

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2023

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Doctorat en Mathématiques

Etude des solutions périodiques de quelques
systèmes différentiels polynomiaux perturbés

Filière

Mathématiques Appliquées

Spécialité

Mathématiques Appliquées

Par

KARFES Sana

Directeur de Thèse : HADIDI Elbahi Prof. U.B.M. ANNABA

Co- Directeur de Thèse : LAOUAR Abdelhamid Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

Président : MAKHLOUF Amar Prof. U.B.M. ANNABA

Examineur : GHANEM Radouen Prof. U.B.M. ANNABA

Examineur : SALMI Abdelouahab Prof. U.B.M. ANNABA

Examineur : KHEMIS Rabah M.C.A Univ. Skikda

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail,
à la mémoire de mon père,
à ma très chère mère,
qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de
m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

À mes chères soeurs et à mes frères qui ont partagé avec moi tous les moments
d'émotion lors de la réalisation de ce travail. Ils m'ont chaleureusement supporté et
encouragé tout au long de mon parcours.

À mon cher mari, qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études.
À ma famille, mes beaux-parents, mes proches et à ceux qui me donnent de l'amour et
de la vivacité.

Remerciements

Avant tout je tiens à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour pouvoir achever ce modeste travail.

Mes sincères remerciements à mon directeur de thèse Mr le Professeur Hadidi Elbahi pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, son aide et ses conseils. J'exprime également mes remerciements et ma gratitude à mon co-directeur de thèse Mr le Professeur Laouar Abdelhamid pour son soutien et ses conseils qui m'ont grandement aidé à mener à bien mes travaux de thèse. Je tiens également à remercier Mr Makhlouf Amar, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ainsi que Mr Ghanem Radouen, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, Mr Salmi Abdelouahab, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba et Mr Khemis Rabah, Maître de conférences A à l'Université 20 août 1955 - Skikda qui ont accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps. Je remercie aussi tous les miens et toutes personnes qui m'ont soutenu à réaliser cette thèse.

Merci à tous.

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions l'existence des cycles limites de deux problèmes de systèmes différentiels planaires perturbés.

Pour le premier problème, nous étudions la bifurcation d'un centre en utilisant la théorie de moyennisation et pour l'appliquer au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))\psi(x, y), \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, m est un entier arbitraire positif, $\psi(x, y)$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ et $\tan(\theta) = y/x$.

Pour le deuxième problème, nous étudions les solutions périodiques d'un centre perturbé pour le système planaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

en utilisant deux méthodes à savoir : la méthode de moyennisation du premier ordre et celle de Melnikov.

Mots clés : Système différentiel, solutions périodiques, méthode de moyennisation, méthode de Melnikov.

Abstract

In this thesis, we study the existence of limit cycles of two problems of perturbed planar differential systems.

First, we study the bifurcation of a center using the averaging theory and apply it to the following system :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))\psi(x, y), \end{cases}$$

where $\varepsilon > 0$ small enough, m is an arbitrary non-negative integer, $\psi(x, y)$ is a polynomial of degree $n \geq 1$ and $\tan(\theta) = y/x$.

Second, we study the periodic solutions of a perturbed center for the following planar system :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

using two methods namely : the averaging method of first-order and that of Melnikov.

Keywords : Differential system, periodic solutions, averaging method, Melnikov method.

ملخص

في هذه الرسالة ، ندرس وجود دورات الحد لمشككتين من الأنظمة التفاضلية المستوية المضطربة .
أولاً، ندرس تشعب المركز باستخدام نظرية المتوسط ، وتطبيقه على النظام التالي:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))\psi(x, y) \end{cases}$$

حيث $\varepsilon > 0$ معلمة صغيرة كفاية ، m عدد صحيح كفي و موجب ، $\psi(x, y)$ كثير حدود من
الدرجة $n \geq 1$ و $\tan(\theta) = y/x$.

ثانياً، ندرس الحلول الدورية لمركز مضطرب للنظام المستوي التالي:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{n=1}^n \mu_{ij} x^i y^j \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

باستخدام طريقتين هما : طريقة المتوسط من الدرجة الاولى و طريقة ميلنيكوف.

الكلمات المفتاحية: النظام التفاضلي، الحلول الدورية، طريقة المتوسط ، طريقة ميلنيكوف.

Table des matières

1	Notions préliminaires	11
1	Problème à valeur initiale	12
2	Existence et unicité des solutions des problèmes à valeur initiale	12
3	Stabilité de la solution	13
4	Systèmes différentiels polynomiaux	13
5	Système dynamique	14
6	Notion du flot	14
7	Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes	15
7.1	Point d'équilibre	15
7.2	Linéarisation des systèmes	15
7.3	Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires	16
7.4	Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires	16
7.5	Stabilité des points d'équilibre	17
8	Portrait de phase et cycles limites	22
8.1	Plan et portrait de phase	22
8.2	Orbite périodique	22
8.3	Cycle limite	23
9	Stabilité des cycles limites	23
10	Existence des cycles limites	26
11	Théorème de Decartes	28
12	Quelques formules mathématiques	28
13	Double factoriels	28
14	Bifurcation de Hopf dans \mathbb{R}^2	29
2	Théorie de moyennisation	34
1	Théorème de moyennisation du premier ordre	35
2	Théorème de moyennisation du premier ordre	39

3	Sur le nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel planaire	40
1	Résultats principaux	41
2	Preuve	41
3	Applications et simulations	49
4	Solutions périodiques d'un système différentiel perturbé via la théorie de moyennisation et la méthode de Melnikov	56
1	Résultats principaux	57
2	Solutions périodiques via la théorie de moyennisation	57
3	Solutions périodiques via la méthode de Melnikov	61
4	Applications et simulations	66
	Conclusion et perspectives	71
	Bibliographie	72

Introduction générale

Souvent on dit que les mathématiques sont le langage de la science et de la nature. Personne ne peut nier le rôle central que jouent les mathématiques dans tous les domaines, depuis que l'humanité a pris conscience du monde qui l'entoure, où la compréhension des phénomènes naturels du passé, du présent et du futur sont de grandes préoccupations des êtres humains. Les mathématiques permettent de prédire ce qui va se passer dans un langage universel et rigoureux. En particulier, les équations différentielles se sont révélées être l'un des outils les plus efficaces pour modéliser les relations entre objets ou événements à partir de la réalité dans laquelle nous vivons, non seulement pour décrire les lois de la nature mais aussi pour expliquer le comportement de certains processus sociaux. Les équations différentielles ordinaires actuellement connues sous le nom de théorie qualitative des équations différentielles qui ont donné naissance à une théorie complète et élaborée. Autrement dit, les EDO sont considérées comme de simples outils de modélisation et fournissent des règles d'évolution dans le temps d'une particule.

Depuis le 17^{ème} siècle, les deux brillants esprits I. Newton et G. Leibniz introduisirent plus précisément le calcul différentiel et ont jeté la base de la théorie des équations différentielles ordinaires qui seront développées au cours des années suivantes. L'étude des EDO est favorisée au 18^{ème} siècle par L. Euler (1707-1783) qui s'attaque à la résolution de certains problèmes de mécanique ; ainsi que les deux mathématiciens J. L. Lagrange (1736-1813) et P. S. Laplace (1749-1827), qui ont également introduit la notion des équations différentielles imposent comme un outil pertinent et efficace pour modéliser dans un langage abstrait ce qui se passe dans le monde réel, à commencer par les problèmes mécaniques de corps.

Dans la dernière décennie du 19^{ème} siècle, un autre brillant mathématicien qui apporta la splendeur de l'étude des équations différentielles, H. Poincaré qui a donné un sens géométrique aux équations différentielles dans sa série d'ouvrages « Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle » publiés entre 1881 et 1886. Cette nouvelle approche consistait à l'étude de la structure topologique des solutions d'une équation différentielle, ce qui permettait de déduire des propriétés de telles solutions sans les trouver explicitement. L'un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles

est l'étude des cycles limites : leur existence, leur stabilité et leur nombre. L'idée de cycle limite a été introduite par Poincaré comme orbite périodique pour laquelle au moins une trajectoire du champ de vecteurs approche en temps positif ou négatif.

Habituellement, une définition alternative est donnée par « un cycle limite est une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques d'une équation différentielle ». Il a également défini d'autres objets fondamentaux tels que le portrait de phase qui permet de déterminer la structure topologique des orbites d'un système différentiel, la notion de carte de retour connue sous le nom de carte de Poincaré. Les travaux de Poincaré ainsi que la contribution de I. Bendixson (1861-1935) - au cours des premières années du 20^{ème} siècle - ont abouti au théorème de Poincaré-Bendixson, qui stipule que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique. Et pour la non-existence des solutions périodiques, il existe les critères de Bendixson et ceux de Dulac qui affirment sous certaines conditions que le système différentiel planaire n'admet aucune solution périodique.

Lors du congrès international de mathématiques en 1900, David Hilbert a proposé 23 problèmes qui, selon lui, motiveraient les progrès des mathématiques au cours du 20^{ème} siècle ; Ces problèmes ont motivé de nombreux chercheurs, parmi ces problèmes, il y a le 16^{ème} problème qui a été considéré comme l'un des problèmes les plus pertinents du 21^{ème} siècle, dont la deuxième partie peut être décrite dans [35], « Prouver que pour tout $n \geq 2$ il existe un nombre fini $H(n)$ tel que toute équation différentielle polynomiale de degré inférieur ou égal à n a moins de $H(n)$ cycles limites ». Le premier intéressé du 16^{ème} problème de Hilbert a été Dulac en 1923 ; son travail allait dans le sens de prouver la finitude du nombre de cycles limites dans un champ de vecteurs polynomiaux du plan. Il proposa une démonstration qui assure que ce nombre est fini pour tout n , mais malheureusement cette démonstration comportait une certaine erreur. Pour plus de détails à ce sujet voire la revue de Y. Ilyashenko qui a prouvé que la démonstration de Dulac était fautive dans [18]. Aussi, J. Li [22] a contribué de façon considérable au développement de ce sujet. Concernant les bornes inférieures globales, le travail de N. Lloyd et C. Christopher dans [11] est remarquable, qui a été amélioré il y a quelques années par M. Han et J. Li dans [16] et récemment dans [1]. En ce qui concerne les résumés des bornes inférieures connues pour $H(n)$ de faibles valeurs du degré, les meilleurs peuvent être trouvés dans [31].

Au fil des années, plusieurs travaux ont fait l'objet d'étude du 16^{ème} problème de Hilbert. Mais malheureusement même le cas le plus simple : $n = 2$ n'est pas toujours résolu. Étant donné la grande difficulté de ce problème, les mathématiciens ont commencé à proposer des versions plus faibles de ce problème. La version générale est dit aussi le problème d'Arnold-Hilbert, qui reste jusqu'à présent un problème ouvert.

L'intérêt de l'étude des cycles limites vient du grand nombre de phénomènes dans

la nature ou en sciences sociales où l'on peut observer des comportements périodiques. L'un des principaux outils d'étude des cycles limites est la théorie de moyennisation. Cette dernière apparaît tôt dans les travaux de Lagrange et Laplace, ensuite dans ceux de Fatou, Bogoliubov et Krylov plus tard dans la première moitié du 20^{ème} siècle, pour plus de détails voire [24,10]. C'est toujours un outil puissant dans l'étude de divers types de systèmes dynamiques (voire [2, 8, 12, 19, 23, 29, 30]). Il existe au moins cinq méthodes pour analyser le nombre de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques ayant un centre. En effet,

la 1^{ère} est la méthode de moyennisation (**Averaging Theory**).

la 2^{ème} méthode est basée sur l'intégrale de **Poincaré Melnikov**.

la 3^{ème} méthode est basée sur l'**intégrale Abélienne**.

la 4^{ème} est la méthode du **facteur intégrant inverse**.

la 5^{ème} méthode est basée sur l'application de retour de **Poincaré**.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels dans \mathbb{R}^2 en appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre.

Cette thèse comporte une introduction générale et quatre chapitres.

- Le premier chapitre présente quelques rappels et notions préliminaires sur les systèmes différentiels ordinaires dans \mathbb{R}^n .
- Le deuxième chapitre utilise la théorie de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre des orbites périodiques d'un système différentiel.
- Le troisième chapitre est consacré à l'étude du nombre maximal de cycles limites du système différentiel planaire en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre,

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))\psi(x, y), \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, m est un entier arbitraire positif, $\psi(x, y)$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ et $\tan(\theta) = y/x$. On a déterminé une valeur supérieure pour le nombre maximal de cycles limites dans les quatre cas où m et n sont pairs et impairs

- Le quatrième chapitre étudie des solutions périodiques d'un centre perturbé en utilisant deux méthodes à savoir la théorie de moyennisation du premier ordre et la méthode de Melnikov.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Objectifs

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

Sommaire

1	Problème à valeur initiale	12
2	Existence et unicité des solutions des problèmes à valeur initiale	12
3	Stabilité de la solution	13
4	Systèmes différentiels polynomiaux	13
5	Système dynamique	14
6	Notion du flot	14
7	Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes	15
	7.1 Point d'équilibre	15
	7.2 Linéarisation des systèmes	15
	7.3 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires	16
	7.4 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires	16
	7.5 Stabilité des points d'équilibre	17
8	Portrait de phase et cycles limites	22
	8.1 Plan et portrait de phase	22
	8.2 Orbite périodique	22
	8.3 Cycle limite	23
9	Stabilité des cycles limites	23
10	Existence des cycles limites	26
11	Théorème de Decartes	28
12	Quelques formules mathématiques	28
13	Double factoriels	28
14	Bifurcation de Hopf dans \mathbb{R}^2	29

1 Problème à valeur initiale

Définition 1.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue.

a) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur U est une relation de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (1.1)$$

b) Pour (t_0, x_0) donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est donné sous la forme

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

c) La fonction $x(t)$ est dite solution de l'équation (1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle est définie et continûment dérivable sur I , si $(t, x(t)) \in U$ pour tout $t \in I$ et si $x(t)$ satisfait la relation (1.1) sur I .

d) Soit $(t_0, x_0) \in U$ donné, la fonction $x(t)$ est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle I contenant t_0 tel que $x(t)$ est une solution de l'équation (1.1) sur I et vérifie $x(t_0) = x_0$.

2 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeur initiale

Théorème 2.1. (Existence) Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet au moins une solution.

Définition 2.1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $f = f(t, x) : U \rightarrow \mathbb{R}^d$. f est localement lipchitzienne en x si pour tout fermé et borné (compact) K dans U , il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| < L|x_1 - x_2|$$

pour tout (t, x_1) et (t, x_2) dans K .

Définition 2.2. Pour $(t_0, x_0) \in U$ donné, une solution du problème à valeur initiale (1.2) est dite unique si elle coïncide avec toute solution partout où elles sont toutes les deux définies.

Théorème 2.2. (Unicité) Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue et localement lipschitzienne en x , alors pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème (1.2) admet une solution unique.

3 Stabilité de la solution

L'un des éléments clés de la théorie qualitative des équations différentielles est la stabilité. Cette notion a été étudiée par le mathématicien russe Lyapunov (1857 – 1918), qui a publié sa thèse sous le titre "Problème général de la stabilité du mouvement", où il a donné une définition très rigoureuse du problème de la stabilité du mouvement. Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.3)$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$ et $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. On suppose que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

Théorème 3.1. Une solution $\varphi(t)$ du système (1.3) telle que $\varphi(t_0) = \varphi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, telle que pour toute solution $x(t)$ de (1.3) dont la valeur initiale $x(t_0)$ on a :

$$\|x(t_0) - \varphi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si en plus, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0,$$

la solution $\varphi(t)$ est dite asymptotiquement stable.

Remarque 3.1. Une solution qui n'est pas stable est dite instable.

4 Systèmes différentiels polynomiaux

Définition 4.1. On appelle un système différentiel polynomial dans \mathbb{R}^n , un système de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = f_1(x_1(t); x_2(t); \dots; x_n(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = f_2(x_1(t); x_2(t); \dots; x_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = f_n(x_1(t); x_2(t); \dots; x_n(t)) \end{cases} \quad (1.4)$$

où f_1, f_2, \dots et f_n sont des polynômes à coefficients réels. on dit aussi que (1.4) est un système différentiel planaire polynomial. Le système (1.4) est de degré d où

$$d = \max(\deg f_1; \deg f_2; \dots; \deg f_n).$$

Remarque 4.1. Si $f_1; f_2; \dots; f_n$ ne dépendent pas de t explicitement, alors le système (1.4) est dit autonome.

5 Système dynamique

Définition 5.1. *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que*

1. $\mu(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $\mu(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $\mu(0, x) = x$.
4. $\mu(t + s, x) = \mu(t, \mu(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition 5.1. *Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels.*

Exemple 5.1. *Soit le système différentiel*

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0, \tag{1.5}$$

où A est une matrice constante, $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.5) est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Le système (1.5) engendre un système dynamique

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mu(t, x) &= e^{At}x. \end{aligned}$$

6 Notion du flot

Définition 6.1. *Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\Phi(t, x_0)$ la solution de (1.6). L'ensemble des applications Φ_t définit par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$$

est appelé le flot du système différentielle (1.6).

Remarque 6.1. *Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.*

7 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes

7.1 Point d'équilibre

Définition 7.1. On appelle point d'équilibre, point critique, point singulier ou point fixe du système (1.6), tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f(x_0) = 0.$$

Remarque 7.1. Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

7.2 Linéarisation des systèmes

Les systèmes qui modélisent des phénomènes naturels sont non linéaires. Afin d'étudier le comportement des trajectoires de ces systèmes, on se ramène à l'étude de ces systèmes linéarisés associés.

Définition 7.2. Considérons le système différentiel non linéaire (1.6). Le système

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.7}$$

où $A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)$ ($1 \leq i, j \leq n$), est appelé système linéarisé associé au système (1.6) en x_0 .

Remarque 7.2. La matrice A est dite matrice jacobienne associée au système (1.6).

Exemple 7.1. Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y), \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \tag{1.8}$$

alors les points d'équilibre sont : $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Le système linéarisé est

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

donc

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

les systèmes linéarisés du système (1.8) sont :

a) au point $(0,0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$$

b) au point $(1,1)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Remarque 7.3. On utilise La linéarisation pour étudier la nature des points critiques.

Définition 7.3. On appelle point d'équilibre hyperbolique de (1.6) tout point d'équilibre x_0 tel qu'aucune des valeurs propres de la matrice A n'a une partie réelle nulle.

7.3 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires

Soit le système (1.7)

$$\dot{x} = Ax$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, A une matrice constante inversible, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A .

- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = x_0$ est appelée **selle**.
- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de même signe, la solution $x = x_0$ est appelée **nœud**.
- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes conjuguées avec $Im(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$, la solution $x = x_0$ est appelée **foyer**.
- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes conjuguées avec $Re(\lambda_i) = 0$ et $Im(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$, la solution $x = x_0$ est appelée **centre**.

7.4 Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires

On considère le système non-linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ et le système linéarisé associé

$$\dot{x} = Ax$$

le point d'équilibre x_0 est appelé :

- **Puits** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelle négatives.
- **Source** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelle positives.
- **Selle** s'il est hyperbolique et si la matrice $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec la partie réelle négative et au moins une valeur propre avec la partie réelle positive.

7.5 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité des solutions d'un système différentiel amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ces solutions.

Théorème 7.1. *Soit x_0 un point critique pour le système (1.6).*

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives, alors le point critique x_0 est asymptotiquement stable.*
2. *S'il existe au moins une valeur propre de $Df(x_0)$ avec une partie réelle positive, alors le point critique x_0 est instable.*
3. *Si $Df(x_0)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point critique x_0 .*

Exemple 7.2. *Soit le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax,$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice constante inversible, et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A qui sont les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

i) *Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles :*

1. *Si $\lambda_1 \times \lambda_2 < 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable (voir Figure 1.1)*

2. Si $\lambda_1 \times \lambda_2 > 0$, on a trois cas :

- Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un noeud stable (voir Figure 1.2).
- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un noeud instable (voir Figure 1.3).
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ (voir Figure 1.4) et instable si $\lambda > 0$ (voir Figure 1.5).

ii) Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

1. Si $\alpha \neq 0$ on a:

- $\alpha < 0$ est un foyer stable (voir Figure 1.6).
- $\alpha > 0$ est un foyer instable (voir Figure 1.7).

2. Si $\alpha = 0$, le point critique est un centre. Il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Figure 1.8).

FIGURE 1.1 – $(0,0)$ est un point selle.

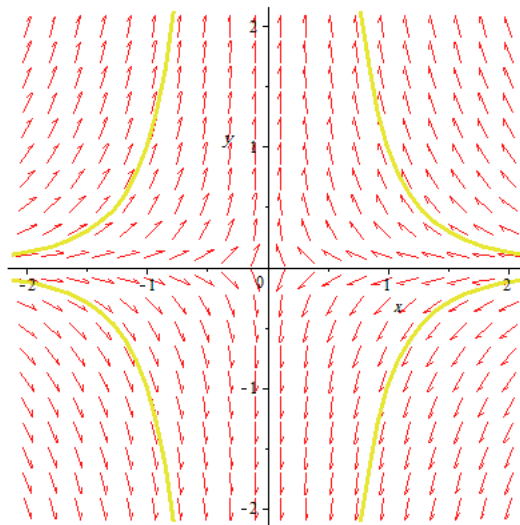


FIGURE 1.2 – $(0,0)$ est noeud stable.

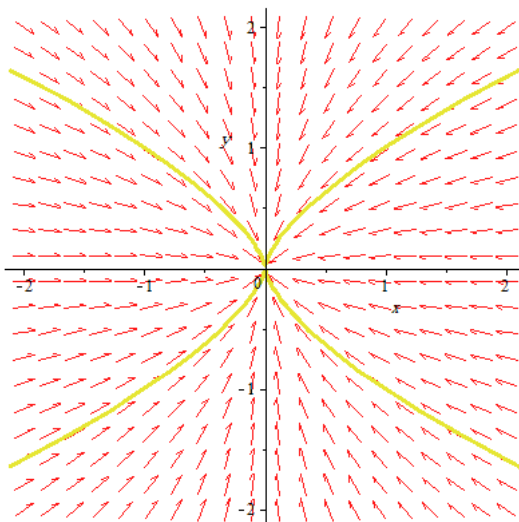


FIGURE 1.3 – $(0,0)$ est un noeud instable.

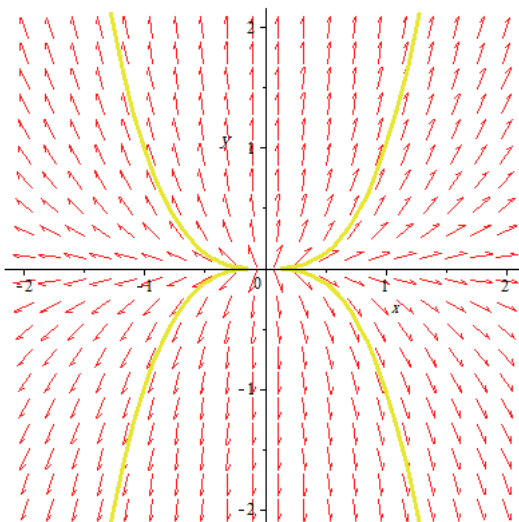


FIGURE 1.4 – $(0,0)$ est un noeud propre stable.

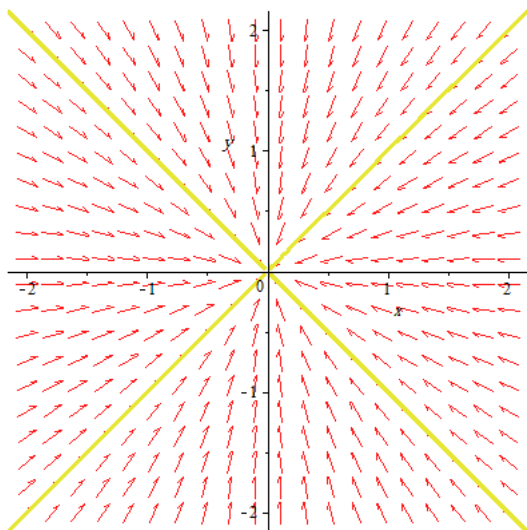


FIGURE 1.5 – $(0,0)$ est un noeud propre instable.

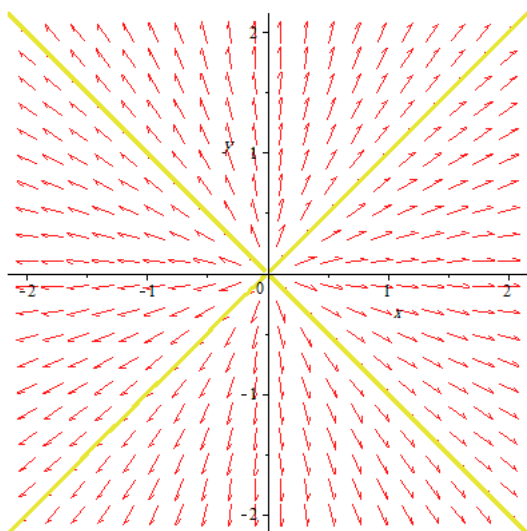


FIGURE 1.6 – $(0,0)$ est un foyer stable.

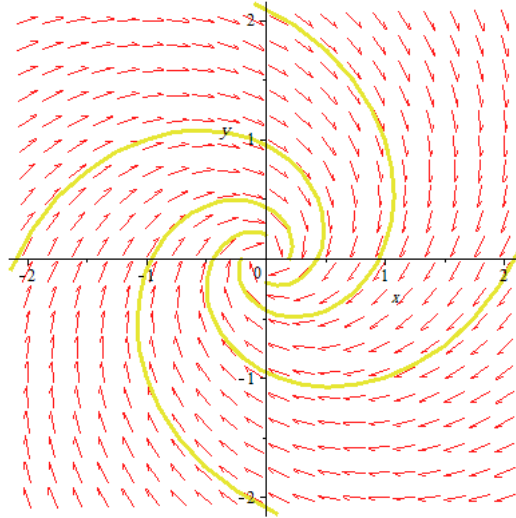


FIGURE 1.7 – $(0,0)$ est un foyer instable.

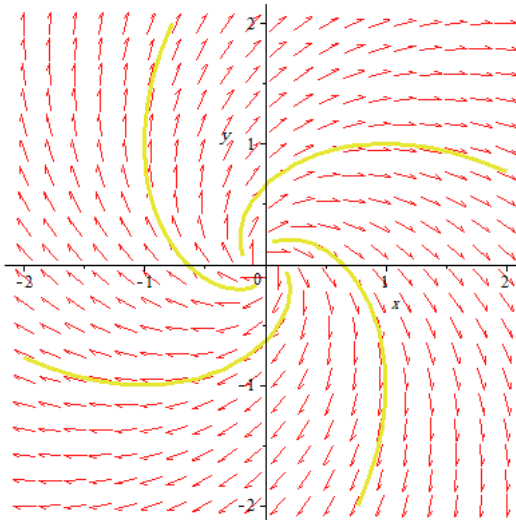
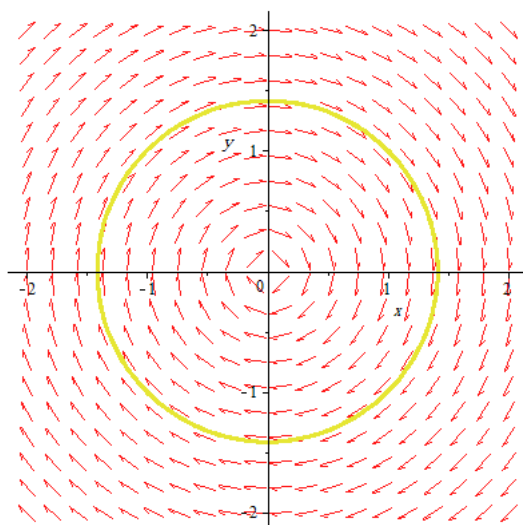


FIGURE 1.8 – $(0,0)$ est un centre.

8 Portrait de phase et cycles limites

8.1 Plan et portrait de phase

Définition 8.1. Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.9)$$

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.9) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites.

Définition 8.2. Les points critiques du système (1.9) sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan $(x \circ y)$ est appelé le plan de phase.

8.2 Orbite périodique

Définition 8.3. On appelle orbite périodique toute trajectoire $\phi(t, x)$ de (1.9) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x). \quad (1.10)$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie (1.10) est appelé période.

Proposition 8.1. *Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.*

8.3 Cycle limite

Définition 8.4. *Un cycle limite C du système (1.9) est une trajectoire (orbite périodique) fermée isolée dans l'espace de phases, c'est à dire qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.*

Définition 8.5. *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.*

9 Stabilité des cycles limites

Théorème 9.1. *C étant la trajectoire correspondante au cycle limite, et soit toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C s'enroulent en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou pour $t \rightarrow -\infty$.*

1. *Le cycle limite est dit **stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers C .*
2. *Le cycle limite est dit **instable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de C .*
3. *Le cycle limite est dit **semi-stable**, si les trajectoires voisines de C sont attirées d'un côté et refoulées de l'autre côté.*

Exemple 9.1. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (1.11)$$

où α est un paramètre réel. En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

$r = 1$ correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour $\alpha > 0$ et instable pour $\alpha < 0$.

1. *Si $\alpha = 0$ le système a une infinité de nombres des orbites périodiques et il n'y a pas des cycles limites.*
2. *Prenons un exemple $\alpha = 3$, le système devient*

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - 3x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 3y - 3y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

la solution périodique est un cycle limite stable (voir Figure 1.9).

3. si $\alpha = -5$, le système devient

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + 5x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - 5y + 5y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

la solution périodique est un cycle limite instable (voir Figure 1.10).

4. si $\alpha = 0$, le système devient

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

le système a une infinité des orbites périodiques (voir Figure 1.11).

FIGURE 1.9 – Cycle limite stable.

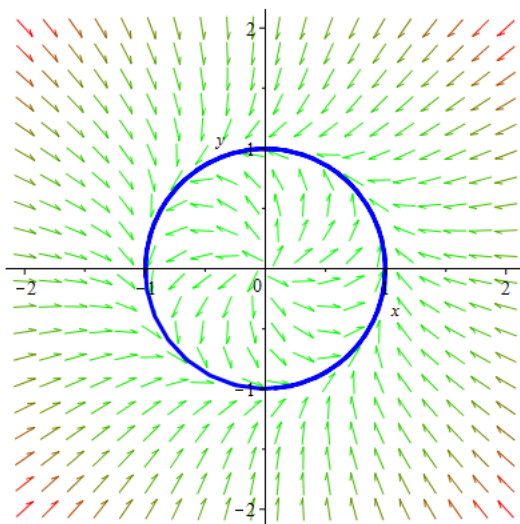


FIGURE 1.10 – Cycle limite instable.

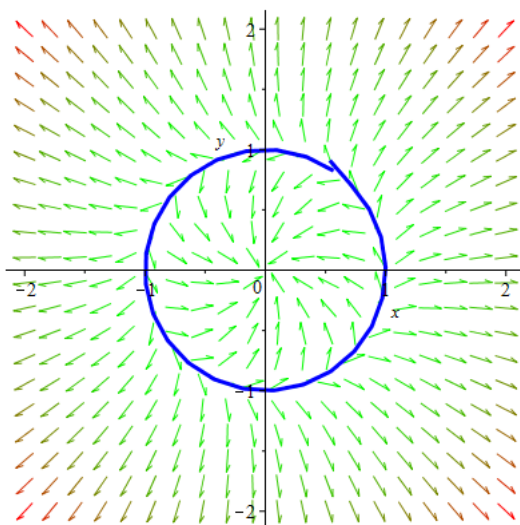
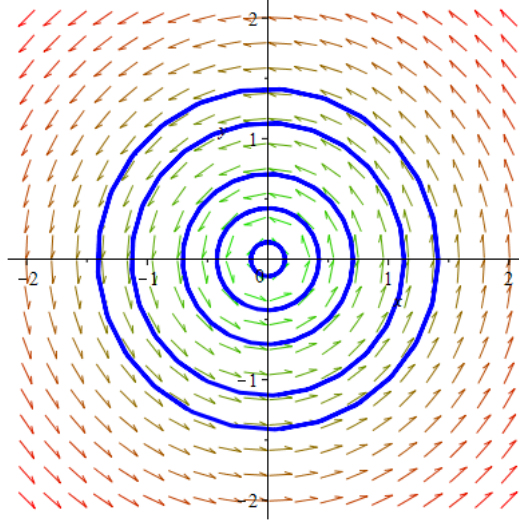


FIGURE 1.11 – Orbites périodiques.



Remarque 9.1. *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

Proposition 9.1. (Cycle limite hyperbolique) *Supposons que le système (1.9) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T . Soit l'exposant caractéristique donné par*

$$s = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

si $s > 0$ (respectivement $s < 0$), alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite instable (respectivement stable). L'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est dite un cycle limite hyperbolique si $s \neq 0$.

Exemple 9.2. *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.12)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le système précédent devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1;$$

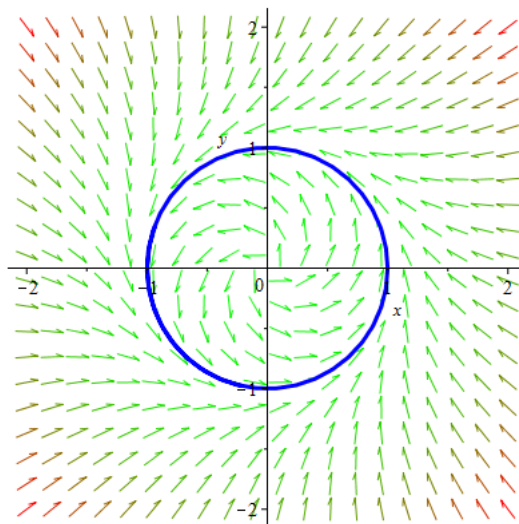
pour $r = 1$, on a

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos(t), \sin(t)) dt, \\
 &= \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos^2(t) - \sin^2(t)) + (1 - \cos^2(t) - 3 \sin^2(t)) dt, \\
 &= \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2(t) - 4 \sin^2(t)) dt, \\
 &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0.
 \end{aligned}$$

Donc, le système (1.12) a un cycle limite hyperbolique $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ qui est stable (voir Figure 1.12).

FIGURE 1.12 – Cycle limite hyperbolique stable.



10 Existence des cycles limites

Nous présentons quelques résultats intéressants concernant l'existence et l'absence des cycles limites.

Théorème 10.1. (Poincaré-Bendixson). Soit le système planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.13)$$

Supposons que f et g sont des fonctions de classe C^1 sur E , où E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 , le système (1.13) a une orbite γ telle que l'orbite positive

$$\gamma_+(p) = \{\Phi(p, t), t \geq 0\}$$

passant par le point p est contenue dans un sous ensemble compact F de E . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- Soit $\gamma_+(p)$ tend vers un point d'équilibre.
- Soit $\gamma_+(p)$ tend vers une orbite périodique.
- Soit $\gamma_+(p)$ est une orbite périodique.

Si F ne contient pas de points critiques alors il existe une orbite périodique du système (1.13).

Théorème 10.2. (Critère de Bendixson). Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . Si la divergence du champ de vecteur F (notée ∇F) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans E .

Exemple 10.1. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4 - x, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit

$$F = (2xy - 2y^4 - x, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T.$$

On calcule la divergence du champ de vecteur F , on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \nabla F = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2y^4 - x) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 1 - 2y - 3x^2y^2 = -1 - 3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans \mathbb{R}^2 .

11 Théorème de Descartes

Théorème 11.1. *Considérons le polynôme réel*

$$p(r) = a_{i_1} r^{i_1} + a_{i_2} r^{i_2} + \dots + a_{i_n} r^{i_n},$$

avec $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ et $a_{i_j} \neq 0$ sont des constantes réelles pour $j \in (1, 2, \dots, n)$. Lorsque $a_{i_j} a_{i_{j+1}} < 0$, on dit que a_{i_j} et $a_{i_{j+1}}$ ont une variation de signe. Si le nombre des variations des signes est m , alors $p(r)$ a au plus m racines réelles positives. De plus, il est toujours possible de choisir les coefficients de $p(r)$ de sorte que $p(r)$ ait exactement $n - 1$ racines réelles positives.

12 Quelques formules mathématiques

Dans notre étude, nous allons utiliser les formules suivantes, [40].

$$\int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta = \frac{(2q-1)!!}{(2q+p)(2q+p-2)\dots(p+2)} \int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) d\theta, \quad (1.14)$$

$$p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -4, \dots\}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^p(\theta) \sin^{2q+1}(\theta) d\theta = 0, \quad (1.15)$$

$$p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -3, \dots\}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) d\theta = \frac{(2l-1)!!}{2^l} 2\pi, \quad l > 0, \quad (1.16)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2l+1}(\theta) d\theta = 0, \quad l \geq 0, \quad (1.17)$$

13 Double factoriels

$$n!! = 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(n\pi)} \left(\frac{n}{2}\right)!$$

14 Bifurcation de Hopf dans \mathbb{R}^2

L'étude mathématique et physique de certaines caractéristiques du système dynamique est connue sous le nom de théorie de la bifurcation. Poincaré a introduit cette théorie pour expliquer comment les points d'équilibre d'une famille de systèmes changent avec le temps. Une bifurcation intervient lorsqu'un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système. Ceci implique que la bifurcation de Hopf est pour les systèmes de dimension $n \geq 2$. Pour une étude générale sur les bifurcations de Hopf et leurs applications voir [13],[14], [15], [21], [37].

Le théorème de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H) permet de démontrer plus aisément l'existence de solutions périodiques. Le théorème de P-A-H est applicable en dimension supérieure à deux contrairement au théorème de Poincaré-Bendixson qui n'est valable que dans le plan.

Théorème 14.1. Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H) Soit le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\mu(x, y), \\ \dot{y} = g_\mu(x, y), \end{cases}$$

où μ est un paramètre. Supposons que le système admet un point d'équilibre $(x_0(\mu), y_0(\mu))$. Soit $A(x_0(\mu), y_0(\mu))$ la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ avec $\alpha(\mu)$ la partie réelle et $\beta(\mu)$ la partie imaginaire. Supposons que pour une certaine valeur de μ : $\mu = \mu_0$, les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = \omega \neq 0$ où $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}[(\partial g_\mu / \partial x)|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)]$.
(Condition non-hyperbolicité).

2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$. (Condition de transversalité).

3. $a \neq 0$

$$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}).$$

avec $f_{xy} = (\partial^2 f_\mu / \partial x \partial y)|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$. (Condition de généricité).

Alors

- Il y a une seule orbite périodique qui bifurque de l'origine pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$.
- Le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu_0$ (respectivement $\mu < \mu_0$) et instable pour $\mu < \mu_0$ (respectivement $\mu > \mu_0$) si $d < 0$ (respectivement $d > 0$).

- La solution périodique est stable (respectivement instable) si le point d'équilibre est instable (respectivement stable), du côté $\mu = \mu_0$ où les solutions périodiques existent.
- L'amplitude de orbite periodique $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$.
- La période de l'orbite périodique est $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.
- La bifurcation est appelée super-critique si la solution périodique de la bifurcation est stable et sous-critique si la solution périodique de la bifurcation est instable.

Remarque 14.1. Il existe trois cas de bifurcations de Hopf possibles :

I Bifurcation de Hopf dégénérée : Si une des conditions du théorème de la Bifurcation de Hopf n'est pas satisfaite, on peut avoir bifurcation de solution périodiques, on dit que la bifurcation est dégénérée.

II Bifurcation de Hopf super-critique :

- La bifurcation est dite super-critique si l'orbite périodique est stable.
- Si $a < 0$ alors la bifurcation est super-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est stable.

III Bifurcation de Hopf sous-critique :

- Elle est sous-critique si l'orbite périodique est instable.
- Si $a > 0$ alors la bifurcation est sous-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est instable.

Remarque 14.2. Pour une bifurcation super-critique ou sous-critique, le point d'équilibre $(x(\mu_0), y(\mu_0))$ est un foyer. Quand μ_0 est une valeur telle que $\alpha(\mu_0) = 0$ et $\beta(\mu_0) \neq 0$, le point d'équilibre $(x(\mu_0), y(\mu_0))$ correspond à un centre.

Exemple 14.1. Considérons l'équation de **Van Der Pol**

$$\ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + x = 0. \tag{1.18}$$

On pose :

$$\dot{x} = y.$$

L'équation devient un système du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + (\mu - x^2)y, \end{cases} \tag{1.19}$$

◇ Calculer les points critiques du système (1.19) :

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + (\mu - x^2)y = 0 \end{cases}$$

donc on a un unique point critique : $(x_0, y_0) = (0, 0)$ qui est l'origine.

◇ Le système linéarisé en $(0, 0)$ est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases}$$

◇ Calculons les valeurs propres du système (1.19) :

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0, \\ \Delta &= \mu^2 - 4 < 0 \text{ si } \mu \in]-2, 2[, \\ \Delta &= i^2(4 - \mu^2). \end{aligned}$$

Alors les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} \lambda(\mu) &= \frac{\mu}{2} + i \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2}, \\ \bar{\lambda}(\mu) &= \frac{\mu}{2} - i \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2} \end{aligned}$$

où

$$\alpha(\mu) = \frac{\mu}{2}, \quad \beta(\mu) = \pm \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2}.$$

Vérifions les conditions du théorème de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H)

1)

$$\alpha(\mu_0) = 0 \Rightarrow \frac{\mu}{2} = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0,$$

$$\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}\left[\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x}\right)\Big|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)\right]$$

$$= \text{sgn}\left[\frac{\partial(-x + (\mu - x^2)y)}{\partial x}\Big|_{\mu=0}(0, 0)\right]$$

$$= -1 \Rightarrow \beta(\mu_0) = -1 = \omega \neq 0$$

2)

$$\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2} = d \neq 0.$$

3)

$$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}).$$

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & f_{xyy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ g_{xxy} &= \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{\mu=0}(0,0) = -2, & g_{yyy} &= \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & g_{xy} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ g_{xx} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & g_{yy} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \end{aligned}$$

On remplace dans a on obtient :

$$a = -\frac{1}{8}.$$

— Puisque

$$ad < 0$$

donc, il y a une solution périodique qui bifurque de l'origine $(0,0)$ pour $\mu > 0$.

— Puisque $d = \frac{1}{2} > 0$ donc

◇ si $\mu < 0$ (c'est à dire $\mu \in]-2, 0[$), le point d'équilibre $(0,0)$ est un foyer stable (voir Figure 1.14).

◇ si $\mu > 0$ (c'est à dire $\mu \in]0, 2[$), le point d'équilibre est un foyer instable (voir Figure 1.13).

— La solution périodique pour $\mu > 0$ est stable.

— L'amplitude du cycle limite est $\sqrt{|\mu|}$ de période $\frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi$, le cycle limite est stable, donc la bifurcation est super-critique (ou puis que $a = -\frac{1}{8} < 0$ alors la bifurcation est super-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est stable).

FIGURE 1.13 – Portrait de phase pour $\mu = 1$.

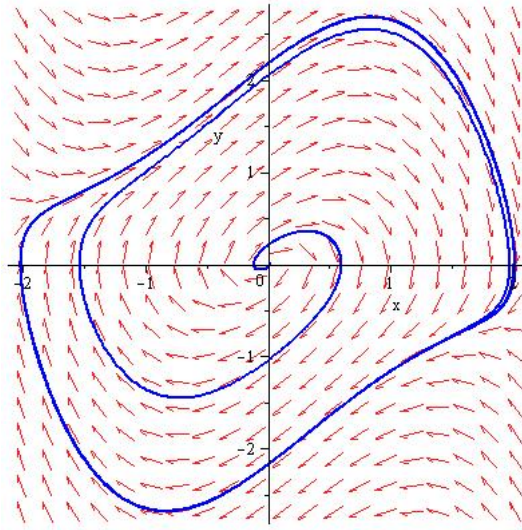
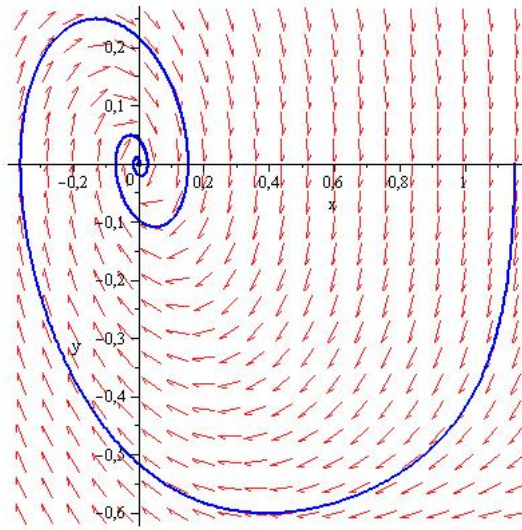


FIGURE 1.14 – Portrait de phase pour $\mu = -0.5$.



Chapitre 2

Théorie de moyennisation

Objectifs

L'une des théories perturbatives les plus importantes actuellement utilisées pour étudier les cycles limites des systèmes dynamiques est la théorie de moyennisation. Cette méthode donne une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel périodique non autonome et celle de son système différentiel moyenné lequel est autonome. Cette méthode a une longue histoire qui commence avec les travaux classiques de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont fourni une justification intuitive de la méthode. Puis, Fatou qui en 1928 fit la première formalisation de cette théorie. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [6],[5] et Bogoliubov et Mitropolskii [7] (1961). Elle a été ensuite développée par Verhulst [39] (1991), Marsden et McCracken [26] (1976), Sanders et Verhulst [36] (1985), Malkin [25] (1956) et Roseau [32] (1966), Llibre et Buica [9] (2004). Grâce à cette méthode, nous avons réduit le problème difficile des équations différentielles à la recherche des racines positives d'un système algébrique non linéaire.

Sommaire

1	Théorème de moyennisation du premier ordre	35
2	Théorème de moyennisation du premier ordre	39

1 Théorème de moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, x)$ et $G(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t . Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par :

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.2)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibres du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

Théorème 1.1. [36] *Considérons le système (2.1) et supposons que :*

- (a) *Les fonctions vectorielles F , G , $D_x F$, $D_x^2 F$ et $D_x G$ sont continues et bornées par une constante M indépendante de ε dans $[0, +\infty) \times D$, avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*
- (b) *Les fonctions F et G sont T -périodiques en t , avec T indépendante de ε .*

Alors on a :

1. *Si le point $p \in D$ est un point d'équilibre pour le système moyenné (2.2) telle que*

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0,$$

alors pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. *Si le point d'équilibre $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .*

Exemple 1.1. *Soit l'équation de Van Der Pol :*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.5)$$

Le système non perturbé du système différentiel (2.5) est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

les orbites de ce système sont des cercles dans le plan de phases (xoy). En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $r > 0$, le système perturbé (2.5) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (2.6)$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)}{-1 + \varepsilon \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin(\theta)}$$

on a :

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + o(x^2), \text{ puisque } |x| < 1.$$

On pose

$$x = \varepsilon \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin(\theta).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)(1 + \varepsilon \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin(\theta) + o(x^2)) \\ &= -\varepsilon[r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)] - \varepsilon^2[r \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^3(\theta)] + o(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

donc le système (2.6) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2). \quad (2.7)$$

On note que l'équation (2.7) est sous la forme standard (2.1) donc on peut appliquer la théorie de moyennisation avec

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \text{ et } F(t, x) = F(\theta, r) = -r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta.$$

Remarquons que F est 2π -périodique en θ et d'après l'équation (2.3), on obtient

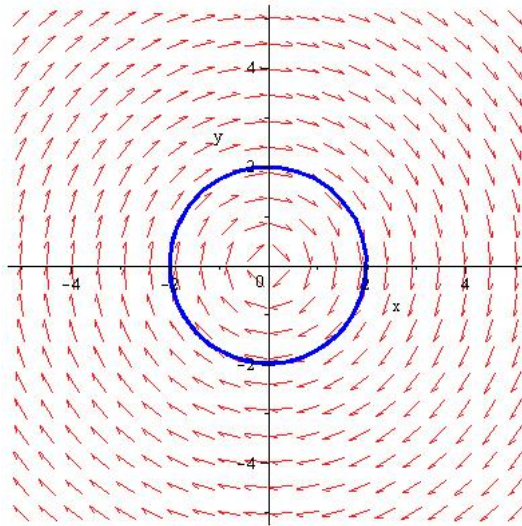
$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{1}{8} r(r^2 - 4).$$

$f^0(r)$ a une unique racine positive $r = 2$. Comme

$$\left(\frac{df^0}{dr} \right) (2) = 1 \neq 0,$$

donc d'après le théorème 1.1 l'équation de **Van Der Pol** (2.4) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique du rayon 2 du système non perturbé (2.5) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $\left(\frac{df^0}{dr} \right) (2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable (voir Figure 2.1), voir [17].

FIGURE 2.1 – Cycle limite instable pour $\varepsilon = 0.001$.



Exemple 1.2. Soit le système de **Liénard** suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(a_1 x + \dots + a_n x^n) \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.8)$$

Pour ε suffisamment petit et $a_n \neq 0$, le système (2.8) admet au plus $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ cycles limites. En utilisant les coordonnées polaires, on trouve :

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r(a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta(a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta) \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r (a_1 \cos^2 \theta + a_2 \cos^3 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) \\ &\quad + \varepsilon^2 r \sin \theta \cos \theta (a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta)^2 + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Le système différentiel précédent est sous la forme standard (2.1), ainsi on peut appliquer la théorie de moyennisation décrite dans le théorème [1.1], on obtient

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2 \theta + a_2 \cos^3 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) d\theta, \end{aligned}$$

on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon f^0(r). \quad (2.9)$$

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2 \theta + a_2 \cos^3 \theta + \dots + a_{n-1} r^{n-2} \cos^n \theta + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) d\theta,$$

comme

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta d\theta = 0 \text{ si } m \text{ est impair.}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + a_3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta + \dots \\ &\quad + a_{n-1} r^{n-2} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta + a_n r^{n-1} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1} \theta d\theta). \end{aligned}$$

Posons :

$$I_{n+1} = \int_0^{2\pi} \cos^{n+1}(\theta) d\theta$$

i) Si n est impair

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \dots + a_n r^{n-1} I_{n+1}).$$

On cherche les points d'équilibre de $f^0(r)$, $r > 0$, on pose $X = r^2 \Rightarrow r = X^{\frac{1}{2}}$

$$f^0(X) = 0 \Rightarrow (a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \dots + a_n I_{n+1} X^{\frac{n-1}{2}}) = 0.$$

Ce polynôme possède au plus $\frac{n-1}{2}$ racines positives car $r > 0$.

ii) Si n est pair

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \dots + a_n r^{n-2} I_n).$$

On cherche les points d'équilibre de $f^0(r)$, $r > 0$, on pose $X = r^2 \Rightarrow r = X^{\frac{1}{2}}$

$$f^0(X) = 0 \Rightarrow (a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \dots + a_n I_{n+1} X^{\frac{n-2}{2}}) = 0.$$

Ce polynôme possède au plus $\frac{n-2}{2}$ racines positives car $r > 0$. Alors le système (2.8) possède au plus $\left[\frac{n-1}{2} \right]$ cycles limites.

Remarque 1.1. Si $f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds = 0$, on passe à la méthode de moyennisation de deuxième ordre.

2 Théorème de moyennisation du premier ordre

Théorème 2.1. Considérons une équation différentielle non autonome de la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \chi(r, \theta) = \varepsilon F(r, \theta) + \varepsilon^2 R(r, \theta, \varepsilon), \quad (2.10)$$

où $r \in \mathbb{R}$, $\theta \in S^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ et $F : D \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $R : D \times S^1 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux fonctions de classe \mathbb{C}^2 , 2π -périodique en θ et D est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . La fonction moyennée $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ associé au système (2.10) est défini par

$$f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta.$$

Nous avons appelé cela si $r(r_0, \theta)$ est la solution du champ vectoriel $\chi(r, \theta)$ tel que $r(r_0, 0) = r_0$, ensuite nous avons

$$r(r_0, 2\pi) - r_0 = \varepsilon f(r) + O(\varepsilon^2).$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, les zéros simples de la fonction moyennée $f(r)$ fournissent des cycles limites du champ vectoriel $\chi(r, \theta)$. voir [9], [24].

Chapitre 3

Sur le nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel planaire

Objectifs

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites du système différentiel planaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))\psi(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, m est un entier arbitraire positif, $\psi(x, y)$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ et $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$.

Sommaire

1	Résultats principaux	41
2	Preuve	41
3	Applications et simulations	49

1 Résultats principaux

La contribution principale de ce travail est résumée dans le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Supposons que $f(x)$ la fonction moyennée du premier ordre est non nulle et que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Le nombre maximum de cycles limites bifurquant à partir des solutions périodiques du centre est au plus*

- a) $n - 1$, si m est impair et n est pair.
- b) n , si m et n sont impairs.
- c) $(n - 2)/2$, si m et n sont pairs.
- d) $(n - 1)/2$, si m est pair et n est impair.

Remarque 1.1. *Lorsque $m = 0$, le système (3.1) devient*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon P_n(x, y). \end{cases}$$

D'après le théorème 1.1, pour le système (3.1), Le nombre maximum de cycles limites bifurquant à partir des solutions périodiques du centre est au plus $(n - 1)/2$ ou $(n - 2)/2$, lorsque n est pair ou impair, respectivement.

2 Preuve

Supposons que le polynôme $\psi(x, y) = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j$. En effectuant le changement de variable, $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$, où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, avec $r > 0$, le système (3.1) en coordonnées polaires (r, θ) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{i+j=0}^n R_{ij}(\theta) r^{i+j}, \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \sum_{i+j=0}^n \Theta_{ij}(\theta) r^{i+j-1}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} R_{ij}(\theta) = a_{ij} (\cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \cos^i(\theta) \sin^{m+j+1}(\theta)), \\ \Theta_{ij}(\theta) = a_{ij} (\cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) + \cos^{i+1}(\theta) \sin^{m+j}(\theta)). \end{cases}$$

En prenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système différentiel précédent devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \sum_{i+j=0}^n R_{ij}(\theta) r^{i+j} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \quad (3.2)$$

Notons que cette équation différentielle s'écrit sous la forme standard (2.10) ce qui nous

permet d'appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre. Par conséquent, nous considérons quatre cas afin d'étudier la fonction moyennée associée à l'équation différentielle (3.2).

Cas (a) Si m est impair et n est pair, on a

$$\begin{aligned}
 f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} (\cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta)) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p-1=0}^n a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i+2p=0}^n a_{i,2p} r^{i+2p} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p=2}^{n+1} a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i+2p=0}^n a_{i,2p} r^{i+2p} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{2l+2p=2}^n a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2l+2p=0}^n a_{2l,2p} r^{2l+2p} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{2l+2p=2}^n a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2l+2p=0}^n a_{2l,2p} r^{2l+2p} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l+p=0}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) d\theta \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=0}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

En utilisant les formules (1.14), (1.16) et (1.17), on obtient

$$\begin{aligned}
f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \times \left[\frac{(2p-1)!!}{(2p+2l)(2p+2l-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l l!} \right] \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=0}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \\
&\times \left[\frac{(2p+m+1-1)!!}{(2p+2l+m+1)(2p+2l+m+1-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l l!} \right] \\
&= \sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!(2l-1)!!}{2(p+l)2(p+l-1)\dots2(l+1)2^l l!} \right] \\
&+ \sum_{l+p=0}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \left[\frac{(2p+m)!!(2l-1)!!}{(2p+2l+m+1)(2p+2l+m-1)\dots(2l+2)2^l l!} \right] \\
&= \sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!(2l-1)!!}{2^{p+l}(l)!(p+l)(p+l-1)\dots(l+1)} \right] \\
&+ \sum_{l+p=0}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \left[\frac{(2l-1)!!(2p+m)!!}{2^l l!(2p+2l+m+1)(2p+2l+m-1)\dots(2l+2)} \right] \\
&= \sum_{k=0}^n A_k r^k. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Cas (b) Si m et n sont impairs, on a

$$\begin{aligned}
f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} (\cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta) \right] d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p-1=0}^n a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i+2p=0}^n a_{i,2p} r^{i+2p} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p=2}^{n+1} a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i+2p=0}^n a_{i,2p} r^{i+2p} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{2l+2p=2}^{n+1} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{2l+2p=0}^{n+1} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l+p=0}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=0}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m+1}(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi, En utilisant les formules (1.14), (1.16) et (1.17), on obtient

$$\begin{aligned}
f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \times \left[\frac{(2p-1)!!}{(2p+2l)(2p+2l-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l l!} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=0}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \\
&\quad \times \left[\frac{(m+2p+1-1)!!}{(2p+2l+m+1)(2p+2l+m+1-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l (l)!} \right] \\
&= \sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!(2l-1)!!}{2(p+l)2(p+l-1)\dots2(l+1)2^l(l)!} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l+p=0}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \left[\frac{(2p+m)!!(2l-1)!!}{(2p+2l+m+1)(2p+2l+m-1)\dots(2l+2)2^l(l)!} \right] \\
& = \sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!(2l-1)!!}{2^{p+l}(l)!(p+l)(p+l-1)\dots(l+1)} \right] \\
& + \sum_{l+p=0}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p} r^{2l+2p} \left[\frac{(2p+m)!!(2l-1)!!}{2^l(l)!(2p+2l+m+1)(2p+2l+m-1)\dots(2l+2)} \right] \\
& = \sum_{k=0}^{n+1} B_k r^k. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Cas (c) Si m et n sont pairs, on a

$$\begin{aligned}
f_3(r) & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} (\cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta)) d\theta \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p-1=0}^n a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i+2p-1=0}^n a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p=2}^{n+1} a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i+2p=2}^{n+1} a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{2l+2p=2}^n a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{2l+2p=2}^n a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{2l+2p=2}^n a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \times \\
& \quad \times \left[\int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) + \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \times \\
 &\times \left[\int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) + \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les formules (1.14), (1.16) et (1.17), on obtient

$$\begin{aligned}
 f_3(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!}{(2p+2l)(2p+2l-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l l!} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(m+2p-1)!!}{(2p+2l+m)(2p+2l+m-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l l!} \right] \\
 &= \sum_{l+p=1}^{\frac{n}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!(2l-1)!!}{2^{l+p} l! (p+l)(p+l-1)\dots(l+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2p+m-1)!!(2l-1)!!}{2^l l! (2p+2l+m)(2p+2l+m-2)\dots(2l+2)} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} C_k r^{2k-1}. \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Cas (d) Si m est pair et n impair, on a

$$\begin{aligned}
 f_4(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} (\cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) + \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta)) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^n a_{ij} r^{i+j} \cos^i(\theta) \sin^{j+m+1}(\theta) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p-1=0}^n a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i+2p-1=0}^n a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+2p=2}^{n+1} a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i+2p=2}^{n+1} a_{i,2p-1} r^{i+2p-1} \cos^i(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{2l+2p=2}^{n+1} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{2l+2p=2}^{n+1} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{2l+2p=2}^{n+1} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \times \\
&\quad \times \left[\int_0^{2\pi} \sin^{2p}(\theta) \cos^{2l}(\theta) + \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \times \\
&\quad \times \left[\int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p}(\theta) + \int_0^{2\pi} \cos^{2l}(\theta) \sin^{2p+m}(\theta) \right] d\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les formules (1.14), (1.16) et (1.17), on obtient

$$\begin{aligned}
f_4(r) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!}{(2p+2l)(2p+2l-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2p+m-1)!!}{(2p+2l+m)(2p+2l+m-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!2\pi}{2^l(l)!} \right] \\
&= \sum_{l+p=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2l,2p-1} r^{2l+2p-1} \left[\frac{(2p-1)!!(2l-1)!!}{2^{l+p}(l)!(p+l)(p+l-1)\dots(l+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2l-1)!!(2p+m-1)!!}{2^l(l)!(2p+2l+m)(2p+2l+m-2)\dots(2l+2)} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} D_k r^{2k-1}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

D'après les expressions de A_k , B_k , C_k et D_k dans (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6) respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \frac{\partial(A_1, A_2, \dots, A_n)}{\partial(a_{0,1}, a_{0,2}, \dots, a_{0,n})} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m+2)!!}{(m+3)!!} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}} (\frac{n}{2})!!} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(m+n)!!}{(m+n+1)!!} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_2 &= \frac{\partial(B_1, B_2, \dots, B_n)}{\partial(a_{0,1}, a_{0,2}, \dots, a_{0,n})} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(m+2)!!}{(m+3)!!} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}} (\frac{n+1}{2})!!} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(m+n+1)!!}{(m+n+2)!!} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_3 &= \frac{\partial(C_1, C_3, \dots, C_{n-1})}{\partial(a_{0,1}, a_{0,3}, \dots, a_{0,n-1})} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(m+1)!!}{(m+2)!!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}} (\frac{n}{2})!!} + \frac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_4 &= \frac{\partial(D_1, D_3, \dots, D_n)}{\partial(a_{0,1}, a_{0,3}, \dots, a_{0,n})} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{(m+1)!!}{(m+2)!!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}} (\frac{n+1}{2})!!} + \frac{(m+n)!!}{(m+n+1)!!} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\det(\mathbf{J}_1) \neq 0$, $\det(\mathbf{J}_2) \neq 0$, $\det(\mathbf{J}_3) \neq 0$ et $\det(\mathbf{J}_4) \neq 0$. Par conséquent, les familles $\{A_k\}$, $\{B_k\}$, $\{C_k\}$ et $\{D_k\}$ sont indépendantes. Ainsi, à partir de (3.3) et (3.4), la fonction moyennée $f(r)$ est générée par une combinaison linéaire de fonctions dans l'ensemble $\mathcal{S}_1 = \{r, r^2, \dots, r^l\}$, avec $l \in \{n, n+1\}$. En utilisant le théorème de Descartes, il s'ensuit que $f(r)$ peut avoir au plus $n-1$ racines positives si m est impair et n est pair, ou au plus n lorsque n et m ont des nombres impairs.

Donc, d'après le théorème 1.1, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système différentiel (3.1) peut avoir au plus $n - 1$ ou n cycles limites. De manière similaire, à partir de (3.5) et (3.6), $f(r)$ est engendré par une combinaison linéaire de fonctions en $\mathcal{S}_2 = \{r, r^3, \dots, r^{2l-1}\}$, avec $l \in \{n/2, (n+1)/2\}$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système différentiel (3.1) peut avoir au plus $(n-2)/2$ ou $(n-1)/2$ cycles limites si m et n sont pairs ou m est pair et n est impair, respectivement. Ceci achève la preuve du théorème 1.1.

3 Applications et simulations

Dans cette section, quatre exemples numériques sont présentés afin d'interpréter nos résultats.

Exemple 3.1. *Considérons le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^3(\theta))(y - x^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

En coordonnées polaires,

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}, \end{cases}$$

système (3.7) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -r\varepsilon \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)). \end{cases}$$

En prenant θ comme nouvelle variable indépendante,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta},$$

on obtient l'équation suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = r\varepsilon \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)).$$

On retrouve donc la forme standard de la théorie de moyennisation du premier ordre

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où $F(r, \theta)$ est donné par

$$F(r, \theta) = r \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)).$$

La fonction moyennée est calculée comme suit

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} r \sin^2(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} r \sin^5(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[r\pi - r^2 \frac{\pi}{8} \right] \\ &= \frac{1}{16} [8r - r^2], \end{aligned}$$

qui n'a qu'une racine positive, $r_* = 8$. Comme

$$\frac{df_1(r)}{dr} = \frac{1}{16} [8 - 2r],$$

on obtient

$$\frac{df_1(8)}{dr} = \frac{-1}{2} \neq 0.$$

Puisque $m = 3$ et $n = 2$, d'après le théorème 1.1 (a), le système (3.7) peut avoir au plus un cycle limite, et cela apparaît clairement sur la figure (3.1).

Exemple 3.2. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^3(\theta))(y^3 - x^2). \end{cases} \quad (3.8)$$

Le système (3.8) en coordonnées polaires, devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -r\varepsilon \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(r^2 \sin^3(\theta) - r \cos^2(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(r^2 \sin^3(\theta) - r \cos^2(\theta)). \end{cases}$$

En prenant θ comme variable indépendante, on obtient l'équation suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = r\varepsilon \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(r^2 \sin^3(\theta) - r \cos^2(\theta)).$$

On retrouve donc la forme standard de la théorie de moyennisation du premier ordre

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où $F(r, \theta)$ est donné par

$$F(r, \theta) = r \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(r^2 \sin^3(\theta) - r \cos^2(\theta)).$$

La fonction moyennée est calculée comme suit

$$\begin{aligned} f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin(\theta)(1 + \sin^3(\theta))(r^2 \sin^3(\theta) - r \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} r^3 \sin^4(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} r^3 \sin^7(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{r}{2\pi} \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{8} r \right] \\ &= \frac{1}{16} r^2 [6r - 1], \end{aligned}$$

qui a une racine positive unique, $r_* = \frac{1}{6}$. Comme

$$\frac{df_2(r)}{dr} = \frac{1}{8} r [6r - 1] + \frac{3}{8} r^2,$$

on a

$$\frac{df_2(\frac{1}{6})}{dr} = \frac{1}{96} \neq 0.$$

Puisque $m = 3$ et $n = 3$, d'après le théorème 1.1 (b), le système (3.8) peut avoir au plus trois cycles limites, voir Figure (3.2).

Exemple 3.3. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^2(\theta))(y - x^2). \end{cases} \quad (3.9)$$

En coordonnées polaires, le système (3.9) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -r\varepsilon \sin(\theta)(1 + \sin^2(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \cos(\theta)(1 + \sin^2(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)). \end{cases}$$

En prenant θ comme variable indépendante, on obtient l'équation suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = r\varepsilon \sin(\theta)(1 + \sin^2(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)).$$

On retrouve donc la forme standard de la théorie de moyennisation du premier ordre

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où $F(r, \theta)$ est donné par

$$F(r, \theta) = r \sin(\theta)(1 + \sin^2(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)),$$

La fonction moyennée est calculée comme suit

$$\begin{aligned} f_3(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin(\theta)(1 + \sin^2(\theta))(\sin(\theta) - r \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} r \sin^2(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} r \sin^4(\theta) d\theta - \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2(\theta) \sin^3(\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[r \frac{7\pi}{4} \right] \\ &= \frac{7}{8} r. \end{aligned}$$

$f_3(r)$ n'a pas de racine positive, ce qui implique qu'il n'y a pas de cycle limite, ce qui est confirmé par le théorème 1.1 (c), puisque $m=2$ et $n=2$, voir figure (3.3).

Exemple 3.4. Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^2(\theta))(y^3 - x^2 y^3). \end{cases} \quad (3.10)$$

Le système (3.10) en coordonnées polaires, devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon(r^5 \sin^4(\theta) \cos^4(\theta) - 2r^5 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) - r^3 \sin^4(\theta) \cos^2(\theta) + 2r^3 \sin^4(\theta)) \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon \sin(\theta)(-2r^4 \cos^3(\theta) + 2r^2 \cos(\theta) - 3r^2 \cos^3(\theta) - r^4 \cos^7(\theta) + \\ \quad + r^2 \cos^5(\theta) + 3r^4 \cos^5(\theta)). \end{cases}$$

En prenant θ comme variable indépendante, on obtient l'équation suivante

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^5 \sin^4(\theta) \cos^4(\theta) - 2r^5 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + 2r^3 \sin^4(\theta)).$$

On retrouve donc la forme standard de la théorie de moyennisation du premier ordre

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où $F(r, \theta)$ est donné par

$$F(r, \theta) = r^5 \sin^4(\theta) \cos^4(\theta) - 2r^5 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + 2r^3 \sin^4(\theta),$$

La fonction moyennée est calculée comme suit

$$\begin{aligned} f_4(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (r^5 \sin^4(\theta) \cos^4(\theta) - 2r^5 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) - r^3 \cos^2(\theta) \sin^4(\theta) + 2r^3 \sin^4(\theta)) d\theta \\ &= -\frac{1}{128} r^3 [13r^2 - 88] \end{aligned}$$

qui a un unique zéro strictement positif, $r_* = \frac{2}{13} \sqrt{286}$. Depuis

$$\frac{df_4(r)}{dr} = -\frac{3}{128} r^2 [13r^2 - 88] - \frac{13}{64} r^4,$$

on obtient

$$\frac{df_4(r_*)}{dr} = -\frac{121}{13} \neq 0.$$

Puisque $m = 2$ et $n = 5$, d'après le théorème 1.1 (d), le système (3.10) peut avoir au plus deux cycles limites, voir figure (3.4).

FIGURE 3.1 – Cycle limite de rayon 8 pour le système (3.7) lorsque $\varepsilon = 0.01$.

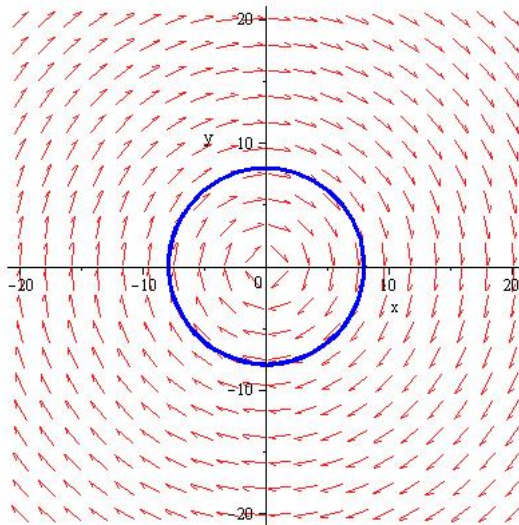


FIGURE 3.2 – Cycle limite de rayon $\frac{1}{6} \simeq 0.17$ pour le système (3.7) lorsque $\varepsilon = 0.01$.

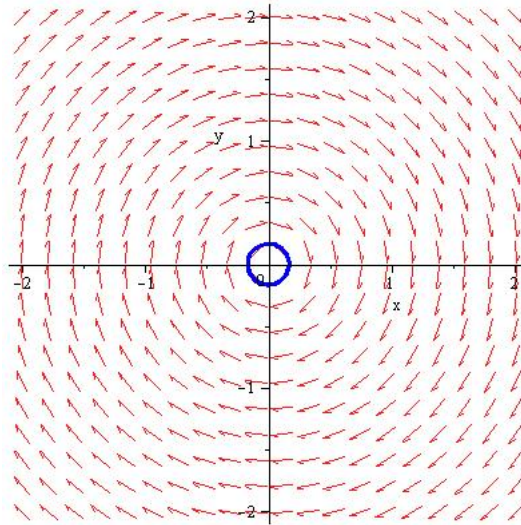


FIGURE 3.3 – Pas de cycle limite.

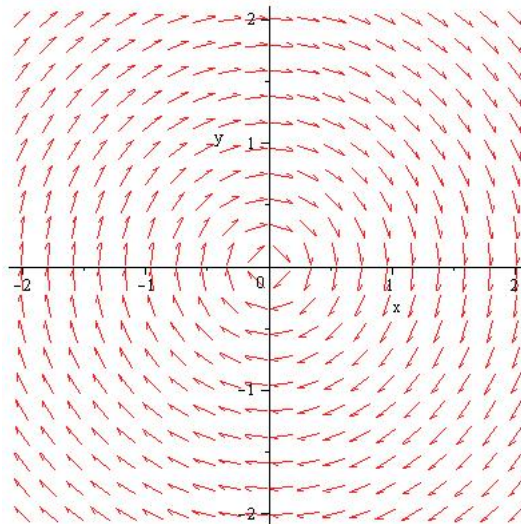
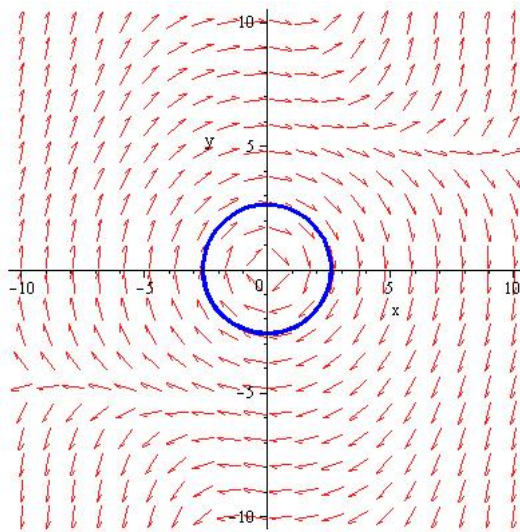


FIGURE 3.4 – Cycle limite de rayon $\frac{2}{13}\sqrt{286} \simeq 2.6$ pour le système (3.7) lorsque $\varepsilon = 0.01$.



Chapitre 4

Solutions périodiques d'un système différentiel perturbé via la théorie de moyennisation et la méthode de Melnikov

Objectifs

Dans ce chapitre, nous étudierons le nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel perturbé par rapport à ses paramètres qui apparaissent dans le système notamment sur le degré du polynôme. Pour cela nous allons utiliser deux méthodes à savoir la théorie de moyennisation du premier ordre et celle de Melnikov sur le même système pour donner une borne supérieure pour le nombre de solutions périodiques qui peuvent bifurquer à partir du centre avec $\varepsilon = 0$. Enfin, nous présentons quelques exemples numériques afin d'illustrer les résultats théoriques donnés par la théorie de moyennisation et celle de Melnikov.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, m est un entier arbitraire positif et $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$.

Sommaire

1	Résultats principaux	57
2	Solutions périodiques via la théorie de moyennisation	57
3	Solutions périodiques via la méthode de Melnikov	61
4	Applications et simulations	66

1 Résultats principaux

Nos contributions principales seront présentées dans les théorèmes suivants.

Théorème 1.1. *Supposons que $f(r)$ la fonction moyennée du premier ordre est non nulle et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Le nombre maximum de cycles limites bifurquant à partir des solutions périodiques du centre est au plus :*

- a) $\frac{n-2}{2}$, si n et m sont pairs.
- b) $\frac{n-1}{2}$, si n est impair et m est pair.
- c) $n - 1$, si n et m sont impairs.
- d) $n - 1$, si n est pair et m est impair.

Théorème 1.2. *Supposons que la fonction de Melnikov est non nulle et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Le nombre maximum de cycles limites bifurquant à partir de solutions périodiques d'un centre est au plus :*

- a) $\frac{n-2}{2}$, si n et m sont pairs.
- b) $\frac{n-1}{2}$, si n est impair et m est pair.
- c) $n - 1$, si n et m sont impairs.
- d) $n - 1$, si n est pair et m est impair.

Remarque 1.1. *Lorsque $m = 0$ et $j = 0$ où $\mu_{i0} = -a_i$, le système (4.1) devient*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \sum_{i=0}^n a_i x^i, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (4.2)$$

pour le système (4.2), le nombre maximum de cycles limites bifurquant à partir des solutions périodiques du centre est au plus $(n - 1)/2$ ou $(n - 2)/2$, lorsque n est pair ou impair, respectivement. D'après l'exemple 1.2, le système de Liénard possède au plus $(n - 1)/2$ ou $(n - 2)/2$ cycles limites lorsque n est pair ou impair, respectivement. Ce qui est confirmé par notre résultats.

2 Solutions périodiques via la théorie de moyennisation

Le système (4.1) en coordonnées polaires s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j-1} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta). \end{cases}$$

En prenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système différentiel précédent devient l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta)}{-1 - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j-1} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta)} \\ \frac{dr}{d\theta} &= -\varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) + O(\varepsilon^2). \\ \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Remarque 2.1. Cette équation différentielle s'écrit sous la forme standard (2.10).

Remarque 2.2. Le calcul de $f(r)$ dépend de m et n .

Cas (a) Si n et m sont pairs.

$$\begin{aligned}f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) \right] d\theta \\ &= \frac{-1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{2p+j=2}^{n+1} \mu_{2p-1,j} r^{2p-1+j} \cos^{2p}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \sum_{2p+j=2}^{n+1} \mu_{2p-1,j} r^{2p-1+j} \cos^{2p}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q-1} \times \\ &\quad \times \left[\int_0^{2\pi} \left(\cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) + \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m}(\theta) \right) d\theta \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi} \sum_{p+q=1}^{\frac{n}{2}} \mu_{2p-1,2q} r^{2(p+q)-1} \times \\ &\quad \times \left[\frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2q+m-1)!!}{(2q+m+2p)(2q+m+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi \right]\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} A_k r^{2k-1}$$

Cas (b) Si n est impair et m est pair.

$$\begin{aligned}
f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta \right] \\
&= \frac{-1}{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1, 2q} r^{2p+2q-1} \times \\
&\quad \times \left[\int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m}(\theta) d\theta \right] \\
&= \frac{-1}{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1, 2q} r^{2p+2q-1} \times \\
&\quad \times \left[\frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2q+m-1)!!}{(2q+m+2p)(2q+m+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi \right] \\
&= - \sum_{p+q=1}^{\frac{n+1}{2}} \mu_{2p-1, 2q} r^{2(p+q)-1} \times \\
&\quad \times \left[\frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2q+m-1)!!}{(2q+m+2p)(2q+m+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} B_k r^{2k-1}
\end{aligned}$$

Cas (c) Si n et m sont impairs.

$$\begin{aligned}
f_3(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta + \right. \\
&+ \left. \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta \right] \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left[\sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \right. \\
&+ \left. \sum_{2p+2q+1=3}^n \mu_{2p-1,2q+1} r^{2p+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m+1}(\theta) d\theta \right] \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left[\sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q-1} \times \right. \\
&\times \frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi + \\
&+ \sum_{2p+2q=2}^{n-1} \mu_{2p-1,2q+1} r^{2p+2q} \times \\
&\times \left. \frac{(2q+m+1-1)!!}{(2q+m+1+2p)(2q+m+1+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi \right] \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left[\sum_{p+q=1}^{\frac{n+1}{2}} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q-1} \times \right. \\
&\times \frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} + \\
&+ \sum_{p+q=1}^{\frac{n-1}{2}} \mu_{2p-1,2q+1} r^{2p+2q} \times \\
&\left. \frac{(2q+m+1-1)!!}{(2q+m+1+2p)(2q+m+1+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi \right] \\
&= \sum_{k=1}^n C_k r^k
\end{aligned}$$

Cas (d) Si n est pair et m est impair.

$$\begin{aligned}
f_4(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta \\
&= \frac{-1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta \Big] \\
& = \frac{-1}{2\pi} \left[\sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta \right. \\
& + \left. \sum_{2p+2q+1=3}^{n+1} \mu_{2p-1,2q+1} r^{2p+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m+1}(\theta) d\theta \right] \\
& = \frac{-1}{2\pi} \left[\sum_{p+q=1}^{\frac{n}{2}} \mu_{2p-1,2q} r^{2(p+q)-1} \times \right. \\
& \times \frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi + \\
& + \sum_{p+q=1}^{\frac{n}{2}} \mu_{2p-1,2q+1} r^{2(p+q)} \times \\
& \times \left. \frac{(2q+m-1-1)!!}{(2q+m+1+2p)(2q+m+1+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi \right] \\
& = \sum_{k=1}^n D_k r^k
\end{aligned}$$

3 Solutions périodiques via la méthode de Melnikov

Considérons le système qui prend la forme suivante :

$$\dot{X} = f(X) + \varepsilon g(X, \mu), \quad X \in \mathbb{R}^2. \quad (4.3)$$

Où $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m)$ et $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Le système non perturbé pour $\varepsilon = 0$:

$$\dot{X} = f(X) \quad (4.4)$$

possède une famille à un paramètre d'orbites périodiques $\gamma_r(\theta)$ de période T_r à l'intérieur de Γ_0 avec $\frac{\partial \gamma_r(0)}{\partial r} \neq 0$.

La fonction de Melnikov est donnée par :

$$M(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\int_{\theta_0}^{\theta} \nabla f(\gamma_0(s)) ds\right) \cdot f(\gamma_0(\theta)) \wedge g[\gamma_0(\theta), \theta + \theta_0] d\theta.$$

Remarque 3.1. Le produit de deux vecteurs $u = (u_1, u_2)^T$ et $v = (v_1, v_1)^T \in \mathbb{R}^2$ est défini par :

$$u \wedge v = u_1 v_2 - v_1 u_2$$

Remarque 3.2. Si pour $\varepsilon = 0$, (4.4) est un système hamilton c'est-à-dire, si

$f = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T$. Alors, $\nabla f = 0$ et la fonction de Melnikov a la forme la plus simple.

$$M(\theta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma_0(\theta)) \wedge g[\gamma_0(\theta), \theta + \theta_0] d\theta. \quad (4.5)$$

Démonstration. $f = (H_y, -H_x)^T \implies \nabla f = \text{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x = 0.$ □

Théorème 3.1. *Considérons le système différentiel (4.3). Pour $\varepsilon = 0$ le système (4.3) a une famille à un paramètre d'orbites périodiques $\gamma_r(\theta)$ de période T_r à l'intérieur de Γ_0 avec $\frac{\partial \gamma_r(0)}{\partial r} \neq 0$, s'il existe un point $(r_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ telle que la fonction*

$$M(r, \mu) = \int_0^{T_r} f(\gamma_r(\theta)) \wedge g[\gamma_r(\theta), \mu] d\theta.$$

Satisfait

$$M(r_0, \mu_0) = 0 \quad \text{et} \quad M_r(r_0, \mu_0) \neq 0.$$

alors pour tout $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (4.3) avec $\mu = \mu_0$ a un cycle limite hyperbolique unique en $O(\varepsilon)$ voisinage du cycle $\gamma_{r_0}(\theta)$. Si $M(r_0, \mu_0) \neq 0$, alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système

$$M_{m,n}(\theta_0) = \int_0^{mT} f(\gamma_r(\theta)) \wedge g[\gamma_r(\theta), \theta + \theta_0] d\theta.$$

avec $\mu = \mu_0$ n'a pas de cycle dans $O(\varepsilon)$ voisinage du cycle $\gamma_{r_0}(\theta)$, voir [29].

Notre système considéré (4.1) prend la forme (4.3), pour $f = (y, -x)^T$ et

$$g = \left((1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} x^i y^j, 0 \right)^T, \quad \text{où } g \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique.}$$

Pour $\varepsilon = 0$, le système a un centre à l'origine avec une famille à un paramètre d'orbites périodiques $\gamma_r(\theta) = (r \cos(\theta), -r \sin(\theta))^T$.

Remarque 3.3. *Le calcul de $M(r, \mu)$ dépend de m et n .*

En remplaçant f et g dans (3.2), on obtient :

$$M(r, \mu) = \int_0^{2\pi} (y, -x)^T \wedge \left((1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} x^i y^j, 0 \right)^T [\gamma_r(\theta), \mu] d\theta.$$

$$\begin{aligned}
M(r, \mu) &= \int_0^{2\pi} x(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} x^i y^j d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^m(\theta)) x \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} x^i y^j d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} x^{i+1} y^j d\theta
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables telles que $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
M(r, \mu) &= \int_0^{2\pi} (1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} r^{i+1} \cos^{i+1}(\theta) r^j \sin^j(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) \right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Cas (a) Si m et n sont pairs.

$$\begin{aligned}
M_1(r, \mu) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i,j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m}(\theta) d\theta \\
&= \sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \times \\
&\quad \times \left[\int_0^{2\pi} \left(\cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) + \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m}(\theta) \right) d\theta \right] \\
&= \sum_{p+q=1}^{\frac{n}{2}} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \times \\
&\quad \times \left[\frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(2q + m - 1)!!}{(2q + m + 2p)(2q + m + 2p - 2) \dots (2p + 2)} \frac{(2p - 1)!!}{2^p p!} 2\pi \Big] \\
 & = 2\pi \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \tilde{A}_k r^{2k}
 \end{aligned}$$

Cas (b) Si n est impair et m est pair.

$$\begin{aligned}
 M_2(r, \mu) & = \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i_j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i_j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta \\
 & = \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m}(\theta) d\theta \\
 & = \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \times \\
 & \times \left[\int_0^{2\pi} \left(\cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) + \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m}(\theta) \right) d\theta \right] \\
 & = \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \times \\
 & \times \left[\int_0^{2\pi} \left(\cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) + \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m}(\theta) \right) d\theta \right] \\
 & = \sum_{p+q=1}^{\frac{n+1}{2}} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \times \\
 & \times \left[\frac{(2q - 1)!!}{(2q + 2p)(2q + 2p - 2) \dots (2p + 2)} \frac{(2p - 1)!!}{2^p p!} 2\pi + \right. \\
 & \left. + \frac{(2q + m - 1)!!}{(2q + m + 2p)(2q + m + 2p - 2) \dots (2p + 2)} \frac{(2p - 1)!!}{2^p p!} 2\pi \right] \\
 & = 2\pi \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \tilde{B}_k r^{2k}
 \end{aligned}$$

Cas (c) Si n et m sont impairs

$$\begin{aligned}
 M_3(r, \mu) & = \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i_j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta + \\
 & + \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{i_j} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \\
&+ \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q+1=3}^n \mu_{2p-1,2q+1} r^{2p+2q+1} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m+1}(\theta) d\theta \\
&= \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \\
&+ \sum_{2p+2q=2}^{n-1} \mu_{2p-1,2q+1} r^{2p+2q+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m+1}(\theta) d\theta \\
&= \sum_{2p+2q=2}^{n+1} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \times \\
&\times \frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p!} 2\pi + \\
&+ \sum_{2p+2q=2}^{n-1} \mu_{2p-1,2q+1} r^{2p+2q+1} \times \\
&\times \frac{(2q+m+1-1)!!}{(2q+m+1+2p)(2q+m+1+2p-2)\dots(2p+2)} \times \\
&\times \frac{(2p-1)!!}{2^p!} 2\pi \\
&= \sum_{p+q=1}^{\frac{n+1}{2}} \mu_{2p-1,2q} r^{2(p+q)} \times \\
&\times \frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p!} 2\pi + \\
&+ \sum_{p+q=1}^{\frac{n-1}{2}} \mu_{2p-1,2q+1} r^{2(p+q)+1} \times \\
&\times \frac{(2q+m)!!}{(2q+m+1+2p)(2q+m+2p-2)\dots(2p+2)} \times \\
&\times \frac{(2p-1)!!}{2^p!} 2\pi \\
&= 2\pi \sum_{k=2}^{n+1} \tilde{C}_k r^k
\end{aligned}$$

Cas (d) Si et n est pair et m est impair.

$$\begin{aligned}
M_4(r, \mu) &= \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^j(\theta) d\theta + \\
&+ \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} r^{i+j+1} \cos^{i+1}(\theta) \sin^{j+m}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \\
&+ \int_0^{2\pi} \sum_{2p+2q+1=3}^{n+1} \mu_{2q-1,q+1} r^{2p+2q+1} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m+1}(\theta) d\theta \\
&= \sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q}(\theta) d\theta + \\
&+ \sum_{2p+2q=2}^n \mu_{2p-1,2q-1} r^{2p+2q+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2p}(\theta) \sin^{2q+m+1}(\theta) d\theta \\
&= \sum_{p+q=1}^{\frac{n}{2}} \mu_{2p-1,2q} r^{2p+2q} \times \\
&\times \frac{(2q-1)!!}{(2q+2p)(2q+2p-2)\dots(2p+2)} \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi + \\
&+ \sum_{p+q=1}^{\frac{n}{2}} \mu_{2p-1,2q-1} r^{2p+2q+1} \times \\
&\times \frac{(2q+m+1-1)!!}{(2q+m+1+2p)(2q+m+1+2p-2)\dots(2p+2)} \times \\
&\times \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} 2\pi \\
&= 2\pi \sum_{k=2}^{n+1} \tilde{D}_k r^k
\end{aligned}$$

4 Applications et simulations

Ici, quatre exemples numériques sont présentés afin de confirmer nos résultats.

Exemple 4.1. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^4(\theta))(y^2x - x^3y^2 - y^6) \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (4.6)$$

ici $n = 6$ et $m = 4$ qui sont pairs, cela correspond au **cas (a)**. La fonction moyennée et celle de Melnikov sont les suivantes :

$$\begin{cases} f_1(r) = \frac{1}{256} r^3 (19r^2 - 42) \\ M_1(r) = -\frac{1}{256} r^4 (19r^2 - 42), \end{cases}$$

et comme nous l'avons

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(\frac{1}{19}\sqrt{798})}{\partial r} = \frac{441}{608} \\ \frac{\partial M_1(\frac{1}{19}\sqrt{798})}{\partial r} = -\frac{441}{11552}\sqrt{798}, \end{cases}$$

alors il n'y a qu'un seul cycle limite de rayon $\frac{1}{19}\sqrt{798} \simeq 1.49$ pour le système (4.6). D'après les résultats donnés par la théorie de moyennisation et la méthode de Melnikov dans le cas (a) il existe au plus $\frac{n-2}{2} = 2$ cycles limites (voir figure 4.1).

Exemple 4.2. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^4(\theta))(x - x^3)(3x^2 - 5x^4) \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (4.7)$$

ici $n = 7$ et $m = 4$ où n est impair et m pair, cela correspond au **cas (b)**. La fonction moyennée et celle de Melnikov sont les suivantes :

$$\begin{cases} f_2(r) = -\frac{r^3}{1024}(1453r^4 - 2656r^2 + 1224) \\ M_2(r) = \frac{r^4}{1024}(1435r^4 - 2656r^2 + 1224), \end{cases}$$

et comme nous l'avons

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3(0.99)}{\partial r} = -0.31941 \\ \frac{\partial M_3(0.99)}{\partial r} = 0.31688, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2(0.93)}{\partial r} = 0.24796 \\ \frac{\partial M_2(0.93)}{\partial r} = -0.23082, \end{cases}$$

alors le système (4.7) possède deux cycles limites de rayon 0.99 et 0.93. D'après les résultats donnés par la théorie de moyennisation et la méthode de Melnikov dans le **cas (b)** il existe au plus $\frac{n-1}{2} = 3$ cycle limite (voir figure 4.2).

Exemple 4.3. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^3(\theta))(x - x^3)(3x^2 - 5x^4) \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (4.8)$$

ici $n = 7$ et $m = 3$ où n et m sont impairs, cela correspond au **cas (c)**. La fonction moyennée et celle de Melnikov sont les suivantes :

$$\begin{cases} f_3(r) = -\frac{r^3}{128}(175r^4 - 320r^2 + 144) \\ M_3(r) = \frac{r^4}{128}(175r^4 - 320r^2 + 144), \end{cases}$$

et comme nous l'avons

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3(\frac{2}{5}\sqrt{5})}{\partial r} = \frac{2}{5} \\ \frac{\partial M_3(\frac{2}{5}\sqrt{5})}{\partial r} = -\frac{4}{25}\sqrt{5}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial f_3(\frac{6}{35}\sqrt{35})}{\partial r} = -\frac{162}{245} \\ \frac{\partial M_3(\frac{6}{35}\sqrt{35})}{\partial r} = \frac{972}{8575}\sqrt{35}, \end{cases}$$

alors le système (4.8) possède deux cycles limites de rayon $\frac{2}{5}\sqrt{5} \simeq 0.89$ et $\frac{6}{35}\sqrt{35} \simeq 1.01$. D'après les résultats donnés par la théorie de moyennisation et la méthode de Melnikov dans le **cas** (c) il existe au plus $n - 1 = 6$ cycles limites (voir figure 4.3).

Exemple 4.4. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^3(\theta))(xy - yx^3) \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (4.9)$$

ici $n = 4$ et $m = 3$ où n est pair et m impair, cela correspond au **cas** (d). La fonction moyennée et celle de Melnikov sont les suivantes :

$$\begin{cases} f_4(r) = \frac{r^2}{128}(-8 + 3r^2) \\ M_4(r) = \frac{-r^3}{128}(-8 + 3r^2), \end{cases}$$

et comme nous l'avons

$$\begin{cases} \frac{\partial f_4(\frac{2}{3}\sqrt{6})}{\partial r} = \frac{1}{12}\sqrt{6} \\ \frac{\partial M_4(\frac{2}{3}\sqrt{6})}{\partial r} = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

alors il n'y a qu'un seul cycle limite de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{6} \simeq 1.63$ pour le système (4.9). D'après les résultats donnés par la théorie de moyennisation et la méthode de Melnikov dans le **cas** (d) il existe au plus $n - 1 = 3$ cycles limites (voir figure 4.4).

FIGURE 4.1 – Cycle limite de rayon 1.49 pour le système (4.6) lorsque $\varepsilon = 0.01$.

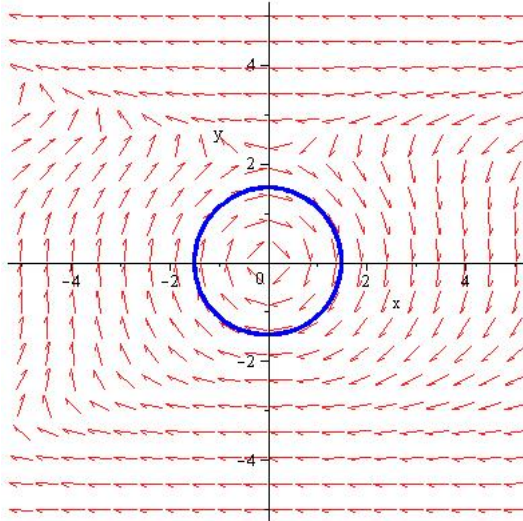


FIGURE 4.2 – Deux cycles limites de rayons 0.99 et 0.93 pour le système (4.7) lorsque $\varepsilon = 0.01$.

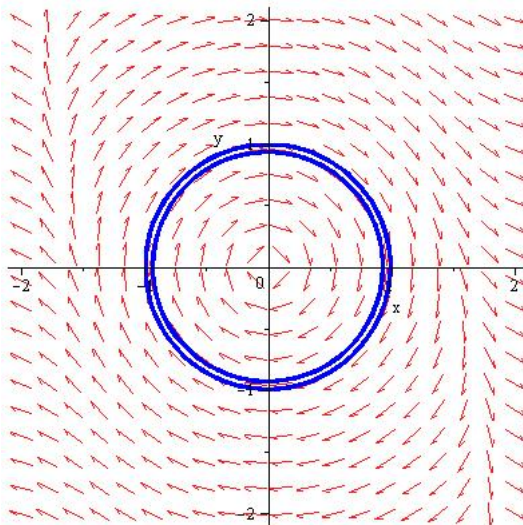


FIGURE 4.3 – Deux cycles limites de rayons 0.89 et 1.01 pour le système (4.8) lorsque $\varepsilon = 0.01$.

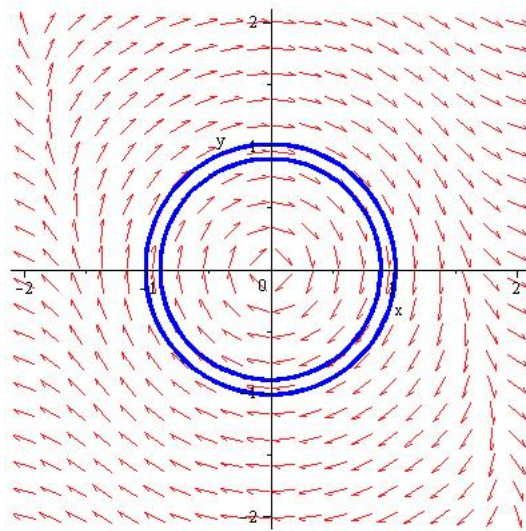
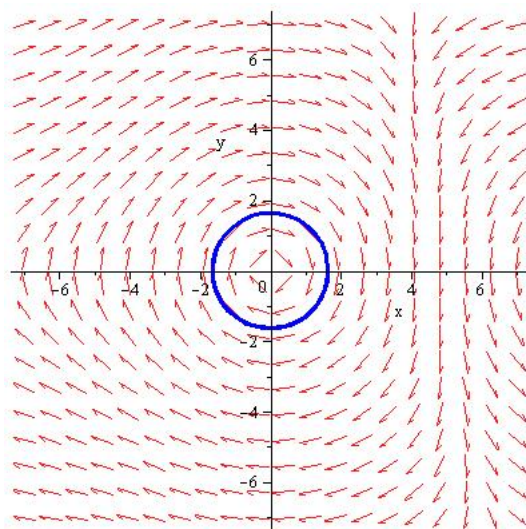


FIGURE 4.4 – Cycle limite de rayon 1.63 pour le système (4.9) lorsque $\varepsilon = 0.01$



Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on s'est intéressé à l'étude des systèmes différentiels planaires.

En premier lieu, on a étudié le nombre maximum de cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))\psi(x, y), \end{cases}$$

En deuxième lieu, en appliquant deux méthodes à savoir : la méthode de moyennisation du premier ordre et celle de Melnikov. On a étudié le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^m(\theta)) \sum_{i+j=0}^n \mu_{ij} x^i y^j, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

Comme perspective : on propose d'étudier le nombre maximum de cycles limites du système différentiel planaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))P(x, y), \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 + \sin^m(\theta))Q(x, y), \end{cases}$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux polynômes de degré n_1, n_2 respectivement, par la méthode de moyennisation du premier ordre.

Bibliographie

- [1] M.J. Álvarez, B. Coll, P. De Maesschalck, and R. Prohens. “Asymptotic lower bounds on Hilbert numbers using canard cycles”. In : J. Differential Equations 268.7 (2020), pp. 3370–3391.
- [2] S. Badi and A. Makhlouf, *Limit cycles of the generalized Liénard differential equation via averaging theory*, Ann. of Di . Eqs. 27 :4(2011), 472-479.
- [3] I.S. Berezin and N.P. Zhidkv, Computing Methods, vol. II, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [4] G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, AMS, New-York, 1927.
- [5] N.N. Bogoliubov, On some statistical methods in mathematical physics, Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [6] N.N. Bogoliubov and N. Krylova application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations, Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [7] N.N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolsky, Asymtotic methods in the theory of non-linear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961
- [8] A. Buica, J. Giné and J. Llibre, *Bifurcation of limit cycles from a polynomial degenerate center*, Adv.Nonlinear Stud. 10 (2010), 597-609.
- [9] A. Buica and J. Llibre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math., 128 (2004), 7-22.
- [10] T. Chen and J. Llibre, *Limit cycles of a second-order differential equation*, Appl. Math. Lett. 88 (2019) 111-117.
- [11] C. J. Christopher and N. G. Lloyd. “Polynomial systems : a lower bound for the Hilbert numbers”. In : Proc. Roy. Soc. London Ser. A 450.1938 (1995), pp. 219–224.
- [12] A. Cima, J. Llibre, and M. A Teixeira, *Limit cycles of some polynomial differential system in dimension 2, 3 and 4 via averaging theory*, Appl.Anal. 87 (2008), 149-164.
- [13] J. Guckenheimer, M. Myers and B. Sturmfels, Computing Hopf Bifurcations I, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1997.

-
- [14] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner, Solving ordinary differential equations I : nonstiff problems, New York, Springer-Verlag, 1993.
- [15] J. Hale et H. Koçak, Dynamics and Bifurcations, vol. 3, New York, Springer-Verlag, coll. Texts in Applied Mathematics, 1991.
- [16] M. Han and J. Li. “Lower bounds for the Hilbert number of polynomial systems”. In : J. Differential Equations 252.4 (2012), pp. 3278–3304.
- [17] N. Hirano and S. Rybicki, *Existence of limit cycles for coupled Van der Pol equations*, J. Differ. Equ., vol. 195, no. 1, pp.194-209, Nov. 2003.
- [18] Y. Ilyashenko. “Centennial history of Hilbert’s 16th problem”. In : Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 39.3 (2002), pp. 301–354.
- [19] S. Karfes, E. Hadidi and M. A. Kerker, On the maximum number of limit cycles of a planar differential system, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 13 (2022) 1, 1462-1478.
- [20] S. Kassa, J. Llibre, and A. Makhlouf. N-Dimensional Zero-Hopf Bifurcation of Polynomial Differential Systems via Averaging Theory of Second Order, J. Dyn. Control. Syst., 27 (2021), 283–291.
- [21] Yu.A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, 3rd edition, Springer, 2004.
- [22] J. Li. “Hilbert’s 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields”. In : Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 13.1 (2003), pp. 47–106.
- [23] J. Llibre and A.C. Mereu, *Limit cycles for generalized Kukles polynomial differential systems*, Nonlinear Anal. 74 (2011) 1261-1271.
- [24] J. Llibre, R. Moeckel, C. Simó, Central Configurations, Periodic orbits and Hamiltonian systems, Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser, 2015.
- [25] Malkin I. G. Some problems of the theory of nonlinear oscillations. (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956.
- [26] Marsden J. E, McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. Springer, New York (1976).
- [27] E. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique, J. Math. Pures Appl. 13 (1868) 137–203.
- [28] N. Mellahi, A. Boulfoul and A. Makhlouf, *Maximum Number of Limit Cycles for Generalized Kukles Polynomial Differential Systems*, Differ. Equ. Dyn. Syst. 27, 493-514 (2019).
- [29] L. Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics, V. 7, 3rd edition. Springer, New York, 2000.
- [30] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I, II, J. Math. Pures Appl. 7 (1881), 375-422 ; 8 (1882), 251-296.

- [31] R. Prohens and J. Torregrosa. “New lower bounds for the Hilbert numbers using reversible centers”. In : *Nonlinearity* 32.1 (2019), pp. 331–355.
- [32] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer, New York, 1985.
- [33] O.E. Rössler, Continuous chaos-four prototype equations, *Ann. New York Acad. Sci.*, 316 (1979), 376–392
- [34] A. Roubache et E. Hadidi, Zero-Hopf bifurcation of periodic orbits in the generalized Rossler system., *MATHEMATICA.*,124-133, 2021.
- [35] R. Roussarie. *Bifurcations of planar vector fields and Hilbert’s sixteenth problem.* Modern Birkhäuser Classics. [2013] reprint of the 1998 edition [MR1628014]. Birkhäuser/Springer, Basel, 1998.
- [36] J.A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Applied Mathematical Sciences 59, Springer, 1985.
- [37] E. Sáez and I. Szántó, *Bifurcations of limit cycles in Kukles systems of arbitrary degree with invariant ellipse*, *Appl. Math. Lett.* 25 (2012) 1695-1700.
- [38] H. Shi, Y. Bai and M. Han, *On the maximum number of limit cycles for a piecewise smooth differential system*, *Bull. Sci. math.* 163 (2020) 102887.
- [39] F. Verhulst, *nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer, New York, 1996.
- [40] D. Zwillinger, *Table of Integrals, Series, and Products*, ISBN : 978-0-12-384933-5 2014.