الجمهوريــة الجزائـريــة الديمقراطيــة الشعبيــة
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليــم العــالـي والبحــث العلمــي
Ministry of Higher Education and Scientific Research

Badji Mokhtar-Annaba University

Faculty of Science
Department of Mathematics

جــامعة بــاجــي مختــار-
عنــابــة -
كلية العلوم – قسم الرياضيات

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités et Statistique

Etude des systèmes stochastiques dirigés par un mouvement Brownien fractionnaire

Par:

AHMED-YAHIA RAKIA

Sous la direction de

Directeur de thèse : Benchaabane Abbes MCA. U. 8 Mai 1945 Guelma

Co-directeur de thèse : Zeghdoudi Halim Pr. U.B.M.Annaba

Devant le jury

PRESIDENT	Ghanem Radouen	Pr. U.B.M.Annaba
Examinateur	Kerboua Mourad	MCA. U. 8 Mai 1945 Guelma
Examinateur	Ezzebsa Abdelali	MCA. U. 8 Mai 1945 Guelma

Année : 2022

.

ملخص

تتناول هذه الرسالة دراسة وجود الحل والتحكم لفئة من المعادلات التصادفية الحيادية من الرتبة الثانية، ذات معاملات غير ليبشيتزية، موجهة بحركة براونية وعملية لـ رسنبلات.

يحتوي الفصل الأول على أهم المفاهيم المتعلقة بالحركة البراونية، ومزيد من التفاصيل حول عملية رسنبلات.

أما الفصل الثاني فيتعلق بعائلات جيب التمام، ووجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية غير خطية، ثم إمكانية التحكم في نظام خطي حتمي، بالإضافة الى بعض أنواع قابلية التحكم الموجودة في الأدبيات.

في الفصل الثالث، درسنا فئة من المعادلات التفاضلية التصادفية الدالية المحايدة من الرتبة الثانية، موجهة في آن واحد بعملية رسنبلات وحركة براونية قياسية في فضاء هلبرت. لقد برهنا على وجود ووحدانية الحل في ظل شرط غير ليبشيتزي، الذي هو أضعف من شرط ليبشيتز، وقد وضعنا بعض الشروط لضمان إمكانية التحكم في الحل المعتدل عن طريق مبدأ بناخ للنقطة الثابتة.

أخيرًا، قدمنا مثالًا عمليًا لتوضيح موثوقية النتيجة.

الكلمات المفتاحية:

قابلية التحكم، النظام التصادفي من الرتبة الثانية، عائلة جيب التمام، الحركة البراونية، عملية رسنبلات، شروط غير ليبشيتزية.

.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude de l'existence de la solution ainsi que du contrôle, pour une classe d'équations stochastiques du second ordre de type neutre, à coefficients non-Lipschitziens, dirigées par un mouvement Brownien et un processus de Rosenblatt. Le premier chapitre, contient les plus importantes notions concernant le mouvement Brownien, et plus de détails sur le processus de Rosenblatt.

Le deuxième chapitre, concerne les familles de cosinus, l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle non linéaire. Ensuite, la contrôlabilité d'un système linéaire déterministe, ainsi que quelques types de contrôlabilité, existant dans la littérature.

Dans le troisième chapitre, on a étudié une classe d'équations différentielles stochastiques fonctionnelles du second ordre de type neutre dirigées simultanément par un processus de Rosenblatt et un mouvement Brownien standard dans un espace de Hilbert. On a démontré un résultat d'existence et d'unicité sous condition non-Lipschitzienne qui est plus faible que la condition de Lipschitz et on a établi quelques conditions afin d'assurer la contrôlabilité de la solution mild au moyen du principe de point fixe de Banach.
En fin, on a fourni un exemple pratique pour illustrer la fiabilité du résultat.

Mots clés : Contrôlabilité, Système stochastique du second ordre, Famille de cosinus, Mouvement Brownien, Processus de Rosenblatt, Condition non-Lipschitzienne.

.

Abstract

This thesis deals with the study of the solution existence and the control, for a class of neutral second order stochastic equations, with non-Lipschitz coefficients, driven by an independent Brownian motion and a Rosenblatt process.

The first chapter, contains the most important notions of the Brownian motion, and more details about the Rosenblatt process.

The second chapter concerns cosine families, the existence and uniqueness of the solution of nonlinear differential equation. Then, the controllability of a deterministic linear system, as well as some types of controllability, found in literature.

In the third chapter, we studied a class of neutral second order functional stochastic differential equations driven simultaneously by Rosenblatt process and a standard Brownian motion in Hilbert space. We have demonstrated an existence and uniqueness result under non-Lipschitz condition which is weaker than the Lipschitz condition and we have established some conditions to ensure the controllability of the mild solution, by means of Banach's fixed point principle.

Finally, we have provided a practical example to clarify the result reliability.

Key words : Controllability, Second-order stochastic system, Cosine family, Brownian motion, Rosenblatt process, Non-Lipschitz condition.

Remerciements

J’adresse mes vifs remerciements à mes Directeurs de thèse : **Dr Abbes Benchaabane**, (U. 8 Mai 1945. Guelma) et **Prof. Halim Zeghdoudi** (U. B. M. Annaba). Je leur suis très reconnaissante de la confiance qu’ils m’ont toujours témoignée au cours de ces années de doctorat. Qu’ils trouvent ici toute ma gratitude pour leur suivi attentif, leur soutien, leurs conseils et leur disponibilité.

- Je remercie vivement, **Prof.Ghanem Radouen** (U. B. M. Annaba) qui m’a fait l’honneur de présider le jury, **Dr Kerboua Mourad** (U. 8 Mai 1945 Guelma), ainsi que **Dr. Ezzebsa Abdelali** (U. 8 Mai 1945 Guelma), pour avoir accepté de faire partie du jury et d’avoir pris sur leurs temps afin de lire ma thèse.

- Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques, pour leur assistance.

- En fin, je remercie, l’équipe du laboratoire d’analyse et de Contrôle des équations différentielles "ACED" de l’Université 8 Mai 1945 de Guelma, ainsi que le directeur du laboratoire "MELILAB" DE MILA pour leur support.

- Toute ma gratitude à tous les enseignants qui ont participé à ma formation, du primaire à l’université.

- Je remercie particulièrement ma famille et mes amies. Enfin, un grand merci à toute personne ayant contribué de loin ou de près à la concrétisation de cette thèse.

Dédicaces

A la mémoire de mon père,

A ma mère,

A mes frères et sœurs,

A toute ma famille, A mes amies

Notations

- $\mathscr{L}(X)$: espace de tous les opérateurs linéaires bornés sur X.
- 1_A : fonction indicatrice avec $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
- $\{T(t)\}_{t\geq 0}$: famille d'opérateurs linéaires bornés.
- $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$: famille de cosinus.
- $\{S(t), t \in \mathbb{R}\}$: famille de sinus associée à $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$.
- $E = \{x : C(t)x$ est une fonction continument différentiable en t$\}$.
- $a \wedge b$: minimum de a et b.
- $a \vee b$: maximum de a et b.
- $X \overset{\mathrm{d}}{=} Y$: égalité au sens des distributions de dimension finie.
- x_+ : max(x,0).
- $:=$ égalité par définition.
- $\mathcal{L}_2(X, Y)$: espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur X à valeurs dans Y.
- $R(t, s)$: covariance du processus.
- $\mathcal{L}_2^0(Y, X)$: espace de tous les opérateurs Q -Hilbert-Schmidt agissant entre Y et X.
- $\mathcal{U}$: ensemble des contrôles.
- $\mathcal{U}_{ad}$: ensemble des contrôles admissibles.
- $L_{loc}([0, +\infty[; U)$: ensemble des fonctions localement intégrables à valeurs dans $\mathcal{R}^m$.

D'autres notations, seront éclaircies quand elles apparaitront pour la première fois.

Table des matières

Introduction **1**

Thématique de la thèse **1**

1 Analyse stochastique **5**

1.1 Mouvement Brownien 5

1.2 Processus de Rosenblatt 7

2 Opérateurs et contrôlabilité **18**

2.1 Familles de Cosinus 18

2.2 Équations Fonctionnelles 25

2.3 Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle non linéaire 26

2.4 Contrôlabilité 30

3 Équations stochastiques du second ordre dirigées par un processus de Rosenblatt et un mouvement Brownien **37**

3.1 Solution mild du système stochastique 39

3.2 Contrôlabilité du système 45

3.3 Application à un système stochastique du second ordre de type neutre . . . 55

Conclusion et Perspective **59**

Introduction

Thématique de la thèse

En 1908 C. E. Picard déclara que l'on pouvait rêver d'équations fonctionnelles plus compliquées que les équations classiques. En effet, grâce aux intégrales prises entre un temps passé très éloigné et le temps actuel, quelles renfermeraient, elles apporteraient la part de l'hérédité qui manquait aux equations. Il devint ainsi, le premier mathématicien, à évoquer la nécessité de prendre en compte le passé d'un système dans sa modélisation différentielle [19]. Ce fut K. Itô et Nisio, qui initièrent l'étude des équation différentielles stochastiques fonctionnelles en 1963 [17]. Mais ce n'est qu'en 1970 que la théorie des équations fonctionnelles différentielles -appelées aussi équations différentielles à retard- fut fondée, par J.K.Hale, [15].

Le plus connu des processus stochastiques est le mouvement Brownien. Largement utilisé, on le trouve dans les mathématiques financières, l'économie (par exemple en évolution des prix des actions et des taux d'intérêt obligataires), la mécanique quantique, le traitement du signal, la chimie, la météorologie, ... et même la musique ! Il permet d'effectuer un calcul différentiel adapté aux trajectoires non différentiables. Actuellement, on s'intéresse considérablement au mouvement Brownien fractionnaire. Son utilisation majeure est due à ses propriétés d'auto-similarité, de dépendance, et de longue portée et si on le préfère aux autres processus, c'est parce qu'il est gaussien et simple de calcul.
Dirigées par le mouvement Brownien fractionnaire (mBf), les équations différentielles stochastiques, bénéficient d'un intérêt croissant, [20], [36])...etc. Ce processus est incontournable quand on veut s'affranchir des propriétés de Markov et de l'indépendance des accroissements. Cependant, il y a des situations concrètes où les données du modèle ne semblent pas être gaussiennes. Le processus de Rosenblatt peut alors, intervenir. Ce dernier qui fut nommé par Taqqu [39], a fait l'objet de différentes études dans la littérature,

notamment ses aspects théoriques. Sa théorie a été développée et enrichie, en raison de ses bonnes propriétés, telles que l'auto-similarité, la stationnarité des accroissements, la dépendance à long terme, etc. [29], [38], [23]. Par exemple, une loi de logarithme itéré a été donnée en 1993 dans [13]. Les propriétés extrêmes de la distribution de Rosenblatt ont été étudiées par Albin[5]. Le taux de convergence vers le processus de Rosenblatt, dans Le Théorème de la limite non-centrale, a été donné par Leonenko et Ahn [23] en 2001. Abry et Pipiras [2] en 2006 ont donné le développement de type ondelette du processus de Rosenblatt. Tudore [41] en 2008 a établi sa représentation comme une intégrale multiple de Wiener-Itô par rapport au mouvement Brownien sur un intervalle fini, et développé le calcul stochastique par rapport à celui-ci, en utilisant à la fois le calcul trajectoriel et le calcul de Malliavin (voir [25], Maejima et Tudor [26]), pour plus de détails sur le processus de Rosenblatt, et le calcul stochastique associé.
Les processus de Rosenblatt contribuent également, dans des modèles où l'auto-similarité est observée dans des données empiriques et qui semblent être non gaussiennes. Voir [33].

En raison de ses différentes applications dans le domaine des mathématiques appliquées, tels que, les équations fonctionnelles stochastiques (EFSs), la contrôlabilité a suscité beaucoup d'intérêt durant de la dernière décennie.
Conçue par Kalman, la notion de contrôlabilité a été lancée systématiquement au début des années soixante, du fait qu'elle fournit un des comportements qualitatifs de base d'un système dynamique. Elle a été développée en réponse à des problèmes générés par les besoins de la technologie, tels que les domaines liés aux contrôle, communication, informatique, finances, électricité, physique quantique...etc. Elle signifie généralement qu'à l'aide d'un jeu de commandes admissibles, il est possible de guider un système de contrôle dynamique à partir d'un état initial arbitraire à un état arbitraire final. Voir par exemple Tréla [40] pour des concepts de base concernant la contrôlabilité.
Selon le cadre ou le type de modèle appliqué, si le système ne peut être complètement contrôlable, il existe dans la littérature différents types de contrôlabilité pour les EFSs, aussi bien pour les systèmes dynamiques linéaires (ex. Goreac[14]) que non linéaires (Balachandran [7]). On compte respectivement, contrôlabilité approximative des EDSs (Goreac [14]), contrôlabilité nulle exacte des EDSs linéaires de dimension infinie (Sirbu et Tessitore[35]), contrôlabilité faible et forte, (Aapostathis et al.[6]). Bachirov [9] donna une caractérisation de la contrôlabilité approchée, de concept plus faible pour les EDS non linéaires et de contrôlabilité complète d'un système de contrôle stochastique. Shen et al.

[34] étudia la contrôlabilité complète des systèmes intégro-différentiels impulsifs. La notion de contrôlabilité a fini par être un domaine d'investigation très actif.
La contrôlabilité exacte permet de diriger le système vers un état final arbitraire, tandis que la contrôlabilité approchée signifie que le système peut être dirigé vers un petit voisinage arbitraire d'un état final.

La théorie des familles d'opérateurs de cosinus fortement continues contribue à la résolution des équations abstraites du second ordre. L'existence et l'unicité de la solution des systèmes du second-ordre non linéaire et la contrôlabilité de ces systèmes dans les espaces de Banach ont été étudiés largement par plusieurs auteurs, mais peu étudiée dans le cas stochastique. ...

L'objet de cette thèse est d'étudier les solutions des équations stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire (mBf) et ses applications. On considère le problème suivant :
Étant donnés des espaces de Hilbert X et Y, $(\Omega, \mathscr{F}_T, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet muni de la filtration naturelle $\mathscr{F}_t, t \in [0, T]$ engendrée par les variables aléatoires $Z_H(s), w(s), s \in [0, T]$. Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} d\left(x^{'}(t) - h(t, x(t))\right) = Ax(t)dt + f\left(t, x(t)\right)dt + g(t, x(t)dw(t) + \sigma(t)dZ_H(t), \\ x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_{00}, \quad t \in [0, T] \end{cases} \tag{1.1}$$

Où, $x(.)$ prend ses valeurs dans l'espace de Hilbert X et A le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continue $\{C(t), t \in \mathbb{R}\}$ sur l'espace X. La fonction σ : est bornée définie de $[0, T]$ dans $L_2^0(Y, X)$, et les fonctions h et f, sont définie de $[0, T] \times X$ dans X. Quant à la fonction g, elle est définie de $[0, T] \times X$ dans L_2. x_0 et x_{00} sont des variables aléatoires F_0-mesurables à valeurs dans X, indépendantes de w et Z_H. Z_H est un processus Q-Rosenblatt sur un espace de Hilbert Y, et Q un opérateur de classe trace sur Y positif, auto-adjoint.

on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution mild pour le système avec des conditions non-Lipschitzienne, ce qui est plus général que le cas Lipschitzien avec croissance linéaire, voir [28], [11], par exemple. Le problème de contrôlabilité du système est discuté en second lieu.

Organisation de la thèse :

Dans le premier chapitre, on rappelle les notions de base, à savoir, les familles de cosinus, le processus de Rosenblatt ainsi que le mouvement Brownien, les équation fonctionnelles de types neutre, et la condition de Lipschitz.
Le deuxième chapitre, concerne la contrôlabilité des systèmes linéaires déterministes et stochastiques, ainsi que les différents types de contrôlabilité qui existe dans la littérature.
Le troisième chapitre concerne une classe d'équations différentielles stochastiques fonctionnelles du second ordre dirigées simultanément par un processus de Rosenblatt et un mouvement Brownien standard dans un espace de Hilbert. Afin d'étudier la contrôlabilité du système sous condition non-Lipschitzienne, on a commencé par démontrer un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La condition non-Lipschitzienne est plus faible que la Lipschitzienne, c'est là que réside tout l'intérêt du travail. On a donc, établit quelques conditions afin d'assurer la contrôlabilité de la solution mild au moyen du principe du point fixe de Banach.
Cette étude a fait l'objet d'une publication internationale [4]. Elle comprend un exemple pratique afin d'illustrer la fiabilité du résultat.

Chapitre 1

Analyse stochastique

1.1 Mouvement Brownien 5
1.2 Processus de Rosenblatt 7

Ce chapitre, comporte les notions sur lesquelles repose cette thèse. il se divise en deux sections. La première, concerne des résultats de processus stochastiques Notamment, le mouvement Brownien fractionnaire (mBf). La deuxième section est un rappel détaillé du processus de Rosenblatt, de l'intégrale de Wiener par rapport à lui ainsi que sa présentation en dimension infinie. Les références suivantes ont été mises en œuvre ([25], [32]).

1.1 Mouvement Brownien

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité où $\mathscr{F}$ est une $\sigma-$Algèbre contenue dans l'ensemble des parties de Ω, et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathscr{F}$.

Définition 1.1.1. On dit qu'un processus gaussien à valeurs réelles $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien (mB) ou processus de Wiener lorsque le processus est centré, ses trajectoires sont continues, et que sa fonction de covariance est donnée par :

$$cov(B_t, B_s) = Cmin(t, s) = C(t \wedge s)$$

où $C = Var(B_1)$.
Lorsque $C = 1$, le mouvement Brownien est dit standard.

-Le mouvement Brownien B_t dans $\mathbb{R}^n$ est une martingale par rapport à la $\sigma-$Algèbre $\mathcal{F}_t$ générée par $\{B_s; s < t\}$.

Propriétés 1.1.1. *Le mouvement Brownien standard B a les propriétés suivantes :*
- $B_0 = 0$.
- *Pour tout* $t \geq 0$, B_t *suit la loi normale centrée de variance* t, *i.e.;* $B_t \rightsquigarrow N(0, t)$.
- *Pour tout* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, *les variables aléatoires* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
- *Auto similarité : Pour tout* $a > 0$; $a^{\frac{1}{2}} B_{at}$ *est un mouvement Brownien.*
- *Symétrie : Le processus* $(-B_t)_{t \geq 0}$ *est aussi un mouvement Brownien.*
- *Stationnarité : Les accroissements du mouvement Brownien sont stationnaires, i.e;*
$\forall \quad s \leq t, \quad B_t - B_s$ *est une variable gaussienne centrée de variance* $t - s$.

Proposition 1.1.1. *Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont pas différentiables.*

1.1.2 Mouvement Brownien Fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire (mBf) apparaît assez naturellement dans la modélisation de nombreux phénomènes complexes, issus des problèmes du monde réel, lorsque les systèmes sont soumis à une force externe brutale. En tant que processus gaussien centré, il est caractérisé par des accroissements stationnaires et une propriété de mémoire à long terme.
Le mouvement Brownien fractionnaire diffère considérablement du mouvement Brownien standard, des semi-martingales et d'autres modèles stochastiques.

Définition 1.1.2. Le mouvement Brownien fractionnaire standard d'exposant de Hurst $H \in (0, 1)$ noté B_t^H est un processus gaussien continu centré, nul en zéro et il est le seul

processus vérifiant les propriétés suivantes :
1. Auto-similarité : $\forall \quad a > 0; \quad (a^{-H} B_{at})_{t\geq 0}$ a même loi que $(B_t)_{t\geq 0}$.
2. Accroissements stationnaires : $\forall \quad h > 0; \quad (B_{t+h} - B_h)_{t\geq 0}$ a même loi que $(B_t)_{t\geq 0}$.
3. Gaussien avec $\mathbf{E}(B_1) = 0$ et $\mathbf{E}(B_1^2) = 1$.

Autrement dit, pour $0 < H \leq 1$, Le mouvement Brownien fractionnaire d'indice H, $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est le processus gaussien centré de fonction de covariance :

$$cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

Le mouvement Brownien fractionnaire "non-standard" a la fonction de covariance suivante :

$$cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{V^{(H)}}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

avec,

$$V^{(H)} = \frac{\Gamma(2-H)cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Remarque 1.1.1. Lorsque $H = 1/2$, le mBf se réduit au mouvement Brownien standard (non fractionnaire). Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque $H \neq 1/2$, le mBf se comporte d'une manière complètement différente du mouvement Brownien standard, notamment, il n'est ni une martingale ni un processus de Markov.

Proposition 1.1.2. *On a les propriétés suivantes :*
- Le mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien de variance* t^{2H}.
- Le mouvement Brownien fractionnaire (B_t^H) *de paramètre de Hurst* $H \in (0,1) \backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$ *n'est pas un processus de Markov.*

1.2 Processus de Rosenblatt

Parmi les processus auto-similaires, on distingue une classe intéressante, donnée sous forme de limites du Théorème de la limite non-centrale , étudiée dans [38] : Les processus d'Hermite sont des limites de sommes normalisées de variables aléatoires dépendantes et de longue portée.

Rappelons d'abord la notion de rang d'Hermite :

Soit $H_m(x)$ le polynôme d'Hermite de dégrée m donné par

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

On considère la suite stationnaire gaussienne $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de moyenne 0 et de variance 1, qui présente une dépendance à long terme, dans le sens où, la fonction de corrélation satisfait :

$$r(n) = \mathbf{E}(\xi_0 \xi_n) = n^{\left(\frac{2H-2}{k}\right)} L(n)$$

avec $H \in (1/2, 1)$, $k \geq 1$ et L une fonction qui varie lentement à l'infini.

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}$ qui admet le développement en polynômes d'Hermite suivant :

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j H_j(x)$$

où,

$$c_j = \frac{1}{j!} \mathbf{E}[g(\xi_0 H_j(\xi_0))]$$

qui vérifie $\mathbf{E}[g(\xi_0)] = 0$ et $\mathbf{E}[g(\xi_0)^2] < \infty$.

Le rang d'Hermite de g est défini par :

$$k = min\{j; c_j \neq 0\}.$$

Du moment que $\mathbf{E}[g(\xi_0)] = 0$, on a $k \geq 1$. Alors, d'après le Théorème de la limite non-centrale, on a :

$$\frac{1}{n^H} \sum_{j=1}^{[nt]} g(\xi_j)$$

converge quand $n \to \infty$ au sens des distributions de dimension finie, vers le processus

$$Z_H^k(t) = c(H,k) \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_0^t \left(\Pi_{i=1}^k (s - y_i) \right)_+^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1-H}{k}\right)} ds \right) dB(y_1)...dB(y_k). \tag{1.2.1}$$

Le processus $(Z_H^k(t))_{t\geq 0}$ est appelé processus d'Hermite de rang k.
Lorsque $k = 1$ dans (1.2.1), le processus d'Hermite est le mouvement Brownien fractionnaire, et quand **k**=**2** dans (1.2.1), le processus obtenu est celui de Rosenblatt.
Dans ce cas on a,

$$Z_H(t) = d(H) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t (s-y_1)_+^{-\frac{2-H}{2}} (s-y_2)_+^{-\frac{2-H}{2}} \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}B(y_1) \, \mathrm{d}B(y_2) \,. \qquad (1.2.2)$$

L'intégrale précédente est une intégrale multiple de Wiener-Itô d'ordre 2 par rapport au mouvement Brownien standard $(B(y), y \in \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$, et $d(H)$ est une constante positive de normalisation, choisie telle que $E(Z_H^2(1)) = 1$.
Il s'en suit que :

$$d(H)^2 = \left(\frac{\beta\left(\frac{H}{2}, H-1\right)^2}{2H(2H-1)} \right)^{-1}$$

où β est la fonction Bêta définie par :

$$\beta(p,q) = \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{p-1} dz, p, q > 0.$$

Le processus $(Z_H(t))_t \in [0,T]$ est auto-similaire d'ordre H, dans le sens où pour tout $c > 0$,

$$(Z_H^k(ct)) =^d (cZ_H^k(t)).$$

Il a des accroissements stationnaires, et il admet une version continue H$\ddot{o}$ldérienne d'ordre $\delta = H - \epsilon < H$. Quand $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, le processus Z présente des dépendances à long terme.

1.2.1 Représentation par intervalle de temps fini du processus de Rosenblatt

Comme dans le cas du mBf, on voudrait représenter Z_t par une intégrale stochastique par rapport à un mouvement Brownien d'intervalle de temps $[0,T]$. Rappelons que le mBf avec $H > 1/2$ peut être écrit sous la forme :

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t,s)\mathrm{d}w_s \tag{1.2.3}$$

avec$(w_t, t \in [0,T])$ un processus de Wiener standard et,

$$K^H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}u \tag{1.2.4}$$

où $t > s$ et

$$c_H = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta\left(2-2H, H-\frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour prouver la représentation (1.2.3) il suffit de voir que le membre droit a la même covariance R que le mBf ; autrement, on peut voir à partir de l'expression du noyau K que le membre droit dans (1.2.3) est $H-$auto-similaire à accroissements stationnaires. Comme le processus de Rosenblatt n'est pas gaussien, la preuve dans son cas d'une représentation similaire à (1.2.3) nécessite un argument supplémentaire ; en fait nous avons ce qui suit :

Proposition 1.2.1. *Soit K les noyaux (1.2.4) et soit $(Z(t))_t \in [0,T]$ un processus de Rosenblatt de paramètre H. on a :*

$$Z_H(t) = d(H) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) du \right] dB(y_1) dB(y_2), \tag{1.2.5}$$

où

$$\begin{cases} B = \{B(t) : t \in [0,T]\} \ \textit{est un processus de Wiener}, \quad H' = \dfrac{H+1}{2}, \\ d(H) = \dfrac{1}{H+1} \sqrt{\dfrac{H}{2(2H-1)}} \end{cases}$$

et $K^H(t,s)$ le noyau donné par :

$$\begin{cases} K^H(t,s) = c_H s^{1/2-H} \int_s^t (u-s)^{H-3/2} u^{H-1/2} du, \ \textit{pour}\, t > s \\ K^H(t,s) = 0, \ \textit{pour}\, t \leq s \end{cases}$$

La constante de normalisation $d(H)$ a été choisie de telle sorte que :

$$\mathbf{E}\left(Z(t)Z(s)\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H-2}\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Z(t)Z(s)) &\overset{\mathrm{d}}{=} 2dH^2 \int_0^{t\wedge s}\int_0^{t\wedge s} dy_1 dy_2 \\
&\times \left(\int_{y_1\vee y_2}^{t}\int_{y_1\vee y_2}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(v,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(v,y_2)dudv\right) \\
&= 2d(H)^2\int_0^t\int_0^s dudv\left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(v,y_1)\right)^2 \\
&= 2d(H)^2(H^{'}(2H^{'}-1)\int_0^t\int_0^s |u-v|^{2H-2}dudv = R(t,s).
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que le processus

$$Z(t) = d(H)\int_0^t\int_0^t\left[\int_{y_1\vee y_2}^{t}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)du\right]dB(y_1)dB(y_2),$$

définit un processus H auto-similaire à accroissements stationnaires. En effet, pour tout $c>0$,

$$\begin{aligned}
Z^{'}(ct) &= d(H)\int_0^{ct}\int_0^{ct}\left[\int_{y_1\vee y_2}^{ct}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)du\right]dB(y_1)dB(y_2), \\
&= d(H)\int_0^{ct}\int_0^{ct}\left[\int_{\frac{y_1}{c}\vee\frac{y_2}{c}}^{t}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu,y_2)cdu\right]dB(y_1)dB(y_2), \\
&= \int_0^t\int_0^t\left[\int_{y_1\vee y_2}^{t}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu,cy_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu,cy_2)cdu\right]dB(cy_1)dB(cy_2),
\end{aligned}$$

et comme,

$$B(cy) \overset{\mathrm{d}}{=} c^{\frac{1}{2}}B(y)$$

et,

$$\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(cu,cy_i) = c^{H^{'}-\frac{3}{2}}\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_i),$$

on obtient,

$$Z(ct) \overset{\mathrm{d}}{=} c^H Z(t).$$

Le fait que Z a des accroissements stationnaires, découle de la relation,

$$K^{H'}(t+h,s) - K^{H'}(t,s) = K^{H'}(t-s,h), \tag{1.2.6}$$

pour tous $s,t \in [0,T], \quad s < t$ et $h > 0$.

Le processus de Rosenblatt possède une propriété similaire au mBf : il peut être approché par une suite de semi martingales (ici en fait, puisque $H > \frac{1}{2}$, par une suite de processus à variation bornée).

L'observation de base est que, si l'on intervertit formellement les intégrales, stochastiques et de Lebesgue dans (1.2.5), on obtient

$$Z_H(t)'' = ''d(H) \int_0^t \left(\int_0^u \int_0^u \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2) dB(y_1) dB(y_2 \right) du.$$

Mais l'expression ci-dessus ne peut pas tenir car le noyau

$$\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2)$$

n'appartient pas à $L^2([0,T]^2)$ puisque la dérivée partielle

$$\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1)$$

se trouve sur la diagonale

$$(u-y_1)^{\frac{H-2}{2}}.$$

On définit pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} Z^{\epsilon}(t) &= d(H) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon,y_2) du \right] dB(y_1) dB(y_2) \\ &= d(H) \int_0^t \left(\int_0^u \int_0^u \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon,y_2) dB(y_1) dB(y_2 \right) du \\ '' &= '' \int_0^t A_{\epsilon}(u) du \end{aligned}$$

Comme A_ϵ est adapté, et $A_\epsilon \in L_2([0,T] \times \Omega)$ pour tout $\epsilon > 0$, on déduit que le processus Z^ϵ est une semi martingale.

Proposition 1.2.2. *Pour tout* $t \in [0,T]$, $Z^\epsilon(t) \longrightarrow Z(t)$ *dans* $L^2(\Omega)$.

Démonstration.

$$Z^\epsilon(t) - Z(t) = \int_0^t \int_0^t dB(y_1)dB(y_2)$$
$$\times \left(\int_{y_1 \vee y_2}^t \left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \right) du \right)$$

et,

$$\mathbf{E}|Z^\epsilon(t) - Z(t)|^2 = 2 \int_0^t \int_0^t dy_1 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^t \int_{y_1 \vee y_2}^t dv du$$
$$\times \left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \right)$$
$$\times \left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(v+\epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(v+\epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(v, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(v, y_2) \right)$$

Il est clair que la quantité

$$\left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u+\epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \right)$$

converge vers zéro quand $\epsilon \longrightarrow 0$ pour tous u, y_1, y_2. Par le théorème de la convergence dominée, on obtient le résultat. $\square$

1.2.2 Intégrale de Wiener par rapport au processus de Rosenblatt

La structure de covariance du processus d'Hermite est similaire à celle du mouvement Brownien fractionnaire, ce qui a permis d'utiliser les mêmes classes d'intégrants déterministes que dans le cas du mouvement Brownien fractionnaire. Ainsi, grâce à la structure de covariance du processus de Rosenblatt, on peut construire des intégrales de Wiener par rapport à celui-ci. Dans ce contexte on a :

$$Z_H(t) = \int_0^T \int_0^T I\left(1_{[0,t]}\right)(y_1, y_2)\, dB(y_1)\, dB(y_2)$$

où l'opérateur I est défini sur l'espace des fonctions $f : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace des fonctions $g : [0,T]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et donné par

$$I(f)(y_1, y_2) = d(H) \int_{y_1 \vee y_2}^{T} f(u) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, du.$$

Soit f un élément de l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier, sur $[0,T]$ de la forme

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}, \qquad t_i \in [0,T].$$

Alors son intégrale de Wiener par rapport à Z_H est

$$\begin{aligned} \int_0^T f(u)\, dZ_H(u) \quad : &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \left(Z_H(t_{i+1}) - Z_H(t_i)\right) \\ &= \int_0^t \int_0^t I(f)(y_1, y_2)\, dB(y_1)\, dB(y_2). \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions telles que

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 := 2 \int_0^T \int_0^T \left(I(f)(y_1, y_2)\right)^2 dy_1 y_2 < \infty.$$

Il s'en suit que,

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T f(u) f(v) |u-v|^{2H-2}\, du dv.$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{H}}^2 =& 2\ \mathrm{d}(H)^2 \int_0^T \int_0^T \left(\int_{y_1 \vee y_2}^T f(u) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2)\, \mathrm{d}u \right)^2 \mathrm{d}y_1\ \mathrm{d}y_2 \\
=& 2\ \mathrm{d}(H)^2 \int_0^T \int_0^T \mathrm{d}y_1\ \mathrm{d}y_2 \int_{y_1 \vee y_2}^T \int_{y_1 \vee y_2}^T \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\
& \times f(u) f(v) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial v}(v, y_2) \\
=& 2\ \mathrm{d}(H)^2 \int_0^T \int_0^T \left(\int_0^{u \wedge v} \frac{\partial K^{H''}}{\partial u}(u, y_1) \frac{\partial K^{H''}}{\partial v}(v, y_1)\, \mathrm{d}y_1 \right)^2 \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\
=& H(2H-1) \int_0^T \int_0^T f(u) f(v) |u - v|^{2H-2} dv du.
\end{aligned}
$$

Il a été prouvé que l'application

$$
f \to \int_0^T f(u)\, dZ_H(u)
$$

est une isométrie de $\mathcal{E}$ vers $L^2(\Omega)$ et qu'elle peut être étendue à une isométrie de $\mathcal{H}$ vers $L^2(\Omega)$, parce que $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{H}$. On nome cette extension par l'intégrale de Wiener de $f \in \mathcal{H}$ par rapport à Z_H.

Notons que l'espace $\mathcal{H}$ contient non seulement des fonctions, mais ses éléments peuvent aussi être des distributions. Par conséquent, il convient de connaître les sous-espaces $|\mathcal{H}|$ de $\mathcal{H}$:

$$
|\mathcal{H}| = \left\{ f : [0, T] \to \mathbb{R} / \int_0^T \int_0^T |f(u)\| f(v)\| u - v|^{2H-2} dudv < \infty \right\}. \tag{1.2.8}
$$

L'espace $|\mathcal{H}|$ (par conséquent $\mathcal{H}$) n'est pas complet pour la norme $\|.\|_{\mathcal{H}}$ mais il est de Banach pour la norme

$$
\|f\|_{|\mathcal{H}|}^2 = H(2H-1) \int_0^T \int_0^T |f(u)\| f(v)\| u - v|^{2H-2} dudv. \tag{1.2.9}
$$

Par conséquent, nous avons :

$$
L^2([0, T]) \cap L^1([0, T]) \subset L^{\frac{1}{H}}([0, T]) \subset |\mathcal{H}| \subset \mathcal{H}
$$

et, pour toute $f \in L^2([0,T])$ on a :

$$\|f\|^2_{|\mathcal{H}|} \leq 2HT^{2H-1} \int_0^T |f(s)|^2 \, ds \tag{1.2.10}$$

et,

$$\|f\|^2_{|\mathcal{H}|} \leq C(H) \|f\|^2_{L^{1/H}([0,T])}, \tag{1.2.11}$$

pour une certaine constante $C(H) > 0$.

1.2.3 Processus de Rosenblatt de dimension infinie

Soient X un espace de Hilbert réel séparable. Soit $Q \in \mathcal{L}_2(Y,X)$ un opérateur de trace classe positif et auto-adjoint. Il existe alors une suite $0 < \lambda_n \searrow 0$ de valeurs propres de Q telle que $n \geq 1, \quad \lambda_n < \infty$. En outre, les vecteurs propres correspondants forment une base orthonormée dans X. En d'autre termes, nous avons $Qe_n = \lambda_n e_n$ avec trace finie $trQ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.

Soit l'intervalle de temps $[0,T]$ à horizon arbitraire fixé T et soit $\{Z_H(t), \ t \in [0,T]\}$ le processus unidimensionnel de Rosenblatt à paramètre $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. On sait que Z_H admet la représentation suivante :

$$Z_H(t) = d(H) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2) du \right] dB(y_1) dB(y_2).$$

On définit le processus de Rosenblatt de dimension infinie sur X, par :

$$Z_H(t) = Z_Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n z_n(t) \tag{1.2.12}$$

où $(z_n)_{n \geq 0}$ est une famille de processus de Rosenblatt réels et indépendants. La série (1.2.12) est convergente dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$, du moment que,

$$\mathbf{E} \left| Z_Q(t) \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E(z_n(t))^2 = t^{2H} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.$$

Z_Q a une fonction de covariance dans le sens où

$$\mathbf{E} \left\langle Z_Q(t), x \right\rangle \left\langle Z_Q(s), y \right\rangle = R(s,t) \left\langle Q(x), y \right\rangle, \quad \text{pour tous } x, y \in X \text{ et } t, s \in [0,T].$$

Soit $\phi : [0, T] \longrightarrow L_2^0(Y, X)$ tel que

$$\sum \left\| K^* \phi Q^{1/2} e_n \right\|^2_{L_2([0,T])} < \infty.$$

L'intégrale de Wiener par rapport au processus Q-Rosenblatt Z_Q est définie par :

$$\begin{aligned}\int_0^t \phi(s) Z_Q(s) &= \sum \int_0^t \sqrt{\lambda_n} \phi(s) e_n z_n(s) \\ &= \sum \int_0^t \int_0^t K^* \phi Q^{1/2} e_n (y_1, y_2)\, dB(y_1) dB(y_2). \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Lemme 1.2.1. *Si $\phi : [0, T] \to \mathcal{L}_2^0(Y, X)$ satisfait $\int_0^T \|\phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} ds < \infty$, alors la somme précédente dans (1.2.13) est bien définie comme variable aléatoire à valeurs dans X et on a :*

$$\mathbf{E} \left\| \int_0^t \phi(s) dZ_H(s) \right\|^2 \leq 2Ht^{2H-1} \int_0^t \|\phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} ds$$

Démonstration. Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la base orthonormée totale de l'espace Y introduite auparavant. En appliquant (1.2.9), (1.2.10) et l'inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left\| \int_0^T \phi(s) dZ_Q(s) \right\|^2 &\leq \mathbf{E} \left\| \sum \int_0^T (\phi(s) Q^{1/2} e_n) dz_n(s) \right\|^2 \\ &= \sum \mathbf{E} \left| \int_0^T (\phi(s) Q^{1/2} e_n) dz_n(s) \right|^2 \\ &= \sum H(2H-1) \int_0^T \int_0^T \left| (\phi(t) Q^{1/2} e_n) \right| \quad \left| (\phi(s) Q^{1/2} e_n) \right| |t-s|^{2H-2} ds dt \\ &= \sum \|\phi Q^{1/2} e_n\|^2_{\mathcal{H}} \\ &\leq 2HT^{2H-1} \sum \int_0^T \left| \phi(s) Q^{1/2} e_n \right|^2 ds \\ &= 2HT^{2H-1} \int_0^T \sum \left| \phi(s) Q^{1/2} e_n^2 \right| ds \\ &= 2HT^{2H-1} \int_0^T \sum \|\phi(s)\|^2_{L_2^0} ds. \end{aligned}$$

□

CHAPITRE 2

Opérateurs et contrôlabilité

2.1 Familles de Cosinus 18
2.2 Équations Fonctionnelles 25
2.3 Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle non linéaire 26
2.4 Contrôlabilité 30

2.1 Familles de Cosinus

Le concept de famille de cosinus sur un espace de Banach est très proche de celui de semi groupe d'opérateurs sur un espace de Banach, qui est plus familier. Quand les semi groupes fortement continus correspondent aux équations différentielles abstraites du premier ordre, les familles de cosinus fortement continus correspondent aux équations différentielles abstraites linéaires du second ordre.

Soit X un espace de Banach. On désigne par $\mathscr{L}(X)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés sur X et par I_X l'opérateur identité sur X.
Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X est un semi-groupe d'opérateurs sur X si :

(i)$T(s)T(t)=T(s+t)$ pour tous $s,t\geq 0$ (équation de Cauchy , dite aussi l'équation exponentielle),
(ii)$T(0)=I_X$.
Une famille de $\mathscr{L}(X)$ à un paramètre, est dite famille de cosinus sur X si :

(i) $C(t+s)+C(t-s)=2C(t)C(s)$ pour tous $s,t\in\mathbb{R}$. (équation fonctionnelle de d'Alembert, appelée aussi équation fonctionnelle de cosinus),
(ii)$C(0)=I_X$.
Le sous ensemble $\{C(t)\,,\quad t\in\mathbb{R}\}$ est appelé une famille de cosinus fortement continue dans l'espace de Banach X si, $C(t)\,x$ est continu en t de $\mathbb{R}$ pour tout x fixé de X. ($C(t)x\in X$)
La famille de sinus $\{S(t)\,,\quad t\in\mathbb{R}\}$ associée, est la famille à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés dans X définie par :

$$S(t)\,x=\int_0^t C(s)x(s)ds, x\in X,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Exemple 2.1.1. Soit X un espace de Banach et soit A un opérateur linéaire borné dans X. Alors

$$C(t)=\sum_0^\infty\frac{A^kt^{2k}}{(2k)!}$$

est une famille de cosinus fortement continue. La famille de sinus correspondante est donnée par :

$$S(t)=\sum_0^\infty\frac{A^kt^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Si $X=\mathbb{R}$, $a>0$, et $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est défini par $Ax=ax$, alors

$$C(t)=cosh(t\sqrt{a})$$

et,

$$S(t)=\frac{sinh(t\sqrt{a})}{\sqrt{a}}.$$

Si $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est défini par $Ax=-ax$ alors,

$$C(t)=cos(t\sqrt{a})$$

et

$$S(t) = \frac{sin(t\sqrt{a})}{\sqrt{a}}.$$

Exemple 2.1.2. Les fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.
Soit $T(t), \quad t \in \mathbb{R}$ le groupe des translations sur X, qui est, $\quad (T(t)x)(u) = x(u+t)$. On définit

$$C(t) = (T(t) + T(-t))/2.$$

On a :

$$\begin{cases} (C(t)x)(u) = (x(u+t) + x(u-t))/2, \\ (S(t)x)(u) = \left(\int_0^t C(s)\,xds\right)(u) = 2^{-1}\left(\int_{u-t}^{u+t} x(s)\,ds\right) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

On peut facilement voir que $C(t), \quad t \in \mathbb{R}$ est une famille de cosinus fortement continue ayant le générateur infinitésimal A donné par :
$Ax = x'', \quad D(A) = \{x \in X : \quad x'' \in X\}$.
Si $B : X \to X$ est défini par : $\quad Bx = x', \quad D(B) = \{x \in X : x' \in X\}$, alors $B^2 = A$, du fait que,

$$(BS(t)x)(u) = (x(u+t) + x(u-t))/2.$$

Notons que pour $f \in D(A), \quad g \in E = D(B)$,

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} (C(t)f + S(t)g)(x) = 2^{-1}(f(x+t) + f(x-t)) + 2^{-1}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds,$$

donne la solution classique de D'Alembert de l'équation des ondes unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t), \quad w(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}w(x,0) = g(x),$$

dont la formulation abstraite est

$$\frac{d^2}{dt^2}w(t) = Aw(t), \quad w(0) = f, \quad \frac{d}{dt}w(0) = g.$$

Les familles de cosinus fortement continues sur un espace de Banach sont caractérisées de façon unique par leurs générateurs.

Proposition 2.1.1. *Soit $C(t), \quad t \in \mathbb{R}$ une famille de cosinus fortement continue dans X. On a :*

1. $C(t) = C(-t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
2. $C(s)$, $S(s)$, $C(t)$ *et* $S(t)$ *commutent pour tous* $s, t \in \mathbb{R}$.
3. $S(t)x$ *est continu en* t *sur* $\mathbb{R}$ *pour tout* $x \in X$ *fixé.*
4. $S(s+t) + S(s-t) = 2S(s)C(t)$ *pour tous* $s, t \in \mathbb{R}$.
5. $S(s+t) = S(s)C(t) + S(t)C(s)$ *pour tous* $s, t \in \mathbb{R}$.
6. $S(t) = -S(-t)$ *pour tous* s, $t \in \mathbb{R}$.
7. *Il existe des constantes* $K \geq 1$ *et* $\omega \geq 0$ *telles que* $|C(t)| \leq Ke^{\omega|t|}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.
8. $|s(t) - s(t')| \leq K \left| \int_{t'}^{t} e^{\omega|s|} ds \right|$ *pour tous* $t, t' \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.1.2. *Soit* $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *une famille de cosinus fortement continue dans* X *avec générateur infinitésimal* A. *On a :*

1. $D(A)$ *est dense dans* X *et* A *est un opérateur fermé dans* X.
2. *Si* $x \in X$ *et* $r, s \in \mathbb{R}$. *alors.*
   $z \stackrel{\text{def}}{=} \int_r^s S(u)xdu \in D(A)$ *et* $Az = C(s)x - C(r)x$.
3. *Si* $x \in X$ *et* $r, s \in \mathbb{R}$ *alors,*
   $z \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^s \int_0^r C(u)C(v)xdudv \in D(A)$ *et* $Az = 2^{-1}(C(s+r)x - C(s-r)x)$.
4. *Si* $x \in X$, *alors* $S(t)x \in E$.
5. *Si* $x \in E$, *alors* $S(t)x \in D(A)$ *et* $\frac{d}{dt}C(t)x = AS(t)x$.
6. *Si* $x \in E$ [1], *alors* $C(t)x \in D(A)$ *et* $\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax$.
7. *Si* $x \in E$, *alors* $\lim_{x \to 0} AS(t)x = 0$.
8. *Si* $x \in E$ *alors* $S(t)x \in D(A)$ *et* $\frac{d^2}{dt^2}S(t)x = AS(t)x$.
9. *Si* $x \in D(A)$ *alors* $S(t)x \in D(A)$, *et on a* $AS(t)x = S(t)Ax$.
10. $C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s)$ *pour tous* $s, t \in \mathbb{R}$.

---
1. Voir notation p vi

2.1.2 Générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continu

Le générateur A d'un semi-groupe fortement continu $T(t)_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X est défini par

$$\left|\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T(t)x = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t}, \tag{2.1.2}$$

où $D(A)$ est l'ensemble de tous les $x \in X$ pour lesquels la dérivée (2.1.2) est satisfaite. De même, le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continue $C(t)_{t\in\mathbb{R}}$ est l'opérateur $A : X \to X$ défini par :

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} C(t)x = \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t^2}\right)(C(t)x - x),$$

et $D(A) = \{x \in X : C(t)x$ est une fonction de t deux fois continument différentiable$\}$. Autrement dit, le générateur infinitésimal A de $C(t)$, $t \in \mathbb{R}$ est l'opérateur linéaire A défini sur X par

$$Ax = C''(0)x = \frac{d^2}{dt^2}C(0)x,$$

et à domaine dense.

2.1.3 Condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus

On désigne par $\rho(A)$ et $R(\lambda; A)$ l'ensemble résolvant et la résolvante de A, respectivement : $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$. En termes de générateur, une fonction de cosinus est caractérisée par le théorème du générateur suivant :

Théorème 2.1.1. *Soit A un opérateur linéaire sur X. A est le générateur d'une fonction de cosinus sur X si et seulement si :*

1. *A est fermé et à domaine dense.*
2. *Il y a une constante $\omega \geq 0$ telle que pour $\lambda > \omega$, $\lambda^2 \in \rho(A)$.*
3. *Il y a une constante $M > 0$ telle que pour $\lambda > \omega$,*
$$\left\|\frac{d^m}{d\lambda^m}\left[\lambda R(\lambda^2; A)\right]\right\| \leq \frac{Mm!}{(\lambda-\omega)^{m+1}}; \quad m = 0, 1, 2...$$

Ce théorème peut être considéré comme l'analogue du théorème de Hille-Yosida sur les générateurs de semi-groupes de classe (C_0).

Lemme 2.1.1. *Sous les hypothèses du théorème (2.1.1) on a :*

$$\|C(t)\| \leq Me^{\omega|t|}, \quad t \in \mathbb{R}; \tag{2.1.3}$$

$$\lambda R\left(\lambda^2; A\right) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} C(t)dt, \quad \lambda > \omega$$

et donc,

$$\|S(t)\| \leq M|t|e^{\omega|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

et,

$$\lambda R(\lambda^2; A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)dt, \quad \lambda > \omega.$$

L'équation (2.1.3) signifie que la fonction C croît au plus exponentiellement ; $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} C(t)dt, \quad \lambda > \omega$ est la transformée de Laplace de C.

2.1.4 Problème de Cauchy abstrait linéaire du second ordre

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} x''(t) & = Ax(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \\ x(0) & = x_0, \quad x'(0) = x_{00}. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

où $A : X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus et $f : [0, T] \longrightarrow X$ une fonction intégrable sur $[0, T]$.
Alors A est un opérateur fermé et à domaine dense sur X.

Proposition 2.1.3. *Supposons que A est le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus $C(t)_{t\in\mathbb{R}}$ ayant la famille de sinus correspondante $S(t)_{t\in\mathbb{R}}$. On a :*

1. *Il existe des constantes $M_A \geq 1$ et $\lambda \geq 0$ telles que*

$$\|C(t)\| \leq M_A e^{\lambda|t|} \quad \text{et donc} \quad \|S(t)\| \leq M_A e^{\lambda|t|}.$$

2. *Pour tout $x \in X$ et tout $0 \leq s \leq r < \infty$,*

$$\int_s^r S(t)xdt \in D(A) \quad \text{et} \quad A\int_s^r S(t)xdt = [C(r) - C(s)]x.$$

3. *Il existe une constante* $\beta \geq 1$ *telle que, pour tout* $0 \leq s \leq r < \infty$,

$$S(r) - S(s) \leq \beta \int_s^r e^{\lambda|\theta|} d\theta.$$

Remarque 2.1.1. Le principe de la borne uniforme, avec la proposition (2.1.3), implique que $C_{t t\in[0,T]}$ et $S(t)_{t\in[0,T]}$ sont tous les deux uniformément bornés, *i.e.*; il existe une constante positive $M = M_A e^{\lambda|T|}$ telle que :

$$\|C(t)\| \leq M \quad et \quad \|S(t)\| \leq M$$

Définition 2.1.1. La fonction

$$x(t) = C(t)x_0 + S(t)x_{00} + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,T]$$

est dite solution mild de (2.1.4), quand $x_0 \in H$. $x(.)$ est continument différentiable et on a :

$$x'(t) = AS(t)x_0 + C(t)x_{00} + \int_0^t C(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

2.1.5 Équations différentielles du second ordre abstraites non linéaires

Supposons que A est le générateur infinitésimal d'une famille de cosinus fortement continu, $C_{t t\in\mathbb{R}}$ dans X. Soit le problème

$$\begin{cases} x''(t) &= Ax(t) + f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in [0,T], \\ x(0) &= x_0, \quad x'(0) = x_{00} \in X. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Proposition 2.1.4. *Soit D un ouvert de* $\mathbb{R} \times X \times X$, *et soit* $f : D \longrightarrow X$ *une fonction continue telle que,*

$$\|f(t,x,y) - f(t,x',y')\| \leq L(x)(\|x - x'\| + \|y - y'\|$$

pour $(t, x', y') \in D$ *et une fonction à valeurs réelles L.*
Pour tout $(0, x, y) \in D$ *tel que* $x \in D(A)$, *il existe* $t_1 > 0$ *et une fonction unique* $x : (-t_1, t_1) \longrightarrow X$ *continument différentiable qui soit solution du problème (2.1.5).*

De plus, si $D = \mathbb{R} \times X \times X$, *alors la solution* $x(t)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$.

Donc si f est définie sur $\mathbb{R} \times X \times X$, alors pour $(0, x_0, x_{00})$ où $x_0 \in D(A)$, il existe une fonction unique solution du problème (2.1.5) définie sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit sous la forme

$$x(t) = C(t)x_0 + S(t)x_{00} + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \qquad t \in [0, T]$$

$x(t)$ est la solution mild du problème (2.1.5).

2.2 Équations Fonctionnelles

De telles équations surviennent lors de la modélisation de processus biologiques, physiques, etc., dont le taux de changement d'état à n'importe quel moment du temps test déterminé non seulement par l'état présent, mais aussi par les états passés. On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^{(m)}(t) = f(t, x^{(m_1)}(t - h_1(t)), ...x^{(m_k)}(t - h_k(t))), \qquad t \geq 0. \tag{2.2.1}$$

x est la fonction inconnue de t dont les dérivées successives sont m_i ($m_i \geq 0$ pour tout $i = 1..k$), $h_i(t) \geq 0$ des fonctions positives, la fonction f et les retards h_i sont donnés. L'équation (2.2.1) est la forme généralisée d'une équation différentielle fonctionnelle.
Dans des cas plus compliqués, le retard peut dépendre de la solution inconnue, et avoir la forme $h_i(t, x(t))$. De tels retards sont parfois nommés fonctions autorégulatrices.

2.2.1 Équation fonctionnelle de type neutre (EDN)

L'équation différentielle fonctionnelle (2.2.1) est de type neutre si :

$$max\{m_1, ...m_k\} = m.$$

En particulier une (EDN) peut être écrite sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, \dot{x}_t), \tag{2.2.2}$$

Ici : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et x_t (pour un t donné) est la fonction définie par :

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \quad \theta \in J_t \subset (-\infty, 0],$$

Il est à noter que si J_t n'est pas réduit à un point, alors formellement le membre droit de l'équation (2.2.2) peut être écrit comme $\widetilde{f}(t, x_t)$, car en donnant une fonction on a aussi donné sa dérivée. Beaucoup d'auteurs préfèrent la forme de Hale :

$$[x(t) - G(t, x_t)]' = F(t, x_t) \tag{2.2.3}$$

En général, (2.2.2) et (2.2.3) ne peuvent pas être réduite l'une à l'autre. Des distinctions principales entre ces formes de (E. D. N) généralement absentes dans les cas simples, ont fait que le concept de solution est raisonnablement modifié. (Pour des détails approfondis, voir [19]).

2.3 Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle non linéaire

Lorsque l'équation différentielle est non linéaire, on voudrait que ses coefficients remplissent certaines conditions permettant d'assurer l'existence de la solution. Dans la théorie classique des équations différentielles stochastiques d'Itô, où les coefficients sont supposés être des fonctions continues, Lipschitziennes, les solutions sont construites sur un mouvement brownien, et données par approximations successives. L'unicité des solutions est montrée immédiatement par la construction. Dans le cas échéant, l'existence et le problème d'unicité sont traités par d'autres méthodes à partir de l'approximation successive. Rappelons d'abord, la propriété de Lipschitz et quelques différentes propriétés non Lipschitziennes se trouvant dans la littérature.

2.3.1 Conditions de Lipschitz

Soient H et H' deux espaces de Banach. Et soient $f : H \longrightarrow H'$ et $g : H \longrightarrow H'$ deux fonctions.

On dit que les fonctions f et g vérifient la condition de Lipschitz si :

Pour tous $x, y \in H$ et tout $t \in [0, \infty)$, il existe $L, L' > 0$, tels que :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad et \quad |g(t,x) - g(t,y)| \leq L'|x-y|$$

Ce qui se résume par :

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq L|x-y|$$

Il est facile de vérifier que ceci donne :

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 + |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq L|x-y|^2$$

Remarque 2.3.1. Cette condition globale de Lipschitz semble être considérablement forte quand on discute différentes applications dans le monde réel.

2.3.2 Condition locale de Lipschitz

Pour un entier $N > 0$ fixé, Il existe un $L_N > 0$ tel que pour tous $x, y \in H$ avec $|x| \leq N$ et $|y| \leq N$,

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 + |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq L_N|x-y|^2$$

De nos jours, il existe de nombreux exemples où les coefficients ne satisfont pas la condition de Lipschitz mais nous pouvons prouver l'existence et l'unicité de la solution. Parmi les conditions que l'on peut trouver on a :

2.3.3 Conditions non Lipschitzienne Taniguchi a introduit une certaine condition locale non lipschitzienne définie comme suit : Soient H et K deux espaces de Hilbert séparables. f et g deux fonctions mesurables

$$f : [0, \infty) \times H \longrightarrow H \quad \text{et} \quad g : [0, \infty) \times H \longrightarrow L_0^2(K, H)$$

(a1)

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 + |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq \lambda(t)\alpha(|x-y|^2)$$

(a2)

$$|f(t,x)|^2 + |g(t,x)|^2 \leq \beta(t) + \gamma(t)|x|^2$$

où

$$\alpha(u) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

est une fonction concave, monotone décroissante telle que :
$\alpha(0) = 0, \qquad \alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in L^1_{loc}([0,\infty), \mathbb{R}_+)$ et,

$$\int_{0^+} (1/\alpha(u))du = \infty$$

Remarque 2.3.2. Si $\alpha(u) = u(u \geq 0)$ et $\lambda(t) = L(L > 0)$ alors, la condition (a1) implique la condition globale de Lipschitz.

Cette condition non lipschitzienne a été généralisée, comme condition non Lipschitzienne de type Taniguchi, et pris la forme finale suivante :

2.3.4 Condition non-Lipschitzienne globale

1) il existe une fonction $G(t,r) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $G(t,r)$ est continue, monotone, croissante, localement intégrable en $t \in [0,T]$ pour tout $r \geq 0$ fixé, et concave en r pour tout $t \in [0,T]$ fixé, avec $G(t,0) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$ fixé,
de plus, l'inégalité suivante est satisfaite, pour tout $x, y \in H$:

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 + |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq G(t, |x-y|^2), t \in [0,T]$$

2) Pour toute constante γ, si une fonction non-négative $z(t)$ satisfait :

$$z(t) \leq \gamma \int_0^t G(s, z(s))ds,$$

pour tout $t \in [0,T]$, alors $z(t) \equiv 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Remarque 2.3.3. Il existe une fonction : $J \times [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ telle que

$$\mathbf{E}(\|F(t,X) - F(t,Y)\|^p) + \mathbf{E}(\|B(t,XB(t,Y)\|^p_{L_2^0}) \leq K(t, \mathbf{E}(\|X-Y\|^p)) \tag{2.3.1}$$

Remarque 2.3.4. Si $K(t,u) = Lu, u \geq 0$, où $L > 0$ est une constante, alors la condition (2.3.1) implique la condition de Lipschitz globale

2.3.5 Condition non-Lipschitzienne locale

1)Pour tout entier $N > 0$, il existe une fonction $G_N : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $G_N(t,r)$ est localement intégrable en $t \in [0,T]$ pour tout $r \geq 0$ fixé, continue, monotone, non-décroissante et concave en r avec $G_N(t,0) = 0$, de plus l'inégalité suivante est satisfaite, pour tout $x, y \in H$ avec $|x|, |y| \leq N$,

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 + |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq G_N(t, |x-y|^2), \quad t \in [0,T]$$

2) Pour toute constante γ, si une fonction non-négative $z(t)$ satisfait :

$$z(t) \leq \gamma \int_0^t G_N(s, z(s))ds,$$

pour tout $t \in [0,T]$, alors $z(t) \equiv 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Remarque 2.3.5. la condition (1) est une généralisation de la condition locale de Lipschitz.

2.3.6 Condition de croissance

On dit que les fonctions f et g vérifient la condition de croissance s'il existe une fonction $H(t,r) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $H(t,r)$ est :
continue, monotone croissante, localement intégrable en $t \geq 0$ pour tout $r \geq 0$ fixé, et concave en r pour tout $t \in [0,T]$ fixé.
De plus, pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in H$ l'inégalité suivante est satisfaite :

$$|f(t,x)|^2 + |g(t,x)|^2 \leq H(t, |x|^2)$$

et pour toute constante $\gamma > 0$ l'équation différentielle

$$((d\theta)/(dt)) = \gamma H(t,\theta)$$

admet une solution

$$\theta(t) = \theta(t, 0, \theta_0)$$

sur $[0,T]$ pour toute valeur initiale θ_0.

Exemple 2.3.1. Si, par exemple, pour tous $x \in H$ et tout $t \in [0,\infty)$, il existe $L > 0$ (à la place de $H(t,r)$) tel que :

$$|f(t,x)|^2 + |g(t,x)|^2 \leq L^2(1+|x|^2)$$

2.4 Contrôlabilité

Elle a été introduite par Kalman [18], exclusivement pour des systèmes de contrôle déterministes dimensionnels. Au fil des ans, elle s'est frayé un chemin dans la littérature pour devenir une théorie à part entière. Durant les dernières décennies, les concepts de la contrôlabilité déterministe ont été étendu aux systèmes de contrôle stochastiques.

Ce chapitre se compose de deux parties : La première a pour objectif de présenter le plus simplement possible les concepts de contrôlabilité des systèmes linéaires, en particulier sa caractérisation algébrique en dimension finie. Dans la deuxième partie nous présentons quelques types de contrôlabilité. A fin de simplifier ces notions, considérons un système différentiel de la forme :

$$x^{'}(t) = f(x(t),u(t)), \qquad x(t) \in X, \qquad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \tag{2.4.1}$$

où le vecteur $x(t)$ appartient à un espace X, dit espace des états et la fonction $u(\cdot)$ appartient à un ensemble $\mathcal{U}$, dit espaces des contrôles. Nous sommes autorisés à agir sur les trajectoires du système au moyen d'une commande appropriée. Alors, étant donné un intervalle de temps $[0,T]$, un état initial x_0 et un autre final x_1, nous devons trouver un contrôle tel que la solution x corresponde à la fois, à l'état initial x_0 au temps $t=0$ et à l'état final x_1 au temps $t=T$. *i.e.* ;

$$x(T,x_0,u) = x_1$$

2.4.1 Contrôlabilité d'un système linéaire

Systèmes linéaires à coefficients constants

Considérons sur $[0, T]$ le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' & = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ x(0) & = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.4.2}$$

où, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$, et $u \in L_{loc}([0,\infty[;U)$ avec $U = \mathbb{R}^m$. Le système différentiel (2.4.2) admet une solution unique $x \in C([0,T];X)$ qui dépend de la donnée initiale et du second membre donnée sous la forme suivante :

$$x(t, x_0, u) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)\,Bu(s)\,ds, \qquad t \in [0, T].$$

Où S est la matrice résolvante du système :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}S & = AS(t) \\ S(0) & = I \end{cases}$$

et, I est la matrice identité.

On dit qu'un contrôle u transfert un état a vers un état b au moment T, si $x(T, a, u) = b$. Soit Q_T la matrice de contrôlabilité (ou le Gramien de contrôlabilité) associée au système (2.4.2), définie telle que

$$Q_T = \int_0^T S(t)B(t)B^*S^*(t)dt, \quad T > 0$$

On vérifie facilement que Q_T est symétrique et définie positive.

Théorème 2.4.1. *Supposons que pour $T > 0$ la matrice Q_T soit non singulière. Alors :*

1 Pour $a, b \in \mathbb{R}^n$ le contrôle

$$\hat{u}(s) = -B^*S^*(T-s)Q_T^{-1}(S(T)a - b), \quad s \in [0, T],$$

transfert a vers b au temps T.

2 *Parmi tous les contrôles conduisant a vers b au temps T, le contrôle $\hat{u}$ minimise l'intégrale* $\int_0^T |u(s)|^2 ds.$ *De plus,*

$$\int_0^T |u(s)|^2 ds = \langle Q_T^{-1}(S(T)a - b), S(T)a - b\rangle$$

Critère de Kalman

Théorème 2.4.2. *La paire (A, B) est contrôlable sur $[0, T]$, si et seulement si :*

$$rg\,[A\backslash B] = rg\left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right] = n.$$

c'est à dire n colonnes linéairement indépendantes, n est le nombre des composantes du vecteur d'état x.

Remarque 2.4.1. Si $rgB = j$ alors $rg[A/B]$ peut être remplacée, dans l'énoncé du théorème, par

$$rg\left[B, AB, ..., A^{n-j}B\right] = n.$$

Remarque 2.4.2. Cette condition ne dépend pas de T. Malheureusement, elle n'est pas valable pour les systèmes non linéaires et, pour les systèmes linéaires modélisés par des équations aux dérivées partielles non plus.

2.4.2. Systèmes linéaires instationnaires

Considérons un système différentiel linéaire défini sur $[0, T]$ par :

$$\begin{cases} x' & = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Où $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$. L'état x et la condition initiale x_0 sont dans $X = \mathbb{R}^n$. La fonction u est localement intégrable sur $[0, T]$ et à valeurs dans $U = \mathbb{R}^m$. Le théorème suivant, nous permet de contrôler le système (2.4.5) grâce à la condition nécessaire et suffisante qu'il met en notre disposition :

Théorème 2.4.3. *Le système (2.4.5) est contrôlable en temps T si et seulement si :*

$$C(T) = \int_0^T S(t)^{-1} B(t)\, B^T(t) \left(S(t)^{-1}\right)^T dt, \tag{2.4.4}$$

est inversible.

$C(T)$ est appelée matrice de contrôlabilité. On a $C(T) = C^T(T)$; et $x^T C(T) x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *i.e.*, $C(T)$ est une matrice symétrique positive.

Démonstration. pour toute solution $x(t)$, on a :

$$x(T) = S(T)\,x_0 + S(T)\int_0^T S(s)^{-1} B(s)\,u(s)\,ds.$$

Posons $x^* = S(T)\,x_0$,
Si $C(T)$ est inversible, posons $u(t) = \left(S(t)^{-1}B(t)\right)^T \Psi$, avec $\Psi \in \mathbb{R}^n$.
Alors on a

$$x(T) = x^* + S(T)C(T)\Psi,$$

et il suffit de prendre,

$$\Psi = (S(T)C(T))^{-1}(x_1 - x^*).$$

Réciproquement, si $C(T)$ n'est pas inversible, alors il existe $\Psi \in \mathbb{R}^n\_\{0\}$ tel que :

$$\Psi^T C(T)\Psi = 0.$$

On en déduit :

$$\int_0^T \left\| \left(S(t)^{-1}B(t)\right)^T \Psi \right\|^2 dt = 0.$$

d'où $\left(S(t)^{-1}B(t)\right)^T \Psi = 0$ $p.p$ sur $[0, T]$, et donc, pour tout contrôle u, on a :

$$\Psi^T \int_0^T S(t)^{-1}B(t)u(t)dt = 0.$$

Posons $\Psi_1 = \left(S(T)^{-1}\right)^T \Psi$, on a pour tout contrôle u

$$\Psi^T\left(x_u(T) - x^*\right) = 0,$$

i.e., $x_u(T) \in x^* + \Psi^\perp$ ($\Psi^\perp$ étant l'orthogonale de Ψ), et donc le système n'est pas contrôlable.

□

Remarque 2.4.3.

La condition (2.4.4) dépend de T mais ne dépend pas de la condition initiale x_0.

Remarque 2.4.4. Si le système est autonome, on a $S(t) = exp(tA)$; et donc

$$C(T) = \int_0^T exp(-sA)BB^T exp\,(-sA)^T\,ds.$$

Dans ce cas, $C(T_1)$ est inversible si et seulement si $C(T_2)$ est inversible, *i.e.* la condition ne dépend pas de T.

Remarque 2.4.5. La contrôlabilité des systèmes linéaires n'est pas une condition nécessaire de la contrôlabilité des systèmes non linéaires.

La plupart des systèmes dynamiques définis dans les espaces de dimension infinies (c'est-à-dire pour le cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles) ne sont pas exactement contrôlables : il peut arriver selon la complexité du problème, que la valeur de la solution à l'instant T soit suffisamment proche de x_1, sans nécessairement lui être égale, alors on utilise la contrôlabilité approximative. Parfois on ne cherche qu'à atteindre l'état nul $x_1 = 0$ (la cible x_1), alors on procède par la contrôlabilité à zéro. Et dans certain cas, on se contente d'atteindre des cibles correspondant à des trajectoires, ce qui consiste à contrôler aux trajectoires... Il existe plusieurs types de contrôlabilité qui ont été introduites comme version affaiblie de la contrôlabilité exacte. Citons en quelques types que l'on trouve dans la littérature :

2.4.3 Types de contrôlabilité

Considérons un système différentiel linéaire défini sur $[0, T]$ par :

$$\begin{cases} x' & = A\,(t)\,x\,(t) + B\,(t)\,u\,(t) \\ x\,(0) & = x_0 \end{cases} \tag{2.4.5}$$

on suppose que pour tout $t \in [0, T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset X \longrightarrow X$ et $B(t) : D(B(t)) \subset U \longrightarrow K$ sont des opérateurs non bornés, U, X et K désignant des espaces de Hilbert séparables, où X s'injecte de manière continue et dense dans K. Les espaces U et X sont appelés respectivement espace des contrôles et espace des états.
On suppose que A est tel que pour tout $T > 0$, tout $x_0 \in X$ et toute $f \in L_2([0, T]; H)$, le problème

$$\begin{cases} x' = A\,(t)\,x\,(t) + f(t) \\ x\,(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.4.6}$$

admet une unique solution faible $x \in C([0;T];H)$ qui dépend de manière continue des données x_0 et f. On note $\mathcal{U}_{ad}$ l'ensemble des contrôles $u \in L_2(0,T;U)$ tels que la solution x de (2.4.5) pour $x_0 = 0$ vérifie $x(T) \in X$. Pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}$, on note $x(t, x_0, u)$ la solution du système (2.4.5) à l'instant t. On définit alors l'opérateur non borné

$$L_T : D(L_T) \subset L_2([0,T];U) \longrightarrow X, \qquad D(L_T) = \mathcal{U}_{ad}, \qquad L_T(u) = x(T,0,u)$$

C'est à dire, pour tout $u \in \mathcal{U}_{ad}, \quad L_T(u) = x(T)$ où x est la solution de (2.4.5) pour $x_0 = 0$. On suppose dans la suite que L_T est fermé est de domaine dense.

1- Contrôlabilité exacte

Définition 2.4.1. On dira que le système (2.4.5) est **exactement contrôlable** en temps $T > 0$, si $\quad \forall (x_0, x_1) \in X \times X, \quad \exists u \in \mathcal{U}_{ad}$, telle que la solution de (2.4.5 :

$$x_1 = x\left(T, x_0, u(\cdot)\right).$$

2- Contrôlabilité approximative

Définition 2.4.2. Le Système (2.4.5) est dit approximativement contrôlable au temps $T > 0$ si : $\forall (x_0, x_1) \in X \times X, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$\|x\left(T, x_0, u(\cdot)\right) - x_1\|_X < \epsilon$$

Proposition 2.4.1. *Le système (2.4.5) est :*

– Exactement contrôlable au temps T si, et seulement si, $\quad L_T$ est surjectif,

– Approximativement contrôlable au temps T si, et seulement si, $\quad Im(L_T)$ est dense dans X.

3- Contrôlabilité à zéro

Définition 2.4.3. On dit que le système (2.4.5) est contrôlable à zéro au temps $T > 0$ si :

$$\forall x_0 \in X, \quad \exists u \in \mathcal{U}_{ad} : x\left(T, x_0, u(\cdot)\right) = 0$$

La Contrôlabilité exacte est équivalente à la Contrôlabilité à zéro dans le cas des systèmes linéaires de dimension finie.

4- Contrôlabilité aux trajectoires

Définition 2.4.4. On dit que le système (2.4.5) est contrôlable aux trajectoires au temps $T > 0$ si :

$$\forall x_0 \in X, \quad \forall (\alpha, \beta)\, X \times X, \quad \exists u \in \mathcal{U}_{ad} : \quad x\,(T, x_0, u(\cdot)) = x\,(T, \alpha, \beta)\,.$$

CHAPITRE 3

Équations stochastiques du second ordre dirigées par un processus de Rosenblatt et un mouvement Brownien

3.1 Solution mild du système stochastique 39
3.2 Contrôlabilité du système 45
3.3 Application à un système stochastique du second ordre de type neutre . . . 55

Dans ce chapitre on s'intéresse aux équations stochastiques du second ordre de type neutre, dirigées par le mouvement Brownien et un processus de Rosenblatt indépendants, du type

$$\begin{cases} d\left(x^{'}(t) - h(t, x(t))\right) = Ax(t)dt + f\left(t, x(t)\right)dt + g(t, x(t))dw(t) + \sigma(t)dZ_H(t), \\ x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_{00}, \quad t \in [0, T] \end{cases} \tag{1.1}$$

où $x(.)$ prend ses valeurs dans l'espace de Hilbert séparable X, $A : D(A) \subset X \to X$ est le générateur infinitésimal fortement continu d'une famille de cosinus $C(t)$ sur X. Soit Q_K un opérateur de classe trace sur K positif et auto-adjoint, et soit $\mathcal{L}_2(K, X)$ l'espace de tous les opérateurs Q_K -Hilbert-Schmidt agissant entre K et X muni de la norme Hilbert-Schmidt $\|.\|_{\mathcal{L}_2}$. w est un processus Q_K-Wiener sur un espace de Hilbert K. Soit Q un opérateur de classe trace sur Y auto-adjoint, positif et soit $\mathcal{L}_2^0(Y,X)$ l'espace de tous les opérateurs Q-Hilbert-Schmidt agissant entre Y et X, muni de la norme de Hilbert-Schmidt $\|.\|_{\mathcal{L}_2^0}$. Z_H est un processus Q-Rosenblatt sur un espace de Hilbert Y. Les processus w et Z_H sont indépendants et $h,\ f,\ g$ et σ sont des fonctions données qui seront spécifiées ultérieurement. Soit $(\Omega,\mathscr{F}_T,P)$ l'espace de probabilité complet muni de la filtration naturelle $\{\mathscr{F}_t \mid t\in[0,T]\}$ générée par des variables aléatoires, $\{Z_H(s),\ w(s),\ s\in[0,T]\}$, et soient x_0 et x_{00} des $\mathscr{F}_0$-mesurables à valeurs des variables aléatoires dans X indépendantes de w et de Z_H.

On définit les classes de fonctions suivantes : soit $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathscr{F}_T,X)$ l'espace de Hilbert de toutes les variables $\mathscr{F}_T$-mesurables et carré intégrables à valeurs dans X, $\mathcal{L}_2^{\mathscr{F}}([0,T],X)$ est l'espace de Hilbert de tous les processus à valeurs dans X carré intégrables et $\mathscr{F}_t$-adapté. $C([0,T],\mathcal{L}_2(\Omega,\mathscr{F}_T,X))$ est l'espace de Banach des applications continues satisfaisant la condition $\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}\|x(t)\|^2<\infty$; et Δ_2^T est le sous espace fermé de $C([0,T],\mathcal{L}_2(\Omega,\mathscr{F}_T,X))$ des processus mesurables et $\mathscr{F}_t$-adapté $x(t)$. Δ_2^T est alors un espace de Banach muni de la norme définie par :

$$\|x\|_{\Delta_2^T}=\left(\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}\|x(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Récemment, il y a eu un intérêt croissant pour les équations différentielles fonctionnelles stochastiques dirigées par le mouvement Brownien fractionnaire (mBf), (voir [3], [22]). Ce dernier est en général Gaussien, ce qui rend le calcul beaucoup plus facile qu'avec un autre processus. Cependant, dans des situations concrètes où la Gaussianité n'est pas plausible pour le modèle, on peut employer le processus de Rosenblatt. La théorie du processus de Rosenblatt a donc été développée, en raison de ses bonnes propriétés, à savoir l'auto-similitude, la stationnarité des incréments, dépendance à long terme, etc. (voir [23], [29], [38]). Les processus de Rosenblatt peuvent également être des fonctions d'entrée dans des modèles où l'auto-similarité est observée dans les données empiriques d'apparences non gaussiennes. Il y a une littérature cohérente qui se focalise sur les différents aspects théoriques des processus de Rosenblatt ([21], [22], [24], [30]). Certains types particuliers de systèmes dynamiques nécessitent un processus mixte pour modéliser leurs dynamique ([1], [16]).

Motivé par des travaux récents ([10], [12], [16], [42]), ce chapitre consiste à prouver l'existence et l'unicité de la solution mild pour le système (1.1) sous conditions non-Lipschitziennes, ce qui est plus général que le cas Lipschitzien et celui de croissance linéaire, voir ([11], [28]). Plus loin, le problème de contrôlabilité est discuté pour le système (1.1). Notons que l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles stochastiques du second ordre de type neutre gouvernées par le processus de Wiener et d'un processus Rosenblatt indépendant, sous conditions non-Lipschitzienne n'a pas encore été étudié.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 1, nous énonçons et construisons la solution mild pour la classe d'équations stochastiques à la fois dirigées par un mouvement Brownien et un processus de Rosenblatt de type neutre. Dans la section 2 nous démontrerons notre résultat principal, qui est la contrôlabilité du système sous conditions non-Lipschitziennes. Dans la section 3, nous donnons un exemple pour illustrer efficacité du résultat obtenu.

3.1 Solution mild du système stochastique

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution mild pour (1.1). Pour le faire, nous présentions d'abord la définition de solutions mild pour le système (1.1).

Définition 3.1.1. Un processus stochastique $x \in \Delta_2^T$ est une solution mild de (1.1) s'il satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= C(t)x_0 + S(t)(x_{00} - h(0,x_0)) + \int_0^t C(t-s)h(s,x(s))ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)f(s,x(s)ds + \int_0^t S(t-s)g(s,x(s))dw(s) \qquad (3.1.1) \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dZ_H(s), \quad P-a.s. \end{aligned}$$

Construction de la solution

Nous supposons la condition non Lipschitzienne suivante :

(H1) A est le générateur infinitésimal de la famille de cosinus fortement continu $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ sur X.

(H2) La fonction $\sigma : [0,T] \to \mathcal{L}_2^0(Y,X)$ est bornée, ce qui revient à dire : il existe une constante positive L telle que $\|\sigma(t)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} \leq L$, uniformément en $t \in [0,T]$.

(H3) Les fonctions $h, \quad f : [0,T] \times X \to X, \qquad g : [0,T] \times X \to \mathcal{L}_2$ sont mesurables, continues en x pour tout $t \in [0,T]$ fixé ; et il existe une fonction $G : [0,T] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty), \quad (t,v) \to G(t,v)$ telle que :

$$\mathbf{E}\,\|h(t,x)\|^2 + \mathbf{E}\,\|f(t,x)\|^2 + \mathbf{E}\,\|g(t,x)\|^2_{\mathcal{L}_2} \leq G(t,\mathbf{E}\,\|x\|^2) \tag{3.1.2}$$

pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathscr{F}_T,X)$.

(H4) $G(t,v)$ est localement intégrable en t pour tout $v \in [0,+\infty)$ fixé, est continue, croissante en v et pour tout $t \in [0,T]$ fixé, pour tout $\lambda > 0$, $v_0 \geq 0$, l'équation intégrale : $v(t) = v_0 + \lambda \int_0^t G(s,v(s))ds$, admet une solution globale sur $[0,T]$.

(H5) Il existe une fonction $K : [0,T] \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ telle que :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\,\|h(t,x)-h(t,y)\|^2 + \mathbf{E}\,\|f(t,x)-f(t,y)\|^2 \leq K(t,\mathbf{E}\,\|x-y\|^2) \\ &\mathbf{E}\,\|g(t,x)-g(t,y)\|^2_{\mathcal{L}_2} \leq K(t,\mathbf{E}\,\|x-y\|^2) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

pour tout $t \in [0,T]$ et tous $x,y \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathscr{F}_T,X)$,

(H6) $K(t,v)$ est localement intégrable en t pour tout $v \in [0,+\infty)$fixé, continue et croissante en v pour tout $t \in [0,T]$ fixé. De plus, $K(t,0) = 0$; et si une fonction continue positive $z(t),\ t \in [0,T]$ satisfait

$$\begin{cases} z(t) \leq \sigma \int_0^t K(s,z(s))ds, \quad t \in [0,T] \\ z(0) = 0 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

pour certains $\sigma > 0$, alors $z(t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Remarque 3.1.1. 1. Si la fonction K est concave par rapport à la deuxième variable pour tout t fixé, $t \geq 0$ et

$$\|h(t,x)-h(t,y)\|^2 + \|f(t,x)-f(t,y)\|^2 + \|g(t,x)-g(t,y)\|^2_{L_2^0} \leq K(t,\|x-y\|^2),$$

pour tous $x, \quad y \in X$ et $t \geq 0$, alors par l'inégalité de Jensen (3.1.3) est satisfaite.

2. Si $K(t,v) = \eta(t)\vartheta(v), \quad t \geq 0, \quad v \geq 0$ où $\eta(t) \geq 0$ est localement intégrable et $\vartheta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est une fonction continue, monotone croissante et

concave avec $\vartheta(0) = 0$, $\vartheta(v) > 0$ pour $v > 0$ et $\int_{0^+} 1/\vartheta(u)du = \infty$; alors la fonction $K(t,v)$ satisfait la supposition $(H6)$.

Donnons maintenant quelques exemples concrets de la fonction ϑ, (voir [37] soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, définissons

$$\begin{aligned} \vartheta_1(u) &= \begin{cases} u\log(u^{-1}), & 0 \le u \le \epsilon \\ \epsilon\log(\epsilon^{-1}) + \vartheta_1'(\epsilon_-)(u-\epsilon), & u > \epsilon \end{cases} \\ \vartheta_2(u) &= \begin{cases} u\log(u^{-1})\log\log(u^{-1}), & 0 \le u \le \epsilon \\ \epsilon\log(\epsilon^{-1})\log\log(\epsilon^{-1}) + \vartheta_2'(\epsilon_-)(u-\epsilon), & u > \epsilon \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Théorème 3.1.1. *Supposons que les conditions (H1)-(H6) soient vérifiées, alors il existe une solution unique de (1.1) dans* Δ_2^T.

La preuve de ce théorème est basée sur la méthode d'approximation de type Picard . Construisons une suite de processus stochastique $\{x_n\}_{n\ge 0}$ comme suit :

$$\begin{cases} x_0(t) = C(t)x_0 + S(t)(x_{00} - h(0,x_0)) \\ x_{n+1}(t) = C(t)x_0 + S(t)(x_{00} - h(0,x_0)) + \int_0^t C(t-s)h(s,x_n(s))ds \\ + \int_0^t S(t-s)f(s,x_n(s))ds + \int_0^t S(t-s)g(s,x_n(s))dw(s) \\ + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dZ_H(s) \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Lemme 3.1.1. *Sous les conditions (H1)-(H5) la suite* $\{x_n\}_{n\ge 0}$ *est uniformément boornée dans* Δ_2^T*, i.e.,* $\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|x_n(s)\|^2\right] \le C$*, où* C *est une constante.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,\|x_{n+1}(t)\|^2 \;\le\;& 6\mathbf{E}\,\|C(t)x_0\|^2 + 6\mathbf{E}\,\|S(t)(x_{00} - h(0,x_0))\|^2 \\ &+6\mathbf{E}\left\|\int_0^t C(t-s)h(s,x_n(s))ds\right\|^2 + 6\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)f(s,x_n(s))ds\right\|^2 \\ &+6\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)g(s,x_n(s))dw(s)\right\|^2 + 6\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\sigma(s)dZ_H(s)\right\|^2. \end{aligned}$$

Par la proposition (2.1.1), l'inégalité de Hölder et le théorème d'isométrie d'Itô , On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|x_{n+1}(t)\right\|^2 &\leq 6M^2\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2+12M^2(\mathbf{E}\left\|x_{00}\right\|^2+\mathbf{E}\left\|h(0,x_0)\right\|^2) \\
&\quad +6M^2T\mathbf{E}\int_0^t\left(\mathbf{E}\left\|h(s,x_n(s))\right\|^2+\mathbf{E}\left\|f(s,x_n(s))\right\|^2\right)ds \\
&\quad +6M^2\int_0^t\mathbf{E}\left\|g(s,x_n(s))\right\|^2_{\mathcal{L}_2}ds+12M^2HT^{2H-1}\int_0^t\mathbf{E}\left\|\sigma(s)\right\|^2_{\mathcal{L}_2^0}ds.
\end{aligned}$$

Alors de (H1)-(H5), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|x_{n+1}(t)\right\|^2 &\leq 6M^2\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2+12M^2\mathbf{E}\left\|x_{00}\right\|^2+12M^2G\left(0,\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2\right) \\
&\quad +6M^2T^2\left(C_h+C_f\right)\int_0^t G\left(s,\mathbf{E}\left\|x_n(s)\right\|^2\right)ds+6M^2TC_g\int_0^t G\left(s,\mathbf{E}\left\|x_n(s)\right\|^2\right)ds \\
&\quad +12M^2HT^{2H-1}TL \\
&\leq C_1+C_2\int_0^t G\left(s,\mathbf{E}\left\|x_n(s)\right\|^2\right)ds.
\end{aligned}$$

On obtient donc,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left\|x_{n+1}(s)\right\|^2\right]\leq C_1+C_2\int_0^t G\left(s,\mathbf{E}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left\|x_n(r)\right\|^2\right]\right)ds. \tag{3.1.7}$$

où

$$\begin{cases}
C_1=6M^2\left(\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2+2\mathbf{E}\left\|x_{00}\right\|^2+2G\left(0,\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2\right)+2HT^{2H-1}TL\right) \\
C_2=6M^2T\left(T\left(C_h+C_f\right)+C_g\right)
\end{cases}$$

Par conséquent, de (H4) et l'inégalité (3.1.7), il y a un $v(t),\ t\in[0,T]$ satisfaisant

$$v(t)=C_1+C_2\int_0^t G(s,v(s))ds..$$

On doit maintenant montrer par récurrence que, pour $n=0,1,2,...$

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\left\|x_n(s)\right\|^2\right]\leq v(t),\quad\forall t\in[0,T]. \tag{3.1.8}$$

En utilisant l'argument de récurrence

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_0(s)\|^2\right] &= \mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|C(s)x_0+S(s)(x_{00}-h(0,x_0))\|^2\right]\\
&\leq M^2\left(\mathbf{E}\|x_0\|^2+2\mathbf{E}\|x_{00}\|^2+2G\left(0,\mathbf{E}\|x_0\|^2\right)\right)\\
&\leq C_1\leq v(t),\quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

Supposons que (3.1.8) soit vraie pour $n\in\mathbb{N}$. Alors par (3.1.7), l'hypothèse de récurrence et la propriété de non décroissance de G en v, on obtient :

$$\begin{aligned}
v(t)-\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_n(s)\|^2\right] &\geq C_2\int_0^t\left(G\left(s,v(s)\right)-G\left(s,\mathbf{E}\left[\sup_{r\in[0,s]}\|x_n(r)\|^2\right]\right)\right)ds\\
&\geq 0,\quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_n(s)\|^2\right]\leq v(t)\leq v(T)<\infty$$

□

Démonstration du Théorème 3.1.1. **Étape 1 : Existence :** Par un argument similaire à celui du Lemme (3.1.1), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|x_{n+m}(t)-x_n(t)\|^2 &\leq 3\mathbf{E}\left\|\int_0^t C(t-s)\left(h(s,x_{n+m-1}(s))-h(s,x_{n-1}(s))\right)ds\right\|^2\\
&\quad +3\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\left(f(s,x_{n+m-1}(s))-f(s,x_{n-1}(s))\right)ds\right\|^2\\
&\quad +3\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\left(f(s,x_{n+m-1}(s))-f(s,x_{n-1}(s))\right)dw(s)\right\|^2\\
&\leq 2TMC_h\int_0^t\mathbf{E}\|h(s,x_{n+m-1}(s))-h(s,x_{n-1}(s))\|^2ds\\
&\quad +2TMC_f\int_0^t\mathbf{E}\|f(s,x_{n+m-1}(s))-f(s,x_{n-1}(s))\|^2ds\\
&\quad +2M\int_0^t\mathbf{E}\|g(s,x_{n+m-1}(s))-g(s,x_{n-1}(s))\|^2ds.
\end{aligned}$$

Alors on obtient,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_{n+m}(s)-x_n(s)\|^2\right]\leq C_3\int_0^t K\left(s,\mathbf{E}\left[\sup_{r\in[0,s]}\|x_{n+m-1}(s)-x_{n-1}(s)\|^2\right]\right)ds, \tag{3.1.9}$$

où $C_3=2M\left(T(C_h+C_f)+C_g\right)$.

Il découle du lemme (3.1.1) que $\sup\limits_{n,m}\|x_{n+m-1}-x_{n-1}\|^2<\infty$. Par conséquent, on peut appliquer le lemme de Fatou à l'inégalité (3.1.9),

$$\lim_{n,m\to\infty}\sup\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_{n+m}(s)-x_n(s)\|^2\right] \tag{3.1.10}$$

$$\leq\ C_3\int_0^t K\left(s,\lim_{n,m\to\infty}\sup\mathbf{E}\left[\sup_{r\in[0,s]}\|x_{n+m-1}-x_{n-1}\|^2\right]\right)ds. \tag{3.1.11}$$

On pose :

$$z(t):=\lim_{n,m\to\infty}\sup\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_{n+m}(s)-x_n(s)\|^2\right]$$

Alors l'inégalité précédente (3.1.10) peut être réécrite sous la forme

$$z(t)\leq C_3\int_0^t K\left(s,z(s)\right)ds,$$

Par (H6) on obtient immédiatement, que

$$z(t)=\lim_{n,m\to\infty}\sup\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_{n+m}(s)-x_n(s)\|^2\right]=0,\quad\text{pour tout } t\in[0,T].$$

qui a pour conséquence,

$$\lim_{n,m\to\infty}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]}\|x_{n+m}(s)-x_n(s)\|^2\right]=0,\quad\text{pour tout } t\in[0,T].$$

Donc, la suite $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach Δ_2^T. Soit $x(t)$ sa limite. Faisant tendre n vers inf dans l'équation (3.1.6), on obtient (3.1.1). En d'autres termes, nous avons prouvé l'existence de la solution mild dans l'espace Δ_2^T.

Étape 2 : Unicité. Supposons que x_1 et $x_2\in\Delta_2^T$ sont des solutions mild de (1.1). De manière analogue à la preuve de (3.1.9), on obtient pour tout $t \in [0,T]$

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} \|x_1(s)-x_2(s)\|^2\right] \leq C_3 \int_0^t K\left(s, \mathbf{E}\left[\sup_{r\in[0,s]} \|x_1(s)-x_2(s)\|^2\right]\right) ds, \tag{3.1.12}$$

En raison de l'hypothèse (H6) et Barbu (Lemme 2.2 [8]) on obtient :

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} \|x_1(s)-x_2(s)\|^2\right] = 0,$$

i.e., $x_1 = x_2$. □

3.2 Contrôlabilité du système

Dans cette section, nous énonçons et prouvons la contrôlabilité pour l'équation stochastique du second membre de type neutre gouvernée par le mouvement Brownien et un processus de Rosenblatt indépendant, donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} d\left(x'(t) - h(t,x(t))\right) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + f\left(t,x(t)\right)dt + g(t,x(t))dw(t) + \sigma(t)dZ_H(t), \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_{00}, \quad t \in [0,T] \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où $h,\ f,\ g,\ \sigma,\ A$ sont les mêmes que dans l'équation(1.1), $B : U \to X$ est une application donnée et la fonction de contrôle u prend ses valeurs dans $U_{ad} = L^2([0,T],U)$, l'espace de Hilbert des fonctions de contrôle admissibles pour l'espace de Hilbert séparable U.

Définition 3.2.1. Un processus stochastique $x \in \Delta_2^T$ est une solution mild de (3.2.1) si pour tout $u \in U_{ad}$ il satisfait l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} x(t) &= C(t)x_0 + S(t)(x_{00} - h(0,x_0)) + \int_0^t C(t-s)h(s,x(s))ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)\left(Bu(s) + f(s,x(s))\right)ds + \int_0^t S(t-s)g(s,x(s))dw(s) \\ &\quad + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dZ_H(s), \quad P-a.s. \end{aligned}$$

Définition 3.2.2. Le système (3.2.1) est dit contrôlable sur l'intervalle $[0,T]$, si pour toute fonction initiale $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_{00}$ et état final souhaité $x_1 \in X$, il existe un contrôle stochastique $u \in U_{ad}$ tel que la solution mild du système (3.2.1) correspondante à ce contrôle satisfait $x(T) = x_1$.

Ci-après, les hypothèses supplémentaires de cette section :

(H7) Les fonction $h,\ f : [0,T] \times X \to X$ et $g : [0,T] \times X \to \mathcal{L}_2(K,X)$ satisfont les conditions de croissance linéaire et de Lipschitz, qui veut dire il existe des constantes positives $C_h,\ C_f$ et C_g telles que pour $x, y \in X$ et $t \in [0,T]$

$$\begin{array}{lcl} \|h(t,x)\|^2 \leq C_h(1+\|x\|^2) & & \|h(t,x)-h(t,y)\|^2 \leq C_h\|x-y\|^2 \\ \|f(t,x)\|^2 \leq C_f(1+\|x\|^2) & , & \|f(t,x)-f(t,y)\|^2 \leq C_f\|x-y\|^2 \\ \|g(t,x)\|^2_{\mathcal{L}_2} \leq C_g(1+\|x\|^2) & & \|g(t,x)-g(t,y)\|^2_{\mathcal{L}_2} \leq C_g\|x-y\|^2 \end{array}$$

(H8) L'opérateur linéaire $\Gamma : L^2([0,T],U) \to \mathcal{L}_2(\Omega, \mathscr{F}_T, X)$, et défini par

$$\Gamma u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds$$

admet un opérateur inverse borné Γ^{-1} qui prend ses valeurs dans $L^2([0,T],U)/\Gamma$ et il existe des constantes positives $M_B,\ M_\Gamma$ telle que $\|B\|^2 \leq M_B$ et $\left\|\Gamma^{-1}\right\|^2 \leq M_\Gamma$.

A présent, nous décrivons le résultat de contrôlabilité et donnons sa preuve comme suit :

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H2) et (H7)-(H8), le système (3.2.1) est contrôlable sur* $[0,T]$.

Démonstration. En utilisant les hypothèses (H8), pour un $x_T \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathscr{F}_T, X)$ arbitraire, on définit le contrôle stochastique

$$\begin{aligned} u_x(t) \quad = \quad & \Gamma^{-1}\left\{x_T - C(T)x_0 - S(T)(x_{00} - h(0,x_0)) - \int_0^T C(T-s)h(s,x(s))ds \right. \\ & - \int_0^T S(T-s)f(s,x(s))ds - \int_0^T S(T-s)g(s,x(s))dw(s) \\ & \left. - \int_0^T S(T-s)\sigma(s)dZ_H(s)\right\}(t) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

On définit l'opérateur $\Psi : \Delta_2^T \to \Delta_2^T$ par :

$$(\Psi x)(t) = C(t)x_0 + S(t)(x_{00} - h(0,x_0)) + \int_0^t C(t-s)h(s,x(s))ds$$
$$\int_0^t S(t-s)\left(Bu_x(s) + f(s,x(s))\right)ds + \int_0^t S(t-s)g(s,x(s))dw(s) \tag{3.2.3}$$
$$+ \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dZ_H(s)$$

Maintenant, nous montrons que l'opérateur Ψ a un point fixe dans Δ_2^T qui est une solution mild du système (3.2.1). En substituant (3.2.2) dans (3.2.3) on trouve que $(\Psi x)(T) = x_T$, indiquant que le contrôle u_x mène le système de x_0 vers x_T en temps fini T, ce qui implique en outre que le système(3.2.1) est contrôlable. On divise la preuve en trois étapes.

Étape 1 : Pour tout $x \in \Delta_2^T$, $\quad (\Psi x)(t)$ est continu sur l'intervalle $[0,T]$ au sens de L^2.

Soit $0 \le t_1 \le t_2 \le T$. Alors pour tout $x \in \Delta_2^T$ fixé :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi x)(t_2) - (\Psi x)(t_1)\right\|^2 \leq\ & 5\mathbf{E}\left\|\left(C(t_2) - C(t_1)\right)x_0 + \left(S(t_2) - S(t_1)\right)\left(x_{00} - h(0,x_0)\right)\right\|^2 \\
& +5\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2}\left[C(t_2-s)h(s,x(s)) + S(t_2-s)f(s,x(s))\right]ds\right. \\
& \left. - \int_0^{t_1}\left[C(t_1-s)h(s,x(s)) + S(t_1-s)f(s,x(s))\right]ds\right\|^2 \\
& +5\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2-s)f(s,x(s))dw(s) - \int_0^{t_1} S(t_1-s)g(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\
& +5\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2-s)\sigma(s)dZ_H(s) - \int_0^{t_1} S(t_1-s)\sigma(s)dZ_H(s)\right\|^2 \\
& +5\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2-s)Bu_x(s)ds - \int_0^{t_1} S(t_1-s)Bu_x(s)ds\right\|^2 \\
=\ & 5\sum_{1\le i=5}\mathbf{E}\left\|D_i\right\|^2.
\end{aligned}$$

Par continuité forte de $C(t)$ et $S(t)$, on a :

$$\lim_{t_2-t_1\to 0}\left(C(t_2) - C(t_1)\right)x_0 + \left(S(t_2) - S(t_1)\right)\left(x_{00} - h(0,x_0)\right) = 0.$$

De la propriété (2.1.1), on a :

$$\left\|\left(C(t_2) - C(t_1)\right)x_0 + \left(S(t_2) - S(t_1)\right)\left(x_{00} - h(0,x_0)\right)\right\| \le \mathbf{2}M\left\|x_0\right\| + \mathbf{2}M\left\|x_{00} - h(0,x_0)\right\|.$$

Ainsi, nous concluons par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue que :

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \mathbf{E}\,\|D_1\|^2 = 0.$$

Pour le second terme D_2, on a :

$$\begin{aligned}\|D_2\| &\leq \left\| \int_0^{t_1} \left[(C(t_2-s) - C(t_1-s))\, h(s,x(s)) + (S(t_2-s) - S(t_1-s))\, f(s,x(s)) \right] ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t_1}^{t_2} \left[C(t_2-s)h(s,x(s)) + S(t_2-s)f(s,x(s)) \right] ds \right\| \\ &\leq D_{21} + D_{22}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder,

$$\mathbf{E}\,\|D_{21}\|^2 \leq t_1 \mathbf{E} \int_0^{t_1} \|(C(t_2-s) - C(t_1-s))\, h(s,x(s)) + (S(t_2-s) - S(t_1-s))\, f(s,x(s))\|^2\, ds.$$

Par continuité forte de $C(t)$ et $S(t)$, on a

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} (C(t_2-s) - C(t_1-s))\, h(s,x(s)) + (S(t_2-s) - S(t_1-s))\, f(s,x(s)) = 0.$$

En utilisant la propriété (2.1.1) et la condition (H7), on obtient :

$$\begin{aligned}&\|(C(t_2-s) - C(t_1-s))\, h(s,x(s)) + (S(t_2-s) - S(t_1-s))\, f(s,x(s))\| \\ \leq\ & 2M\left(\|h(s,x(s))\| + \|f(s,x(s))\|\right).\end{aligned}$$

donc, nous concluons par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que :

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \mathbf{E}\,\|D_{21}\|^2 = 0.$$

Par la propriété (2.1.1), la condition (H7) et l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\|D_{22}\|^2 &\leq 2M^2(t_2-t_1) \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{E}\left(\|h(s,x(s))\|^2 + \|f(s,x(s))\|^2 \right) ds \\ &\leq 2M^2(C_h + C_f)(t_2-t_1) \int_0^T \left(\mathbf{E}\,\|x(s)\|^2 + 1 \right) ds.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \mathbf{E}\left\|D_{22}\right\|^2 = 0.$$

Maintenant, pour le terme D_3, on a :

$$\begin{aligned}\|D_3\| &\leq \left\|\int_0^{t_1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)g(s,x(s))dw(s)\right\| + \left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2-s)g(s,x(s))dw(s)\right\| \\ &\leq \|D_{31}\| + \|D_{32}\|\end{aligned}$$

et par le théorème de l'isométrie d'Ito, on a :

$$\begin{aligned}\|D_{31}\| &\leq \left\|\int_0^{t_1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)g(s,x(s))dw(s)\right\|^2 \\ &\leq \int_0^{t_1}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds.\end{aligned}$$

Par la continuité forte de $S(t)$, on a :

$$\lim_{t_2-t_1\to 0}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 0.$$

De plus

$$\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq 4M^2\left\|g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2$$

Donc nous concluons par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \mathbf{E}\left\|D_{31}\right\|^2 = 0.$$

Pour le second terme D_{32}, de manière similaire on obtient

$$\mathbf{E}\left\|D_{32}\right\|^2 \leq 2M^2\int_{t_1}^{t_2}\left\|g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds.$$

Par conséquent,

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \mathbf{E}\left\|D_{32}\right\|^2 = 0.$$

Pour D_4, il va de soi que,

$$\begin{aligned}\|D_4\| &\leq \left\|\int_0^{t_1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s)dZ_H(s)\right\| + \left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2-s)\sigma(s)dZ_H(s)\right\| \\ &\leq \|D_{41}\| + \|D_{42}\|.\end{aligned}$$

Par le Lemme (1.2), on a :

$$\begin{aligned} \|D_{41}\|^2 &\leq \left\| \int_0^{t_1} \left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s)dZ_H(s) \right\|^2 \\ &\leq 2Ht_1^{2H-1} \int_0^{t_1} \|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} ds. \end{aligned}$$

On a par la continuité forte de $S(t)$

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} = 0.$$

De plus,

$$\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} \leq 4M^2 \|\sigma(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0}.$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on peut obtenir

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \mathbf{E}\|D_{41}\|^2 = 0.$$

De manière similaire, on obtient :

$$\mathbf{E}\|D_{42}\|^2 \leq 4M^2H\left(t_2^{2H-1}-t_1^{2H-1}\right)\int_{t_1}^{t_2} \|\sigma(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} ds.$$

Par conséquent,

$$\lim_{t_2-t_1\to 0} \mathbf{E}\|D_{42}\|^2 = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, la propriété (2.1.1), (H2), (H7) et (H8), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|u_x(t)\|^2 &\leq 5M_\Gamma \Big\{ \mathbf{E}\|x_T\|^2 + M^2\mathbf{E}\left\|x_0^2\right\| + 2M^2(\mathbf{E}\|x_{00}\|^2 + \mathbf{E}\|h(0,x_0)\|^2) \\ &\quad + M^2\left(T(C_h+C_f)+C_g\right)(1+\|x\|^2_{\Delta_2^T}) + 2M^2HT^{2H-1}L_\sigma \Big\} \qquad (3.2.4) \\ &\leq M_u(1+\|x\|^2_{\Delta_2^T}). \end{aligned}$$

Ensuite, observons que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\|D_5\|^2 &\leq 2\mathbf{E}\left\| \int_0^{t_1} \left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)Bu_x(s)ds \right\|^2 + 2\mathbf{E}\left\| \int_{t_1}^{t_2} S(t_2-s)Bu_x(s)ds \right\|^2 \\ &\leq 2\left(\mathbf{E}\|D_{51}\|^2 + \mathbf{E}\|D_{52}\|^2\right). \end{aligned}$$

En utilisant la même procédure qu'avant, on obtient

$$\mathbf{E}\left\|D_{51}\right\|^{2} \leq t_{1} \int_{0}^{t_{1}} \mathbf{E}\left\|\left(S\left(t_{2}-s\right)-S\left(t_{1}-s\right)\right) B u_{x}(s)\right\|^{2} d s.$$

En combinant ceci avec la continuité forte de $S(t)$ et l'inégalité (3.2.4), on obtient

$$\lim_{t_{2}-t_{1} \rightarrow 0} \mathbf{E}\left\|D_{51}\right\|^{2}=0.$$

Pour le second terme D_{42} de manière similaire on a

$$\mathbf{E}\left\|D_{52}\right\|^{2} \leq M^{2}\|B\|^{2}\left(t_{2}-t_{1}\right) \int_{t_{1}}^{t_{2}} \mathbf{E}\left\|u_{x}(s)\right\|^{2} d s.$$

On obtient

$$\lim_{t_{2}-t_{1} \rightarrow 0} \mathbf{E}\left\|D_{52}\right\|^{2}=0.$$

L'argument précédent montre que $\lim_{t_{2}-t_{1} \rightarrow 0} \mathbf{E}\left\|(\Psi x)\left(t_{2}\right)-(\Psi x)\left(t_{1}\right)\right\|^{2}=0$

Ainsi nous concluons que $(\Psi x)(t)$ est continue à droite dans $[0, T)$. Un raisonnement similaire montre qu'elle est également continue à gauche dans $(0, T]$.

Etape 2 : L'opérateur Ψ renvoie Δ_{2}^{T} dans lui même.

Soit $x \in \Delta_{2}^{T}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|(\Psi x)(t)\|^{2} \leq\; & 7 \mathbf{E}\left\|C(t) x_{0}\right\|^{2}+7 \mathbf{E}\left\|S(t)\left(x_{00}-h\left(0, x_{0}\right)\right)\right\|^{2} \\
& +7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t} C(t-s) h(s, x(s)) d s\right\|^{2}+7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t} S(t-s) f(s, x(s)) d s\right\|^{2} \\
& +7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t} S(t-s) g(s, x(s)) d w(s)\right\|^{2}+7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t} S(t-s) \sigma(s) d Z_{H}(s)\right\|^{2} \\
& +7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t} S(t-s) B u_{x}(s) d s\right\|^{2}.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, le théorème de l'isométrie d'Itô et la propriété (2.1.1), on a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi x)(t)\right\|^{2} \leq\; & 7M^{2}\mathbf{E}\left\|x_{0}\right\|^{2}+14M^{2}(\mathbf{E}\left\|x_{00}\right\|^{2}+\mathbf{E}\left\|h(0,x_{0})\right\|^{2}) \\
& +7M^{2}T\mathbf{E}\int_{0}^{t}\left(\mathbf{E}\left\|h(s,x(s))\right\|^{2}+\mathbf{E}\left\|f(s,x(s))\right\|^{2}\right)ds \\
& +7M^{2}\int_{0}^{t}\mathbf{E}\left\|g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_{2}}^{2}ds+14M^{2}HT^{2H-1}\int_{0}^{t}\mathbf{E}\left\|\sigma(s)\right\|_{\mathcal{L}_{2}^{0}}^{2}ds \\
& +7M^{2}\left\|B\right\|^{2}T\int_{0}^{t}\mathbf{E}\left\|u_{x}(s)\right\|^{2}ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, de (H2) et (H7), combinés avec la propriété (2.1.1) et l'inégalité (3.2.4), on a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi x)(t)\right\|^{2} \leq\; & 7M^{2}\mathbf{E}\left\|x_{0}\right\|^{2}+14M^{2}(\mathbf{E}\left\|x_{00}\right\|^{2}+\mathbf{E}\left\|h(0,x_{0})\right\|^{2}) \\
& +7M^{2}T^{2}\left(C_{h}+C_{f}\right)\left(1+\left\|x\right\|_{\Delta_{2}^{T}}^{2}\right)+7M^{2}TC_{g}\left(1+\left\|x\right\|_{\Delta_{2}^{T}}^{2}\right) \\
& +14M^{2}HT^{2H-1}TL+7M^{2}\left\|B\right\|^{2}T^{2}M_{u}\left(1+\left\|x\right\|_{\Delta_{2}^{T}}^{2}\right) \\
\leq\; & 7M^{2}\left(\mathbf{E}\left\|x_{0}\right\|^{2}+2(\mathbf{E}\left\|x_{00}\right\|^{2}+\mathbf{E}\left\|h(0,x_{0})\right\|^{2})+2HT^{2H-1}TL\right) \\
& +7M^{2}\left(\left\|B\right\|^{2}T^{2}\left(C_{h}+C_{f}+M_{u}\right)+TC_{g}\right)\left(1+\left\|x\right\|_{\Delta_{2}^{T}}^{2}\right) \\
=\; & c_{1}+c_{2}\left\|x\right\|_{\Delta_{2}^{T}}^{2}.
\end{aligned}
$$

où $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ sont des constantes appropriées. Par conséquent, nous obtenons que $\|(\Psi x)\|^2_{\Delta_2^T} < \infty$. Puisque $(\Psi x)(t)$ est continu sur $[0,T]$ donc Ψ transforme Δ_2^T en lui-même.
Etape 3 : Ψ est une contraction dans Δ_2^T. Soit $x, y \in \Delta_2^T$, alors pour tout $t \in [0,T]$ on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi x)(t)-(\Psi y)(t)\right\|^{2} \leq\; & 4\mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}S(t-s)B\left(u_{x}(s)-u_{y}(s)\right)ds\right\|^{2} \\
& +4\mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}C(t-s)\left(h(s,x(s))-h(s,y(s))\right)ds\right\|^{2} \\
& +4\mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}S(t-s)\left(f(s,x(s))-f(s,y(s))\right)ds\right\|^{2} \\
& +4\mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}S(t-s)\left(g(s,x(s))-g(s,y(s))\right)dw(s)\right\|^{2}.
\end{aligned}
$$

Par la propriété (2.1.1), combinée avec l'inégalité de Hölder et le théorème de l'isométrie d'Itô, on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi x)(t)-(\Psi y)(t)\right\|^2 &\leq 4M^2\left\|B\right\|^2 T\int_0^t \mathbf{E}\left\|u_x(s)-u_y(s)\right\|^2 ds\\
&+4M^2T\int_0^t \mathbf{E}\left\|h(s,x(s))-h(s,y(s))\right\|^2 ds\\
&+4M^2T\int_0^t \mathbf{E}\left\|f(s,x(s))-f(s,y(s))\right\|^2 ds\\
&+4M^2\int_0^t \mathbf{E}\left\|g(s,x(s))-g(s,y(s))\right\|^2_{\mathcal{L}_2} ds.
\end{aligned}$$

De (H7), (H8) et la propriété (2.1.1),combinée avec l'inégalité de Hölder et le théorème de l'isométrie d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|u_x(s)-u_y(s)\right\|^2 &\leq 3\mathbf{E}\left\|\Gamma^{-1}\int_0^T C(T-s)\left[h(s,x(s))-h(s,y(s))\right]ds\right\|^2\\
&+3\mathbf{E}\left\|\Gamma^{-1}\int_0^t S(T-s)\left[f(s,x(s))-f(s,y(s))\right]ds\right\|^2\\
&+3\mathbf{E}\left\|\Gamma^{-1}\int_0^t S(T-s)\left[g(s,x(s))-g(s,y(s))\right]dw(s)\right\|^2\\
&\leq 3M_\Gamma M^2 T(C_h+C_f)\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds\\
&+3M_\Gamma M^2 C_g\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds\\
&\leq 3M_\Gamma M^2\left(T(C_h+C_f)+C_g\right)\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds\\
&= M_\mu\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

où $M_\mu = 3M_\Gamma M^2\left(T(C_h+C_f)+C_g\right).$
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi x)(t)-(\Psi y)(t)\right\|^2 &\leq 4M^2T\left(C_h+C_f\right)\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds\\
&+4M^2C_g\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds\\
&+4M^2\left\|B\right\|^2 T^2 M_\mu\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

On obtient donc une constante réelle positive $\gamma(T)$ telle que :

$$\mathbf{E}\left\|(\Psi x)(t)-(\Psi y)(t)\right\|^2 \leq \gamma(T)\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds.$$

où

$$\gamma(T)=4M^2T\left(\|B\|^2\,TM_\mu+T\left(C_h+C_f\right)+C_g\right).$$

donc,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi^2x)(t)-(\Psi^2y)(t)\right\|^2 &\leq \gamma(T)\int_0^t \mathbf{E}\left\|(\Psi x)(s)-(\Psi y)(s)\right\|^2 ds\\
&\leq \gamma(T)t\int_0^t \gamma(T)\mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds\\
&= (\gamma(T))^2\,t\int_0^t \mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Par récurrence on peut avoir pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(\Psi^n x)(t)-(\Psi^n y)(t)\right\|^2 &\leq \gamma(T)\int_0^t \mathbf{E}\left\|(\Psi^{n-1}x)(s)-(\Psi^{n-1}y)(s)\right\|^2 ds\\
&\leq \frac{(t\gamma(T))^n}{n!}\left\|x-y\right\|^2_{\Delta_2^t}.
\end{aligned}$$

Alors, en prenant la borne supérieure sur $[0,T]$,

$$\left\|(\Psi^n x)(t)-(\Psi^n y)(t)\right\|^2_{\Delta_2^T} \leq \frac{(T\gamma(T))^n}{n!}\left\|x-y\right\|^2_{\Delta_2^T}.$$

Pour n suffisamment grand, on a $\dfrac{(T\gamma(T))^n}{n!}<1$. Il s'en suit que Ψ^n est une contraction stricte sur Δ_2^T, de sorte que Le théorème du point fixe de Banach garantit que Ψ a un point fixe unique, ce qui est une solution mild pour (3.2.1).
Ce qui implique que le système (3.2.1) est contrôlable sur $[0,T]$. □

3.3 Application à un système stochastique du second ordre de type neutre

Exemple 3.3.1. Afin d'illustrer la théorie obtenue, on considère le système de contrôle gouverné par le processus w et Z_H

$$\begin{cases} \partial\left[\dfrac{\partial x(t,z)}{\partial t} - h_1\left(t, x(t,z)\right)\right] = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} x(t,z)\partial t + \left(v(t,z) + f_1\left(t, x(t,z)\right)\right)\partial t \\ + g_1\left(t, x(t,z)\right) dw(t) + \sigma(t) dZ_H, \qquad t \in]0, T[, \quad z \in [0, \pi] \\ x(0,z) = x_0(z), \quad z \in [0, \pi], \\ \dfrac{\partial x(0,z)}{\partial t} = x_{00}(z), \quad z \in [0, \pi], \\ x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Soit $X = K = Y = U = L_2[0, \pi]$ et $x_0,\ x_{00} \in L_2[0, \pi]$. Soit $A \subset D(A) : X \to X$ l'opérateur linéaire donné par $Ay = y^{''}$, où

$$D(A) = \{y \in X \ / \ y,\ y^{'} \text{ sont absolument continus } y^{''} \in X, \quad y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

$w(t)$ désigne un mouvement Brownien standard unidimensionnel et Z_H est un processus de Rosenblatt. Les processus w et Z_H sont indépendants.
On suppose que
$h_1, f_1, g_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
sont continues, uniformément bornées et satisfont les conditions de Lipschitz et de croissance linéaire.

Tout d'abord, notons qu'il existe un ensemble orthonormé complet $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de vecteurs propres de A tel que

$$e_n(z) = \sqrt{(2/\pi)} \sin nz,\ 0 \leq z \leq \pi,\ n = 1, 2, ...$$

et les propriétés suivantes sont vérifiées

i) Si $y \in D(A)$, alors

$$Ay = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left\langle y, e_n \right\rangle e_n(y), \quad y \in D(A),$$

ii) L'opérateur $C(t)$ défini par :

$$C(t)y = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt)\, \langle y, e_n \rangle\, e_n, \quad y \in X$$

est la famille de cosinus dans X générée par $(A, D(A))$. La famille de sinus associée est donnée par :

$$S(t)y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}\, \langle y, e_n \rangle\, e_n, \quad y \in X.$$

Il est clair que $C(.)x$ et $S(.)x$ sont des fonctions périodiques, et
$\|C(t)\| \leq 1$, $\|S(t)\| \leq 1$, $\quad t \in \mathbb{R}$.

Maintenant on définit les fonctions :
$h,\ f : [0,T] \times X \to X$, et $g : [0,T] \times X \to \mathcal{L}_2(K, X)$ comme suit

$$\begin{aligned} h(t,x)(z) &= h_1(t, x(z)), \\ f(t,x)(z) &= f_1(t, x(z)), \\ g(t,x)(z) &= g_1(t, x(z)). \end{aligned}$$

pour $\quad t \in [0,T], \quad x \in X \quad$ et $\quad 0 < z < \pi$. La fonction $\sigma : [0,T] \to \mathcal{L}_2^0(Y, X)$ est bornée.
Soit $B : U \to X$ un opérateur linéaire borné défini par

$$Bu(t)(z) = v(t,z),\ 0 \leq z \leq \pi,\ u \in L^2([0,T], U).$$

L'opérateur
$\Gamma : L^2([0,T], U) \to X$ donné par,

$$\Gamma u = \int_0^T S(T-s) v(s,z) ds.$$

Γ est un opérateur linéaire borné mais pas nécessairement bijectif. Soit

$$\ker(\Gamma) = \Big\{ x \in L^2([0,T], U),\ \Gamma x = 0 \Big\}$$

le noyau de Γ et $[(\Gamma)]^{\perp}$ son supplémentaire orthogonal dans $L^2([0,T], U)$.
Soit $\widetilde{\Gamma} : [(\Gamma)]^{\perp} \to Range(\Gamma)$ la restriction de Γ sur $[(\Gamma)]^{\perp}$, $\quad \widetilde{\Gamma}$ est nécessairement un opérateur bijectif . Le théorème d'inversion des applications stipule que $\quad \widetilde{\Gamma}^{-1}$ est borné du

moment que $[(\Gamma)]^{\perp}$ et $\mathscr{R}(\Gamma)$ sont des espaces de Banach, de sorte que Γ^{-1} est borné et prend ses valeurs dans $L^2([0,T],U)\diagdown(\Gamma)$. L'hypothèse (H4) est satisfaite, ainsi toutes les conditions du théorème (3.2.1) sont satisfaites, et par conséquent le système (3.3.1) est contrôlable sur $[0,T]$.

Methods of Functional Analysis and Topology
Vol. 27 (2021), no. 4, pp. 384–400
https://doi.org/10.31392/MFAT-npu26_4.2021.11

EXISTENCE RESULTS FOR SECOND-ORDER NEUTRAL STOCHASTIC EQUATIONS DRIVEN BY ROSENBLATT PROCESS

RAKIA AHMED YAHIA, ABBES BENCHAABANE, AND HALIM ZEGHDOUDI

Abstract. In this paper we consider a class of second-order impulsive stochastic functional differential equations driven simultaneously by a Rosenblatt process and a standard Brownian motion in a Hilbert space. We prove an existence and uniqueness result under non-Lipschitz condition which is weaker than Lipschitz one and we establish some conditions ensuring the controllability for the mild solution by means of the Banach fixed point principle. At the end we provide a practical example in order to illustrate the viability of our result.

Розглянуто клас імпульсних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь другого порядку, які керуються процесом Розенблата і стандартним броунівський рухом у ґільбертовому просторі одночасно за умови, яка є слабкішою за умови Ліпшица. Також встановлено умови керованості для помірного розв'язку за допомоги принципу Банаха про нерухому точку. Наведено приклад з практики, що ілюструє отримані результати.

1. Introduction

In this paper, we are interested in the second-order neutral stochastic differential equations driven by Brownian motion and an independent Rosenblatt process of the type

$$\begin{cases} d\left(x^{'}(t)-h(t,x(t))\right)=Ax(t)dt+f\left(t,x(t)\right)dt+g(t,x(t)dw(t)+\sigma(t)dZ_H(t), \\ x(0)=x_0, \quad x^{'}(0)=x_{00}, \quad t\in[0,T] \end{cases} \tag{1.1}$$

where $x(\cdot)$ takes values in the separable Hilbert space X, $A: D(A)\subset X\to X$ is the infinitesimal generator of a strongly continuous cosine family $C(t)$ on X. Let Q_K be a positive, self-adjoint and trace class operator on K, and let $\mathcal{L}_2(K,X)$ be the space of all Q_K -Hilbert-Schmidt operators acting between K and X equipped with the Hilbert-Schmidt norm $\|.\|_{\mathcal{L}_2}$, and w be a Q_K-Wiener process on Hilbert space K. Let Q be a positive, self-adjoint and trace class operator on Y and let $\mathcal{L}_2^0(Y,X)$ be the space of all Q -Hilbert-Schmidt operators acting between Y and X equipped with the Hilbert-Schmidt norm $\|.\|_{\mathcal{L}_2^0}$. Let Z_H be a Q-Rosenblatt process on a Hilbert space Y, the process w and Z_H are independent and $h,\ f,\ g$ and σ are given functions to be specified later. Let $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$ be the complete probability space with the natural filtration $\{\mathcal{F}_t \mid t\in[0,T]\}$ generated by random variables $\{Z_H(s),\ w(s),\ s\in[0,T]\}$, let x_0 and x_{00} be $\mathcal{F}_0$-measurable X-valued random variables independent of w and Z_H.

We define the following classes of functions: let $\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{F}_T,X)$ be the Hilbert space of all $\mathcal{F}_T$-measurable, square integrable variables with values in X, $\mathcal{L}_2^{\mathcal{F}}([0,T],X)$ be the Hilbert space of all square integrable and $\mathcal{F}_t$-adapted processes with values in X, $C\left([0,T],\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{F}_T,X)\right)$ be a Banach space of continuous maps satisfying the condition $\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}\left\|x(t)\right\|^2<\infty$ and Δ_2^T be the closed subspace of $C\left([0,T],\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{F}_T,X)\right)$ consisting of measurable and $\mathcal{F}_t$-adapted processes $x(t)$, then Δ_2^T is a Banach space with the

2020 *Mathematics Subject Classification.* 93B05, 60G12, 34K50, 60H30.

Keywords. Controllability, Second-Order Stochastic System, Cosine Family, Rosenblatt process, Non-Lipschitz condition.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, on a étudié des équations stochastiques du second degré de type neutre, dirigées à la fois par un mouvement Brownien et un processus de Rosenblatt. Trois volets ont été traités : D'abord, on a prouvé l'existence de la solution mild d'un système différentiel stochastique du second ordre de type neutre, ensuite on a montré la contrôlabilité du système de contrôle associé. Le troisième volet concerne la projection des résultats sur un système différentiel stochastique du second ordre et de type neutre. L'étude a révélé une généralisation dans le sens où, la condition qui consiste à considérer des fonctions lipschitziennes -ce qui est assez fort- a été relevée, et remplacée par des conditions plus faibles permettant d'assurer la contrôlabilité du système. Ce travail nous pousse à poser d'autres questions pouvant faire objet d'étude, telles que :

1- Étudier les équation différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien avec des conditions aux limites différentes.

2- Étudier le cas où le mouvement Brownien est associé à d'autres processus.

3- Étudier le problème d'observabilité du système...

Bibliographie

[1] S. H. Abid, S. Q. Hassan, and U.J.Quaez, Approximate controllability of fractional stochastic integro-differential equations driven by mixed fractional Brownian motion. *American Journal of Mathematics and Statistics*, 2 : 72-81, 2014.

[2] P. Abry and V. Pipiras. Wavelet-based synthesis of the Rosenblatt process. *Signal Process*, 86 : 2326-2339, 2006.

[3] H. M. Ahmed. Approximate controllability of impulsive neutral stochastic differential equations with fractional Brownian motion in a Hilbert space. *Advances in Difference Equations*, 1 : 1-11, 2014.

[4] R. Ahmed Yahia, A. Benchaabane, and H. Zeghdoudi. Existence results for second-order neutral stochastic equations driven by Rosenblatt process. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 27(04) : 384–400, 2021.

[5] JMP. Albin. A note on Rosenblatt distributions. *Statistics and probability letters*, 40(1) : 83-91, 1998.

[6] A. Arapostathis, R. K. George, M. K. Ghosh. On the controllability of a class of nonlinear stochastic systems. *Systems and Control Letters*, 44(1) : 25-34, 2001.

[7] K. Balachandran, S. Karthikeyan, J. Y. Park. Controllability of stochastic systems with distributed delays in control. *International Journal of Control*, 82 : 1288-1296, 2009.

[8] D. Barbu. Local and global existence for mild solutions of stochastic differential equations. *Portugaliae Mathematica*, 55(4) : 411-424, 1998.

[9] A. E. Bashirov, N. I. Mahmudov. On concepts of controllability for deterministic and stochastic systems. *Journal on Control and Optimization*, 37(6) : 1808-1821, 1999.

[10] A. Benchaabane. Complete controllability of general stochastic integrodifferential systems. *Mathematical Reports*, 18(4) : 437-448, 2016.

[11] A. Benchaabane, R. Sakthivel. Sobolev-type fractional stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312 : 65-73, 2017.

[12] Q. Chen, A. Debbouche, Z. Luo, J. R. Wang. Impulsive fractional differential equations with Riemann–Liouville derivative and iterative learning control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 102 :111-118, 2017.

[13] V. Goodman and J. Kuelbs. Gaussian chaos and functional laws of the iterated logarithm for ito-wiener integrals. *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, 29 : 485–512, 1993.

[14] D. Goreac. Approximate Controllability for Linear Stochastic Differential Equations in Infinite Dimensions. *Applied Mathematics and Optimization*, 60 : 105-132, 2009.

[15] J. K. Hale, S. M. Verduyn lunel. Introduction to functional differential equations. *Springer science+ business media NY*, 1993.

[16] H. Huang, Z. Wu, L. Hu , Z. Wei, L. Wang. Existence and controllability of second-order neutral impulsive stochastic evolution integro-differential equations with state-dependent delay. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20(1) : 1-27, 2018.

[17] K. Itô, M. Nisio. On stationary solutions of a stochastic differential equation. *J. Math. Kyoto Univ.* 4(1) :1-75, 1964.

[18] R. E. Kalman. Lectures on controllability and observability. *Technical report, Stanford Univ CA, Dept of Operations Research*, 1970.

[19] V. Kolmanovskii, A. Myshkis. Applied theory of functional differential equations. *Springer Science & Business Media*, 1992.

[20] E. Lakhel. Controllability of neutral stochastic functional integro-differential equations driven by fractional Brownian motion. *Stochastic Analysis and Applications*, 34(3) : 427-440, 2016.

[21] E. Lakhel, A. Tlidi. Time-dependent neutral stochastic delay partial differential equations driven by Rosenblatt process in Hilbert space. *In Recent Advances in Intuitionistic Fuzzy Logic Systems*, 301–320, 2019.

[22] E. Lakhel, M. McKibben. Controllability for time-dependent neutral stochastic functional differential equations with Rosenblatt process and impulses. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17(2) : 286-297, 2019.

[23] N. N. Leonenko and V. V. Ahn. Rate of convergence to the Rosenblatt distribution for additive functionals of stochastic processes with long-range dependence. *Journal of applied mathematics and stochastic analysis* 14 : 27-46, 2001.

[24] Z. Li, L. Yan, and X. Zhou. Global attracting sets and stability of neutral stochastic functional differential equations driven by Rosenblatt process. *Frontiers of Mathematics in China*, 13(1) : 87–105, 2018.

[25] M. Maejima, C. A. Tudor. Wiener integrals with respect to the Hermite process and a non central limit theorem. *Stochastic analysis and applications* 25 : 1043-1056, 2007.

[26] M. Maejima, C. A. Tudor. On the distribution of the Rosenblatt process. *Statistics and Probability Letters*. 83 : 1490-1495, 2013.

[27] B. Oksendal. Stochastic differntial equations an introduction with applications. *Springer*, 2003.

[28] B. Pei, X. Yong, Mild solutions of local non-lipschitz neutral stochastic functional evolution equations driven by jumps modulated by markovian switching. *Stochastic Analysis and Applications*, 35(3) : 391-408, 2017.

[29] M. Rosenblatt. Independence and dependence. *In Proc. 4th Berkeley sympos. math. statist. and prob.* 2 : 431-443, 1961.

[30] R. Sakthivel, P. Revathi, Y. Ren, G. Shen. Retarded stochastic differential equations with infinite delay driven by Rosenblatt process. *Stochastic analysis and applications*, 36(2) : 304-323, 2018.

[31] S. Saravanakumar, P. Balasubramaniam. On impulsive hilfer fractional stochastic differential system driven by Rosenblatt process. *Stochastic Analysis and Applications*, 37(6) : 955-976, 2019.

[32] G. Shen, Y. Ren. Neutral stochastic partial differential equations with delay driven by Rosenblatt process in a Hilbert space. *Journal of the Korean Statistical Society*, 44(1) : 123-133, 2015.

[33] G. Shen, R. Sakthivel, Y. Ren, Mengyu Li. Controllability and stability of fractional stochastic functional systems driven by Rosenblatt process. *Collectanea mathematica* 1(71) : 63-82, 2020.

[34] L. J. Shen, J. P. Shi, J. T. Sun. Complete controllability of impulsive stochastic integro-differential systems. *Automatica*, 46 :1068-1073, 2010.

[35] M. Sirbu, G. Tessitore, Null controllability of an infinite dimensional SDE with state and control dependent noise. *Systems and Control Letters*, 44(5) : 385-394, 2001.

[36] P. Tamilalagan, P. Balasubramaniam. controllability of fractional stochastic differential equations driven by mixed fractional Brownian motion via resolvent operators. *International Journal of Control*, 90(8) : 1713-1727, 2017.

[37] T. Taniguchi. Successive approximations to solutions of stochastic differential equations. *Journal of Differential Equations*, 96(1) : 152–169, 1992.

[38] M. S. Taqqu. Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Advances in Applied Probability*, 7(2) : 249–249, 1975.

[39] M. Taqqu. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 50(1) : 53–83, 1979.

[40] E. Trélat. Controle optimale théorie et applications, *Vuibert, Paris*, 2005.

[41] C. Tudor. Analysis of the Rosenblatt process. *ESAIM : Probability and Statistics*, 12 : 230-257, 2008.

[42] L. Xu, S. S. Ge, H. Hu. Boundedness and stability analysis for impulsive stochastic differential equations driven by G-Brownian motion. *International Journal of Control*, 92(3) : 642-652, 2019.