quad (2.51)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \mu & -\frac{\mu}{2} & & & \\ -\frac{\mu}{2} & 1 + \mu & -\frac{\mu}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{\mu}{2} & 1 + \mu & -\frac{\mu}{2} \\ & & & & -\frac{\mu}{2} & 1 + \mu \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \mu & \frac{\mu}{2} & & & \\ \frac{\mu}{2} & 1 - \mu & \frac{\mu}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{\mu}{2} & 1 - \mu & \frac{\mu}{2} \\ & & & \frac{\mu}{2} & 1 - \mu \end{pmatrix}$$

$\mu = \frac{\Delta t}{h^2}$, $U^j = (u_1^j, u_1^j, \dots, u_{n-1}^j)^T$ et $C = (f_1, f_2, \dots, f_{n-2}, f_{n-1})^T$.

2.5.2 Tests numériques

Revenons au problème inverse, les solutions régularisées du problème (2.49) sont données par

$$f_\alpha^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} (\eta_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n, \quad (2.52)$$

$$g_\alpha^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} (\eta_2^\delta, \varphi_n) \varphi_n, \quad (2.53)$$

où

$$\beta_n = \frac{n^2}{e^{-\frac{n^2}{2}} - e^{-n^2}},$$

$$\eta_1^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\frac{1}{2}n^2} \psi_2^\delta - e^{-n^2} \psi_1^\delta, \varphi_n) \varphi_n$$

et

$$\eta_2^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-n^2}}{n^2} \psi_1^\delta - \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}n^2}}{n^2} \psi_2^\delta, \varphi_n \right) \varphi_n,$$

avec

$$(b, \varphi_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 b(s) \sin(ns) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

Par conséquent, on a

$$f_\alpha^\delta(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} (\theta_{1n} \psi_2^\delta(s) - \theta_{2n} \psi_1^\delta(s)) \sin(ns) \sin(nx) ds, \quad (2.54)$$

$$g_\alpha^\delta(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} (\gamma_{1n} \psi_1^\delta(s) - \gamma_{2n} \psi_2^\delta(s)) \sin(ns) \sin(nx) ds, \quad (2.55)$$

avec $\theta_{1n} = e^{-\frac{1}{2}n^2}$, $\theta_{2n} = e^{-n^2}$, $\gamma_{1n} = \frac{(1 - e^{-n^2})}{n^2}$ et $\gamma_{2n} = \frac{(1 - e^{-\frac{1}{2}n^2})}{n^2}$.

On utilise la règle de trapèze pour approcher les intégrales dans (2.54)-(2.55). Après avoir considéré une grille équidistante $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{M+1} = \pi$, ($x_i = \frac{(i-1)\pi}{M}$, $i = 1, \dots, M + 1$), on obtient les approximations discrètes suivantes :

$$f_\alpha^\delta = (f_\alpha^\delta(x_1), f_\alpha^\delta(x_2), \dots, f_\alpha^\delta(x_M))$$

et

$$g_\alpha^\delta = (g_\alpha^\delta(x_1), g_\alpha^\delta(x_2), \dots, g_\alpha^\delta(x_M)).$$

De (2.52) et (2.53) respectivement, on a

$$f_\alpha^\delta = \mathbb{A}^\alpha \Psi_2^\delta - \mathbb{B}^\alpha \Psi_1^\delta, \quad (2.56)$$

$$g_\alpha^\delta = \mathbb{C}^\alpha \Psi_2^\delta - \mathbb{D}^\alpha \Psi_1^\delta, \quad (2.57)$$

où

$$A_{ij}^\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n \theta_{1n}}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} \sin(nx_i) \sin(nx_j) l,$$

$$B_{ij}^\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n \theta_{2n}}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} \sin(nx_i) \sin(nx_j) l,$$

$$C_{ij}^\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n \gamma_{1n}}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} \sin(nx_i) \sin(nx_j) l,$$

$$D_{ij}^\alpha = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n \gamma_{2n}}{1 + \alpha^2 n^4 e^{n^2}} \sin(nx_i) \sin(nx_j) l,$$

$l = \frac{\pi}{M}$ et $\Psi_i^\delta \in \mathbb{R}^{M+1}$, $i = 1, 2$ sont les vecteurs obtenus en ajoutant une perturbation aléatoire aux données correspondantes

$$\Psi_i = (\psi_i(x_1), \psi_i(x_2), \dots, \psi_i(x_M)),$$

i.e.,

$$\Psi_i^\delta = \Psi_i + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(\Psi_i)), \quad i = 1, 2, \quad (2.58)$$

où ε indique le niveau de bruit des données, la fonction "*randn(.)*" génère des valeurs aléatoires normalement distribuées dont la moyenne est égale à 0, la variance $\sigma^2 = 1$ et l'écart type $\sigma = 1$. "*randn(size(.))*" renvoie un tableau d'entrées aléatoire de la même taille de l'erreur δ .

L'erreur δ est mesurée au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) donnée par

$$\delta = \|\psi^\delta - \psi\|_{l^2} = \left(\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (\psi(x_i) - \psi^\delta(x_i))^2 \right)^{1/2}.$$

Dans ce qui suit, on introduit deux tests pour valider les résultats théoriques, dans le premier test la solution admet une forme explicite, dans le second test, la solution ne possède pas d'expression analytique explicite.

Test 1

Il est facile de vérifier que si on choisit

$$f(x) = 2\sin(x)$$

et

$$g(x) = \sin(x),$$

alors

$$u(x, t) = (2 - e^{-t})\sin(x)$$

est la solution exacte du problème (2.49). Par conséquent,

$$\psi_1(x) = (2 - e^{-\frac{1}{2}})\sin(x)$$

et

$$\psi_2(x) = (2 - e^{-1})\sin(x).$$

Tableaux et figures :

α	$0.05\alpha_0$	$0.1\alpha_0$	$0.2\alpha_0$	$0.3\alpha_0$	$0.4\alpha_0$	$0.5\alpha_0$	$0.6\alpha_0$	α_0
Rer(f)	0.0035	0.0017	0.0011	0.0047	0.0033	0.0043	0.0097	0.0172
Rer(g)	0.0191	0.0041	0.0028	0.0072	0.0160	0.0014	0.0080	0.0139

Tableau 2.1. Erreur relative $Rer(f)$ et $Rer(g)$ avec $p = 1$, $M = 100$, $N = 6$,

$$\varepsilon = 0.01, \delta = 0.0216 \text{ et } \alpha_0 = \delta^{\frac{2}{p+2}} = 0.0776.$$

N	4	5	6	7	8	9	10
Rer(f)	0.0040	0.0018	0.0011	0.0052	0.0054	0.0033	0.0045
Rer(g)	0.0117	0.0037	0.0028	0.0082	0.0143	0.0023	0.0135

Tableau 2.2. Erreur relative $Rer(f)$ et $Rer(g)$ avec $p = 1$, $M = 100$, $\varepsilon = 0.01$,

$$\delta = 0.0216 \text{ et } \alpha = \alpha_0.2 = 0.0155.$$

M	10	50	100	150	200	250	300
Rer(f)	0.0130	0.0051	0.0016	0.0017	0.0023	0.022	0.0018
Rer(g)	0.0320	0.0190	0.0039	0.0072	0.0227	0.0036	0.0075

Tableau 2.3. Erreur relative $Rer(f)$ et $Rer(g)$ avec $p = 1$, $N = 6$ et $\varepsilon = 0.01$.

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
α	0.3600	0.0727	0.0149	0.0034
$Rer(f)$	0.0463	0.0017	1.6034e - 004	7.1518e - 005
$Rer(g)$	0.0503	0.0037	0.0032	0.0015

Tableau 2.4. Erreur relative $Rer(f)$ et $Rer(g)$ avec $p = 1$, $N = 6$ et $M = 100$.

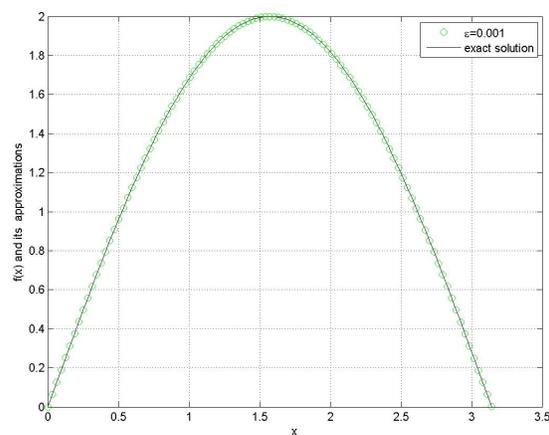


Figure 2.1 : La comparaison entre la solution exacte f la solution approchée f_ε^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\varepsilon = 0.001$.

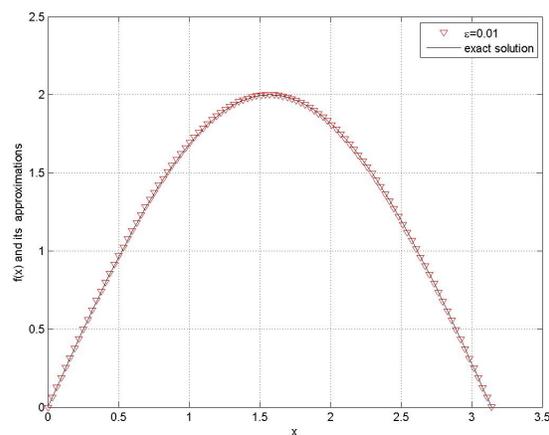


Figure 2.2 : La comparaison entre la solution exacte f la solution approchée f_ε^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\varepsilon = 0.01$.

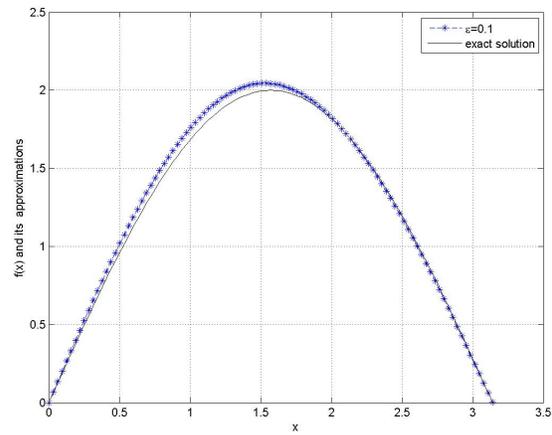


Figure 2.3 : La comparaison entre la solution exacte f la solution approchée f_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.1$.

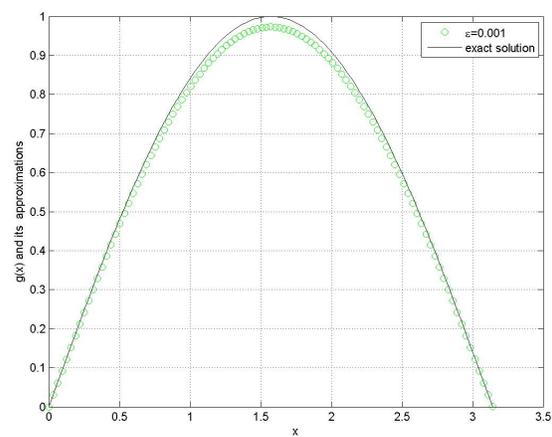


Figure 2.4 : La comparaison entre la solution exacte g la solution approchée g_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.001$.

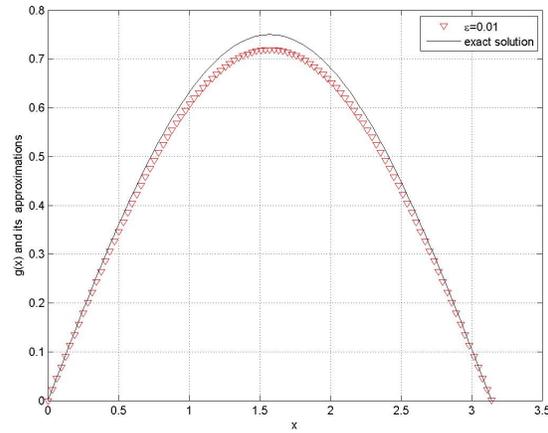


Figure 2.5 : La comparaison entre la solution exacte g la solution approchée g_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.01$.

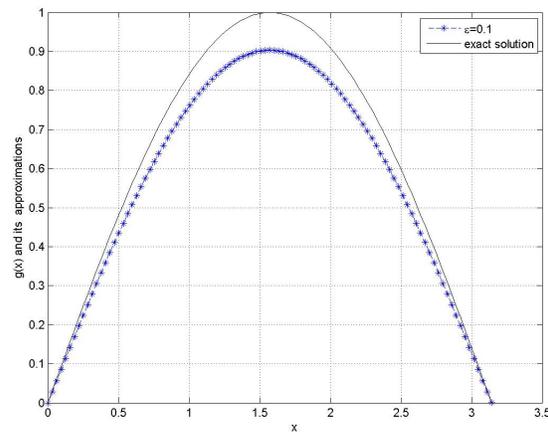


Figure 2.6 : La comparaison entre la solution exacte g la solution approchée g_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.1$.

- Le tableau **2.1** montre l'influence du choix du paramètre α sur l'erreur sur f et g . On a choisit dans nos tests $\alpha = 0.2\alpha_0$, $\alpha_0 = \delta^{\frac{2}{3}}$.
- Les tableaux **2.2** et **2.3** montrent l'influence du choix de N et M respectivement sur l'erreur relative.
- Le tableau **2.4** et figure **2.1**, **2.2** et **2.3** (resp. Figure **2.4**, **2.5** et **2.6**) donnent la comparaison entre la solution exacte $f(x)$ (resp. $g(x)$) et la solution approchée $f_\alpha^\delta(x)$ (resp. $g_\alpha^\delta(x)$). On peut constater que lorsque le niveau de bruit diminue, les solutions régularisées convergent vers les solutions exactes et constituent de bonnes

approximations même avec un niveau de bruit $\epsilon = 0.1$.

Test 2

Soient $g(x) = \sin(2x)$ et $f(x)$ une fonction définie par morceaux comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{4}{\pi}x - 1, & \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3 - \frac{4}{\pi}x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0, & \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

► Concernant le test 2 :

- On résout le problème direct par la méthode des différences finies,
- on calcule les fonctions ψ_1 et ψ_2 ,
- on ajoute des perturbations aléatoires aux fonctions ψ_1 et ψ_2 en utilisant la fonction $\text{randn}(\text{size}(\cdot))$,
- finalement, on calcule les solutions régularisées données par (2.56) et (2.57).

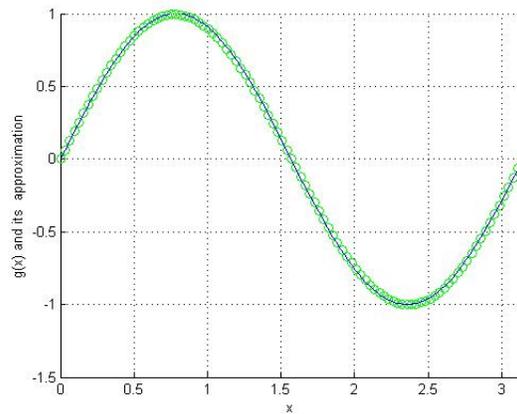


Figure 2.7 : La comparaison entre la solution exacte g la solution approchée g_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.001$.

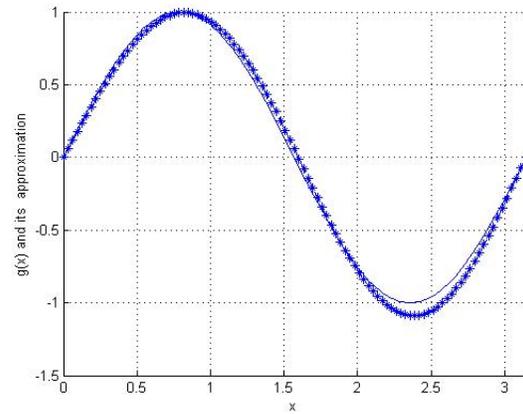


Figure 2.8 : La comparaison entre la solution exacte g la solution approchée g_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.01$.

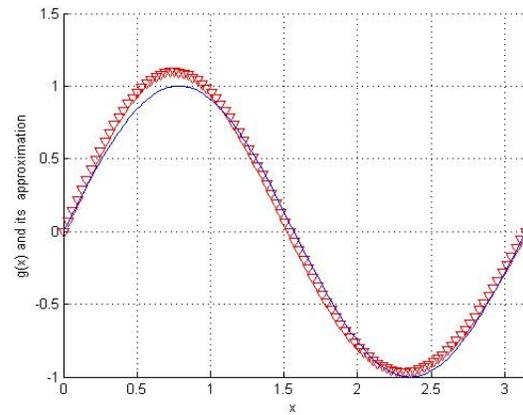


Figure 2.9 : La comparaison entre la solution exacte g la solution approchée g_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.1$.

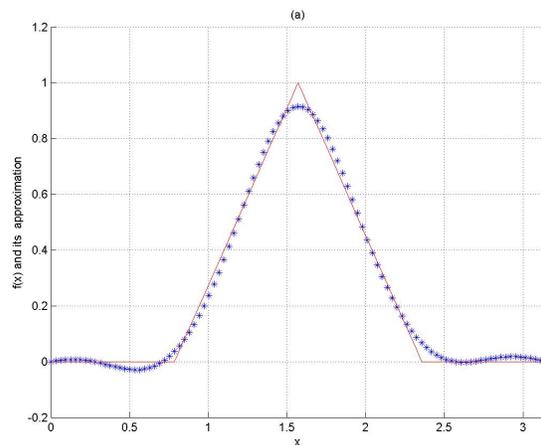


Figure 2.10 : La comparaison entre la solution exacte f la solution approchée f_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$ et $p = 1$.

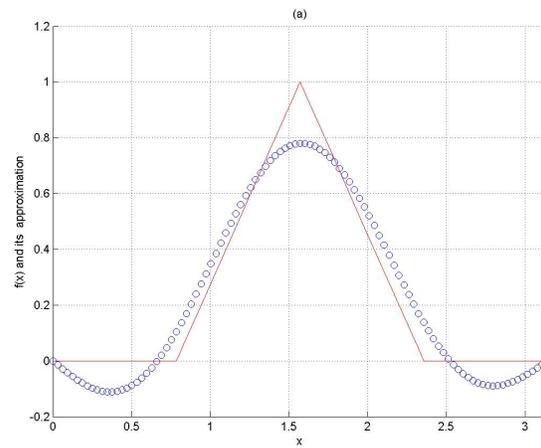


Figure 2.11 : La comparaison entre la solution exacte f la solution approchée f_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.001$.

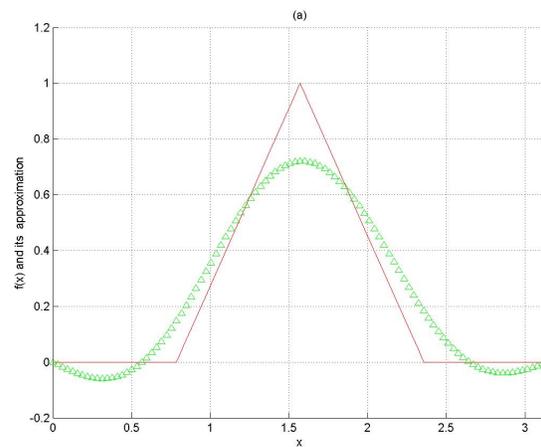


Figure 2.12 : La comparaison entre la solution exacte f la solution approchée f_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.01$.

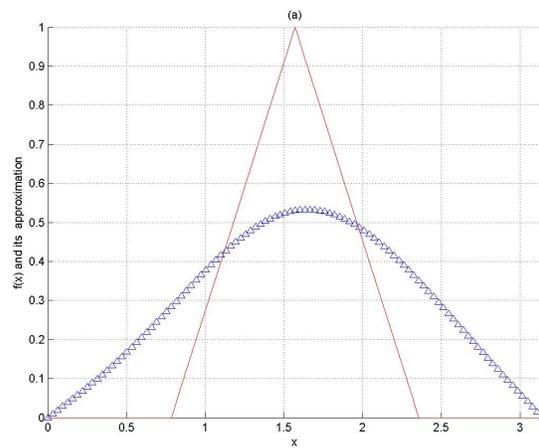


Figure 2.13 : La comparaison entre la solution exacte f la solution approchée f_ϵ^δ avec $M = 100$, $N = 6$, $p = 1$ et $\epsilon = 0.1$.

► Les résultats numériques obtenues montrent une certaine efficacité de la méthode de régularisation utilisée, les solutions approchées constituent de bonnes approximations pour les solutions exactes et ceci même dans le cas de données moins régulières.

Chapitre 3

Méthode des conditions aux limites auxiliaires modifiée pour une classe de système de réaction-diffusion mal-posé

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'un système de réaction-diffusion mal-posé, où l'objectif est l'identification de la condition initiale. En adoptant une variante de la méthode de régularisation avec conditions aux limites auxiliaires, on construit une approximation stable de la solution du problème étudié.

3.1 Position du problème

Considérons le problème inverse, qui consiste à déterminer la condition initiale $u(x, 0) = (u_1(x, 0), \dots, u_m(x, 0))^T = g(x)$ dans le système de réaction diffusion suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) = Bu(x, t), & 0 < t < T, \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & 0 \leq t < T, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, T) = f(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $T > 0$, Ω est un domaine borné suffisamment régulier de \mathbb{R}^p , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction donnée. B et D sont deux matrices réelles commutatives de taille $m \times m$. De plus D est diagonalisable admettant un spectre positif¹.

1. Sous cette condition, on trouve une grande classe de systèmes de réaction-diffusion : les systèmes dont la matrice D (ou B) est la matrice identité.

On note ici que malgré que dans la plus part des travaux qui traitent les systèmes de réaction-diffusion les auteurs n'ont considéré que le cas d'une matrice de diffusion diagonale ([23], [57], [58] et [103]), il existe plusieurs modèles physiques (tel que la vibration) dans les quels la matrice D n'est pas diagonale, pour plus de détail, on renvoie le lecteur à [[17], [70]] et les références qui y sont.

3.2 Résultats préliminaires fondamentaux

Comme l'analyse du problème inverse demande une bonne connaissance du comportement de la solution du problème direct. On introduit dans cette section les outils et les conditions nécessaires permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème direct.

Dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ dont le produit scalaire est noté (\cdot, \cdot) , on considère le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.2)$$

avec $\mathcal{D}(-\Delta) = \mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega)$. Le problème (3.2) admet un ensemble dénombrable de valeurs propres

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Chaque valeur propre λ_n a une multiplicité finie γ_n égale à la dimension de l'espace propre correspondant S_n .

1. Par conséquent, il existe un ensemble complet orthonormé $\{\varphi_{nk}\}_{k=1}^{k=\gamma_n}$ de vecteurs propres de $-\Delta$, tel que, pour tout $w \in \mathcal{D}(-\Delta)$, on a

$$-\Delta w = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n w,$$

avec

$$E_n w = \sum_{k=1}^{\gamma_n} (w, \varphi_{nk}) \varphi_{nk},$$

$\{E_n\}$ est une famille complète de projections orthogonales dans \mathcal{H} .

Pour tout $w \in \mathcal{H}$, on a

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} E_n w.$$

2. L'opérateur Δ engendre un semi-groupe analytique $\{e^{\Delta t}\}_{t \geq 0}$ sur \mathcal{H} , défini par

$$e^{\Delta t}w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} E_n w.$$

On note par \mathcal{X} l'espace de Hilbert $(L^2(\Omega))^m$ des fonctions à carré intégrable $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ muni du produit scalaire usuel

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u_1(x)\overline{v_1(x)} + \dots + u_m(x)\overline{v_m(x)}) dx.$$

On définit l'opérateur non-borné

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X}, \\ Au &= -D\Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A), \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = (\mathcal{H}^2(\Omega) \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega))^m.$$

Pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n D P_n u,$$

et

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} P_n u, \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u\|^2, \quad u \in \mathcal{X},$$

où

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n, \dots, E_n),$$

est une famille complète de projections orthogonales dans \mathcal{X} .

Lemme 3.2.1 [69] *Soit \mathcal{X} un espace de Hilbert séparable et soient $\{A_n\}_{n \geq 1}, \{P_n\}_{n \geq 1}$ deux familles d'opérateurs linéaires bornés dans \mathcal{X} avec $\{P_n\}_{n \geq 1}$ une famille complète de projections orthogonales telles que*

$$A_n P_n = P_n A_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires suivante

$$S(t)u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n u, \quad t \geq 0.$$

Si

$$\|e^{A_n t}\| \leq g(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.4}$$

pour certaine fonction continue à valeurs réelles positives $g(t)$. Alors

1. la famille d'opérateurs linéaires bornées $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe dans l'espace de Hilbert \mathcal{X} , dont le générateur infinitésimal \mathcal{A} est donné par

$$\mathcal{A}u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n u, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

avec

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ u \in \mathcal{X} : \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n u\|^2 < \infty \right\}.$$

2. Le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} est donné par $\sigma(\mathcal{A}) = \cup_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n)$.

Corollaire 3.2.1 *L'opérateur $-A$ est le générateur d'un C_0 -semi-groupe $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$, sur \mathcal{X} donné par*

$$e^{-At}u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n u, \quad t \geq 0, \quad u \in \mathcal{X},$$

où

$$A_n = -\lambda_n D.$$

Le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A est donné par

$$\sigma(A) = \cup_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sigma(D).$$

Corollaire 3.2.2 *L'opérateur $\mathcal{A} = -A + B$ génère un C_0 -semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, on \mathcal{X} donné par*

$$S(t)u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n u, \quad t \geq 0, \quad u \in \mathcal{X},$$

avec

$$A_n = -\lambda_n D + B.$$

Le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ de l'opérateur \mathcal{A} est donné par

$$\sigma(\mathcal{A}) = \cup_{n=1}^{\infty} \sigma(-\lambda_n D + B).$$

Théorème 3.2.1 [30] *On suppose que $d > 0$ pour tout $d \in \sigma(D)$. Alors, le C_0 -semi-groupe $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ est analytique et il existe des constantes $C \geq 1$ et $\beta > 0$ tels que*

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq C e^{-\beta t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.5)$$

- On termine cette section par le lemme technique suivant

Lemme 3.2.2 [13] *Soit*

$$z \mapsto R_\beta(z) = \frac{1}{\alpha z^\beta + e^{-zl}}, \quad z \in [1, +\infty[$$

où $\alpha > 0$, $l > 0$ et $\beta \geq 1$. Alors on a

$$R_\beta(z) \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta l}{\ln \frac{l^\beta}{\beta \alpha}} \right)^\beta. \quad (3.6)$$

3.3 Instabilité du problème inverse

Comme indiqué précédemment, notre objectif est d'identifier la source $u(x, 0)$ dans le système

$$\begin{cases} u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) = Bu(x, t), & 0 < t < T, & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & 0 \leq t < T, & x \in \partial\Omega, \\ u(x, T) = f(x), & & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

où $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ est une fonction donnée. Le système (3.7) peut être écrit comme une équation différentielle ordinaire abstraite dans l'espace de Hilbert \mathcal{X} comme suit

$$\begin{cases} u_t(t) = \mathcal{A}u(t), & 0 < t < T, \\ u(T) = f, & f \in \mathcal{X}, \end{cases} \quad (3.8)$$

où $\mathcal{A} = -A + B$ et A est donné par (3.3).

Pour une fonction donnée $g \in \mathcal{X}$, on considère le problème direct correspondant au problème inverse (3.8)

$$\begin{cases} v_t(t) = \mathcal{A}v(t), & 0 < t < T, \\ v(0) = g, \end{cases} \quad (3.9)$$

Le caractère bien-posé du problème direct (3.9) est garantie par le théorème suivant

Théorème 3.3.1 [85] *Pour tout $g \in \mathcal{X}$, le problème (3.9) admet une solution unique $v \in C([0, T], \mathcal{X})$ donnée par*

$$v(t) = S(t)g = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\lambda_n D + B)t} P_n g, \quad (3.10)$$

avec

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} P_n g,$$

• pour $s \leq m$, notons par $0 < d_1 < \dots < d_s$ les valeurs propres distinctes de D , donc D admet la décomposition spectrale suivante :

$$D = \sum_{i=1}^s d_i Q_i,$$

avec $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq s}$ est une famille complète de projections. Alors la solution du problème (3.9) admet la représentation suivante :

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\lambda_n D + B)t} P_n g = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_n d_i t} Q_i \right) e^{Bt} P_n g.$$

Théorème 3.3.2 *Le problème (3.8) admet une solution si et seulement si $\|u(0)\| < +\infty$, i.e.,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e^{(\lambda_n D - B)T} P_n f\|^2 < \infty. \quad (3.11)$$

et sa solution unique est donnée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda_n D - B)(T-t)} P_n f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^s e^{\lambda_n d_i (T-t)} Q_i \right) e^{-B(T-t)} P_n f. \quad (3.12)$$

Preuve. Si le problème (3.8) admet une solution u , cette solution admet la forme $u(t) = S(t)u(0)$. Alors,

$$\begin{aligned} f = u(T) &= S(T)u(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\lambda_n D + B)T} P_n u(0). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|u(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{(\lambda_n D - B)T} P_n f\|^2 < \infty.$$

Maintenant, si (3.11) est satisfaite, on peut définir

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda_n D - B)T} P_n f \in \mathcal{X},$$

et on considère le problème

$$\begin{cases} u_t(t) = \mathcal{A}u(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = w, \end{cases} \quad (3.13)$$

Le problème direct (3.13) est bien posé et son unique solution est donnée par

$$\begin{aligned} u(t) = S(t)w &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{(\lambda_n D - B)(T-t)} P_n f \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^s e^{\lambda_n d_i (T-t)} e^{-B(T-t)} Q_i P_n f, \end{aligned} \quad (3.14)$$

pour $t = T$, on a

$$u(T) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n f = f.$$

Donc, u est bien la solution unique de (3.8). \square

Remarquons que les termes $e^{\lambda_n d_i (T-t)}$ dans (3.14) sont la source d'instabilité du problème inverse, donc pour neutraliser ce caractère mal-posé, on régularise le problème, ça sera notre objectif dans la section suivante.

3.4 Méthode des valeurs aux limites auxiliaires modifiée

Dans cette étude nous proposons une version modifiée de la méthode des conditions aux limites auxiliaires. L'idée de cette méthode est d'approcher le problème inverse mal-posé par un problème où l'on perturbe la condition finale en ajoutant un terme correcteur pour obtenir une condition non-locale. Pour notre problème, on propose de l'approcher par le problème

$$\begin{cases} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) = 0, & 0 < t < T, \\ \alpha e^{BT} u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = f, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Et on montre que

$$\|u_\alpha(T) - f\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0,$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0,$$

et

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_\alpha(t) - u(t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \rightarrow 0.$$

Pour la suite, on définit les espaces :

$$F_\beta = \{\varphi \in \mathcal{X}, \exists E > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2\beta} \|P_n \varphi\|^2 < E\}, \quad \beta \geq 0.$$

$$C_\beta = \{\varphi \in \mathcal{X}, \exists E > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2T\beta\lambda_n d_s} \|P_n \varphi\|^2 < E\}, \quad \beta \geq 0.$$

où $E > 0$ est une constante donnée.

Théorème 3.4.1 *La fonction $u_\alpha(t)$ donnée par*

$$u_\alpha(t) = S(t)(\alpha e^{BT} + S(T))^{-1} f. \quad (3.16)$$

est l'unique solution du problème (3.15), de plus on a l'estimation

$$\|u_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\alpha^2} M^2 \|f\|.$$

où M est une constante positive.

Preuve. En utilisant la théorie des semi-groupes et le caractère bien posé du problème direct, nous prouvons que la fonction u_α suivante est l'unique solution du problème (3.15)

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) &= S(t)(\alpha e^{BT} + S(T))^{-1} f \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-\lambda_n D+B)t} (\alpha e^{BT} + e^{(-\lambda_n D+B)T})^{-1} P_n f \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-B(T-t)} e^{-\lambda_n D t} (\alpha I_n + e^{-\lambda_n D T})^{-1} P_n f \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-B(T-t)} \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_n d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_n d_i T})^{-1} Q_i P_n f, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Établissons la dépendance continue de u de f , on a

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{-B(T-t)} \sum_{i=1}^s e^{-\lambda_n d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_n d_i T})^{-1} Q_i P_n f\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e^{-B(T-t)} (\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_n d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_n d_i T})^{-1} Q_i)\|^2 \|P_n f\|^2 \\ &\leq e^{2\|B\|(T-t)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^s e^{-\lambda_n d_i t} (\alpha + e^{-\lambda_n d_i T})^{-1} \|Q_i\|)^2 \|P_n f\|^2 \\ &\leq e^{2\|B\|T} \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^s (\alpha + e^{-\lambda_n d_i T})^{-1} \|Q_i\|)^2 \|P_n f\|^2 \\ &\leq e^{2\|B\|T} \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^s \|Q_i\|)^2 \|P_n f\|^2 \\ &\leq e^{2\|B\|T} \frac{1}{\alpha^2} M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n f\|^2 \\ &\leq e^{2\|B\|T} \frac{1}{\alpha^2} M^2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

où $M = \sum_{i=1}^s \|Q_i\|$, ($\|\cdot\|$ est une norme matricielle.) \square

Théorème 3.4.2 Si $f \in F_\beta$, $0 < \beta < 1$, alors on a l'estimation suivante

$$\|u(T) - u_\alpha(T)\| \leq ME \left(\frac{\beta d_s T}{\ln\left(\frac{(d_s T)^\beta}{\beta \alpha}\right)} \right)^\beta. \quad (3.18)$$

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned}
\|u(T) - u_\alpha(T)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|(I - e^{-\lambda_n DT}(\alpha + e^{-\lambda_n DT}))P_n f\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{e^{-\lambda_n d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_n d_i T}}\right) Q_i P_n f \right\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \frac{\alpha}{\alpha + e^{-\lambda_n d_i T}} Q_i \right\|^2 \|P_n f\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\lambda_n^\beta (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})} \right)^2 \sum_{i=1}^s \|Q_i\|^2 \lambda_n^{2\beta} \|P_n f\|^2 \\
&\leq M^2 \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\alpha}{\lambda_n^\beta (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} \|P_n f\|^2 \\
&\leq M^2 E^2 \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\alpha}{\lambda_n^\beta (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})} \right)^2.
\end{aligned}$$

Posons

$$g(\lambda_n) = \frac{\alpha}{\lambda_n^\beta (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})}.$$

Comme $\lambda_n \geq 1$, on a

$$g(\lambda_n) \leq \frac{\alpha}{\alpha \lambda_n^\beta + e^{-\lambda_n d_s T}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.19)$$

En appliquant lemme 3.2.2 avec $z = \lambda_n$ et $l = d_s T$, on a

$$g(\lambda_n) \leq \left(\frac{\beta d_s T}{\ln\left(\frac{(d_s T)^\beta}{\beta \alpha}\right)} \right)^\beta. \quad (3.20)$$

De (3.19) et (3.20), il en découle que

$$\|u(T) - u_\alpha(T)\|^2 \leq M^2 E^2 \left(\frac{\beta d_s T}{\ln\left(\frac{(d_s T)^\beta}{\beta \alpha}\right)} \right)^{2\beta},$$

avec $M = \sum_{i=1}^s \|Q_i\|^2$. □

Théorème 3.4.3 *Si $f \in C_\beta$, ($0 < \beta < 1$), on a l'estimation*

$$\|u(T) - u_\alpha(T)\| \leq M E \alpha^\beta \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right)^{(1-\beta)}. \quad (3.21)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\|u(T) - u_\alpha(T)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \frac{\alpha}{\alpha + e^{-\lambda_n d_i T}} Q_i P_n f \right\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta \lambda_n d_s T} (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\| \right)^2 e^{2\beta \lambda_n d_s T} \|P_n f\|^2 \\
&\leq M^2 \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\alpha}{e^{\beta \lambda_n d_s T} (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})} \right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2\beta \lambda_n d_s T} \|P_n f\|^2 \\
&\leq M^2 E^2 \alpha^{2\beta} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\alpha^{2(1-\beta)}}{e^{2\beta \lambda_n d_s T} (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})^2}. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Trouvons le supremum de la fonction

$$\frac{\alpha^{2(1-\beta)}}{e^{2\beta \lambda_n d_s T} (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})^2}.$$

Pour cela, fixons $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\gamma_n = \lambda_n d_s$ et

$$h_n(\alpha) = \frac{\alpha^{2(1-\beta)}}{e^{2\beta \lambda_n d_s T} (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})^2}, \quad \alpha > 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

Il est clair que $\alpha_1 = \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)e^{-\gamma_n T}$ est le point critique où h_n atteint son maximum.

Ainsi, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
h_n(\alpha) \leq h_n(\alpha_1) &= \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{2(1-\beta)} e^{2\gamma_n T} (\alpha_1 + e^{-\gamma_n T})^{-2} \\
&\leq \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{2(1-\beta)} (\alpha_1^2 e^{2\gamma_n T} + 2\alpha_1 e^{\gamma_n T} + 1)^{-1} \\
&\leq \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{2(1-\beta)},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} h_n(\alpha) \leq \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{2(1-\beta)}. \tag{3.23}$$

De (3.22) et (3.23), on obtient l'estimation

$$\|u(T) - u_\alpha(T)\|^2 \leq M^2 E^2 \alpha^{2\beta} \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{2(1-\beta)}.$$

□

Lemme 3.4.1 Si $f \in C_{\beta+1}$, ($0 < \beta < 1$), alors on a l'estimation suivante :

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| \leq C E^2 \alpha^\beta \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{(1-\beta)}, \tag{3.24}$$

où C est une constante positive.

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \|((\alpha e^{TB} + e^{(-\lambda_n D+B)T})^{-1} - e^{(\lambda_n D-B)T})P_n f\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \|((\alpha + e^{-\lambda_n DT})^{-1} - e^{\lambda_n DT})e^{-TB}P_n f\|^2 \\
&\leq \|e^{-TB}\|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \sum_{i=1}^s ((\alpha + e^{-\lambda_n d_i T})^{-1} - e^{\lambda_n d_i T})Q_i P_n f \right\|^2 \\
&\leq \|e^{-TB}\|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left(\frac{\alpha e^{\lambda_n d_i T}}{\alpha + e^{-\lambda_n d_i T}} \right) Q_i P_n f \right\|^2 \\
&\leq \|e^{-TB}\|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n d_s T}}{(\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})^2} \left(\sum_{i=1}^s \|Q_i\|^2 \right) \|P_n f\|^2 \\
&\leq M^2 \|e^{-TB}\|^2 \alpha^{2\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2(1-\beta)}}{e^{2\beta\lambda_n d_s T} (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})^2} e^{2(\beta+1)\lambda_n d_s T} \|P_n f\|^2 \\
&\leq M^2 \|e^{-TB}\|^2 \alpha^{2\beta} \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{\alpha^{2(1-\beta)}}{e^{2\beta\lambda_n d_s T} (\alpha + e^{-\lambda_n d_s T})^2} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{2(\beta+1)\lambda_n d_s T} \|P_n f\|^2.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.23), il en découle que

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq C^2 E^2 \alpha^{2\beta} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)^{2(1-\beta)},$$

avec $C = M \|e^{-TB}\|$. □

Théorème 3.4.4 *Si $f \in C_{1+\beta}$, ($0 < \beta < 1$), alors $u_\alpha(t)$ converge uniformément vers $u(t)$ avec l'ordre α^β et on a*

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\| \leq e^{T\|B\|} M C \alpha^\beta \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)^{(1-\beta)} E.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \|e^{(t-T)B} \sum_{i=1}^s \left[\frac{e^{-\lambda_n d_i t}}{\alpha + e^{-\lambda_n d_i T}} - e^{\lambda_n d_i (T-t)} \right] Q_i P_n f\|^2 \\
&\leq e^{2T\|B\|} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{1}{\alpha + e^{-\lambda_n d_i T}} - e^{\lambda_n d_i T} \right] e^{-\lambda_n d_i t} Q_i P_n f \right\|^2 \\
&\leq e^{2T\|B\|} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \sum_{i=1}^s \left[\frac{1}{\alpha + e^{-\lambda_n d_i T}} - e^{\lambda_n d_i T} \right] Q_i P_n f \right\|^2 \\
&\leq e^{2T\|B\|} \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.24), on obtient

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 \leq e^{2T\|B\|} M^2 C^2 \alpha^{2\beta} \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right)^{2(1-\beta)} E^2.$$

□

3.5 Implémentation numérique

Cette section à pour but la validation des résultats théoriques par des exemples numériques. On considère le problème inverse suivant qui consiste à déterminer $w(x, t) = (u(x, t), v(x, t))^T$ et $w(x, 0) = g(x) = (g_1(x), g_2(x))^T$ dans le système

$$\begin{cases} \partial_t w(x, t) - D\Delta w(x, t) = Bw(x, t), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1), \\ w(0, t) = w(\pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ w(x, 0) = g(x), & x \in (0, \pi), \end{cases} \quad (3.25)$$

à partir de la donnée supplémentaire

$$w(x, 1) = (u(x, 1), v(x, 1))^T.$$

Les couples propres de l'opérateur

$$-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \text{ avec } \mathcal{D}(-\Delta) = H^1(0, 1) \cap H^2(0, \pi) \subset \mathcal{H} = L^2(0, \pi),$$

sont donnés par

$$\lambda_n = n^2, \quad \phi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On choisit les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma(B) = \{b_1, b_2\} = \{1, 4\}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma(D) = \{d_1, d_2\} = \{2, 5\},$$

admettant la décomposition spectrale

$$D = d_1 Q_1 + d_2 Q_2,$$

$$\text{où } Q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solution régularisée prend la forme

$$w_\alpha(x, 0) = g_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 (\alpha + e^{-n^2 d_i}) Q_i e^{-B} P_n f(x), \quad (3.26)$$

où

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n),$$

$$E_n b = b_n \varphi_n \quad \text{et} \quad b_n = (b, \varphi_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi b(s) \sin(n\pi s) ds, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En ajoutant une perturbation aléatoire (commande *randn* de Matlab) aux données, on obtient le vecteur

$$f^\delta = \begin{pmatrix} f_1 + \delta \text{randn}(\text{size}(f_1)) \\ f_2 + \delta \text{randn}(\text{size}(f_2)) \end{pmatrix},$$

Pour des données perturbées $f^\delta(x) = (f_1^\delta(x), f_2^\delta(x))$ la formule (3.26) s'écrit :

$$g_\alpha^\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 (\alpha + e^{-n^2 d_i}) Q_i e^{-B} P_n f^\delta(x),$$

avec

$$P_n f^\delta(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi} (\int_0^1 f_1^\delta(s) \sin(ns) ds) \sin(nx) & 0 \\ 0 & \frac{2}{\pi} (\int_0^1 f_2^\delta(s) \sin(ns) ds) \sin(nx) \end{pmatrix}.$$

Pour l'approximation de l'intégrale dans la formule précédente, on utilise la méthode des trapèzes et on fait une troncature approximative de la série en choisissant la somme de $M + 1$ premiers termes. En considérant une grille équidistante $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_M = \pi$, ($x_i = \frac{i\pi}{M}, i = 1, \dots, M$), on a

$$\begin{aligned} g_{1,\alpha}^\delta(x_j) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi} h \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^N [(2e^{-1}(\alpha + e^{-2n^2}) + e^{-4}(\alpha + e^{-5n^2})) f_1^\delta(x_i) \\ &+ (-e^{-1}(\alpha + e^{-2n^2}) + e^{-4}(\alpha + e^{-5n^2})) f_2^\delta(x_i)] \sin(nx_i) \sin(nx_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{2,\alpha}^\delta(x_j) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi} h \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^N [(-2e^{-1}(\alpha + e^{-2n^2}) + 2e^{-4}(\alpha + e^{-5n^2})) f_1^\delta(x_i) \\ &+ (e^{-1}(\alpha + e^{-2n^2}) + 2e^{-4}(\alpha + e^{-5n^2})) f_2^\delta(x_i)] \sin(nx_i) \sin(nx_j), \end{aligned}$$

où

$$j = 1, \dots, M, \quad h = \frac{\pi}{M}.$$

Test 1

Pour $w(x, 0) = (\sin x, 2\sin x)$, la solution du problème direct est donnée par

$$w(x, t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin x \\ 2e^{-t} \sin x \end{pmatrix},$$

d'où

$$f(x) = w(x, 1) = \begin{pmatrix} e^{-1} \sin x \\ 2e^{-1} \sin x \end{pmatrix}.$$

- On choisit les valeurs des paramètres utilisés comme suit $M = 50, N = 20$.
- Pour le niveau de bruit, on prend $\delta = 0$ puis $\delta = 10^{-5}$ et $\delta = 10^{-4}$.

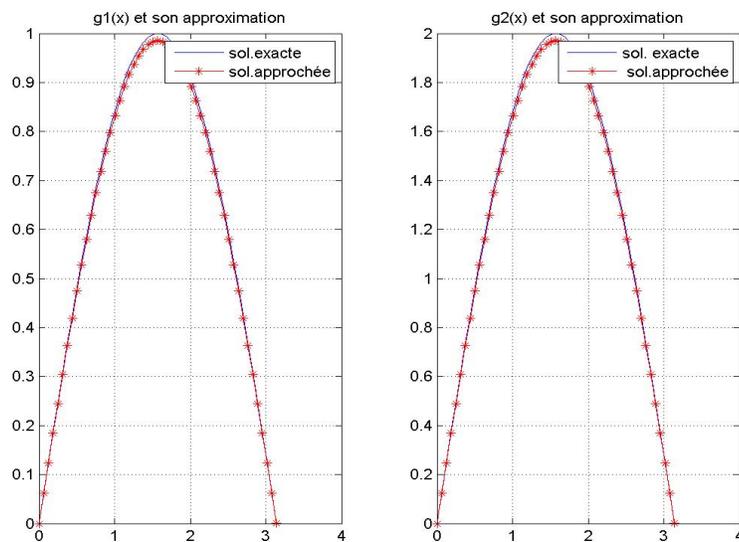


Figure 3.1 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 50, N = 20$ et $\alpha = 10^{-4}$.

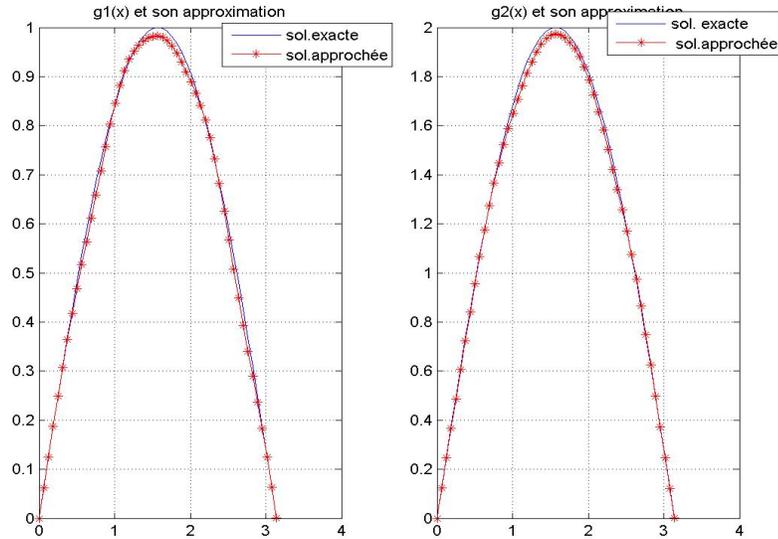


Figure 3.2 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 50$, $N = 20$, $\alpha = 0.0003$ et $\delta = 10^{-5}$.

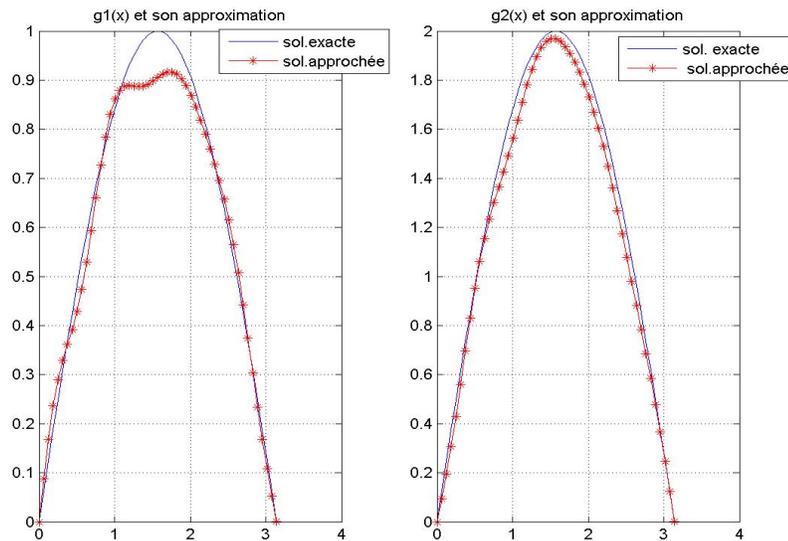


Figure 3.3 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 50$, $N = 20$, $\alpha = 10^{-4}$ et $\delta = 10^{-4}$.

Test 2

Dans cet exemple, on choisit la matrice de diffusion $D = I_2$ la matrice identité, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, pour $w(x, 0) = (\sin x, \sin 2x)^T$, la solution exacte du problème est

donnée par

$$w(x, t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (2e^t + e^{4t})\sin x + (-2e^{-2t} + e^t)\sin 2x \\ (-2e^t + 2e^{4t})\sin x + (e^{-2t} + 2e^t)\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas

$$f(x) = w(x, 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (2e^1 + e^4)\sin x + (-2e^{-2} + e^1)\sin 2x \\ (-2e^1 + 2e^4)\sin x + (e^{-2} + 2e^1)\sin 2x \end{pmatrix}.$$

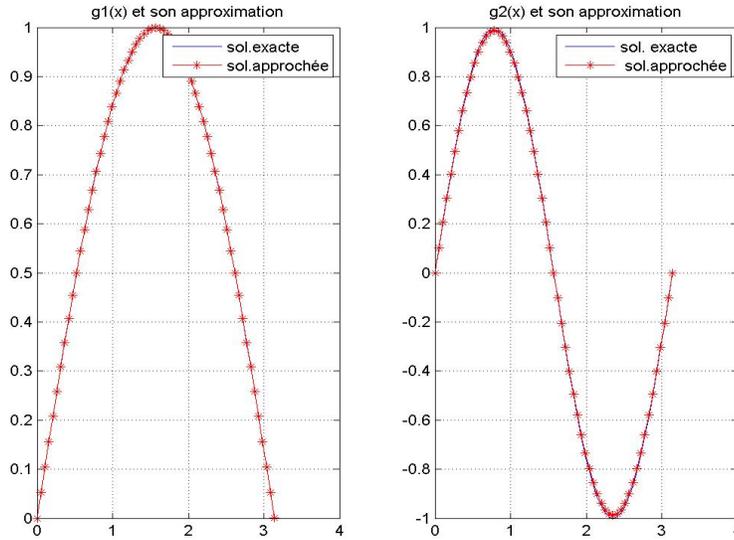


Figure 3.4 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ

avec $M = 50$, $N = 20$ et $\alpha = 0.00025$.

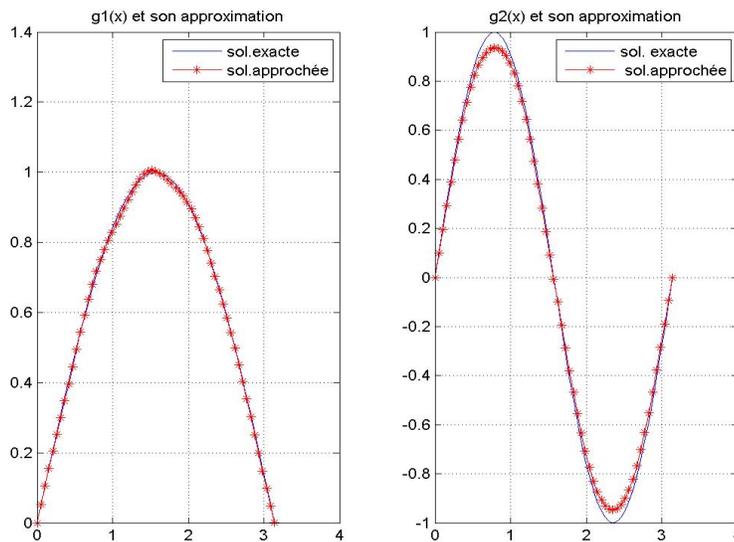


Figure 3.5 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 50$, $N = 20$, $\alpha = 0.001$ et $\delta = 0.0001$.

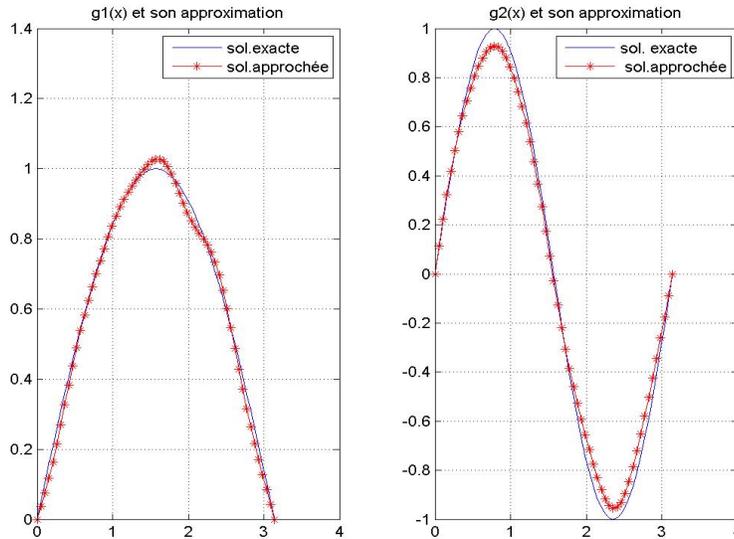


Figure 3.6 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 50$, $N = 20$, $\alpha = 0.0015$ et $\delta = 0.001$.

- Dans le cas des données exactes (non bruitées), les solutions approchées et les solutions exactes sont identiques.
- Si on ajoute un niveau de bruit $\delta = 10^{-4}$ et $\delta = 10^{-3}$, les résultats restent satisfaisants.

Test 3

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont choisis comme suit

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{4}{\pi}x - 1, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3 - \frac{4}{\pi}x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{5}, \\ \frac{5}{\pi}x - 1, & \frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{2\pi}{5}, \\ 3 - \frac{5}{\pi}x, & \frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{3\pi}{5}, \\ 0, & \frac{3\pi}{5} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Dans ce cas la solution du problème direct ne possède pas une expression analytique, on résout le problème direct par la méthode des différences finies, en adoptant le schéma suivant ²

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} \right) = \frac{3}{2}(u_i^{j+1} + u_i^j) + \frac{1}{2}(v_i^j + v_i^{j+1}), \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1}^{j+1} + v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{i+1}^j + v_{i-1}^j - 2v_i^j}{h^2} \right) = (u_i^j + u_i^{j+1}) + 2(v_i^j + v_i^{j+1}), \\ u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \\ u_i^0 = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \\ v_i^0 = 0, \quad 0 \leq i \leq N. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

► Les paramètres utilisés sont choisis comme suit

- M : approximation de l'intégrale, $M = 200$.
- N : nombre de noeuds de discrétisation par la méthode des différences finies, $N = 20$.

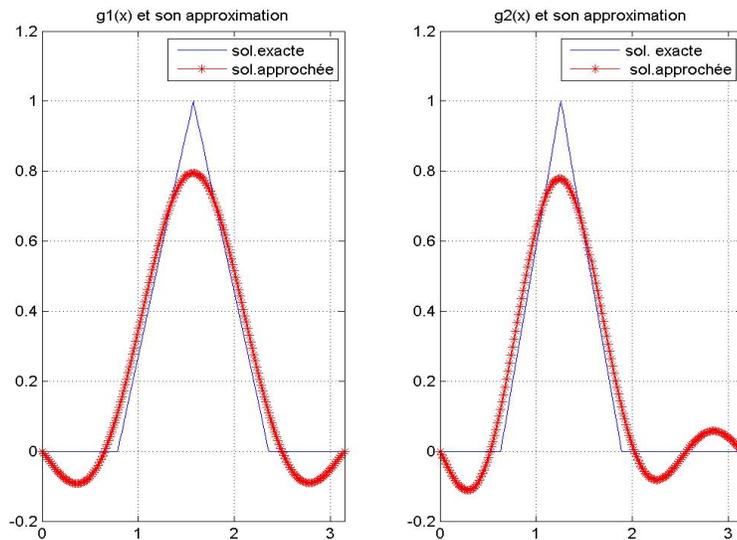


Figure 3.7 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 200$, $N = 20$ et $\alpha = 10^{-7}$.

2. Cette méthode sera exposée en détaille dans le chapitre suivant.

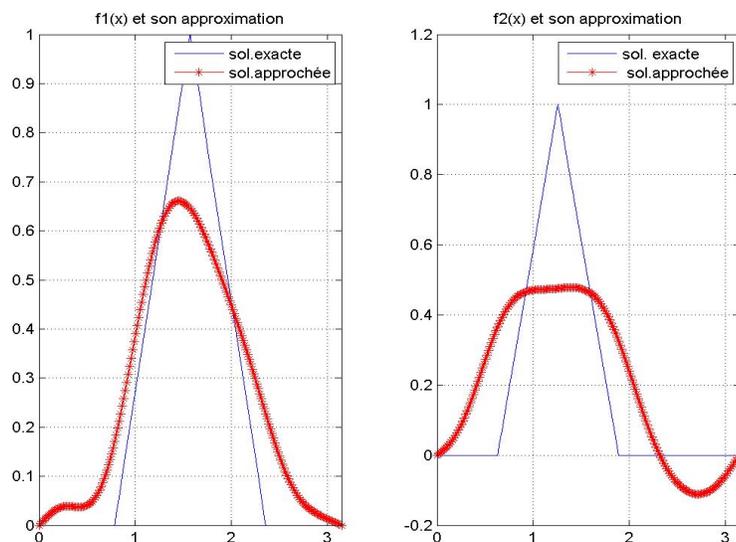


Figure 3.8 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 200$, $N = 20$, $\alpha = 10^{-4}$ et $\delta = 10^{-4}$.

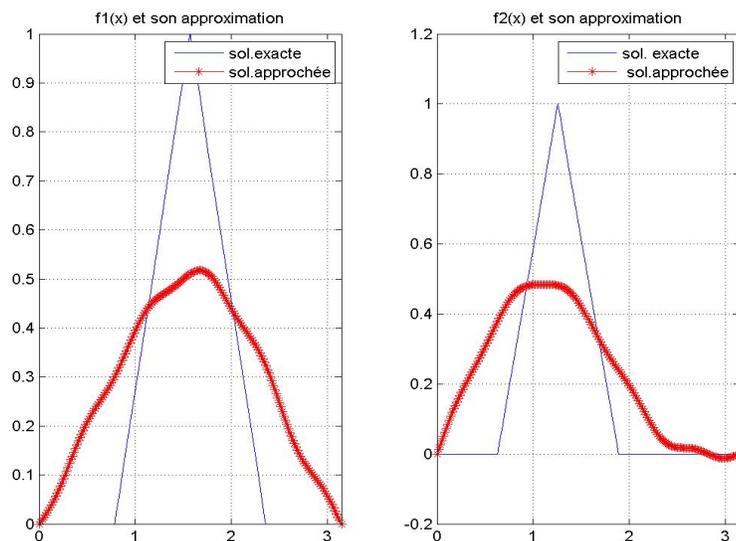


Figure 3.9 : La comparaison entre la solution exacte g et la solution approchée g_α^δ avec $M = 200$, $N = 20$, $\alpha = 10^{-3}$ et $\delta = 10^{-3}$.

► On remarque que :

- d'après le test **1** et **2**, lorsque la matrice de diffusion est diagonale les résultats de convergence sont plus satisfaisants (ceci est dû au caractère mal posé du problème, lié à l'opérateur Δ intervenant dans le système),
- pour le cas de données non bruitées les solutions régularisées sont de bonnes approximations pour le problème considéré,
- la méthode de quasi-réversibilité est sensible aux erreurs de mesures.

Chapitre 4

Identification du terme source dans un système de réaction-diffusion

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'identification du terme source dans un système de réaction-diffusion, pour se faire, on se place dans le même cadre fonctionnel du chapitre précédent.

4.1 Formulation du problème

Soit Ω un domaine borné suffisamment régulier de \mathbb{R}^p et $\mathcal{X} = (L^2(\Omega))^m$ l'espace des fonctions à carré intégrable muni du produit scalaire

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} (v_1(x)w_1(x) + \dots + v_m(x)w_m(x))dx.$$

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - D\Delta u(x, t) = Bu(x, t) + f(x), & 0 < t < 1, \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & 0 \leq t < 1, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

où B et D sont deux $m \times m$ matrices réelles commutatives diagonalisables, avec $\sigma(D) > 0$.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est le terme source inconnu qui doit être déterminé à partir d'une mesure faite au temps $t = 1$,

$$u(x, 1) = g(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.2)$$

On note A l'opérateur non-borné défini par

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

$$Au = -D\Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A),$$

avec

$$\mathcal{D}(A) = (\mathcal{H}(\Omega)^2 \cap \mathcal{H}_0^1(\Omega))^m.$$

$\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ est l'opérateur

$$\mathcal{A} = -A + B$$

et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est le c_0 -semi-groupe sur \mathcal{X} engendré par \mathcal{A} défini par

$$S(t)b = \sum_{n=1}^{\infty} e^{A_n t} P_n b, \quad t \geq 0, \quad b \in \mathcal{X},$$

où

$$A_n = -\lambda_n D + B,$$

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n, \dots, E_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E_n b = (\varphi_n, b) \varphi_n,$$

et $(\lambda_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont les couples propres de Δ .

4.2 Instabilité du problème inverse

Commençons tout d'abord par analyser le problème direct associé au problème inverse (4.1). En effet pour $f \in \mathcal{X}$ donné le problème direct associé à (4.1) écrit sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} u_t(t) + Au(t) = Bu(t) + f, & 0 < t \leq 1, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

est bien posé comme le montre le théorème suivant :

Théorème 4.2.1 *Pour tout $f \in \mathcal{X}$, le problème (4.3) admet une solution unique $u \in C([0, 1], D(A)) \cap C^1([0, 1], \mathcal{X})$ donnée par*

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t S(t-s) f ds \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)(A-B)} f ds. \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1 ► Pour $1 \leq s, r \leq m$, on introduit les décompositions spectrales des matrices D et B comme suit :

$$D = \sum_{i=1}^s d_i Q_i, \quad \sigma(D) = \{d_i\}_{1 \leq i \leq s}, \quad 0 < d_1 < d_2 < \dots < d_s$$

et

$$B = \sum_{j=1}^r b_j B_j, \quad \sigma(B) = \{b_j\}_{1 \leq j \leq r}, \quad b_1 < b_2 < \dots < b_r$$

où $\{Q_i\}_{1 \leq i \leq s}$ et $\{B_j\}_{1 \leq j \leq r}$ sont deux familles complètes de projections.

On suppose que les matrices B et D vérifient la condition

$$\lambda_n d_i \neq b_j, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r, n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent la solution u du problème direct associé à (4.1) prend la forme

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t e^{-(t-s)(A-B)} f(x) ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{(-\lambda_n D - B)(t-s)} P_n f(x) ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^r \left(\sum_{i=1}^s \frac{1 - e^{(-\lambda_n d_i + b_j)t}}{(\lambda_n d_i - b_j)} Q_i \right) B_j \right) P_n f(x). \end{aligned}$$

► Revenons au problème inverse (4.1). Soit l'opérateur

$$\begin{aligned} K : f &\rightarrow g, \\ Kf = g &= \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s \sigma_{n,ij} Q_i B_j P_n f, \end{aligned}$$

où

$$\sigma_{n,ij} = \frac{1 - e^{-\lambda_n d_i + b_j}}{\lambda_n d_i - b_j}.$$

Il est clair que l'opérateur K est compact et injectif. Alors l'étude du problème inverse (4.1) est réduite à l'étude d'une équation de Fredholm de première espèce.

D'après le théorème de Picard, la solution cherchée f est donnée par la formule

$$f = K^{-1}g = \sum_{n \geq 1} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s \frac{1}{\sigma_{n,ij}} Q_i B_j P_n g. \quad (4.4)$$

► Remarquons que $\frac{1}{\sigma_{n,ij}} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. A cause de ce comportement des valeurs singulières le problème est instable.

4.3 Stabilisation et approximation

Notre objectif dans ce qui suit est de stabiliser le problème mal-posé. Une manière standard de le faire est d'éliminer les hautes fréquences et considérer la solution tronquée comme une approximation de la solution instable.

D'autre part Comme la donnée g est souvent entachée d'erreur de mesure, il sera notre objectif de résoudre l'équation (4.4) pour une donnée perturbée g^δ vérifiant

$$\|g - g^\delta\| < \delta, \quad (4.5)$$

où $\delta > 0$ représente le niveau de bruit.

► Pour $N > 0$, on définit la solution régularisée du problème (4.1) pour des données exactes et perturbées respectivement comme suit

$$f_N = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s \frac{1}{\sigma_{n,ij}} Q_i B_j P_n g, \quad (4.6)$$

$$f_N^\delta = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s \frac{1}{\sigma_{n,ij}} Q_i B_j P_n g^\delta. \quad (4.7)$$

Remarque 4.3.1 *Le nombre entier N joue le rôle du paramètre de régularisation. Si N est suffisamment grand, f_N est proche de f . D'autre part si N est fixé, f_N est bornée.*

• Pour établir les résultats de convergence, on suppose que la solution cherchée f satisfait la condition de régularité suivante

$$\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\theta} \|E_n f_k\|^2 \leq E^2, \quad (4.8)$$

où $E > 0$ est une constante donnée, $\theta > 0$.

• De plus on suppose que $|b_j| < \lambda_n d_i^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq r$.

Théorème 4.3.1 *Soient f_N^δ la solution régularisée donnée par (4.7), f la solution exacte donnée par (4.4) et vérifiant (4.8) et $g^\delta(x)$ la donnée mesurée en $t = 1$*

1. Cette condition n'a qu'un intérêt théorique pour établir l'estimation d'erreur et majorer uniformément le terme $\frac{1}{\delta_{n,ij}}$ par rapport à N . Dans les tests numériques, on a pu avoir des résultats de convergence même sans avoir cette condition (voir test 2).

vérifiant (4.5). Si on choisit $\lambda_{N+1} \approx (\frac{E}{\delta})^{\frac{1}{1+\theta}}$, alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|f - f_N^\delta\| \leq E^{\frac{1}{1+\alpha}} \delta^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 + 2c), \quad (4.9)$$

où $c = d_s(1 - e^{-\lambda_1 d_1 + b_r})^{-1}$.

Preuve. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient que

$$\begin{aligned} \|f - f_N^\delta\| &= \|f - f_N + f_N - f_N^\delta\| \\ &\leq \|f - f_N\| + \|f_N - f_N^\delta\|. \end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} \|f - f_N\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} P_n f - \sum_{n=1}^N P_n f \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} P_n f \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} (\lambda_n)^{-\theta} (\lambda_n)^\theta P_n f \right\| \\ &\leq (\lambda_{N+1})^{-\theta} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{n=N+1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\theta} \|E_n f_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\lambda_{N+1})^{-\theta} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\theta} \|E_n f_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\lambda_{N+1})^{-\theta} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\theta} \|E_n f_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|f_N - f_N^\delta\| &= \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s \frac{1}{\sigma_{nij}} Q_i B_j P_n g - \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s \frac{1}{\sigma_{nij}} Q_i B_j P_n g^\delta \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s |\lambda_n d_i - b_j| (1 - e^{-\lambda_n d_i + b_j})^{-1} Q_i B_j P_n (g - g^\delta) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s (|\lambda_n d_i| + |b_j|) (1 - e^{-\lambda_n d_i + b_j})^{-1} Q_i B_j P_n (g - g^\delta) \right\| \\ &\leq 2\lambda_{N+1} c \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^s Q_i B_j P_n (g - g^\delta) \right\| \\ &\leq 2\lambda_{N+1} c \left(\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \|E_n (g_k - g_k^\delta)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\lambda_{N+1} c \|g - g^\delta\|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

où $c = d_s(1 - e^{-\lambda_1 d_1 + b_r})^{-1}$.

De (4.10) et (4.11), il s'ensuit que

$$\|f - f_N^\delta\| \leq (\lambda_{N+1})^{-\theta} E + 2\delta \lambda_{N+1} c.$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned} \|f - f_N^\delta\| &\leq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-\theta}{1+\theta}} E + 2c\delta \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+\theta}} \\ &\leq E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}} (1 + 2c). \end{aligned}$$

□

D'où le résultat.

4.4 Implementation numérique

Dans cette section, on commence par une étude numérique du problème direct qui consiste à le discrétiser en utilisant la méthode des différences finies. Puis on introduit quelques tests numériques justifiant les résultats théoriques et illustrant l'efficacité de la méthode de régularisation utilisée pour approcher le problème inverse.

On considère le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) - 3u_{xx}(x, t) - v_{xx}(x, t) = 2u(x, t) + v(x, t) + f_1(x), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1), \\ v_t(x, t) - 2u_{xx}(x, t) - 4v_{xx}(x, t) = 2u(x, t) + 3v(x, t) + f_2(x), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = v(0, t) = v(\pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x, 0) = v(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (4.12)$$

Le problème (4.12) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{cases} w_t(x, t) - D\Delta w(x, t) = Bw(x, t) + f(x), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, 1), \\ w(0, t) = w(\pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ w(x, 0) = 0, & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (4.13)$$

où $w(x, t) = (u(x, t), v(x, t))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma(B) = \{b_1, b_2\} = \{1, 4\},$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma(D) = \{d_1, d_2\} = \{2, 5\}.$$

On note $(\lambda_n, \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les couples propres de l'opérateur $-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, donnés par

$$\lambda_n = n^2, \quad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La solution du problème direct est donnée par

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1 - e^{(-n^2 d_i + b_j)t}}{n^2 d_i - b_j} \right) Q_i B_j P_n f,$$

où

$$Q_1 = B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_n = \text{diag}(E_n, E_n), \quad E_n z = z_n \varphi_n$$

et

$$z_n = (z, \varphi_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi z(s) \sin(ns) ds, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

4.4.1 Résolution numérique du problème direct

Pour la discrétisation du problème direct (4.12), on adopte la méthode des différences finies. Pour ce but on discrétise l'intervalle $\Omega = [0, \pi]$ en $N_1 + 1$ noeuds $x_i = ih$, pour $i = 0, \dots, N_1$ régulièrement espacés avec un pas $h = \frac{1}{N_1+1}$. De même l'intervalle de temps $[0, 1]$ est décomposé en intervalles élémentaires de pas constant $\Delta t = \frac{1}{m}$ avec $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \dots, m$.

On notera $w_i^j = (u_i^j, v_i^j)^T$ la valeur discrète inconnue de la grandeur $w = (u, v)^T$ au noeuds x_i et au temps t_j .

On propose le schéma de discrétisation suivant basé sur le schéma de Crank-Nicolson :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} - \frac{3}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1}^{j+1} + v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{i+1}^j + v_{i-1}^j - 2v_i^j}{h^2} \right) \\ = (u_i^{j+1} + u_i^j) + \frac{1}{2}(v_i^j + v_i^{j+1}) + f_{1,i}, \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\Delta t} - \frac{2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h^2} \right) - \frac{4}{2} \left(\frac{v_{i+1}^{j+1} + v_{i-1}^{j+1} - 2v_i^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{i+1}^j + v_{i-1}^j - 2v_i^j}{h^2} \right) \\ = (u_i^j + u_i^{j+1}) + \frac{3}{2}(v_i^j + v_i^{j+1}) + f_{2,i}, \\ u_0^j = u_{N_1}^j = v_0^j = v_{N_1}^j = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \\ u_i^0 = 0, \quad 0 \leq i \leq N_1, \\ v_i^0 = 0, \quad 0 \leq i \leq N_1. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Par soucis de simplicité dans le réarrangement des inconnus, on les écrit dans l'ordre suivant :

$$(u_1, \dots, u_{N_1}, v_1, \dots, v_{N_1})^T,$$

on obtient ainsi le système linéaire de $2(N_1 - 1)$ inconnus à $2(N_1 - 1)$ équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} AU^{j+1} = BU^j + C, \quad 0 \leq j \leq m - 1, \\ U_0^j = U_{N_1}^j = (0, \dots, 0)^T, \quad 1 \leq j \leq m, \\ U_i^0 = (0, \dots, 0)^T, \quad 0 \leq i \leq 2N_1 - 2, \end{array} \right. \quad (4.15)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 + 6\beta - \Delta t & -3\beta & & & & & \\ -3\beta & 1 + 6\beta - \Delta t & -3\beta & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -3\beta & 1 + 6\beta - \Delta t & -3\beta & \\ & & & & -3\beta & 1 + 6\beta - \Delta t & \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2\beta - \frac{\Delta t}{2} & -\beta & & & & & \\ -\beta & 2\beta - \frac{\Delta t}{2} & -\beta & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\beta & 2\beta - \frac{\Delta t}{2} & -\beta & \\ & & & & -\beta & 2\beta - \frac{\Delta t}{2} & \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4\beta - \Delta t & -2\beta & & & & \\ -2\beta & 4\beta - \Delta t & -2\beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -2\beta & 4\beta - \Delta t & -2\beta \\ & & & & -2\beta & 4\beta - \Delta t \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 + 8\beta - \frac{3\Delta t}{2} & -4\beta & & & & \\ -4\beta & 1 + 8\beta - \frac{3\Delta t}{2} & -4\beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -4\beta & 1 + 8\beta - \frac{3\Delta t}{2} & -4\beta \\ & & & & -4\beta & 1 + 8\beta - \frac{3\Delta t}{2} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 - 6\beta + \Delta t & 3\beta & & & & \\ 3\beta & 1 - 6\beta + \Delta t & 3\beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 3\beta & 1 - 6\beta + \Delta t & 3\beta \\ & & & & 3\beta & 1 - 6\beta + \Delta t \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -2\beta + \frac{\Delta t}{2} & \beta & & & & \\ \beta & -2\beta + \frac{\Delta t}{2} & \beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta & -2\beta + \frac{\Delta t}{2} & \beta \\ & & & & \beta & -2\beta + \frac{\Delta t}{2} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -4\beta + \Delta t & 2\beta & & & & \\ 2\beta & -4\beta + \Delta t & 2\beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2\beta & -4\beta + \Delta t & 2\beta \\ & & & & 2\beta & -4\beta + \Delta t \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 - 8\beta + \frac{3\Delta t}{2} & 4\beta & & & & \\ 4\beta & 1 - 8\beta + \frac{3\Delta t}{2} & 4\beta & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 4\beta & 1 - 8\beta + \frac{3\Delta t}{2} & 4\beta \\ & & & & 4\beta & 1 - 8\beta + \frac{3\Delta t}{2} \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \Delta t f_{1,1} \\ \vdots \\ \Delta t f_{1,2N_1-1} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \Delta t f_{2,1} \\ \vdots \\ \Delta t f_{2,2N_1-1} \end{pmatrix},$$

avec $\beta = \frac{1}{h^2}$ et $U^j = (u_1^j, u_2^j, \dots, u_{N_1-1}^j, v_1^j, v_2^j, \dots, v_{N_1-1}^j)^T$.

Dans les figures suivantes, on donne la comparaison entre la solution exacte $w = (u, v)$ et son approximation $w_{diff} = (u_{diff}, v_{diff})$ obtenue par la méthode des différences finies.

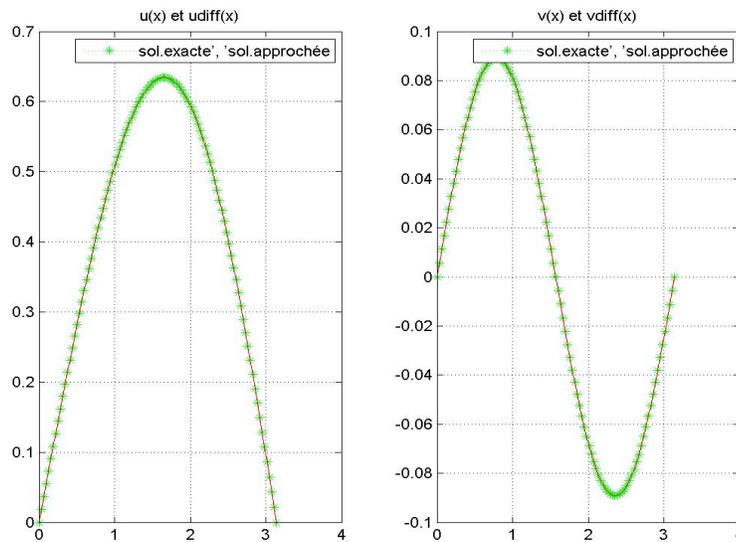


Figure 4.1-Comparaison de w et w_{diff} .

4.4.2 Tests numériques (Problème inverse)

Revenons au problème inverse correspondant à (4.12). On veut déterminer la source inconnue $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ à partir de la donnée supplémentaire au temps $t = 1$

$$w(x, 1) = (u(x, 1), v(x, 1))^T = (g_1(x), g_2(x))^T.$$

La solution régularisée obtenue par la méthode de troncature spectrale est donnée par

$$f_\delta^N(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \left(\frac{n^2 d_i - b_j}{1 - e^{-n^2 d_i + b_j}} \right) Q_i B_j P_n g_\delta(x).$$

On suppose que la donnée g est entachée d'erreur i.e. On dispose de la fonction $g^\delta = (g_1^\delta, g_2^\delta) \in (L^2(0, \pi))^2$ vérifiant

$$\|g - g^\delta\|_{(L^2(0, \pi))^2} < \delta. \quad (4.16)$$

D'où

$$f_{1,N}^\delta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^N ((2\alpha_n + \beta_n) g_1^\delta(s) \sin(ns) + (-\alpha_n + \beta_n) g_2^\delta(s) \sin(ns)) \sin(nx) ds,$$

et

$$f_{2,N}^\delta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^N ((-2\alpha_n + 2\beta_n) g_1^\delta(s) \sin(ns) + (\alpha_n + 2\beta_n) g_2^\delta(s) \sin(ns)) \sin(nx) ds,$$

avec $\alpha_n = \frac{1 - e^{-2n^2 + 1}}{2n^2 - 1}$ et $\beta_n = \frac{1 - e^{-5n^2 + 4}}{5n^2 - 4}$.

Pour l'approximation de l'intégrale, on utilise la règle de trapèze, en faisant une troncature approximative de la série et ceci en choisissant la somme des $M + 1$ termes. Après avoir considéré une grille équidistante $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{M+1} = \pi$, $x_j = (j - 1)h$, $h = \frac{\pi}{M}$, $j = 1, \dots, M + 1$, on obtient

$$f_{1,N}^\delta(x_j) = \frac{2h}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N ((2\alpha_n + \beta_n) g_1^\delta(x_i) \sin(nx_i) + (-\alpha_n + \beta_n) g_2^\delta(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j), \quad (4.17)$$

et

$$f_{2,N}^\delta(x_j) = \frac{2h}{\pi} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N ((-2\alpha_n + 2\beta_n) g_1^\delta(x_i) \sin(nx_i) + (\alpha_n + 2\beta_n) g_2^\delta(x_i) \sin(nx_i)) \sin(nx_j). \quad (4.18)$$

Test 1.

Dans ce premier test, on considère le cas où l'on possède une solution exacte admettant une expression analytique. Si $f(x) = (\sin x, \sin 2x)^T$, alors

$$w(x, t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (3 - 3e^{-t}) \sin(x) + (\frac{1}{112})(-9 + 16e^{-7t} - 7e^{-16t}) \sin(2x) \\ \frac{1}{112}(30 - 16e^{-7t} - 14e^{-16t}) \sin(2x) \end{pmatrix},$$

est la solution exacte du problème (4.12). Par conséquent, on obtient

$$g(x) = w(x, 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (3 - 3e^{-1}) \sin(x) + (\frac{1}{112})(-9 + 16e^{-7} - 7e^{-16}) \sin(2x) \\ \frac{1}{112}(30 - 16e^{-7} - 14e^{-16}) \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Ajoutant une perturbation aléatoire distribuée selon la loi normale à chaque fonction donnée g , on a

$$g_k^\delta = g_k + \text{erandn}(\text{size}(g_k)), k = 1, 2,$$

où ε indique le niveau de bruit des données mesurées. Le niveau de bruit δ_k peut être mesuré dans le sens de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) en utilisant la relation

$$\delta_k = \|g_k^\delta - g_k\|_{l^2} = \left(\frac{1}{M+1} \sum_{i=0}^M (g_k(x_i) - g_k^\delta(x_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, k = 1, 2.$$

L'erreur relative s'obtient par la relation suivante :

$$RE(f_k) = \frac{\|f_{k,N}^\delta - f_k\|_{l^2}}{\|f_k\|_{l^2}}, k = 1, 2.$$

Tableaux et figures

- Les valeurs des paramètres utilisés sont choisis comme suit
- $N = 4$ puis $N = 5$.
- $M = 40$.
- Le bruit considéré est d'amplitude $\varepsilon = 0$ puis $\varepsilon = 10^{-3}$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.

M	$Er(f_1)$	$Er(f_2)$
20	$5.3655e - 016$	$5.2074e - 016$
40	$6.1694e - 016$	$4.9937e - 016$
60	$4.1312e - 015$	$2.2299e - 015$
100	$2.9473e - 015$	$1.7806e - 015$
200	$5.5548e - 015$	$3.6877e - 015$

Tableau 4.1 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 4$.

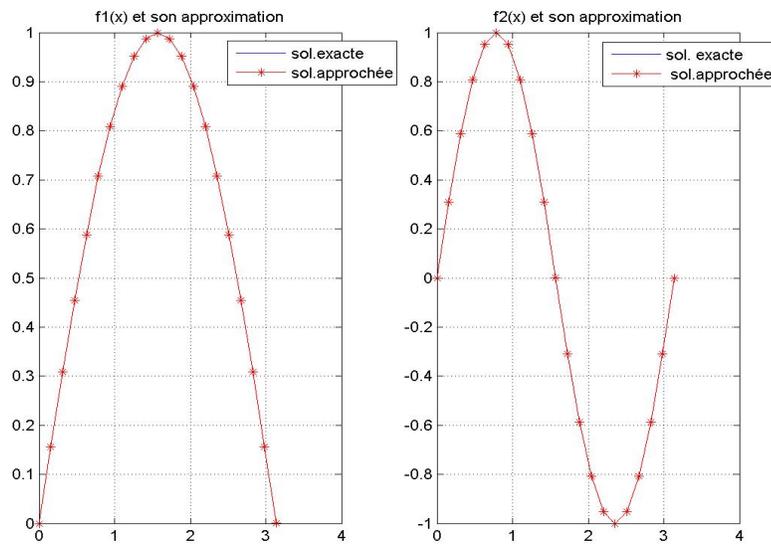


Figure 4.2 : Comparaison entre la solution exacte (non bruitées) et la solution approchée pour $M = 40$ et $N = 4$.

M	$Er(f_1)$	$Er(f_2)$
20	$1.3982e - 15$	$9.3685e - 16$
40	$1.5465e - 15$	$1.2706e - 15$
60	$6.1718e - 15$	$4.0391e - 15$
100	$8.7909e - 15$	$5.2323e - 15$
200	$7.9651e - 15$	$5.4267e - 15$

Tableau 4.2 Erreur relative pour des données exactes avec $N = 5$.

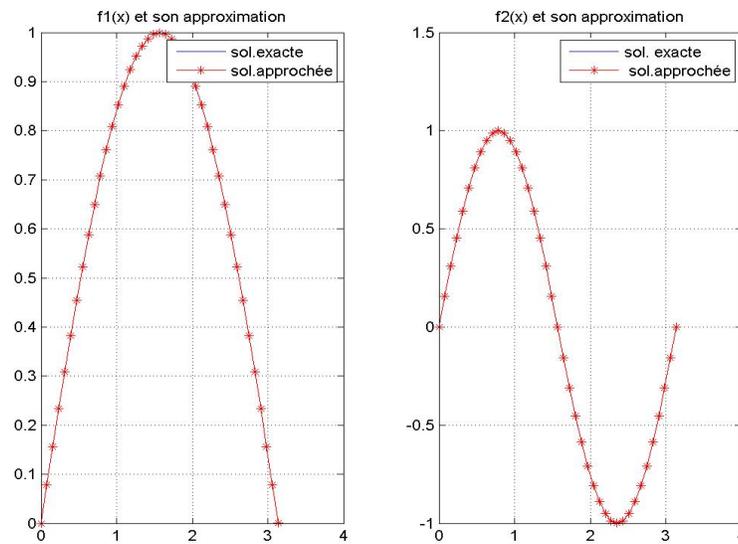


Figure 4.3 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$ et $N = 5$.

M	$Er(f_1)$	$Er(f_2)$
20	0.0202	0.0201
50	0.0136	0.0104
100	0.0050	0.0125
200	0.0030	0.0029

Tableau 4.3 Erreur relative pour des données bruitées avec $N = 4$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

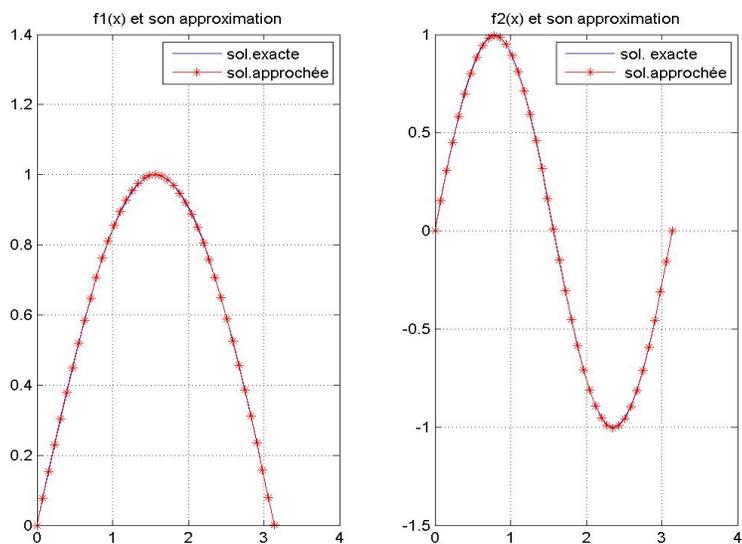


Figure 4.4 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 4$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

M	$Er(f_1)$	$Er(f_2)$
20	0.0043	0.0106
50	0.0169	0.0218
100	0.0084	0.0119
200	0.0059	0.0109

Tableau 4.4 Erreur relative pour des données bruitées avec $N = 5$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

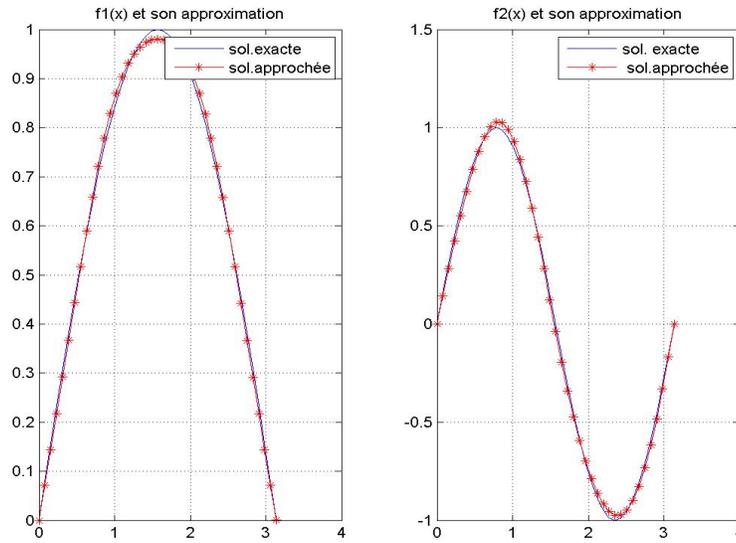


Figure 4.5 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 5$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

M	$Er(f_1)$	$Er(f_2)$
20	0.2977	0.2704
50	0.0454	0.1370
100	0.0244	0.0443
200	0.1024	0.0249

Tableau 4.5 Erreur relative pour des données bruitées avec $N = 4$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

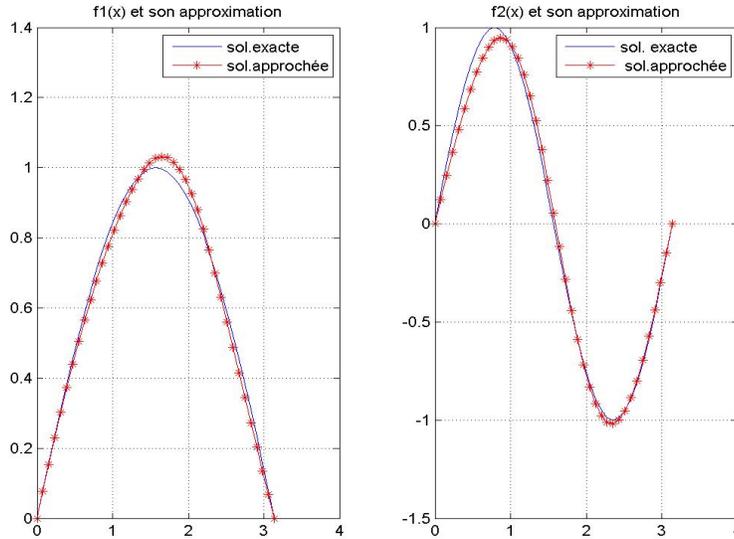


Figure 4.6 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 4$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

► On remarque que dans le cas des données exactes (non bruitées) les solutions approchées obtenues par la méthode de troncature spectrale sont presque identiques aux solutions exactes.

On remarque aussi que même pour un niveau de bruit $\epsilon = 10^{-2}$, les solutions approchées sont proches des solutions exactes.

Test 2.

On prend dans ce cas les matrices D et B comme suit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma(D) = \{d_1, d_2\} = \{1, 4\},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma(B) = \{b_1, b_2\} = \{2, 5\}.$$

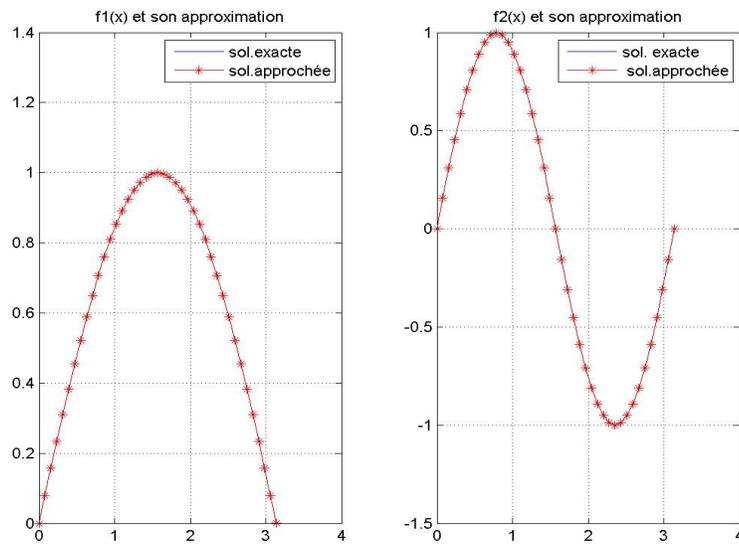


Figure 4.7 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$ et $N = 4$.

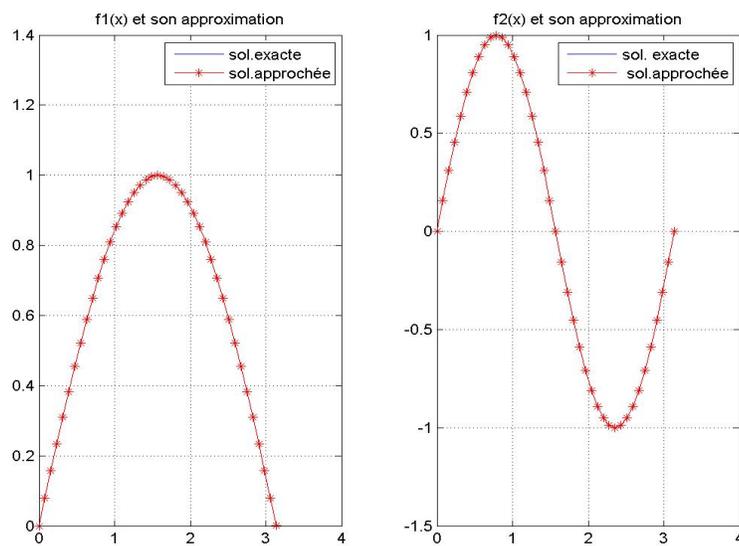


Figure 4.8 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$ et $N = 5$.

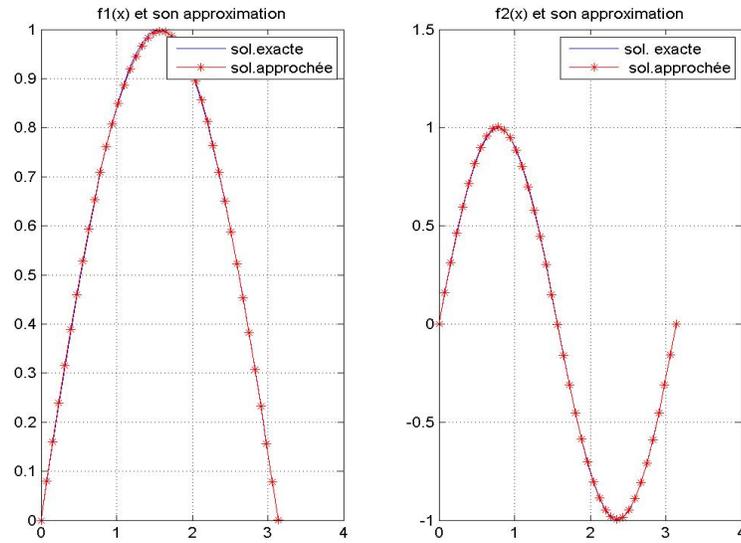


Figure 4.9 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 4$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

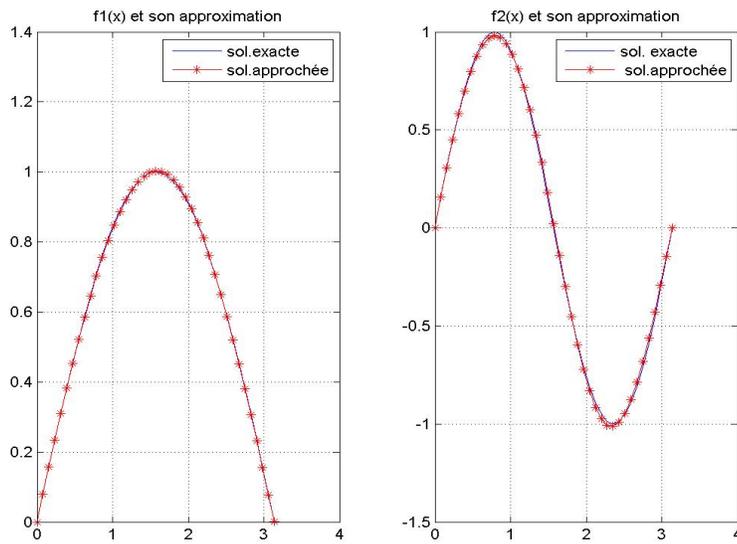


Figure 4.10 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 5$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

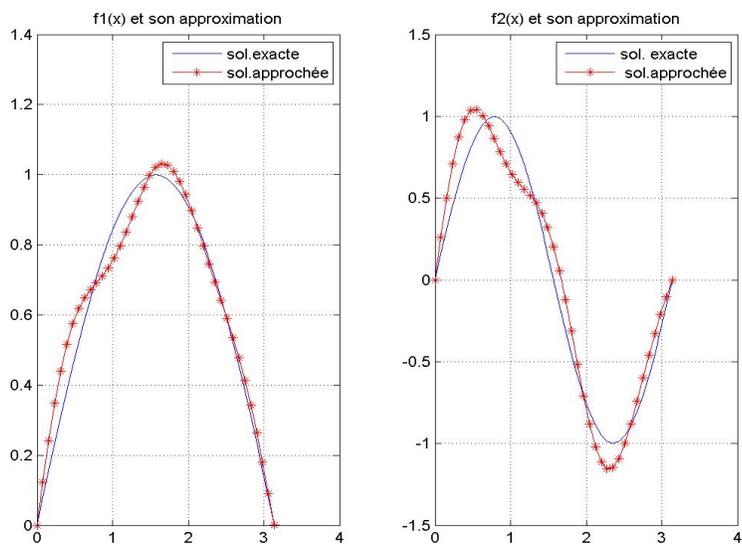


Figure 4.11 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 4$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

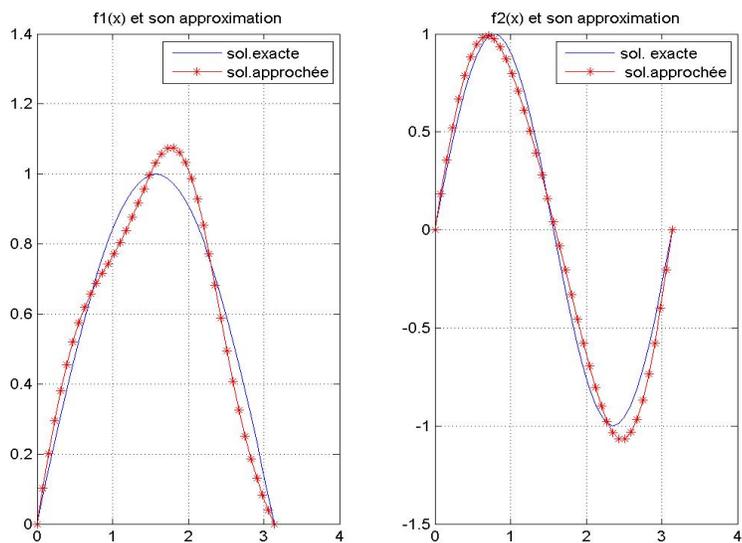


Figure 4.12 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $M = 40$, $N = 5$ et $\epsilon = 10^{-2}$.

- On remarque que même dans le cas $\lambda_n d_i > |b_j|$ ($n \in \mathbb{N}^*$) les solutions régularisées convergent vers les solutions exactes.

Test 3. Choisissons dans ce troisième test

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{4}{\pi}x - 1, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 3 - \frac{4}{\pi}x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{5}, \\ \frac{5}{\pi}x - 1, & \frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{2\pi}{5}, \\ 3 - \frac{5}{\pi}x, & \frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{3\pi}{5}, \\ 0, & \frac{3\pi}{5} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

• Notre résolution numérique comprend les étapes suivantes :

1. résoudre le problème direct par la méthode de différences finies,
2. calculer les vecteurs $g = (g_1, g_2)^T$ au temps $t = 1$,
3. perturber les données $(g_1, g_2)^T$ en ajoutant un bruit généré par la fonction Matlab $randn(\cdot)$,
4. reconstruire la source $f = (f_1, f_2)^T$ à partir des formules (4.17) et (4.18).

► Les paramètres utilisés sont choisis comme suit

- M : paramètre d'approximation de l'intégrale par la méthode des Trapèze.
- N_1 : nombres de noeuds de discrétisation par la méthode des différences finies.
- N : paramètre de régularisation par la méthode de troncature spectrale.

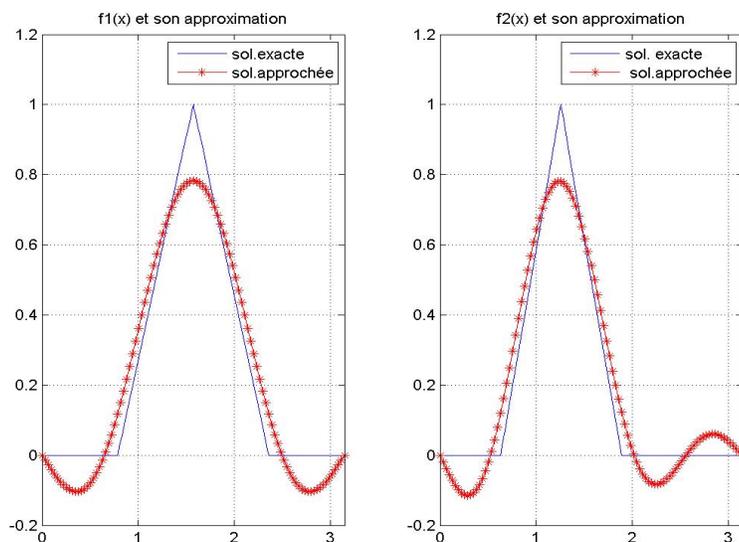


Figure 4.13 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 4$ et $M = 100$.

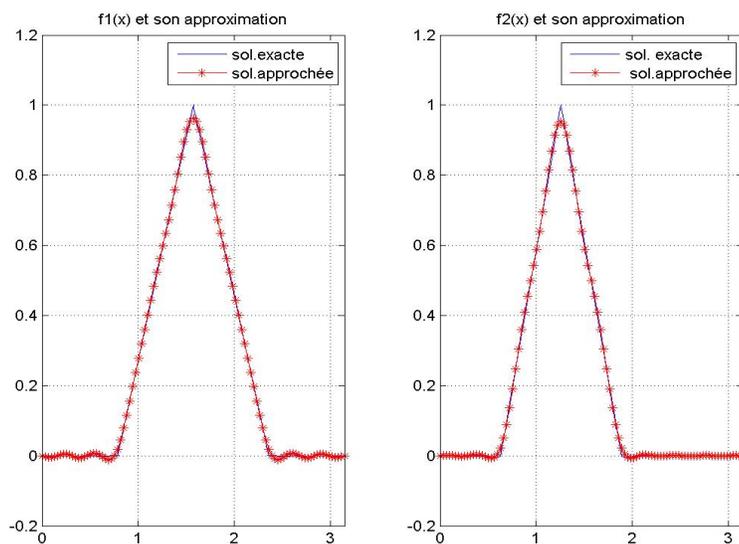


Figure 4.14 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 6$ et $M = 100$.

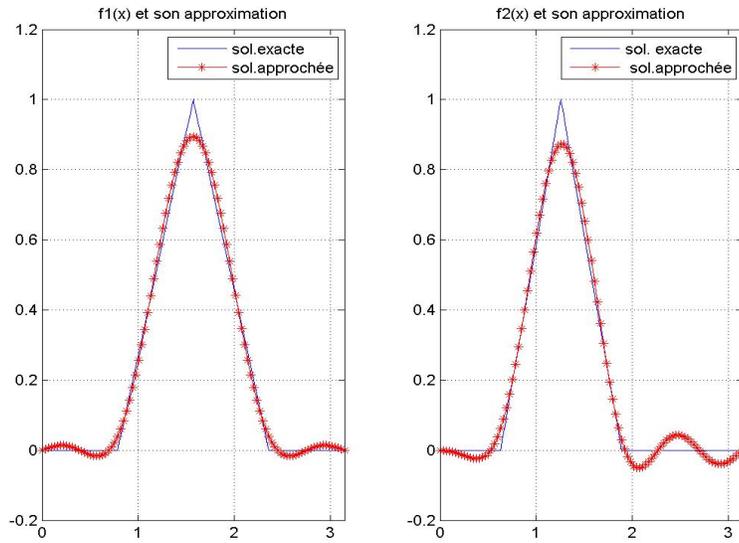


Figure 4.15 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 6, M = 100$ et $\epsilon = 10^{-5}$.

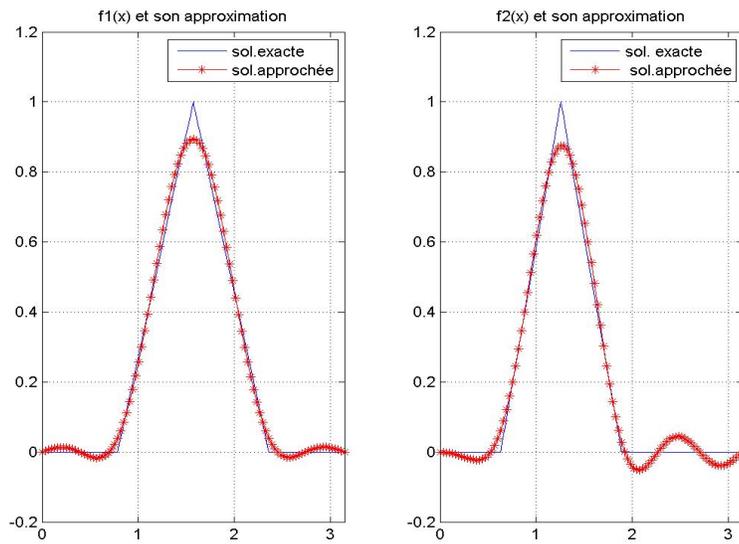


Figure 4.16 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 4, M = 100$ et $\epsilon = 10^{-4}$.

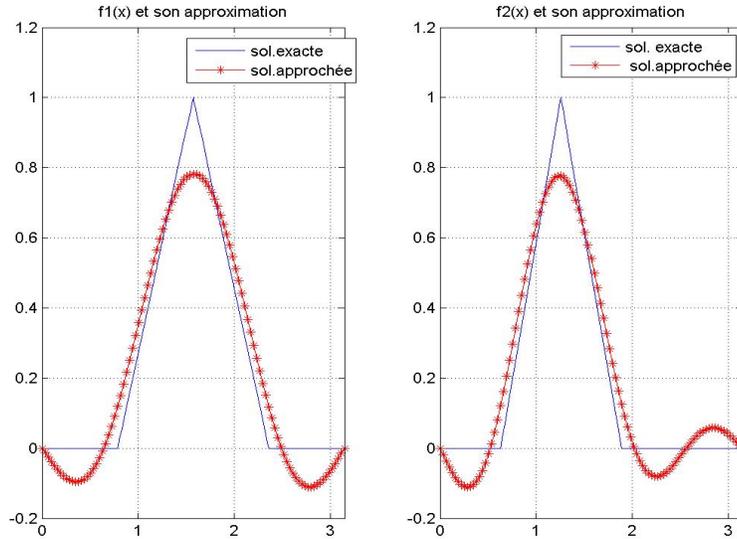


Figure 4.17 : Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour $N = 4, M = 100$ et $\epsilon = 10^{-3}$.

- On remarque que pour les données non bruitées, les solutions approchées constituent de bonnes approximations pour les solutions exactes. Des petites oscillations qui augmentent avec le niveau de bruit sont remarqués pour $\epsilon = 10^{-2}$.
- La méthode de troncature spectrale montre une certaine performance dans la résolution du problème inverse.

Conclusion et perspectives

Dans le cadre de la présente thèse, nous avons traité deux classes de problèmes inverses, en utilisant différentes méthodes de régularisation.

Dans la première classe, nous avons utilisé une procédure de régularisation basée sur la méthode de Tikhonov, pour reconstruire les données manquantes dans un problème parabolique abstrait.

Dans la deuxième classe, on s'est intéressé à une catégorie de systèmes de réaction diffusion où l'on a traité deux problèmes. Le premier consiste à l'identification de la condition initiale en utilisant une variante de la méthode des valeurs aux limites auxiliaires, le second porte sur l'identification du terme source en adoptant la méthode de troncature spectrale. Certains tests numériques ont été illustrés pour vérifier l'efficacité de chaque méthode proposée.

Les résultats obtenus dans le présent travail, ouvrent de nouveaux horizons dans l'étude des systèmes de réaction-diffusion comme perspective, on propose de généraliser l'étude établie en 2d, ainsi de traiter les systèmes de réaction-diffusion non-linéaire, vu l'importance et la présence de cette catégorie de problème dans beaucoup de phénomènes de biologie, physique, chimie et dans la dynamique des populations.

Bibliographie

- [1] L. Abdulkerimov, Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space, Azerdaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap.,Fiz. i. Mat, 32-36(MR0492645), in Russian, (1977).
- [2] H. Amann, Global existence for semilinear parabolic systems, J. Reine Angew. Math., 360, 47-83, (1985).
- [3] H. Amann, Dynamic theory of quasilinear parabolic systems. III. Global existence, Math. Z. 202, 2, 219-250, (1989) and Math. Z. 205, 2, 231, (1990).
- [4] H. Amann, Highly degenerate quasilinear parabolic systems, Ann. Scuola Sup. Pisa, Cl. Sci.(4) 18, 135-166, (1991).
- [5] H. Amann, Hopf bifurcation in quasilinear reaction-diffusion systems, Delay differential equations and dynamical systems (Claremont, CA, 1990), Lecture Notes in Math. 1475, Springer-Verlag, (1991).
- [6] AK. Ames, B. Straughan, Non-Standard and Improperly Posed Problems, Academic Press (1997).
- [7] M. Andrie, AE. Badia, Identification of multiple moving pollution sources in surface waters or atmospheric media with boundary observations,Inverse Problems,vol. 28, No. 2, Article ID 075009, (2012).
- [8] R. Aris : The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, Clarendon Press, Oxford, DOI : 10.1137/1018132, (1976).
- [9] D.G. Aronson, The role of diffusion in mathematical population biology, Lecture Notes in Biomathematics, vol. 57, 2-6, (1985).

- [10] S.A. Atanbaev, On the quasi-inversion method for second-order evolution equations, *Vestn. Minist. Nauki Vyssh. Obraz. Nats. Akad. Nauk Resp. Kaz.*, No. 1, 30-36, (Russian), (1999).
- [11] G. Bastay, *Iterative Methods for Ill-posed Boundary Value Problems*. Linköping Studies in Science and Technology, Dissertations No. 392, Linköping Univ, Linköping, (1995).
- [12] J. Baumeister, A.Leitao, On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl*, 9 No. 1, 13-29, (2001).
- [13] A. Benrabah N. Boussetila, Modified nonlocal boundary value problem method for an ill-posed problem for the biharmonic equation, *Inverse Problems in Science and Engineering*, DOI : 10.1080/1741-5985, (2018).
- [14] F. Berntsson, VA. Kozlov, L. Mpinganzima, BO. Turesson, An alternating iterative procedure for the Cauchy problem for the Helmholtz equation, *Inverse Problems in Science and Engineering* 22, No. 1, 4562.2, (2014).
- [15] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson. Paris, (1983).
- [16] J.R. Cannon, P. DuChateau, An inverse problem for determination an unknown source term in a heat equation, *J. Math. Appl.* 75(2)465 – 485, (1980).
- [17] V. Capasso, A. Di Liddo, Global attractivity for reaction-diffusion systems. The case of nondiagonal matrices, *J. Math. Anal. Appl.* 177, 510 – 529.
- [18] Y. Ching-Yu, Solution of an inverse vibration problem using a linear least-squares error method. *Applied Mathematical Modelling*, 20(10) :785 - 788, (1996).
- [19] G. W. Clark, S. F. Oppenheimer, Quasireversibility methods for non-well posed problems. *Elect. J. Dif. Eqns.* 8, 1 – 9, (1994).
- [20] A.D. Cliff, P. Haggett, J.K. Ord, G.R. Versey, *Spatial Diffusion. An Historical Geography of Epidemics in an Island Community*. Cambridge University Press, Cambridge, (1981).

- [21] A. W. Conway, J. Grünwald, A. Signorini, O. Tedoni, A. Tonolo, The propagation of light in a uniaxial crystal, *Proceedings of the London Mathem. Soc* , pp. 220 – 245, (1902).
- [22] C. Cosner, W. Rundell, Extension of solutions to second-order partial differential equations by the method of quasireversibility, *Houston J. Math.*, 10, No. 3, 357-370, (1984).
- [23] M. Cristofol, P. Gaitan, H. Ramoul, Inverse problems for two by two reaction-diffusion system using a Carleman estimate with one observation, *Inverse Problems* 22 1561, (2006).
- [24] R. Courant , D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley and Sons Inc, New York, 1989. Partial differential equations, Reprint of the original, A Wiley-Interscience Publication, (1962).
- [25] R. Dautray, J.L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Vol.3, Spectral theory and applications*, Springer-Verlag, Berlin, (1992).
- [26] S.Djemoui, F.Zouyed, Sur une classe de problème mal-posés, Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar, Annaba, (2016).
- [27] S.Djemoui, F.Zouyed, Quasi-boundary value method for an ill posed diffusion system, *International Journal of Applied Mathematics* Vol 105 No. 3 , 359-376, (2015).
- [28] B. Dellattre, D. Ivaldi et C. Stolz, Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique. Pages 393,404 of REEF, Gien's 01, (2001).
- [29] L. F. de Oliveira, A note on reaction-diffusion systems. *Universidades São paulo*,SP 05508-900, Brazil, (1997).
- [30] L. F. de Oliveira, On reaction-diffusion systems. *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 1998, No. 24, 1-10, (1998).
- [31] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators, part II.* John Wiley and sons, Inc, New York, (1967).

- [32] D.E. Edmunds, and W.D. Evans, *Spectral Theory and Differential Operators*, Clarendon Press, Oxford, (1987).
- [33] A. El Badia and T. Ha-Duong, On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 585-599, (2002).
- [34] L. Eldén, F. Berntsson, T. Reginska, Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation, *SIAMJ. Sci. Comput.* 21 (6) 2187-2205, (2000).
- [35] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularisation of inerse problems*. Kluwer, dordrecht, (1991).
- [36] H. W. Engl, C. Groetsch, *Inverse and ill-posed problems. Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering. Vol. 4.* Academic press, (1987).
- [37] G. Fichera, Analisi esistenziali per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi allequazioni e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, autoaggiunti, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) 1 (1947) 75- 100, (1949).
- [38] G. Fichera, *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, . *Lecture Notes in Math.* 8, Springer-Verlag, (1965).
- [39] P.C. Fife, *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems. Lecture Notes in Biomathematics*, vol. 28, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, DOI : 10.1007/978 - 3 - 642 - 93111 - 6, (1979).
- [40] C. L. Fu, X. T. Xiong, Z. Qian, Fourier regularization for a backward heat equation, *J. Math. Anal. Appl.* 331 472i£ · 480, (2007).
- [41] VL. Fushchich, AS. Galitsyn, AS. Polubinskii, A new mathematical model of heat conduction processes, *Ukrainian Math. J.* 42, 210-216, (1990).
- [42] A.N. Galybin, An inverse problem of elastostatics in mechanics of composites. *Composites Science and Technology*, 68(5) :1188 - 1197, (2008).
- [43] E. Gandino, L. Garibaldi, and S. Marchesiello. Pescara benchmarks, nonlinear identification. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 305. IOP Publishing. article n 012132, (2011).

- [44] J.A. Goldstein, Semi-groups of linear operators and applications, Oxford university, press New York, (1985).
- [45] M. Haase, The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods, Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).
- [46] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les equation aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, (1932).
- [47] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin. Vol. 13, p.49-52.
- [48] J. Hadamard, Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations, Yale Uni Press, New Haven, (1923).
- [49] K.P. Hadeler, Diffusion Equations in Biology. Mathematics of Biology. vol. 80, , 149-177, DOI : 10.1007/978 – 3 – 642 – 11069 – 6_3, (2011).
- [50] P. C. Hansen, Rank- deficient and discrete ill-posed problems, numerical aspects of linear inversion. SIAM, Philadelphia, (1998).
- [51] D.N. Hào, V.D. Nguyen and D. Lesnic, A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations, Inverse Problems, 25055002 (27), (2009).
- [52] D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations, Springer, New York, (1981).
- [53] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, New York, (1998).
- [54] V. Isakov, Inverse problems for partial differential equations, volume 127 of Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, second edition, (2006).
- [55] V. Isakov, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag , New York, (1998).
- [56] V. K. Ivanov, I.V. Melnikova, A.I. Flinkov, Operator-Differential equations and Ill-posed Problems, Moscow, (1995).
- [57] B. Kaltenbacher and W. Rundell , The inverse problem of reconstructing reaction-diffusion systems. Inverse Problems 36 065011, (2020).

- [58] B. Kaltenbacher and W. Rundell, On the identification of a nonlinear term in a reaction-diffusion equation. *Inverse Problems* 35 115007, (2019).
- [59] J. B. Keller, Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, 83 :107-118, (1976).
- [60] M. Kern, Problèmes inverses. Syllabus du cours à l'Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, (2002).
- [61] B. khelili, N. Boussetila and Rebbani Faouzia, A modified quasi-boundary value method for an abstract ill-posed biparabolic problem. *Open Math.* , 15 : 1649-1666, (2017).
- [62] A. Kirsch, An introduction to the mathematical theory of inverse problems, Springer, Heidelberg, (1996).
- [63] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, *Leningrad Math. J*, 1 , No. 5, 1207-1228, (1990).
- [64] VA. Kozlov, VG. Maz'ya, A. V. Fomin, An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic eqations. *U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 31, No. 1, 45-52, (1991).
- [65] R. Kress, D. Colton, Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, *Applies Mathematical Sciences*, Springer, (2010).
- [66] G. A. Kriegsmann and W. E. Olmstead, Source identification for the heat equation. *Appl. Math. Lett*, 1(3) :241-245, (1988).
- [67] C.Kuttler, Reaction-diffusion equations and their application on bacterial communication *Disease Modelling and Public Health (Handbook of Statistics)* ed A S R S Rao, S Pyne and C R Rao (Amsterdam : Elsevier Science), (2017).
- [68] R. Lattès, J. L. Lions, The Method of Quasireversibility, *Applications to Partial Differential Equations*, Amer. Elsevier, New-York, (1969).
- [69] H. Leiva, A lemma on C_0 -semigroups and applications PDEs systems, *Quaestiones Mathematicae*, vol. 26, No. 3, 247-265, (2003).
- [70] H. Leiva, Linear Reaction-Diffusion Systems, *Notas de Mathematica*, No 185, Mereida January (1999).

- [71] D. T.W. Lin, C.C. Wang, C.Y. Yang, and J.C. Li, Inverse estimation of temperature boundary conditions with irregular shape of gas tank, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53(21-22) :4651 - 4662, (2010).
- [72] Luiz Augusto F. de Oliveira, A note On reaction-diffusion systems, *Universidades de Seao Paulo, SP 05508-900 Brazil*, (1997).
- [73] D. Mace, P. Lailly, Solution of the VSP one-dimentional inverse problems. *Geophysical Prospecting*, 34 pp. 1002-1021.
- [74] N. Magnoli, GA. Viano, The source identification problem in electromagnetic theory, *Journal of Mathematics physics*, vol. 38, No.5, pp. 2366-2388, (1997).
- [75] I.V. Melnikova, A. I. Filinkov : *Abstract Cauchy Problems, Three Approaches*, Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 120, Chapman and Hall, Boca Raton, FL, (2001).
- [76] I.V. Melnikova, Regularization of ill-posed differential problems, *Siberian Math. J.* 33 289-98, (1992).
- [77] K. Miller, Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well posed problems, *Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Mathematics*, 316, Springer-Verlag, Berlin, 161-176, (1973).
- [78] V. A. Morozov, On the solution of functional equations by the method of regularization, *Soviet Math. Doklady*, 7, 414-417, (1966).
- [79] J. D. Murray *Mathematical Biology I. An Introduction (Interdisciplinary Applied Mathematics vol 17) 3rd edn (New York : Springer)*, (2002).
- [80] B. F. Nielsen, X. Cai, and M. Lysaker, On the possibility for computing the transmembrane potential in the heart with a one shot method : An inverse problem. *Mathematical Biosciences*, 210(2) :523 - 553, (2007).
- [81] L. Niremberg, The development of travelling waves in quadratic and cubic auto catalysis with unigual diffusion rates. *Trans. R. SOC. Londol, Collège de France. Note Math, Billingham*, 65-129.
- [82] A. Okubo, *Diffusion and Ecological Problems : Mathematical Models*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1980).

- [83] L. Payne, Bounds in the Cauchy problem for Laplace's equation, Arch. Rational Mech. Anal. 5, 35-45, (1960).
- [84] L. Payne, Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations, Philadelphia, SIAM, (1975).
- [85] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-verlag New York, (1983).
- [86] N.H. Pollack, S. Huang, Climate reconstruction from subsurface temperatures. Annu. Rev. Earth Planet. Sci, 28, 339-65, (2000).
- [87] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York ; Basel, (2000).
- [88] Z. Qian, C.L. Fu, X.T. Xiong, T. Wei, Fourier truncation method for high order numerical derivatives, Appl. Math. Comput. 181 940-948, (2006).
- [89] M. Raynaud, J. Bransier, A new finite-difference method for the nonlinear heat conduction problem. Numerical Heat Transfer 27-42, (1986).
- [90] T. Regińska, K. Regiński, Approximate solution of a Cauchy problem for the Helmholtz equation, Inverse Problems 22 975-989, (2006).
- [91] F. Roth, Global solutions of reaction diffusion systems, Lecture Notes in Math. 1072, Springer Verlag, Berlin, (1984).
- [92] K. Sakthivel a, S. Gnanavel b, N. Barani Balan b, K. Balachandran Inverse problem for the reaction diffusion system by optimization method. Applied Mathematical Modelling 35, 571-579, (2011).
- [93] N.Saouli, F.Zouyed, A modified Tikhonov regularization method for a class of inverse parabolic problems, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Vol. 28(1), 181-204, 2020.
- [94] A. Shidfar, G.R. Karamali, Numerical solution of inverse heat conduction problem with nonstationary measurements, Appl. Math. Comput. 168(1)540 – 548, (2005).
- [95] R.E. Showalter, The final value problem for evolution equations, J. Math. Anal. Appl, 4, 563-572, (1974).

- [96] R.E. Showalter, Quasi-reversibility of first and second order parabolic evolution equations. Improperly posed boundary value problems (Conf., Univ. New Mexico, Albuquerque, N.M., 1974), 76-84. Res. Notes in Math, Pitman, London, (1975).
- [97] R.E. Showalter, Cauchy problem for hyper-parabolic partial differential equations, Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier (1983).
- [98] J. M. Thomas, Riquier's existence theorems, Ann. of Math. (2) vol. 30, pp. 285-310, (1929).
- [99] A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin, Solutions to ill-posed problems. New York, (1977).
- [100] A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, A. G. Yagola, Nelineinye nekorrektnye zadachi (Nonlinear Ill-Posed Problems), Moscow, (1995).
- [101] D.D. Trong, N.T. Long, P.N.D.Alain, Nonhomogeneous heat equation : identification and regularization for the inhomogeneous term, 31293 – 104, (2005).
- [102] P.N. Vabishchevich, Nonlocal parabolic problems and the inverse heat-conduction problem, Differential'nye Uravneniya 17 1193-1199, (in Russian), (1981).
- [103] V. Van Au, M. Kirane and N. Huy Tuan, Determination of initial data for a reaction diffusion system with variable coefficients. discrete and continuous dynamical systems, Volume 39, Number 2, (2019).
- [104] V. Volterra, Sur les vibrations des corps élastiques isotropes, Acta mathematica, t. pp. 161 – 232, 18, (1894).
- [105] I. Vrabie, C_0 -semigroups and Applications, North-Holland Publishing, Amsterdam, (2003).