

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
LABORATOIRE DE MODELISATION MATHÉMATIQUE ET SIMULATION NUMÉRIQUE



Année : 2020/2021

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DU MODELE DE PERONA-MALIK
ET APPLICATION EN TRAITEMENT D'IMAGE AVEC UNE DIFFUSION
STOCHASTIQUE

Spécialité

Équations Différentielles et Applications

Présentée Par

Hicham Rezgui

DIRECTEUR DE THÈSE : Mohammed Lakhdar Hadji

M.C.A

U.B.M. ANNABA

CO- DIRECTEUR DE THÈSE : Messaoud Maouni

Prof

U. SKIKDA

Devant le jury

PRESIDENT :

Mme. Fatma Zohra Nouri

Prof

U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR :

Mr. Ali Djellit

Prof

U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR :

Mr. Mohammed Hachama

Prof

U. BLIDA 1

EXAMINATEUR :

Mr. Amar Guesmia

Prof

U. SKIKDA

Remerciements

Mes remerciements vont avant tout à **Allah** qui m'a donné la force et la volonté d'achever ce travail.

Je voudrais adresser tous mes sincères remerciements à mon directeur de thèse **M. Mohammed Lakhdar Hadji**, Maître de conférences classe A et le co-directeur de thèse le professeur **Messaoud Maouni** qui ont accepté de diriger ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec eux. Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à **M. Hadji** pour ses conseils précieux et la confiance qu'il m'a accordée. Je le remercie aussi pour sa patience et pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de la préparation de cette thèse. C'est avec la même sincérité que je tiens particulièrement à remercier **M. Maouni** aussi bien pour son regard critique, sa disponibilité et ses précieux conseils. Il est certainement clair que cette thèse n'aurait pas pu être soutenue sans eux, pour cela, je les suis très reconnaissant.

Je tiens également à remercier **Mme Fatma Zohra Nouri**, professeur de l'Université Badji Mokhtar-Annaba, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse, je la remercie énormément.

Tous les membres du jury qui m'ont tous fait l'honneur d'accepter de prendre part à ce jury et surtout de lire et d'expertiser mon travail. Je remercie le professeur **Mohammed Hachama** de l'université de Blida, le professeur **Amar Guesmia** de l'université de Skikda et le professeur **Ali Djellit** de l'université Badji Mokhtar-Annaba, qui ont accepté d'être les examinateurs de cette thèse.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents pour leur soutien et leurs encouragements, mes sœurs, mes frères et à tous ceux qui de près ou de loin m'ont accompagné, soutenu et encouragé à terminer cette thèse.

السلوك المقارب لنموذج بيرونا-ماليك والتطبيق في معالجة الصور مع الانتشار العشوائي

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو معالجة مشكلة من مشاكل إستعادة الصور العددية وتحسينها، حيث تعتبر هذه المشكلة مشكلة عكسية. أولاً وقبل كل شيء، نقدم الطرق الحالية والأكثر تكيفاً لاستعادة الصور الرقمية. بعد ذلك، نقترح نموذجين للنشر متباين الخواص. يعتمد النموذج الأول المقترح على معادلات تفاضلية جزئية. هذا الاقتراح هو تحسين لنموذج بيرونا و ماليك والذي يسمح بتقليل عيوبه أثناء المعالجة وقادر على تقليل ضوضاء الملامح مع الحفاظ على البنية الهندسية لهذه الخطوط. النموذج الثاني المقترح في هذه الأطروحة مبني على معادلة تفاضلية جزئية مرتبطة بمعادلة تفاضلية عشوائية باستخدام معادلة كولموغوروف.

من خلال مقارنة النتائج العددية لنماذجنا مع نماذج الانتشار الأخرى، فإننا نؤكد ونوضح أداء وفعالية مناهجنا في عملية الاستعادة المطبقة على الصور الحقيقية والاصطناعية.

الكلمات المفتاحية: معالجة الصور، نموذج بيرونا-ماليك، عملية الانتشار، نماذج عشوائية.

Comportement Asymptotique du Modèle Perona-Malik et Application en Traitement d'Image avec une Diffusion Stochastique

Résumé

L'objectif de cette thèse est de traiter le problème de restauration et d'amélioration des images numériques, où celui-ci est considéré comme un problème inverse. Tout d'abord, on présente les méthodes existantes et les plus adaptées à la restauration des images. Ensuite, on propose deux modèles de diffusion anisotropes, le premier est basé sur les équations aux dérivées partielles, cette proposition est une amélioration du modèle de Perona et Malik, qui permet de réduire ses inconvénients de traitement et capable de réduire le bruit des contours tout en préservant leurs structures géométriques. Le deuxième se base sur une équation aux dérivées partielles associée à une équation différentielle stochastique en utilisant l'équation de Kolmogorov.

En comparant nos résultats numériques avec ceux des autres modèles de diffusion, on confirme et on illustre la performance et l'efficacité de nos approches sur le processus de restauration appliqué à des images réelles et synthétiques.

Mots-clés : Traitement d'image, Modèle de Perona-Malik, Processus de Diffusion, Modèles stochastiques.

Asymptotic Behavior of the Perona-Malik Model and Application in Image Processing with Stochastic Diffusion

Abstract

The objective of this thesis is to treat the problem of restoration and enhancing numerical images, where this problem is considered as an inverse problem. First, we present the existing methods and the most adapted for the restoration of digital images. Then, we propose two anisotropic diffusion models. The first proposed model is based on partial differential equations. This proposal is an improvement of the model of Perona-Malik which allows to reduce its disadvantages in processing and capable to reduce the noise of the contours while preserving the geometrical structure of these contours. The second model proposed in this thesis is based on a partial differential equation associated with a stochastic differential equation by using the Kolmogorov equation.

By comparing the numerical results of our models with other diffusion models, we confirm and illustrate the performance and effectiveness of our approaches in the restoration process applied for real and synthetic images.

Keywords : Image processing, Perona-Malik model, Diffusion process, Stochastics models.

Table des matières

Table des figures	vii
Introduction générale	x
1 Images Numériques	1
1.1 Définitions	1
1.2 Propriétés d'une Image Numérique	2
1.3 Représentation d'Image Numérique	2
1.3.1 Images vectorielles	2
1.3.2 Images matricielles	3
1.4 Dégradation d'une Image	3
1.5 Critères de la Qualité de l'Image	4
1.6 Notions Mathématiques	5
1.7 Courbure	7
1.8 Quelques Espaces Fonctionnels	7
1.8.1 Espaces de Hilbert	7
1.8.2 Espace des fonctions continûment différentiables	8
1.8.3 Espaces de Sobolev	8
1.8.4 Espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée	9
1.9 Rappels et Calcul Stochastique	10
1.9.1 Processus stochastique	10
1.9.2 Martingales	11
1.9.3 Mouvement Brownien	11
1.9.4 Formule d'Itô	11
2 EDPs en Traitement d'Images Numériques	13
2.1 Restauration d'images et EDPs	13
2.2 Débruitage d'image	13
2.2.1 Diffusion isotrope	14
2.2.2 Diffusion anisotrope	15
2.2.3 Diffusion tensorielle	18
2.2.4 Diffusion par EED	20

2.2.5	Diffusion par CED	21
2.3	Modèles Variationnels	24
2.3.1	Approche de Nordstrom	26
2.3.2	Minimisation de la variation totale	27
2.4	Rehaussement de Flou	29
2.4.1	Filtre de choc	29
2.5	Conclusion	31
3	Évaluation d'un nouveau filtre anisotropique pour la restauration d'images basé sur Le modèle Perona-Malik	32
3.1	Modèles d'EDPs pour l'amélioration d'images	32
3.2	Fonctions de Diffusivité	33
3.2.1	Comportement diffusif des fonctions proposées	35
3.3	Mise en œuvre numérique	36
3.3.1	Discrétisation du modèle	36
3.3.2	Implémentation numérique	37
3.4	Résultats Numériques	37
3.5	Conclusion	42
4	Diffusion anisotrope en utilisant trois fonctions de diffusivité robustes	43
4.1	Présentation de Quelques Travaux Connexes	43
4.2	Proposition de Trois Fonctions de Diffusivité Robustes	44
4.3	Description du Fonctionnement de Nos Fonctions	46
4.4	Nos Fonctions de Diffusivité Versus les Autres Fonctions	49
4.5	Discrétisation numérique	50
4.6	Tests et seuil de diffusion	51
4.7	Applications sur des images médicales	52
4.8	Application aux Images Naturelles	56
4.9	Conclusion	58
5	Restauration d'Image par un Modèle Stochastique	61
5.1	Equations Différentielles Stochastiques	61
5.1.1	Existence et l'unicité	62
5.2	Débruitage d'Images par Approches d'EDS	63
5.2.1	Modèle de Borkowski	63
5.2.2	Modèle de Barbu et Angelo	64
5.3	Description du Modèle Proposé	65
5.3.1	Modèle proposé	65
5.4	Mise en œuvre numérique	67
5.4.1	Discrétisation du modèle	67
5.4.2	Stabilité et Implementation	68

5.5	Comparaison des résultats numériques	70
5.5.1	Sans Régularisation	70
5.5.2	Avec Régularisation	71
5.6	Application de restauration d'images avec une diffusion stochastique .	72
5.7	Conclusion	76
	Conclusions et perspectives	79
	Annexe A	80
	Bibliographie	84

Table des figures

1.1	Numérisation d'une image.	1
1.2	Représentation d'une image binaire	2
1.3	Image vectorielle et matricielle.	3
1.4	Représentation des directions locales sur la ligne de niveau $I(x, y) = c$	6
2.1	Résultat de l'équation de la chaleur après 200 iterations.	14
2.2	Illustration des résultats du modèle de PM après 30 iterations pour deux valeurs de k différentes.	16
2.3	Comparaison entre le modèle de PM et de Catté et al. pour une image bruitée avec un bruit gaussien ($m = 0, v = 0.03$). Les résultats sont obtenus après 50 iterations.	17
2.4	Comparaison entre les différentes méthodes de diffusion anisotropes : a) image originale, b) image bruitée par bruit uniforme de taux 0.55, c) résultat de Catté et al. et d) résultat par EED de Weickert.	21
2.5	Comparaison entre les différentes méthodes de CED. Première ligne de gauche à droite respectivement : l'image originale et le résultat de Weickert. Deuxième ligne de gauche à droite respectivement : le résultat de Kimmel et al. et le résultat de Tschumperlé	24
2.6	Application du modèle de TV sur deux images bruitée par un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 0.05 et ces résultats obtenus après 25 itérations.	28
2.7	Principe de filtre de choc (2.59) dans le cas 1D.	29
3.1	La force de diffusion en fonction de la convolution du gradient de l'image avec un filtre gaussien bidimensionnel pour un paramètre de seuil $R = 1$	35
3.2	La force de diffusion en fonction de la convolution du gradient de l'image avec un filtre gaussien bidimensionnel pour un paramètre de seuil $R = 5$	35

3.3	Comparaison des performances de nos différentes fonctions entre elles avec $R = 10$ et $\sigma = 0,76$. Les images débruitées sont obtenues après 15 itérations. (a) Image bruitée avec le bruit gaussien ($m = 0$; $v = 0.02$), (b) AD en utilisant $f_1(x)$, (c) AD en utilisant $f_2(x)$, (d) AD en utilisant $f_3(x)$, (e) AD avec $f_4(x)$ et (f) AD avec $f_5(x)$	38
3.4	SSIM de nos fonctions améliorées suivant les différentes valeurs de R et $\sigma = 0,76$	39
3.5	MSE de nos fonctions améliorées suivant les différentes valeurs de R et $\sigma = 0,76$	39
3.6	(a) Image bruitée avec un bruit de Poivre et Sel de densité 0.1, les images (b), (c), (d), (e) et (f) sont restaurées en utilisant respectivement f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 , pour $R = 29$ après 25 itérations.	40
3.7	Le PSNR des images restaurées mesuré pour chaque itération, en utilisant nos différentes fonctions améliorées où $R = 29$	41
4.1	Illustration des contours et des coins d'une image : (a) Position des coins dans une image naturelle et (b) Présentation des structures géométriques d'une image médicale.	44
4.2	Comportement de différentes fonctions de diffusivité.	46
4.3	Comparaison entre les résultats de detection de contours d'image restaurée par notre modèle en utilisant nos fonctions.	47
4.4	Comparaison des résultats entre le filtre moyennneur, médian et nos trois fonctions sur une image naturelle bruitée avec un bruit gaussien de moyenne $m = 0$ et de variance $v = 0.05$, le nombre d'itérations est égal à 20.	48
4.5	Restauration d'une image texturée et très bruitée par les trois fonctions proposées.	48
4.6	Effets des nos fonctions de diffusivité H_1, H_2 et H_3 sur la force de diffusion.	49
4.7	Résultats de restauration pour un seuil de diffusion $k = 74$	52
4.8	Résultats de restauration d'image non texturée pour un seuil de diffusion $R = 12$. (a) Image bruitée avec un bruit gaussien ($m=0.04$, $v=0.02$), (b) résultat de H_1 , (c) résultat de H_2 , (d) résultat de H_3 , le nombre d'itérations est égal à 9.	53
4.9	Résultats de restauration d'image non texturée pour un seuil de diffusion $R = 100$ (a) Image bruitée avec un bruit gaussien ($m=0.04$, $v=0.02$), (b) résultat de H_1 , (c) résultat de H_2 , (d) résultat de H_3 , le nombre d'itérations est égal à 9.	53
4.10	Tests de restauration pour un seuil de diffusion $k = 41$ et un bruit de poivre et sel de densité égale à 0.02.	54

4.11	Résultats de restauration des images texturées très bruitées pour un seuil de diffusion $k = 84$ et un bruit de poivre et sel de densité égale à 0.1.	54
4.12	Restauration d'image médicale trop bruitée avec un bruit gaussien ($m = 0.04, v = 0.03$). Les images restaurées sont obtenues après 14 itérations.	55
4.13	Illustration de l'application de notre filtre sur une image médicale. . .	55
4.14	Comparaison de différents filtres sur une image médicale.	56
4.15	Résultat du débruitage sur une image réelle.	56
4.16	Résultats du débruitage de notre filtre sur image de format jpeg. . . .	57
4.17	Comparaison des différents filtres de restauration sur une image très bruitée.	58
4.18	Comparaison de la qualité visuelle entre les différents filtres de diffusion. .	59
5.1	Résultat de la restauration d'image bruitée avec un bruit gaussien ($m = 0, v = 0.03$) par l'EDP associée (5.9) après 15 itérations.	65
5.2	Comportement des fonctions F_1 et F_2 en fonction de la norme de la convolution du gradient de l'image avec un noyau gaussien.	66
5.3	Comparaison entre les résultats de quelques modèles de diffusion. L'image bruitée avec le bruit gaussien ($m = 0, v = 0.03$) et les résultats obtenus après 15 itérations.	71
5.4	Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec le bruit gaussien ($m = 0, v = 0.05$).	74
5.5	Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec un bruit poivre et sel de densité égale à 0.05.	75
5.6	Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec le bruit gaussien de moyenne nulle et de variance 0.05 . .	76
5.7	Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec un bruit de poivre et sel de densité 0.05.	77
5.8	Résultats du débruitage de différentes approches sur images bruitées avec un bruit gaussien ($m = 0$ et $v = 0.01$).	78

Introduction générale

Les images jouent un rôle très important dans la vie quotidienne, elles permettent de conserver et transmettre les sciences d'une génération à l'autre, elles trouvent leurs applications dans de nombreux domaines scientifiques : biomédical, astronomie, contrôle industriel, les outils de la surveillance, environnement, etc...

L'image numérique est la plus utilisée dans le monde réel car elle présente de nombreuses propriétés importantes, comme facilité de manipulation, de stockage et consultation, etc. Tous les dispositifs électroniques existants (les caméras numériques, scanner, caméras sur tablette,...) sont des grands générateurs de telles images, où la technologie de ces appareils permet d'appliquer plusieurs opérations sur l'image comme par exemple : la rotation, le zoom, la transmission, la réduction, etc. Il existe actuellement des images numériques qui présentent des dégradations dues à la qualité des appareils photos fragiles. En plus, les traitements automatiques ne fonctionnent de manière correcte que si les images ont les qualités suffisantes. Enfin, même si nous choisissons d'utiliser les propriétés de qualité avec des paramétrages optimaux, il n'est pas pour autant facile de mettre en œuvre leurs performances.

Depuis le XXe siècle, de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'amélioration d'image qui fait partie importante des opérations de traitement des images qu'ils peuvent appliquer sur une image numérique, comme le déflouage pour les images floues et le débruitage pour celles qui subissent du bruit au moment de la prise de la scène. La restauration des images numériques est un domaine de recherche très actif en traitement d'images. La performance des systèmes de reconnaissance nécessite la bonne qualité d'images, et donc la restauration est très souvent utilisée comme pré-traitement. Le processus de restauration s'étend aussi à l'opération de remplir des parties manquantes d'images [8], [25] et [40]. Cette dernière est nommée par l'inpainting et peut s'appliquer aussi pour supprimer des parties indésirables dans l'image comme des écritures, des logos, etc. Le processus de restauration consiste à retrouver l'image visuellement très proche de l'image originale. De plus, c'est une solution qui permet de corriger les imperfections comme le bruit, le flou qui apparaissent lors du processus de capture d'images. On ne connaît actuellement aucun modèle de restauration des images qui peut s'adapter à une telle variété d'images spécifiques. Il faut donc rechercher les traitements les plus génériques possibles qui soient indépendants des contenus d'images. Les approches développées pour la restauration des images

numériques ne sont pas la simple transposition des approches existantes dédiées aux images médicales. L'explication se trouve tout simplement dans les différences qui existent entre les images naturelles et les images médicales.

Dans ce manuscrit, on s'intéresse beaucoup plus à la restauration des images numériques bruitées. Pour lisser le bruit on propose un modèle adaptatif de diffusion anisotrope à base d'équation aux dérivées partielles (EDP) qui permet d'éliminer le bruit tout en considérant la qualité de l'image restaurée. Notre approche traite également le problème de l'amélioration des images.

Dans la littérature, on trouve beaucoup de travaux visant à améliorer le processus de traitement des images [36], [37], [48], [52], [72] et [63], une grande partie de ces approches nécessite l'utilisation des EDPs. Le problème majeur des approches de restauration est de réaliser la distinction entre les structures géométriques importantes de l'image qui doivent être préservées et le bruit qui possède une grande magnitude considérée comme des contours de l'image et devient être supprimé. Les modèles exprimés sous forme des EDPs ont prouvé leur efficacité à restaurer des structures géométriques complexes, telles que les contours, les angles, les textures, les courbures, les jonctions, qui représentent des caractéristiques de perceptions visuelles importantes, au regard de la qualité d'images.

Ainsi, dans cette thèse on aborde une analogie entre les équations différentielles stochastiques (EDSs) et les EDPs, en s'inspirant principalement du travail de Barbu et Angelo dans [5] pour élaborer un nouveau modèle de diffusion qui permet d'améliorer les résultats de restauration. Les EDPs sont plus réalistes que celles basées sur les EDSs car ces dernières sont basées sur un processus aléatoire. Mais elles proposent des solutions acceptables pour la restauration de la composante géométrique, aussi dans une certaine mesure les textures dans une image.

Cette thèse est composée de cinq chapitres :

Le premier présente les définitions de l'image numérique et ses propriétés. On présente ensuite la dégradation d'une image numérique, on définit aussi les principaux critères de la qualité au traitement des images et puis on introduit différentes notions mathématiques associées à l'image numérique.

Le chapitre 2 traite de façon unitaire les principaux modèles d'EDP appliqués actuellement en restauration des images et en illustrant leur comportement diffusif local de chaque méthode. Les résultats de ces différents modèles sont présentés avec des exemples.

Le chapitre 3 est consacré à notre première contribution où on étudie la performance de différentes fonctions de diffusivité données en fonction du gradient d'image convolué avec un noyau gaussien. L'efficacité des différentes fonctions de diffusivité est analysée à l'aide d'images test puis on compare les résultats expérimentaux à travers des critères de qualité.

Le chapitre 4 est centré autour de notre travail principal. Cette proposition basée sur la diffusion non-linéaire qui préserve les structures géométriques importantes de l'image. En se fondant sur l'analyse des principales approches de diffusion anisotrope

présentées dans le deuxième chapitre on développe un modèle de restauration des images qui utilise trois fonctions de diffusivités robustes. Ces trois fonctions sont définies en fonction de la norme du gradient. On confirme à travers plusieurs tests, sur des images synthétiques, médicales et naturelles en niveaux de gris perturbées par le bruit blanc gaussien et le bruit poivre et sel la performance de notre modèle comparé en termes de PSNR et MSE aux meilleurs modèles classiques.

Le chapitre 5 introduit l'utilité des EDSs dans la restauration d'images et leurs propriétés principales. On présente un aperçu sur deux méthodes modélisées par les EDSs pour résoudre des problèmes de restauration. Par la suite, on améliore la performance du modèle de diffusion basé sur une EDP parabolique associée à une EDS, en utilisant l'équation de Kolomogrov, on propose une nouvelle fonction de drift pour contrôler le comportement diffusif du modèle de diffusion. On prouve l'efficacité de notre modèle par usage du PSNR et MSE ainsi que, on compare nos résultats obtenus des applications sur des images réelles à d'autres modèles existants.

Dans ce chapitre, on définit l'image numérique, ses propriétés et on présente comment on peut l'obtenir. On introduit les différentes sources de dégradation. On définit aussi les notions mathématiques associées au traitement d'images.

1.1 Définitions

Une image numérique est une représentation d'une scène de la vie réelle (une réalité 3D) créé par l'utilisation de dispositifs de capture d'images tel qu'un appareil photo numérique ou un scanner. L'opération qui consiste à discrétiser les positions des points de l'image continue vers l'image numérique est appelée l'échantillonnage. Cette opération reliée à la quantification qui discrétise l'image par des valeurs numériques adaptées pour l'échantillonnage. On peut présenter une image par un ensemble fini de points, ces derniers sont appelés pixels, chacun représente une valeur tonale (noir, blanc, niveaux de gris ou couleur).

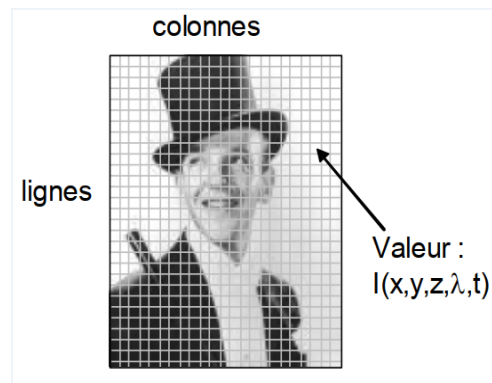


FIGURE 1.1 – Numérisation d'une image.

Mathématiquement, on définit l'image numérique par un tableau I contenant des pixels où chacun est décrit par la position (i, j) et sa valeur $I(i, j)$.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

FIGURE 1.2 – Représentation d'une image binaire

L'image numérique en niveaux de gris est définie par une matrice de valeurs réelles dans $[0, 255]$, telle que la valeur 0 représente le noir et la valeur 255 représente le blanc, voir figure (1.1).

L'image numérique est appelée binaire lorsque les pixels la constituant prennent les valeurs 0 et 1 où la valeur 0 représente le noir et la valeur 1 représente le blanc, voir Figure (1.2).

1.2 Propriétés d'une Image Numérique

L'image numérique est une représentation plus ou moins fidèle de l'image originale, elle présente de nombreuses propriétés très intéressantes :

- **Facilité de traitement** : les images numériques peuvent être échangées, stockées, manipulées très rapidement sans aucune perte d'information.
- **Facilité de préservation** : les images numériques permettent de garder une copie des images originales risquant une dégradation.

1.3 Représentation d'Image Numérique

On distingue principalement deux formes d'image : matricielle et vectorielle.

1.3.1 Images vectorielles

Ce sont des images dont la particularité est que chaque forme qui la compose est décrite mathématiquement à partir de points et de tangentes. Elles ne peuvent pas décrire une image trop complexe comme une photographie, mais elles sont tout à fait adaptées au rendu typographique, aux logos et autre formes composées de tracés simples.

1.3.2 Images matricielles

Les images sous cette forme sont utilisées généralement pour construire des photos numériques, elles reposent sur une grille de plusieurs pixels formant une image avec une définition bien précise. Lorsqu'on les agrandit trop, on perd la qualité de la dynamique des intensités de l'image. Toutes les images numérisées sont matricielles dans le cadre du traitement des images. Les images vectorielles ne sont utilisées que pour sauvegarder les résultats de typographie, voir figure (1.3).



FIGURE 1.3 – Image vectorielle et matricielle.

1.4 Dégradation d'une Image

On désigne par le terme "dégradation" tous les effets indésirables cumulés nuisant à la visibilité, au traitement ou à la préservation des images. Les dégradations ont plusieurs origines et l'accumulation des défauts rend difficile leurs séparations, elles ont des effets plus destructeurs sur les images de documents que sur toutes autres images dites naturelles.

1. Dégradation due à la capture

L'image numérique, même de qualité, n'est qu'une représentation imparfaite, à un moment donné, d'un objet physique. Tout est associé aux conditions de la prise d'image (placement, éclairage, réglages...) et de la qualité du numériseur (capteur linéaire ou matriciel, bruit du capteur, précision de la mécanique, algorithmes de prétraitement, codage interne des couleurs...).

2. Dégradations matérielles

On décrit particulièrement deux manières de numérisation : la numérisation directe d'une image originale et la numérisation indirecte faite à partir d'une copie d'une image originale. La numérisation de copies est plus simple à mettre

en œuvre et à automatiser mais la qualité des images produites est très inférieure à celle obtenue par la numérisation directe.

— **Les limites technologiques de la numérisation** : La numérisation d'image est une technique de codage du contenu de cette image. Elle réalise deux procédés fondamentaux [15] :

- **L'échantillonnage spatial** : est une discrétisation spatialement sur une grille dont l'aptitude est basée sur un nombre d'éléments photosensibles du capteur. La grille est constituée d'une information élémentaire appelée pixel. De plus, on peut voir le procédé d'échantillonnage comme la multiplication de l'intensité par un réseau de distributions de Dirac.
- **La quantification des intensités lumineuses** : la valeur de chaque pixel mesure le niveau de gris (ou couleur) quantifié sur cette surface élémentaire par le capteur. Généralement, le codage est effectué sur n bits permettant 2^n valeurs. Pour l'acquisition en couleur, chaque pixel $I(x, y)$ est alors codé par un vecteur à trois composantes (R, V, B) pouvant chacune prendre 2^n valeurs. Par conséquent, les couleurs ne sont pas toutes représentées lors de la phase de quantification.

3. Dégradation numérique

Les dégradations numériques sont les conséquences des choix technologiques délibérés ou accidentels comme le paramétrage du matériel, les prétraitements irréversibles et la compression avec perte des images. Elles sont aussi causées par une mauvaise utilisation du matériel par exemple, l'application d'une méthode de compression d'images couleur pour une image binaire.

1.5 Critères de la Qualité de l'Image

On a utilisé les différents critères d'évaluation de la qualité sur des images restaurées. On distingue trois critères principaux pour évaluer la qualité des images :

MSE (Mean Squard Error)

Le MSE est parmi les mesures les plus utilisées pour évaluer la qualité d'image reconstruite après traitement. Il calcule la moyenne des carrés des erreurs entre une image originale et une image restaurée.

$$MSE(I_0, I) = \frac{1}{HW} \sum_{i=1}^H \sum_{j=1}^W (I_{i,j}^0 - I_{i,j})^2 \quad (1.1)$$

avec I_0 et I : l'image originale et l'image restaurée respectivement et $H \times W$: la taille de l'image. Il est clair qu'un MSE nul indique que l'image I_0 et l'image I sont identiques, c'est-à-dire il n'existe pas de perte d'information.

PSNR (Peak Signal to Noise Ratio)

Le PSNR exprime le rapport entre la valeur maximale possible d'un signal et la puissance du bruit affectant la fidélité de sa représentation. Il est défini par :

$$PSNR(I_0, I) = 10 \log_{10} \left(\frac{R^2}{MSE(I_0, I)} \right) \quad (1.2)$$

où R représente la différence entre la plus grande et la plus petite valeur d'intensité dans l'image. Il est clair que le PSNR est défini en fonction de MSE, en revanche, son avantage par rapport au MSE est d'intégrer dans son calcul la profondeur R de l'image.

SSIM (Structural Similarity Index Measure)

Le SSIM mesure la similarité structurelle entre deux image, Il est basé sur le constat que la vision humaine est plus adaptée à la perception de la qualité d'information structurelle, il permet de mesurer efficacement les altérations de cette information entre une image référence et l'image restaurée. Il écrit sous la forme :

$$SSIM(I_0, I) = l^\alpha \cdot c^\beta \cdot s^\gamma \quad (1.3)$$

avec

$$\begin{cases} l(I_0, I) = \frac{2\mu_{I_0}\mu_I + c1}{\mu_{I_0}^2 + \mu_I^2 + c1} \\ c(I_0, I) = \frac{2\sigma_{I_0}\sigma_I + c2}{\sigma_{I_0}^2 + \sigma_I^2 + c2} \\ s(I_0, I) = \frac{2\sigma_{I_0I} + c3}{\sigma_{I_0}^2 + \sigma_I^2 + c3} \end{cases} \quad (1.4)$$

où l^α est le terme de comparaison de luminance, c^β est le terme de contraste et s^γ est le terme de comparaison des structures. Avec α, β, γ sont des paramètres qui définissent l'importance de chaque terme. Pour plus de détails voir [18] et [66]. Le SSIM prend des valeurs entre $[0, 1]$, si le SSIM est égal à 0, il n'y a aucune similarité entre les deux images I_0 et I . Inversement, lorsque SSIM est égale à 1, on retrouve que les deux images I_0 et I sont identiques.

1.6 Notions Mathématiques

On considère Ω l'ensemble borné de tous les points possibles de l'image. On suppose qu'une image I comme une fonction :

$$\begin{aligned} I : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow I(x, y). \end{aligned}$$

Pour simplifier la lecture des notations de dérivées successives d'images, nous écrivons les fonctionnelles sans les variables et on remplace parfois $I(x, y)$ par I . Soit $I \in$

$\mathbb{C}^2(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t}(x, y) = I_t \\ \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = I_x \\ \frac{\partial I}{\partial y}(x, y) = I_y \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x, y) = I_{xx} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(x, y) = I_{yy} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}(x, y) = I_{xy} \end{cases}$$

La courbe d'intensité constante de l'image représente la ligne de niveau, notée par $I(x, y) = c$, où le point $(x, y) \in \Omega$. Le gradient de l'image notée par $\nabla I = (I_x, I_y)^t$ est perpendiculaire à la courbe d'intensité. La grandeur du $\|\nabla I\|$ nous informe sur le niveau des variations de l'image. On peut définir la divergence et le laplacien de l'image par :

$$\begin{cases} \text{div} I = I_x + I_y \\ \Delta I = \text{div}(\nabla I) = I_{xx} + I_{yy} \end{cases} \quad (1.5)$$

On note par η la direction parallèle au gradient (vecteur normal) et ξ la direction orthogonale au gradient (vecteur de la tangente) c'est-à-dire $\eta \perp \xi$ (voir la figure (1.4)).

$$\begin{cases} \eta = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} = \frac{1}{\|\nabla I\|} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} \\ \xi = \frac{\nabla^\perp I}{\|\nabla I\|} = \frac{1}{\|\nabla I\|} \begin{pmatrix} -I_y \\ I_x \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.6)$$

Ainsi, on note les dérivées directionnelles premières d'une image I par :

$$\begin{cases} I_\eta = I_x \times \cos \vartheta + I_y \times \sin \vartheta \\ I_\xi = I_y \times \cos \vartheta - I_x \times \sin \vartheta \end{cases} \quad (1.7)$$

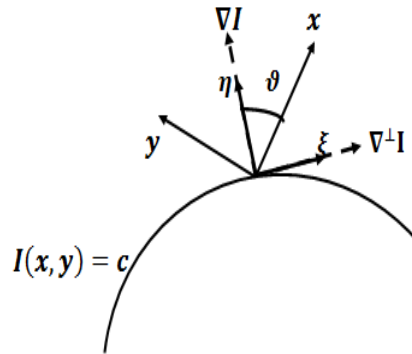


FIGURE 1.4 – Représentation des directions locales sur la ligne de niveau $I(x, y) = c$.

et les dérivées directionnelles secondes d'une image notées par :

$$\begin{cases} I_{\eta\eta} = \eta^t H \eta = \frac{1}{\|\nabla I\|} \begin{pmatrix} I_x & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} \\ I_{\xi\xi} = \xi^t H \xi = \frac{1}{\|\nabla I\|} \begin{pmatrix} -I_y & I_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_y \\ I_x \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.8)$$

où H est la matrice Hessienne d'une image I .

1.7 Courbure

En supposant que $\nabla I \neq 0$, on indique souvent par C la courbure d'une ligne de niveau définie par :

$$C(x, y) = \frac{1}{|\nabla I|^3} H I (\nabla^\perp I, \nabla^\perp I)(x, y) \quad (1.9)$$

avec

$$\nabla^\perp I = \left(-\frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial x} \right).$$

Ceci est équivalent à :

$$C(x, y) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right) = \frac{I_{\xi\xi}}{|\nabla I|}(x, y), \quad (1.10)$$

On peut montrer que $C(x, y)$ est la courbure de la ligne de niveau passant par (x, y) c'est à dire l'inverse du rayon du cercle osculateur à la courbe $\{I(x, y) = c\}$ au point (x, y) . Pour plus de détails sur la structure locale de l'image, voir [35].

1.8 Quelques Espaces Fonctionnels

1.8.1 Espaces de Hilbert

Produit scalaire

Définition 1.8.1. Soit \mathbb{H} un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur \mathbb{H} est une forme bilinéaire de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ dans \mathbb{R} telle que $\forall x, y$ et $z \in \mathbb{H}$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, le produit scalaire vérifie :

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
3. $\beta \langle x, y \rangle = \langle \beta x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle = 0$, si $x = 0$.

Définition 1.8.2. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel \mathbb{H} muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme $(u, u)^{\frac{1}{2}}$ (voir [14]).*

Espaces de Lebesgue \mathbb{L}^p

Définition 1.8.3. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n muni de la mesure de Lebesgue dx , $p > 0$ un nombre réel avec $1 \leq p < \infty$. On pose*

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } |f|^p \in \mathbb{L}^1(\Omega)\}$$

On note

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.11}$$

est une semi norme.

Définition 1.8.4. *On pose*

$$\mathbb{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{\mathbb{L}^\infty} = \text{Inf} \{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

est une norme, pour plus de détail voir [14]

1.8.2 Espace des fonctions continûment différentiables

Définition 1.8.5. *Soit Ω est un sous-espace de \mathbb{R}^n , on définit $\mathbb{C}^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k -fois continûment différentiables [40] :*

$$\mathbb{C}^k(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ est } k\text{-fois continûment différentiables}\}.$$

Le support d'une fonction continue $f(x)$ définie sur \mathbb{R}^n est l'ensemble

$$\text{supp}(x) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

1.8.3 Espaces de Sobolev

L'espaces de Sobolev $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$.

Définition 1.8.6. L'espace de Sobolev $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ défini par

$$\mathbb{W}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^p(\Omega); \exists g \in \mathbb{L}^p \text{ telle que } \int_I u\varphi' = \int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathbb{C}_c^1 \right\}.$$

On pose

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$$

Pour $u \in \mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$ on note $u' = g$.

L'espace $\mathbb{W}^{1,p}$ est muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}} = \|u\|_{\mathbb{L}^p} + \|u'\|_{\mathbb{L}^p}.$$

L'espace \mathbb{H}^1 est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{\mathbb{H}^1} = (u, v)_{\mathbb{L}^p} + (u', v')_{\mathbb{L}^p},$$

la norme associée

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1} = \left(\|u\|_{\mathbb{L}^p}^2 + \|u'\|_{\mathbb{L}^p}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $\mathbb{W}^{1,2}$ (voir [14]).

L'espace $\mathbb{W}_0^{1,p}$

Définition 1.8.7. Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $\mathbb{W}_0^{1,p}$ la fermeture de $\mathbb{C}_c^1(\Omega)$ dans $\mathbb{W}^{1,p}(\Omega)$. On note $\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \mathbb{W}_0^{1,2}(\Omega)$.

L'espace $\mathbb{W}_0^{1,p}$ est muni de la norme introduite par $\mathbb{W}^{1,p}$, l'espace \mathbb{H}_0^1 est muni du produit scalaire introduit par \mathbb{H}^1 .

L'espace $\mathbb{W}_0^{1,p}$ est un espace de Banach séparable. L'espace \mathbb{H}_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

1.8.4 Espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variation bornée

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n .

Définition 1.8.8. Soit $u \in \mathbb{L}^1(\Omega)$. On dit que u est une fonction à variation bornée dans Ω si la dérivée de u au sens des distributions est une mesure de Radon finie, telle que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi dD_i x, \forall \varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega), i = 1, \dots, n$$

avec $Du = (D_1 u, \dots, D_n u)$ dans Ω .

L'espace vectoriel de toutes les fonctions à variation bornée est noté $BV(\Omega)$ (voir [14] et [50]).

$$BV(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^1(\Omega) : TV(u, \Omega) < \infty\}$$

Définition 1.8.9. Soit $u \in \mathbb{L}_{loc}^1(\Omega)$. La variation totale de u dans Ω est définie par

$$TV(u, \Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \cdot \operatorname{div} \varphi dx, \varphi \in \mathbb{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Cette norme mesure les éventuelles oscillations représentant le bruit dans une image (voir [3]).

Proposition 1.8.1. L'espace $BV(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + TV(u, \Omega).$$

est un espace de Banach (voir [1]).

1.9 Rappels et Calcul Stochastique

Dans cette section on introduit quelques notions fondamentales liées aux processus stochastiques et on commence par les définir.

1.9.1 Processus stochastique

Définition 1.9.1. [38] On appelle processus aléatoire $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une famille de variables aléatoires indexées par \mathbb{R}_+ , toutes ces variables étant définies sur le même espace de probabilité (Ω, F, P) . Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $X_t(\omega)$ est appelée trajectoire.

Définition 1.9.2. On dit qu'un processus X_t est à accroissements indépendants et stationnaires si :

1. $X_t - X_s \perp F_s^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ (indépendance).
2. $X_t - X_s \approx X_{t+s} - X_0, \forall t > s \geq 0$ (stationnarité).

Définition 1.9.3. (filtration naturelle) [26] La filtration naturelle d'un processus stochastique $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, notée F_t^X est la famille croissante de tribus engendrées par $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$ c.à.d :

$$F_t^X = \sigma \{X(s), 0 \leq s \leq t\}$$

1.9.2 Martingales

Définition 1.9.4. [78] On suppose donné un espace de probabilité filtré $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$. Soit X_t un processus adapté et intégrable, on dit que X_t est :

1. Une martingale si :

$$\mathbb{E}(X_t/F_s) = X_s, \forall 0 \leq s \leq t$$

2. Une sur-martingale si :

$$\mathbb{E}(X_t/F_s) \leq X_s, \forall 0 \leq s \leq t$$

3. Une sous-martingale si :

$$\mathbb{E}(X_t/F_s) \geq X_s, \forall 0 \leq s \leq t$$

1.9.3 Mouvement Brownien

Le mouvement brownien, ou processus de Wiener, joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines. Il a été introduit pour la première fois en 1827 par Rebert Brown en observant des mouvements de grains de pollen dans un liquide.

Mouvement Brownien Standard

Définition 1.9.5. [38] Un mouvement brownien standard est un processus aléatoire à temps continu $(W_t, \forall t \in \mathbb{R}_+)$ tel que :

1. $W_0 = 0$ p. s.
2. (W_t) accroissements indépendants et stationnaires.
3. $(W_t) \approx N(0, t), \forall t > 0$.

Cette définition permet de démontrer la propriété que (W_t) est à trajectoires continues.

1.9.4 Formule d'Itô

Considérons une intégrale stochastique de la forme :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dW(s), t \in [0, T], \quad (1.12)$$

où X_0 est indépendante du mouvement Brownien, $a(s, X(s))$ et $b(s, X(s))$ sont des fonctions non anticipatives satisfaisant :

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |a(s, X(s))| ds < \infty\right) = 1$$

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |b(s, X(s))|^2 ds < \infty\right) = 1$$

Théorème 1.9.1. [47] Soit $u :]0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continûment différentiable par rapport à t et deux fois continûment différentiable par rapport à x . Alors le processus stochastique $Y_t = u(t, x)$ satisfait l'équation suivante :

$$Y(t) = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s, X(s)) ds + \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X(s)) a(s, X(s)) ds$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s, X(s)) b(s, X(s)) dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, X(s)) b^2(s, X(s)) ds.$$

(1.13)

Remarque 1.9.1.

— La formule d'Itô s'écrit aussi sous forme différentielle suivante :

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial u}{\partial x} [a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_s]$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t) b^2(t, X_t) dt.$$

(1.14)

— Un moyen mnémotechnique pour retrouver la formule est de l'écrire sous la forme :

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dX_t^2.$$

(1.15)

où dX_t^2 se calcule en utilisant les règles :

$$dt^2 = dt dW_t = 0 \quad \text{et} \quad dW_t^2 = dt.$$

EDPs en Traitement d'Images Numériques

Dans ce chapitre, on essaye de donner l'utilité des EDPs et des méthodes variationnelles en traitement d'images ainsi que leurs effets principaux, notamment ceux associés à la vision par ordinateur. On rappelle aussi quelques travaux en restauration d'images basés sur les EDPs.

2.1 Restauration d'images et EDPs

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) jouent un grand rôle en traitement d'images. Par la comparaison avec des méthodes variationnelles, on remarque que plusieurs modèles à base d'EDPs présentent des avantages visuels à la fois en théorie et en pratique. Premièrement, elles permettent de gérer et de traiter des caractéristiques géométriques importantes comme par exemples les contours, les angles, les courbures et les régions. Ainsi, les traitements par EDPs ont montré leur efficacité à réduire le bruit tout en préservant la netteté des contours. Elles peuvent simuler fondamentalement deux processus dynamiques significatifs qui sont la diffusion linéaire et non linéaire. On va effectuer dans cette section un aperçu d'une étude des méthodes connues dans le domaine du traitement d'images numériques.

2.2 Débruitage d'image

Le processus de débruitage d'image est une tâche qui a retenu beaucoup d'intérêt dans le domaine de la restauration. La diffusion linéaire est une des méthodes du lissage d'images ainsi que c'est un type de filtrage appliqué de manière identique sur tous les pixels de l'image. De plus, il a été démontré historiquement que cette méthode est une des premières à base d'EDP afin d'éliminer le bruit de l'image. La diffusion non-linéaire est une technique de traitement avec une direction privilégiée à travers une fonction de la norme du gradient de l'image. Fondamentalement, le domaine du débruitage d'image se distingue par deux types de diffusion : la diffusion isotrope et la diffusion anisotrope.

2.2.1 Diffusion isotrope

Tikhonov [57] propose de minimiser la somme de toutes les variations de fortes et de faibles intensités de l'image, et donc le problème formalisé par Tikhonov est défini par :

$$I_{\text{restaurée}} = \min E(I) = \int_{\Omega} \|\nabla I(x, y)\|^2 dx dy, \quad (2.1)$$

D'après la méthode de résolution d'Euler-Lagrange, l'équation (2.1) devient également l'équation qui est connue par l'équation de la chaleur donnée par :

$$\begin{cases} I_t = \Delta I \\ I(0, x, y) = I_0(x, y), \end{cases} \quad (2.2)$$

I_0 l'image initiale.

L'équation de la chaleur (2.2) est considérée comme un modèle classique de diffusion linéaire où le lissage de bruit par l'application de ce type de diffusion est identique en tous les pixels de l'image. Koenderink [27] a remarqué l'équivalence entre l'évolution de l'équation de la chaleur à un temps t et la convolution avec un noyau Gaussien d'écart-type $\sigma = \sqrt{2t}$:

$$I_t = \Delta I \iff I_t = I * G_{\sqrt{2t}} \quad (2.3)$$

où $G_{\sqrt{2t}}$ est le filtre gaussien d'écart type $\sigma = \sqrt{2t}$:

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}.$$

Le lissage linéaire qui est basé sur l'EDP de la chaleur réduit de manière progressive toutes les variations de l'image, ce qui produit l'image floue (figure (2.1)).

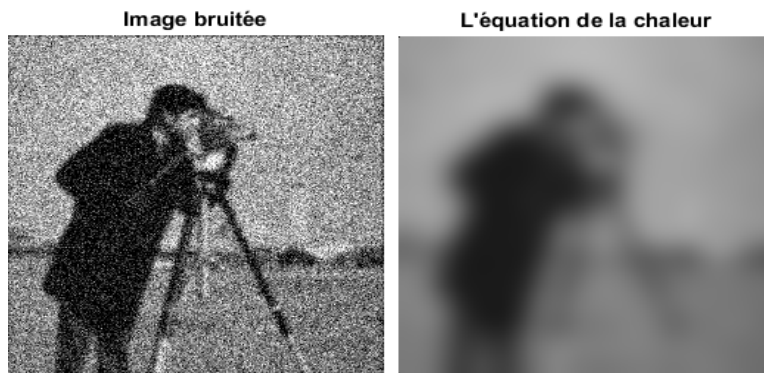


FIGURE 2.1 – Résultat de l'équation de la chaleur après 200 iterations.

L'EDP de la chaleur permet de faire une diffusion isotrope sur toutes les directions et tous les points de l'image en commençant par le bruit considéré comme les variations de faibles intensités, où le lissage s'effectue indistinctement sur toutes les variations de l'image, ce qui explique que l'EDP de la chaleur ne contrôle pas la vitesse de diffusion sur toutes les variations de l'image et donc la diffusion s'effectue de manière isotrope, voir le figure (2.1)

2.2.2 Diffusion anisotrope

La raison fondamentale qui a poussé de nombreux chercheurs à proposer des modèles basés sur les EDPs non linéaire est l'inconvénient de diffusion isotrope qui rend le contenu de l'image flou. L'objectif de cette proposition repose principalement sur l'élimination du bruit tout en préservant les contours et les structures essentielles de l'image où le traitement est fort à l'intérieur des parties homogènes et faible dans les parties non-homogènes. Dans la littérature, Perona et Malik [48] sont les premiers à changer la diffusion isotrope par une diffusion anisotrope ce qui correspond à un lissage basé sur une EDP non linéaire qui s'écrit :

$$\begin{cases} I_t = \operatorname{div} (g(\|\nabla I\|) \nabla I) \\ I(t, x, y) = I_0(x, y), \end{cases} \quad (2.4)$$

où $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante. Elle est bien connue sous le nom de fonction de diffusivité, la fonction g prend la valeur 1 dans les zones homogènes (la norme du gradient est nulle) et le long des contours (zones non homogènes), la fonction g est nulle. Perona et Malik ont proposé deux formes de la fonction g dans [48] :

$$g(\|\nabla I\|) = \exp\left(-\frac{\|\nabla I\|^2}{k^2}\right), \quad (2.5)$$

et

$$g(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{k^2}}. \quad (2.6)$$

Le principe de la fonction g nécessite l'utilisation du paramètre adaptatif k qui permet de mieux distinguer les points de deux régions distinctes dans une image où la valeur de la norme de gradient de l'image I est assez supérieure à k ce qui signifie que la diffusion s'effectue le long des variations de fortes intensités (contours, coins,...), dans ce cas la diffusion est stoppée de telle sorte à préserver des caractéristiques fondamentales de fortes gradient. Dans le cas inverse, si la norme est strictement inférieure à k , la fonction de diffusivité g prend alors la valeur 1 ainsi la diffusion devient isotrope ce qui réalise un lissage de bruit très fort.

La Figure (2.2) présente un résultat pratique du modèle de Perona-Malik avec deux valeurs de k où on remarque que ce modèle lisse bien le bruit dans les zones

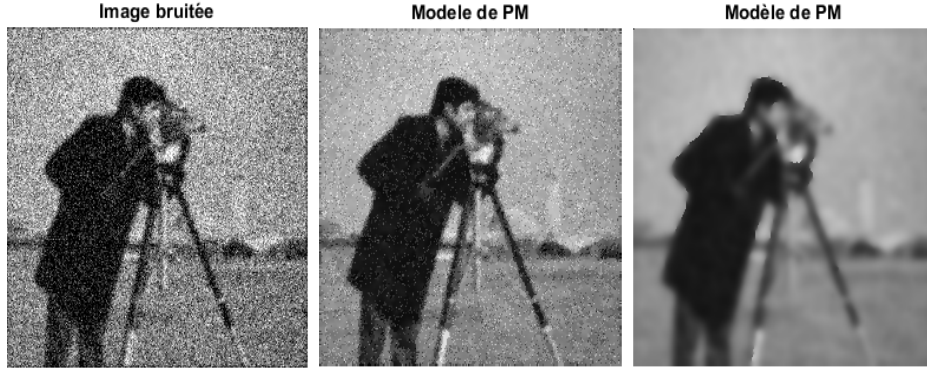


FIGURE 2.2 – Illustration des résultats du modèle de PM après 30 itérations pour deux valeurs de k différentes.

uniformes tout en gardant les contours aussi il permet de rehausser le bruit sur les structures de fortes intensités de l'image.

Catté et al. [16] sont les premiers à remarquer l'absence de justification théorique de stabilité, de l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation (2.4). Ils proposent la convolution du noyau gaussien avec le gradient de l'image, ils donnent une version régularisée du problème théorique de PM pour rendre le problème bien posé. L'équation modifiée par Catté et al. est :

$$\begin{cases} I_t = \operatorname{div} (g(\|\nabla I * G_\sigma\|) \nabla I) \\ I(t, x, y) = I_0(x, y). \end{cases} \quad (2.7)$$

La Figure (2.3) montre, sur une image naturelle, les différences entre le modèle de PM (l'équation (2.4)) et le modèle de Catté et al. (l'équation (2.7)). On constate que la qualité de l'image restaurée par l'équation (2.7) est très nette par rapport à l'équation de Perona et Malik, où l'image de Catté et al., n'a pratiquement pas évoluée après 50 itérations.

Whitaker et Pizer introduisent dans [68] et [76] la définition générale de l'approche de Catté et al. en proposant le paramètre d'échelle σ comme variable en fonction du temps :

$$\sigma = \sigma(t). \quad (2.8)$$

Whitaker et Pizer formalisent le nouveau modèle de diffusion qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div} [g(|G_{\sigma(t)} * \nabla I|) \nabla I], \text{ sur } [0, T] \times \Omega \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y). \end{cases} \quad (2.9)$$

Les auteurs s'intéressent aussi au seuil de diffusion k , ils montrent que k doit être



FIGURE 2.3 – Comparaison entre le modèle de PM et de Catté et al. pour une image bruitée avec un bruit gaussien ($m = 0$, $v = 0.03$). Les résultats sont obtenus après 50 iterations.

proposé avec des contraintes pour éviter l'effet escalier. En pratique, Whitaker et Pizer ont défini le seuil de diffusion par

$$k = \beta \sqrt{\text{moyenne}(|\nabla I|^2)}, \quad (2.10)$$

où $\beta \in [0.6, 1.2]$. Dans [76] on trouve d'autres propositions du paramètre d'échelle σ proposées par Whitaker :

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \alpha t, \quad (2.11)$$

ou bien

$$\sigma(t) = \sqrt{\sigma_0 - 2\alpha t}. \quad (2.12)$$

On remarque que les expressions (2.11) ou (2.12) sont deux fonctions décroissantes au cours du temps avec α une constante qui contrôle la vitesse de décroissance de $\sigma(t)$. Le comportement du paramètre d'échelle rend le modèle de diffusion plus compétitif en comparaison avec le modèle Catté et al.. L'introduction de la fonction $\sigma(t)$ permet de restaurer des objets suffisamment grands sans supprimer leurs détails, par contre le modèle de Catté et al. les supprime.

Yuan et Wang [77] présentent un modèle de diffusion anisotrope en utilisant une combinaison des trois fonctions de diffusivité au lieu de la fonction de Perona-Malik. Les auteurs introduisent une méthode de restauration d'image basée sur l'équation suivante :

$$\begin{cases} I_t = \text{div}[(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3) \nabla I], \\ I(t, x, y) = I_0(x, y), \end{cases} \quad (2.13)$$

où $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$ est une combinaison des trois fonctions de diffusion, λ_1 , λ_2 et λ_3 sont trois constantes de régularisation.

Dans l'équation(2.13), les fonctions g_1 , g_2 et g_3 sont des fonctions décroissantes, telle que :

$$g_1 (|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I|}{k}\right)^2}, \quad (2.14)$$

$$g_2 (|\Delta I|) = e^{-S} \text{ avec } S = \frac{(\Delta I)^2}{\left(\sqrt{(\nabla I)^2 + 1}\right)^3}, \quad (2.15)$$

et

$$g_3 = e^{-H_t} \quad (2.16)$$

avec

$$H_t = - \int \int_{\Omega_i} p_l(x, y) \log p_l(x, y) dx dy, \quad (x, y) \in \Omega_i \quad (2.17)$$

où Ω_i représentent les sous espaces locaux voisins et $p_l(x, y)$ la densité de probabilité. Les résultats numériques montrent que le modèle non-linéaire de Yuan et Wang est capable d'améliorer l'image bruitée en comparaison avec le modèle de Perona et Malik.

La diffusion anisotrope introduite par Perona et Malik a fait l'objet de nombreux articles améliorés [7], [34], [54], [59], [67], [68]et [72] tels que [17] et [28] ont défini le comportement de la diffusion anisotrope de Perona et Malik le long des deux directions orthogonales ξ et η afin de mieux comprendre comment faire la restauration d'une image.

$$\begin{aligned} I_t &= g(\|\nabla I\|) I_{\xi\xi} + \left(g(\|\nabla I\|) + g'(\|\nabla I\|) \|\nabla I\|\right) I_{\eta\eta} \\ &= g_\xi I_{\xi\xi} + g_\eta I_{\eta\eta} \end{aligned} \quad (2.18)$$

où $I_{\xi\xi}$ est la diffusion dans la direction orthogonale au gradient et $I_{\eta\eta}$ la direction parallèle au gradient. On remarque que si $g_\xi > g_\eta$, le modèle devient la diffusion anisotropique dans la direction du gradient η et une diffusion forte suivant la direction ξ , par contre, la diffusion dans la direction η est devenue très faible ce qui conduit à préserver les contours de l'image.

2.2.3 Diffusion tensorielle

Dans le cadre de l'amélioration des images par des modèles basés sur les EDPs, Weickert [69] propose une nouvelle idée de diffusion connue sous le nom de diffusion tensorielle (ou matricielle). Le principe de cette diffusion repose sur l'utilisation de la matrice de diffusion M telle que celle-ci doit être symétrique et définie positive.

L'objectif de Weickert est de contrôler la diffusion sur les structures locales d'image tout en préservant ses caractéristiques géométriques. Cette diffusion est donnée par l'EDP suivante :

$$\begin{cases} I_t = \operatorname{div}(M\nabla I) \\ I(t, x, y) = I_0(x, y), \end{cases} \quad (2.19)$$

où M est une matrice 2×2 de diffusion. Le comportement de diffusion de Weickert est presque similaire à celle de Perona et Malik, la seule différence entre les deux : celle de Weickert est basée sur l'utilisation de la matrice M , par contre celle de Perona et Malik repose sur la fonction de diffusivité scalaire g . Dans l'équation (2.19), si

$$M = g(\|\nabla I\|) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la diffusion tensorielle devient la diffusion scalaire de Perona et Malik.

Kornprobst [30] a prouvé que la diffusion matricielle fait la combinaison linéaire entre la diffusion anisotropique et la diffusion isotropique.

$$\begin{aligned} I_t &= \operatorname{div}(M\nabla I) \\ &= \operatorname{div}((ag(\|\nabla I\|) + bId)\nabla I) \\ &= \operatorname{adiv}(g(\|\nabla I\|)\nabla I) + b\operatorname{div}(Id\nabla I) \\ &= \operatorname{adiv}(g(\|\nabla I\|)\nabla I) + b\Delta I \end{aligned} \quad (2.20)$$

où

$$M = (ag(\|\nabla I\|) + bId), \quad (2.21)$$

on remarque que le comportement de l'équation(2.20) aboutit à une transition entre le filtrage anisotropique sous la forme de Perona-Malik $\operatorname{adiv}(g(\|\nabla I\|)\nabla I)$ et le filtrage isotropique par l'équation de la chaleur $b\Delta I$.

De plus, la définition de la matrice de diffusion M introduite par Weickert [69] repose sur l'utilisation du tenseur T qui s'écrit sous la forme suivante :

$$T = \nabla I \cdot \nabla I^t = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_x & I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Weickert a étudié de manière intensive les modèles de diffusion qui consistent à utiliser des matrices de diffusion. Initialement, la série des méthodes de Weickert proposée dans [69] utilise une information locale qui règle le filtre de diffusion dont l'intensité dépend d'une information de la norme du gradient ou d'une notion de cohérence spatiale. Les deux méthodes issues de ces idées sont : la première est appelée Edge Enhancing Diffusion (EED) et la deuxième est appelée Coherence Enhancing Diffusion (CED) telle que l'EED se caractérise par un filtrage des images et permet de rehausser de manière sélective des contours [69] et [71], la CED est une technique très utile pour l'amélioration de la cohérence des textures dans des tâches de reconstruction des contours tels que les empreintes digitales [70],[72] et [74].

2.2.4 Diffusion par EED

Weickert [69] s'intéresse au rehaussement de contours et donc il a proposé la méthode d'EED qui permet une diffusion formulée par le modèle suivant :

$$\begin{cases} I_t = \text{div}(M_\sigma \nabla I) \\ I(t, x, y) = I_0(x, y), \end{cases} \quad (2.23)$$

où M_σ représente la matrice de diffusion. La décomposition de la matrice M_σ se fait dans une base orthonormale engendrée par les vecteurs propres V_1 et V_2 associés respectivement aux valeurs propres β_1 et β_2 .

$$M_\sigma = (V_1 \ V_2) \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^t \\ V_2^t \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

En utilisant les notions $I_{\sigma_x} = \frac{\partial I_\sigma}{\partial x}$ et $I_{\sigma_y} = \frac{\partial I_\sigma}{\partial y}$ avec $I_\sigma = G_\sigma * I$

$$\begin{cases} V_1 = \left(\frac{I_{\sigma_x}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}, \frac{I_{\sigma_y}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \right)^t \\ V_2 = \left(-\frac{I_{\sigma_y}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}, \frac{I_{\sigma_x}}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \right)^t \end{cases} \quad (2.25)$$

Les valeurs propres s'obtiennent

$$\begin{cases} \beta_1 = f(|\nabla I_\sigma|) \\ \beta_2 = f(0) \\ f(s) = \exp\left(-\frac{s^\alpha}{\alpha K^\alpha}\right), \end{cases} \quad (2.26)$$

où K est un paramètre de contraste et $\alpha \geq 1$ est une constante qui règle la vitesse de décroissance de la fonction de diffusion f . Les valeurs propres indiquent le comportement isotropique ou anisotropique de la diffusion selon les axes V_1 et V_2 dans l'image et les vecteurs propres indiquent la diffusion. Le traitement s'effectue le long de ces axes de vecteurs propres qui permettent de rehausser les contours de l'image.

Dans un autre travail de Weickert [71], il a fait d'autre proposition pour les valeurs propres β_1 et β_2

$$\begin{cases} \beta_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } |\nabla I_\sigma| = 0 \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{K}{|\nabla I_\sigma|}\right)^{2m}\right), & \text{si } |\nabla I_\sigma| > 0 \end{cases} \\ \beta_2 = 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

avec m une constante qui contrôle la diffusion autour des objets. Pour une meilleure cohérence dans la direction générale des orientations de l'image, Weickert [71] propose d'utiliser deux valeurs différentes pour β_1 et β_2 . Cette modification contribue considérablement au comportement de la diffusion selon les directions des vecteurs

propres où la diffusion de Weickert est très orientée et forte le long des contours pour renforcer la structure de toutes les directions de l'image.

Dans ce cas, il est à noter que l'équation (2.23) peut être vue comme l'équation (2.4) de Perona et Malik, si le paramètre d'échelle σ tend vers zéro et si $\beta_1 = \beta_2 = 1$, la diffusion tensorielle de Weickert permet de reproduire le comportement de la diffusion scalaire de Perona-Malik.

La Figure (2.4) illustre bien les différences entre l'EDP de Catté et al. et la méthode d'EED sur une image bruitée par un taux du bruit uniforme égal à 0.55, afin de comparer les résultats de ces filtres dans les mêmes conditions. On remarque de façon très claire que l'EED est capable de supprimer le bruit le long les contours.

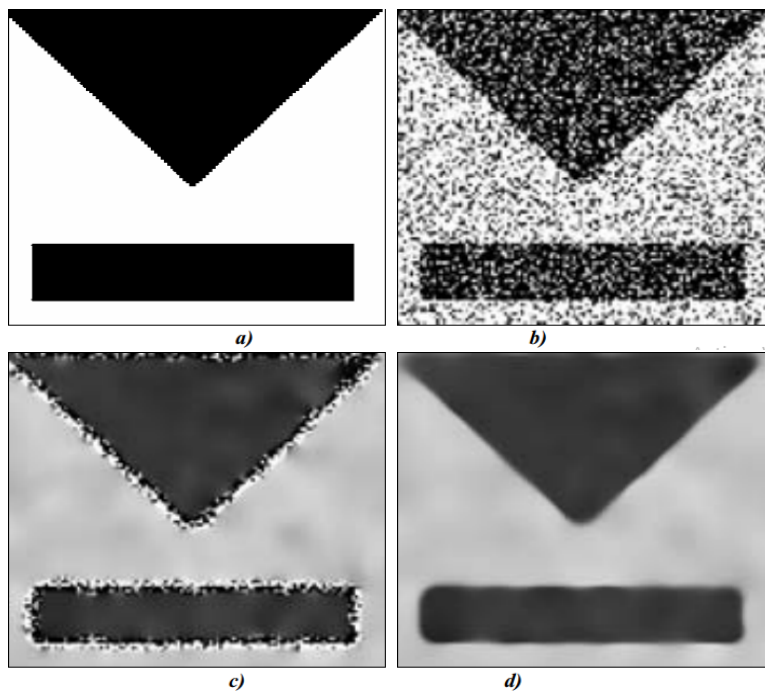


FIGURE 2.4 – Comparaison entre les différentes méthodes de diffusion anisotropes : a) image originale, b) image bruitée par bruit uniforme de taux 0.55, c) résultat de Catté et al. et d) résultat par EED de Weickert.

2.2.5 Diffusion par CED

Dans [70] Weickert a proposé la méthode CED, qui a pour objectif d'augmenter la cohérence des structures de l'image. Il a développé cette approche dans [72] et [74], la CED consiste à utiliser le tenseur de structure qui joue un rôle central en extrayant une information d'orientation selon les structures allongées dans l'image texturée.

Weickert a utilisé la même équation de diffusion tensorielle (2.23), la différence qui existe avec la méthode CED est la manière de construire la matrice de diffusion M . Pour calculer cette matrice il faut trouver d'abord les vecteurs et les valeurs propres du tenseur T_σ^ρ

$$T_\sigma = \nabla I_\sigma \cdot \nabla I_\sigma^T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x \partial y} & \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

De plus, Weickert propose d'augmenter la cohérence des axes principaux des tenseurs en tenant compte des orientations des tenseurs voisins. Pour cela, il propose de répéter la convolution du tenseur de structure par un noyau Gaussien d'écart-type ρ

$$T_\sigma^\rho = G_\rho * T_\sigma = \begin{pmatrix} G_\rho * \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial x}\right)^2 & G_\rho * \frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x \partial y} \\ G_\rho * \frac{\partial^2 I_\sigma}{\partial x \partial y} & G_\rho * \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Le tenseur de structure T_σ^ρ est une matrice symétrique et possède les vecteurs propres U_1 et U_2 . En utilisant la notion

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Les deux valeurs propres sont définies par :

$$\begin{cases} \varsigma_1 = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} + \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right) \\ \varsigma_2 = \frac{1}{2} \left(t_{11} + t_{22} - \sqrt{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2} \right) \end{cases} \quad (2.31)$$

Ainsi, Weickert utilise la différence $\varsigma_1 - \varsigma_2$ comme indicateur de cohérence où les zones uniformes sont caractérisées par $\varsigma_1 = \varsigma_2 = 0$, les structures linéaires par $\varsigma_1 > \varsigma_2 = 0$ et les angles par $\varsigma_1 \geq \varsigma_2 \gg 0$. Pour favoriser la cohérence locale le long des structures, les valeurs propres peuvent être déterminées par

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha \\ \beta_2 = \begin{cases} \alpha & \text{si } t_{11} = t_{22} \text{ et } t_{12} = 0 \\ \alpha + (1 - \alpha) \exp\left(-\frac{C}{(t_{11} - t_{22})^2 + 4t_{12}^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases} \quad (2.32)$$

le facteur C représente un seuil et il est choisi égal à 1 par Weickert pour $\varsigma_1 - \varsigma_2 \gg C$, le filtrage est essentiellement unidirectionnel.

Ensuite, la matrice de diffusion est déterminée par :

$$M = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

La matrice M permet de guider le filtrage dans les images de textures telle que dans les zones uniformes la diffusion est isotrope avec une vitesse contrôlée par la constante positive, par contre, sur les textures allongées le comportement de la diffusion est fortement anisotrope. L'anisotropie se caractérise par le rapport de deux valeurs propres $\frac{\beta_1}{\beta_2}$, lorsque la diffusion s'effectue sur les textures unidirectionnelles la différence $\varsigma_1 - \varsigma_2$ est nulle et ce rapport est borné par $\frac{1}{\alpha}$.

Kimmel et al. [31], [56] et [55] proposent de modifier les valeurs propres de la matrice de diffusion M donnée par Weickert, ce qui implique que les auteurs modifient aussi les vecteurs propres de cette matrice et renoncent à la convolution avec un noyau gaussien d'écart-type σ dans (2.28) ($\sigma = 0$). Dans ce cas, les auteurs proposent la diffusion inverse sur les axes orthogonaux aux contours pour augmenter le contraste locale des structures de l'image. Pour favoriser le processus de diffusion le long des structures, les valeurs propres de (2.33) sont :

$$\begin{cases} \beta_1 = -\frac{1}{\alpha} \\ \beta_2 = \alpha, \end{cases} \quad (2.34)$$

Parmi les méthodes de diffusion matricielle on a aussi la méthode de Tschumperlé [60],[61], [62] et [63]. Il propose une nouvelle formulation de la diffusion matricielle qui a pour objectif d'améliorer la restauration d'images bruitées. Il substitue l'opérateur de divergence par la trace et le vecteur de gradient par la matrice Hessienne, cette formulation est donnée par :

$$\begin{cases} I_t = \text{trace}(MH) \\ M = \frac{1}{\sqrt{1+\beta_1+\beta_2}}U_1U_1^t + \frac{1}{1+\beta_1+\beta_2}U_2U_2^t, \end{cases} \quad (2.35)$$

où U_1 , U_2 et β_1 , β_2 sont respectivement les vecteurs et valeurs propres et H est la matrice Hessienne.

L'équation (2.35) peut être interprétée plus facilement comme un processus de combinaison de dérivées secondes :

$$I_t = \frac{1}{1 + \beta_1 + \beta_2}I_{UU} + \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_1 + \beta_2}}I_{VV} \quad (2.36)$$

La CED avec la régularisation de Kimmel et al. va être stopée avant que la diffusion inverse n'introduise les effets indésirables. La CED de Weickert permet de rehausser la structure des contours de l'image.

La Figure(2.5), montre que les modèles de Kimmel et al. et celle de Weickert ne sont pas adaptés pour le filtrage des images bruitées. Par contre, l'approche de Tschumperlé permet un comportement isotrope dans les zones homogènes et anisotrope sur les variations de fortes intensités.

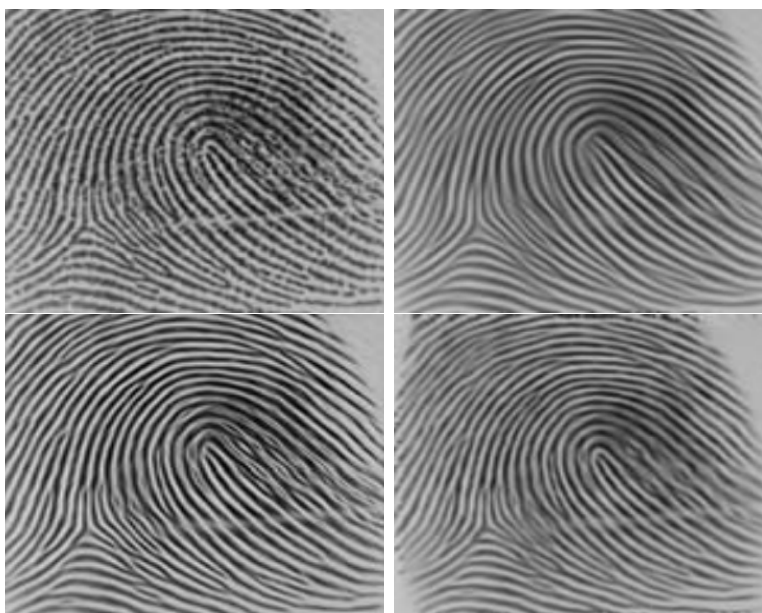


FIGURE 2.5 – Comparaison entre les différentes méthodes de CED. Première ligne de gauche à droite respectivement : l'image originale et le résultat de Weickert. Deuxième ligne de gauche à droite respectivement : le résultat de Kimmel et al. et le résultat de Tschumperlé

2.3 Modèles Variationnels

Dans ce contexte, on essaye de présenter les points qui lient les EDP et les modèles variationnels. L'amélioration d'une image via une EDP donnée peut être interprétée comme la résolution d'un problème variationnel. Morel et Solimini[42] développent des méthodes variationnelles pour la segmentation d'image à partir de l'exploitation des relations entre les méthodes de diffusion principales à base d'EDP et la méthode de segmentation générale de Mumford-Shah[44].

Après avoir mis en évidence le principe de ces méthodes. On définit et on présente la méthode variationnelle de Nordstrom[45] et ses points communs avec l'équation de filtrage isotropique. Ensuite, on va définir la méthode de traitement d'image par minimisation de la variation totale proposée par Rudin, Osher et Fatemi[51]. Toutes ces approches ont pour idée fondamentale de construire une énergie E en utilisant une fonction F adaptée au problème à résoudre.

Soit $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , pour une image définie sur Ω , la formule générale de E est donnée par

$$E = \int \int_{\Omega} F \left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.37)$$

Théoriquement, le problème variationnel consiste à déterminer un extremum pour l'énergie E , elle peut s'adapter à une équation différentielle. Si on suppose que $V_0(x, y)$ est un extremum de V , la fonction $V(x, y)$ peut être donnée par :

$$V(x, y) = V_0(x, y) + \epsilon \varphi(x, y), \quad (2.38)$$

où $\varphi(x, y) \in C^k(\Omega)$. Pour $\epsilon = 0$, la condition d'extremum est vérifiée, les conditions aux bords sont $\varphi(0, y) = \varphi(a, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0$.

En considérant que V est une fonction de x et y , l'équation(2.37) est une fonction de ϵ telle que :

$$E(\epsilon) = \int \int_{\Omega} F\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx dy, \quad (2.39)$$

et son extremum est obtenu par $E'(\epsilon) = 0$

$$E'(\epsilon) = \int \int_{\Omega} \frac{dF}{d\epsilon} dx dy = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial V} \varphi + \frac{\partial F}{\partial V_x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial V_y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2.40)$$

avec

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial V_x} \varphi \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial V_x} \right) + \frac{\partial F}{\partial V_x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.41)$$

de même pour la relation similaire de y , l'équation(2.40) devient :

$$E'(\epsilon) = \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial V_y} \right) \varphi dx dy + \int \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial V_x} \varphi \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial V_y} \varphi \right) \right) dx dy, \quad (2.42)$$

Les conditions aux bords impliquent

$$\int \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial V_x} \varphi \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial V_y} \varphi \right) \right) dx dy = 0, \quad (2.43)$$

pour que (2.43) soit vérifiée quelque soit $\varphi(x, y)$, ce qui est obtenu par l'équation de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial U_y} = 0. \quad (2.44)$$

l'équation (2.44) indique une condition nécessaire à respecter par le minimum de l'équation(2.37).

Dans beaucoup d'applications une résolution directe de l'équation de Euler-Lagrange n'est pas possible, une solution numérique s'obtient en démontrant la stabilité de l'EDP

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial V} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial V_y}, \quad (2.45)$$

l'interprétation de l'équation (2.45) peut être donnée comme un processus de descente du gradient qui opère sur la surface énergétique donnée par E . Si elle est convexe, la condition de stabilité du processus de minimisation est déterminée et ce processus converge vers le minimum. D'autre part, s'il existe beaucoup de minima locaux pour E , il faut que le processus de minimisation converge vers le minimum global.

2.3.1 Approche de Nordstrom

Dans cette partie, on présente une nouvelle approche de restauration d'image basée sur la minimisation d'une énergie et la résolution d'une EDP. Cette méthode est développée par Nordstrom [45] où son principe consiste donc à trouver le minimum de l'énergie E .

$$E_{V_0}(V, \nu) = \int \int_{\Omega} [\beta (V - V_0)^2 + \nu |\nabla V|^2 + \lambda^2 (\nu - \ln \nu)] dx dy, \quad (2.46)$$

où la fonction ν est définie sur Ω et représente le flou des contours telle que cette fonction est proche de 0 dans les zones non homogènes et égale à 1 dans les zones homogènes. Le premier terme est celui d'attachement aux données, le tout pondéré par le coefficient β . La diffusion est contrôlée par le terme $\nu |\nabla V|^2$ et le dernier terme de l'équation (2.46) est un terme de pénalisation des contours.

L'équation de Euler-Lagrange associée à l'intégrale (2.46) est :

$$\frac{\partial F}{\partial V} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial V_y} = 2\beta (V - V_0) - 2 \frac{d}{dx} (\nu V_x) - 2 \frac{d}{dy} (\nu V_y) = 0, \quad (2.47)$$

l'équation (2.47) conduit à

$$\beta (V - V_0) - \operatorname{div} (\nu \nabla V) = 0. \quad (2.48)$$

En procédant de façon similaire pour la fonction ν on trouve

$$|\nabla V|^2 + \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = 0, \quad (2.49)$$

la résolution de (2.49) par la méthode directe donne la fonction de diffusivité de Perona et Malik :

$$\nu = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla V|^2}{\lambda^2}}, \quad (2.50)$$

et la minimisation de (2.46) revient à l'EDP :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \operatorname{div}(f(|\nabla V| \nabla V) + \beta(V - V_0)), \quad (2.51)$$

Nordstrom a appelé l'équation(2.51) par "équation de diffusion biaisée" où cette équation combine le modèle de diffusion anisotrope de Perona-Malik et le terme d'attachement aux données qui permet de converger vers une solution V proche de V_0 .

2.3.2 Minimisation de la variation totale

Rudin, Osher et Fatemi [51] proposent une autre approche variationnelle qui repose sur la minimisation de la fonction d'énergie. Elle est donnée par :

$$E(I) = \int \int_{\Omega} \|\nabla I\| \, dx dy, \quad (2.52)$$

cette méthode nécessite des contraintes de telle sorte si I_0 représente l'image originale et I représente l'image restaurée, alors les contraintes s'écrivent :

$$\int \int_{\Omega} I \, dx dy = \int \int_{\Omega} I_0 \, dx dy, \quad (2.53)$$

et

$$\int \int_{\Omega} \frac{1}{2} (I - I_0)^2 \, dx dy = \sigma^2, \quad (2.54)$$

où σ représente l'écart-type du bruit blanc.

Pour des fonctions différentiables, on remarque que (2.52) représente la définition de la variation totale

$$TV(I) = \int \int_{\Omega} \|\nabla I\| \, dx dy. \quad (2.55)$$

Dans le processus de minimisation, le gradient est calculé par la norme \mathbb{L}^1 dans le but d'améliorer le modèle de Nordstrom. Le minimum de la fonction énergie dans BV peut être une fonction monotone. Ceci fournit simultanément un lissage du bruit et la préservation des contours de l'image, voir Figure(2.6).

Rudin, Osher et Fatemi remarquent que la contrainte(2.53) est automatiquement vérifiée et transforment le problème de minimisation avec des contraintes en un problème de minimisation sans contraintes :

$$E'(I) = E(I) + \lambda \left[\int_{\Omega} \int \frac{1}{2} (I - I_0)^2 dx dy - \sigma^2 \right]. \quad (2.56)$$

Avec des conditions aux bords de type de Neumann, le minimum de (2.52) est donné par une équation parabolique :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|} \right) - \lambda (I - I_0) \\ \frac{\partial I}{\partial \eta} = 0, \text{ sur } \partial \Omega. \end{cases} \quad (2.57)$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange qui est déterminé par

$$\lambda = -\frac{1}{2\sigma} \int_{\Omega} \left(|\nabla I| - \frac{\nabla I \cdot \nabla I_0}{|\nabla I|} \right) dx dy. \quad (2.58)$$

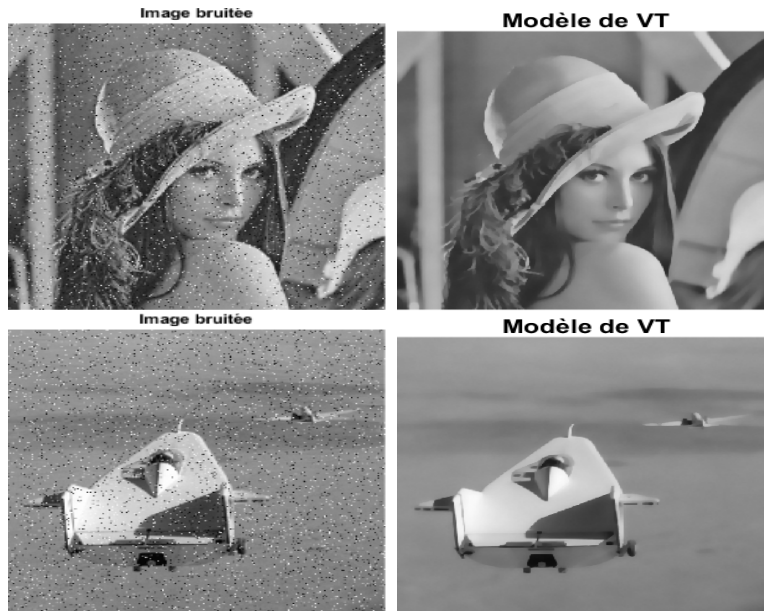


FIGURE 2.6 – Application du modèle de TV sur deux images bruitées par un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 0.05 et ces résultats obtenus après 25 itérations.

2.4 Rehaussement de Flou

Les modèles de diffusion par EDP permettent le traitement de certaines variations spatiales de l'image comme le rehaussement de flou. Le rehaussement consiste à renforcer les pixels utiles des contours tout en évitant de renforcer le bruit de l'image. Dans ce cadre, Osher et Rudin [46] sont les premiers à faire un modèle différentiel appelé le filtre de choc. Ce filtre s'applique surtout pour le rehaussement de la structure locale des contours flous dans l'image.

2.4.1 Filtre de choc

Parmi les méthodes existantes dans la littérature et appartenant à la catégorie des approches du rehaussement des structures de l'image, on a trouvé le filtre de Osher et Rudin qui est défini par :

$$I_t = -\text{sign}(\Delta I) \|\nabla I\|. \quad (2.59)$$

On remarque que si le signe du laplacien est positif, l'équation (2.59) réalise la formulation d'érosion de la forme :

$$I_t = -\|\nabla I\|, \quad (2.60)$$

mais si le signe du laplacien est négatif, l'équation (2.59) devient sous la forme de dilatation :

$$I_t = \|\nabla I\|. \quad (2.61)$$

La Figure(2.7) montre le comportement diffusif du filtre de choc (2.59) sur les points d'inflexion représentant le passage par zéro des dérivées secondes et ainsi à augmenter localement l'amplitude du contour.

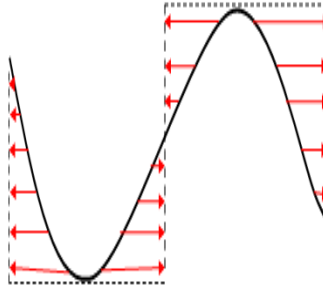


FIGURE 2.7 – Principe de filtre de choc (2.59) dans le cas 1D.

Dans le cas d'une image floue et bruitée, le filtre de choc de Rudin et Osher introduit un rehaussement pour toutes les variations de l'image sans distinction en commençant par les contours. Rudin et Osher [46] proposent à la place du Laplacien la dérivée seconde directionnelle $I_{\eta\eta}$ parallèle au gradient et qui joue un meilleur rôle de détecteur de contour. Ce filtre rend le traitement plus robuste face au bruit dans l'image. La formulation de ce nouveau filtre de Osher et Fatemi peut s'écrire comme suit :

$$I_t = -\text{sign}(I_{\eta\eta}) \|\nabla I\|. \quad (2.62)$$

Alvarez et al. [2] réalisent une diffusion plus robuste pour le contenu de l'image, notamment si elle peut restaurer les formes complexes et préserver les coins des objets. Ce lissage repose sur le signe de la dérivée seconde de $(G_\sigma * I)$ suivant la direction η , qui rend la détection des faibles variations sur le contour plus facile.

$$\begin{cases} I_t = -\text{sign}(C_{\eta\eta}) \|\nabla I\| \\ C = G_\sigma * I. \end{cases} \quad (2.63)$$

Cependant, (2.63) introduit également des inconvénients dans l'image issus de l'utilisation d'un noyau gaussien de dimension trop faible, il conduit à une suppression partielle du bruit dans l'estimation de la dérivée seconde. Inversement, l'utilisation d'un noyau gaussien de dimension très grande conduit à une suppression du bruit de manière efficace, mais conduit à introduire des structures très floues dans l'image, ce qui permet de déplacer les positions des points d'inflexions, ceci se traduit par la détection de faux contours.

On note aussi l'existence du filtre de choc de Weickert[75]. En utilisant l'équation (2.28) l'auteur formalise une EDP :

$$I_t = -\text{sign}(I_{VV}) \|\nabla I\|, \quad (2.64)$$

où V est le vecteur propre qui correspond à la valeur propre maximale du tenseur T_σ dans (2.28). Ce filtre repose sur l'utilisation de la dérivée directionnelle seconde I_{VV} suivant la direction principale V du tenseur T_σ calculé sur une image filtrée par un noyau gaussien d'écart-type σ vu précédemment. L'équation (2.64) produit un rehaussement de toutes les structures de l'image. Ce filtre permet aussi d'augmenter la cohérence des structures discontinues et de supprimer le bruit sur les contours de l'image.

Sur une image de texture comme par exemple l'empreinte digitale, elle est intéressante car elle contient majoritairement des structures parallèles, le filtre de choc de Weickert produit une performance très efficace particulièrement sur la structure locale des contours, mais sur des images contenant de nombreuses structures complexes. Ce filtre tend à déformer ces structures et à générer des allongements, ce qui explique que la diffusion n'est pas contrôlée.

Pour bien contrôler le comportement diffusif du filtre de Weickert, on peut ajouter un terme d'attachement aux données $|I - I_0|$.

Les auteurs dans [29] et [19] ont proposé une combinaison du filtre choc et la diffusion dans la même EDP pour simultanément rehausser le flou et diffuser le bruit. La formulation générale peut s'écrire comme suit :

$$I_t = -\text{sign}(\Delta I) \|\nabla I\| + \mu \Delta I. \quad (2.65)$$

Dans l'équation (2.65), le terme du filtre de choc produit un renforcement de la cohérence locale des contours et celui de la diffusion est utilisé pour lisser les zones de faible variation.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté beaucoup des types de diffusion à base d'EDP et d'une minimisation de l'énergie connus dans le domaine du traitement d'images. On a montré le comportement de chaque type de modèle, en présentant les avantages et les inconvénients de chacun. On a aussi remarqué que les résultats du modèle de Perona et Malik modifié par Catté et al. et le modèle de diffusion matricielle de Tschumperlé sont meilleurs comparativement aux autres modèles. En revanche, le modèle de diffusion scalaire ne lisse pas le bruit sur les contours, ainsi dans le chapitre suivant, on va présenter d'autres modèles pour améliorer l'efficacité de la diffusion pour mieux restaurer les contours d'image.

Évaluation d'un nouveau filtre anisotropique pour la restauration d'images basé sur Le modèle Perona-Malik

Le filtrage anisotrope non linéaire (NAF) est une technique d'amélioration de la qualité d'images basée sur une approche qui dépend d'une EDP. Elle a été introduite premièrement par PM en 1990 [48]. Le modèle PM est largement utilisé pour le débruitage d'images dans différents domaines d'application tels que la télévision par satellite, la vision par ordinateur et l'imagerie biomédicale [41]. Au cours des deux dernières décennies, ce modèle a montré des performances exceptionnelles en traitement d'images par rapport aux approches classiques de réduction du bruit dans l'image. Malgré cela, le modèle PM souffre de l'inconvénient connu sous le nom "Effet d'escalier". En fait, la réduction de cet effet peut améliorer la qualité de l'image restaurée par la préservation des détails et des structures fines à l'intérieur de l'image. Dans ce travail, les performances des cinq fonctions de diffusivité présentées dans [33] sont améliorées et comparées. Ces fonctions étudiées sont modifiées dans leur forme originale. Leur comportement est décrit à l'aide de différents types graphiques ; tandis que leurs performances sont comparées les unes aux autres. Enfin, l'efficacité des différentes fonctions de diffusivité est analysée à l'aide d'applications aux images naturelles.

3.1 Modèles d'EDPs pour l'amélioration d'images

Le filtrage par diffusion linéaire est la méthode d'EDPs la plus simple pour lisser les images. Il est construit sur le modèle de l'équation de la chaleur. Dans ce modèle de diffusion linéaire, la force de diffusion est identique dans toutes les directions. L'équation de la chaleur peut être appliquée à différents moments pour éliminer le bruit. En revanche, elle a été fréquemment critiquée car elle traite le bruit et les données originales de la même manière, elle ne réduit pas seulement le bruit, mais

rend très flou les principales caractéristiques de l'image, telles que les contours, ce qui les rend plus difficiles à identifier. La technique de diffusion anisotrope (AD) a été introduite comme une amélioration de la diffusion isotrope. Contrairement aux techniques précédentes, le modèle PM est capable de préserver les contours de l'image tout en supprimant le bruit. Depuis son introduction, de nombreuses recherches ont été faites. Catté et al. ont proposé en 1992 une modification du modèle PM où la diffusion est basée sur la convolution des gradients avec un noyau gaussien [16]. Rudin et Osher ont essayé d'améliorer l'équation de la chaleur en utilisant un filtre de chocs [46] en exploitant deux opérateurs différents pour créer un choc entre deux zones d'impact opposées, l'opérateur d'érosion est utilisé dans les zones à impact maximal tandis que l'opérateur de corrosion est appliqué dans les zones à impact minimum. Le signe du laplacien décide de l'appartenance d'un pixel donné aux deux zones. Weickert a introduit un filtre de choc basé sur un tenseur et un filtre de diffusion qui améliorent la cohérence [75]. Tian et al. ont proposé un processus de débruitage d'images utilisant une approche d'analyse itérative des valeurs propres basée sur la texture [58]. Liu et al. ont introduit un processus de diffusion anisotrope adaptatif basé sur un tenseur de structure [32]. Tsiotsios et Petrou ont donné une méthode pour améliorer l'efficacité des filtres de diffusion anisotropes grâce au bon choix des paramètres du filtre utilisé dans [64]. Maouni et Nouri ont proposé une restauration d'image basée sur un modèle p-gradient [39]. Barbu a formulé un schéma de diffusion anisotrope robuste pour l'élimination du bruit d'image [4]. Kamalaveni et al. ont proposé une technique de réduction du bruit d'image utilisant une variante du modèle PM avec différentes fonctions de diffusivité [33]. Barbu et Moroşanu ont défini une restauration d'image en utilisant un schéma basé sur une EDP parabolique non linéaire du second ordre [6].

3.2 Fonctions de Diffusivité

Kamalaveni et al.[33] ont analysé le modèle de diffusion non linéaire de PM (2.4), présentant la performance de cinq fonctions de diffusivité où ils ont étudié le comportement diffusif de chacune d'elles. Ces fonctions sont définies comme suit :

$$c_1(\|\nabla I\|) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\|\nabla I\|}{S} \right)^2 \right], & \text{si } \|\nabla I\| \leq S \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.1)$$

où $S = R\sqrt{2}$ et R est le paramètre de seuil.

$$c_2(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla I\|}{R} \right)^{\mu(\|\nabla I\|)}} \quad (3.2)$$

avec

$$\mu(\|\nabla I\|) = 2 - \frac{2}{1 + \left(\frac{\|\nabla I\|}{R}\right)^2} \quad (3.3)$$

$$c_3(\|\nabla I\|) = \begin{cases} 1 - e^{3.31488 \times \left(\frac{R}{\|\nabla I\|}\right)^8}, & \text{si } \|\nabla I\| \neq 0 \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$c_4(\|\nabla I\|) = e^{-\left(\frac{\|\nabla I\|}{R}\right)^2} \quad (3.5)$$

$$c_5(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla I\|}{R}\right)^2} \quad (3.6)$$

Ces fonctions ne permettent pas de fournir une diffusion vraiment contrôlée concernant les contours et les coins de l'image. Elles présentent encore des lacunes telles que ses inefficacités dans les zones où le bruit présente de fortes discontinuités.

Dans le but d'améliorer la performance de ces fonctions, on propose d'appliquer un noyau Gaussien au gradient de l'image. La convolution $G_\sigma * \nabla I$ induit à des vecteurs correctement orientés le long des contours comme dans les zones uniformes de l'image avec de faibles variations. Les cinq fonctions améliorées permettent de contrôler la diffusion le long des contours et de renforcer la continuité des structures géométriques de l'image simultanément. Elles s'écrivent sous les formes suivantes :

$$f_1(\|G_\sigma * \nabla I\|) = \begin{cases} (0.67) \times \left[1 - \left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{S}\right)^2\right], & \text{si } \|G_\sigma * \nabla I\| \leq S \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.7)$$

où G_σ est un filtre gaussien bidimensionnel avec le paramètre d'échelle σ , $S = R\sqrt{2}$ et R est le paramètre de seuil.

$$f_2(\|G_\sigma * \nabla I\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}\right)^{\mu(\|G_\sigma * \nabla I\|)}}, \quad (3.8)$$

avec

$$\mu(\|G_\sigma * \nabla I\|) = 3.65 - \frac{2}{1 + \left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}\right)^2}, \quad (3.9)$$

$$f_3(\|G_\sigma * \nabla I\|) = \begin{cases} 1 - e^{2.7176 \times \left(\frac{R}{\|G_\sigma * \nabla I\| + 0.53}\right)^8}, & \text{si } \|G_\sigma * \nabla I\| \neq 0 \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$f_4(\|G_\sigma * \nabla I\|) = e^{-\left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}\right)^2} \quad (3.11)$$

$$f_5 (\|G_\sigma * \nabla I\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}\right)^2} \quad (3.12)$$

3.2.1 Comportement diffusif des fonctions proposées

Comme ces fonctions sont conçues pour enlever le bruit des contours, réduire le bruit des zones uniformes et préserver les structures géométriques, les Figures (3.1) et (3.2) présentent le comportement diffusif de ces fonctions suivant les valeurs $\|G_\sigma * \nabla I\|$ et pour les deux différentes valeurs du seuil de diffusion.

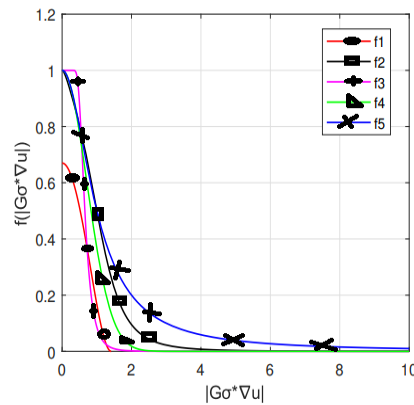


FIGURE 3.1 – La force de diffusion en fonction de la convolution du gradient de l'image avec un filtre gaussien bidimensionnel pour un paramètre de seuil $R = 1$.

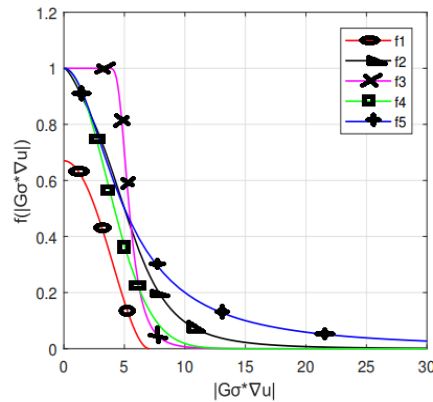


FIGURE 3.2 – La force de diffusion en fonction de la convolution du gradient de l'image avec un filtre gaussien bidimensionnel pour un paramètre de seuil $R = 5$.

La fonction f_1 arrête le processus de diffusion à la valeur la plus basse de $\|G_\sigma * \nabla I\|$ avant les quatre autres fonctions, elle permet donc un lissage rapide de l'image. Au début des courbes des fonctions f_2 , f_4 et f_5 , la force de diffusion est très grande où ces fonctions permettent un lissage rapide dans les zones homogènes, mais dans les zones non homogènes, la diffusion devient plus faible quand les valeurs du gradient de l'image sont plus élevées. La courbe de la fonction f_3 montre la pente la plus raide parmi toutes les autres courbes, ce qui montre que la diffusion de cette dernière fonction est très rapide. Lorsque on utilise une valeur plus élevée pour le paramètre de seuil R ($R = 5$), le comportement diffusif de toutes les fonctions de devient le même. Les Figures (3.1) et (3.2) illustrent aussi que si les valeurs de gradient plus élevées, la force de diffusion de ces fonctions est faible, ce qui conduit à préserver le contenu de l'image. Les résultats numériques confirment la performance de ces fonctions (voir les tableau (3.1) et (3.2) ainsi que la qualité visuelle des images débruitées présentées dans les figures (3.3) et (3.6)).

3.3 Mise en œuvre numérique

3.3.1 Discrétisation du modèle

Pour résoudre le modèle, on applique une discrétisation basée sur les différences finies, on considère également un schéma en avant en espace et un schéma explicite en temps (Forward-Time Central-Space FTCS), avec un choix approprié du pas spatial $\Delta x = \Delta y = 1$. La discrétisation du modèle (2.4) s'écrit alors :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \times \text{div} [f_k (|G_\sigma * \nabla u_{i,j}^n|) \nabla u_{i,j}^n], K = 1, 2, \dots, 5. \quad (3.13)$$

où

$$u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n), x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, t_n = n\Delta t, \nabla u_{i,j}^n = \left((\nabla u_{i,j}^n)^1, (\nabla u_{i,j}^n)^2 \right)$$

et $(\text{div}(p))_{i,j} = (\text{div}(p^1, p^2))_{i,j}$.

Avec

$$(\nabla u_{i,j}^n)^1 = \begin{cases} \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x}, & \text{si } i < N \\ 0, & \text{si } i = N \end{cases}$$

$$(\nabla u_{i,j}^n)^2 = \begin{cases} \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y}, & \text{si } j < M \\ 0, & \text{si } j = M \end{cases}$$

et

$$(\text{div}(p^1, p^2))_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1, & \text{si } 1 < i < N \\ p_{i,j}^1, & \text{si } i = 1 \\ -p_{i-1,j}^1, & \text{si } i = N \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2, & \text{si } 1 < j < M \\ p_{i,j}^2, & \text{si } j = 1 \\ -p_{i,j-1}^2, & \text{si } j = M \end{cases}$$

où f_k sont les fonctions proposées Δt est le pas de temps et $\Delta x, \Delta y$ sont les pas en espace.

3.3.2 Implémentation numérique

L'implémentation numérique de notre schéma est faite selon l'algorithme suivant :

Algorithme :

- Initialiser l'image bruitée u_0 , le pas de temps Δt , la dimension de u_0 .
- Approximer les dérivées partielles en espace $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ en utilisant un schéma de différences finies en avant.
- Approximer la divergence $div [f_k (|G_\sigma * \nabla u|)]$ en utilisant l'algorithme de Chambolle.
- faire un test d'arrêt.
- Calculer u^{n+1} à partir de (3.13)

3.4 Résultats Numériques

Dans cette section, les résultats obtenus par nos fonctions de diffusivité améliorées sont comparés à des fonctions de diffusivité qui ont été publiées dans [33]. Ces résultats sont analysés selon : la qualité visuelle, le PSNR, le SSIM et le MSE.

Tous les calculs sont effectués sur des images réelles à l'aide de Matlab (R2017a) sur un ordinateur personnel doté d'un processeur 4 cœurs 2.40GHz et de 4GO de RAM.

Dans les Figures (3.3) et (3.6), on remarque que la qualité visuelle de nos résultats est meilleure que celle des résultats de Kamalaveni [33], dans les résultats numériques obtenus par nos fonctions améliorées les images sont plus fidèles, moins de flou et des structures géométriques plus apparentes.

De plus, à partir des tableaux (3.2) et (3.1), une comparaison du MSE, PSNR et du SSIM est présentée, dans les Figures (3.4) et (3.5), on présente des valeurs du SSIM et du MSE en fonction de différentes valeurs de seuil R , par contre, dans la Figure (3.7) le PSNR est donné suivant le nombre d'itérations, on en déduit que nos fonctions conduisent à des résultats très satisfaisants et significatifs.

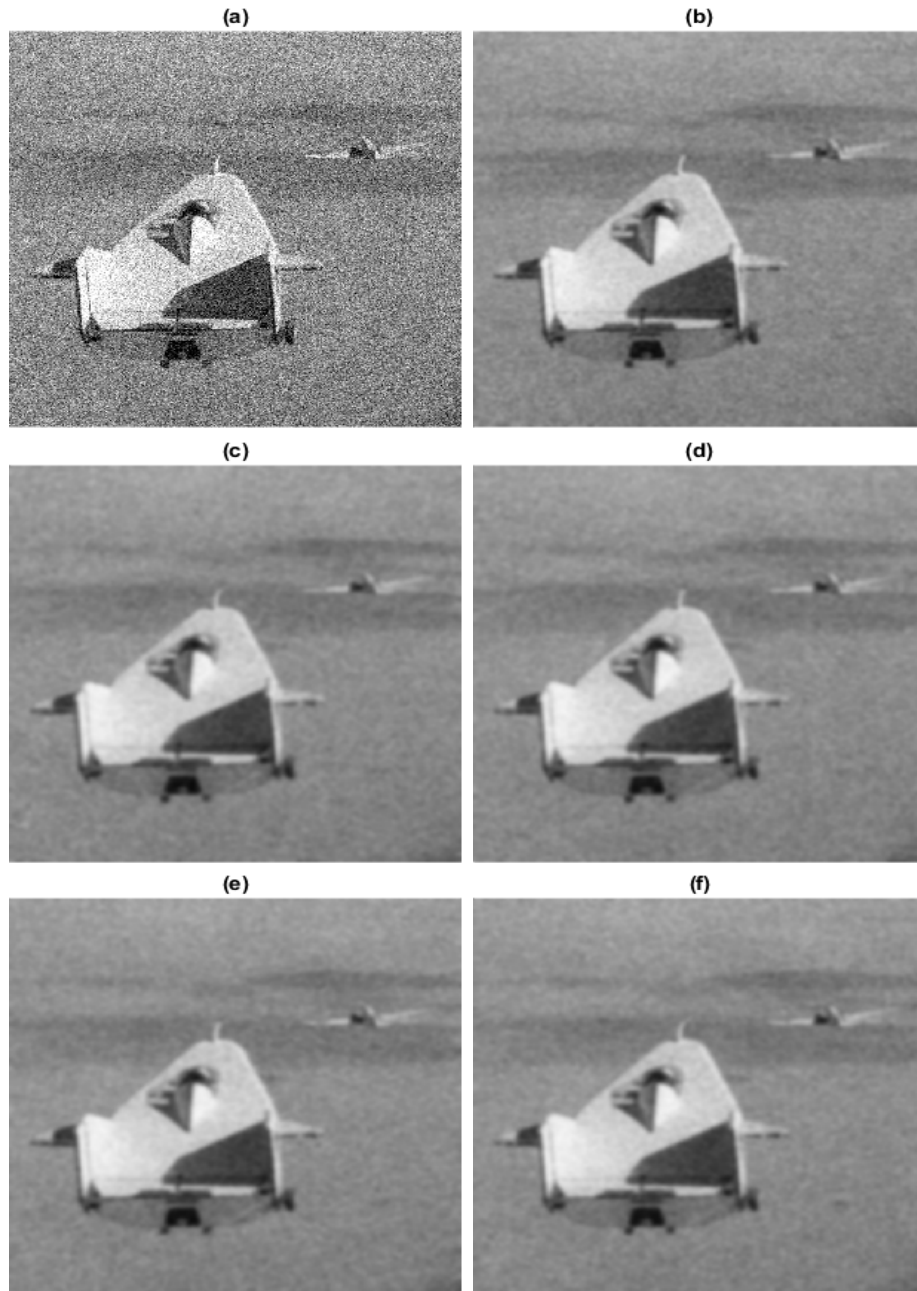


FIGURE 3.3 – Comparaison des performances de nos différentes fonctions entre elles avec $R = 10$ et $\sigma = 0,76$. Les images débruitées sont obtenues après 15 itérations. (a) Image bruitée avec le bruit gaussien ($m = 0$; $v = 0.02$), (b) AD en utilisant $f_1(x)$, (c) AD en utilisant $f_2(x)$, (d) AD en utilisant $f_3(x)$, (e) AD avec $f_4(x)$ et (f) AD avec $f_5(x)$.

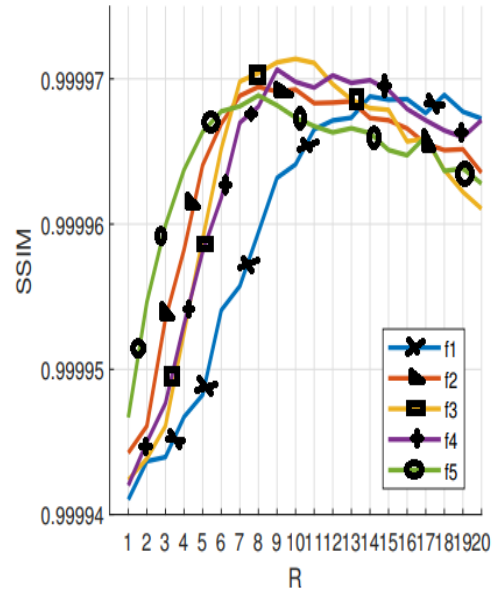


FIGURE 3.4 – SSIM de nos fonctions améliorées suivant les différentes valeurs de R et $\sigma = 0,76$.

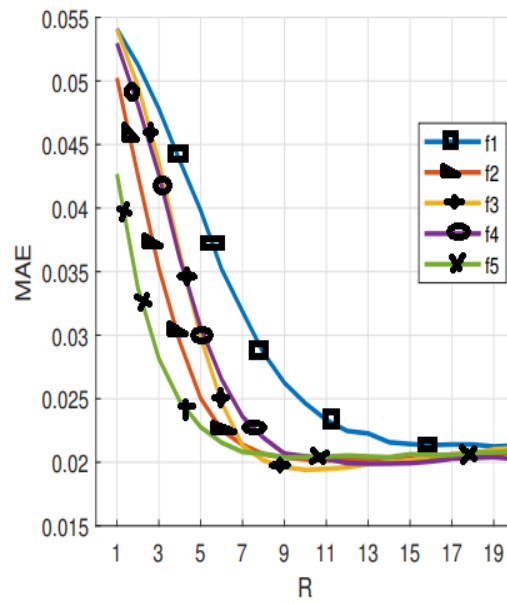


FIGURE 3.5 – MSE de nos fonctions améliorées suivant les différentes valeurs de R et $\sigma = 0,76$.

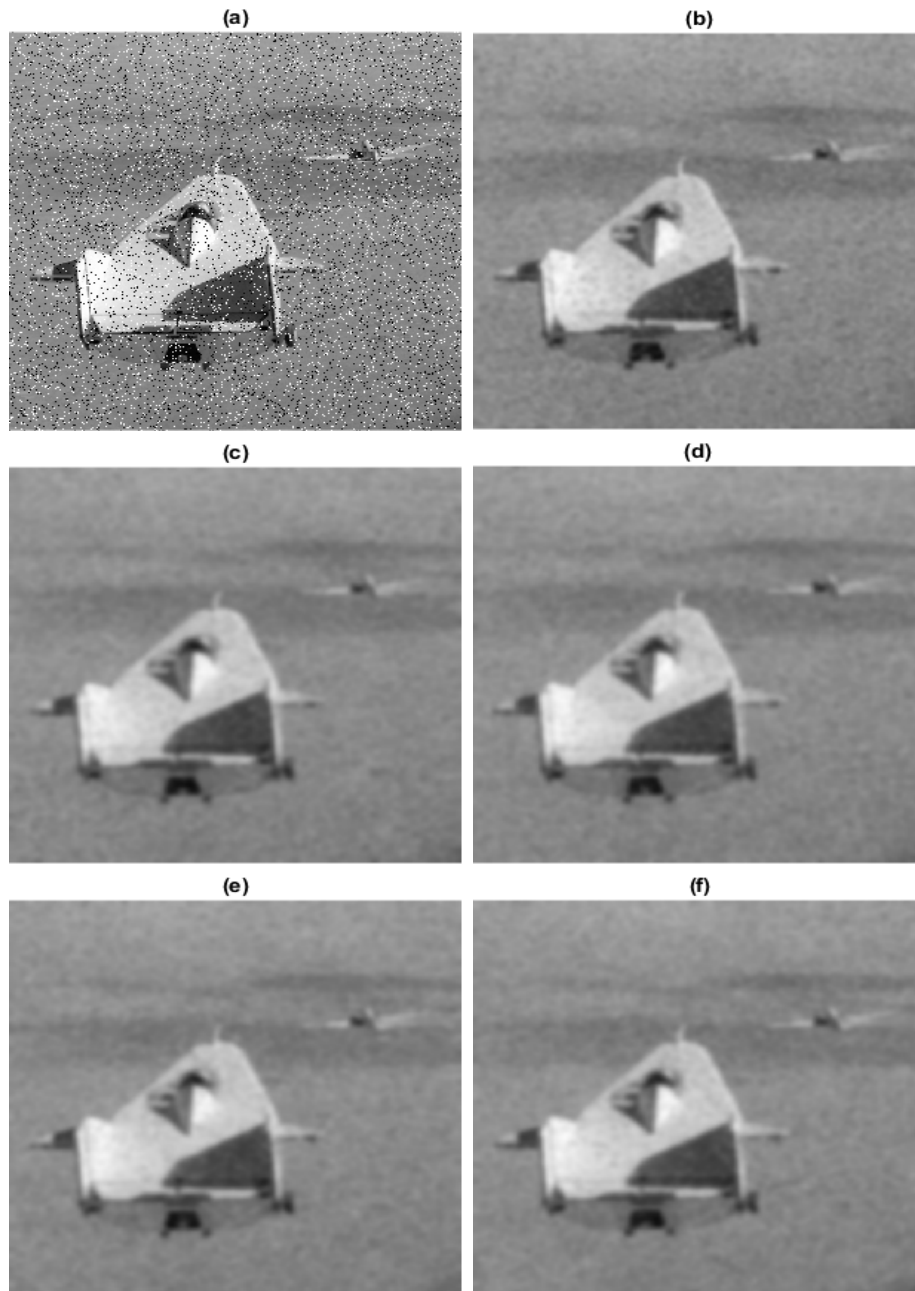


FIGURE 3.6 – (a) Image bruitée avec un bruit de Poivre et Sel de densité 0.1, les images (b), (c), (d), (e) et (f) sont restaurées en utilisant respectivement f_1 , f_2 , f_3 , f_4 et f_5 , pour $R = 29$ après 25 itérations.

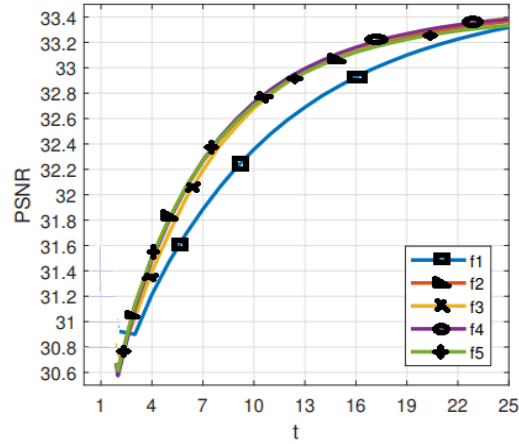


FIGURE 3.7 – Le PSNR des images restaurées mesuré pour chaque itération, en utilisant nos différentes fonctions améliorées où $R = 29$.

Lena image			
bruit gaussien ($m = 0$ and $v = 0.01$)			
MSE			
Functions	$R = 5$	$R = 10$	$R = 15$
f_1	0.0217	0.0161	0.0163
f_2	0.0157	0.0163	0.0175
f_3	0.0158	0.0159	0.0176
f_4	0.0166	0.0156	0.0167
f_5	0.0158	0.0167	0.0177
c_1	0.9060	3.0142	4.5765
c_2	2.5614	5.2330	7.4453
c_3	0.2496	1.2304	2.0367
c_4	2.5817	5.4747	7.5340
c_5	0.6226	2.2172	3.5315

TABLE 3.1 – Comparaison entre nos fonctions et celles de Kamalaveni et al. ($c_n(\cdot)$ pour $n = 1, 2, \dots, 5$) en terme de MSE. L'image est bruitée avec un bruit gaussien ($m = 0, v = 0.01$). Ces résultats sont obtenus après 10 itérations.

Image		Airplane			Lena		
gaussien		bruit gaussien ($m = 0$ et $v = 0.01$)			bruit ($m = 0$ et $v = 0.05$)		
R	Fonctions	MSE	PSNR	SSIM	MSE	PSNR	SSIM
5	f_1	0.0217	34.4834	0.9799	0.0695	29.3545	0.9899
	f_2	0.0157	36.8590	0.9897	0.0482	30.5205	0.9799
	f_3	0.0158	36.7648	0.9897	0.0603	29.8364	0.9799
	f_4	0.0166	36.4637	0.9798	0.0594	29.8353	0.9899
	f_5	0.0158	36.8080	0.9897	0.0390	31.2871	0.9799
10	f_1	0.0161	36.7035	0.9798	0.0488	30.6792	0.9798
	f_2	0.0163	36.5734	0.9798	0.0349	32.1545	0.9897
	f_3	0.0159	36.7041	0.9897	0.0358	32.0065	0.9798
	f_4	0.0156	36.8881	0.9897	0.0376	31.7838	0.9798
	f_5	0.0167	36.4666	0.9798	0.0345	32.1760	0.9897
15	f_1	0.0163	36.5243	0.9897	0.0375	31.6371	0.9798
	f_2	0.0175	36.2152	0.9897	0.0355	32.0887	0.9796
	f_3	0.0176	36.2213	0.9897	0.0355	32.1797	0.9896
	f_4	0.0167	36.4314	0.9798	0.0346	32.2283	0.9797
	f_5	0.0177	36.1120	0.9897	0.0354	32.2292	0.9798

TABLE 3.2 – Les valeurs de MSE, PSNR et SSIM par nos fonctions améliorées après un nombre d’itérations $n = 20$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié cinq fonctions de diffusivité basées sur la convolution. On a montré l’effet de l’utilisation de la convolution sur la convergence du modèle à travers la comparaison des processus de diffusion de ces fonctions proposées. Les résultats numériques montrent que les performances du processus de diffusion basé sur nos fonctions sont nettement améliorées par rapport à celles de Kamaleveni et al. [33], ceci est montré par les tableaux et figures.

Diffusion anisotrope en utilisant trois fonctions de diffusivité robustes

Dans ce chapitre, on propose trois fonctions de diffusivité pour améliorer les images médicales, de personnes, de nature et d'astronomie et on va essayer de présenter l'objectif souhaité de nos fonctions pour la restauration d'images. Ces fonctions préservent la forme des contours et des coins de l'image et supprime le bruit.

4.1 Présentation de Quelques Travaux Connexes

Parmi les fonctions de diffusivité qui ont été utilisées pour la restauration d'images, il y a des fonctions qui conservent les structures géométriques de fortes variations (les contours) et à la fois ils brouillent les structures fines de l'image comme les courbures de faible variation. On détermine les coins de l'image par l'intersection au moins de deux contours les uns avec les autres (voir la Figure 4.1(a)). Comme par exemple, les images médicales contiennent de nombreux coins et beaucoup de structures géométriques de fortes et de faibles variations. La perte des coins peut transformer la forme d'un objet en des contours (voir la Figure (4.1)(b)). Les coins présentent donc des propriétés indispensables pour illustrer des objets importants dans une image.

Dans ce contexte, Perona et Malik [48] ont défini un modèle de diffusion anisotrope et aussi, ils ont introduit deux fonctions de diffusivité. En visualisant la performance de ces deux fonctions et de deux autres fonctions de diffusivité (Figure (4.2)), on observe qu'elles ne réduisent pas le bruit le long des contours ou des coins dans l'image. Les fonctions de diffusivité de Perona-Malik, Weickert [73] et de Motiel-Berghdadi [43] deviennent nulles à proximité de la forte variation des intensités, en outre, le point commun entre ces fonctions est la préservation des contours de l'image. Les fonctions de diffusivité (2.5) et (2.6) de Perona-Malik permettent de renforcer le bruit des contours. La fonction de diffusivité de Weickert est définie

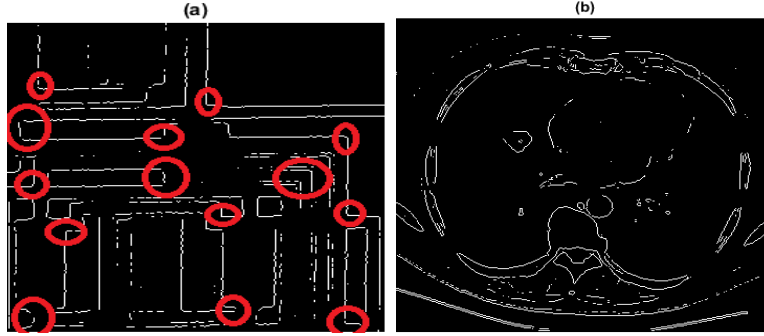


FIGURE 4.1 – Illustration des contours et des coins d’une image : (a) Position des coins dans une image naturelle et (b) Présentation des structures géométriques d’une image médicale.

comme suit :

$$c(\|\nabla I\|) = \begin{cases} 1 - e^{-3.31488 \times (\frac{k}{\|\nabla I\|})}, & \text{si } \|\nabla I\| \neq 0 \\ 1, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.1)$$

La fonction de diffusivité de Weickert (4.1) ne réduit pas le bruit le long de chaque forte variation, elle renforce les contours et donc renforce aussi le bruit qui existe le long de ces contours. Cette fonction devient rapidement nulle à la proche d’une forte variation (voir la Figure (4.2)). Il faut souligner que le modèle de Weickert opère entre les zones à gradient forts et à gradient faibles pour mieux maintenir les contours.

La fonction de diffusivité de Monteil et Beghdadi [43] est donnée par la forme suivante :

$$c(\|\nabla I\|) = \frac{1}{2} [\tanh(\gamma(k - \|\nabla I\|)) + 1] \quad (4.2)$$

où $\gamma > 0$. Cette fonction permet de préserver les contours et les coins car elle forme une courbe strictement décroissante et tend vers 0 (voir la Figure (4.2)), mais elle peut renforcer le bruit le long les structures géométriques de forte variation dans l’image.

4.2 Proposition de Trois Fonctions de Diffusivité Robustes

On cherche à trouver des fonctions de diffusivité qui protègent les contours et les caractéristiques fondamentaux contenus dans l’image tout en préservant la propriété d’une diffusion qui réduit le bruit qui se trouve le long des fortes variations (les

contours ou les coins) de l'image. D'après notre recherche, le meilleur filtre de diffusion pour améliorer la qualité d'image serait basé sur des fonctions de diffusivité qui reprennent les avantages des fonctions de Perona Malik. Et après, on aura un filtre de diffusion qui réduit le bruit des contours, améliore la qualité des images et préserve les coins en même temps. Comme les fonctions de Perona et Malik ont été utilisées la première fois dans un but principal qui est la préservation de toutes les fortes variations d'une image sans distinction, on s'est donc concentré sur cette propriété. On sait qu'il est très difficile de réduire le bruit le long des contours ou des coins et de les préserver simultanément. Si le bruit ne possède pas une valeur supérieure à la norme des fortes variations (des contours, des coins), il est théoriquement possible de contrôler la force de diffusion et donc faire les deux opérations simultanément. On a montré les différences entre les fonctions de diffusivité de Perona-Malik, de Monteil-Beghdadi et celle de Weickert. Comme on l'a noté précédemment, les fonctions de diffusivité de Monteil-Beghdadi et de Weickert sont les meilleurs dans la préservation de contours comparativement aux fonctions de Perona-Malik. Toutes ces fonctions de diffusivité reposent sur la vitesse de diffusion :

- Weickert a introduit une fonction de diffusivité qui tend rapidement vers zéro à l'approche des fortes variations. C'est ce qui permet de préserver bien les contours et les coins de l'image, mais la force de diffusion de cette fonction est très grande dans les zones où la norme du gradient est inférieure à la valeur du seuil R . Inversement, la force de diffusion des fonctions de Perona-Malik est moindre.
- La fonction de Monteil-Beghdadi donne une diffusion presque équivalente à la diffusion de Weickert c-à-d cette fonction devient rapidement nulle à l'approche d'un contour et donc la force de diffusion devient aussi nulle. Pour le modèle de Perona-Malik, toutes les fortes variations sont respectées car la fonction de diffusivité devient totalement nulle sans aucune distinction entre un contour ou un coin, mais le bruit le long des contours reste toujours. Ceci est l'inconvénient presque de toutes les fonctions de diffusivité.

Pour améliorer la performance du modèle de Perona Malik, il suffit de proposer une bonne formulation de fonction de diffusivité qui permet de contrôler la force de diffusion de manière correcte. Il faut aussi contrôler bien le comportement de la fonction de diffusivité particulièrement le long de fortes variations. Après de nombreuses tentatives, on a défini trois fonctions de diffusivité [53], qui satisfaisaient notre objectif, à savoir réduire le bruit le long des structures géométriques de fortes variations et de les préserver en même temps.

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(\|G_\sigma * \nabla I\|) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2+4e^{-\left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}\right)^2}} \\ H_2(\|G_\sigma * \nabla I\|) = 1 - \left(1 - \log\left(1 + \frac{(\|G_\sigma * \nabla I\| + 1)^{\frac{1}{4}}}{1 + \left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}\right)^4}\right)\right)^{\frac{5}{1 + \frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}}} \\ \text{et} \\ H_3(\|G_\sigma * \nabla I\|) = \left(1 - \tanh\left(\frac{\|G_\sigma * \nabla I\|}{R}\right)\right)^4, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où R est le seuil de diffusion et G_σ est le filtre gaussien de dimension deux. On applique le modèle qui est basé sur l'EDP suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_t = \text{div}(H_i(\|G_\sigma * \nabla I\|) \nabla I), \text{ avec } i=1,2,3 \\ I_0 = I(x, y, 0), \end{array} \right. \quad (4.4)$$

il est à noter que ce modèle est celui de Perona et Malik, voir [53]. Dans (4.4), on a remplacé la fonction de diffusivité dans [48] par les trois fonctions de diffusivité.

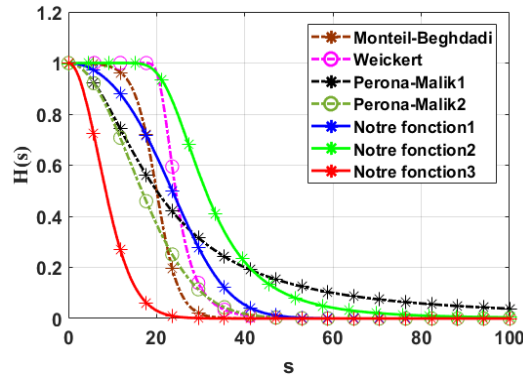


FIGURE 4.2 – Comportement de différentes fonctions de diffusivité.

L'étude du comportement analytique des fonctions de Weickert et de Monteil-Baghdadi durant le processus de diffusion démontre bien qu'il y a globalement une décroissance stricte des deux courbes vers zéro avec la même vitesse, mais celle-ci n'est ni rapide ni lente suivant les valeurs du gradient de l'image, par contre, les fonctions de Perona et Malik montrent une vitesse de décroissance très lente.

4.3 Description du Fonctionnement de Nos Fonctions

Comme nos fonctions de diffusivité sont proposées pour contrôler le processus de traitement (Figure (4.2)), où elles permettent de réduire le bruit le long des

contours et préservent toutes les structures géométriques importantes de l'image simultanément. On a illustré le fonctionnement de ces fonctions pour chacun des trois cas suivants :

1. À l'approche des fortes variations (les contours et les coins), la fonction H_1 permet de faire un lissage minimum le long de ces fortes variations, ce qui permet de réduire le bruit et les préserver. La fonction H_2 permet de faire un lissage avec une force de diffusion plus grande que celle de la fonction H_1 , permettant la suppression du bruit, par contre, la fonction H_3 diminue la force de diffusion pour respecter la forme correcte des contours et donne un effet très efficace pour réduire le bruit (voir la Figure (4.3)).

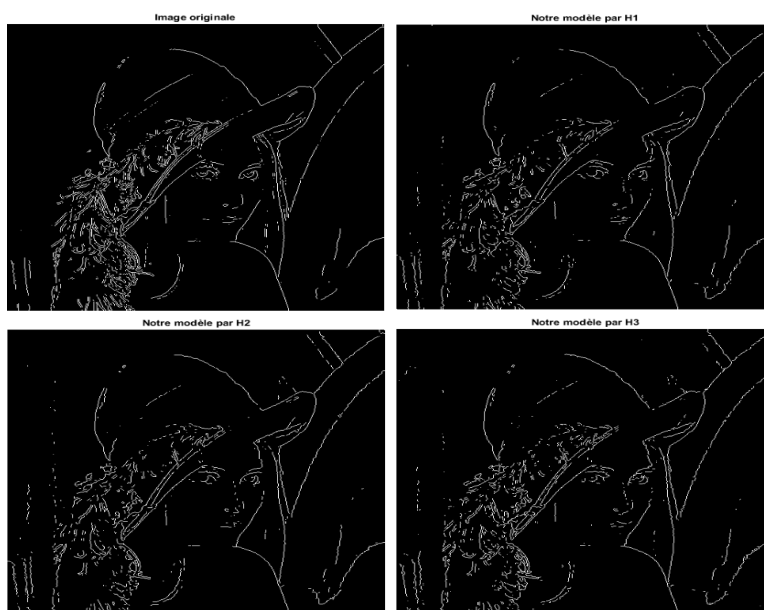


FIGURE 4.3 – Comparaison entre les résultats de détection de contours d'image restaurée par notre modèle en utilisant nos fonctions.

2. Dans les parties uniformes de l'image indiquant l'absence de variations des intensités fortes, nos fonctions n'affichent pas une diffusion spéciale car ces fonctions sont totalement égales à 1 et donc le filtre de diffusion devient isotrope, il est équivalent à l'équation de la chaleur (voir la figure (4.4)), ce qui conduit à une diffusion maximale.
3. Dans une image texturée et bruitée c'est-à-dire elle contient de forts contours et de coins, le processus de restauration sera très difficile où nos fonctions prennent des valeurs proches de zéro. La force de diffusion est presque nulle le long des textures pour réduire le bruit et les préserver (voir la figure (4.5)).

Nos fonctions permettent de bien contrôler la force de diffusion selon la présence d'un contour ou d'un coin grâce au seuil de diffusion R , ce paramètre permet de

4.3. DESCRIPTION DU FONCTIONNEMENT DE NOS FONCTIONS



FIGURE 4.4 – Comparaison des résultats entre le filtre moyenneur, médian et nos trois fonctions sur une image naturelle bruitée avec un bruit gaussien de moyenne $m = 0$ et de variance $v = 0.05$, le nombre d'itérations est égal à 20.

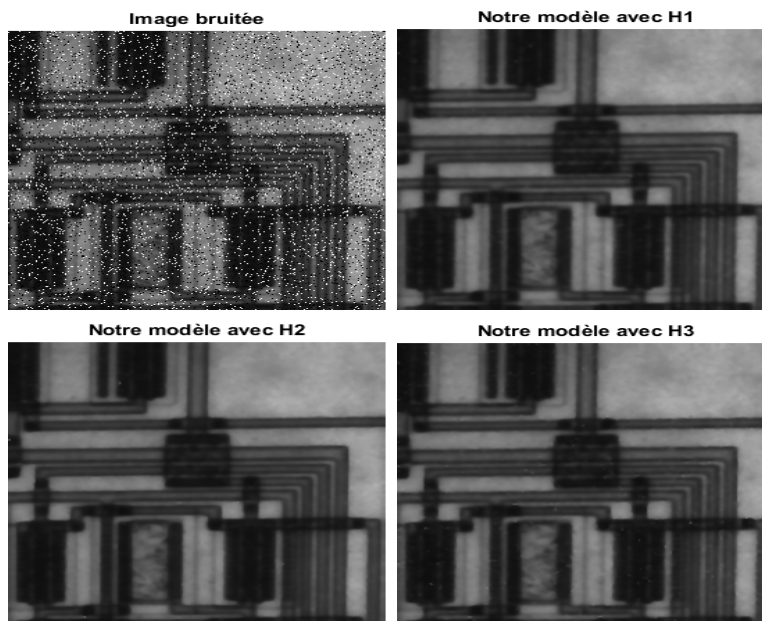


FIGURE 4.5 – Restauration d'une image texturée et très bruitée par les trois fonctions proposées.

4.4. NOS FONCTIONS DE DIFFUSIVITÉ VERSUS LES AUTRES FONCTIONS

définir le seuil de sensibilité pour la distinction entre le bruit et les variations de l'image. Nos fonctions permettent au filtre de mieux préserver les contours et les coins de l'image. La Figure (4.6) montre la performance des fonctions de diffusivité H_1 , H_2 et H_3 avec une image synthétique très bruitée avec un bruit blanc gaussien de moyenne égale à 0.04 et de variance égale à 0.05, dans les zones uniformes, ces fonctions sont égales à 1 c'est à dire le filtre de diffusion devient isotrope, mais ces fonctions permettent de dégrader la force de diffusion le long des contours pour les préserver et réduire le bruit en même temps.

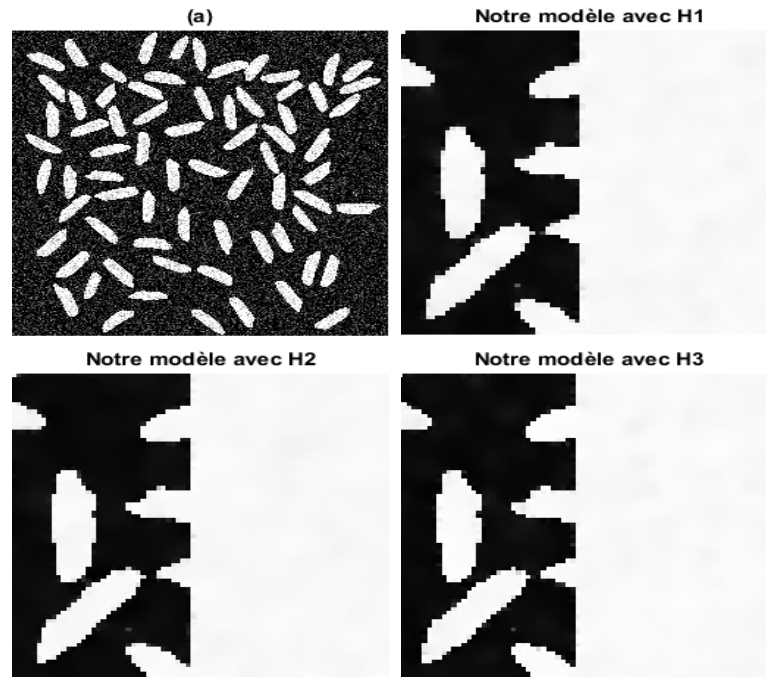


FIGURE 4.6 – Effets des nos fonctions de diffusivité H_1 , H_2 et H_3 sur la force de diffusion.

Les Figures (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) illustrent que nos fonctions de diffusivité permettent de donner une force de diffusion bien contrôlée autour de toutes les fortes variations de l'image.

4.4 Nos Fonctions de Diffusivité Versus les Autres Fonctions

Les différences entre nos fonctions et celles de Perona-Malik, de Monteil-Baghedadi, de Weickert ou de Barbu se situent en premier lieu dans les expressions de ces fonctions et donc dans la force de diffusion qui est aussi liée à la valeur du seuil R .

En effet, les fonctions de Perona-Malik, de Monteil-Baghdadi, de Weickert sont des fonctions strictement décroissantes et deviennent rapidement nulles. En deuxième lieu :

- Notre fonction H_1 présente une restauration d'image très efficace par rapport à la fonction de Weickert où à la fois elle permet de faire un lissage du bruit des contours ou des coins tout en les préservant. Dans la Figure (4.2), on remarque que notre fonction H_1 permet de bien contrôler la force de diffusion, mais la fonction de Weickert ne lisse pas le bruit des contours et des coins d'une image parce que la force de diffusion de cette fonction est totalement nulle en comparaison avec H_1 .
- La fonction H_3 diffère de la fonction de Monteil-Beghdadi en préservation des contours et des coins locaux de l'image de façon très claire (voir la figure (4.2)). La différence entre la fonction de Monteil-Beghdadi atteint de grandes valeurs où la fonction de Monteil-Beghdadi comme la fonction de Weickert montre une décroissance stricte vers le zéro autour les contours, ce qui permet de renforcer le bruit le long ces fortes variations d'intensités, alors la force de diffusion est nulle. Dans les zones homogènes, la fonction H_3 et la fonction de Monteil-Baghdadi sont presque équivalentes et la différence entre elles atteint zéro.

Notre fonction H_2 permet de diminuer la force de diffusion autours des coins et des contours de façon meilleure que la fonction de Barbu et celles de Perona-Malik où H_2 est presque nulle le long des contours pour protéger des structures géométriques de fortes variations et réduire le bruit.

Enfin, il est facile de comparer nos fonctions avec les autres fonctions existantes (tableaux (4.1) et (4.2)) qui permettent de renforcer le bruit des contours et des coins dans l'image car ces fonctions deviennent directement nulles à l'approche des fortes variations d'intensités.

4.5 Discrétisation numérique

Dans cette section, on s'intéresse à la discrétisation numérique du modèle étudié précédemment. Notre discrétisation basée sur la méthode des différences finies, on choisi également un schéma en avant en espace et un schéma explicite en temps. On prend aussi un pas spacial $\Delta x = \Delta y = 1$ et un pas de temps Δt convenable selon le critère de stabilité. La discrétisation de l'équation (4.4) s'écrit comme suit :

$$I_{i,j}^{n+1} = I_{i,j}^n + \Delta t \left[\begin{array}{l} H_m \left(\left\| \nabla^N I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^N I_{i,j}^n + H_m \left(\left\| \nabla^S I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^S I_{i,j}^n + \\ H_m \left(\left\| \nabla^E I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^E I_{i,j}^n + H_m \left(\left\| \nabla^W I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^W I_{i,j}^n + \\ H_m \left(\left\| \nabla^{NE} I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^{NE} I_{i,j}^n + H_m \left(\left\| \nabla^{NW} I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^{NW} I_{i,j}^n + \\ H_m \left(\left\| \nabla^{SE} I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^{SE} I_{i,j}^n + H_m \left(\left\| \nabla^{SW} I_{i,j}^n \right\| \right) \nabla^{SW} I_{i,j}^n \end{array} \right], \quad (4.5)$$

avec $m = 1, 2, 3$ et $I_{i,j}^n = I(x_i, y_j, t_n)$, $\nabla^N, \nabla^S, \nabla^E, \nabla^W, \nabla^{NE}, \nabla^{NW}, \nabla^{SE}$ et ∇^{SW} sont les approximations en avant de la première dérivée des 8 pixels voisins du pixel central (i, j) , données par :

$$\begin{aligned} \nabla^N I_{i,j}^n &= I_{i-1,j}^n - I_{i,j}^n & \nabla^{NE} I_{i,j}^n &= \frac{I_{i-1,j+1}^n - I_{i,j}^n}{2} \\ \nabla^S I_{i,j}^n &= I_{i+1,j}^n - I_{i,j}^n & \nabla^{NW} I_{i,j}^n &= \frac{I_{i-1,j-1}^n - I_{i,j}^n}{2} \\ \nabla^E I_{i,j}^n &= I_{i,j+1}^n - I_{i,j}^n & \nabla^{SE} I_{i,j}^n &= \frac{I_{i+1,j+1}^n - I_{i,j}^n}{2} \\ \nabla^W I_{i,j}^n &= I_{i,j-1}^n - I_{i,j}^n & \nabla^{SW} I_{i,j}^n &= \frac{I_{i+1,j-1}^n - I_{i,j}^n}{2} \end{aligned}$$

Implémentation numérique

L'implémentation numérique de notre modèle est faite selon l'algorithme suivant :

Algorithme : Restauration d'image

1. Initialisation : Entrer l'image bruitée I_0 , le pas de temps Δt et le nombre d'itérations T .
2. Calculer les approximations en avant de la première dérivée des 8 pixels voisins du pixel central (i, j) :

$$\nabla^N I_{i,j}^n, \nabla^S I_{i,j}^n, \nabla^E I_{i,j}^n, \nabla^W I_{i,j}^n, \nabla^{NE} I_{i,j}^n, \nabla^{NW} I_{i,j}^n, \nabla^{SE} I_{i,j}^n, \nabla^{SW} I_{i,j}^n.$$

3. Calculer $H_m(\nabla^N I_{i,j}^n) \nabla^N I_{i,j}^n, H_m(\nabla^S I_{i,j}^n) \nabla^S I_{i,j}^n, H_m(\nabla^E I_{i,j}^n) \nabla^E I_{i,j}^n, H_m(\nabla^W I_{i,j}^n) \nabla^W I_{i,j}^n, H_m(\nabla^{NE} I_{i,j}^n) \nabla^{NE} I_{i,j}^n, H_m(\nabla^{NW} I_{i,j}^n) \nabla^{NW} I_{i,j}^n, H_m(\nabla^{SE} I_{i,j}^n) \nabla^{SE} I_{i,j}^n, H_m(\nabla^{SW} I_{i,j}^n) \nabla^{SW} I_{i,j}^n$.
4. Calculer I^{n+1} à partir du schéma numérique (4.4)

4.6 Tests et seuil de diffusion

- Sur les zones non homogènes, la valeur du gradient est plus grande que la valeur du seuil de diffusion R . Dans ce cas, nos fonctions de diffusivité jouent un rôle très important en assurant une meilleure restauration de l'image (voir la Figure (4.6)). Inversement, si la valeur du seuil de diffusion R est plus grande que le gradient de l'image, la préservation des caractéristiques géométriques est difficile. Cela s'explique par la force de diffusion du processus de traitement

est plus grande le long des contours et des coins quelle que soit la magnitude du bruit dans l'image. (voir la figure (4.7)).

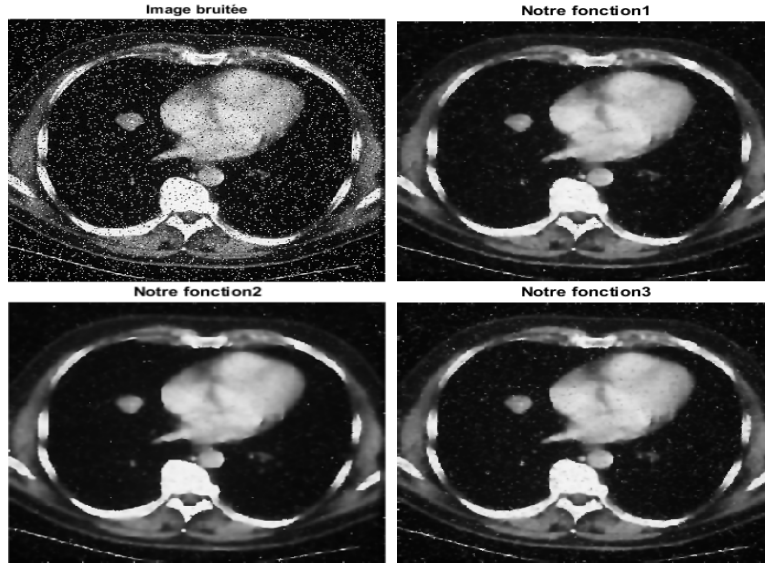


FIGURE 4.7 – Résultats de restauration pour un seuil de diffusion $k = 74$.

- Dans les zones homogènes, la valeur du seuil R n'a aucun effet sur processus de diffusion car la norme de la forte variation dans cette zone est presque nulle et donc les fonctions de diffusivité sont totalement égales à 1. En outre, le filtre de diffusion devient isotrope et donc la force de diffusion est maximale, voir les Figures (4.8) et (4.9).
- Sur une image très bruitée où le bruit est de magnitude supérieure à la norme du gradient de l'image et si la valeur du seuil R est trop bas, alors on a un effet de suppression faible du bruit des contours et des coins de l'image, ce qui donne aussi une diffusion faible. Les Figures (4.10) et (4.11) montrent le comportement de notre filtre de diffusion par rapport aux valeurs du seuil R et de la magnitude du bruit.

4.7 Applications sur des images médicales

La Figure (4.12) présente les résultats de filtre amélioré par nos fonctions avec un seuil $R = 46$. Il contribue à la suppression du bruit le long des contours ou des coins et les préserve simultanément. Dans les images restaurées, les structures géométriques sont plus apparentes. Ceci explique que le bon contrôle de la force de

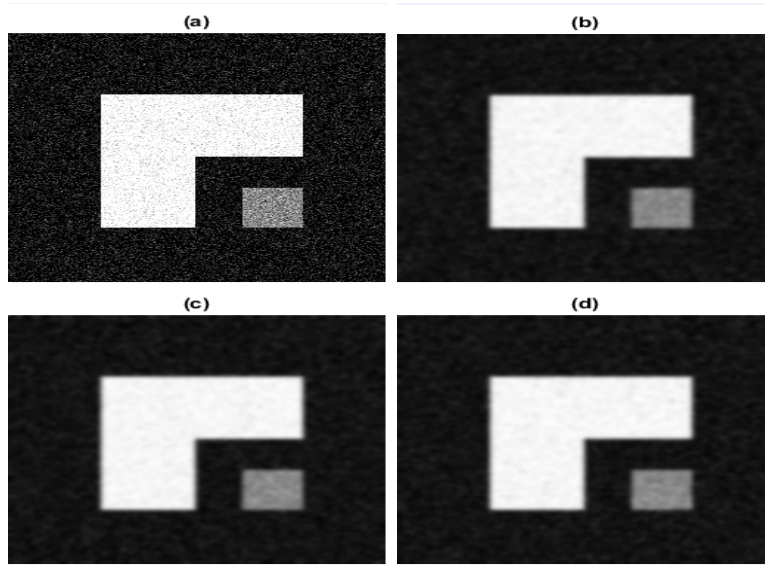


FIGURE 4.8 – Résultats de restauration d’image non texturée pour un seuil de diffusion $R = 12$. (a) Image bruitée avec un bruit gaussien ($m=0.04$, $v=0.02$), (b) résultat de H_1 , (c) résultat de H_2 , (d) résultat de H_3 , le nombre d’itérations est égal à 9.

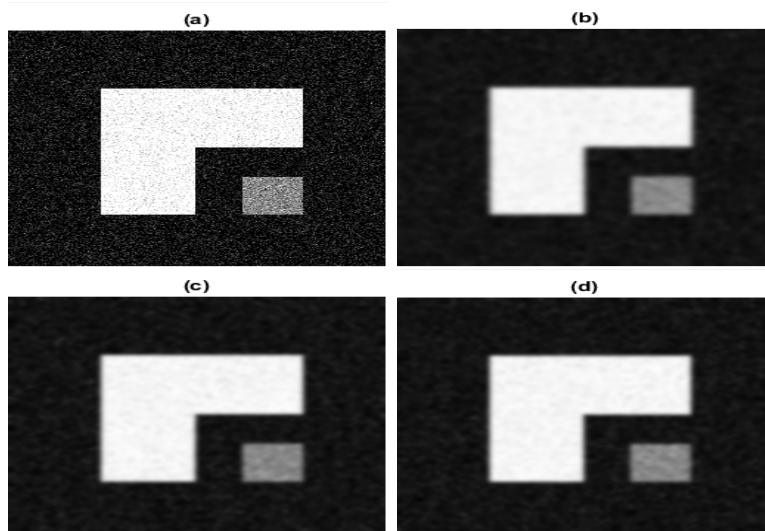


FIGURE 4.9 – Résultats de restauration d’image non texturée pour un seuil de diffusion $R = 100$ (a) Image bruitée avec un bruit gaussien ($m=0.04$, $v=0.02$), (b) résultat de H_1 , (c) résultat de H_2 , (d) résultat de H_3 , le nombre d’itérations est égal à 9.

diffusion en utilisant nos fonctions avec un bon choix de la valeur du seuil R .

On prend la valeur du seuil R trop élevée, le filtre ne préserve pas bien les contours et les coins (Figure (4.13)). Par contre, si on prend la valeur du seuil R très petite, on a un filtre de diffusion ne permet pas de réduire le bruit le long les contours et

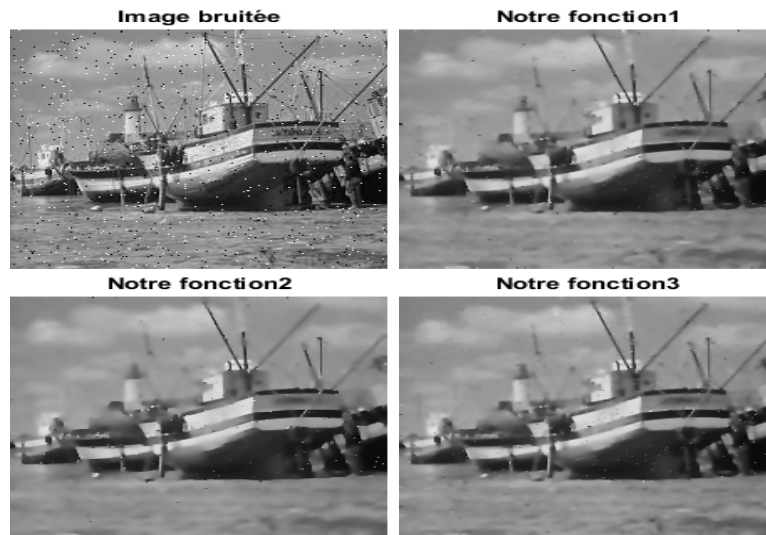


FIGURE 4.10 – Tests de restauration pour un seuil de diffusion $k = 41$ et un bruit de poivre et sel de densité égale à 0.02.

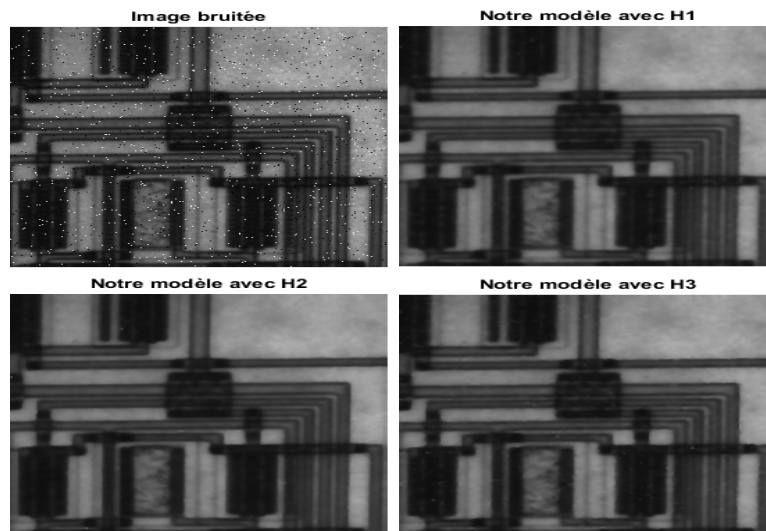


FIGURE 4.11 – Résultats de restauration des images texturées très bruitées pour un seuil de diffusion $k = 84$ et un bruit de poivre et sel de densité égale à 0.1.

les coins, alors la vitesse de diffusion tend vers zéro rapidement.

En visualisant le comportement des fonctions de diffusivité de Weickert, de Perona-Malik, de Monteil-Beghdadi et les notre (voir la figure (4.14)). On remarque que les notre contribuent à réduire le bruit et à maintenir la topologie des contours et les coins de manière très efficace que les autres fonctions de diffusivité.

Sur des images de personnes trop bruitées (Figure (4.15)), les résultats présentent que nos fonctions et la fonction de Monteil-Beghdadi sont les seules capables de pré-

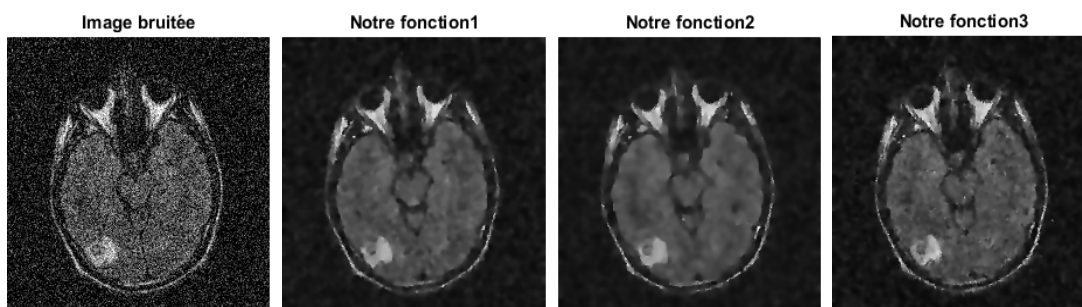


FIGURE 4.12 – Restauration d’image médicale trop bruitée avec un bruit gaussien ($m = 0.04$, $v = 0.03$). Les images restaurées sont obtenues après 14 itérations.

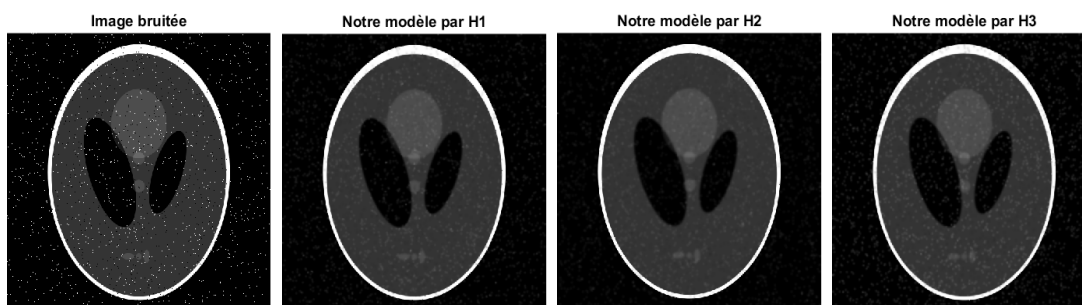


FIGURE 4.13 – Illustration de l’application de notre filtre sur une image médicale.

server les contours et les coins. En revanche, seul notre filtre apporte, en plus, une nette qualité de l’image et donc il permet de fournir de bonne restauration à ses contours et coins.

La Figure (4.16) illustre d’autre application réalisée sur une image bruitée et montre aussi les résultats numériques de nos fonctions et son aptitude à mieux effacer le bruit tout en maintenant les structures géométriques d’intensités fortes (les contours et les coins). Cette figure présente aussi l’apport de nos fonctions pour l’amélioration des images numériques comme celles de compression de format JPEG.

Ces fonctions de diffusivité proposées présentent l’avantage de ne pas pénaliser les fortes variations et de supprimer l’effet d’escalier. Les essais apportés, sur la figure (4.17), suite à l’application de nos fonctions contribuent à une bonne qualité visuelle par rapport aux résultats obtenus respectivement par l’application de Perona-Malik et celui de Weickert.

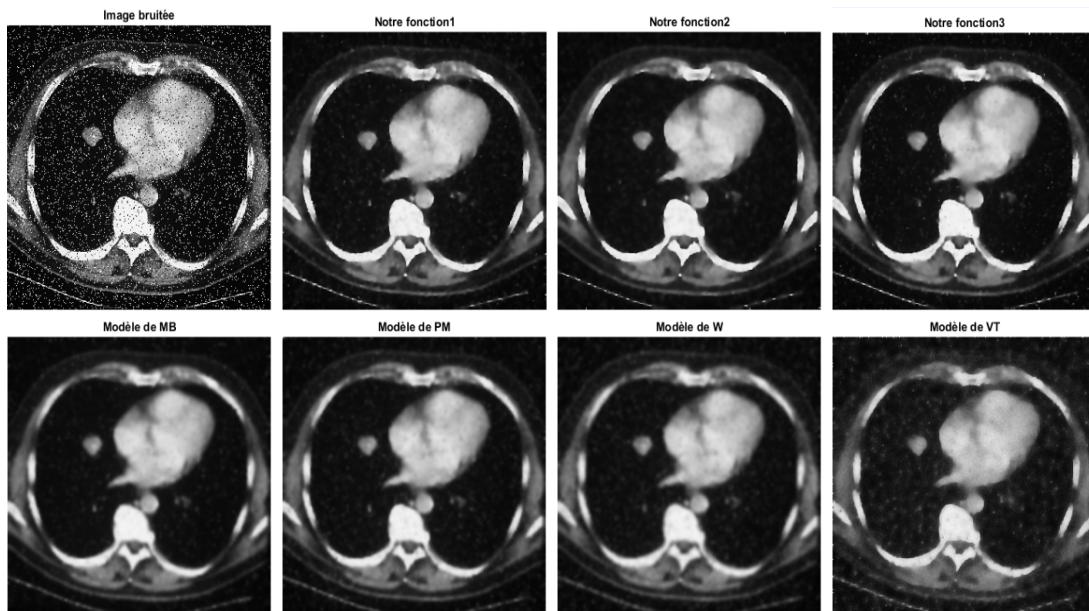


FIGURE 4.14 – Comparaison de différents filtres sur une image médicale.



FIGURE 4.15 – Résultat du débruitage sur une image réelle.

4.8 Application aux Images Naturelles

Nos fonctions de diffusivité, proposées au départ pour éliminer le bruit des images et améliorer les géométries des contours et des coins tout en les préservant, elles sont assez robustes pour s'appliquer aux images naturelles de différents formats. La qualité visuelle des images restaurées est bonne car les structures géométriques de celles sont nettes (figure (4.15)). L'amélioration des contours permet simultanément de corriger les dégradations des images en format JPEG (figure (4.17)) et de préserver les structures de faibles variations, en effectuant un lissage très fort dans les parties uniformes.

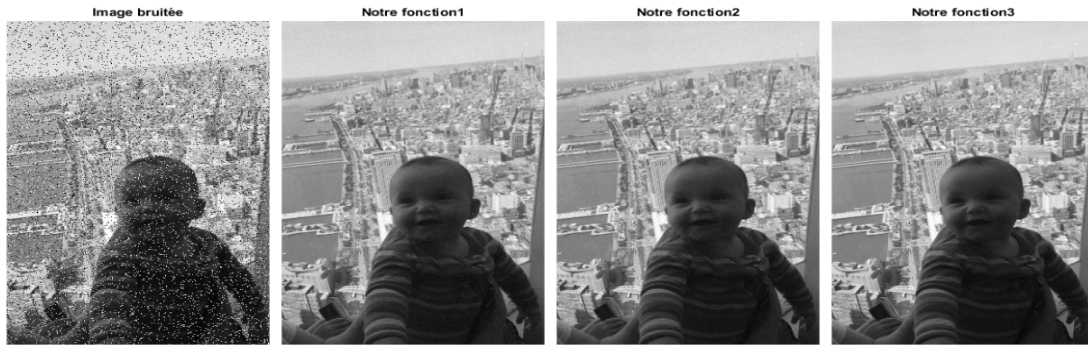


FIGURE 4.16 – Résultats du débruitage de notre filtre sur image de format jpeg.

Sur d'autre image (figure (4.18)), nos fonctions garantissent bien la préservation des contours et ils font la réduction du bruit de l'image d'une manière très efficace. La seule difficulté réside sur la conservation des discontinuités des structures fines car celles-ci sont presque semblables au bruit de l'image qui ne présentent pas de fortes variations.

	Modèles	Notre modèle			W	MB	PM	VT
		H_1	H_2	H_3				
Images	R	PSNR	PSNR	PSNR	PSNR	PSNR	PSNR	PSNR
Lena	36	24.48	24.38	24.52	23.41	23.74	23.74	23.74
Cameramen	92	30.55	29.90	30.25	28.99	29.12	29.46	26.67
Medical2	128	25.09	24.81	24.92	21.74	22.44	22.59	21.00
Gens	75	30.32	29.80	30.05	28.51	28.97	29.25	26.30
Elaine	117	38.45	38.45	38.45	37.07	37.54	37.23	37.37
Carl	111	26.53	25.96	26.27	24.54	24.86	25.08	22.79
Sturn	83	35.51	35.79	35.60	34.21	35.71	34.64	27.57
Lighthouse	66	25.11	25.04	25.11	23.33	23.83	23.95	24.14

TABLE 4.1 – Les valeurs de PSNR obtenus par les différents modèles.

Les tableaux (4.1) et (4.2) montrent les valeurs de PSNR et MSE de différentes approches où On a comparé nos fonctions autres citées précédemment selon différents formats et types de bruit, à partir des valeurs de PSNR et de MSE, et la qualité visuelle illustrée dans les figures (4.17), (4.16) et (4.18), on remarque que si le bruit d'image possède une magnitude inférieure à celle de la norme de gradient des contours et coins des objets, les résultats de notre filtre sont meilleurs par rapport aux autres. De plus, si l'image est très bruitée, on a remarqué que notre filtre a obtenu des résultats significatifs (les structures géométriques des images restaurées sont plus apparentes) comparés à ceux obtenus par les autres filtres.

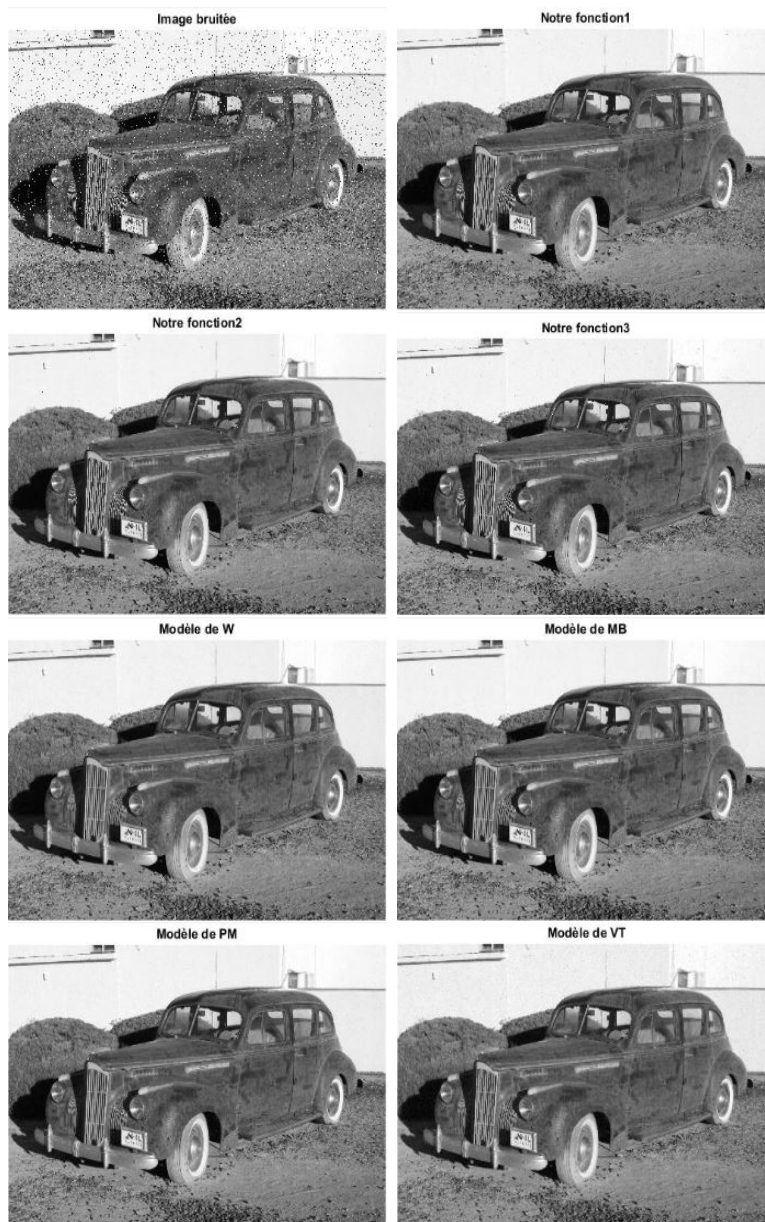


FIGURE 4.17 – Comparaison des différents filtres de restauration sur une image très bruitée.

4.9 Conclusion

On a proposé trois fonctions de diffusivité robustes qui contribuent à l'élimination du bruit le long des contours des images pour obtenir une qualité visuelle nette. Ces fonctions cherchent à tirer le meilleur des propriétés de quelques fonctions existantes.

	Modèles	Notre modèle			W	MB	PM	VT
		H_1	H_2	H_3				
Images	R	MSE	MSE	MSE	MSE	MSE	MSE	MSE
Lena	36	0.0478	0.0480	0.0475	0.0526	0.0507	0.0512	0.0506
Cameramen	92	0.0134	0.0156	0.0136	0.0185	0.0173	0.0167	0.0300
Medical2	128	0.0352	0.0355	0.0332	0.0511	0.0423	0.0446	0.0670
Gens	75	0.0152	0.0166	0.0159	0.0208	0.0190	0.0190	0.0323
Elaine	117	0.0418	0.0417	0.0416	0.0458	0.0455	0.0451	0.0440
Carl	111	0.0292	0.0308	0.0294	0.0364	0.0342	0.0339	0.0489
Sturn	83	0.0119	0.0120	0.0120	0.0150	0.0122	0.0138	0.0343
Lighthouse	66	0.0407	0.0398	0.0404	0.0450	0.0428	0.0432	0.0445

TABLE 4.2 – Les valeurs de MSE obtenus par les différents modèles.

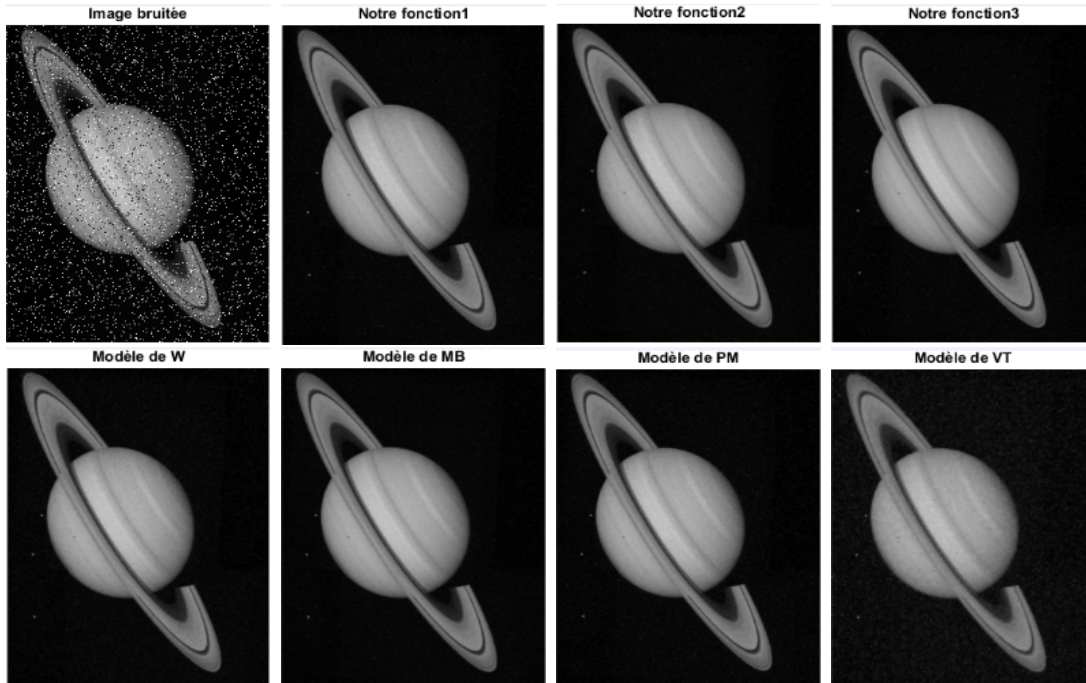


FIGURE 4.18 – Comparaison de la qualité visuelle entre les différents filtres de diffusion.

Ainsi, nos fonctions permettent de préserver toutes les structures géométriques de l'image et d'enlever le bruit des contours tout en préservant les coins (les structures complexes). Elles sont adaptées pour améliorer avec succès des images naturelles. En effet, presque toutes les fonctions de diffusivité actuelles enlèvent essentiellement le bruit et ne permettent pas vraiment de contrôler la force de diffusion le long

des contours et des coins afin de les maintenir. Les domaines d'application de ces fonctions ne sont pas limités au traitement d'un seul format d'images.

Restauration d'Image par un Modèle Stochastique

Dans ce chapitre, on définit les équations différentielles stochastiques (EDS) et on présente un état de l'art de la restauration d'image à base d'EDS avec réflexion et sans réflexion. Ensuite, on introduit notre modèle de diffusion pour réduire le bruit d'images. Et aussi on aborde l'approximation numérique pour résoudre ce modèle en utilisant la méthode des différences finies. De plus, on présente à travers quelques résultats numériques la performance de notre modèle.

5.1 Equations Différentielles Stochastiques

Les EDPs gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on modélise par les équations différentielles stochastiques (EDS).

Définition 5.1.1. *De manière générale, une équation différentielle stochastique est une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément, c'est une équation donnée sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW(t), t \in [0, T] \\ X(0, x, y) = X_0(x, y) \end{cases} \quad (5.1)$$

La condition initiale $X_0(x, y)$ à l'instant $t = 0$ est une fonction de \mathbb{R}^2 , dW est un terme de diffusion, $W = \{W(t), t \geq 0\}$ représente le processus de Wiener à m dimension et $X(t) = \{X_i(t), i = \overline{1, m}\}$ est le processus de diffusion défini dans un espace probabilisé (Ω, F, P) à filtration $\{F_t\}_{t \geq 0}$, $a(t, X_t)$ et $b(t, X_t)$ sont respectivement la fonction de drift et la fonction de diffusion. Avec des conditions sur le bord de Ω , la résolution de l'équation (5.1) nous permet d'avoir une solution qui satisfait l'EDS suivante :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dW(s), t \in [0, T], \quad (5.2)$$

où pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $X_t(\omega)$ est appelée trajectoire de X . Pour plus de détails et d'exemples sur les EDS qui sont utilisées dans le domaine de traitement d'image on envoie le lecteur intéressé vers [49] et [65].

5.1.1 Existence et l'unicité

Dans cette partie nous allons rappeler les conditions de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation (5.1)

Théorème 5.1.1. [47] *Supposons que les coefficients a et b satisfont les deux conditions suivantes : On suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$*

1. *Condition de Lipschitz locale :*

$$|a(t, X) - a(t, Y)| + |b(t, X) - b(t, Y)| \leq K |X - Y|$$

2. *Condition de croissance linéaire :*

$$|a(t, X)| \leq K (1 + |X|)$$

$$|b(t, X)| \leq K (1 + |X|)$$

Alors l'EDS (5.1) admet, pour toute condition initiale X_0 de carré intégrable, une solution forte $(X_t)_{t \in [0, T]}$, presque sûrement continue. Cette solution est unique dans le sens que si $(X_t)_{t \in [0, T]}$ et $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ sont deux solutions presque sûrement continues, alors :

$$\mathbb{P} \{ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| \geq 0 \} = 0.$$

On retrouve aussi des approches de restauration d'images basées sur l'EDS avec réflexion (voir [10]) donnée sous la forme suivante :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X(s)) ds + \int_0^t b(s, X(s)) dW(s) + K_t^{\bar{\Omega}}, t \in [0, T], \quad (5.3)$$

où le terme $K_t^{\bar{\Omega}}$ représente la force minimale nécessaire au processus de diffusion X pour rester dans le domaine de l'image.

5.2 Débruitage d'Images par Approches d'EDS

Dans la littérature, plusieurs approches de restauration à base d'EDS sont proposées pour réduire le bruit qui a dégradé les structures géométriques de l'image, parmi ces modèles, un grand nombre de méthodes [5], [10], [11] et [12] ont été appliquées pour résoudre ce genre problème ; dans ce qui suit on présentera deux modèles de débruitage.

5.2.1 Modèle de Borkowski

Dans le but d'améliorer la performance du processus de restauration, Borkowski a proposé dans [12] une méthode qui est basée principalement sur l'EDS :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s + K_t^{\bar{\Omega}}, t \in [0, T], \quad (5.4)$$

avec $\sigma(t, X_t)$ est définie par :

$$\sigma(t, X_t) = \begin{pmatrix} -(1-c) \frac{(G_\gamma * I_0)_y(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * I_0)(X_t)|} & c \frac{(G_\gamma * I_0)_x(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * I_0)(X_t)|} \\ (1-c) \frac{(G_\gamma * I_0)_x(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * I_0)(X_t)|} & c \frac{(G_\gamma * I_0)_y(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * I_0)(X_t)|} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

où $G_\gamma * I_0$ est la convolution de l'image par un noyau gaussien d'écart-type γ , $(G_\gamma * I_0)_x$ et $(G_\gamma * I_0)_y$ représentent les dérivées premières et le paramètre c est défini par :

$$c = \begin{cases} 0, & \text{si } |\nabla(G_\gamma * I_0)(X_t)| \leq d \\ 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.6)$$

avec d un paramètre qui détermine la direction vers laquelle les trajectoires de $X(\omega)$ sont entraînées.

Résolution numérique l'approximation de l'équation (5.4) se fait par le schéma d'Euler, pour plus de détails voir le schéma formule (14) page 13 de l'article[11]. Pour calculer l'image restaurée, on procède par le calcul de l'espérance définie par

$$I_{\text{restaurée}} \approx \mathbb{E} [I_0(X_{t_k}^x)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_0(X_{t_k}^x(\omega_n)) \quad (5.7)$$

Algorithme

1. Initialisation : Entrer l'image bruitée, les paramètres : Δt (le pas de temps), N_s (le nombre de simulation), le paramètre d et γ (l'écart type de noyau gaussien).
2. Estimer le mouvement brownien par la loi normale $N(0, \Delta t)$.

3. Calculer le paramètre c dans (5.6).
4. Calculer la diffusion $\sigma(t, X_t)$ dans (5.5).
5. Approximer la trajectoire X_t par (5.4) en utilisant la méthode de Monte-Carlo (qui repose sur le schéma d'Euler).
6. Simuler N trajectoires X_t .
7. Calculer l'espérance de ces trajectoires par (5.7) donnant l'image restaurée.

Borkowski a reporté dans [12] que la restauration par un modèle stochastique donne une bonne restauration de l'image permettant la préservation des contours.

5.2.2 Modèle de Barbu et Angelo

Un nouveau modèle stochastique pour la restauration d'image a été proposé par Barbu et Angelo (BA) [5] et les références dans cet article, qui est basé sur l'EDS sans réflexion suivante :

$$X(t) + \int_0^t F(X_s) ds = X_0 + \int_0^t dW_s, t \in [0, T], \quad (5.8)$$

où $F(X_s) = (F_1(X_s), F_2(X_s))$ désigne la fonction du drift.

On associe au modèle stochastique (5.8) un modèle d'EDP en utilisant l'équation de Kolmogorov [47], en écrivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \zeta) = \frac{\mu^2}{2} \Delta_{\zeta} u(t, \zeta) - F(\zeta) \cdot \nabla_{\zeta} u(t, \zeta), t \geq 0 \\ u(0, \zeta) = u_0(\zeta), \zeta \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (5.9)$$

où $\zeta = X_0(x, y) = \{(i, j)\}_{i=\overline{1, m}, j=\overline{1, n}}$ et $\mu \in]0, 1]$.

Avec

$$F(X_1(t), X_2(t)) = \left(e^{-\alpha(X_1^2 + X_2^2)}, e^{-\beta(X_1^2 + X_2^2)} \right), \alpha, \beta \geq 0. \quad (5.10)$$

Algorithme

1. Initialisation : Entrer l'image bruitée, et Δt (le pas de temps).
2. Estimer le mouvement brownien par la loi normale $N(0, \Delta t)$.
3. Calculer la fonction drift $F(t, X_t)$ et la diffusion $\sigma(t, X_t)$ ($\sigma = 1$).
4. Approximer la trajectoire X_t .
5. Simuler N trajectoires de X_t par la méthode de Monte-Carlo.
6. Calculer l'espérance de ces trajectoires.

Dans ce travail on a essayé de calculer l'image restaurée $I(x, y)$ en résolvant l'EDP associée par une méthode de différence finie Euler en temps et à un pas en avant en espace ; au lieu d'appliquer l'algorithme ci-dessus. La Figure (5.1) montre les résultats numériques obtenus par le modèle de l'EDP associée (5.9). La qualité visuelle de l'image restaurée prouve que la performance de ce modèle associée est presque équivalente à celle de l'équation de la chaleur car la fonction drift qui a été proposée par Barbu et Angelo devient rapidement nulle le long des fortes variations (contours, coins, courbures,...), ce qui permet de faire la diffusion de façon isotrope.

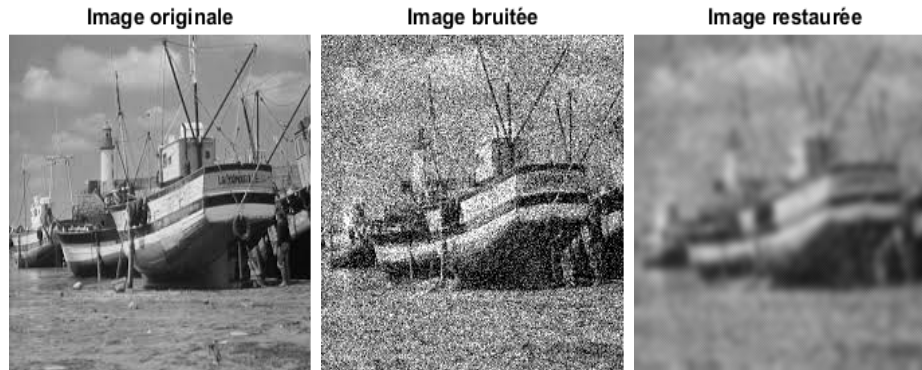


FIGURE 5.1 – Résultat de la restauration d'image bruitée avec un bruit gaussien ($m = 0, v = 0.03$) par l'EDP associée (5.9) après 15 itérations.

5.3 Description du Modèle Proposé

Un certain nombre de modèles proposés pour améliorer le processus de restauration d'image et l'élimination du bruit ont été publiés. Ces modèles qui sont basés sur des hypothèses différentes les unes des autres permettent de donner des résultats satisfaisants, mais le problème de la minimisation de l'effet d'escalier reste un point délicat dans l'image restaurée. Dans cette section, on s'inspire de [5] et on présente une approche basée sur l'EDS ensuite on trouve l'EDP associée en utilisant l'équation de Kolmogorov.

5.3.1 Modèle proposé

On considère le modèle stochastique suivant :

$$X(t) + \int_0^t M(X_s) ds = X_0 + \int_0^t dW_s, t \in [0, T], \quad (5.11)$$

il est à noter que cette équation est l'équation de Barbu et Angelo en fonction de la variable aléatoire X_s , en l'occurrence, la bonne restauration d'images est assurée par la fonction drift, voir la figure (5.1). En (5.8), on propose une nouvelle fonction qui permet de pallier à l'inconvénient inhérent à la diffusion isotrope de Barbu-Angelo et donc de préserver les structures géométriques de l'image.

La résolution de l'équation (5.11) par Kolmogorov revient à l'EDP suivante :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(t, \eta) = \frac{\beta^2}{2} \Delta_{\eta} I(t, \eta) - M(\eta) \cdot \nabla_{\eta} I(t, \eta), t \geq 0, \quad (5.12)$$

Comme l'image I à restaurer est obtenue à partir de l'image initiale donnée à l'instant $t = 0$, qu'on la note par I_0 , écrite comme suit :

$$I(0, \eta) = I_0(\eta)$$

où $\eta = X_0(x, y) = \{(i, j)\}_{i=1, \overline{W}, j=1, \overline{H}}$ et $\beta \in]0, 1]$, avec la fonction de drift M peut être définie par :

$$M(X_t) = (F_1, F_2) = \left(\tanh\left(\frac{\|G_{\gamma} * \nabla I\|}{R}\right)^2, 2 - \frac{2}{2 - e^{-\left(\frac{\|G_{\gamma} * \nabla I\|}{R}\right)^2}} \right), \quad (5.13)$$

où R est un paramètre qui contrôle la vitesse de croissance de F_1 et F_2 .

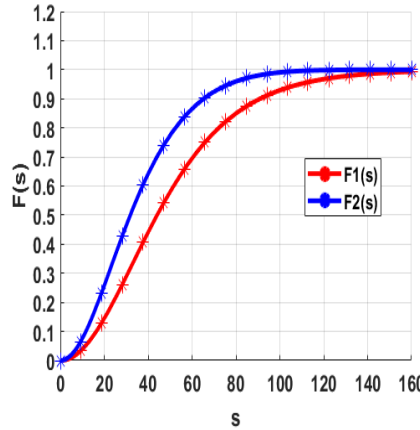


FIGURE 5.2 – Comportement des fonctions F_1 et F_2 en fonction de la norme de la convolution du gradient de l'image avec un noyau gaussien.

Le modèle de diffusion basé sur notre fonction drift (5.13) permet de distinguer entre les zones homogènes et non homogènes. Il faut noter que (5.13), contraint la force de diffusion de l'équation (5.12) à être faible au voisinage des contours pour éviter l'effet indésirable de l'équation de la chaleur. Dans ce cas, cette fonction prend

alors des valeurs plus proche de 1. Par contre, dans les zones à faibles gradients, la fonction drift (5.13) prend la valeur 0 (voir la figure (5.2)) et l'équation (5.12) permet de donner un lissage isotropique et ainsi donner une forte diffusion dans les zones uniformes. Cela assure l'élimination du bruit tout en préservant les structures géométriques de l'image.

5.4 Mise en œuvre numérique

Pour résoudre l'équation (5.12), on considère une discrétisation basée sur la méthode des différences finies, on applique également un schéma centré en espace et un schéma explicite en temps (Forward-Time Central-Space FTCS), avec un bon choix du pas spatiale $\Delta x = \Delta y = 1$, qu'on lui associe un pas de temps Δt convenable, selon le critère de stabilité.

5.4.1 Discrétisation du modèle

Dans cette partie, on va discrétiser séparément les termes de l'équation (5.12), on commence par la dérivée simple $\frac{\partial I}{\partial t}$, et en appliquant le schéma d'Euler, on obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial t}(t, x, y) \approx \frac{I_{i,j}^{n+1} - I_{i,j}^n}{\Delta t}$$

où

$$\begin{cases} t \approx n\Delta t \\ x \approx i\Delta x \\ y \approx j\Delta y \end{cases}$$

et

$$I_{i,j}^n = I(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y)$$

$$\Delta I(t, x, y) \approx \frac{I_{i+1,j}^n - 2I_{i,j}^n + I_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{I_{i,j+1}^n - 2I_{i,j}^n + I_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} M(x, y) \cdot \nabla I(t, x, y) &= \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= F_1(x, y) \frac{\partial I}{\partial x} + F_2(x, y) \frac{\partial I}{\partial y} \\ &\approx F_1(i\Delta x, j\Delta y) \left(\frac{I_{i+1,j}^n - I_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) + F_2(i\Delta x, j\Delta y) \left(\frac{I_{i,j+1}^n - I_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right). \end{aligned}$$

Donc la forme discrète de l'équation (5.12) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_{i,j}^{n+1} &= (1 - 2\Delta t\beta^2) I_{i,j}^n + \frac{\Delta t\beta^2}{2} [I_{i+1,j}^n + I_{i-1,j}^n + I_{i,j+1}^n + I_{i,j-1}^n] \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} [F_1(i\Delta x, j\Delta y) (I_{i+1,j}^n - I_{i-1,j}^n) + F_2(i\Delta x, j\Delta y) (I_{i,j+1}^n - I_{i,j-1}^n)] \\
 &= (1 - 2\Delta t\beta^2) I_{i,j}^n + \frac{\Delta t\beta^2}{2} [I_{i+1,j}^n + I_{i-1,j}^n + I_{i,j+1}^n + I_{i,j-1}^n] \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} \tanh\left(\frac{\|G_\gamma * I\|}{R}\right)^2 (I_{i+1,j}^n - I_{i-1,j}^n) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{2}{2 - e^{-\left(\frac{\|G_\gamma * I\|}{R}\right)^2}}\right) (I_{i,j+1}^n - I_{i,j-1}^n),
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

avec $i = \overline{1, W}, j = \overline{1, H}$,

5.4.2 Stabilité et Implementation

Stabilité

Pour assurer la convergence du schéma (5.14), on étudie la stabilité par la méthode de Fourier. On considère l'équation (5.12), discrétisé par la méthode des différences finies et on écrit

$$\begin{aligned}
 I_{i,j}^{n+1} &= (1 - 2\Delta t\beta^2) I_{i,j}^n + \frac{\Delta t\beta^2}{2} [I_{i+1,j}^n + I_{i-1,j}^n + I_{i,j+1}^n + I_{i,j-1}^n] \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} [F_1(i\Delta x, j\Delta y) (I_{i+1,j}^n - I_{i-1,j}^n) + F_2(i\Delta x, j\Delta y) (I_{i,j+1}^n - I_{i,j-1}^n)].
 \end{aligned}$$

Si on utilise l'analyse de Fourier, en posant : $I_{i,j}^n = \phi^n e^{r(di+gj)}$ avec $r^2 = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \widehat{I}_{i,j}^{n+1} e^{r(di+gj)} &= [1 - 2\Delta t\beta^2] \widehat{I}_{i,j}^n e^{r(di+gj)} + \frac{\Delta t\beta^2}{2} [\widehat{I}_{i,j}^n e^{r(d(i+1)+gj)} + \widehat{I}_{i,j}^n e^{r(d(i-1)+gj)} \\
 &\quad + \widehat{I}_{i,j}^n e^{r(di+g(j+1))} + \widehat{I}_{i,j}^n e^{r(di+g(j-1))}] - \frac{\Delta t}{2} F_1 \left(\widehat{I}_{i,j}^n e^{r(d(i+1)+gj)} - \widehat{I}_{i,j}^n e^{r(d(i-1)+gj)} \right) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} F_2 \left(\widehat{I}_{i,j}^n e^{r(di+g(j+1))} - \widehat{I}_{i,j}^n e^{r(di+g(j-1))} \right).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

On divise l'équation (5.15) par $e^{r(di+gj)}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\widehat{I}_{i,j}^{n+1} &= [1 - 2\Delta t\beta^2] \widehat{I}_{i,j}^n + \frac{\Delta t\beta^2}{2} [\widehat{I}_{i,j}^n e^{rd} + \widehat{I}_{i,j}^n e^{-rd} + \widehat{I}_{i,j}^n e^{rg} + \widehat{I}_{i,j}^n e^{-rg}] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} F_1 (\widehat{I}_{i,j}^n e^{rd} - \widehat{I}_{i,j}^n e^{-rd}) - \frac{\Delta t}{2} F_2 (\widehat{I}_{i,j}^n e^{rg} - \widehat{I}_{i,j}^n e^{-rg})\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\widehat{I}_{i,j}^{n+1} &= \widehat{I}_{i,j}^n \left[1 - 2\Delta t\beta^2 + \frac{\Delta t\beta^2}{2} (e^{rd} + e^{-rd} + e^{rg} + e^{-rg}) - \frac{\Delta t}{2} (e^{rd} - e^{-rd}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta t}{2} (e^{rg} - e^{-rg}) \right].\end{aligned}\tag{5.16}$$

Maintenant, on utilise les formules $\frac{e^{rz} + e^{-rz}}{2} = \cos(z)$ et $\frac{e^{rz} - e^{-rz}}{2r} = \sin(z)$ pour simplifier l'équation (5.16). On a :

$$\widehat{I}_{i,j}^{n+1} = \widehat{I}_{i,j}^n [1 - 2\Delta t\beta^2 + \Delta t\beta^2 (\cos(d) + \cos(g)) - \Delta tr (F_1 \sin(d) + F_2 \sin(g))].$$

Donc :

$$\begin{aligned}\phi &= 1 - 2\Delta t\beta^2 + \Delta t\beta^2 (\cos(d) + \cos(g)) - \Delta tr (F_1 \sin(d) + F_2 \sin(g)) \\ &= 1 - 2\Delta t\beta^2 \sin^2\left(\frac{d}{2}\right) - 2\Delta t\beta^2 \sin^2\left(\frac{g}{2}\right) - \Delta tr (F_1 \sin(d) + F_2 \sin(g))\end{aligned}$$

d'où

$$|\phi| = \sqrt{\left(1 - 2\Delta t\beta^2 \sin^2\left(\frac{d}{2}\right) - 2\Delta t\beta^2 \sin^2\left(\frac{g}{2}\right)\right)^2 + (\Delta t (F_1 \sin(d) + F_2 \sin(g)))^2}$$

Comme le schéma (5.14) est stable pour $|\phi| \leq 1$, ceci est vérifié dès qu'on a :

$$\Re(\phi) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(\phi) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Avec $\Re(\phi)$ et $\Im(\phi)$ sont la partie réelle et imaginaire respectivement du nombre complexe ϕ .

On a $\beta \in]0, 1]$, $0 \leq F_1(s) \leq 1$ et $0 \leq F_2(s) \leq 1$, On peut vérifier facilement que $\Delta t \leq \frac{1}{4}$, on obtient alors $|\phi| < 1$, d'où la stabilité du schéma.

Implémentation

Pour implémenter le schéma numérique (5.14) on applique l'exécution des intructions de l'algorithme suivant :

1. Initialisation : Entrer l'image bruitée I_0 , le pas de temps Δt et le nombre d'itérations n .
2. Appliquer des formules de différences finies pour évaluer les approximations des dérivées $\frac{\partial I}{\partial x}$, $\frac{\partial I}{\partial y}$, ΔI .
3. Approximer $F(x, y) \cdot \nabla I$ en utilisant un schéma de différences finies centrées.
4. Calculer I^{n+1} à partir de (5.14).
5. Calculer le PSNR.
6. Si le PSNR est bien stop, sinon répéter les étapes de 2 à 5.

5.5 Comparaison des résultats numériques

5.5.1 Sans Régularisation

Dans cette sous section, on étudie la comparaison des résultats numériques sans régularisation de l'équation (5.14) de plusieurs exemples de restauration d'images bruitées qui va nous permettre de démontrer l'évaluation qualitative la plus pertinente. On applique et on compare notre modèle aux modèles existants à quatre images réelles de format et de taille différents, elles sont aussi bruitées par différents bruits. Pour plus de détails concernant les images utilisées voir les figures (5.8) et (5.5).

Il faut aussi préciser que les quatre images (a), (b), (c) et (d) (voir Figure (5.8)) sont considérées comme des images de références, l'analyse numérique comparative est construite en rajoutant du bruit gaussien de moyenne $m = 0$ et de variance $v = 0.05$ (voir Figure (5.3)). Mais pour la Figure (5.8), on applique un bruit poivre et sel de densité $d = 0.05$.

Les modèles comparés dans ce cas avec le notre proposé sont les suivants : VT représente la variation totale [51] ; le modèle basé sur les EDP [53] avec B et BA représentent les modèles de Borkwski [10] et celui de Barbu et Angelo [5] respectivement. Dans le cadre de cette comparaison, l'évaluation qualitative (tableaux (5.1) et (5.2)) a été réalisée en utilisant des critères de qualité utilisés en restauration d'images, i.e., PSNR et MSE (voir [21]).

Les résultats présentés dans les tableaux (5.1) et (5.2) démontrent, via les critères de qualité et la comparaison visuelle entre les images restaurées qui sont obtenus avec le modèle proposé sont de meilleure qualité (voir les Figures (5.8) et (5.5)). Les résultats numériques des PSNR et MSE confirment l'efficacité de l'approche de restauration proposée à débruiter de manière efficace tout en préservant les contours de l'image.

Les figures (5.8) et (5.5) montrent bien les résultats visuels obtenus par les différents modèles de restauration, on remarque que nos résultats sont de bonnes qualités

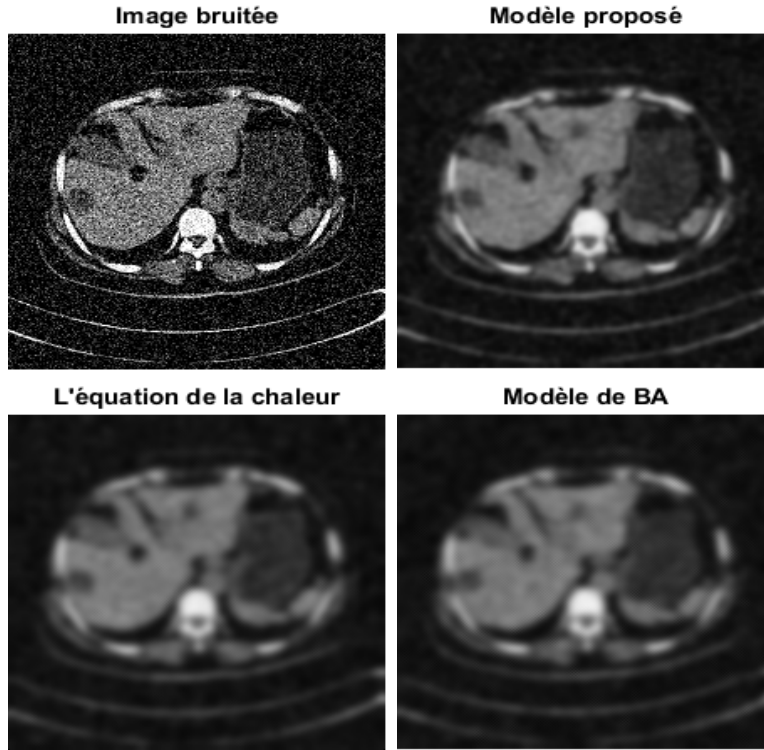


FIGURE 5.3 – Comparaison entre les résultats de quelques modèles de diffusion. L'image bruitée avec le bruit gaussien ($m = 0$, $v = 0.03$) et les résultats obtenus après 15 itérations.

comparativement autres modèles. De plus, à partir des tableaux (5.1) et (5.2), la comparaison des valeurs de PSNR et de MSE pour différents types de bruit rajoutés aux quatre images naturelles de différents formats confirment bien la capacité du modèle proposé à réduire le bruit et à préserver les structures géométriques de l'image.

5.5.2 Avec Régularisation

Dans cette partie, on présente les résultats numériques obtenus par notre modèle proposé en rajoutant le terme de régularisation. Les figures (5.6) et (5.7) illustrent plusieurs exemples de restauration d'images bruitées qui permettent de démontrer l'évaluation qualitative la plus pertinente, où on applique notre modèle régularisé et les modèles existants régularisés sur quatre images réelles de format et de taille différents, elles sont aussi bruitées avec différents bruits.

5.6. APPLICATION DE RESTAURATION D'IMAGES AVEC UNE DIFFUSION STOCHASTIQUE

Modèles	Critères	Lena	Cameraman	Medicale	Airplane
Modèle proposé	PSNR	25.4331	24.6279	20.9779	27.0575
	MSE	0.0383	0.0429	0.0770	0.0308
Notre modèle	PSNR	25.9554	25.1195	21.5516	27.5734
	MSE	0.0361	0.0402	0.0377	0.0293
VT	PSNR	25.6274	24.8332	20.6502	27.9080
	MSE	0.0372	0.0417	0.0806	0.0262
BA	PSNR	24.7507	23.6015	20.3250	26.7989
	MSE	0.0400	0.0469	0.0827	0.0287
B	PSNR	24.1692	23.0249	20.8356	26.6755
	MSE	0.0794	0.1722	1.0653	0.0248

TABLE 5.1 – Analyse comparative entre les valeurs du PSNR et MSE des différents modèles de restauration sur différentes images bruitées par le bruit gaussien ($m = 0$, $v = 0.05$), ces résultats sont obtenus après 20 itérations.

Modèles	Critères	Lena	Cameraman	Medicale	Airplane
Modèle proposé	PSNR	26.5129	26.4370	24.1670	28.9965
	MAE	0.0306	0.0303	0.0399	0.0209
Notre modèle	PSNR	27.6177	27.5223	25.3167	30.4645
	MSE	0.0252	0.0228	0.0282	0.0158
VT	PSNR	25.5508	25.3102	23.3061	28.8812
	MSE	0.0361	0.0368	0.0452	0.0213
BA	PSNR	25.3198	24.9088	23.2441	28.0251
	MSE	0.0351	0.0361	0.0448	0.0216
B	PSNR	25.1467	25.4516	22.4024	27.9090
	MSE	0.0797	0.0615	0.3366	0.0211

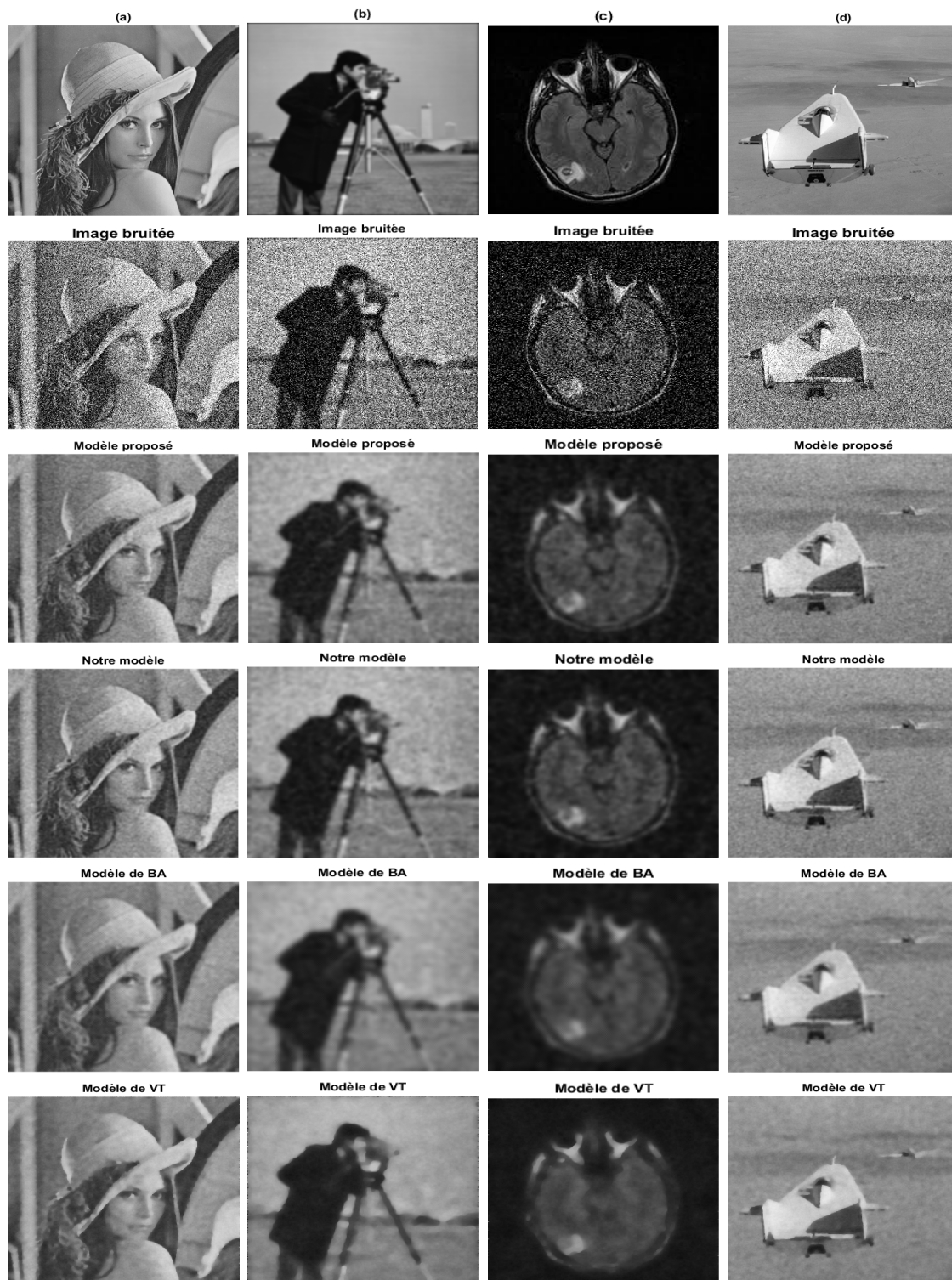
TABLE 5.2 – Analyse comparative entre les valeurs de PSNR et MSE des différents modèles de restauration sur différentes images bruitées par un bruit poivre et sel de variance $v = 0.05$, ces résultats sont obtenus après 20 itérations.

5.6 Application de restauration d'images avec une diffusion stochastique

La solution numérique de l'EDP associée à (5.11) est obtenue par un schéma numérique basé sur les différences finies, tout en prenant en compte une diffusion stochastique.

On remarque d'après les résultats numériques (PSNR et SSIM) de notre modèle

5.6. APPLICATION DE RESTAURATION D'IMAGES AVEC UNE DIFFUSION STOCHASTIQUE



5.6. APPLICATION DE RESTAURATION D'IMAGES AVEC UNE DIFFUSION STOCHASTIQUE

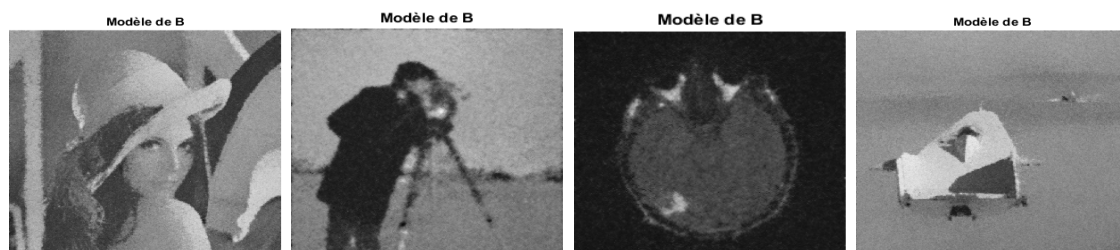
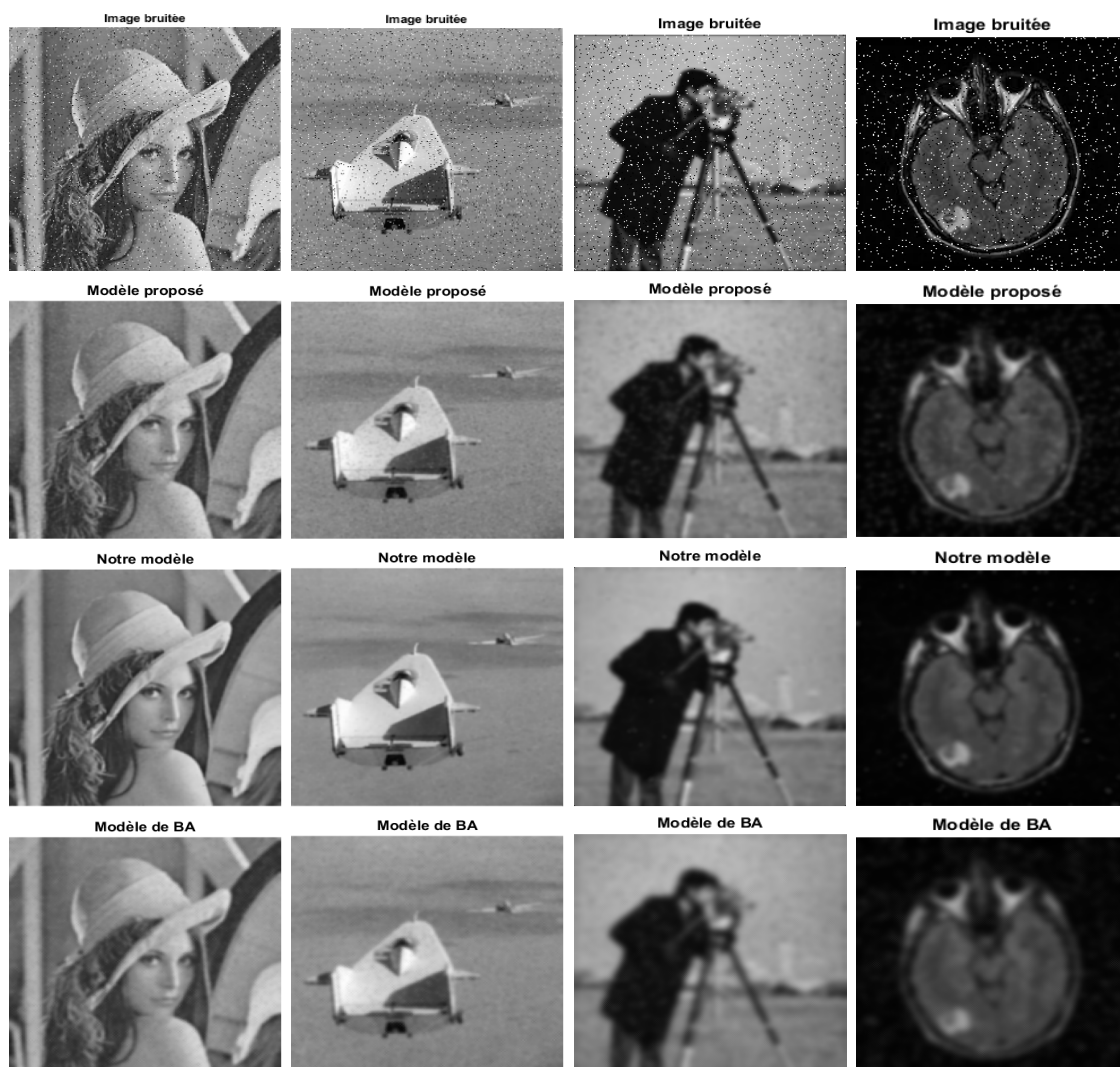


FIGURE 5.4 – Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec le bruit gaussien ($m = 0$, $v = 0.05$).



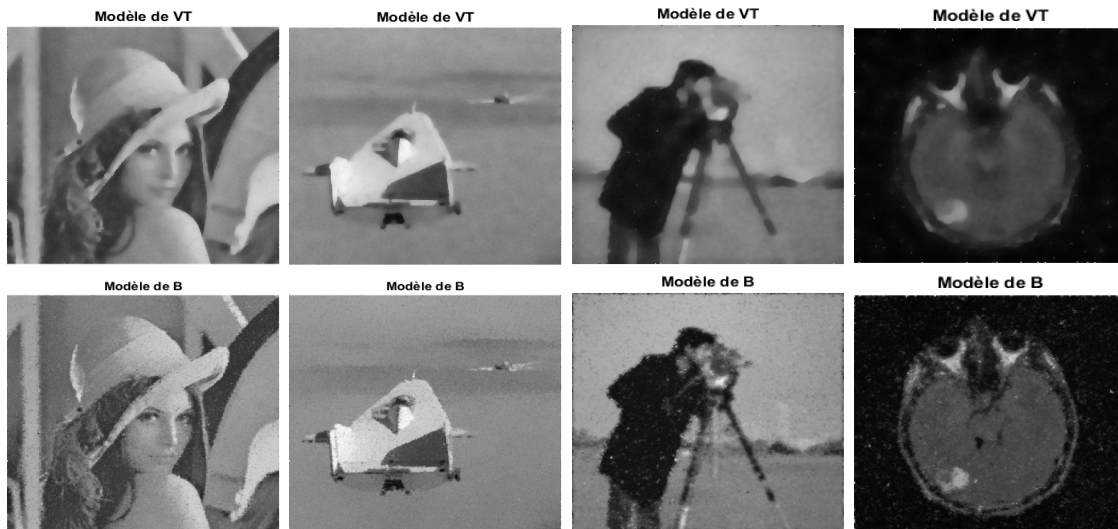
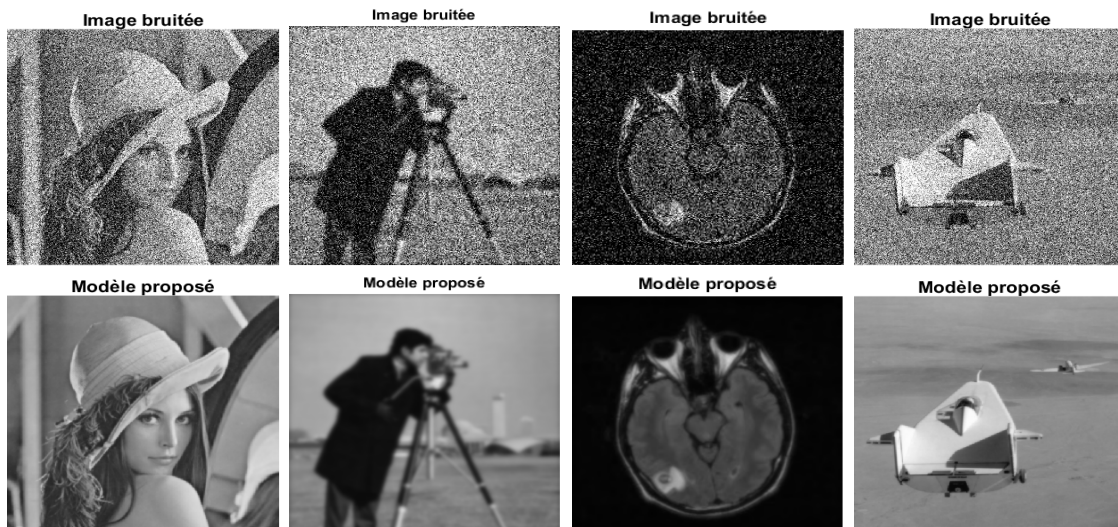


FIGURE 5.5 – Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec un bruit poivre et sel de densité égale à 0.05.



associé à l'EDS (5.11), sont comparativement meilleurs à ceux de Barbu-Angelo et Borkowski respectivement.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a proposé une approche de diffusion qui permet de pallier l'inconvénient du modèle de Barbu-Angelo et donc d'assurer impérativement à

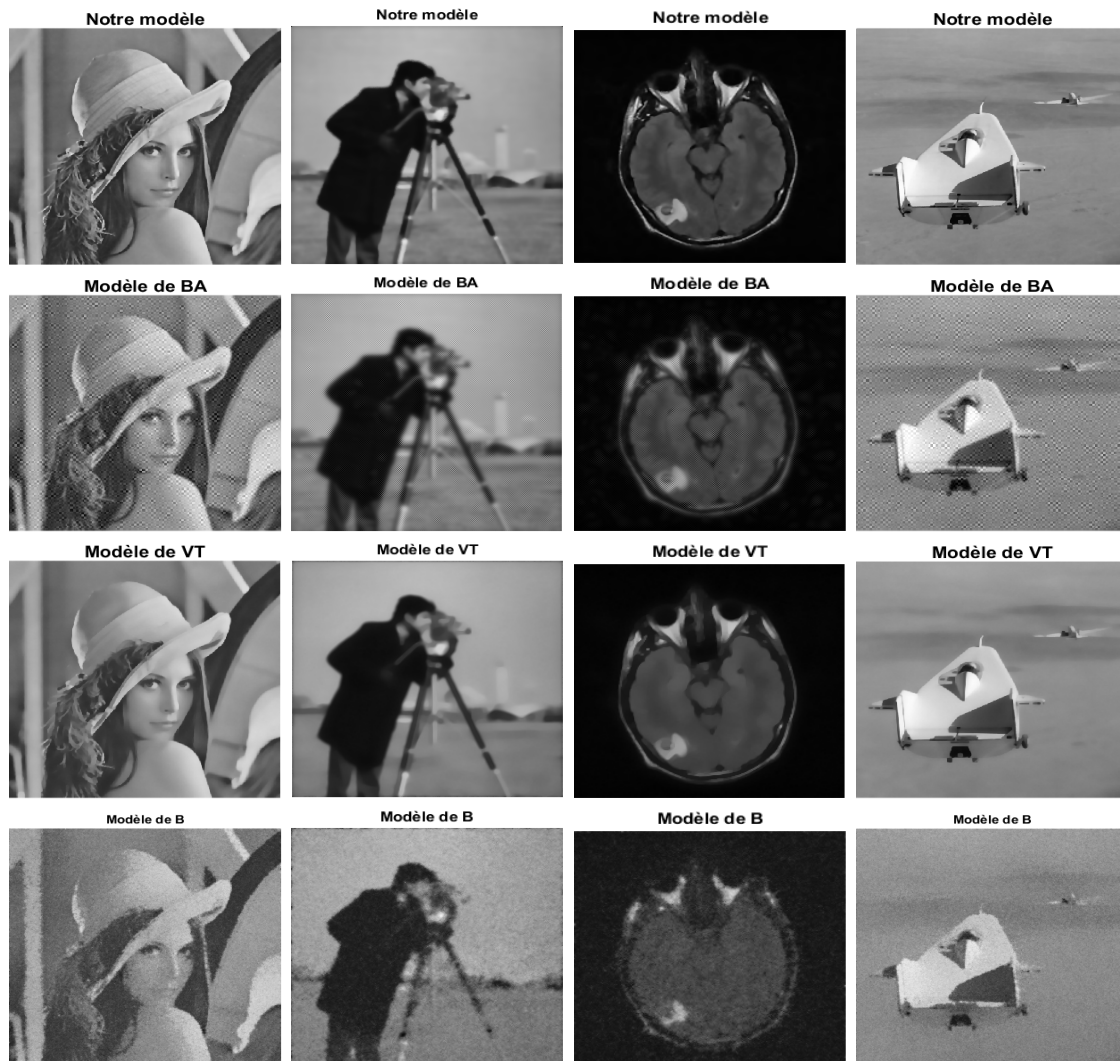


FIGURE 5.6 – Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec le bruit gaussien de moyenne nulle et de variance 0.05

préservent les contours et les coins des images. Notre fonction drift contrôle bien la force de diffusion, dans les zones non homogènes, la diffusion devient anisotrope car notre fonction de drift tend vers 1, mais elle devient totalement nulle dans les zones homogènes et dans ce cas la diffusion devient isotrope. La comparaison des résultats numériques (voir les tableaux (5.1) et (5.2)) a prouvé l'efficacité de la performance de notre modèle par rapport aux autres modèles existants.

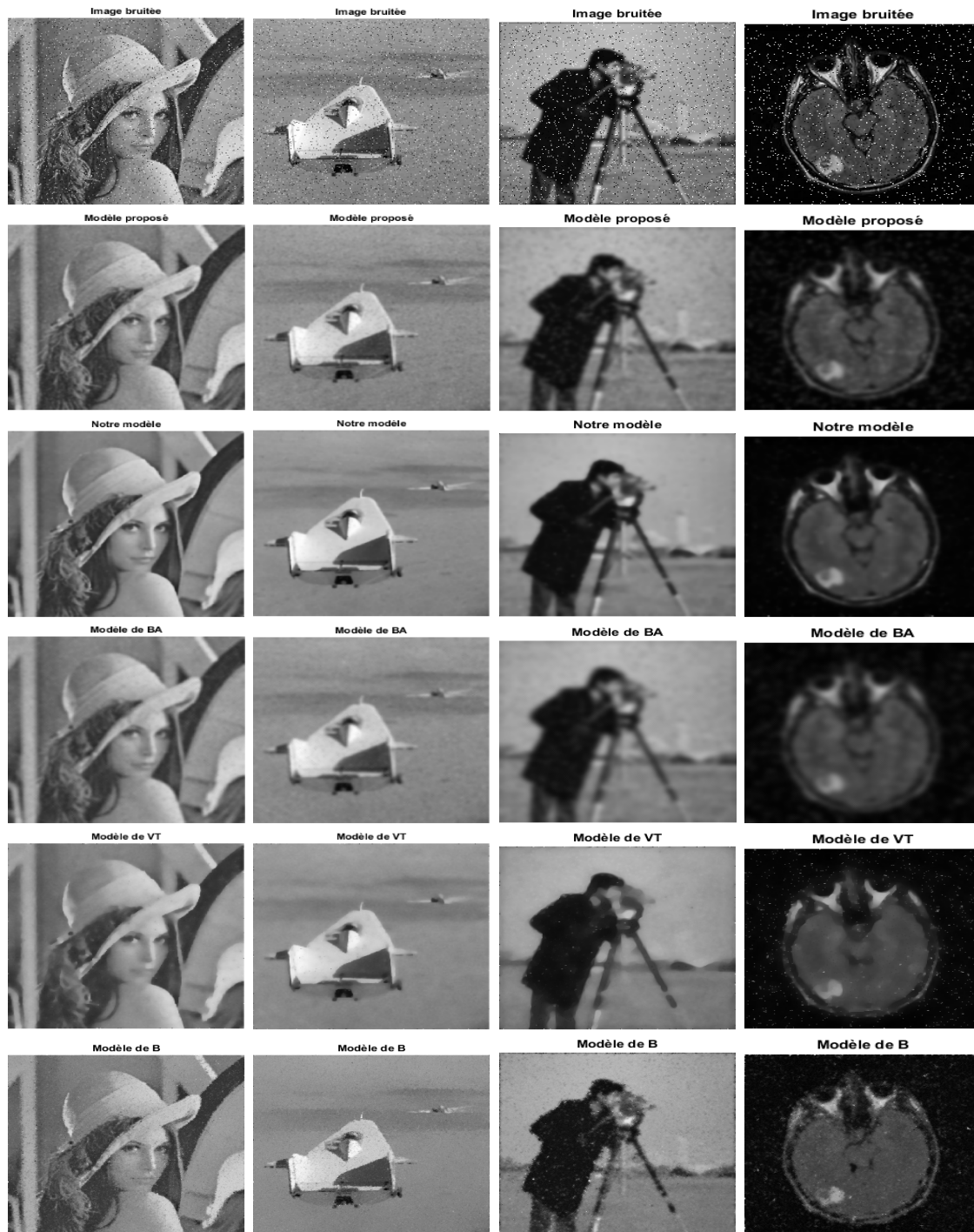


FIGURE 5.7 – Résultats du débruitage de différentes approches sur quatre images bruitées avec un bruit de poivre et sel de densité 0.05.

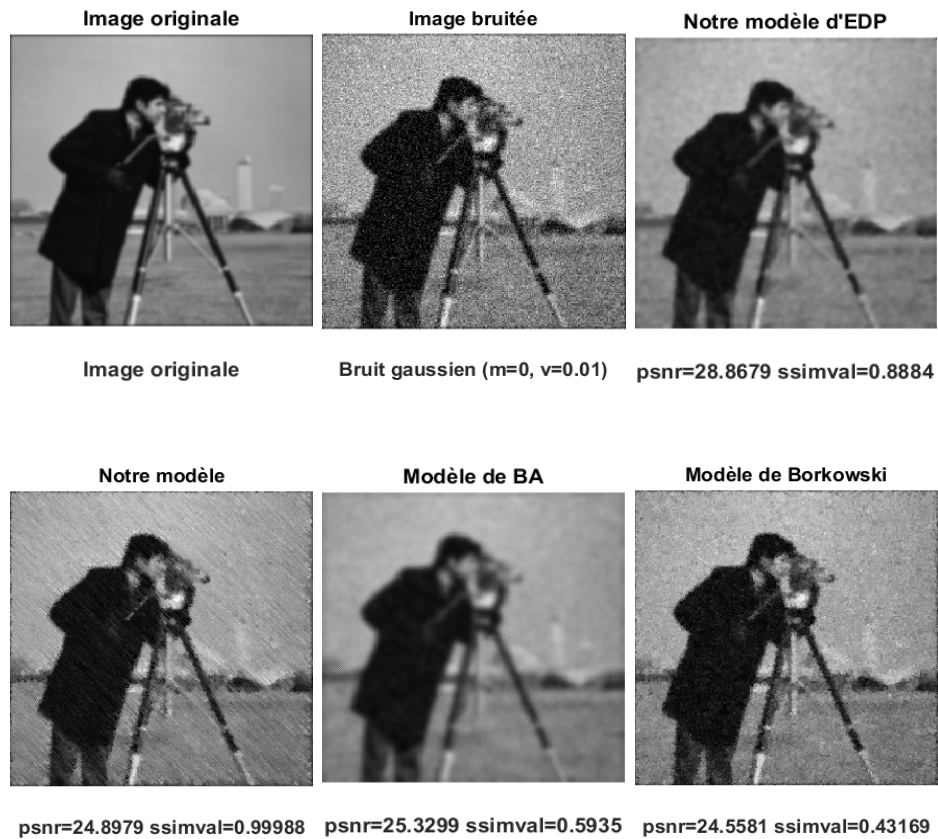


FIGURE 5.8 – Résultats du débruitage de différentes approches sur images bruitées avec un bruit gaussien ($m = 0$ et $v = 0.01$).

Conclusions et Perspectives

Nos travaux de recherches présentés dans cette thèse contribuent au domaine de la restauration des images. On a fait l'étude, l'implémentation et la comparaison du comportement diffusif des modèles existants dans ce cadre. L'objectif de cette étude est de proposer des méthodes de restauration capables d'éliminer le bruit, d'améliorer la qualité de l'image et de préserver les structures géométriques simultanément. On a étudié les performances de nos modèles développés, ensuite, on a appliqué ces nouvelles approches sur des images réelles et synthétiques en niveau de gris.

Nos contributions développées dans cette thèse sont :

- L'amélioration de la performance de fonctions de diffusivité qui ont été publiées dans l'article de Kamalaveni et al [33].
- La proposition de trois fonctions de diffusivité robustes pour l'amélioration et la restauration d'images.
- La proposition d'une nouvelle fonction drift qui a conduit à améliorer de manière très efficace le comportement diffusif du modèle basé sur une équation aux dérivées partielles parabolique associée à une équation différentielle stochastique.
- Nos résultats numériques de restauration obtenus en terme de PSNR, de MSE et de qualité visuelle sont comparativement satisfaisants et compétitifs par rapport aux approches alternatives existantes.

Parmi les perspectives et extensions de nos travaux de recherche :

- L'analyse théorique de notre modèle stochastique présenté, entre autres l'existence et l'unicité de la solution.
- Résolution numérique des EDS.
- Le développement d'une approche de segmentation d'images basée sur les EDPs.
- L'utilisation de nouvelles fonctions drift et diffusion plus adéquates.

Annexe A

Dans cet annexe on présente le code matlab qui excute la stratégie d'implantation du modèle de restauration d'images proposé dans le chapitre 3.

Code matlab pour le modèle de restauration

```
clear all ;
m=1 ;dt=0.1 ;dire=2 ;npoint=8 ;sigma=2 ;nbr=8 ;K=43 ;
while m<=1
im=imread('cameraman.tif') ;
ig=imnoise(im,'gaussian',0.0,0.01) ;
img=double(ig) ;
G=fspecial('gaussian',[3 3],sigma) ;
s=size(img) ;
for t=1 :1 :nbr
for i=2 :s(1)-1
for j=2 :s(2)-1
imgx(i,j)=(img(i+1,j)-img(i,j)) ;
imgy(i,j)=(img(i,j+1)-img(i,j)) ;
imgxy(i,j)=(img(i,j-1)-img(i,j)) ;
imgyx(i,j)=(img(i-1,j)-img(i,j)) ;
end
end
Gx=imfilter(imgx,G,'replicate','same','conv') ;
Gy=imfilter(imgy,G,'replicate','same','conv') ;
Gxy=imfilter(imgxy,G,'replicate','same','conv') ;
Gyx=imfilter(imgyx,G,'replicate','same','conv') ;
nor=sqrt(Gx.^2 + Gy.^2 + Gxy.^2 + Gyx.^2) ;
for i = 2 : s(1) - 1
for j = 2 : s(2) - 1
if m == 1
c(i,j) = ((1/2) - (1 - (nor(i,j)/K)))^2) ;
elseif m == 2
```

```

c(i, j) = 1/1 + (nor(i, j)/K)^(2 - 2/((nor(i, j)/K)^2));
elseif m == 3
    if nor(i, j) == 0
        c(i, j) = 1 - exp(-(3.31488 * (K/nor(i, j))^4));
    else
        c(i, j) = 1;
    end
elseif m == 4
    c(i, j) = exp(-(nor(i, j)/K).^2);
elseif m == 5
    c(i, j) = 1./(1 + (nor(i, j)/K).^2);
end
p1(i, j) = c(i + 1, j) * imgx(i, j);
p2(i, j) = c(i - 1, j) * imgxy(i, j);
q1(i, j) = c(i, j + 1) * imgy(i, j);
q2(i, j) = c(i, j - 1) * imgyx(i, j);
d(i, j) = p1(i, j) + p2(i, j) + q1(i, j) + q2(i, j);
d(1, j) = d(2, j);
d(i, 1) = d(i, 2);
d(s(1), j) = d(s(1) - 1, j);
d(i, s(2)) = d(i, s(2) - 1);
img(i, j) = img(i, j) + dt. * d(i, j);
img(1, j) = img(2, j);
img(i, 1) = img(i, 2);
img(i, s(2)) = img(i, s(2) - 1);
img(s(1), j) = img(s(1) - 1, j);
end
end
end
psnr = 10 * log10((s(1) * s(2) * 255^2)/(sum(sum(((img0) - (img)).^2)))));
figure(1), imshow(im);
title('a');
figure(2), imshow(ig);
title('b');
if m == 1
    figure(3), imshow(uint8(img));
    title('c');
elseif m == 2
    figure(4), imshow(uint8(img));
    title('d');
    figure(5),
elseif m == 3

```

```

figure(6), imshow(uint8(img));
title('(e)');
elseif m == 4
figure(7), imshow(uint8(img));
title('(f)');
elseif m == 5
figure(8), imshow(uint8(img));
title('(g)');
end
m = m + 1;
end.

```

Dans cet annexe on présente le code matlab qui excute la stratégie d'implantation du modèle de restauration d'images proposé dans le chapitre 4.

Code matlab pour le modèle de restauration

Le code suivant sous matlab assure l'implémentation numérique de la discrétisation de l'EDP du modèle de restauration proposé dans le chapitre 4 :

```

function Restored=NSRestoring(IO, T, Δt)
IO=imread('lena.tif');
ig=imnoise(IO,'gaussian',0,0.03);
Img=ig;
[W, H]=size(IO);
for t=1 :Δt :T
for i=1 :W
for j=1 :H
Imgx1(i,j)=Img(i-1,j)-Img(i,j);
Imgx2(i,j)=Img(i+1,j)-Img(i,j);
Imgy1(i,j)=Img(i,j-1)-Img(i,j);
Imgy2(i,j)=Img(i,j+1)-Img(i,j);
Imgx1y1(i,j)=Img(i-1,j-1)-Img(i,j);
Imgx1y2(i,j)=Img(i-1,j+1)-Img(i,j);
Imgx2y1(i,j)=Img(i+1,j-1)-Img(i,j);
Imgx2y2(i,j)=Img(i+1,j+1)-Img(i,j);
P1(i,j)=H(i,j)*Imgx1(i,j);
P2(i,j)=H(i,j)*Imgx2(i,j);
P3(i,j)=H(i,j)*Imgy1(i,j);
P4(i,j)=H(i,j)*Imgy2(i,j);
Q1(i,j)=H(i,j)*Imgx1y1(i,j);
Q2(i,j)=H(i,j)*Imgx1y2(i,j);
Q3(i,j)=H(i,j)*Imgx2y1(i,j);
Q4(i,j)=H(i,j)*Imgx2y2(i,j);

```

```
D(i,j)=P1(i,j)+P2(i,j)+P3(i,j)+P4(i,j)+0.5*Q1(i,j)+0.5*Q2(i,j)+0.5*Q3(i,j)+0.5*Q4(i,j);  
Img(i,j)=Img(i,j)+dt*D(i,j);  
end;  
end;  
end;  
figure, imshow(Img);  
end;
```

Bibliographie

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara ; *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Science Publications, 2000.
- [2] L. Alvarez, L. Mazorra ; *Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion*,SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 31, no. 02, 590-605, 1994.
- [3] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille ; *Variational analysis in sobolev and BV spaces : applications to PDEs and optimization*, MPS-SIAM series on optimization. Philadelphia, ISBN 0-89871-600-4, 2006.
- [4] Barbu, Tudor ; *Robust anisotropic diffusion scheme for image noise removal*, Procedia Computer Science, 35, No.3, 522-530, 2014.
- [5] T. Barbu and A. Favini ; *Novel stochastic differential model for image restoration*, Proceedings of the Romanian Academy - Series A : Mathematics, Physics, Technical Sciences, Information Science. no. 17, 2016.
- [6] Barbu, Tudor and Moroşanu, Costică ; *Image Restoration using a Nonlinear Second-order Parabolic PDE-based Scheme*, Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica, 25, No.1, 48-33, 2017.
- [7] B. Benhamouda ; *Parameter adaptation for nonlinear diffusion in image processing*, Master's thesis, Dept. of Mathematics, University of Kaiserslautern, Germany, 1994.
- [8] M. Benseghir ; *Application des outils mathématiques en traitement d'images*, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2020.
- [9] Black, Michael J and Sapiro, Guillermo and Marimont, David H and Heeger, David ; *Robust anisotropic diffusion*, IEEE Transactions on image processing, 7, No.3, 421-432, 1998.
- [10] D. Borkowski ; *Euler's Approximations to Image Reconstruction*, In : Bolc L., Tadeusiewicz R., Chmielewski L.J., Wojciechowski K. (eds) Computer Vision and Graphics. ICCVG 2012. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Berlin, Heidelberg, vol. 7594, 2012.

-
- [11] Borkowski, Dariusz & Jańczak-Borkowska, Katarzyna; *Image Restoration Using Anisotropic Stochastic Diffusion Collaborated with Non Local Means*, Lecture Notes in Computer Science. 10.1007/978-3-642-40925-7-18, 2013.
- [12] D. Borkowski; *Forward and backward filtering based on backward stochastic differential equations*, Inverse Problems & Imaging 12(2), 305-325, 2016.
- [13] D.Borkowski, Dariusz & K. Jańczak-Borkowska; *Image Denoising Using Backward Stochastic Differential Equations*, Advances in Intelligent Systems and Computing, 2017.
- [14] H. Brezis; *Analyse fonctionnelle, théorie et application*, Dunod, Paris, 1983.
- [15] B. Bringier; *Élaboration de modèles d'évaluation de la qualité du rendu couleur*, Thèse de doctorat, Université de Poitier, 2005.
- [16] F. Catté, P.L. Lions, J.M. Morel et T. Coll; *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 29, no 1, 182-193, 1992.
- [17] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud; *Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 6, no. 2, 298-311, 1997.
- [18] G.H. Chen, C.L. Yang, L.M. Po and S.L. Xie; *Edge-Based Structural Similarity for Image Quality Assessment*, Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006.
- [19] O. Coulon, S.R. Arridge; *Dual echo MR image processing using multispectral probabilistic diffusion coupled with shock filters*, British Conference on Medical Image Understanding and Analysis, London, United-Kingdom, 2000.
- [20] X. DESCOMBES, E. ZHIZHINA; *Image Denoising using Stochastic Differential Equations*, RR-4814, HAL Id : inria-00071772, 2003.
- [21] R. Dosselmann and X.-D. Yang; *Existing and emerging image quality metrics*, In Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 1906-1913, 2005.
- [22] F. ESTRADA, D. FLEET, A. JEPSON; *Stochastic image denoising*, Proc. of British Machine Vision Conference, 2009.
- [23] S. GEMAN, D. GEMAN; *Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-6, 721-741, 1984.
- [24] Guo, Zhichang and Sun, Jiebao and Zhang, Dazhi and Wu, Boying; *Adaptive Perona-Malik model based on the variable exponent for image denoising*, IEEE Transactions on Image Processing, 21, No.3, 958-967, 2012.
- [25] M. L. Hadji, M. Maouni, F. Z. Nouri; *A wavelet inpainting by a tixotrop model*, 14th International Conference Information Visualisation, 559-563, 2010.

-
- [26] M. Jeanblanc ; *Cours de calcul stochastique*, Master 2IF Evry, 2006.
- [27] J. Koenderink ; *The Structure of Images*, Biol. Cybern, vol.50, 363-370, 1984.
- [28] D. P. Kornprobst, R. Deriche, G. Aubert ; *Nonlinear operators in image restoration*, In Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Puerto Rico, 325-331, 1997.
- [29] P. Kornprobst, R. Deriche, G. Aubert ; *Image coupling, restoration and enhancement via PDE's*, In Proceeding Int. Conf. on Image Processing, Santa-Barbara (USA), 458-461, 1997.
- [30] P. Kornprobst ; *Contributions à la Restauration d'Images et à l'Analyse de Séquences : Approches Variationnelles et Solutions de Viscosité*, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [31] R. Kimmel, R. Malladi, N. Sochen ; *Images as embedded maps and minimal surfaces : movies, color, texture, and volumetric medical images*, International Journal of Computer Vision, 39(2), 111-129, 2000.
- [32] L. Kui, T. Jieqing and S. Benyue ; *Adaptive anisotropic diffusion for image denoising based on structure tensor*, Digital Home (ICDH), 2014 5th International Conference on, 111-116, 2014.
- [33] V. Kamalaveni, R. A. Rajalakshmi and K. A. Narayanankutty ; *Image denoising using variations of Perona-Malik model with different edge stopping functions*, Procedia Computer Science, 58, 673-682, 2015.
- [34] Y. Li, A. Chen ; *Nonlinear diffusion with multiple edginess threshold*, pattern Recognition 27 : 1029-1037, 1994.
- [35] H. Maitre ; *Le traitement des images*, Hermes science publication, (2002).
- [36] M. Maouni and F. Z. Nouri ; *Image restoration by partial differential equations*, Geometric Modeling and Imaging–New Trends (GMAI'06), 250-254, 2006.
- [37] M. Maouni, F. Z. Nouri, D. Meskine ; *Image Restoration by Non-standard Diffusion*, 3rd International Conference on Geometric Modeling and Imaging, 98-101, 2008.
- [38] H. Mohamed ; *Processus stochastique et équations aux dérivées partielles*, Mémoire de Magister, Université Mohamed Bougara Boumerdès, 2009.
- [39] M. Maouni and F. Z. Nouri ; *Image Restoration based on a p-Gradient Model*, Int. J. Appl. Math. Stat, Vol. 41, No. 11, 48-57, 2013.
- [40] D. Mezhoud ; *Problèmes inverses dans le traitement d'images*, Thèse de Doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2016.
- [41] D. Mittal, V. Kumar, S. Saxena, N. Khandelwal and N. Kalra ; *Enhancement of the ultrasound images by modified anisotropic diffusion method*, Engineering and Computing 48, 1281-1291, 2010.

-
- [42] J. M. Morel, S. Solimini; *Variationnal methodes in image segmentation*, Birkhausser-Boston, 1995.
- [43] J. Monteil, and A. Beghdadi; *A new interpretation and improvement of the nonlinear anisotropic diffusion for image enhancement*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21, No.9, 940-946, 1999.
- [44] D. Mumford, J. Shah; *Optimal approximation by piecewise smooth functions and variationnal problems*, Communication on pure and applied mathematics, Vol.42, 577-685, 1989.
- [45] N. Nordstrom; *Biased anisotropic diffusion, a unified regularisation and diffusion appraoche to edge detection*, Image and Vision Computing, Vol.8, no.11, 318-327, 1990.
- [46] S. Osher, L. Rudin; *Featured-oriented image enhancement using shock filters*, SIAM J. on Numerical Analysis (27), 919-940, 1988.
- [47] B. OKSENDAL; *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, 3rd Edition, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [48] P. Perona, J.Malik; *Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion*, IEEE Trans. Pattern. Analysis and Machine Intelligence, 629-639, 1990.
- [49] E. Pardoux; *Backward Stochastic Differential Equations and Viscosity Solutions of Systems of Semilinear Parabolic and Elliptic PDEs of Second Order*, 1998.
- [50] L. Piffet; *Décomposition d'image par modèles variationnels-Débruitage et extraction de texture*, Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 2010.
- [51] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi; *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D, 60, 259-268, 1992.
- [52] H. Rezgui, M. Maouni, M. L. Hadji, G. Touil; *Evaluation of a new anisotropic filter for image restoration based upon Perona-Malik model*, Pacific Journal of Applied Mathematics. Vol. 9, No. 3, 205-219, 2017.
- [53] H. Rezgui, M. Maouni, M. L. Hadji and G. Touil; *Three Robust Edges Stopping Functions For Image Denoising*, Bol. Soc. Paran. Mat., SPM -ISSN-2175-1188 on line, ISSN-0037-8712 in press.
- [54] J. Sher, and S. Castan; *An optimal linear operator for step edge detection. Graphical models and image processing*, 54, 112-133, 1994.
- [55] N. Sochen, R. Kimmel, R. Malladi; *Image processing via Beltrami operator*, In proceeding of 3-rd Asian conf. on computer vision. Hong Kong, 1998.
- [56] N. Sochen, R. Kimmel, R. Malladi; *A geometrical framework for low level vision*, IEEE Transaction on Image Processing, Special Issue on PDE based Image Processing, 7(3), 310-318, 1998.
- [57] A. Tikhonov, V. Arsenin; *Solution of Ill-Posed Problems*, Winston and Wiley, 1977.

-
- [58] Tian, Haiying and Cai, Hongmin and Lai, Jian-Huang and Xu, Xiaoyin; *Effective image noise removal based on difference eigenvalue Image Processing*, (ICIP), 2011 18th IEEE International Conference on, 3357-3360, 2011.
- [59] F. Torkamani-Azar, K. E. Tait; *Image recovery using anisotropic diffusion equation*, IEEE Trans. Image Proc., 5, 1573-1578, 1996.
- [60] D. Tschumperlé, R. Deriche; *Constrained and Unconstrained PDEs for Vector Image Restoration*, Dans Proceedings of Scandinavian Conference on Image Analysis, Bergen, Norway, 153-160, 2001.
- [61] D. Tschumperlé, R. Deriche; *Diffusion PDEs on Vector-valued Images : Local Approach and Geometric Viewpoint*, Dans IEEE Signal Processing Magazine, Vol 19. No 5, 16-25, 2002.
- [62] D. Tschumperlé; *PDEs based regularization of multivalued images and applications*, Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis/France, 2002.
- [63] D. Tschumperlé, R. Deriche; *Vector-Valued image regularisation with PDEs : A common framework for different applications*, IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.27, No 4, 2005.
- [64] C. Tsotsios and Petrou Maria; *On the Choice of the Parameters for Anisotropic Diffusion in Image Processing*, Pattern Recognition, 2012.
- [65] G. Unal, Gozde, H; Krim and A. Yezzi, Anthony; *Stochastic differential equations and geometric flows*, IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society. 11, 1405-16, 2002.
- [66] Wang, Zhou and Bovik, Alan C and Sheikh, Hamid R and Simoncelli, Eero P.; *Image quality assessment : from error visibility to structural similarity*, IEEE transactions on image processing, 13, No.4, 600-612, 2004.
- [67] Wang, YQ and Guo, Jichang and Chen, Wufan and Zhang, Wenxue; *Image denoising using modified Perona-Malik model based on directional Laplacian*, Signal Processing, 93, No.9, 2548-2558, 2013.
- [68] R. T. Whitaker and S. M. Pizer; *A multi-scale approach to nonuniform diffusion*, CVGIP : Image Understanding, 57, 99-110, 1993.
- [69] J. Weickert; *Scale-space properties of nonlinear diffusion filtering with a diffusion tensor*, Report No. 110. Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern, Germany, 1994.
- [70] J. Weickert; *Multiscale texture enhancement*, In : Hlavac V. Sara R. Computer analysis of images and patterns, Springer, Berlin, 230-237, 1995.
- [71] J. Weickert; *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, Laboratory of Technomathematics, Thèse de doctorat, University of Kaiserslautern, Germany, 1996.

-
- [72] J. Weickert; *Coherence-enhancing diffusion of colour images*, 7th National Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis, Barcelona, Spain, 1997.
- [73] J. Weickert; *Anisotropic Diffusion in Image Processing*, European Consortium for Mathematics in Industry. B. G. Teubner, Stuttgart, Germany; 1998.
- [74] Weickert, Joachim; *Coherence-enhancing diffusion filtering*, International journal of computer vision, 31,No.2-3, 111-127, 1999.
- [75] J. Weickert; *Coherence enhancing shock filters*, In Pattern Recognition, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2781, Springer, Proceedings of DAGM 2003, 1-8, Germany, 2003.
- [76] R. T. Whitaker; *Geometry limited diffusion*, Thèse de doctorat, Department of Computer Science, Universty of North Carolina, 1993.
- [77] Yuan, Jianjun and Wang, Jianjun; *Perona-malik model with a new diffusion coefficient for image denoising*, International Journal of Image and Graphics, 16,No.2, 1650011, 2016.
- [78] M. Zitouni; *Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades*, Mémoire Magistere, Université Mhamed bougara-boumerdes, 2010.