وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2021/2022

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Inégalités Intégrales et Applications aux Systèmes D'équations Différentielles et D'équations aux Échelles de Temps

Option
Équations Différentielles et Applications

Par
Meramria Meissoun

DIRECTEUR DE THÈSE :	Boukerrioua Khaled	Prof.	U.B.M. ANNABA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE:	Ferchichi Mohamed Réda	Prof.	U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	Guezane- Lakoud Assia	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Salah Derradji Lylia	M.C.A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Meftah Badreddine	M.C.A	UNIV. GUELMA
EXAMINATEUR :	Aissaoui Fatima	M.C.A	UNIV. GUELMA

Dédicaces

Je dédie ce travail

A mes très chers parents

A mon cher mari Mohsen

A mes sœurs Lina, Ranim et mon frère Anis.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu qui m'a donné force, et courage afin d'élaborer ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur **Boukerrioua Khaled**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, pour son suivi attentif, ses conseils avisés et surtout sa disponibilité. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, et de son efficacité certaine.

Je remercie aussi mon co-directeur de thèse, Monsieur **Ferchichi Mohamed Réda**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, pour son aide et sa disponibilité

Mes remerciements les plus chaleureux à Madame **Guezane-Lakoud Assia**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également, Madame **Salah Derradji Lylia**, Maître de conférences « A » à l'université Badji Mokhtar-Annaba, de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner cette thèse.

Je remercie Monsieur **Meftah Badreddine**, Maître de conférences « A » à l'université de Guelma, de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner cette thèse.

Je remercie aussi Madame **Aissaoui Fatima**, Maître de conférences « A » à l'université de Guelma, de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner cette thèse.

Je remercie très chaleureusement mes chers parents, qui font preuve d'un soutien inconditionnel, et spécialement ma mère qui m'a épaulé durant les moments les plus difficiles.

Un très grand merci du fond du cœur à mon cher mari, pour son soutien moral et son encouragement tout au long de ce travail. Je le remercie très sincèrement pour son aide et sa disponibilité.

Un grand merci à mes sœurs et mon frère, d'avoir été toujours à mes côtés et de m'avoir soutenu.

Sans oublier tous les enseignants de département de Mathématiques, en particulier ma cousine **Hebhoub Fahima** et Mme **Hamidène Nacira** et tous ceux qui m'ont aidé pour réaliser ce travail.

Table des matières

Résumé

Il est largement connu que la théorie des inégalités intégrales présente un rôle fondamental dans le développement des théories des équations différentielles non linéaires et intégrales, elles présentent un outil important dans l'étude de l'existence, l'unicité, la stabilité et d'autres propriétés qualitatives des solutions.

L'objectif de cette thèse est d'établir, dans un premier temps, de nouvelles inégalités intégrales non linéaires de type Bihari-Gamidov à deux variables aux échelles de temps.

Dans un deuxième temps, nous avons établi des nouvelles généralisations des inégalités intégrales à retard avec puissance.

Enfin, nous avons étudié la stabilité de certains systèmes perturbées et la stabilité pratique en particulier aux échelles de temps, en utilisant deux approches, l'une est l'approche des inégalités intégrales et l'autre de la fonction de Lyapunov.

Mots-clés : Inégalités intégrales, échelle de temps, inégalité de Gronwall, inégalité de Bihari-Gamidov, stabilité, stabilité pratique, systèmes perturbés.

Abstract

It is widely known that the theory of integral inequalities plays a fundamental role in the development of non-linear and integral differential equation theories, they present an important tool in the study of existence, uniqueness, stability and other qualitatives properties of solutions.

The objective of this thesis. At first, is to establish new non-linear Bihari-Gamidov type integral inequalities in two independent variables on time scales.

Secondly, we established new generalizations of delay non-linear integral inequalities with power.

Eventually, we studied the stability of certain perturbed systems and the practical stability in particular on time scales, using two approaches, one is the integral inequalities approach, and the other is the Lyapunov function.

Keywords : Integral inequalities, time scales, Gronwall's inequality, Bihari-Gamidov's inequality, stability, practical stability, perturbed systems.

ملخــــص

من الشائع أن نظرية المتراجحات التكاملية تلعب دورا أساسيا في تطوير الدراسة النظرية للمعادلات التفاضلية الغير خطية والتكاملية. وهي وسيلة مهمة في دراسة الوجود والوحدانية والاستقرار وغيرها من الخصائص النوعية للحلول.

حيث أن الهدف من هذه الاطروحة في البداية، هو إنشاء متراجحات تكاملية غير خطية جديدة من نوع "بيهاري-جامدوف" بمتغيرين على الجداول الزمنية.

بعد ذلك، قمنا بتعميم متراجحات تكاملية غير خطية مع التأخير ذات أسس.

وفي النهاية درسنا الإستقرار لبعض الأنظمة في حالة وجود اضطراب وبالأخص الإستقرار العملي على الجداول الزمنية، وذلك باستعمال بعض المتراجحات التكاملية ودالة ليابونوف.

الكلمات المفتاحية:

المتراجحات التكاملية، الجداول الزمنية، متراجحات جرنوال، متراجحات بيهاري-جامدوف، الإستقرار، الإستقرار العملي، الأنظمة المضطربة.

Introduction

Les mathématiques sont un ensemble de connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les ensembles mathématiques, les nombres, les formes, les structures, les transformations, etc. Ainsi qu'aux relations et opérations mathématiques qui existent entre ces objets. Elles sont aussi le domaine de recherche développant ces connaissances, ainsi que la discipline qui les enseigne.

Plus précisément, et en mathématiques appliquées, les inégalités jouent un rôle très important dans plusieurs branches, telles que l'analyse, les probabilités et les statistiques. En particulier, les inégalités intégrales jouent un rôle considérable dans l'étude des équations intégrales et plus généralement dans le cadre des équations différentielles ordinaires et avec retard.

D'autres travaux qui sont liés à ce type d'inégalités ont été établis pour les équations d'évolutions en présence de petites perturbations. Ces inégalités ont été introduites par **Gronwall** en 1919 [32], qui a élaboré leurs applications dans plusieurs domaines. Et depuis cette époque, la théorie de ces inégalités a connu une croissance rapide et de nombreuses monographies ont été consacrées à ce sujet. Les applications des inégalités intégrales, ainsi les inégalités différentielles, ont été développées de manière remarquable dans l'étude du comportement asymptotique des solutions, (l'existence, l'unicité, la comparaison, la stabilité) ainsi que la dépendance continue des conditions initiales. Notons aussi qu'une série de généralisations sont motivées par certaines applications. Parmi ces généralisations, on peut citer les travaux de **Bellman** [7], **Pachpatte** [43] et **Bihari** [15].

Par ailleurs, l'unification et la simplification sont deux points principaux en mathématiques. L'une des principales tentatives pour unifier l'analyse continue et discrète est la théorie des échelles de temps. Cette nouvelle théorie a été initiée par **Stefan Hilger** dans sa thèse de doctorat [34] en 1988. Ceci constitue un sujet unique pour étudier à la fois les problèmes différentiels et de différence des équations dynamiques. Elle peut s'appliquer à tout domaine dans lequel la dynamique des processus est décrite par des modèles en temps discret ou continue ou une combinaison des deux, tels que les modèles macroéconomiques, la dynamique radioactive et le cycle agronomique des plantes saisonnières. L'étude des équations dynamiques aux échelles de temps, est un domaine des mathématiques qui reçoit actuellement une attention considérable. Les chercheurs **Martin Bohner** et **Allan Peterson** étendent et incorporent les résultats de **Hilger**, avec ceux de beaucoup d'autres dans le domaine, dans les deux livres importants [4, 16], riches en informations sur cette vaste théorie.

L'objectif de cette thèse est d'établir, dans un premier temps, de nouvelles généralisations des inégalités intégrales de type Bihari-Gamidov à deux variables aux échelles de temps, et nouvelles versions des inégalités intégrales non linéaires à retard, ainsi que leurs applications. Dans un second temps, nous présentons l'étude de stabilité de certaines classes de quelques systèmes non linéaires par l'approches des inégalités intégrales et nous montrons aussi l'utilité des fonctions de Lyapunov définies sur des échelles de temps pour l'étude de la stabilité pratique de certains systèmes perturbés aux échelles de temps.

Cette thèse est répartie en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré d'une part, à quelques définitions et propriétés essentielles concernant la théorie des échelles de temps, et plusieurs inégalités intégrales et d'autre part, à la théorie de la stabilité.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des inégalités intégrales de type Gamidov. Nous allons citer brièvement les résultats classiques obtenus de ce type d'inégalités ainsi que quelques généralisations obtenues par **Pachpatte** [44] et **Kendre** et **Latpate** [36], puis nous allons établir des nouvelles inégalités de type Bihari-Gamidov à deux variables, qui sont des généralisations des résultats obtenus par **Boukerrioua, Diabi et Kilani** [19], sur des échelles de temps quelconques. Ces nouvelles inégalités, peuvent être utilisées comme outils dans l'étude du comportement qualitatif des solutions de certaines équations intégrales et différentielles, et ont fait l'objet de la publication :

M. Meramria, K. Boukerrioua and B. Kilani, Further Results of Certain

Bihari-Gamidov Type Integral Inequalities in Two Independent Variables on Time Scales and Applications. Surveys in Mathematics and its Applications 16 (2021), 111–126.

Le troisième chapitre concerne les inégalités intégrales non linéaires à retard, dans lequel nous présentons tout d'abord une petite introduction autour des équations différentielles à retard et quelques résultats classiques, puis nous citerons quelques généralisations apparues ces dernières années [39, 49, 47]. Enfin, nous présentons de nouvelles généralisations qui sont illustrées par quelques applications.

Les résultats obtenus sont soumis pour une éventuelle publication dans une revue internationale.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la stabilité exponentielle de certaines classes de quelques systèmes perturbés par l'approche des inégalités intégrales et à la stabilité pratique par l'approche de la fonction de Lyapunov aux échelles de temps. Certains résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

K. Boukerrioua, D. Diabi, M. Meramria, M. A. Hammami, Sufficient conditions for uniform exponential stability of some classes of dynamic equations on time scales and applications, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 41(1), (2021), 60–70. Les autres nouveaux résultats, ont été soumis pour une éventuelle publication dans une revue internationale.

Cette thèse s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous allons présenter tous les notions de base nécessaires tout au long de notre travail. Dans la première section nous présentons quelques notions de base sur la théorie des échelles de temps et pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [16] , [18]. Dans la deuxième section nous citerons également quelques inégalités importantes ainsi que quelques résultats d'analyse. Enfin à la troisième section, nous rappellerons quelques notions fondamentales et des définitions correspondantes à la théorie de stabilité.

1.1 La théorie des échelles de temps

En mathématique, le calcul des échelles de temps a été introduit en 1988 par le mathématicien allemand **Stéphan Hilger** [34], afin de créer une théorie qui peut unifier l'analyse discrète et continue. Les équations dynamiques sur une échelle de temps ont un potentiel d'applications au cours des dernières années telles que la dynamique des populations. Par exemple, ils peuvent modéliser des populations d'insectes qui évoluent continuellement pendant la saison, meurent en hiver pendant que leurs œufs sont en incubation ou en dormance, puis éclosent au cours d'une nouvelle saison, donnant lieu à une population non chevauchante.

Nous rappelons maintenant quelques notions de base liées à la théorie des échelles de temps et dérivabilité des fonctions.

1.1.1 Terminologie

Définition 1.1 *Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble arbitraire fermé non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1 *Les ensembles $\mathbb{R}, \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{x \in \mathbb{R}; \|x\| \leq 1\} \cup \left\{\frac{n}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P_{\{a,b\}} = \cup_{k=0}^{\infty} [k(a+b); k(a+b)+a]$, sont des échelles de temps.*

Exemple 1.2 *Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1 *La topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$.*

1.1.2 Opérateurs de sauts

Les opérateurs de saut avant et de saut arrière représentent le point le plus proche de l'échelle de temps à droite et à gauche d'un point donné, respectivement.

Définition 1.2 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, pour $t \in \mathbb{T}$, l'opérateur de saut avant (forward jump operator) $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ est défini comme suit*

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.1}$$

Définition 1.3 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, pour $t \in \mathbb{T}$, l'opérateur de saut arrière (backward jump operator) $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ est défini comme suit*

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

Définition 1.4 *On appelle fonction de granulation la fonction définie par*

$$\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty), \quad \mu(t) = \sigma(t) - t. \tag{1.3}$$

Remarque 1.2 *Dans ces deux définition, nous posons* $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$*, (ie,* $\sigma(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *a un maximum en* t*) et* $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$*, (ie,* $\rho(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *a un minimum en* t*), où* $\emptyset$ *désigne l'ensemble vide.*

Nous illustrons les définitions précédentes par les exemples suivants :

Exemple 1.3 *Le tableau suivant présente quelques échelles de temps et leurs caractéristiques :*

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$2^{\mathbb{N}}$	$\overline{q^{\mathbb{Z}}} := q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$	$\mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}$
$\sigma(t)$	t	$t+1$	$2t$	qt	$\sqrt{t^2+1}$
$\rho(t)$	t	$t-1$	$\frac{t}{2}$	$\frac{t}{q}$	$\sqrt{t^2-1}$
$\mu(t)$	0	1	t	$(q-1)\,t$	$\sqrt{t^2+1}-t.$

Exemple 1.4 *Soit* H_n *la fonction harmonique et* $\mathbb{T} = \{H_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *avec*

$$H_0 = 0 \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Alors nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma(H_n) &= H_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ \rho(H_n) &= H_{n-1} \text{ si } n \in \mathbb{N}, \text{ et } \rho(H_0) = H_0 \\ \mu(H_n) &= \sigma(H_n) - H_n = H_{n+1} - H_n = \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

1.1.3 Classification des points dans une échelle de temps $\mathbb{T}$

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps arbitraire, les points $t \in \mathbb{T}$ sont classés comme suit :

Définition 1.5 *On dit que* t *est un point dense à droite de* $\mathbb{T}$*, si* $t < \sup \mathbb{T}$ *et* $\sigma(t) = t$ *(resp. un point dense à gauche de* $\mathbb{T}$*), (resp.* $t > \inf \mathbb{T}$ *et* $\rho(t) = t$*).*

Définition 1.6 *On dit que* t *est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.7 *On dit que t est un point dispersé à droite de $\mathbb{T}$ (resp. un point dispersé à gauche de $\mathbb{T}$), si $\sigma(t) > t$ (resp. $\rho(t) < t$).*

Définition 1.8 *t est dit point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Les points	**La description**
dense à droite	$t = \sigma(t)$
dense à gauche	$t = \rho(t)$
dispersé à gauche	$\rho(t) < t$
dispersé à droite	$t < \sigma(t)$
dense	$\sigma(t) = t = \rho(t)$
isolé	$\rho(t) < t < \sigma(t)$.

1.1.4 Les sous ensembles dérivés d'une échelle de temps

Nous notons que, de chaque échelle de temps, nous pouvons extraire les sous-ensembles suivants :

Définition 1.9 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, l'ensemble $\mathbb{T}^k$ est défini comme suit :*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & si \quad \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si \quad \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Exemple 1.5 *Soit $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors $\sup \mathbb{T} = \infty$ et $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.10 *Pour deux points $a, b \in \mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est défini par :*

$$[a, b] := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}.$$

Remarque 1.3 *Nous notons par $[a, b]^k = [a, b]$ si b est un point dense à gauche, et $[a, b]^k = [a, b) = [a, \rho(b)]$ dans le cas où b est un point dispersé à gauche.*

1.1.5 Dérivation sur les échelles de temps

Maintenant, nous rappelons la définition de la Δ-dérivée dite aussi la dérivée au sens de Hilger.

Définition 1.11 *Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, f est dite Δ-différentiable en $t \in \mathbb{T}^k$ s'il existe un nombre $f^\Delta(t)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t satisfaisant*

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in U.$$

Si f est Δ-différentiable en tout point $t \in \mathbb{T}^k$, alors la fonction $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est dite la Δ-dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Théorème 1.1 ([16]) *Soit $t_0 \in \mathbb{T}^k$ et supposons que $\zeta : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ une fonction continue en (t,t), où $t \in \mathbb{T}^k$ avec $t > t_0$. Aussi supposons que pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, $\zeta^{\Delta_t}(t,.)$ est rd-continue en $[t_0, \sigma(t)]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U_t de t, indépendant de $\tau \in [t_0, \sigma(t)]$, tel que*

$$\left|\zeta(\sigma(t), \tau) - \zeta(s, \tau) - \zeta^{\Delta_t}(t, \tau)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \qquad \textit{pour tout } s \in U_t,$$

où ζ^{Δ_t} est la dérivé première de ζ, alors

$$g(t) := \int_{t_0}^{t} \zeta(t, \eta)\, \Delta\eta \quad \textit{implique} \quad g^\Delta(t) := \int_{t_0}^{t} \zeta^{\Delta_t}(t, \eta)\, \Delta\eta + \zeta(\sigma(t), t).$$

Quelques théorèmes et propriétés, utiles et importantes, sur la Δ-dérivée sont donnés ci-dessous.

Théorème 1.2 *Soit la fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, et soit $t \in \mathbb{T}^k$. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.*

2. Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t avec

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

3. Si t est dense à droite, alors f est Δ-différentiable en t si et seulement si $\lim\limits_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$, existe et est finie.

Dans ce cas nous avons :

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4. Si f est Δ-différentiable en t, alors

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

Exemple 1.6 *Nous considérons les trois cas suivant :*

(i) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{R}$ est un point dense à droite,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

(ii) Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors pour $t \in \mathbb{T}^k = \mathbb{Z}$ est un point isolé,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

(iii) Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, alors pour $t \in h\mathbb{Z}$ est un point isolé,

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \Delta_h f(t).$$

Exemple 1.7 *Soit $\mathbb{T} = \left\{ \sqrt[4]{2n+1} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ et $f(t) = t^4$, $t \in \mathbb{T}$. Nous allons trouver*

$f^{\Delta}(t)$, $t \in \mathbb{T}$.

$$\begin{aligned} \textit{Pour tout } t &\in \mathbb{T},\ t = \sqrt[4]{2n+1},\ n = \tfrac{t^4-1}{2},\ n \in \mathbb{N}_0,\ \textit{nous avons} \\ \sigma(t) &= \inf\left\{\sqrt[4]{2l+1} : \sqrt[4]{2l+1} > \sqrt[4]{2n+1},\ l \in \mathbb{N}_0\right\} \\ &= \sqrt[4]{2n+3} \\ &= \sqrt[4]{t^4+2} > t. \end{aligned}$$

Par conséquent, chaque point de $\mathbb{T}$ *est dispersé à droite. Nous notons que la fonction* $f(t)$ *est continue sur* $\mathbb{T}$*. En appliquant le Théorème 1.1, nous obtenons*

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \tfrac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)} \\ &= \tfrac{(\sigma(t))^4-t^4}{\sigma(t)-t} \\ &= (\sigma(t))^3 + t(\sigma(t))^2 + t^2\sigma(t) + t^3 \\ &= \sqrt[4]{(t^4+2)^3} + t^2\sqrt[4]{t^4+2} + t\sqrt{t^4+2} + t^3;\ t \in \mathbb{T}^k. \end{aligned}$$

Exemple 1.8 *Considérons l'ensemble* $\mathbb{T} = \{\sqrt{n}; n \in \mathbb{N}_0\}$*. Pour tout* $t \in \mathbb{T}$, $\sigma(t) = \sqrt{t^2+1}$*. Ainsi pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$ *on a*

$$\sigma^{\Delta}(t) = \tfrac{\sigma(\sigma(t))-\sigma(t)}{\mu(t)} = \tfrac{\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}-t} = \left(\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2+1}\right)\left(\sqrt{t^2+1}+t\right).$$

1.1.6 Propriétés de la Δ-dérivée

Le théorème suivant établit quelques identités de base pour obtenir les Δ-dérivées de certaines opérations sur des fonctions comme la linéarité, ainsi que le produit et le quotient ...etc.

Théorème 1.3 *Soient* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions* Δ*-différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$*, alors nous avons les propriétés suivantes :*

1- La somme $f+g$ est Δ-différentiable en t, avec

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

2- Pour toute constante $\alpha \in \mathbb{R}$, (αf) est Δ-différentiable en t et nous avons :

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

3- Le produit fg est Δ-différentiable en t et nous avons :

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)\, g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)\, g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

4- Si $f(t)\, f(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est Δ-différentiable en t et nous avons :

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5- Si $g(t)\, g(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t et nous avons :

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Exemple 1.9 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

$$\begin{aligned} \left(f^2\right)^{\Delta}(t) &= (ff)^{\Delta}(t) \\ &= f^{\Delta}(t)\, f(t) + f(\sigma(t))\, f^{\Delta}(t) \\ &= f^{\Delta}(t)\left(f(\sigma(t)) + f(t)\right). \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}
\left(f^3\right)^{\Delta}(t) &= \left(ff^2\right)^{\Delta}(t) \\
&= f^{\Delta}(t)\, f^2(t) + f(\sigma(t)) \left(f^2\right)^{\Delta}(t) \\
&= f^{\Delta}(t)\, f^2(t) + f(\sigma(t))\, f^{\Delta}(t) \left(f(\sigma(t)) + f(t)\right) \\
&= f^{\Delta}(t) \left(f^2(t) + f(t)\, f(\sigma(t)) + f(\sigma(t))^2\right).
\end{aligned}$$

Nous supposons que

$$(f^n)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) \sum_{k=0}^{n-1} f^k(t)\, f(\sigma(t))^{n-1-k}(t).$$

1.1.7 Dérivation des fonctions composées

Théorème 1.4 *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en T^k et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable, alors il existe $c \in [t, \sigma(t)]$ satisfaisant*

$$(f \circ g)^{\Delta} = f'(g(c))\, g^{\Delta}(t).$$

Exemple 1.10 *Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(t) = t^2$ et $g(t) = 2t$, alors nous trouvons directement la valeur de c garantie par le théorème précédent de sorte que :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(3) = f'(g(c))\, g^{\Delta}(3),$$

avec

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2t, \\
g^{\Delta}(t) &= 2, \\
(f \circ g)^{\Delta} &= \tfrac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{\mu(t)}
\end{aligned}$$

et

$$28 = 2\,(2c)\,2.$$

Ainsi, nous obtenons $c = \frac{7}{2} \in [3, \sigma(3)] = [3, 4]$.

Théorème 1.5 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction continûment différentiable et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction* Δ*-différentiable sur* $\mathbb{T}^k$. *Alors* $f \circ g$ *est* Δ*-différentiable et on a la formule suivante :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)\, g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t).$$

1.1.8 Intégration sur les échelles de temps

Définition 1.12 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite régulière si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Définition 1.13 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$. *L'ensemble de toutes les fonctions rd-continues sur* $\mathbb{T}$ *est noté par*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

L'ensemble de toutes les fonctions Δ*-différentiables et rd-continues sur* $\mathbb{T}$ *est noté par :*

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Supposons que $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ sont des échelles de temps, soit $\Omega = [\alpha, \beta]_{\mathbb{T}_1} \times [\gamma, \theta]_{\mathbb{T}_2}$.

Définition 1.14 *On définit l'intervalle des échelles de temps par*

$$[\alpha, \beta]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : \alpha \leq t \leq \beta\},$$

Alors CC_{rd} est l'ensemble de toutes les fonctions $f(t,s)$ sur Ω qui vérifient les propriétés suivantes :

1- f est rd-continue en t,

2- f est rd-continue en s,

3- Si $(t_1, s_1) \in \Omega$, avec t_1 un point dense à droite où un maximum et s_1 un point dense à droite où un maximum, alors f est continue en (t_1, s_1),

4- Si t_1 et s_1 sont deux points dense à gauche, alors la limite de $f(t,s)$ existe en (t,s) et approches (t_1, s_1) le long de n'importe quel chemin dans la région

$$R_{LL}(t_1, s_1) = \left\{(t,s) : t \in [a, t_1] \cap [\alpha, \beta]_{\mathbb{T}_1} ; s \in [c, s_1] \cap [\gamma, \theta]_{\mathbb{T}_2}\right\}.$$

Définition 1.15 *La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, est dite primitive de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, si elle vérifie*

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.16 *Toute fonction rd-continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, admet une primitive $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, et nous notons*

$$\int_s^r f(t)\,\Delta t = F(r) - F(s) \qquad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{T}.$$

Théorème 1.6 *Si $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ et $t \in \mathbb{T}^k$, nous avons :*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t)\, f(t).$$

Théorème 1.7 *Soit $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_{rd}\left(\mathbb{T}^k\right)$ alors :*

1- $\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t$,

2- $\int_a^b (\lambda f(t))\,\Delta t = \lambda \int_a^b f(t)\,\Delta t$,

3- $\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t$,

4- $\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t$,

5- $\int_a^a f(t)\,\Delta t = 0$,

6- Si $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a,b]_{\mathbb{T}^k}$, *alors* $\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t$,

7- Si $f(t) \geq 0$ *pour* $t \in [a,b] \cap \mathbb{T}$, *alors* $\int_a^b f(t)\,\Delta t \geq 0$.

Proposition 1.1 *Soit* $a, b \in \mathbb{T}$ *et* $f \in C_{rd}(t)$, *on a :*

$*$*Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

$*$ *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t) & si\ a < b, \\ 0 & si\ a = b, \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t) & si\ a > b. \end{cases}$$

$*$ *Si* $[a,b]$ *ne contient que des points isolés, alors*

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b[} \mu(t) f(t) & si\ a < b, \\ 0 & si\ a = b, \\ \sum\limits_{t\in[b,a[} \mu(t) f(t) & si\ a > b. \end{cases}$$

Exemple 1.11 *Soit* $\mathbb{T} = [-1,0] \cup 3^{\mathbb{N}_0}$, *où* $[-1,0]$*est un intervalle réel. Considérons la fonction*

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t+2)^3} - \frac{1}{8} & pour\ \ t \in [-1,0), \\ 0 & pour\ t = 0, \\ t^2 - t & pour\ t \in 3^{\mathbb{N}_0}. \end{cases}$$

Calculons

$$I = \int_{-1}^{3} f(t)\,\Delta t.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0} f(t)\,\Delta t + \int_{0}^{1} f(t)\,\Delta t + \int_{1}^{3} f(t)\,\Delta t \\
&= \int_{-1}^{0} \left(\tfrac{1}{(t+2)^3} - \tfrac{1}{8}\right) dt + \int_{1}^{3} \left(t^2 - t\right) \Delta t \\
&= -\tfrac{1}{2(t+2)^2}\Big|_{t=-1}^{t=0} - \tfrac{1}{8} + 2t\left(t^2 - t\right)\Big|_{1}^{3} \\
&= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

1.1.9 Δ-intégration par partie

Proposition 1.2 *Si $a, b \in \mathbb{T}$ et $f, g \in C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{\sigma}(t)\, g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= \left[(fg)(t)\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g(t)\,\Delta t, \\
\int_a^b f(t)\, g^{\Delta}(t)\,\Delta t &= \left[(fg)(t)\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t)\, g^{\sigma}(t)\,\Delta t.
\end{aligned}$$

Théorème 1.8 *Soit $a \in \mathbb{T}^k, b \in \mathbb{T}$ et $w : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est continue en (t,t) pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > t_0$ et $w^{\Delta}(t,.)$ est rd-continue dans $[t_0, \sigma(t)]$. Nous supposons que pour tout $\varepsilon > 0, \exists U$ voisinage de t, indépendant de $\tau \in [t_0, \sigma(t)]$, telle que :*

$$|w(\sigma(t),\tau) - w(s,\tau) - w^{\Delta}(t,\tau)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \qquad \forall s \in U,$$

où w^{Δ} est la dérivée de w par rapport à la première variable, alors nous avons :

$$g(t) = \int_{t0}^{t} w(t,\tau)\Delta\tau \Longrightarrow g^{\Delta}(t) = \int_{t_0}^{t} w^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau + w(\sigma(t),\tau)$$

et

$$h(t) = \int_t^b w(t,\tau)\Delta\tau \Longrightarrow h^{\Delta}(t) = \int_t^b w^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau - w(\sigma(t),\tau).$$

1.1.10 La fonction exponentielle aux échelles de temps

Cette sous section est consacré à la fonction exponentielle sur une échelle de temps, et quelques théorèmes importants.

Définition 1.17 *Soit $h > 0$, on définit les nombres complexes de* ***Hilger*** *par :*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \tfrac{1}{h} \right\}.$$

L'axe imaginaire de Hilger est

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\tfrac{\pi}{h} < \operatorname{Im} z < \tfrac{\pi}{h} \right\}.$$

Pour $h = 0$, on pose par définition $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 1.18 *On dit que la fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régressive si*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0 \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

L'ensemble de toutes les fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re = \Re(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. L'ensemble de toute les fonctions régressives positives est défini par :

$$\Re^+ = \{p \in \Re : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k\}. \tag{1.6}$$

Proposition 1.3 *L'ensemble $\Re$ muni de l'addition $\oplus$ définie par*

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, p, q \in \Re.$$

est un groupe abélien. On l'appelle le groupe régressif, le conjugué de chaque élément p *du groupe* $\Re$ *noté par* $\ominus p$ *est donné par :*

$$\ominus p = \tfrac{-p(t)}{1+\mu(t)p(t)}, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k$$

et

$$p \ominus q := p \oplus (\ominus p) \,.$$

Nous utilisons la transformation cylindrique pour définir la fonction exponentielle sur une échelle de temps arbitraire $\mathbb{T}$.

Définition 1.19 *Si* $p \in \Re(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *alors nous définissons la fonction exponentielle* $e_p(t, t_0)$ *par*

$$e_p(t, t_0) = exp \left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \right), \ \textit{pour } t, t_0 \in \mathbb{T},$$

où $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ *est la transformation cylindrique donnée par*

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{h}\log(1+zh) & \textit{si } h \neq 0, \\ z & \textit{si } h = 0, \end{cases}$$

où log *est le logarithme principale.*

Théorème 1.9 *Nous supposons que* $p \in \Re$ *et* $t_0 \in \mathbb{T}$ *un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\, y(t)\,, \quad y(t_0) = 1, \tag{1.7}$$

admet une solution unique dans $\mathbb{T}$.

Remarque 1.4 *Soit* $p \in \Re$, *la fonction exponentielle est l'unique solution du problème (1.7), et nous avons*

$$y(t) = exp \left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \right), \ \textit{pour } t, t_0 \in \mathbb{T},$$

Proposition 1.4 *Soit $p, q \in \Re$ et $t, t_0, s \in \mathbb{T}$, alors*

1- $e_0(t, t_0) \equiv 1$ *et* $e_p(t, t) \equiv 1$,

2- $e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t) p(t)) e_p(t, t_0)$,

3- $e_p(t, t_0) e_p(t_0, s) = e_p(t, s)$,

4- $e_p(t, t_0) = \frac{1}{e_p(t_0, t)}$,

5- Si $p \in \Re^+, q \in \Re^+$ *et* $p \leq q$, *alors* $e_p(t, t_0) \leq e_q(t, t_0)$,

6- Si $p \geq 0$ *alors* $e_p(., t_0)$ *est une fonction croissante et* $e_p(t, t_0) \geq 1$,

7- Si $p \in \Re^+$,*alors* $e_p(t, t_0) > 0$,

8- $e_p(t, t_0) e_q(t, t_0) = e_{p \oplus q}(t, t_0)$ *où* $(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t) p(t) q(t)$,

9- $\frac{e_p(t,t_0)}{e_q(t,t_0)} = e_{p \ominus q}(t, t_0)$,

10- La fonction $e_p(., s)$ *est Δ-différentiable en t et* $(e_p(., s))^{\Delta}(t) = p(t) e_p(t, s)$.

Exemple 1.12 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que les deux fonctions exponentielles*

$$e_f(t, t_0) \quad \text{et} \quad e_g(t, t_0) \quad \text{avec} \quad f(t) = \frac{\alpha^2}{t} - \frac{(\alpha-1)^2}{\sigma(t)}, \quad g(t) = \frac{\alpha}{t}$$

existes pour tout $t \in \mathbb{T} \cap (0, \infty)$. Alors

$$\frac{e_f(t,t_0)}{e_g(t,t_0)} = e_{\frac{\alpha-1}{\sigma}}(t, t_0).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
(f \ominus g)(t) &= \frac{f(t)-g(t)}{1+\mu(t)g(t)} = \frac{\frac{\alpha^2}{t} - \frac{(\alpha-1)^2}{\sigma(t)} - \frac{\alpha}{t}}{1+\mu(t)\frac{\alpha}{t}} \\
&= \frac{1}{\sigma(t)} \frac{\alpha(\alpha-1)\sigma(t)-(\alpha-1)^2 t}{t+\alpha\mu(t)} \\
&= \frac{\alpha-1}{\sigma(t)} \frac{\alpha\sigma(t)-(\alpha-1)t}{t+\alpha\mu(t)} = \frac{\alpha-1}{\sigma(t)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{e_f(t,t_0)}{e_g(t,t_0)} = e_{f \ominus g}(t, t_0) = e_{\frac{\alpha-1}{\sigma}}(t, t_0).$$

1.2 Inégalités importantes

Dans cette section, nous présentons quelques inégalités et lemmes qui sont utiles dans notre étude.

1.2.1 Les inégalités intégrales célèbres de type Gronwall

Depuis 1919 le Suédois **Thomas Hakon Gronwall** est devenu connu pour son inégalité différentielle remarquable [32], parfois appelée lemme de Gronwall. Son application à la théorie des équations différentielles est arrivée plus tard.

Lemme 1.1 ([32]) *Soit $u(t)$ une fonction continue et définie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, a et b des constantes positives. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a + b \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds$$

est satisfaite, alors on a

$$u(t) \leq a e^{b(t-t_0)}, \ t \in [t_0, t_1].$$

En 1943, **Richard Bellman** [7] a généralisé le résultat de **Gronwall** dans le cas où b est une fonction qui dépend de la variable t, son résultat est sous la forme suivante :

Théorème 1.10 ([7]) *Soient $u(t)$ et $b(t)$ deux fonctions continues et positives, $a \geq 0$ est une constante, $t \in [t_0, t_1]$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} b(s)\, u(s)\, ds, \quad t \in [t_0, t_1]$$

est satisfaite, alors on a

$$u(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} b(s)\, ds\right), \quad t \in [t_0, t_1].$$

En 1956, **Bihari** [15] a prouvé une inégalité encore plus générale que celles des deux inégalités précédentes, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 1.11 ([15]) *Soient* $u(t)$ *et* $b(t)$ *deux fonctions continues et positives sur* $[0, +\infty[$*,* $w(t)$ *une fonction croissante et continue sur* $[0, +\infty[$ *,vérifiant* $w(t) > 0$ *pour tout* $x > 0$ *et* a *une constante positive. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} b(s) w(u(s)) ds$$

est satisfaite pour tout $t \geq 0$*, alors on a*

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(a) + \int_{t_0}^{t} b(s) ds\right) \text{ pour tout } 0 \leq t \leq \tau,$$

où G *est solution de l'équation intégrale suivante*

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{w(s)} ds, \ t > t_0 > 0,$$

G^{-1} *est la fonction inverse de* G*,* τ *est choisi de telle sorte que*

$$\left\{G(a) + \int_{t_0}^{t} b(s) ds\right\} \in DomG^{-1} \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq \tau.$$

En 1958, **Bellman** [8] a établi une autre version du Théorème 1.10 comme suit :

Théorème 1.12 ([8]) *Soient* $u(t)$ *et* $b(t)$ *deux fonctions continues et positives sur* $I = [\alpha, \beta]$ *et soit* $a(t)$ *une fonction continue, positive et non décroissante définie sur* I*. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^{t} b(s) u(s) ds, \quad t \in I$$

est satisfaite, alors on a

$$u(t) \leq a(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} b(s) ds\right), \quad t \in I.$$

Nous présentons maintenant une version de l'inégalité de **Gronwall** aux échelles de temps.

Théorème 1.13 ([4], Inégalité de Gronwall) *Soit* $t_0 \in \mathbb{T}$, $x, f \in C_{rd}$ *et* $p \in \Re^+$, $p \geq 0$. *Si*

$$x(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} x(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}$$

alors on a

$$x(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)p(\tau)\Delta\tau, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Lemme 1.2 ([4], Théorème de Comparaison) *Soit* $t_0 \in \mathbb{T}$, $x, f \in C_{rd}$ *et* $p \in \Re^+$. *Si*

$$x^{\Delta}(t) \leq p(t)x(t) + f(t), \text{ pour tout } \; t \in \mathbb{T}^k,$$

alors on a

$$x(t) \leq x(t_0)e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^+_{t_0}.$$

Théorème 1.14 ([4]) *Supposons que* $a, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^+$, *alors l'unique solution du problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} u^{\Delta}(t) \leq a(t)\,u(t) + b(t), \quad t \geq t_0, \; t \in \mathbb{T}^k, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

est donnée par

$$u(t) \leq u(t_0)\, e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t, \sigma(\tau))\, b(\tau)\, \Delta\tau, \quad t \geq t_0, \; t \in \mathbb{T}^k.$$

1.2.2 Quelques résultats importants d'analyse

Lemme 1.3 ([35]) *Supposons que* $a \geq 0$, $p \geq q \geq 0$ *et* $p \neq 0$, *pour tout* $K > 0$ *nous avons :*

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a + \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}.$$

Lemme 1.4 ([49]) *Supposons que* $u, v \geq 0$ *et* $p \geq 0$. *Alors*

$$(u+v)^p \leq K_p \left(u^p + v^p \right),$$

où

$$K_p = \begin{cases} 1 & si \; 0 \leq p \leq 1, \\ 2^{p-1} & si \qquad p \geq 1. \end{cases}$$

1.3 Notions fondamentales de stabilité

En mathématiques, la théorie de la stabilité traite les comportements qualitatifs des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations sur les conditions initiales. La première étude de stabilité aux échelles de temps a été réalisée en 1992, par l'utilisation de la méthode de Lyapunov, dont nous avons remarqué que les définitions de stabilité des systèmes sur les échelles de temps sont obtenues par une légère modification de leur définition standard, pour les équations différentielles ordinaires.

Dans cette section, nous illustrons les différents types de stabilité aux échelles de temps. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov.

Les résultats que nous développerons au chapitre 4 s'appuieront sur ces concepts pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes perturbés étudiés.

1.3.1 Définitions des différents types de stabilité

Hamza [33] , **DaCunha** [28] et **Choi** et **Koo** [25] ont donné quelques caractérisations généralisées de divers types de stabilité pour les solutions des systèmes dynamiques aux échelles de temps. Considérons un système dynamique défini sur une échelle de temps $\mathbb{T}$ comme ci-dessous

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.8}$$

où $t \in \mathbb{T}$ et $f : T \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ une fonction rd-continue, régressive, avec $\|f(t, 0)\| \leq f_0 < \infty$. Supposons aussi que les conditions d'existence et d'unicité de solution du système (1.8) sur $\mathbb{T}_{t_0}^{+}$ sont satisfaites pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. Désignons cette solution par $x(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Nous notons que la stabilité de toute solution est étroitement liée à la stabilité du point zéro, la solution de l'équation variationnelle correspondante (1.8). Supposons d'abord que $f(t, 0) = 0$, cela indique que l'origine devait être un point d'équilibre pour le système (1.8).

Définition 1.20 *Le système dynamique (1.8) est dit stable, si pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante finie $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que, toute solution $x(t)$ satisfait :*

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Définition 1.21 *Le système dynamique (1.8) est dit uniformément stable s'il existe une constante finie $\gamma > 0$ tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$ et $x(t_0)$, toute solution $x(t)$ satisfait :*

$$\|x(t)\| < \gamma \|x(t_0)\|, \quad t \geq t_0.$$

Définition 1.22 *Le système (1.8) est dit exponentiellement stable s'il existe $\lambda > 0$ avec $-\lambda \in \Re^{+}$ tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$, il existe $\gamma = \gamma(t_0) \geq 1$ tel que, toute solution $x(t)$ satisfait :*

$$\|x(t)\| < \gamma \|x(t_0)\| e_{-\lambda}(t, t_0), \text{ pour tout } t \geq t_0.$$

Définition 1.23 *Le système dynamique (1.8) est dit uniformément exponentiellement stable s'il existe $\lambda > 0$ avec $-\lambda \in \Re^{+}$ et $\gamma \geq 1$ indépendant de tout point initial t_0, tel* *que pour tout* $t_0 \in \mathbb{T}$ *et* $x(t_0)$, *toute solution* $x(t)$ *satisfait :*

$$\|x(t)\| < \gamma \|x(t_0)\| e_{-\lambda}(t, t_0), \quad pour\ tout \ \ t \geq t_0.$$

Passons maintenant à la stabilité pour certains cas particuliers où l'origine n'est pas un point d'équilibre. Les définitions ci-dessous servent simplement à caractériser le problème de la stabilité asymptotique, non pour l'origine, mais pour un voisinage de l'origine approximée par une petite boule de rayon R centrée à l'origine.

Définition 1.24 *Le système dynamique (1.8) est dit uniformément pratiquement exponentiellement stable s'il existe des constantes* $\gamma \geq 1$, $\lambda > 0$ *avec* $-\lambda \in \Re^+$ *et* ω, $R \geq 0$ *tel que toute solution* $x(t)$ *satisfait*

$$\|x(t)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0)^{\omega} \|x(t_0)\| + R, \quad pour\ tout\ t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}.$$

Définition 1.25 **(**[11]**)** *Le système dynamique (1.8) est dit globalement uniformément pratiquement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction* ϱ *de classe* $\mathcal{K}$, *et des constantes* $0 \leq \lambda < \nu, \omega > 0$ *et* $r > 0$ *telles que la solution* $x(t)$ *satisfait*

$$\|x(t)\| \leq \varrho(\|x(t_0)\|)\left(e_{\lambda \ominus \nu}(t, t_0)\right)^{\omega} + r, \quad pour\ tout\ t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}.$$

Cet aspect de stabilité concerne le cas où la taille des conditions initiales peut être croissante et les trajectoires correspondantes convergents de manière stable décroissante, à un petit voisinage de l'origine.

1.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov

L'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov consiste à l'étude des trajectoires du système quand l'état initial est proche d'un état d'équilibre. Cette sous section exhibe les notions générales et les outils mathématiques qui permettent de distinguer la stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes dynamiques

Définition 1.26 (Fonction de classe $\mathcal{K}$) *Une fonction continue* $\alpha : [0,a[\longrightarrow [0,+\infty[$ *est dite de classe* $\mathcal{K}$, *si elle est strictement croissante et* $\alpha(0) = 0$. *Elle est dite de classe* $\mathcal{K}_\infty$, *si de plus on a* $a = +\infty$ *et* $\alpha(r) \longrightarrow +\infty$ *quand* $r \longrightarrow +\infty$.

Définition 1.27 (Fonction de classe $\mathcal{KL}$) *Une fonction continue* $\beta : [0,a[\times[0,+\infty[\rightarrow [0,+\infty[$ *est dite de classe* $\mathcal{KL}$, *si pour tout s fixé, l'application* $r \longmapsto \beta(r,s)$ *est de classe* $\mathcal{K}$, *et pour tout r fixé, l'application* $s \longmapsto \beta(r,s)$ *est décroissante et* $\beta(r,s) \longrightarrow 0$ *quand* $s \longrightarrow +\infty$.

Définition 1.28 *Une fonction continue* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est dite :*

- *Définie positive s'il existe une fonction* α *de classe* $\mathcal{K}$, *tel que pour tout* $t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $V(t,x) \geq \alpha(\|x\|)$.
- *Définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *avec une fonction* α *de classe* $\mathcal{K}_\infty$.
- *Limitée ou décrescent, s'il existe une fonction* γ *de classe* K, *tel que pour tout* $t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, V(t,x) \leq \gamma(\|x\|)$.

Définition 1.29 (Fonction de Lyapunov) *On considère le système (1.8). Soit* $U(0)$ *un voisinage de zéro et* $V : \mathbb{R}_+ \times U(0)$ *une fonction continue et différentiable sur* $U(0)$.

- On dit que V *est une fonction de Lyapunov au sens large en* 0, *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *i-* V *est définie positive.*
- *ii-* $\dot{V}(t,x) \leq 0$ *pour tout* $x \in U(0)$.

- On dit que V *est une fonction de Lyapunov stricte en* 0, *si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *i-* V *est définie positive.*
- *ii-* $\dot{V}(t,x) < 0$ *pour tout* $x \in U(0) \setminus \{0\}$.

L'utilisation de ces fonctions fournit des critères qui permettent de conclure à la stabilité d'un point d'équilibre sans que l'intégration des équations du système considéré soit nécessaire. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [40, 37].

Théorème 1.15 *On considère le système (1.8). Si le système admet une fonction de Lyapunov au sens large sur* $U(0)$, *alors l'origine* $x = 0$ *est un point d'équilibre stable. Si de plus* V *est décroissante, alors* $x = 0$ *est un point d'équilibre uniformément stable.*

Théorème 1.16 *Soit* $x = 0$ *un point d'équilibre du système* (1.8) *et* $U(0) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < r\}$. *Soit* $V : \mathbb{R}_+ \times U(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *et supposons qu'il existe des fonctions* α_1, α_2 *et* α_3 *de classe* $\mathcal{K}$, *définies sur* $[0, r[$, *telle que,* $\forall t \geq t_0$ *et* $\forall x \in U(0)$ *vérifiant :*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

et

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|).$$

Alors, $x = 0$ *est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. Si* $U(0) = \mathbb{R}^n$ *et* α_1 *et* α_2 *sont de classe* $\mathcal{K}_\infty$, *alors* $x = 0$ *est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.*

Théorème 1.17 *Considérons le système (1.8). Supposons que ce système admet une fonction de Lyapunov* $V(t, x)$ *et supposons qu'il existe des constantes* c_1, c_2, c_3, *et* $c_4 > 0$ *telles que* $\forall x \in U(0)$, $\forall t \geq t_0$ *on a :*

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2,$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2$$

et

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right\| \leq c_4 \|x\|,$$

alors, $x = 0$ *est un point d'équilibre exponentiellement stable. Si* $U(0) = \mathbb{R}^n$, *alors l'origine est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable.*

1.3.3 Stabilité au sens de Lyapunov aux échelles de temps

La stabilité des systèmes dynamiques nécessite de bons outils d'approximation des solutions. Et parmi les techniques les plus efficaces, nous trouvons comme approche l'analyse de Lyapunov pour évaluer les comportements des trajectoires à travers une fonction énergétique. Pour plus de détails voir [16, 45, 46].

Présentons le théorème de (Chain Rule) due à **Christian Pötzsche** [46], qui l'a présenté en 1998.

Théorème 1.18 **(**[16]**)** *Soit* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continûment dérivable et supposons que* $q : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable. Alors* $p \circ q : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable, de plus on a*

$$[p(q(t))]^{\Delta} = \left(\int_0^1 p'\left(q(t) + h\mu(t)\, q^{\Delta}(t)\right) dh \right) q^{\Delta}(t).$$

Définition 1.30 *Appelons* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de Lyapunov « type I » lorsque*

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_i) = V_1(x_1) + \cdots + V_n(x_n),$$

où chaque $V_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continûment différentiable.*

Définition 1.31 *Supposons maintenant que* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de Lyapunov « type I », alors la* Δ*-dérivée de* $V(x(t))$ *est comme suit*

$$\begin{aligned}
[V(x(t))]^{\Delta} &= \left[\sum_{i=1}^{n} V_i(x_i(t)) \right]^{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} [V_i(x_i(t))]^{\Delta} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 V_i'\left(x_i(t) + h\mu(t)\, x_i^{\Delta}(t)\right) dh\ x_i^{\Delta}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 V_i'\left(x_i(t) + h\mu(t)\, f_i(t, x(t))\right) f_i(t, x(t))\, dh \\
&= \int_0^1 \nabla V\left(x(t) + h\mu(t)\, f(t, x(t))\right) \cdot f(t, x(t))\, dh,
\end{aligned}$$

où $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ *est l'opérateur du gradient. Cela nous incite à définir* $\dot{V} : \mathbb{T} \times$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\dot{V}(t,x) = \int_0^1 \nabla V(x + h\mu(t) f(t,x)) . f(t,x)\, dh.$$

Ensuite, nous trouvons une autre formule pour $\dot{V}(t,x)$, si $\mu(t) = 0$, alors on obtient simplement

$$\dot{V}(t,x) = \nabla V(x) \cdot f(t,x).$$

Exemple 1.13 *Soit $V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{1/2}$, pour $x \in D$, où*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ x_i + \mu(t) f_i(t,x) \geq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n\},$$

on a

$$\dot{V}(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(t,x)}{\sqrt{x_i + \mu(t) f_i(t,x)} + \sqrt{x_i}}.$$

Remarque 1.5 *Le produit scalaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est la fonction $\langle .,. \rangle$ définie par*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad \text{pour } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top,\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Pour chaque vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, la norme de x est définie comme suit

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^\top x}.$$

1.3.4 Stabilité des systèmes dynamiques linéaires non-autonomes aux échelles de temps

On considère un cas particulier de système (1.8) où $f(t,x) = A(t)\, x(t)$, alors (1.8) devient un système dynamique linéaire non-autonome

$$x^\Delta(t) = A(t)\, x(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.9}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$ et $A : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ une fonction matricielle rd-continue, régressive et dépendante de t.

Définition 1.32 *L'application $A : \mathbb{T} \longmapsto M_n(\mathbb{R})$ est appelée régressive, si pour tout $t \in \mathbb{T}$ la matrice carrée $I + \mu(t) A$ de degré $n \times n$ est inversible, où I est la matrice identité.*

Remarque 1.6 *La classe de toutes les fonctions régressives et rd-continue A de $\mathbb{T} \mapsto M_n(\mathbb{R})$ est notée $C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$.*

Définition 1.33 *Pour $t_0 \in \mathbb{T}$, la solution du système (1.9) avec $x(t_0) = I_n$ s'appelle exponentielle de la fonction matricielle, notée par $R_A(t, t_0)$, où $A \in C_{rd}\Re(T, M_n(\mathbb{R}))$. En conséquence, la fonction $\phi_A(t, t_0)$ possède les deux propriétés suivantes :*

$$R_A^{\Delta}(t, t_0) = A(t)\, \phi_A(t, t_0)$$

et

$$R_A(t_0, t_0) = I_n.$$

Cette fonction matricielle est dite matrice de transition et notre hypothèse sur $A(t)$ montre que la matrice de transition existe et elle est unique.

Remarque 1.7 *Si $A(t) = A$ où A est constante, alors $R_A(t, t_0) = e_A(t, t_0)$ est l'exponentielle de la matrice A.*

Le théorème suivant présente certaines propriétés de la matrice de transition.

Théorème 1.19 *Supposons $r, s, t \in \mathbb{T}$ et $A, B \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$, alors la matrice de transition possède les propriétés suivantes :*

- *$R_A(t, r)\, \phi_A(r, s) = R_A(t, s)$,*
- *$R_A(\sigma(t), s) = (I + \mu(t) A(t))\, R_A(t, s)$,*
- *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et A est constante, alors $R_A(t, s) = e_A(t, s) = e^{A(t-s)}$,*

– *Si* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *avec* $h > 0$ *et* A *est constante, alors* $R_A(t,s) = (I + hA)^{\frac{t-s}{h}}$.

DaCunha dans [28], a énoncer et prouvé des théorèmes dont caractérisent la stabilité uniforme et la stabilité uniforme exponentielle, en termes de la matrice de transition pour le système (1.9).

Théorème 1.20 *Le système dynamique (1.9) est dit uniformément stable si et seulement s'il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que*

$$\|R_A(t,t_0)\| \leq \gamma, \quad \textit{pour tout} \;\; t \in \mathbb{T}, \quad t \geq t_0.$$

Théorème 1.21 *Le système dynamique (1.9) est dit uniformément exponentiellement stable si et seulement s'il existe une constante positive* $\lambda > 0$, *avec* $-\lambda \in \Re^+$, *et il existe* $\gamma \geq 1$ *indépendant de tout point initial* t_0, *tel que*

$$\|R_A(t,t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0), \quad \textit{pour tout} \;\; t \in \mathbb{T}, \; t \geq t_0.$$

Pour plus de détails sur les différents types de stabilité, se référer à [28, 33, 25].

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Gamidov et leurs applications

Ce chapitre est consacré aux inégalités intégrales de type Gamidov, c'est l'une des inégalités les plus connus et largement utilisée dans le domaine des équations différentielles et intégrales. En vue de leurs applications importantes, récemment de nombreuses généralisations et des variantes sont apparues et leurs références sont $[36, 24, 20, 23, 19]$.

Dans la première section de ce chapitre, nous citons quelques résultats classiques de type Gamidov.

Puis dans la deuxième section, nous établissons de nouvelles extensions de cette dernière en dimension une et en dimension deux.

Dans la troisième section, nous étudions de nouvelles généralisations des inégalités intégrales non linéaires de type Bihar-Gamidov à deux variables indépendantes sur une échelle de temps arbitraire. Deux exemples illustratifs pour mettre en évidence l'utilité de nos résultats sont également donnés.

Ces nouveaux résultats obtenus dans la troisième section ont fait l'objet de la publication suivante :

M. Meramria, K. Boukerrioua and B. Kilani, Further results of certain Bihari-Gamidov type integral inequalities in two independent variables on

time scales and applications. Surv. Math. Appl. 16 (2021), 111–126.

2.1 Les inégalités intégrales célèbres de type Gamidov classiques

Dans cette première section, nous énoncerons les inégalités les plus célèbres de type Gamidov.

En 1969 **Gamidov** [31] a prouvé les inégalités suivantes, afin de les appliquer dans l'étude de certains problèmes aux limites pour les équations différentielles d'ordre supérieur, il a initié l'étude de l'obtention de bornes supérieures explicites sur les inégalités intégrales de la forme

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} f(s)\, u(s)\, ds + \int_{\alpha}^{\beta} g(s)\, u(s)\, ds,$$

Dans tous ce qui suit, nous désignerons par J l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Corollaire 2.1 ([31]) *Soient* u, f, g_1, g_2, h_i $(i = 1, 2, ...n)$ *des fonctions positives, continues et définies sur J. Si*

$$u(t) \leq f(t) + g_1(t) \int_{t_1}^{t} h_1(s)\, u(s)\, ds + g_2(t) \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{t_1}^{t} h_i(s)\, u(s)\, ds,$$

où

$$\alpha = t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n = \beta \text{ et } c_i \text{ sont des constantes,}$$

avec

$$\sum_{i=2}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s) \left[g_2(s) + g_1(s) \int_{t_1}^{s} h_1(\tau)\, g_2(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{s} g_1(\tau)\, h_1(\sigma)\, d\sigma \right) d\tau \right] ds < 1.$$

Alors, nous avons

$$u(t) \leq p_1(t) + M p_2(t),$$

où

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= f(t) + g(t)\int_{t_1}^{t} h_1(s) f(s)\exp\left(\int_s^t g_1(\sigma) h_1(\sigma) d\sigma\right) ds,\\
p_2(t) &= g_2(t) + g_1(t)\int_{t_1}^{t} h_1(s) g_2(s)\exp\left(\int_s^t g_1(\sigma) h_1(\sigma) d\sigma\right) ds,\\
M &= \left(\sum_{i=2}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s) p_1(s) ds\right)\left(1 - \sum_{i=2}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s) p_2(s) ds\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.1 ([31]) *Soient u et k des fonctions positives continue sur J, et soient $0 < p < 1$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ et $a_3 > 0$ des constantes. Supposons que pour tout $t \in J$*

$$u(t) \leq a_1 + a_2 \int_\alpha^t k(s) u^p(s) ds + a_3 \int_\alpha^\beta k(s) u^p(s) ds.$$

Alors, nous aurons

$$u(t) \leq \left(x_0^q + a_2 q \int_\alpha^t k(s) ds\right)^{\frac{1}{q}},$$

où $q = 1 - p$ et x_0 est l'unique racine positive de l'équation

$$\left[\tfrac{a_2+a_3}{a_3} x - \tfrac{a_1 a_2}{a_3}\right]^q - x^q - a_2 q \int_\alpha^\beta k(s) ds = 0.$$

Après en 1989, **Lakshmikantham, Leela** et **Martynyuk** [38], ont établi une nouvelle inégalité de type Gamidov, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 2.2 ([38]) *Soient $m, v \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $T > t_0 \geq 0$. Si l'inégalité*

$$m(t) \leq m(t_0) + \int_{t_0}^t v(s) m(s) ds + \int_{t_0}^T v(s) m(s) ds$$

est satisfaite, de plus, si

$$\exp\left(\int_{t_0}^T v(s) ds\right) < 2,$$

alors, nous avons

$$m(t) \leq \frac{m(t_0)}{2 - \exp\left(\int_{t_0}^T v(s) ds\right)} \exp\left(\int_{t_0}^t v(s) ds\right).$$

Et en 1992, **Bainov** et **Simeonov** [6], ont démontré une variante du Théorème 2.2. Ce résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.3 **(**[6]**)** *Soient u, b, c des fonctions continues sur J telles que b et c sont positives sur J. Admettons que*

$$u(t) \leq a + \int_{\alpha}^{t} b(s) u(s) \, ds + \int_{\alpha}^{\beta} c(s) u(s) \, ds, \quad t \in J,$$

où a est une constante. Si

$$q = \int_{\alpha}^{\beta} C(s) \exp\left(\int_{\alpha}^{s} b(\tau) \, d\tau \right) ds < 1,$$

alors, on a

$$u(t) \leq \tfrac{a}{1-q} \exp\left(\int_{\alpha}^{t} b(s) \, ds \right), \ t \in J.$$

2.2 Certaines versions plus générales

2.2.1 Quelques versions des inégalités de type Gamidov en dimension une

Nous allons exposer, sans démonstrations, quelques variantes obtenues sur les inégalités présentées dans la section précédente. Pour plus de détails, nous pouvons consulter [44, 36, 24, 20].

Dans [44], **Pachpatte** a établi une version plus générale de l'inégalité de Gamidov, dont l'énoncé suivant :

Théorème 2.4 **(**[44]**)** *Soient $u, a, b, c, f, g \in C(J, \mathbb{R}_+)$.*

– (H_1) *Soit $a(t)$ une fonction continûment différentiable sur J telle que $a'(t) \geq 0$ et*

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^{t} b(s) u(s) \, ds + \int_{\alpha}^{\beta} c(s) u(s) \, ds, \quad \forall t \in J.$$

Si

$$p_1 = \int_\alpha^\beta c(s) \exp\left(\int_\alpha^s b(\sigma)\, d\sigma\right) ds < 1.$$

Alors, on a :

$$u(t) \leq M_1 \exp\left(\int_\alpha^t b(s)\, ds\right) + \int_\alpha^t a^{'}(s) \exp\left(\int_s^t b(\sigma)\, d\sigma\right) ds$$

pour tout $t \in J$, *où*

$$M_1 = \tfrac{1}{1-p_1}\left[a(\alpha) + \int_\alpha^\beta c(s) \left(\int_\alpha^s a^{'}(\tau) \exp\left(\int_\tau^s b(\sigma)\, d\sigma\right) d\tau\right) ds\right].$$

– (H_2) *Supposons que*

$$u(t) \leq a(t) + b(t) \int_\alpha^t f(s)\, u(s)\, ds + c(t) \int_\alpha^\beta g(s)\, u(s)\, ds, \ \forall t \in J.$$

Si

$$p_2 = \int_\alpha^\beta g(s)\, k_2(s)\, ds < 1.$$

Alors, on a :

$$u(t) \leq k_1(t) + M_2 k_2(t), \quad \forall t \in J,$$

avec

$$\begin{aligned} k_1(t) &= a(t) + b(t) \int_\alpha^t f(\tau)\, a(\tau) \exp\left(\int_\tau^t f(\sigma)\, b(\sigma)\, d\sigma\right) d\tau, \\ k_2(t) &= c(t) + b(t) \int_\alpha^t f(\tau)\, c(\tau) \exp\left(\int_\tau^t f(\sigma)\, b(\sigma)\, d\sigma\right) d\tau \end{aligned}$$

et

$$M_2 = \tfrac{1}{1-p_2} \int_\alpha^\beta g(s)\, k_1(s)\, ds.$$

– (H_3) *Soient* $h(t,s)$ *et sa dérivée partielle* $\frac{\partial h(t,s)}{\partial t}$ *des fonctions positives et continues* *pour* $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ *et l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^{t} h(t,s)\, u(s)\, ds + \int_{\alpha}^{\beta} c(s)\, u(s)\, ds,$$

pour tout $t \in J$. *Si*

$$p_3 = \int_{\alpha}^{\beta} c(s) \exp\left(\int_{\alpha}^{s} B(\sigma)\, d\sigma\right) ds < 1.$$

Alors on a :

$$u(t) \leq a(t) + M_3 \exp\left(\int_{\alpha}^{t} B(\sigma)\, d\sigma\right) + \int_{\alpha}^{t} A(s) \exp\left(\int_{s}^{t} B(\sigma)\, d\sigma\right) ds, \ \forall t \in J,$$

où

$$\begin{aligned} A(t) &= h(t,t)\, a(t) + \int_{\alpha}^{t} \frac{\partial}{\partial t} h(t,s)\, a(s)\, ds, \\ B(t) &= h(t,t) + \int_{\alpha}^{t} \frac{\partial}{\partial t} h(t,s)\, ds \end{aligned}$$

et

$$M_3 = \tfrac{1}{1-p_3} \int_{\alpha}^{\beta} c(s) \left[a(s) + \int_{\alpha}^{s} A(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^{s} B(\sigma)\, d\sigma\right) d\tau\right] ds.$$

Remarque 2.1 *Si nous prenons* $a(t) = a$ *(une constante) et par conséquence* $a'(t) = 0$*, alors l'inégalité établie dans* (H_1*, Théorème 2.4) est une variante de l'inégalité donnée par Bainov et Simeonov dans le (Théorème 2.3), tandis que l'inégalité établie en* (H_2) *est une variante de l'inégalité donnée par Gamidov dans le Corollaire 2.1.*

Kendre et **Latpate** [36], ont développé l'inégalité prouvée par **Pachpatte** dans (H_1, Théorème 2.4) pour obtenir une borne explicite des solutions d'une certaine équation intégrale mixte, les résultats sont les suivants :

Théorème 2.5 **(**[36]**)** *Soient* $u(t), f(t), g(t), c(t), c'(t) \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *et* $p \geq q \geq 0$,

$p \neq 0$ *sont des constantes. Si*

$$u^p(t) \leq c(t) + \int_\alpha^t f(s) u^q(s) ds + \int_\alpha^\beta g(s) u^p(s) ds$$

et

$$Q = \int_\alpha^\beta g(s) \exp\left(\int_\alpha^s n_1 f(\sigma) d\sigma\right) ds < 1,$$

alors,

$$\begin{aligned} u^p(t) \leq & \ \tfrac{c(\alpha)+\int_\alpha^\beta g(s)\left(\int_\alpha^s \left[c'(\tau)+n_2 f(\tau)\right] \exp\left(\int_\tau^s n_1 f(\sigma) d\sigma\right) d\tau\right) ds}{1-Q} \\ & \times \exp\left(\int_\alpha^t m f(s) ds\right) + \int_\alpha^t \left[c'(s) + n_2 f(s)\right] \exp\left(\int_s^t n_1 f(\sigma) d\sigma\right) ds, \end{aligned}$$

où

$$k > 0, \ n_1 = \tfrac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \quad et \quad n_2 = \tfrac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}.$$

Remarque 2.2 *Il est intéressant de noter que lorsque $p = q = 1$ le Théorème 2.5 se réduit à l'inégalité énoncée dans le Théorème 2.4 (H_1). Pour $p = 1$ et $g = 0$, il se réduit à l'inégalité bien connue de Gronwall-Bellman.*

Théorème 2.6 (**[36]**) *Soient $u(t), f(t), g(t), h(t) \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et $c \geq 0$ une constante. Si*

$$u^p(t) \leq c + \int_\alpha^t h(s) \left[u^q(s) + \int_\alpha^s f(\sigma) u^q(\sigma) d\sigma + \int_\alpha^\beta g(\sigma) u^p(\sigma) d\sigma\right] ds, \ \forall t \in J.$$

Alors, on a :

$$u^p(t) \leq c \exp\left(\int_\alpha^t n_1 A(\sigma) d\sigma\right) + \int_\alpha^t n_2 B(s) \exp\left(\int_s^t n_1 A(\sigma) d\sigma\right),$$

où

$$A(t) = h(t) \left[1 + \int_\alpha^t f(\sigma) d\sigma + \tfrac{1}{n_1} \int_\alpha^\beta g(\sigma) d\sigma\right],$$

$$B(t) = h(t)\left[1 + \int_{\alpha}^{t} f(\sigma)\, d\sigma\right],$$

p, q, n_1 et n_2 sont définies comme dans le Théorème 2.5.

Corollaire 2.2 ([36]) *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.6 sont vérifiées et soit $c(t) \geq 1$ une fonction croissante. Si*

$$u^p(t) \leq c(t) + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left[u^q(s) + \int_{\alpha}^{s} f(\sigma)\, u^q(\sigma)\, d\sigma + \int_{\alpha}^{\beta} g(\sigma)\, u^p(\sigma)\, d\sigma\right] ds, \ \forall t \in J.$$

Alors, on a :

$$u^p(t) \leq c^p(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} n_1 A(\sigma)\, d\sigma\right) + c^p(t) \int_{\alpha}^{t} n_2 B(s) \exp\left(\int_{s}^{t} n_1 A(\sigma)\, d\sigma\right),$$

où $p \geq q \geq 1$, $A(t)$, $B(t)$ et n_1, n_2 sont les même fonctions définies dans les Théorèmes 2.6 et 2.5 respectivement.

Dans [24], **Cheng, Guo** et **Tang** ont établis une version plus générale de l'inégalité de Gamidov. Dont l'énoncé est le suivant, où $I = [0, T]$ avec $T \geq 0$.

Lemme 2.1 ([24]) *Soient $u(t)$, $m(t)$, $n(t)$, $l(t) \in C(I, \mathbb{R}_+)$. Si*

$$u(t) \leq m(t) + n(t) \int_{0}^{T} l(s)\, u(s)\, ds.$$

Alors, on a :

$$u(t) \leq m(t) + \frac{n(t)\int_0^T m(s) l(s) ds}{1 - \int_0^T n(s) l(s) ds}$$

pour $t \in I$, à condition que

$$\int_{0}^{T} n(s)\, l(s)\, ds < 1.$$

Ensuite dans [20], **Boukerrioua** et **Meziri** ont obtenu des résultats plus fins et des versions plus générales des inégalités représentées dans les deux sections précédentes sur des échelles de temps arbitraires.

Par commodité, nous supposons que $p \neq 0$, p, q, r sont des constantes réelles telles que $0 \leq q$, $r \leq p$ et $\alpha, b \in \mathbb{T}$.

Théorème 2.7 ([20]) *Supposons que* $u, c, g \in C_{rd}\left([\alpha, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_{+}\right)$, *et* $c^{\Delta} \geq 0$. *Si* f *est définie comme dans le Théorème 1.7 telle que* $f(t,s) \geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ *pour* $t, s \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}$ *avec* $s \leq t$. *Si*

$$u^{p}(t) \leq c(t) + \int_{\alpha}^{t} f(t,s)\, u^{q}(s)\, \Delta s + \int_{\alpha}^{b} g(s)\, u^{r}(s)\, \Delta s$$

est satisfaite. Alors

$$u(t) \leq \left[m(t) + \frac{\frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} e_{p}(t,\alpha) \int_{\alpha}^{b} g(s) m(s) \Delta s}{1 - \frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} \int_{\alpha}^{b} g(s) e_{p}(s,\alpha) \Delta s} \right]^{\frac{1}{p}} \quad \textit{pour } t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k},$$

où

$$\begin{aligned} P(t) &= \tfrac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \left[f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s)\, \Delta s \right], \\ Q(t) &= c^{\Delta}(t) + \tfrac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}} \left[f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s)\, \Delta s \right] \end{aligned}$$

et

$$m(t) = c(\alpha)\, e_{p}(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(s)\, e_{p}(t, \sigma(s))\, \Delta s + \tfrac{p-r}{p} k^{\frac{r}{p}} e_{p}(t,\alpha) \int_{\alpha}^{b} g(s)\, \Delta s,$$

à condition que

$$\tfrac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} \int_{\alpha}^{b} g(s)\, e_{p}(s,\alpha)\, \Delta s < 1.$$

Remarque 2.3 *Si nous prenons* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $p = q = r = 1$, *l'inégalité donnée dans le Théorème 2.7 se réduira à l'inégalité donnée par* ***Pachpatte*** *dans* (H_3, *Théorème 2.4*).

Théorème 2.8 ([20]) *Supposons que* $u, h, g \in C_{rd}\left([\alpha, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_{+}\right)$ *et* $c \geq 0$ *une constante. Si* f *est définie comme dans le Théorème 1.7 telle que* $f(t,s) \geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ *pour*

$t,s\in[\alpha,b]_{\mathbb{T}}$ avec $s\leq t$. Si

$$u^{p}(t)\leq c+\int_{\alpha}^{t}h(s)\left[u^{q}(s)+\int_{\alpha}^{s}f(s,\tau)u^{q}(\tau)\Delta\tau+\int_{\alpha}^{b}g(\tau)u^{r}(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s$$

est satisfaite. Alors

$$u(t)\leq\left[c+\int_{\alpha}^{t}h(s)\left(m(s)+\frac{l(s)\int_{\alpha}^{b}g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1-\int_{\alpha}^{b}g(\tau)l(\tau)\Delta\tau}\right)\Delta s\right]^{\frac{1}{p}}\quad pour\ t\in[\alpha,b]_{\mathbb{T}}^{k},$$

où

$$\begin{aligned}m(t) &= \left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c+\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}+\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\int_{\alpha}^{b}g(\tau)\Delta\tau\right)e_{p}(t,\alpha)\\ &\quad+\int_{\alpha}^{t}Q(\tau)e_{p}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau\\ P(t) &= \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(t)+f(\sigma(t),t)+\int_{\alpha}^{t}f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau,\\ Q(t) &= \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\left(f(\sigma(t),t)+\int_{\alpha}^{t}f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau\right),\end{aligned}$$

à condition que

$$\int_{\alpha}^{b}g(\tau)l(\tau)\Delta\tau<1.$$

2.2.2 Quelques versions des inégalités de type Gamidov en dimensions deux

Nous allons à présent voir, quelques généralisations des inégalités représentées dans la première partie en deux dimensions.

Dans [23], **Cheng** et **Guo** ont étudié et développé l'inégalité prouvée par **Pachpatte** à une version plus générale en deux variables indépendantes comme suit.

Dans tous ce qui suit, nous désignons par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_{+}=[0,\infty)$, $\mathbb{R}_{0}=(0,\infty)$, $I_{1}=[0,M]$ et $I_{2}=[0,N]$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $\Delta=I_{1}\times I_{2}$. $C(U,V)$ l'ensemble des fonctions continues de U à V.

Lemme 2.2 **(**[23]**)** *Supposons que* $u(x,y)$, $a(x,y)$, $c(x,y)$, $g(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$. *Si*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + c(x,y) \int_0^M \int_0^N u(s,t)\, g(s,t)\, dsdt$$

pour tout $(x,y) \in \Delta$, *et*

$$\int_0^M \int_0^N c(s,t)\, g(s,t)\, dsdt < 1.$$

Alors on a

$$u(x,y) \leq a(x,y) + \frac{c(x,y) \int_0^M \int_0^N a(s,t) g(s,t) dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N c(s,t) g(s,t) dsdt} \text{ pour tout } (x,y) \in \Delta.$$

Théorème 2.9 **(**[23]**)** *Supposons que* $a(x,y), b(x,y), c(x,y), f(x,y), g(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ *où* $a(x,y), b(x,y)$ *et* $c(x,y)$ *sont des fonctions croissantes. Si* $u(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ *et satisfait*

$$\begin{aligned} u(x,y) \quad &\leq \quad a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)\, u(s,t)\, dsdt \\ &\quad +c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t)\, u(s,t)\, dsdt, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & u(x,y) \\ \leq \; & a(x,y) + c(x,y) \left(\left(\left(\int_0^M \int_0^N a(s,t)\, g(s,t) \exp\left\{ b(s,t) \int_0^s \int_0^t f(u,v)\, dudv \right\} dsdt \right) \right.\right. \\ & \times \left. \left(1 - \int_0^M \int_0^N c(s,t)\, g(s,t) \exp\left\{ b(s,t) \int_0^s \int_0^t f(u,v)\, dudv \right\} dsdt \right)^{-1} \right] \\ & \times \exp\left\{ b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)\, dsdt \right\} \end{aligned}$$

est valable pour tout $(x,y) \in \Delta$, *sous la condition :*

$$\int_0^M \int_0^N c(s,t)\, g(s,t) \exp\left\{ b(s,t) \int_0^s \int_0^t f(u,v)\, dudv \right\} dsdt < 1.$$

Théorème 2.10 ([23]) *Supposons que* $a(x,y), b(x,y), c(x,y), f(x,y)$ *et* $g(x,y)$ *sont définies comme dans le Théorème 2.9. Si* $u(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ *satisfait*

$$\begin{aligned} u^m(x,y) &\leq a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t) u^n(s,t) \, dsdt \\ &\quad + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) u^r(s,t) \, dsdt, \end{aligned}$$

où $m \geq n \geq 0$, $m \geq r \geq 0$ *et* m, n, r *sont des constantes. De plus si*

$$\int_0^M \int_0^N \overline{C}(s,t) \overline{G}(s,t) \exp\left\{ \overline{B}(s,t) \int_0^s \int_0^t \overline{F}(u,v) \, dudv \right\} dsdt < 1,$$

alors

$$\begin{aligned} & u(x,y) \\ \leq\; & \left\{ a(x,y) + \left[\overline{A}(x,y) + \overline{C}(x,y) \times \left(\left(\left(\int_0^M \int_0^N \overline{A}(s,t) \overline{G}(s,t) \right.\right.\right.\right.\right. \\ & \left. \times \exp\left\{ \overline{B}(s,t) \int_0^s \int_0^t \overline{F}(u,v) \, dudv \right\} dsdt \right) \\ & \left.\left. \times \left(1 - \int_0^M \int_0^N \overline{C}(x,y) \overline{G}(s,t) \exp\left\{ \overline{B}(s,t) \int_0^s \int_0^t \overline{F}(u,v) \, dudv \right\} dsdt \right)^{-1} \right) \right] \\ & \left. \times \exp\left\{ \overline{B}(x,y) \int_0^x \int_0^y \overline{F}(s,t) \, dsdt \right\} \right\}^{\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

est valable pour tout $(x,y) \in \Delta$, *où*

$$\begin{aligned} & \overline{A}(x,y) \\ =\; & b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t) \left[\tfrac{n}{m} K_1^{(n-m)/m}(s,t) \, a(s,t) + \tfrac{m-n}{m} K_1^{n/m}(s,t) \right] dsdt \\ & + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) \left[\tfrac{r}{m} K_2^{(r-m)/m}(s,t) \, a(s,t) + \tfrac{m-r}{m} K_2^{r/m}(s,t) \right] dsdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}(x,y) &= \tfrac{n}{m} b(x,y), \\
\overline{C}(x,y) &= \tfrac{n}{m} c(x,y), \\
\overline{F}(x,y) &= f(x,y) K_1^{(n-m)/m}(x,y), \\
\overline{G}(x,y) &= g(x,y) K_2^{(r-m)/m}(x,y)
\end{aligned}$$

pour tous $K_i(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_0)$, $(i = 1, 2)$.

Lorsque $m = 2$, $n = r = 1$ dans le Théorème 2.9, une version de l'inégalité de type Gamidov est obtenue comme suit :

Corollaire 2.3 ([23]) *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.9 sont vérifiées. Si* $u(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ *satisfait*

$$\begin{aligned}
u^2(x,y) \leq\ & a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t) u(s,t)\, dsdt \\
& + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) u(s,t)\, dsdt,
\end{aligned}$$

à condition que

$$\int_0^M \int_0^N \tfrac{1}{2} c(s,t) \overline{G}(s,t) \exp\left\{ \tfrac{1}{2} b(s,t) \int_0^s \int_0^t \overline{F}(u,v)\, dudv \right\} dsdt < 1,$$

alors, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
u(x,y) \leq\ & \Bigg\{ a(x,y) + \Bigg[\overline{A}(x,y) + \tfrac{1}{2} c(x,y) \Bigg(\Bigg(\int_0^M \int_0^N \overline{A}(s,t) \overline{G}(s,t) \\
& \times \exp\left\{ \tfrac{1}{2} b(s,t) \int_0^s \int_0^t \overline{F}(u,v)\, dudv \right\} dsdt \Bigg) \\
& \times \Bigg(1 - \int_0^M \int_0^N \tfrac{1}{2} c(s,t) \overline{G}(s,t) \\
& \times \exp\left\{ \tfrac{1}{2} b(s,t) \int_0^s \int_0^t \overline{F}(u,v)\, dudv \right\} dsdt \Bigg)^{-1} \Bigg) \Bigg] \\
& \times \exp\left\{ \tfrac{1}{2} b(x,y) \int_0^x \int_0^y \overline{F}(s,t)\, dsdt \right\} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

est valable pour tout $(x,y) \in \Delta$*, où*

$$\begin{aligned}
\overline{A}(x,y) &= b(x,y)\int_0^x\int_0^y \tfrac{1}{2}f(s,t)\left[K_1^{-1/2}(s,t)\,a(s,t)+K_1^{1/2}(s,t)\right]dsdt \\
&\quad + c(x,y)\int_0^M\int_0^N \tfrac{1}{2}g(s,t)\left[K_2^{-1/2}(s,t)\,a(s,t)+K_2^{1/2}(s,t)\right]dsdt, \\
\overline{F}(x,y) &= f(x,y)\,K_1^{-1/2}(x,y), \\
\overline{G}(x,y) &= g(x,y)\,K_2^{-1/2}(x,y) \;\; \textit{pour tout } K_i(x,y) \in C(\Delta,\mathbb{R}_0),\,(i=1,2).
\end{aligned}$$

Ensuite, dans [19], **Boukerrioua**, **Diabi** et **Kilani**, ont étudié la version générale à deux variables comme suit :

Lemme 2.3 ([19]) *Supposons que* $u(x,y), a(x,y), c(x,y)$ *et* $g(x,y) \in C(\Delta,\mathbb{R}_+)$*. Soit* $n:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0,+\infty[$ *telle que sa dérivée première* n' *est continue et décroissante sur* $]0,+\infty[$*. Si l'inégalité*

$$u(x,y) \le a(x,y) + c(x,y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)\,n(u(s,t))\,dsdt$$

est satisfaite, alors l'estimation suivante

$$u(x,y) \le a(x,y) + \frac{c(x,y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(a(s,t))dsdt}{1-\int_0^M\int_0^N c(s,t)g(s,t)n'(a(s,t))dsdt}$$

est valable pour tout $(x,y)\in\Delta$*, sous la condition :*

$$\int_0^M\int_0^N c(s,t)\,g(s,t)\,n'(a(s,t))\,dsdt < 1.$$

Remarque 2.4 ([19]) *En prenant* $n(x) = x$*, l'inégalité donnée dans le Lemme* 2.3 *se réduit à l'inégalité donnée dans le Lemme 2.2.*

Théorème 2.11 ([19]) *Supposons que* $a(x,y), b(x,y), c(x,y), f(x,y)$ *et* $g(x,y) \in C(\Delta,\mathbb{R}_+)$*, où* $a(x,y), b(x,y)$ *et* $c(x,y)$ *sont des fonctions croissantes en* x *et* y*. Soit* $n:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0,+\infty[$ *telle que sa dérivée première* n' *est* *continue et décroissante sur* $]0,+\infty[$. *Si* $u(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ *satisfait*

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)\, u(s,t)\, dsdt \\ &\quad + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t)\, n(u(s,t))\, dsdt, \end{aligned}$$

alors, nous avons

$$u(x,y) \leq A^*(x,y) + C^*(x,y) \frac{\int_0^M \int_0^N g(s,t) n(A^*(s,t)) dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N C^*(s,t) g(s,t) n'(A^*(s,t)) dsdt}$$

pour tout $(x,y) \in \Delta$, *sous la condition*

$$\int_0^M \int_0^N C^*(s,t)\, g(s,t)\, n^{'}(A^*(s,t))\, dsdt < 1,$$

où

$$\begin{aligned} A^*(x,y) &= a(x,y) \exp\left\{ b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)\, dsdt \right\}, \\ C^*(X,Y) &= c(x,y) \exp\left\{ b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)\, dsdt \right\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.5 *En prenant* $n(x) = x$, *le Théorème 2.11 sera réduit au Théorème 2.9.*

2.3 Nouvelles généralisations de type Bihari-Gamidov aux échelles de temps en dimension deux

Dans cette partie, nous allons énoncer avec preuves quelques nouvelles versions des inégalités intégrales de type Bihari-Gamidov à deux variables indépendantes sur des échelles de temps, ces dernières sont des généralisations des résultats obtenus par **Boukerrioua, Diabi et Kilani** [19].

Tout au long de cette section, nous supposons toujours que T_1 et T_2 sont des échelles de temps, $\Omega = [\alpha, \beta]_{T_1} \times [\gamma, \theta]_{T_2}$et nous écrivons $x^{\Delta_t}(t, s)$ pour la Δ-dérivée partielle de $x(t, s)$ par rapport à t.

Dans la suite, et par commodité, nous supposons toujours que p, q, r sont des constantes réelles telles que $0 < q,\ r \leq p,\ 1 \leq p$ et $\alpha, \beta \in T_1,\ \gamma, \theta \in T_2$. Pour une fonction donnée ψ est définie dans un domaine Ω à deux variables, on dit que ψ est une fonction décroissante si, pour tout $(p, q), (P, Q) \in \Omega$ avec $p \leq P,\ q \leq Q$, on a toujours $\psi(P, Q) \leq \psi(p, q)$.

Nous mentionnons que les résultats de cette section sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 2.4 *Supposons que* $u(x, y), a(x, y), c(x, y), g(x, y) \in CC_{rd}(\Omega, \mathbb{R}_+)$. *Soit* $n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0, +\infty[$ *telle que sa dérivée première* n' *est continue et décroissante sur* $]0, +\infty[$. *Si*

$$u(x, y) \leq a(x, y) + c(x, y) \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(x, y)\, n(u(x, y))\, \Delta y \Delta x \tag{2.1}$$

pour $(x, y) \in \Omega$ *et si*

$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(x, y)\, c(x, y)\, n'(a(x, y))\, \Delta y \Delta x < 1. \tag{2.2}$$

Alors, l'estimation suivante :

$$u(x, y) \leq a(x, y) + \frac{c(x,y) \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(x,y) n(a(x,y)) \Delta y \Delta x}{1 - \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(x,y) c(x,y) n'(a(x,y)) \Delta y \Delta x} \tag{2.3}$$

est satisfaite pour tout $(x, y) \in \Omega$.

Preuve. De toute évidence, $\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(x, y)\, n(u(x, y))\, \Delta y \Delta x$ est une constante. Posons,

$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(x, y)\, n(u(x, y))\, \Delta y \Delta x = \Gamma.$$

De (2.1), nous avons

$$u(x, y) \leq a(x, y) + c(x, y)\, \Gamma. \tag{2.4}$$

Puisque n est croissante sur $]0, +\infty[$, alors

$$n\left(u\left(x,y\right)\right) \leq n\left(a\left(x,y\right) + c\left(x,y\right)\Gamma\right). \tag{2.5}$$

Nous appliquons le Théorème de la valeur moyenne à la fonction n, pour tout $x_1 \geq y_1 > 0$ il existe $c \in]y_1, x_1[$ telle que,

$$n\left(x_1\right) - n\left(y_1\right) = n^{'}\left(c\right)\left(x_1 - y_1\right) \leq n^{'}\left(y_1\right)\left(x_1 - y_1\right). \tag{2.6}$$

Ainsi

$$n\left(u\left(x,y\right)\right) \leq n^{'}\left(a\left(x,y\right)\right) c\left(x,y\right)\Gamma + n\left(a\left(x,y\right)\right). \tag{2.7}$$

Sachant que $g\left(s,y\right)$ est une fonction positive, alors

$$g\left(x,y\right) n\left(u\left(x,y\right)\right) \leq g\left(x,y\right) n^{'}\left(a\left(x,y\right)\right) c\left(x,y\right)\Gamma + g\left(x,y\right) n\left(a\left(x,y\right)\right). \tag{2.8}$$

En intégrant les deux côtés de l'inégalité (2.8) sur Ω, nous aurons

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g\left(x,y\right) n\left(u\left(x,y\right)\right)\Delta y\Delta x \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g\left(x,y\right) n\left(a\left(x,y\right)\right)\Delta y\Delta x \\ &\quad +\Gamma\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g\left(x,y\right) c\left(x,y\right) n^{'}\left(a\left(x,y\right)\right)\Delta y\Delta x. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Par conséquent, on déduit de l'inégalité (2.9) que

$$\Gamma \leq \frac{\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(x,y) n(a(x,y))\Delta y\Delta x}{1-\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(x,y)c(x,y)n^{'}(a(x,y))\Delta y\Delta x}. \tag{2.10}$$

En remplaçant l'inégalité ci-dessus dans (2.4), nous obtenons l'estimation (2.3) pour $u\left(x,y\right)$. ∎

Théorème 2.12 *Supposons que* $u\left(t,s\right), a\left(t,s\right), f\left(t,s\right), g\left(t,s\right) \in CC_{rd}\left(\Omega, \mathbb{R}_+\right)$. *Soit* n :

$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0,+\infty[$ *dont la dérivée première* n' *est continue et décroissante sur* $]0,+\infty[$*. Si l'inégalité*

$$u(t,s) \leq a(t,s)+\int_\alpha^t \int_\gamma^s f(\tau,\eta)\,u(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau+\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)\,n(u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau \quad (2.11)$$

est satisfaite, alors nous avons

$$u(t,s) \leq A^*(t,s) + \frac{C^*(t,s)\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)n(a(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}{1-\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)C^*(\tau,\eta)n'(a(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}, \quad (2.12)$$

où

$$A^*(t,s) = a(t,s) + \int_\alpha^t e_{A(.,s)}(t,\sigma(\tau))\,B(\tau,s)\,\Delta\tau, \quad (2.13)$$

$$C^*(t,s) = e_{A(.,s)}(t,\alpha), \quad (2.14)$$

$$A(t,s) = \int_\gamma^s f(t,\eta)\,\Delta\eta \quad (2.15)$$

et

$$B(t,s) = \int_\gamma^s f(t,\eta)\,a(t,\eta)\,\Delta\eta. \quad (2.16)$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t,s)$ par

$$z(t,s) = \int_\alpha^t \int_\gamma^s f(\tau,\eta)\,u(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau + \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)\,n(u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau, \quad (2.17)$$

alors,

$$u(t,s) \leq a(t,s) + z(t,s) = w(t,s). \quad (2.18)$$

de (2.17) et (2.18) nous trouvons

$$\begin{aligned} z^{\Delta_t}(t,s) &\leq \int_\gamma^s f(t,\eta)\,a(t,\eta)\,\Delta\eta + \int_\gamma^s f(t,\eta)\,z(t,\eta)\,\Delta\eta \\ &\leq \int_\gamma^s f(t,\eta)\,a(t,\eta)\,\Delta\eta + \left(\int_\gamma^s f(t,\eta)\,\Delta\eta\right) z(t,s), \end{aligned} \quad (2.19)$$

puisque $z(t,s)$ est une fonction croissante en s, pour un point t fixe, alors l'inégalité

(2.19) peut s'écrire sous la forme :

$$z^{\Delta_t}(t,s) \leq B(t,s) + A(t,s)\, z(t,s)\,, \tag{2.20}$$

où $A(t,s)$ et $B(t,s)$ sont définies par (2.15) et (2.16).
notant que

$$\begin{aligned} z(\alpha,s) &= \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\, n(u(\tau,\eta))\, \Delta\eta\Delta\tau \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\, n(a(\tau,\eta)+z(\tau,\eta))\, \Delta\eta\Delta\tau. \end{aligned} \tag{2.21}$$

En utilisant le Lemme 1.2 dans (2.20), on a

$$z(t,s) \leq z(\alpha,s)\, e_{A(.,s)}(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} e_{A(.,s)}(t,\sigma(\tau))\, B(\tau,s)\, \Delta\tau. \tag{2.22}$$

De (2.22) et (2.23), on obtient

$$\begin{aligned} z(t,s) \leq\ & e_{A(.,s)}(t,\alpha)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\, n(a(\tau,\eta)+z(\tau,\eta))\, \Delta\eta\Delta\tau \\ &+ \int_{\alpha}^{t} e_{A(.,s)}(t,\sigma(\tau))\, B(\tau,s)\, \Delta\tau. \end{aligned} \tag{2.23}$$

L'inégalité (2.23) peut être reformulée comme suit :

$$w(t,s) \leq A^{*}(t,s) + C^{*}(t,s)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\, n(w(\tau,\eta))\, \Delta\eta\Delta\tau, \tag{2.24}$$

où $A^{*}(t,s)\,, C^{*}(t,s)$ sont définis comme dans (2.13) et (2.14).
utilisant le Lemme 2.4 à (2.24) et à partir de (2.18), nous obtenons l'inégalité recherchée (2.12). ■

Corollaire 2.4 *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.12 soient vérifiées. Si l'in-*

égalité

$$u(t,s) \leq a(t,s) + \int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s} f(\tau,\eta)\, u(\tau,\eta)\, \Delta\eta\Delta\tau + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta) \arctan(u(\tau,\eta))\, \Delta\eta\Delta\tau$$

est satisfaite, alors

$$u(t,s) \leq A^{*}(t,s) + \frac{C^{*}(t,s)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta) \arctan(a(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}{1-\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\frac{C^{*}(\tau,\eta)}{1+a^{2}(\tau,\eta)}\Delta\eta\Delta\tau},$$

où $A^{*}(t,s)$, $C^{*}(t,s)$ *sont définis comme dans le Théorème 2.12, à condition que*

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\, \frac{C^{*}(\tau,\eta)}{1+a^{2}(\tau,\eta)}\Delta\eta\Delta\tau < 1.$$

Corollaire 2.5 *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.12 soient vérifiées. Si l'inégalité*

$$u(t,s) \leq a(t,s) + \int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s} f(\tau,\eta)\, u(\tau,\eta)\, \Delta\eta\Delta\tau + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta) \ln(u(\tau,\eta)+1)\, \Delta\eta\Delta\tau$$

est satisfaite, alors on a

$$u(t,s) \leq A^{*}(t,s) + \frac{C^{*}(t,s)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta) \ln(a(\tau,\eta)+1)\Delta\eta\Delta\tau}{1-\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\frac{C^{*}(\tau,\eta)}{1+a(\tau,\eta)}\Delta\eta\Delta\tau},$$

où $A^{*}(t,s)$ *et* $C^{*}(t,s)$ *sont définies comme dans le Théorème 2.12, à condition que*

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\, \frac{C^{*}(\tau,\eta)}{1+a(\tau,\eta)}\Delta\eta\Delta\tau < 1.$$

Théorème 2.13 *Soit* $u(t,s), a(t,s), b(t,s), c(t,s), f(t,s), g(t,s), h(t,s) \in CC_{rd}(\Omega, \mathbb{R}_{+})$ *et* $b(t,s)+c(t,s)$ *est décroissante,* $p,q,r \in \mathbb{R}_{+}$ *tel que* $p \geq q > 0$, $p \geq r > 0$, $p \geq 1$. *Soit* $n : \mathbb{R}_{+} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0,+\infty[$ *dont sa dérivée* *première n' soit continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Si $u(t,s)$ satisfait*

$$u^{p}(t,s)\leq a(t,s)+b(t,s)\int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s}\left[f(\tau,\eta)u^{q}(\tau,\eta)+g(\tau,\eta)u(\tau,\eta)\right]\Delta\eta\Delta\tau$$

$$+c(t,s)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta}h(\tau,\eta)n(u^{r}(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau. \tag{2.25}$$

Alors, nous avons

$$u(t,s)\leq\left[A_{1}^{*}(t,s)+\frac{C_{1}^{*}(t,s)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta}g_{1}(\tau,\eta)n(a_{1}(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}{1-\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta}g_{1}(\tau,\eta)C_{1}^{*}(\tau,\eta)n'(a_{1}(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}\right]^{\frac{1}{r}} \tag{2.26}$$

pour $(t,s)\in[\alpha,\beta]_{T_1}^{k}\times[\gamma,\theta]_{T_2}$, où

$$A_{1}^{*}(t,s)=a_{1}(t,s)+\int_{\alpha}^{t}e_{A_{1}(.,s)}(t,\sigma(\tau))B_{1}(\tau,s)\Delta\tau, \tag{2.27}$$

$$C_{1}^{*}(t,s)=e_{A_{1}(.,s)}(t,\alpha), \tag{2.28}$$

et

$$\begin{aligned}a_{1}(t,s) &= \tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}a(t,s)+\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\\ &\quad+\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b^{*}(\alpha,\gamma)\int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s}\left(f(\tau,\eta)\left(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)\right.\\ &\quad\left.+\,g(\tau,\eta)\left(\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)\right)\Delta\eta\Delta\tau,\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$f_{1}(t,s)=\left[\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}f(t,s)+\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}g(t,s)\right]b^{*}(\alpha,\gamma), \tag{2.30}$$

$$g_{1}(t,s)=\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b^{*}(\alpha,\gamma)h(t,s) \tag{2.31}$$

et

$$A_{1}(t,s)=\int_{\gamma}^{s}f_{1}(t,\eta)\Delta\eta,\quad B_{1}(t,s)=\int_{\gamma}^{s}f_{1}(t,\eta)a_{1}(t,\eta)\Delta\eta,$$

avec

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g_1(\tau,\eta)\, C_1^*(\tau,\eta)\, n'(a_1(\tau,\eta))\, \Delta\eta\Delta\tau < 1.$$

Preuve. L'inégalité (2.25) peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} u^p(t,s) &\leq a(t,s) + b^*(t,s)\left(\int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s}[f(\tau,\eta)\, u^q(\tau,\eta) + g(\tau,\eta)\, u(\tau,\eta)]\,\Delta\eta\Delta\tau\right. \\ &\quad \left. + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} h(\tau,\eta)\, n(u^r(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau\right), \end{aligned} \tag{2.32}$$

où

$$\begin{aligned} b^*(t,s) &= b(t,s) + c(t,s), \\ b^*(t,s) &\leq b^*(\alpha,\gamma). \end{aligned}$$

Définissons une fonction $z(t,s)$ par

$$\begin{aligned} z(t,s) &= \int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s}(f(\tau,\eta)\, u^q(\tau,\eta) + g(\tau,\eta)\, u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} h(\tau,\eta)\, n(u^r(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau. \end{aligned} \tag{2.33}$$

D'après le Lemme 1.3, on a

$$\begin{aligned} u(t,s) &\leq (a(t,s) + b^*(\alpha,\gamma)\, z(t,s))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}(a(\tau,\eta) + b^*(\alpha,\gamma)\, z(\tau,\eta)) + \tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}, \\ u^q(t,s) &\leq (a(t,s) + b^*(\alpha,\gamma)\, z(t,s))^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}(a(t,s) + b^*(\alpha,\gamma)\, z(t,s)) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}, \qquad (2.34) \\ u^r(t,s) &\leq (a(t,s) + b^*(\alpha,\gamma)\, z(t,s))^{\frac{r}{p}} \\ &\leq \tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}(a(t,s) + b^*(\alpha,\gamma)\, z(t,s)) + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}} = w(t,s). \qquad (2.35) \end{aligned}$$

Substituons les inégalités (2.34) et (2.35) dans l'inégalité (2.33), nous aurons

$$\begin{aligned} z(t,s) \leq & \int_\alpha^t \int_\gamma^s \Big[f(\tau,\eta) \left(\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} \left(a(\tau,\eta) + b^*(\alpha,\gamma) z(\tau,\eta) \right) + \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} \right) \\ & + g(\tau,\eta) \left(\tfrac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} \left(a(\tau,\eta) + b^*(\alpha,\gamma) z(\tau,\eta) \right) + \tfrac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}} \right) \Big] \Delta\eta\Delta\tau \\ & + \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta h(\tau,\eta) n \left(\tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} \left(a(\tau,\eta) + b^*(\alpha,\gamma) z(\tau,\eta) \right) + \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}} \right) \Delta\eta\Delta\tau. \end{aligned} \tag{2.36}$$

L'inégalité (2.36), nous donne

$$\begin{aligned} z(t,s) \leq & \int_\alpha^t \int_\gamma^s \Big[f(\tau,\eta) (\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a(\tau,\eta) + \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) \\ & + g(\tau,\eta) (\tfrac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} a(\tau,\eta) + \tfrac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}) \Big] \Delta\eta\Delta\tau \\ & + \int_\alpha^t \int_\gamma^s \left[\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} f(\tau,\eta) + \tfrac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} g(\tau,\eta) \right] b^*(\alpha,\gamma) z(\tau,\eta) \Delta\eta\Delta\tau \\ & + \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta h(\tau,\eta) n(w(\tau,\eta)) \Delta\eta\Delta\tau, \end{aligned} \tag{2.37}$$

où $w(t,s)$ est défini dans (2.35).

En multipliant les deux côtés de l'inégalité (2.37) par $\frac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} b^*(\alpha,\gamma)$ et en ajoutant $\frac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} a(t,s) + \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}$ à l'inégalité résultante, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$w(t,s) \leq a_1(t,s) + \int_\alpha^t \int_\gamma^s f_1(\tau,\eta) w(\tau,\eta) \Delta\eta\Delta\tau + \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g_1(\tau,\eta) n(w(\tau,\eta)) \Delta\eta\Delta\tau, \tag{2.38}$$

où $a_1(t,s)$ est défini dans (2.29) et $f_1(t,s)$ et $g_1(t,s)$ sont définis comme dans (2.30) et (2.31).

Appliquons le Théorème 2.12 à l'inégalité (2.38), nous obtenons

$$w(t,s) \leq A_1^*(t,s) + \frac{C_1^*(t,s) \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g_1(\tau,\eta) n(a_1(\tau,\eta)) \Delta\eta\Delta\tau}{1 - \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta g_1(\tau,\eta) C_1^*(\tau,\eta) n'(a_1(\tau,\eta)) \Delta\eta\Delta\tau}. \tag{2.39}$$

Puis à partir de (2.35) et (2.39), on obtient l'inégalité recherchée (2.26). ■

Théorème 2.14 *Supposons que les fonctions* $u(t,s), a(t,s), b(t,s), c(t,s), g(t,s) \in$

$CC_{rd}(\Omega,\mathbb{R}_+)$ et soit $b(t,s)+c(t,s)$ décroissante, $p\geq 1$ est une constante réel. Soit $n:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0,+\infty[$ telle que sa dérivée première n' est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Soit $f,h:\Omega\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ sont des fonctions $CC_{rd}(\Omega,\mathbb{R}_+)$ tel que

$$0\leq f(t,s,x)-f(t,s,y)\leq h(t,s,y)(x-y),\quad x\geq y\geq 0$$

pour $(t,s)\in\Omega$, si l'inégalité suivante est satisfaite

$$u^p(t,s)\leq a(t,s)+b(t,s)\int_\alpha^t\int_\gamma^s f(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau$$

$$+c(t,s)\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)\,n(u^r(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau, \tag{2.40}$$

alors, nous avons

$$u(t,s)\leq\left[A_2^*(t,s)+\frac{C_2^*(t,s)\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g_2(\tau,\eta)n(a_2(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}{1-\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g_2(\tau,\eta)C_2^*(\tau,\eta)n'(a_2(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}\right]^{\frac{1}{r}} \tag{2.41}$$

pour $(t,s)\in[\alpha,\beta]_{T_1}^k\times[\gamma,\theta]_{T_2}$, à condition que

$$\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g_2(\tau,\eta)\,C_2^*(\tau,\eta)\,n'(a_2(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau<1,$$

où

$$A_2^*(t,s)=a_2(t,s)+\int_\alpha^t e_{A_2(.,s)}(t,\sigma(\tau))\,B_2(\tau,s)\,\Delta\tau, \tag{2.42}$$

$$C_2^*(t,s)=e_{A_2(.,s)}(t,\alpha) \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}a_2(t,s) &= \tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b^*(\alpha,\gamma)\\ &\quad\times\int_\alpha^t\int_\gamma^s f(\tau,\eta,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Delta\eta\Delta\tau\end{aligned}$$

$$+\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}a(t,s)+\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}, \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}
B_2(t,s) &= \int_\gamma^s f_2(t,\eta)\, a_2(t,\eta)\,\Delta\eta,\\
A_2(t,s) &= \int_\gamma^s f_2(t,\eta)\,\Delta\eta,
\end{aligned}$$

$$f_2(t,s)=h(t,s,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(t,s)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b^*(\alpha,\gamma), \tag{2.45}$$

et

$$g_2(t,s)=\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b^*(\alpha,\gamma)\,g(t,s). \tag{2.46}$$

Preuve. L'inégalité (2.40) peut être reformulée comme suit

$$\begin{aligned}
u^p(t,s) \;\le\;& a(t,s)+b^*(t,s)\Big(\int_\alpha^t\int_\gamma^s f(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau\\
&+\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)\,n(u^r(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau\Big).
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Définissons une fonction $z(t,s)$ par

$$z(t,s)=\int_\alpha^t\int_\gamma^s f(\tau,\eta,u(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau+\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)\,n(u^r(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau. \tag{2.48}$$

D'après (2.47) et (2.48), on a

$$u(t,s)\le\left(a(t,s)+b^*(\alpha,\gamma)\,z(t,s)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.49}$$

Appliquons le Lemme 1.3 à l'inégalité (2.49), nous obtenons

$$\begin{aligned}
z(t,s) \;\le\;& \int_\alpha^t\int_\gamma^s \Big[f(\tau,\eta,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}+\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b^*(\alpha,\gamma)\,z(\tau,\eta)) \qquad (2.50)\\
&-f(\tau,\eta,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})+f(\tau,\eta,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Big]\,\Delta\eta\Delta\tau\\
&+\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g(\tau,\eta)\,n\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}(a(\tau,\eta)+b^*(\alpha,\gamma)\,z(\tau,\eta))+\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\Delta\eta\Delta\tau.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de la fonction f , on obtient

$$
\begin{aligned}
z(t,s) \leq & \int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s} f(\tau,\eta,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Delta\eta\Delta\tau \\
& +\int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s} h(\tau,\eta,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b^{*}(\alpha,\gamma)\,z(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau \\
& +\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g(\tau,\eta)\,n(w(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

où

$$w(t,s)=\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}(a(t,s)+b^{*}(\alpha,\gamma)\,z(t,s))+\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité (2.51) par $\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b^{*}(\alpha,\gamma)$ et en ajoutant $\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}a(t,s)+\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}$ à l'inégalité résultante, nous obtenons l'inégalité suivante

$$
\begin{aligned}
w(t,s) \leq & \; a_{2}(t,s) \\
& +\int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s} h(\tau,\eta,\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(\tau,\eta)+\tfrac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\tfrac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b^{*}(\alpha,\gamma)\,w(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau \\
& +\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} \tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}b^{*}(\alpha,\gamma)\,g(\tau,\eta)\,n(w(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'inégalité (2.52) peut être exprimée comme suit

$$
\begin{aligned}
w(t,s) \leq & \; a_{2}(t,s)+\int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s} f_{2}(\tau,\eta)\,w(\tau,\eta)\,\Delta\eta\Delta\tau \\
& +\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} g_{2}(\tau,\eta)\,n(w(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau, \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

où $a_{2}(t,s)$ est défini par (2.44) et $f_{2}(t,s),g_{2}(t,s)$ sont définis par (2.45) et (2.46). En utilisant le Théorème 2.12 à l'inégalité (2.53) et à partir de (2.35), nous obtenons le résultat souhaité dans l'inégalité (2.41). ■

2.4 Applications

Dans cette section, nous présentons quelques applications de nos résultats pour étudier l'estimation et l'unicité des solutions d'une équation intégrale de type Volterra-Fredholm à deux variables sur des échelles de temps.

Exemple 2.1 *Considérons l'équation intégrale sur l'échelle de temps suivante :*

$$z^p(t,s) = a(t,s) + b(t,s)\int_\alpha^t \int_\gamma^s F(\tau,\eta,z(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau$$

$$+c(t,s)\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta G(\tau,\eta,z(\tau,\eta))\,\Delta\eta\Delta\tau \tag{2.54}$$

pour $(t,s) \in \Omega$, *où* $z(t,s) \in CC_{rd}(\Omega,\mathbb{R}), a(t,s), b(t,s), c(t,s) \in CC_{rd}(\Omega,\mathbb{R}_+)$ *et* $F(t,s,z), G(t,s,z) \in CC_{rd}(\Omega \times \mathbb{R},\mathbb{R})$.

Théorème 2.15 *Supposons que les fonctions F et G indiquées dans la formule (2.54) vérifient les deux conditions suivantes :*

$$|F(t,s,z)| \leq f(t,s)|z|^q + g(t,s)|z|$$

$$|G(t,s,z)| \leq h(t,s)\,n(|z|^r), \tag{2.55}$$

où $f(t,s), h(t,s)$ et n sont définis comme dans le Théorème 2.13, avec $n'(0) = 0, p, q, r$ sont des constantes telles que $p \geq q > 0$, $p \geq r > 0$, $p \geq 1$. Si $z(t,s)$ est une solution des équations (2.54) et (2.55), alors $z(t,s)$ satisfait

$$z(t,s) \leq \left[A_1^*(t,s) + \frac{C_1^*(t,s)\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g_1(\tau,\eta)n(a_1(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}{1-\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\theta g_1(\tau,\eta)C_1^*(\tau,\eta)n'(a_1(\tau,\eta))\Delta\eta\Delta\tau}\right]^{\frac{1}{r}} \tag{2.56}$$

pour tout $(t,s) \in [\alpha,\beta]_{T_1}^k \times [\gamma,\theta]_{T_2}$, où $A_1^*(t,s), C_1^*(t,s), g_1(t,s), a_1(t,s)$ sont définis dans le Théorème 2.13.

Preuve. Supposons que $z(t,s)$ est l'unique solution de (2.54), d'après (2.55), on a

$$\begin{aligned} |z^p(t,s)| &= a(t,s) + b(t,s)\int_\alpha^t \int_\gamma^s f(\tau,\eta)\,|z(\tau,\eta)|^q + g(\tau,\eta)\,|z(\tau,\eta)|\,\Delta\eta\Delta\tau \\ &+ c(t,s)\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta h(\tau,\eta)\,n\left(|z(\tau,\eta)|^r\right)\Delta\eta\Delta\tau. \end{aligned} \tag{2.57}$$

En appliquant le Théorème 2.13 à l'inégalité (2.57), nous avons obtenu l'inégalité recherchée (2.56). ■

Proposition 2.1 *Supposons que les fonctions F et G indiquées dans la formule* (2.54) *satisfaisant les deux conditions suivantes :*

$$\left|F(t,s,z) - F\left(t,s,\bar{z}\right)\right| \leq f(t,s)\left|z-\bar{z}\right|,$$

$$\left|G(t,s,z) - G\left(t,s,\bar{z}\right)\right| \leq h(t,s)\,n\left(\left|z-\bar{z}\right|\right), \tag{2.58}$$

où $f(t,s), h(t,s)$ et n sont définies comme dans le Théorème 2.13 et $z(t,s)$ est une solution de l'équation (2.54) (dans le cas $p=1$). Alors (2.54) admet au plus une solution.

Preuve. Soient $z(t,s)$ et $\bar{z}(t,s)$ deux solutions de (2.54), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \bar{z}(t,s) &= a(t,s) + b(t,s)\int_\alpha^t \int_\gamma^s F\left(\tau,\eta,\bar{z}\right)\Delta\eta\Delta\tau \\ &+ c(t,s)\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta G\left(\tau,\eta,\bar{z}\right)\Delta\eta\Delta\tau. \end{aligned} \tag{2.59}$$

D'après (2.58) et (2.59), on a

$$\begin{aligned} \left|z(t,s) - \bar{z}(t,s)\right| &\leq b(t,s)\int_\alpha^t \int_\gamma^s \left|F(\tau,\eta,z) - F\left(\tau,\eta,\bar{z}\right)\right|\Delta\eta\Delta\tau \\ &+ c(t,s)\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\theta \left|G(\tau,\eta,z) - G\left(\tau,\eta,\bar{z}\right)\right|\Delta\eta\Delta\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; b(t,s)\int_{\alpha}^{t}\int_{\gamma}^{s} f(\tau,\eta)\left|z-\bar{z}\right|\Delta\eta\Delta\tau \\
&\quad +c(t,s)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\theta} h(\tau,\eta)\, n\left(\left|z-\bar{z}\right|\right)\Delta\eta\Delta\tau. \qquad (2.60)
\end{aligned}
$$

D'après le Théorème 2.13, on obtient que $\left|z(t,s)-\bar{z}(t,s)\right| \leq 0$, ce qui implique que $z(t,s)=\bar{z}(t,s)$ pour tout $(t,s)\in\Omega$. ■

Chapitre 3

Inégalités Intégrales à retard

La théorie des équations à retard a été développée par J. Hale. Elles interviennent dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques, et en particulier en biologie où de nombreux phénomènes sont non-locaux, pour la variable de temps mais parfois également en la variable d'espace ou ce qui tient lieu de variable d'espace (la maturité, l'âge, la taille, etc.).

Définition 3.1 *Une équation différentielle à retard (E.D.R.) est une équation différentielle où la variable d'état apparaît avec un argument retardé, autrement dit lorsque l'état à un instant donné est une fonction de son passé. Cela peut s'exprimer comme suit :*

$$u^{'}(t) = f(t, u(t), u(t-\tau)), \qquad u(t) \in \mathbb{R},$$

où le retard $\tau > 0$ *est constant.*

Exemple : [27] Considérons l'évolution d'une population animale ne tenant compte que de la natalité et de la mortalité naturelle. En supposant que la mortalité est instantanée dans la population, par rapport à l'échelle de temps considérée (typiquement, la semaine ou le mois), la description de l'évolution de cette population nécessite de connaitre le nombre d'individus à l'instant t, que l'on peut noter $N(t)$, mais également le nombre d'individus à l'instant $t-\tau$, où τ est la durée de gestation moyenne de la population. On peut alors écrire l'équation linéaire à retard discret suivante :

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}N(t) &= -aN(t)+bN(t-\tau), \quad t>0,\\
N(t) &= \Psi(t), \quad t\in[-\tau,0],
\end{aligned}$$

où a et b sont respectivement les taux de mortalité et de naissance de la population et Ψ une condition initiale, définie sur l'intervalle $[-\tau,0]$.

Dans ce qui suit, nous citons une variété d'inégalités intégrales linéaires, non linéaires à retard de type Gronwall-Bellman. Nous donnons par la suite quelques généralisations de ces inégalités intervenant dans les équations intégro-différentielles à retard.

Nous terminons ensuite ce chapitre par donner des nouvelles généralisations des inégalités intégrales non linéaires à retard.

Les nouveaux résultats obtenus ont été soumis pour une éventuelle publication dans une revue internationale.

3.1 Quelques célèbres inégalités intégrales

En 1919 **Gronwall** [32], a proposé l'inégalité bien connue de Gronwall pour estimer la solution de l'équation différentielle linéaire, après **Bihari** [15], étendue [32] à une inégalité non linéaire. Ces dernières années de nombreux auteurs se sont consacrés à l'étude des inégalités intégrales non linéaires. Par exemple, sur la base de l'inégalité généralisée de Gronwall, **Tian** et **Cai** [48], ont étudié le comportement asymptotique des systèmes à retard qui représentent une classe de systèmes en ingénierie pratique et ont une large application dans les autoroutes automatisées, les systèmes électriques, etc. Pour plus de détails consulter les ouvrages [1, 39, 48].

En 1998 **Pachpatte** [43], a considéré une inégalité intégrale linéaire est le suivante :

Théorème 3.1 ([43]) *Soit* $c_0 \geq 0$ *et* $u, b, c, d \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. *Si*

$$u(t) \leq c_0 + \int_0^t (b(s)\,u(s) + d(s))\,ds + \int_0^t b(s) \left(\int_0^s c(\xi)\,u(\xi)\,d\xi \right) ds, \tag{3.1}$$

alors

$$\begin{aligned} u(t) \quad &\leq \quad c_0 + \int_0^t [d(s) + b(s)(c_0 \exp\left(\int_0^s (b(\sigma) + c(\sigma))d\sigma \right) \\ &+ \int_0^s d(\sigma) \exp\left(\int_\sigma^s (b(\tau) + c(\tau))d\tau \right) d\sigma)]ds, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

En 2015 **Abdeldaim** et **El-Deeb** [1], ont généralisé (3.1) et énoncer de nouvelles inégalités intégrales non linéaires à retards, de type Gronwall-Bellman-Pachpatte. L'utilité de ces résultats est l'estimation des solutions de certaines équations intégro-différentielles à retards.

Théorème 3.2 ([1]) *Supposons que* $c_0 \geq 0$, $u, b, c, d \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, *et* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *est une fonction croissante avec* $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$. *Si*

$$u(t) \leq c_0 + \int_0^{\alpha(t)} (b(s)\,u(s) + d(s))\,ds + \int_0^{\alpha(t)} b(s) \left(\int_0^s c(\xi)\,u(\xi)\,d\xi \right) ds, \tag{3.2}$$

alors

$$\begin{aligned} u(t) \quad &\leq \quad c_0 + \int_0^t (\alpha'(s)\,d(\alpha(s)) + \alpha'(s)b(\alpha(s)) \exp\left(\int_0^{\alpha(s)} (b(\xi) + c(\xi))d\xi \right) \\ &\times \left(c_0 + \int_0^{\alpha(s)} d(\sigma) \exp\left(- \int_\sigma^\sigma (b(\xi) + c(\xi))d\xi \right) d\sigma \right))ds, \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Très récemment **Li** et **Wang** [39], ont étudié une nouvelle inégalité intégrale à retard avec puissance (3.3) de type Gronwall-Bellman, qui généralise certaines inégalités intégrales connues.

Théorème 3.3 ([39]) *Supposons que* $m, n, p \in (0, 1]$ *sont des constantes non négatives,* $u(t), a(t), b(t), c(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, *et* $\alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *est une fonction croissante* *avec* $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$*. Si*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) \left(u^m(s) + \int_0^s c(\xi) u^n(\xi) d\xi \right)^p ds, \tag{3.3}$$

alors

$$u(t) \leq a(t) + A(t) \exp \left(\int_0^{\alpha(t)} pmb(s) ds + \int_0^{\alpha(t)} pb(s) \left(\int_0^s nc(\xi) d\xi \right) ds \right),$$

où $t \in \mathbb{R}^+$ *et*

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s) [(1-p) + p(ma(s) + (1-m))] ds \\ &\quad + \int_0^{\alpha(t)} pb(s) \int_0^s c(\xi) [na(\xi) + 1 - n] d\xi ds. \end{aligned}$$

Remarque 3.1 *Notons que les inégalités (3.2) et (3.3) ont été démontrées dans les cas où* $p = 1$ *et* $p \in (0, 1]$.

3.2 Quelques généralisations des inégalités intégrales non linéaires à retard avec puissance

Dans cette section, nous sommes intéressés à étudier certaines inégalités intégrales non linéaires à retards avec puissance, qui peuvent être utilisées comme outils pratiques pour étudier le comportement qualitatif de certaines équations différentielles et intégrales à retard.

En 2016 **Abdeldaim** [2], a prouvé un autre résultat plus puissant est le suivant :

Théorème 3.4 ([2]) *Soient* $u, f, h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *et* $n, \alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *avec* $n(t) \geq 1$, $\alpha(0) = 0$ *et* $\alpha(t) \leq t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$*. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t f(s) u^p(s) ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s) u^q(s) ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

est satisfaite, où $p > q \geq 0$ sont des constantes. Alors, nous avons

$$u(t) \leq k_3(t) \exp\left(\tfrac{1}{p}\int_0^t f(s)ds\right),\ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$k_3(t) = \left[n^{p_1}(0) + p_1 \int_0^t \left(n'(s) + \alpha'(s)\, h\left(\alpha\left(s\right)\right)\right) \exp\left(-p_1 \int_0^s f(\lambda)d\lambda\right) ds\right]^{\frac{1}{p-q}},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ avec $p_1 = \frac{p-q}{p}$.

Boukerrioua, **Kilani** et **Meziri** dans [21], ont étudié quelques nouvelles inégalités intégrales non linéaires à retard de type Gronwall-Bellman-Bihari.

Théorème 3.5 ([21]) *Supposons que $u(t), g(t), h(t), n(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $n(t)$ est une fonction croissante. Soit $\alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante, vérifiant $\alpha(t) \leq t$ et $\alpha(0) = 0$. Soit $w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable, croissante sur $]0, \infty[$ telle que sa dérivée première w' est continue et décroissante sur $]0, \infty[$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t g(s)u^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)w(u^q(s))ds$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$. Alors

$$u(t) \leq \left[n(t) + \int_0^t P_1(s) \exp\left(\int_s^t Q_1(\tau)d\tau\right) ds\right]^{\frac{1}{p}},\ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$\begin{aligned} P_1(t) &= g(t)n(t) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \\ Q_1(t) &= g(t) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))w'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

En 2020 **Tian** et **Fan** [49], ont étudié de nouvelles inégalités intégrales non-linéaires à retards avec puissances et établi plusieurs résultats d'estimation sous la condition de $p > 1$, qui non seulement complètent celles établies dans $[25, 1, 39]$, mais généralisent aussi les inégalités (3.1)-(3.3) aux nouvelles inégalités intégrales non linéaires à retards plus générales. Nous énonçons ces résultats sans démonstrations.

Lemme 3.1 **(**[49]**)** *Supposons que $p > 0$ une constante et $\alpha(t)$ est une fonction croissante avec $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0, \alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $u, a, b, c, d \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Si*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s)(c(s)u(s) + d(s))^p \, ds.$$

Alors

$$\begin{cases} a(t) + g(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} h(s)\, ds\right) \int_0^{\alpha(t)} g(s) h(s) \exp\left(-\int_0^s h(\xi)\, d\xi\right) ds \ \ si \quad 0 < p \leq 1, \\ a(t) + \left(k^{1-p}(t) + (1-p)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) c^p(s)\, ds\right)^{\frac{1}{1-p}} \ \ si \quad p > 1, \end{cases}$$

avec

$$k^{1-p}(t) > (p-1)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) c^p(s)\, ds,$$

où

$$h(t) = pb(t)c(t),$$

$$g(t) = \int_0^{\alpha(t)} [pb(s)(a(s)c(s) + d(s)) + (1-p)b(s)]\, ds$$

et

$$k(t) = \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)(a(s)c(s) + d(s))^p \, ds.$$

Théorème 3.6 **(**[49]**)** *Supposons que m, n, p sont des constantes non négatives satisfaisant $0 < m, n \leq 1$, $p > 1, \alpha(t)$ est une fonction croissante avec $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), \alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0, u, a, b, c \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Si l'inégalité est satisfaite*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s)\left(u^m(s) + \int_0^s c(\xi) u^n(\xi)\, d\xi\right)^p ds.$$

Alors, nous avons

$$u(t) \leq a(t) + \left(\widetilde{k}^{1-p}(t) + (1-p) \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(m + n \int_0^s c(\xi)\, d\xi \right)^p ds \right)^{\frac{1}{1-p}}$$

avec

$$\widetilde{k}^{1-p}(t) > (p-1) \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(m + n \int_0^s c(\xi)\, d\xi \right)^p ds,$$

où

$$\widetilde{k}(t) = \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\xi) (na(\xi) + 1 - n)\, d\xi \right)^p ds.$$

Théorème 3.7 ([49]) *Supposons que p, q, m, n sont des constantes non négatives avec $q \geq m > 0, q \geq n > 0$, $p > 0$. Soit $\alpha(t)$ est une fonction croissante avec $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0, u, a, b, c \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Si l'inégalité est satisfaite*

$$u^q(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) \left(u^m(s) + \int_0^s c(\xi) u^n(\xi)\, d\xi \right)^p ds.$$

Alors, nous avons

$$\begin{cases} \left[a(t) + \widehat{g}(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \widehat{h}(s)\, ds \right) \int_0^{\alpha(t)} \widehat{g}(s) \widehat{h}(s) \exp\left(-\int_0^s \widehat{h}(\xi)\, d\xi \right) ds \right]^{\frac{1}{q}} & si\ 0 < p \leq 1, \\ \left[a(t) + \left(\widehat{k}^{1-p}(t) + (1-p) \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(\frac{m}{q} + \frac{n}{q} \int_0^s c(\xi)\, d\xi \right)^p ds \right)^{\frac{1}{1-p}} \right]^{\frac{1}{q}} & si\ \ p > 1, \end{cases}$$

avec

$$\widehat{k}^{1-p}(t) > (p-1) \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(\frac{m}{q} + \frac{n}{q} \int_0^s c(\xi)\, d\xi \right)^p ds,$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{h}(t) &= pb(t) \left(\frac{m}{q} + \frac{n}{q} \int_0^t c(\xi)\, d\xi \right), \\ \widehat{g}(t) &= \int_0^{\alpha(t)} \left[pb(s) \left(\frac{m}{q} a(s) + \frac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi) \left(\frac{n}{q} a(\xi) + \frac{q-n}{q} \right) d\xi \right) + (1-p) b(s) \right] ds \end{aligned}$$

et

$$\widehat{k}(t)=\int_0^{\alpha(t)}2^{p-1}b\left(s\right)\left(\tfrac{m}{q}a(s)+\tfrac{q-m}{q}+\int_0^s c\left(\xi\right)\left(\tfrac{n}{q}a\left(\xi\right)+\tfrac{q-n}{q}\right)d\xi\right)^p ds.$$

Récemment en 2021 **Song** et **Meng** [47], ont étudiés de nouvelles inégalités intégrales à retards avec puissance. Les inégalités données ici peuvent agir comme des outils puissants pour étudier les propriétés qualitatives telles que l'existence, l'unicité, la stabilité asymptotique des solutions d'équations différentielles et intégrales.

Théorème 3.8 ([47]) *Supposons que* $u,a,b,c,d,r,f,g\in C\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+\right)$, $g\left(t\right)$ *est une fonction non décroissante sur* $\mathbb{R}^+$. *Soit* $\alpha\in C^1\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+\right)$ *une fonction croissante avec* $\alpha\left(t\right)\leq t,\alpha\left(0\right)=0$. *Soit* $p,q>0$ *des constantes. Si* $u\left(t\right)$ *satisfait l'inégalité suivante :*

$$u\left(t\right)\leq g\left(t\right)+\int_0^{\alpha(t)}b\left(s\right)\left[a\left(s\right)u\left(s\right)+c(s)\right]^p ds+\int_0^t d\left(s\right)\left[e\left(s\right)u\left(s\right)+f\left(s\right)\right]^q ds,$$

alors, on a les résultats suivants :

- *(i) Lorsque* $0<p\leq 1, 0<q\leq 1$, *on a*

$$u\left(t\right)\leq g\left(t\right)+G\left(t\right)+\exp\left(\int_0^t h\left(s\right)ds\right)\int_0^t k\left(s\right)\exp\left(-\int_0^s h\left(\tau\right)d\tau\right)ds.$$

- *(ii) Lorsque* $0<p\leq 1,q>1$ *et* $B_1^{1-q}\left(t\right)+\int_0^t C_1\left(s\right)ds>0$, *on a*

$$u\left(t\right)\leq A_1\left(t\right)+\exp\left(\int_0^{\alpha(t)}pb\left(s\right)a^p\left(s\right)ds\right)\left(B_1^{1-q}\left(t\right)+\int_0^t C_1\left(s\right)ds\right)^{\frac{1}{1-q}}.$$

- *(iii) Lorsque* $0<q\leq 1,p>1$ *et* $D_1^{1-p}\left(t\right)+\int_0^t E_1\left(s\right)ds>0$, *on a*

$$u\left(t\right)\leq A_2\left(t\right)+\exp\left(\int_0^t qd\left(s\right)e^q\left(s\right)ds\right)\left(D_1^{1-p}\left(t\right)+\int_0^t E_1\left(s\right)ds\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

où

$$A_1\left(t\right)=g\left(t\right)+\int_0^{\alpha(t)}b\left(s\right)c^p(s)ds+\int_0^t 2^{q-1}d\left(s\right)f^q\left(s\right)ds,$$

$$
\begin{aligned}
A_2(t) &= g(t) + \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\, c^p(s) ds + \int_0^t d(s)\, f^q(s)\, ds, \\
B_1(t) &= \int_0^{\alpha(t)} [pb(s)\, a^p(s)\, A_1(s) + (1-p)\, b(s)\, a^p(s)]\, ds \\
&\quad + \int_0^t 2^{2(q-1)} d(s)\, e^q(s)\, A_1^q(s)\, ds, \\
C_1(t) &= (1-q)\, 2^{2(q-1)} d(t)\, e^q(t) \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} (q-1)\, pb(s)\, a^p(s)\, ds\right), \\
D_1(t) &= \int_0^{\alpha(t)} 2^{2(p-1)} b(s)\, a^p(s)\, A_2^p(s)\, ds \\
&\quad + \int_0^t [qd(s)\, e^q(s)\, A_2(s) + (1-q)\, d(s)\, e^q(s)]\, ds, \\
E_1(t) &= (1-p)\, 2^{2(p-1)} \alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, a^p(\alpha(t)) \exp\left(\int_0^t (p-1)\, qd(s)\, e^q(s)\, ds\right), \\
G(t) &= \int_0^{\alpha(t)} [pb(s)\, (a(s)\, g(s) + c(s)) + (1-p)\, b(s)]\, ds \\
&\quad + \int_0^t [qd(s)\, (e(s)\, g(s) + f(s)) + (1-q)\, d(s)]\, ds, \\
h(t) &= p\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, a(\alpha(t)) + qd(t)\, e(t) \\
k(t) &= p\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, a(\alpha(t))\, G(\alpha(t)) + qd(t)\, e(t)\, G(t).
\end{aligned}
$$

Théorème 3.9 ([47]) *Soit* $u, a, b, c, d, e \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *et soit* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *une fonction non décroissante avec* $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$. *Supposons que* $m, n, l, r \in (0, 1]$, $p, q > 0$ *sont des constantes. Si* $u(t)$ *satisfait l'inégalité suivante :*

$$
\begin{aligned}
u(t) &\leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) \left[u^m(s) + \int_0^s c(\tau)\, u^n(\tau)\, d\tau\right]^p ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) \left[u^l(s) + \int_0^s e(\tau)\, u^r(\tau)\, d\tau\right]^q ds,
\end{aligned}
$$

alors, on a les résultats suivants :

- *(i) Lorsque* $0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$, *on a*

$$
u(t) \leq a(t) + G_1(t) + \exp\left(\int_0^t h_1(s)\, ds\right) \int_0^t k_1(s) \exp\left(-\int_0^s h_1(\tau)\, d\tau\right) ds.
$$

– *(ii) Lorsque* $0 < p \leq 1, q > 1$ *et* $B_2^{1-q}(t) + \int_0^t C_2(s)\,ds > 0$, *on a*

$$u(t) \leq a(t) + A_3(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} pb(s) f_1^p(s)\,ds\right)\left(B_2^{1-q}(t) + \int_0^t C_2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{1-q}}.$$

– *(iii) Lorsque* $0 < q \leq 1, p > 1$ *et* $D_2^{1-p}(t) + \int_0^t E_2(s)\,ds > 0$, *on a*

$$u(t) \leq a(t) + A_4(t) + \exp\left(\int_0^t qd(s) g_1^q(s)\,ds\right)\left(D_2^{1-p}(t) + \int_0^t E_2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{1-p}},$$

où

$$\begin{aligned}
A_3(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\left[ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\tau)(na(\tau) + 1 - n)\,d\tau\right]^p ds \\
&\quad + \int_0^t 2^{q-1} d(s)\left[la(s) + 1 - l + \int_0^s e(\tau)(ra(\tau) + 1 - r)\,d\tau\right]^q ds, \\
A_4(t) &= \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\left[ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\tau)(na(\tau) + 1 - n)\,d\tau\right]^p ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\left[la(s) + 1 - l + \int_0^s e(\tau)(ra(\tau) + 1 - r)\,d\tau\right]^q ds, \\
B_2(t) &= \int_0^{\alpha(t)} \left[pb(s) f_1^p(s) A_3(s) + (1-p) b(s) f_1^p(s)\right] ds \\
&\quad + \int_0^t 2^{2(q-1)} d(s) g_1^q(s) A_3^q(s)\,ds, \\
C_2(t) &= (1-q)\, 2^{2(q-1)} d(t) g_1^q(t) \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} (q-1) pb(s) f_1^p(s)\,ds\right), \\
D_2(t) &= \int_0^{\alpha(t)} 2^{2(p-1)} b(s) f_1^p(s) A_4^p(s)\,ds \\
&\quad + \int_0^t \left[qd(s) g_1^q(s) A_4(s) + (1-q) d(s) g_1^q(s)\right] ds, \\
E_2(t) &= (1-p)\, 2^{2(p-1)} \alpha'(t) b(\alpha(t)) f_1^p(\alpha(t)) \exp\left(\int_0^t (p-1) qd(s) g_1^q(s)\,ds\right), \\
f_1(t) &= m + n\int_0^t c(s)\,ds, \quad g_1(t) = l + r\int_0^t e(s)\,ds, \\
h_1(t) &= p\alpha'(t) b(\alpha(t)) f_1(\alpha(t)) + qd(t) g_1(t),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G_1(t) &= \int_0^{\alpha(t)} \left[pb(s) \left(ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\tau)(na(\tau) + 1 - n)\, d\tau \right) \right. \\
&\quad \left. + (1-p)\, b(s) \right] ds \\
&\quad + \int_0^t \left[qd(s) \left(la(s) + 1 - l + \int_0^s e(\tau)(ra(\tau) + 1 - r)\, d\tau \right) \right. \\
&\quad \left. + (1-q)\, d(s) \right] ds, \\
k_1(t) &= p\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, f_1(\alpha(t))\, G_1(\alpha(t)) + qd(t)\, g_1(t)\, G_1(t).
\end{aligned}
$$

Remarque 3.2 *Lorsque $d(t) = 0$ et $0 < p \leq 1$, le Théorème 3.9 sera réduit au Théorème 3.3 de* [38]*. Et lorsque $d(t) = 0$ et $p > 1$, le Théorème 3.9 sera réduit au Théorème 3.6 de* [40]*.*

3.3 Nouvelles généralisations des inégalités intégrales non linéaires à retard avec puissance

Dans cette section, nous allons énoncer et prouver quelques nouvelles généralisations des inégalités intégrales non linéaires à retard avec puissance, ces résultats sont des généralisations des travaux obtenus par **Tian** et **Fan** [49] et **Song** et **Meng** [47].

Tout au long de cette section, nous désignons par $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $C(D, E)$ et $C^1(D, E)$ les ensembles de fonctions définies sur l'intervalle D dans E continues et continûment différentiables, respectivement.

Lemme 3.2 *Supposons que $u(t), a(t), b(t), c(t), d(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, et $\alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction non décroissante avec $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$. Soit $L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^*_+$ des fonctions différentiables par rapport à la première variable, vérifie*

$$
0 \leq L(t, x) - L(t, y) \leq M(t, y)(x - y) \quad \text{pour tout } x \geq y \geq 0
$$

et $p > 0$ *est une constante, si l'inégalité suivante est satisfaite*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b\,(s)\, L\,(s, (c\,(s)\, u\,(s) + d(s))^p)\, ds. \tag{3.4}$$

Alors

$$u(t) \leq \begin{cases} a\,(t) + g\,(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} h\,(s)\, ds\right) \\ \times \int_0^{\alpha(t)} g\,(s)\, h\,(s) \exp\left(-\int_0^s h\,(\xi)\, d\xi\right) ds \;\; si \;\; 0 < p \leq 1, \\ a\,(t) + \Big(k^{1-p}\,(t) + (1-p)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) c^p\,(s) \\ \times M\,(s, 2^{p-1}\,(a\,(s)\, c\,(s) + d\,(s))^p)\, ds\Big)^{\frac{1}{1-p}} \;\; si \;\; p > 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

avec

$$k^{1-p}(t) > (p-1)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) c^p\,(s)\, M\left(s, 2^{p-1}\,(a\,(s)\, c\,(s) + d\,(s))^p\right) ds,$$

où

$$\begin{aligned} h\,(t) &= pb\,(t)\, c\,(t)\, M\,(s, p\,(a\,(s)\, c\,(s) + d\,(s)) + 1 - p)\,, \\ g\,(t) &= \int_0^{\alpha(t)} \left[b\,(s)\, L\,(s, p\,(a\,(s)\, c\,(s) + d\,(s)) + 1 - p)\right] ds, \\ k\,(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b\,(s)\, L\left(s, 2^{p-1}\,(a\,(s)\, c\,(s) + d\,(s))^p\right) ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Preuve. Définissons la fonction $v\,(t)$ par

$$v\,(t) = \int_0^{\alpha(t)} b\,(s)\, L\,(s, (c\,(s)\, u\,(s) + d\,(s))^p)\, ds,$$

où $v\,(t)$ est une fonction non décroissante, et

$$u\,(t) \leq a\,(t) + v\,(t)\,. \tag{3.7}$$

Alors, nous avons

$$v\,(t) = \int_0^{\alpha(t)} b\,(s)\, L\,(s, (c\,(s)\, v\,(s) + a\,(s)\, c\,(s) + d\,(s))^p)\, ds. \tag{3.8}$$

Ensuite, nous prouverons les deux cas suivants $0 < p \leq 1$ et $p > 1$, respectivement.

Cas 1 : $0 < p \leq 1$.

D'après le Lemme 1.3 avec $K = 1$, on a

$$\begin{aligned} & (c(s)v(s) + a(s)c(s) + d(s))^p \\ \leq \; & p(c(s)v(s) + a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p. \end{aligned}$$

Ceci combiné avec (3.8), nous donnons

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)L(s, (c(s)v(s) + a(s)c(s) + d(s))^p)\,ds. \\ &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)L(s, p(c(s)v(s) + a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p)\,ds. \end{aligned}$$

Appliquons les propriétés de la fonction L, pour tout $x \geq y > 0$,

$$0 \leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y).$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)L(s, [p(a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p] + [pc(s)v(s)])\,ds \\ &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)[M(s, p(a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p)pc(s)v(s) \\ &\quad + L(s, p(a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p)]ds \\ &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)M(s, p(a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p)pc(s)v(s) \\ &\quad + b(s)L(s, p(a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p)\,ds \\ &\leq g(t) + \int_0^{\alpha(t)} pb(s)c(s)M(s, p(a(s)c(s) + d(s)) + 1 - p)v(s)\,ds, \\ &= g(t) + \int_0^{\alpha(t)} h(s)v(s)\,ds, \end{aligned}$$

où $h(t)$ et $g(t)$ sont définies par (3.6). Définissons la fonction non décroissante $J(t) =$

$\int_0^{\alpha(t)} h(s)v\left(s\right)ds$, avec $J(0) = 0$, $v(t) \leq g(t) + J(t)$. Dérivons $J\left(t\right)$ par rapport à t, nous obtenons

$$\begin{aligned} J^{'}(t) &= h\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}(t)v\left(\alpha\left(t\right)\right) \\ &\leq h\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}(t)(g\left(\alpha\left(t\right)\right) + J\left(\alpha\left(t\right)\right)) \\ &\leq h\left(\alpha\left(t\right)\right)g\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}\left(t\right) + h\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}\left(t\right)J\left(t\right), \end{aligned}$$

ainsi,

$$J^{'}(t) - h\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}\left(t\right)J(t) \leq h\left(\alpha\left(t\right)\right)g\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}\left(t\right). \tag{3.9}$$

Multiplions (3.9) par $\exp\left(-\int_0^{\alpha(t)} h(s)ds\right)$, nous trouvons

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\int_0^{\alpha(t)} h(s)ds\right)\left[J^{'}(t) - h\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}\left(t\right)J(t)\right] \\ \leq\ &\exp\left(-\int_0^{\alpha(t)} h(s)ds\right)h\left(\alpha\left(t\right)\right)\alpha^{'}\left(t\right)g\left(\alpha\left(t\right)\right). \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus de 0 à t, nous avons

$$J(t) \leq \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} h(s)ds\right)\int_0^{\alpha(t)} g\left(s\right)h\left(s\right)\exp\left(-\int_0^{s} h\left(\xi\right)d\xi\right)ds.$$

Puisque $v(t) \leq g(t) + J(t)$, nous avons obtenue

$$v\left(t\right) \leq g(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} h(s)ds\right)\int_0^{\alpha(t)} g\left(s\right)h\left(s\right)\exp\left(-\int_0^{s} h\left(\xi\right)d\xi\right)ds.$$

L'inégalité ci-dessus avec l'inégalité (3.6), nous trouvons

$$u\left(t\right) \leq ca\left(t\right) + g\left(t\right) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} h(s)ds\right)\int_0^{\alpha(t)} g\left(s\right)h\left(s\right)\exp\left(-\int_0^{s} h\left(\xi\right)d\xi\right)ds.$$

Cas 2 : $p > 1$.

Appliquons le Lemme 1.4 à (3.8), nous trouvons

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L\left(s, \left(c(s)\, v(s) + a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) ds. \\
v(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L\left(s, 2^{p-1}\left(c^p(s)\, v^p(s) + \left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right)\right) ds \\
v(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L\left(s, \left[2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right] + \left[2^{p-1} c^p(s)\, v^p(s)\right]\right) ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction L à cette dernière, nous obtenons

$$\begin{aligned}
v(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, [M\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) 2^{p-1} c^p(s)\, v^p(s) \\
&\quad + L\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right)] ds \\
&\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, M\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) 2^{p-1} c^p(s)\, v^p(s) \\
&\quad + b(s)\, L\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) ds \\
&= k(t) + \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\, c^p(s)\, M\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) v^p(s)\, ds,
\end{aligned}$$

où $k(t)$ est difinis par (3.6). Comme $k(t)$ est une fonction non décroissante, pour un point fixé T, nous avons

$$v(t) \leq k(T) + \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\, c^p(s)\, M\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) v^p(s)\, ds, \ \ t \in [0, T].$$

Définissons la fonction non décroissante $w(t)$ par :

$$w(t) = k(T) + \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\, c^p(s)\, M\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) v^p(s)\, ds.$$

Alors $w(0) = k(T)$, et on a

$$v(t) \leq w(t), \qquad v(\alpha(t)) \leq w(\alpha(t)) \leq w(t). \tag{3.10}$$

Dérivons $w(t)$, par rapport à t et utilisons l'inégalité (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} w'(t) &= 2^{p-1}\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, c^p(\alpha(t)) \\ &\quad \times M\left(\alpha(t), 2^{p-1}\left(a(\alpha(t))\, c(\alpha(t)) + d(\alpha(t))\right)^p\right) v^p(\alpha(t)) \\ &\leq 2^{p-1}\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, c^p(\alpha(t)) \\ &\quad \times M\left(\alpha(t), 2^{p-1}\left(a(\alpha(t))\, c(\alpha(t)) + d(\alpha(t))\right)^p\right) w^p(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tfrac{w'(t)}{w^p(t)} &\leq 2^{p-1}\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, c^p(\alpha(t)) \\ &\quad \times M\left(\alpha(t), 2^{p-1}\left(a(\alpha(t))\, c(\alpha(t)) + d(\alpha(t))\right)^p\right). \end{aligned}$$

Multiplions l'inégalité ci-dessus par $(1-p)$, nous aboutissons

$$\begin{aligned} (1-p)\tfrac{w'(t)}{w^p(t)} &\geq (1-p)\, 2^{p-1}\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, c^p(\alpha(t)) \\ &\quad \times M\left(\alpha(t), 2^{p-1}\left(a(\alpha(t))\, c(\alpha(t)) + d(\alpha(t))\right)^p\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Par un simple calcul de (3.11), et pour $t \in [0, T]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(t) &\leq \Bigg(k^{1-p}(T) + (1-p)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\, c^p(s) \\ &\quad \times M\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) ds\Bigg)^{\frac{1}{1-p}}. \end{aligned}$$

Posons $t = T$ dans l'inégalité ci-dessus, alors

$$\begin{aligned} w(T) &\leq \Bigg(k^{1-p}(T) + (1-p)\int_0^{\alpha(T)} 2^{p-1} b(s)\, c^p(s) \\ &\quad \times M\left(s, 2^{p-1}\left(a(s)\, c(s) + d(s)\right)^p\right) ds\Bigg)^{\frac{1}{1-p}}. \end{aligned}$$

Comme T est arbitraire, alors nous avons

$$\begin{aligned} w(t) \leq & \left(k^{1-p}(t) + (1-p)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) c^p(s) \right. \\ & \left. \times M\left(s, 2^{p-1}(a(s)c(s)+d(s))^p\right) ds\right)^{\frac{1}{1-p}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Utilisons l'inégalité (3.10) et substituons l'inégalité (3.12) dans (3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) \leq & \ a(t) + \left(k^{1-p}(t) + (1-p)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) c^p(s) \right. \\ & \left. \times M\left(s, 2^{p-1}(a(s)c(s)+d(s))^p\right) ds\right)^{\frac{1}{1-p}}. \end{aligned}$$

Sur la base des cas 1 et 2, nous pouvons tirer la conclusion que $u(t)$ satisfait l'inégalité (3.5). La preuve est ainsi achevée. ■

Remarque 3.3 *Si nous prenons $L(s,x) = x$, alors l'inégalité (3.4) donnée par le Lemme 3.2 se réduit à l'inégalité de **Tian** et **Fan** donnée dans le Lemme 3.1.*

Théorème 3.10 *Supposons que m, n, p sont des constantes non-négatives satisfaisant $0 < m, n \leq 1, p > 1, \alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ est une fonction non décroissante avec $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$. Soit $L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ des fonctions différentiables par rapport à la première variable et vérifie*

$$0 \leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \quad \text{pour tout} \quad x \geq y \geq 0.$$

Soit $u(t), a(t), b(t), c(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Si l'inégalité suivante est satisfaite

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(u^m(s) + \int_0^s c(\xi) u^n(\xi) d\xi\right)^p\right) ds. \tag{3.13}$$

Alors, nous avons

$$u(t) \le a(t) + \left(\widetilde{k}^{1-p}(t) + (1-p) \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(m + n \int_0^s c(\xi)\, d\xi \right)^p \right.$$

$$\left. \times M \left(s, 2^{p-1} \left(ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\xi)(na(\xi) + 1 - n) d\xi \right)^p \right) ds \right)^{\frac{1}{1-p}} \tag{3.14}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{k}^{1-p}(t) \quad &> \quad (p-1) \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(m + n \int_0^s c(\xi)\, d\xi \right)^p \\ &\quad \times M \left(s, 2^{p-1} \left(ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\xi)(na(\xi) + 1 - n) d\xi \right)^p \right) ds, \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{k}(t) = \int_0^{\alpha(t)} b(s) L \left(s, 2^{p-1} \left(ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\xi)(na(\xi) + 1 - n)\, d\xi \right)^p \right) ds. \tag{3.15}$$

Preuve. Définissons la fonction non décroissante $y(t)$ par :

$$y(t) = \int_0^{\alpha(t)} b(s) L \left(s, \left(u^m(s) + \int_0^s c(\xi) u^n(\xi)\, d\xi \right)^p \right) ds.$$

Alors, nous avons

$$u(t) \le a(t) + y(t), \quad y(0) = 0. \tag{3.16}$$

Utilisons le Lemme 1.3, nous trouvons

$$\begin{aligned} (a(t) + y(t))^m \quad &\le \quad m(a(t) + y(t)) + 1 - m, \\ (a(t) + y(t))^n \quad &\le \quad n(a(t) + y(t)) + 1 - n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Utilisons les inégalités (3.16) et (3.17), nous obtenons

$$\begin{aligned}
y(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L\left(s, \left((a(s)+y(s))^m + \int_0^s c(\xi)\,(a(\xi)+y(\xi))^n\, d\xi\right)^p\right) ds \\
&\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L\left(s, (m\,(a(s)+y(s)) + 1 - m\right. \\
&\quad + \left.\int_0^s c(\xi)\,(n(a(\xi)+y(\xi)) + 1 - n) d\xi\right)^p\Bigg) ds \\
&= \int_0^{\alpha(t)} b(s) \times L\left(s, \left[\left(m + n\int_0^s c(\xi)\, d\xi\right) y(s)\right.\right. \\
&\quad + \left.\left. m a(s) + 1 - m + \int_0^s c(\xi)\,(n a(\xi) + 1 - n) d\xi\right]^p\right) ds.
\end{aligned}$$

Utilisons le Lemme 3.2, nous aboutirons

$$\begin{aligned}
y(t) &\leq \left(\widetilde{k}^{1-p}(t) + (1-p)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\left(m + n\int_0^s c(\xi)\, d\xi\right)^p\right. \\
&\quad \times \left. M\left(s, 2^{p-1}\left(m a(s) + 1 - m + \int_0^s c(\xi)\,(n a(\xi) + 1 - n) d\xi\right)^p\right) ds\right)^{\frac{1}{1-p}},
\end{aligned}$$

où $\widetilde{k}(t)$ est défini par (3.15). L'inégalité (3.14) souhaitée découle des deux inégalités (3.15) et (3.16). Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.4 *Si nous prenons $L(s,x) = x$, alors l'inégalité (3.13) donnée dans le Théorème 3.10 se réduit à l'inégalité de **Tian** et **Fan,** donnée dans le Théorème 3.6.*

Théorème 3.11 *Supposons que p, q, m, n sont des constantes non-négatives satisfaisant $q \geq m > 0, q \geq n > 0, p > 0$, $\alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ est une fonction non décroissante avec $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$. Soit $L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ des fonctions différentiables par rapport à la première variable et vérifie*

$$0 \leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \quad \textit{pour tout} \quad x \geq y \geq 0.$$

Soit $u(t), a(t), b(t), c(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Si l'inégalité suivante est satisfaite

$$u^q(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(u^m(s) + \int_0^s c(\xi) u^n(\xi) d\xi\right)^p\right) ds. \tag{3.18}$$

Alors, nous avons

$$u(t) \leq \begin{cases} [a(t) + \widehat{g}(t) \\ + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \widehat{h}(s) ds\right) \int_0^{\alpha(t)} \widehat{g}(s)\widehat{h}(s) \exp\left(-\int_0^s \widehat{h}(\xi) d\xi\right) ds\Big]^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < p \leq 1, \\ \Big[a(t) + \Big(\widetilde{k}^{1-p}(t) + (1-p) \int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(\frac{m}{q} + \frac{n}{q}\int_0^s c(\xi) d\xi\right)^p \\ M\left(s, 2^{p-1}\left(\frac{m}{q}a(s) + \frac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\frac{n}{q}a(\xi) + \frac{q-n}{q}\right) d\xi\right)^p\right) ds\Big)^{\frac{1}{1-p}}\Big]^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, \end{cases} \tag{3.19}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{k}^{1-p}(t) \quad &> \quad (p-1)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s) \left(\frac{m}{q} + \frac{n}{q}\int_0^s c(\xi) d\xi\right)^p \\ &\times M\left(s, 2^{p-1}\left(\frac{m}{q}a(s) + \frac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\frac{n}{q}a(\xi) + \frac{q-n}{q}\right) d\xi\right)^p\right) ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{h}(t) \quad &= \quad pb(t)\left(\frac{m}{q} + \frac{n}{q}\int_0^t c(\xi) d\xi\right) \\ &\times M\left(s, p\left(\frac{m}{q}a(s) + \frac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\frac{n}{q}a(\xi) + \frac{q-n}{q}\right) d\xi\right) + (1-p)\right), \\ \widehat{g}(t) \quad &= \quad \int_0^{\alpha(t)} \left[b(s) L\left(s, p\left(\frac{m}{q}a(s) + \frac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\frac{n}{q}a(\xi) + \frac{q-n}{q}\right) d\xi\right) + (1-p)\right)\right] ds, \end{aligned}$$

$$\widehat{k}(t) = \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, 2^{p-1}\left(\frac{m}{q}a(s) + \frac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\frac{n}{q}a(\xi) + \frac{q-n}{q}\right) d\xi\right)^p\right) ds. \tag{3.20}$$

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(u^m(s) + \int_0^s c(\xi) u^n(\xi) d\xi\right)^p\right) ds. \tag{3.21}$$

Il est clair que $z(0) = 0$, et z est une fonction non décroissante et

$$u(t) \leq (a(t) + z(t))^{\frac{1}{q}}. \tag{3.22}$$

Utilisons le Lemme 1.3, nous trouvons

$$\begin{aligned} u^m(t) &\leq (a(t) + z(t))^{m/q} \leq \tfrac{m}{q}(a(t) + z(t)) + \tfrac{q-m}{q}, \\ u^n(t) &\leq (a(t) + z(t))^{n/q} \leq \tfrac{n}{q}(a(t) + z(t)) + \tfrac{q-n}{q}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Utilisons les inégalités (3.21)-(3.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left((a(s) + z(s))^{m/q} + \int_0^s c(\xi)(a(\xi) + z(\xi))^{n/q} d\xi\right)^p\right) ds \\ &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s) \\ &\quad \times L\left(s, \left(\tfrac{m}{q}(a(s) + z(s)) + \tfrac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\tfrac{n}{q}(a(\xi) + z(\xi)) + \tfrac{q-n}{q}\right) d\xi\right)^p\right) ds \\ &= \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left[\left(\tfrac{m}{q} + \tfrac{n}{q}\int_0^s c(\xi)\, d\xi\right) z(s)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \tfrac{m}{q}a(s) + \tfrac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\tfrac{n}{q}a(\xi) + \tfrac{q-n}{q}\right) d\xi\right]^p\right) ds. \end{aligned} \tag{3.24}$$

L'application du Lemme 3.2 à l'inégalité ci dessus, nous permet d'obtenir une estimation de $z(t)$ de la forme suivante :

$$z(t) \leq \begin{cases} \widehat{g}(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \widehat{h}(s)\, ds\right) \int_0^{\alpha(t)} \widehat{g}(s)\widehat{h}(s) \exp\left(-\int_0^s \widehat{h}(\xi)\, d\xi\right) ds \text{ si } 0 < p \leq 1, \\ \left(\widetilde{k}^{1-p}(t) + (1-p)\int_0^{\alpha(t)} 2^{p-1} b(s)\left(\tfrac{m}{q} + \tfrac{n}{q}\int_0^s c(\xi)\, d\xi\right)^p\right. \\ \left.\times\, M\left(s, 2^{p-1}\left(\tfrac{m}{q}a(s) + \tfrac{q-m}{q} + \int_0^s c(\xi)\left(\tfrac{n}{q}a(\xi) + \tfrac{q-n}{q}\right) d\xi\right)^p\right) ds\right)^{\frac{1}{1-p}} \text{ si } p > 1, \end{cases}$$

où $\widehat{h}(t), \widehat{g}(t)$ et $\widehat{k}(t)$ sont définies par (3.20). Cette dernière est associer avec l'inégalité (3.22), ce qui donne l'inégalité (3.19). ■

Remarque 3.5 *Si nous prenons $L(s, x) = x$, alors l'inégalité (3.18) donnée par le Théo-*

rème 3.11 se réduit à l'inégalité de ***Tian*** *et* ***Fan,*** *donnée dans le Théorème 3.7. Et si nous prenons* $L(s,x) = x$ *et* $m,n,p \in (0,1]$ *et* $q = 1$, *alors l'inégalité (3.18) donnée par le Théorème 3.11 se réduit à l'inégalité de* ***Li*** *et* ***Wang,*** *donnée dans le Théorème 3.3.*

Théorème 3.12 *Supposons que* $u,a,b,c,d,r,f,g \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, $g(t)$ *est une fonction non décroissante sur* $\mathbb{R}^+$. *Soit* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ *une fonction non décroissante avec* $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$. *Soit* $L,K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* $M,N : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^*_+$ *des fonctions différentiables par rapport à la première variable et vérifie*

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \quad \text{pour tout } x \geq y \geq 0, \\ 0 &\leq K(t,x) - K(t,y) \leq N(t,y)(x-y) \quad \text{pour tout } x \geq y \geq 0. \end{aligned}$$

Soit $p,q > 0$ *des constantes. Si* $u(t)$ *satisfait l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} u(t) \leq g(t) &+ \int_0^{\alpha(t)} b(s) L(s,(a(s)u(s)+c(s))^p)\,ds \\ &+ \int_0^t d(s) K(s,(e(s)u(s)+f(s))^q)\,ds. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Alors, on a les résultats suivants :

- *(i) Lorsque* $0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$, *on a*

$$u(t) \leq g(t) + G(t) + \exp\left(\int_0^t h(s)\,ds\right) \int_0^t k(s) \exp\left(-\int_0^s h(\tau)\,d\tau\right) ds. \tag{3.26}$$

- *(ii) Lorsque* $0 < p \leq 1, q > 1$ *et*

$$B_1^{1-q}(t) + \int_0^t C_1(s)\,ds > 0, \tag{3.27}$$

  on a

$$u(t) \leq A_1(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} b(s) M(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p))\, pa^p(s)\,ds\right)$$

$$\times \left(B_1^{1-q}(t) + \int_0^t C_1(s)\,ds \right)^{\frac{1}{1-q}}. \tag{3.28}$$

– *(iii) Lorsque* $0 < q \leq 1, p > 1$ *et*

$$D_1^{1-p}(t) + \int_0^t E_1(s)\,ds > 0, \tag{3.29}$$

on a

$$u(t) \leq A_2(t) + \exp\left(\int_0^t d(s)\, N(s, qe^q(s)\, A_2(s) + e^q(s)(1-q))\, qe^q(s)\,ds \right)$$

$$\times \left(D_1^{1-p}(t) + \int_0^t E_1(s)\,ds \right)^{\frac{1}{1-p}}, \tag{3.30}$$

où

$$\begin{aligned}
A_1(t) &= g(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, M(s, a^p(s)\, u^p(s))\, c^p(s) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\, N\left(s, 2^{q-1}\left(e^q(s)\, u^q(s)\right)\right) f^q(s)\,ds, \\
A_2(t) &= g(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, M\left(s, 2^{q-1}\left(a^p(s)\, u^p(s)\right)\right) c^p(s) ds \\
&\quad + \int_0^t \; d(s)\, N(s, e^q(s)\, u^q(s))\, f^q(s)\,ds, \\
B_1(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L(s, pa^p(s)\, A_1(s) + a^p(s)(1-p))\,ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\, K\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s)\, A_1^q(s)\right) ds, \\
C_1(t) &= (1-q)\, 2^{2(q-1)} d(t)\, N\left(t, 2^{2(q-1)} e^q(t)\, A_1^q(t)\right) e^q(t) \\
&\quad \times \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} (q-1)\, b(s)\, M(s, pa^p(s)\, A_1(s) + a^p(s)(1-p))\, pa^p(s)\,ds \right), \\
D_1(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L\left(s, 2^{2(p-1)} a^p(s)\, A_2^p(s)\right) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\, K(s, qe^q(s)\, A_2(s) + e^q(s)(1-q))\,ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_1(t) &= (1-p)\,2^{2(p-1)}\alpha'(t)\,b(\alpha(t))\,M\left(\alpha(t),2^{2(p-1)}a^p(\alpha(t))\,A_1^p(\alpha(t))\right)a^p(\alpha(t)) \\
&\quad\times\exp\left(\int_0^t (p-1)\,d(s)\,N(s,qe^q(s)\,A_1(s)+e^q(s)(1-q))\,qe^q(s)\,ds\right), \\
G(t) &= \int_0^{\alpha(t)} [b(s)\,L(s,p(a(s)\,g(s)+c(s))+1-p)]\,ds \\
&\quad+\int_0^t [d(s)\,K(s,q(e(s)\,g(s)+f(s))+1-q)]\,ds, \\
h(t) &= p\alpha'(t)\,b(\alpha(t))\,M(\alpha(t),p(a(\alpha(t))\,g(\alpha(t))+c(\alpha(t)))+1-p) \\
&\quad+qd(t)\,e(t)\,N(t,q(e(t)\,g(t)+f(t))+1-q), \\
k(t) &= p\alpha'(t)\,b(\alpha(t))\,M(\alpha(t),p(a(\alpha(t))\,g(\alpha(t))+c(\alpha(t)))+1-p)\,G(\alpha(t)) \\
&\quad+qd(t)\,e(t)\,N(t,q(e(t)\,g(t)+f(t))+1-q)\,G(t).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Preuve. (i) Lorsque $0<p\leq 1, 0<q\leq 1$, nous définissons la fonction

$$
w(t)=\int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L(s,(a(s)\,u(s)+c(s))^p)\,ds+\int_0^t d(s)\,K(s,(e(s)\,u(s)+f(s))^q)\,ds,
\tag{3.32}
$$

où $w(t)$ est une fonction non-décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et ce qui entraîne,

$$
u(t)\leq g(t)+w(t).
\tag{3.33}
$$

Appliquons le Lemme 1.3 à l'inégalité (3.32), ensuite substituons l'inégalité (3.33) dans cette dernière, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
w(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L(s,p(a(s)\,u(s)+c(s))+(1-p))\,ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,K(s,q(e(s)\,u(s)+f(s))+(1-q))\,ds \\
&\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L(s,p(a(s)(g(s)+w(s))+c(s))+(1-p))\,ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,K(s,q(e(s)(g(s)+w(s))+f(s))+(1-q))\,ds
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L(s, p(a(s)\, g(s) + a(s)\, w(s) + c(s)) + 1 - p)\, ds \\ &\quad + \int_0^t d(s)\, K(s, q(e(s)\, g(s) + e(s)\, w(s) + f(s)) + 1 - q)\, ds. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité ci-dessus et les propriétés des fonctions L et K, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L(s, [p(a(s)\, g(s) + c(s)) + 1 - p] + [pa(s)\, w(s)])\, ds \\ &\quad + \int_0^t d(s)\, K(s, [q(e(s)\, g(s) + f(s)) + 1 - q] + [qe(s)\, w(s)])\, ds \\ &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, [M(s, p(a(s)\, g(s) + c(s)) + 1 - p)\, pa(s)\, w(s) \\ &\quad + L(s, p(a(s)\, g(s) + c(s)) + 1 - p)] ds \\ &\quad + \int_0^t d(s)\, [N(s, q(e(s)\, g(s) + f(s)) + 1 - q)\, qe(s)\, w(s) \\ &\quad + K(s, q(e(s)\, g(s) + f(s)) + 1 - q)] ds \\ &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, M(s, p(a(s)\, g(s) + c(s)) + 1 - p)\, pa(s)\, w(s) \\ &\quad + b(s)\, L(s, p(a(s)\, g(s) + c(s)) + 1 - p)\, ds \\ &\quad + \int_0^t d(s)\, N(s, q(e(s)\, g(s) + f(s)) + 1 - q)\, qe(s)\, w(s) \\ &\quad + d(s)\, K(s, q(e(s)\, g(s) + f(s)) + 1 - q)\, ds \\ &\leq G(t) + \int_0^{\alpha(t)} pb(s)\, a(s)\, M(s, p(a(s)\, g(s) + c(s)) + 1 - p)\, w(s)\, ds \\ &\quad + \int_0^t qd(s)\, e(s)\, N(s, q(e(s)\, g(s) + f(s)) + 1 - q)\, w(s)\, ds, \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $G(t)$ est définie par (3.31).

$v(t)$ une fonction non décroissante sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^{\alpha(t)} pb(s)\, a(s)\, M(s, p(a(s)\, g(s) + c(s)) + 1 - p)\, w(s)\, ds \\ &\quad + \int_0^t qd(s)\, e(s)\, N(s, q(e(s)\, g(s) + f(s)) + 1 - q)\, w(s)\, ds \end{aligned} \tag{3.35}$$

et

$$v(0)=0,\ \ w(t)\leq G(t)+v(t),\ \ v(\alpha(t))\leq v(t). \tag{3.36}$$

Dérivons $v(t)$, par rapport à t et utilisons l'inégalité (3.36), nous trouvons

$$\begin{aligned}
v'(t) &= p\alpha'(t)\,b(\alpha(t))\,M(\alpha(t),p(a(\alpha(t))\,g(\alpha(t))+c(\alpha(t)))+1-p) \\
&\quad \times w(\alpha(t))+qd(t)\,e(t)\,N(t,q(e(t)\,g(t)+f(t))+1-q)\,w(t) \\
&\leq p\alpha'(t)\,b(\alpha(t))\,M(\alpha(t),p(a(\alpha(t))\,g(\alpha(t))+c(\alpha(t)))+1-p) \\
&\quad \times(G(\alpha(t))+v(\alpha(t))) \\
&\quad +qd(t)\,e(t)\,N(t,q(e(t)\,g(t)+f(t))+1-q)\,(G(t)+v(t)) \\
&\leq p\alpha'(t)\,b(\alpha(t))\,M(\alpha(t),p(a(\alpha(t))\,g(\alpha(t))+c(\alpha(t)))+1-p) \\
&\quad \times(G(\alpha(t))+v(t)) \\
&\quad +qd(t)\,e(t)\,N(t,q(e(t)\,g(t)+f(t))+1-q)\,(G(t)+v(t)) \\
&\leq h(t)v(t)+k(t), \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

où $h(t)$ et $k(t)$ sont données par (3.31).
multipliant (3.37) par $\exp\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)$ et en l'intégrant de 0 à t, nous obtenons

$$v(t)\leq \exp\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\int_0^t k(s)\exp\left(-\int_0^s h(\tau)\,d\tau\right)ds. \tag{3.38}$$

A partir de (3.33), (3.36) et (3.38), nous obtenons

$$u(t)\leq g(t)+G(t)+\exp\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\int_0^t k(s)\exp\left(-\int_0^s h(\tau)\,d\tau\right)ds.$$

(ii) Lorsque $0<p\leq 1, q>1$, en appliquant le Lemme 1.4 à l'inégalité (3.25), nous avons

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq g(t)+\int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L(s,(a^p(s)\,u^p(s)+c^p(s)))\,ds \\
&\quad +\int_0^t d(s)\,K\left(s,2^{q-1}(e^q(s)\,u^q(s)+f^q(s))\right)ds.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des fonctions L et K, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq g(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) \left[M\left(s, a^p(s) u^p(s)\right) c^p(s) + L\left(s, a^p(s) u^p(s)\right)\right] ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) \left[N\left(s, 2^{q-1}\left(e^q(s) u^q(s)\right)\right) f^q(s) + K\left(s, 2^{q-1} e^q(s) u^q(s)\right)\right] ds \\
&= A_1(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, a^p(s) u^p(s)\right) ds + \int_0^t d(s) K\left(s, 2^{q-1} e^q(s) u^q(s)\right) ds,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

où $A_1(t)$ est donnée par (3.31).

Définissons une fonction $w(t)$ sur $\mathbb{R}^+$ par

$$w(t) = \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, a^p(s) u^p(s)\right) ds + \int_0^t d(s) K\left(s, 2^{q-1} e^q(s) u^q(s)\right) ds, \tag{3.40}$$

où $w(t)$ est une fonction non décroissante et

$$u(t) \leq A_1(t) + w(t). \tag{3.41}$$

L'application des deux Lemmes 1.3 et 1.4 à l'inégalité (3.41) et l'utilisation de (3.40) nous permet d'obtenir une estimation de $w(t)$ comme suit

$$\begin{aligned}
w(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, a^p(s) \left(A_1(s) + w(s)\right)^p\right) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) K\left(s, 2^{q-1} e^q(s) \left(A_1(s) + w(s)\right)^q\right) ds \\
&\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, a^p(s) \left[p\left(A_1(s) + w(s)\right) + (1-p)\right]\right) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) K\left(s, 2^{q-1} e^q(s) \left[2^{q-1}\left(A_1^q(s) + w^q(s)\right)\right]\right) ds \\
&\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, p a^p(s) A_1(s) + p a^p(s) w(s) + a^p(s)(1-p)\right) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) K\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s) + 2^{2(q-1)} e^q(s) w^q(s)\right) ds.
\end{aligned}$$

En utilisant une autre fois les propriétés des fonctions L et K, nous donnons

$$\begin{aligned}
w(t) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)\left[M\left(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)\right) pa^p(s) w(s)\right. \\
&\quad \left. + L\left(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)\right)\right] ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\left[N\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s)\right) 2^{2(q-1)} e^q(s) w^q(s)\right. \\
&\quad \left. + K\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s)\right)\right] ds \\
&\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s) M\left(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)\right) pa^p(s) w(s) \\
&\quad + b(s) L\left(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)\right) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) N\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s)\right) 2^{2(q-1)} e^q(s) w^q(s) \\
&\quad + d(s) K\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s)\right) ds \\
&= B_1(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) M\left(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)\right) pa^p(s) w(s) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) N\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s)\right) 2^{2(q-1)} e^q(s) w^q(s) ds, \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

où $B_1(t)$ est donnée par (3.31).

Soit $T > 0$ une constante fixé sur $\mathbb{R}^+$. Comme $B_1(t)$ est une fonction non décroissante, pour tout $t \in [0, T]$, et d'après (3.42), nous avons

$$\begin{aligned}
w(t) &\leq B_1(T) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) M\left(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)\right) pa^p(s) w(s) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) N\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s)\right) 2^{2(q-1)} e^q(s) w^q(s) ds. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Posons $v(t)$ à droite de l'inégalité ci-dessus, ce qui donne

$$\begin{aligned}
v(t) &= B_1(T) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) M\left(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)\right) pa^p(s) w(s) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s) N\left(s, 2^{2(q-1)} e^q(s) A_1^q(s)\right) 2^{2(q-1)} e^q(s) w^q(s) ds \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

telle que $v(t)$ est une fonction non décroissante, et

$$v\left(0\right)=B_{1}\left(T\right),w\left(\alpha\left(t\right)\right)\leq w\left(t\right)\leq v\left(t\right). \tag{3.45}$$

Dérivons $v(t)$ par rapport à t où $t\in[0,T]$ et utilisons (3.45), nous obtenons

$$\begin{aligned}
v^{'}\left(t\right) &= \alpha^{'}\left(t\right)b\left(\alpha\left(t\right)\right)M\left(\alpha\left(t\right),pa^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)A_{1}\left(\alpha\left(t\right)\right)+a^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)\left(1-p\right)\right)\\
&\quad\times pa^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)w\left(\alpha\left(t\right)\right)+d\left(t\right)N\left(t,2^{2(q-1)}e^{q}\left(t\right)A_{1}^{q}\left(t\right)\right)2^{2(q-1)}e^{q}\left(t\right)w^{q}\left(t\right)\\
&\leq \alpha^{'}\left(t\right)b\left(\alpha\left(t\right)\right)M\left(\alpha\left(t\right),pa^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)A_{1}\left(\alpha\left(t\right)\right)+a^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)\left(1-p\right)\right)\\
&\quad\times pa^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)v\left(t\right)+d\left(t\right)N\left(t,2^{2(q-1)}e^{q}\left(t\right)A_{1}^{q}\left(t\right)\right)2^{2(q-1)}e^{q}\left(t\right)v^{q}\left(t\right), \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Considérons le problème à valeur initiale suivant, pour l'équation différentielle de Bernoulli

$$\begin{aligned}
\frac{dy\left(t\right)}{dt} &= \alpha^{'}\left(t\right)b\left(\alpha\left(t\right)\right)M\left(\alpha\left(t\right),pa^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)A_{1}\left(\alpha\left(t\right)\right)+a^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)\left(1-p\right)\right)\\
&\quad\times pa^{p}\left(\alpha\left(t\right)\right)y\left(t\right)+d\left(t\right)N\left(t,2^{2(q-1)}e^{q}\left(t\right)A_{1}^{q}\left(t\right)\right)2^{2(q-1)}e^{q}\left(t\right)y^{q}\left(t\right),\\
y\left(0\right) &= B_{1}\left(T\right). \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Alors pour tout $t\in[0,T]$, on obtient une solution unique à cette équation :

$$\begin{aligned}
y\left(t\right) &= \exp\left(\int_{0}^{\alpha(t)}b\left(s\right)M\left(s,pa^{p}\left(s\right)A_{1}\left(s\right)+a^{p}\left(s\right)\left(1-p\right)\right)pa^{p}\left(s\right)ds\right)\\
&\quad\times\left(B_{1}^{1-q}\left(T\right)+\int_{0}^{t}C_{1}\left(s\right)ds\right)^{\frac{1}{1-q}}, \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

où $C_{1}\left(t\right)$ est donnée par (3.31). Pour $t=T$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
y\left(T\right) &= \exp\left(\int_{0}^{\alpha(T)}b\left(s\right)M\left(s,pa^{p}\left(s\right)A_{1}\left(s\right)+a^{p}\left(s\right)\left(1-p\right)\right)pa^{p}\left(s\right)ds\right)\\
&\quad\times\left(B_{1}^{1-q}\left(T\right)+\int_{0}^{T}C_{1}\left(s\right)ds\right)^{\frac{1}{1-q}}. \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

D'après le théorème de comparaison pour les équations différentielles ordinaires et la condition (3.27), nous avons

$$\begin{aligned} v(T) &\leq y(T) = \exp\left(\int_0^{\alpha(T)} b(s) M(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)) pa^p(s) ds\right) \\ &\times \left(B_1^{1-q}(T) + \int_0^T C_1(s) ds\right)^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

D'après (3.41), (3.45) et (3.50), nous obtenons

$$\begin{aligned} u(T) &\leq A_1(T) + \exp\left(\int_0^{\alpha(T)} b(s) M(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)) pa^p(s) ds\right) \\ &\times \left(B_1^{1-q}(T) + \int_0^T C_1(s) ds\right)^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Pour un T arbitraire tel que $t \in \mathbb{R}^+$, nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) &\leq A_1(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} b(s) M(s, pa^p(s) A_1(s) + a^p(s)(1-p)) pa^p(s) ds\right) \\ &\times \left(B_1^{1-q}(t) + \int_0^t C_1(s) ds\right)^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned}$$

(iii) Lorsque $0 < q \leq 1$, $p > 1$, la preuve est similaire à celle du second cas. La preuve est ainsi achevée. ■

Remarque 3.6 *Si nous prenons $L(s,x) = x$ et $d(s) = 0$, alors l'inégalité (3.25) donnée par le Théorème 3.12 se réduit à l'inégalité de **Tian** et **Fan,** donnée par le Lemme 3.1. Et si nous prenons $L(s,x) = x$ et $K(s,y) = y$, alors l'inégalité (3.25) donnée par le Théorème 3.12 se réduit à l'inégalité de **Song** et **Meng,** donnée par le Théorème 3.8.*

Théorème 3.13 *Supposons que $u, a, b, c, d, e \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $a(t)$ est une fonction non décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et soit $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction non décroissante avec $\alpha(t) \leq t, \alpha(0) = 0$. Soit $L, K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $M, N : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ des fonctions* *différentiables par rapport à la première variable et vérifie*

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \quad \text{pour tout} \;\; x \geq y \geq 0, \\ 0 &\leq K(t,x) - K(t,y) \leq N(t,y)(x-y) \quad \text{pour tout} \;\; x \geq y \geq 0. \end{aligned}$$

Supposons que $m, n, l, r \in (0,1]$, $p, q > 0$ *sont des constantes. Si* $u(t)$ *satisfait l'inégalité suivante*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(u^m(s) + \int_0^s c(\tau) u^n(\tau) d\tau\right)^p\right) ds$$

$$+ \int_0^t d(s) K\left(s, \left(u^l(s) + \int_0^s e(\tau) u^r(\tau) d\tau\right)^q\right) ds, \tag{3.52}$$

alors on a les résultats suivants :

– *(i) Lorsque* $0 < p \leq 1$, $0 < q \leq 1$, *on a*

$$u(t) \leq a(t) + G_1(t) + \exp\left(\int_0^t h_1(s) ds\right) \int_0^t k_1(s) \exp\left(-\int_0^s h_1(\tau) d\tau\right) ds. \tag{3.53}$$

– *(ii) Lorsque* $0 < p \leq 1$, $q > 1$ *et*

$$B_2^{1-q}(t) + \int_0^t C_2(s) ds > 0, \tag{3.54}$$

on a

$$u(t) \leq a(t) + A_3(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} pb(s) M\left(s, pf_1^p(s) A_3(s) + f_1^p(s)(1-p)\right) f_1^p(s) ds\right)$$

$$\times \left(B_2^{1-q}(t) + \int_0^t C_2(s) ds\right)^{\frac{1}{1-q}}. \tag{3.55}$$

– *(iii) Lorsque* $0 < q \leq 1$, $p > 1$ *et*

$$D_2^{1-p}(t) + \int_0^t E_2(s)\,ds > 0, \tag{3.56}$$

on a

$$u(t) \leq a(t) + A_4(t) + \exp\left(\int_0^t qd(s)\,N\left(s, qg_1^q(s)\,A_4(s) + g_1^q(s)(1-q)\right)g_1^q(s)\,ds\right)$$

$$\times\left(D_2^{1-p}(t) + \int_0^t E_2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{1-p}}, \tag{3.57}$$

où

$$\begin{aligned}
A_3(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,M\left(s, f_1^p(s)\,w^p(s)\right) \\
&\quad\times\left[ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\tau)\left(na(\tau) + 1 - n\right)d\tau\right]^p ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,N\left(s, 2^{q-1}\left(g_1^q(s)\,w^q(s)\right)\right) \\
&\quad\times\left[la(s) + 1 - l + \int_0^s e(\tau)\left(ra(\tau) + 1 - r\right)d\tau\right]^q ds \\
A_4(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,M\left(s, 2^{p-1}\left(f_1^p(s)\,w^p(s)\right)\right) \\
&\quad\times\left[ma(s) + 1 - m + \int_0^s c(\tau)\left(na(\tau) + 1 - n\right)d\tau\right]^p ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,N\left(s, \left(g_1^q(s)\,w^q(s)\right)\right) \\
&\quad\times\left[la(s) + 1 - l + \int_0^s e(\tau)\left(ra(\tau) + 1 - r\right)d\tau\right]^q ds \\
B_2(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L\left(s, pf_1^p(s)\,A_3(s) + f_1^p(s)(1-p)\right)ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,K\left(s, 2^{2(q-1)}g_1^q(s)\,A_3^q(s)\right)ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_2(t) &= (1-q)\,2^{2(q-1)} d(t)\, N\left(t, 2^{2(q-1)} g_1^q(t)\, A_3^q(t)\right) g_1^q(t) \\
&\quad \times \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} (q-1)\, b(s)\, M\left(s, p f_1^p(s)\, A_3(s) + f_1^p(s)(1-p)\right)\right. \\
&\quad \left. \times\, p f_1^p(s)\, ds\right), \\
D_2(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L\left(s, 2^{2(p-1)} f_1^p(s)\, A_4^p(s)\right) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\, K\left(s, q g_1^q(s)\, A_4(s) + g_1^q(s)(1-q)\right) ds, \\
E_2(t) &= (1-p)\,2^{2(p-1)} \alpha'(t)\, b(\alpha(t)) \\
&\quad \times M\left(\alpha(t), 2^{2(p-1)} f_1^p(\alpha(t))\, A_3^p(\alpha(t))\right) f_1^p(\alpha(t)) \\
&\quad \times \exp\left(\int_0^t (p-1)\, d(s)\, N\left(s, q g_1^q(s)\, A_3(s) + g_1^q(s)(1-q)\right)\right. \\
&\quad \left. \times\, q g_1^q(s)\, ds\right), \\
G_1(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\, L(s, p(f_1(s)\, a(s) + m a(s) + 1 - m \\
&\quad + \int_0^s c(\tau)\left(n a(\tau) + 1 - n\right) d\tau) + 1 - p) ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\, K(s, q(g_1(s)\, a(s) + l a(s) + 1 - l \\
&\quad + \int_0^s e(\tau)\left(r a(\tau) + 1 - r\right) d\tau) + 1 - q) ds, \\
f_1(t) &= m + n\int_0^t c(s)\, ds, \quad g_1(t) = l + r\int_0^t e(s)\, ds, \\
h_1(t) &= p\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, f_1(\alpha(t))\, M\left(\alpha(t), p\left(f_1(\alpha(t))\, a(\alpha(t))\right.\right. \\
&\quad + \left.\left(m a(\alpha(t)) + 1 - m + \int_0^{\alpha(t)} c(\tau)\left(n a(\tau) + 1 - n\right) d\tau\right)\right) \\
&\quad + 1 - p) + q d(t)\, g_1(t)\, N\left(t, q\left(g_1(t)\, a(t)\right.\right. \;, \\
&\quad + \left.\left.\left(l a(t) + 1 - l + \int_0^t e(\tau)\left(r a(\tau) + 1 - r\right) d\tau\right)\right) + 1 - q\right), \\
k_1(t) &= p\alpha'(t)\, b(\alpha(t))\, f_1(\alpha(t))\, M\left(\alpha(t), p\left(f_1(\alpha(t))\, a(\alpha(t))\right.\right. \\
&\quad + \left.\left(m a(\alpha(t)) + 1 - m + \int_0^{\alpha(t)} c(\tau)\left(n a(\tau) + 1 - n\right) d\tau\right)\right) \\
&\quad + 1 - p)\, G_1(\alpha(t)) + q d(t)\, g_1(t)\, N\left(t, q\left(g_1(t)\, a(t)\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left(la\left(t\right)+1-l+\int_0^t e\left(\tau\right)\left(ra\left(\tau\right)+1-r\right)d\tau\right)\Big)+1-q\Big)\,G_1\left(t\right). \tag{3.58}$$

Preuve. Définissons la fonction $w\left(t\right)$ comme suit :

$$\begin{aligned} w\left(t\right) &= \int_0^{\alpha(t)} b\left(s\right)L\left(s,\left(u^m\left(s\right)+\int_0^s c\left(\tau\right)u^n\left(\tau\right)d\tau\right)^p\right)ds \\ &\quad +\int_0^t d\left(s\right)K\left(s,\left(u^l\left(s\right)+\int_0^s e\left(\tau\right)u^r\left(\tau\right)d\tau\right)^q\right)ds, \end{aligned} \tag{3.59}$$

où $w(t)$ est une fonction non décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et

$$u\left(t\right)\leq a\left(t\right)+w\left(t\right). \tag{3.60}$$

Appliquons le Lemme 1.3 à l'inégalité (3.60), nous donnons

$$\begin{aligned} u^m\left(t\right) &\leq \left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)^m \leq m\left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)+1-m, \\ u^n\left(t\right) &\leq \left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)^n \leq n\left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)+1-n, \\ u^l\left(t\right) &\leq \left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)^l \leq l\left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)+1-l, \\ u^r\left(t\right) &\leq \left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)^r \leq r\left(a\left(t\right)+w\left(t\right)\right)+1-r. \end{aligned} \tag{3.61}$$

La substitution de (3.61) dans (3.59), entraîne

$$\begin{aligned} w\left(t\right) &\leq \int_0^{\alpha(t)} b\left(s\right)L\Big(s,\Big[m\left(a\left(s\right)+w\left(s\right)\right)+1-m \\ &\quad +\int_0^s c\left(\tau\right)\left(n\left(a\left(\tau\right)+w\left(\tau\right)\right)+1-n\right)d\tau\Big]^p\Big)ds \\ &\quad +\int_0^t d\left(s\right)K\Big(s,\Big[\left(l\left(a\left(s\right)+w\left(s\right)\right)+1-l\right) \\ &\quad +\int_0^s e\left(\tau\right)\left(r\left(a\left(\tau\right)+w\left(\tau\right)\right)+1-r\right)d\tau\Big]^q\Big)ds, \end{aligned}$$

on peut réécrire l'inégalité ci-dessus sous la forme :

$$
\begin{aligned}
w(t) \quad \leq \quad & \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left[f_1(s) w(s) + ma(s) + 1 - m\right.\right. \\
& \left.\left. + \int_0^s c(\tau)(na(\tau) + 1 - n)\, d\tau\right]^p\right) ds \\
& + \int_0^t d(s) K\left(s, \left[g_1(s) w(s) + la(s) + 1 - l\right.\right. \\
& \left.\left. + \int_0^s e(\tau)(ra(\tau) + 1 - r)\, d\tau\right]^q\right) ds, \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

où $f_1(t)$ et $g_1(t)$ sont définis par (3.58). A partir de (3.60) et (3.62), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
u(t) \quad \leq \quad & a(t) \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left[f_1(s) w(s) + ma(s) + 1 - m\right.\right. \\
& \left.\left. + \int_0^s c(\tau)(na(\tau) + 1 - n)\, d\tau\right]^p\right) ds + \int_0^t d(s) K\left(s, \left[g_1(s) w(s)\right.\right. \\
& \left.\left. + la(s) + 1 - l + \int_0^s e(\tau)(ra(\tau) + 1 - r)\, d\tau\right]^q\right) ds. \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

L'inégalité (3.63) a la même forme que l'inégalité (3.25) du Théorème 3.12. En utilisant le Théorème 3.12, et les conditions (3.54) et (3.56), nous pouvons obtenir les résultats requises. La preuve du Théorème 3.13 est terminée. ■

Remarque 3.7 *Si nous prenons $L(s,x) = x$, $d(s) = 0$ et $m > 0, p > 1$, alors l'inégalité (3.52) donnée par le Théorème 3.13 se réduit à l'inégalité de **Tian** et **Fan,** donnée par le Théorème 3.6. Et si nous prenons $L(s,x) = x$ et $K(s,y) = y$, alors l'inégalité (3.52) donnée par le Théorème* 3.13 *se réduit à l'inégalité de **Song** et **Meng,** donnée par le Théorème* 3.9*. Et si nous prenons $L(s,x) = x$, $d(s) = 0$ et $m, n, p \in (0,1]$, alors l'inégalité (3.52) donnée par le Théorème 3.13 se réduit à l'inégalité de **Li** et **Wang,** donnée par le Théorème 3.3.*

Théorème 3.14 *Supposons que $u, a, b, c, d, e \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $a(t)$ est une fonction non décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et soit $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ une fonction non décroissante avec $\alpha(t) \leq$*

$t, \alpha(0) = 0$. Soit $L, K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et $M, N : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ des fonctions différentiables par rapport à la première variable, vérifie

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \quad \textit{pour tout} \;\; x \geq y \geq 0, \\ 0 &\leq K(t,x) - K(t,y) \leq N(t,y)(x-y) \quad \textit{pour tout} \;\; x \geq y \geq 0, \end{aligned}$$

Supposons que $k \geq m > 0$, $k \geq n > 0$, $k \geq l > 0$, $k \geq r > 0$, $p, q > 0$ sont des constantes. Si $u(t)$ satisfait l'inégalité

$$u^k(t) \leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(u^m(s) + \int_0^s c(\tau) u^n(\tau) d\tau\right)^p\right) ds$$

$$+ \int_0^t d(s) K\left(s, \left(u^l(s) + \int_0^s e(\tau) u^r(\tau) d\tau\right)^q\right) ds, \tag{3.64}$$

alors on a les résultats suivants :

– *(i)Lorsque $0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$, on a*

$$u(t) \leq \left[a(t) + G_2(t) + \exp\left(\int_0^t h_2(s) ds\right)\right.$$

$$\left.\times \int_0^t k_2(s) \exp\left(-\int_0^s h_2(\tau) d\tau\right) ds\right]^{\frac{1}{k}}. \tag{3.65}$$

– *(ii) Lorsque $0 < p \leq 1, q > 1$ et*

$$B_3^{1-q}(t) + \int_0^t C_3(s) ds > 0, \tag{3.66}$$

on a

$$u(t) \leq \left[a(t) + A_5(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} pb(s) M\left(s, pf_2^p(s) A_5(s) + f_2^p(s)(1-p)\right)\right.\right.$$

$$\times\ f_2^p(s)\,ds)\left(B_3^{1-q}(t)+\int_0^t C_3(s)\,ds\right)^{\frac{1}{1-q}}\Bigg]^{\frac{1}{k}}. \tag{3.67}$$

– *(iii)Lorsque* $0<q\leq 1, p>1$ *et*

$$D_3^{1-p}(t)+\int_0^t E_3(s)\,ds>0, \tag{3.68}$$

on a

$$u(t)\leq\Bigg[a(t)+A_6(t)+\exp\left(\int_0^t qd(s)\,N(s,qg_2^q(s)\,A_6(t)\right.$$

$$+\ g_2^q(s)(1-q))\,g_2^q(s)\,ds)\left(D_3^{1-p}(t)+\int_0^t E_3(s)\,ds\right)^{\frac{1}{1-p}}\Bigg]^{\frac{1}{k}}, \tag{3.69}$$

où

$$\begin{aligned}
A_5(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,M(s,f_2^p(s)\,v^p(s)) \\
&\quad\times\left[\frac{m}{k}a(s)+\frac{k-m}{k}+\int_0^s c(\tau)\left(\frac{n}{k}a(\tau)+\frac{k-n}{k}\right)d\tau\right]^p ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,N\left(s,2^{q-1}\left(g_2^q(s)\,v^q(s)\right)\right) \\
&\quad\times\left[\frac{l}{k}a(s)+\frac{k-l}{k}+\int_0^s e(\tau)\left(\frac{r}{k}a(\tau)+\frac{k-r}{k}\right)d\tau\right]^q ds, \\
A_6(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,M\left(s,2^{p-1}\left(f_2^p(s)\,v^p(s)\right)\right) \\
&\quad\times\left[\frac{m}{k}a(s)+\frac{k-m}{k}+\int_0^s c(\tau)\left(\frac{n}{k}a(\tau)+\frac{k-n}{k}\right)d\tau\right]^p ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,N(s,(g_2^q(s)\,v^q(s))) \\
&\quad\times\left[\frac{l}{k}a(s)+\frac{k-l}{k}+\int_0^s e(\tau)\left(\frac{r}{k}a(\tau)+\frac{k-r}{k}\right)d\tau\right]^q ds, \\
B_3(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L(s,pf_2^p(s)\,A_5(s)+f_2^p(s)(1-p))\,ds \\
&\quad+\int_0^t d(s)\,K\left(s,2^{2(q-1)}g_2^q(s)\,A_5^q(s)\right)ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_3(t) &= (1-q)\,2^{2(q-1)}d(t)\,N\left(t, 2^{2(q-1)}g_2^q(t)\,A_5^q(t)\right)g_2^q(t) \\
&\quad \times \exp\left(\int_0^{\alpha(t)}(q-1)\,b(s)\,M\left(s, pf_2^p(s)\,A_5(s)+f_2^p(s)(1-p)\right)\right. \\
&\quad \times pf_2^p(s)\,ds), \\
D_3(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L\left(s, 2^{2(p-1)}f_2^p(s)\,A_6^p(s)\right)ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\,K\left(s, qg_2^q(s)\,A_6(s)+g_2^q(s)(1-q)\right)ds, \\
E_3(t) &= (1-p)\,2^{2(p-1)}\alpha^{'}(t)\,b(\alpha(t))\,M\left(\alpha(t), 2^{2(p-1)}f_2^p(\alpha(t))\,A_5^p(\alpha(t))\right) \\
&\quad \times f_2^p(\alpha(t)) \\
&\quad + \exp\left(\int_0^t qd(s)\,N\left(s, qg_2^q(s)\,A_6(t)+g_2^q(s)(1-q)\right)g_2^q(s)\,ds\right) \\
&\quad \times qg_2^q(s)\,ds) \\
G_2(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L\left(s, p\left(f_2(s)\,a(s)+\tfrac{m}{k}a(s)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \tfrac{k-m}{k} + \int_0^s c(\tau)\left(\tfrac{n}{k}a(\tau)+\tfrac{k-n}{k}\right)d\tau\right)+1-p\right)ds \\
&\quad + \int_0^t d(s)\,K\left(s, q\left(g_2(s)\,a(s)+\tfrac{l}{k}a(s)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \tfrac{k-l}{k} + \int_0^s e(\tau)\left(\tfrac{r}{k}a(\tau)+\tfrac{k-r}{k}\right)d\tau\right)+1-q\right)ds, \\
f_2(t) &= \tfrac{m}{k}+\tfrac{n}{k}\int_0^t c(s)\,ds, t\in\mathbb{R}^+, \quad g_2(t)=\tfrac{l}{k}+\tfrac{r}{k}\int_0^t e(s)\,ds, \\
h_2(t) &= p\alpha^{'}(t)\,b(\alpha(t))\,f_2(\alpha(t))\,M\left(\alpha(t), p\left(f_2(\alpha(t))\,a(\alpha(t))\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \left(\tfrac{m}{k}a(\alpha(t))+\tfrac{k-m}{k}+\int_0^{\alpha(t)} c(\tau)\left(\tfrac{n}{k}a(\tau)+\tfrac{k-n}{k}\right)d\tau\right)\right)+1-p\right) \\
&\quad + qd(t)\,g_2(t)\,N\left(t, q\left(g_2(t)\,a(t)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \left(\tfrac{l}{k}a(t)+\tfrac{k-l}{k}+\int_0^t e(\tau)\left(\tfrac{r}{k}a(\tau)+\tfrac{k-r}{k}\right)d\tau\right)\right)+1-q\right) \\
k_2(t) &= p\alpha^{'}(t)\,b(\alpha(t))\,f_2(\alpha(t))\,M\left(\alpha(t), p\left(f_2(\alpha(t))\,a(\alpha(t))\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \left(\tfrac{m}{k}a(\alpha(t))+\tfrac{k-m}{k}+\int_0^{\alpha(t)} c(\tau)\left(\tfrac{n}{k}a(\tau)+\tfrac{k-n}{k}\right)d\tau\right)\right)+1-p\right) \\
&\quad \times G_2(\alpha(t)) + qd(t)\,g_2(t)\,N\left(t, q\left(g_2(t)\,a(t)\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{l}{k}a(t)+\frac{k-l}{k}+\int_0^t e(\tau)\left(\frac{r}{k}a(\tau)+\frac{k-r}{k}\right)d\tau\right)\Bigg)+1-q\Bigg)G_2(t). \tag{3.70}$$

Preuve. Définissons la fonction non décroissante $v(t)$ sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^{\alpha(t)} b(s)L\left(s,\left(u^m(s)+\int_0^s c(\tau)u^n(\tau)d\tau\right)^p\right)ds \\ &\quad+\int_0^t d(s)K\left(s,\left(u^l(s)+\int_0^s e(\tau)u^r(\tau)d\tau\right)^q\right)ds, \end{aligned} \tag{3.71}$$

alors, nous avons

$$u(t)\leq (a(t)+v(t))^{\frac{1}{k}}. \tag{3.72}$$

Utilisons l'inégalité (3.72), et appliquons par la suite le Lemme 1.3, nous trouvons

$$\begin{aligned} u^m(t) &\leq (a(t)+v(t))^{\frac{m}{k}} \leq \frac{m}{k}(a(t)+v(t))+\frac{k-m}{k}, \\ u^n(t) &\leq (a(t)+v(t))^{\frac{n}{k}} \leq \frac{n}{k}(a(t)+v(t))+\frac{k-n}{k}, \\ u^l(t) &\leq (a(t)+v(t))^{\frac{l}{k}} \leq \frac{l}{k}(a(t)+v(t))+\frac{k-l}{k}, \\ u^r(t) &\leq (a(t)+v(t))^{\frac{r}{k}} \leq \frac{r}{k}(a(t)+v(t))+\frac{k-r}{k}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

La substitution de (3.73) dans (3.71) entraîne

$$\begin{aligned} v(t) \leq \int_0^{\alpha(t)} & b(s)L\Big(s,\Big[\frac{m}{k}(a(s)+v(s))+\frac{k-m}{k} \\ &+\int_0^s c(\tau)\left(\frac{n}{k}(a(\tau)+v(\tau))+\frac{k-n}{k}\right)d\tau\Big]^p\Big)ds \\ &+\int_0^t d(s)K\Big(s,\Big[\frac{l}{k}(a(s)+v(s))+\frac{k-l}{k} \\ &+\int_0^s e(\tau)\left(\frac{r}{k}(a(\tau)+v(\tau))+\frac{k-r}{k}\right)d\tau\Big]^q\Big)ds, \end{aligned}$$

on peut réécrire l'inégalité ci-dessus sous la forme :

$$v(t)\leq \int_0^{\alpha(t)} b(s)L\Big(s,\Big[f_2(s)v(s)+\frac{m}{k}a(s)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \tfrac{k-m}{k} + \int_0^s c(\tau)\left(\tfrac{n}{k}a(\tau) + \tfrac{k-n}{k}\right)d\tau\Big]^p\Big)\,ds \\
&+ \int_0^t d(s)\,K\Big(s, \Big[g_2(s)\,v(s) + \tfrac{l}{k}a(s) \\
&+ \tfrac{k-l}{k} + \int_0^s e(\tau)\left(\tfrac{r}{k}a(\tau) + \tfrac{k-r}{k}\right)d\tau\Big]^q\Big)\,ds,
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

où $f_2(t)$ et $g_2(t)$ sont données par (3.70). A partir de (3.72) et (3.74), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
u(t) \leq\ & \Bigg(a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s)\,L\Big(s, \Big[f_2(s)\,v(s) + \tfrac{m}{k}a(s) \\
&+ \tfrac{k-m}{k} + \int_0^s c(\tau)\left(\tfrac{n}{k}a(\tau) + \tfrac{k-n}{k}\right)d\tau\Big]^p\Big)\,ds \\
&+ \int_0^t d(s)\,K\Big(s, \Big[g_2(s)\,v(s) + \tfrac{l}{k}a(s) \\
&+ \tfrac{k-l}{k} + \int_0^s e(\tau)\left(\tfrac{r}{k}a(\tau) + \tfrac{k-r}{k}\right)d\tau\Big]^q\Big)\,ds\Bigg)^{\frac{1}{k}}.
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

L'inégalité (3.75) a presque la même forme que l'inégalité (3.25) du Théorème 3.12. En utilisant le Théorème 3.12 et les conditions (3.66) et (3.68), nous pouvons obtenir les résultats souhaités. Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.8 *Si nous prenons $L(s,x) = x$ et $d(s) = 0$, alors l'inégalité (3.64) donnée par le Théorème 3.14 se réduit à l'inégalité de **Tian** et **Fan,** donnée dans le Théorème 3.7. Et si nous prenons $L(s,x) = x$, $d(s) = 0$ et $k = 1$, $m, n, p \in (0,1]$ alors l'inégalité (3.64) donnée par le Théorème 3.14 se réduit à l'inégalité de **Li** et **Wang**, donnée dans le Théorème 3.3.*

3.4 Applications

Dans cette section, nous présentons quelques applications de nos résultats, où nous avons montré que les solutions des équations intégrales à retards sont bornées.

Exemple 3.1 *Considérons l'équation intégrale à retard de type Volterra suivante :*

$$x(t) = a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(x(s) + \int_0^s c(\xi) x(\xi) d\xi\right)^3\right) ds, \tag{3.76}$$

où $a(t), b(t), c(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *est une fonction non décroissante avec,* $\alpha(t) \leq t$, $\alpha(0) = 0$. *Soit* $L : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+^*$ *des fonctions différentiables par rapport à la première variable, ce qui vérifie*

$$0 \leq L(t, x) - L(t, y) \leq M(t, y)(x - y) \quad \textit{pour tout} \;\; x \geq y \geq 0.$$

Alors, l'équation (3.76) satisfait l'inégalité suivante :

$$|x(t)| \leq |a(t)| + \left(\widetilde{k}^{-2}(t) - 8\int_0^{\alpha(t)} |b(s)| \left(1 + \int_0^s |c(\xi)| d\xi\right)^3\right.$$
$$\left. \times M\left(s, 4\left(|a(s)| + \int_0^s |c(\xi)| |a(\xi)| d\xi\right)^3\right) ds\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.77}$$

avec

$$\widetilde{k}^{-2}(t) > 8\int_0^{\alpha(t)} |b(s)| \left(1 + \int_0^s |c(\xi)| d\xi\right)^3 M\left(s, 4\left(|a(s)| + \int_0^s |c(\xi)| |a(\xi)| d\xi\right)^3\right) ds,$$

où

$$\widetilde{k}(t) = \int_0^{\alpha(t)} |b(s)| L\left(s, 4\left(|a(s)| \int_0^s |c(\xi)| |a(\xi)| d\xi\right)^3\right) ds.$$

Preuve. Soit $x(t)$ une solution quelconque de l'équation (3.76), pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, Nous avons

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |a(t)| + \int_0^{\alpha(t)} |b(s)| \left| L\left(s, \left(x(s) + \int_0^s c(\xi) x(\xi) d\xi\right)^3\right)\right| ds \\ &\leq |a(t)| + \int_0^{\alpha(t)} |b(s)| L\left(s, \left(|x(s)| + \int_0^s |c(\xi)| |x(\xi)| d\xi\right)^3\right) ds. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Soit $u(t) = |x(t)|$, alors nous pouvons réécrire l'inégalité (3.78) sous la forme suivante :

$$u(t) \leq |a(t)| + \int_0^{\alpha(t)} |b(s)| L\left(s, \left(u(s) + \int_0^s |c(\xi)| u(\xi) d\xi\right)^3\right) ds. \tag{3.79}$$

En appliquant le Théorème 3.10 à l'inégalité (3.79), nous trouvons

$$\begin{aligned} u(t) &\leq |a(t)| + \left(\widetilde{k}^{-2}(t) - 8\int_0^{\alpha(t)} |b(s)| \left(1 + \int_0^s |c(\xi)| d\xi\right)^3 \right. \\ &\quad \left. \times M\left(s, 4\left(|a(s)| + \int_0^s |c(\xi)| |a(\xi)| d\xi\right)^3\right) ds\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Ce qui montre que la solution de l'équation (3.76) est bornée. ■

Exemple 3.2 *Considérons l'équation intégro-différentielle à retard suivante :*

$$\begin{aligned} u^k(t) = a(t) &+ \int_0^{\alpha(t)} F\left(s, u(s), \int_0^s G(\tau, u(\tau)) d\tau\right) ds \\ &+ \int_0^t H\left(s, u(s), \int_0^s S(\tau, u(\tau)) d\tau\right) ds, \end{aligned} \tag{3.81}$$

où $t \in \mathbb{R}^+, u(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $a(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\alpha(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *est une fonction non décroissante avec,* $\alpha(t) \leq t$. *Soit* $F, H \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), G, S \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)$ *et* k *une constante positive.*

Théorème 3.15 *Supposons que* F, G, H, S *vérifient les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} |F(t, U, V)| &\leq b(t) L(s, (U^m + V)^p), \\ |H(t, U, V)| &\leq d(t) K\left(s, \left(U^l + V\right)^q\right), \end{aligned}$$

$$|G(t, U)| \leq c(t) U^n, \quad |S(t, U)| \leq e(t) U^r \tag{3.82}$$

et

$$B_3^{1-q}(t) + \int_0^t C_3(s) ds > 0,$$

où $t \in \mathbb{R}^+$, $U, V \in \mathbb{R}$, $b(t), c(t), d(t), e(t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *,et* $k \geq m > 0, k \geq n > 0$, $k \geq l > 0$, $k \geq r > 0$, $0 < p \leq 1$, $q > 1$ *sont des constantes.* $B_3(t)$ *et* $C_3(t)$ *sont définis dans le Théorème 3.14.* $L, K : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et* M, $N : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^*_+$ *des fonctions différentiables par rapport à la première variable vérifiant*

$$\begin{aligned} 0 &\leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y) \quad \textit{pour tout} \quad x \geq y \geq 0, \\ 0 &\leq K(t,x) - K(t,y) \leq N(t,y)(x-y) \quad \textit{pour tout} \quad x \geq y \geq 0. \end{aligned}$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$*, toutes les solutions de l'équation (3.81) admettent*

$$\begin{aligned} |u(t)| \leq \Bigg[& a(t) + A_5(t) + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} pb(s) M(s, pf_2^p(s) A_5(s) \right. \\ & \left. + \, f_2^p(s)(1-p)) f_2^p(s) ds \right) \left(B_3^{1-q}(t) + \int_0^t C_3(s) ds \right)^{\frac{1}{1-q}} \Bigg]^{\frac{1}{k}}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

où $A_5(t)$ *et* $f_2(t)$ *sont définis par (3.70) du Théorème 3.14.*

Preuve. Soit $u(t)$ une solution quelconque de l'équation (3.81), à partir de (3.81) et (3.82), pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, nous avons

$$\begin{aligned} |u(t)|^k &\leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} \left| F\left(s, u(s), \int_0^s G(\tau, u(\tau)) d\tau \right) \right| ds \\ &\quad + \int_0^t \left| H\left(s, u(s), \int_0^s S(\tau, u(\tau)) d\tau \right) \right| ds \\ &\leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(|u(s)|^m + \int_0^s |G(\tau, u(\tau))| d\tau \right)^p \right) ds \\ &\quad + \int_0^t d(s) K\left(s, \left(|u(s)|^l + \int_0^s |S(\tau, u(\tau))| d\tau \right)^q \right) ds \\ &\leq a(t) + \int_0^{\alpha(t)} b(s) L\left(s, \left(|u(s)|^m + \int_0^s c(\tau) |u(\tau)|^n d\tau \right)^p \right) ds \\ &\quad + \int_0^t d(s) K\left(s, \left(|u(s)|^l + \int_0^s e(\tau) |u(\tau)|^r d\tau \right)^q \right) ds. \end{aligned} \tag{3.84}$$

L'application du Théorème 3.14 à l'inégalité (3.84), par les conditions (3.82) pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \left[a(t) + A_5(t) \right. \\ &\quad + \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} pb(s) M\left(s, pf_2^p(s) A_5(s) + f_2^p(s)(1-p)\right) f_2^p(s)\, ds \right) \\ &\quad \left. \times \left(B_3^{1-q}(t) + \int_0^t C_3(s)\, ds \right)^{\frac{1}{1-q}} \right]^{\frac{1}{k}}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Chapitre 4

Stabilité de quelques systèmes perturbés aux échelles de temps et applications

En mathématiques, la stabilité est l'étude la plus généreuse pour concevoir le comportement des solutions d'équations différentielles et des trajectoires de systèmes dynamiques sous de petites perturbations des conditions initiales, et par rapport à leur domaine d'évolution.

Particulièrement, la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques non linéaires, a été largement étudiée au cours des dernières décennies, d'où une progression importante, en analyse ainsi qu'en théorie du contrôle et applications. Pour une excellente introduction à la stabilité des équations différentielles et des équations aux différences, nous renvoyons le lecteur aux monographies [40, 50] et [3], respectivement.

En 1990, et avec les travaux **d'Aulbach** et **Hilger** [5], l'analyse de la stabilité aux échelles de temps a été lancé avec un accent particulier sur les systèmes linéaires, qui a par la suite attiré l'attention de nombreux chercheurs, et dans ce contexte plusieurs auteurs comme **Dacunha** [28], **Bohner** et **Martynyuk** [18], **Peterson** et **Raffoul** [45] et d'autres [25, 30, 41] ont étudié les propriétés de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires aux échelles de temps.

Soit n un entier positif, on considère le système linéaire suivant :

$$x^{\Delta}(t) = A(t)\,x(t), \quad x(t_0) = x_0 \neq 0? \tag{4.1}$$

où $x,\ x_0 \in \mathbb{R}^n, t, t_0 \in \mathbb{T}, \sup \mathbb{T} = +\infty$ et $A : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ est une fonction régressives à valeurs matricielles, ce système a été traité depuis longtemps dans des cas aussi discrets que continus et sous diverses hypothèses pour étudier le comportement des solutions. Le système (4.1) admet l'unique solution donnée par :

$$x(t) = R_A(t, t_0)x_0.$$

Ainsi que, le système perturbé associé, sur des échelles de temps est donné par l'équation suivante :

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.2}$$

La solution du système perturbé (4.2) notée $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ vérifie l'équation intégrale

$$x(t) = R_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t, \sigma(s))\, F(s, x(s))\, \Delta s, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+},$$

où $F(t, 0) = 0$ et $F : \mathbb{T}_{t_0}^{+} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction rd–continue de $\mathbb{T}$. Rappelons que $R_A(t, t_0)$ est une fonction matricielle est appelée matrice de transition (voir Définition 1.32).

On considère le système dynamique défini sur une échelle de temps $\mathbb{T}$ comme ci-dessous :

$$x^{\Delta}(t) = f(t, x), \quad t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}, \ x(t_0, t_0, x_0) = x_0, \ t_0 \in \mathbb{T}, \ x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{4.3}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est rd-continue par rapport à la première variable avec $\|f(t, 0)\| \leq f_0$. On suppose aussi, que les conditions d'existence et d'unicité de la solution du système (4.3) sont satisfaites pour tout conditions initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. Notons cette solution par $x(t) = x(t, t_0, x_0)$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première section, nous énonçons quelques inégalités intégrales et quelques résultats récents de stabilité. Ensuite dans la seconde section nous avons énoncé des nouvelles généralisations de la stabilité exponentielle de certaines classes de systèmes perturbés par l'approche des inégalités intégrales, ainsi que la stabilité pratique pour les systèmes perturbés sur des échelles de temps arbitraires par l'approche de la fonction de Lyapunov. Et nous concluons ce chapitre par des exemples illustratifs.

Nous notons que certains nouveaux résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

K. Boukerrioua, D. Diabi, M. Meramria, M. A. Hammami, Sufficient conditions for uniform exponential stability of some classes of dynamic equations on time scales and applications, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 41(1), (2021), 60-70.

4.1 Sur quelques résultats récents autour de la stabilité exponentielle et pratique

Nous commençons cette section par énoncer des inégalités intégrales non linéaires de type Gronwall (Bellman, Bihari et Pachpatte) aux échelles de temps, qui sont nécessaires pour notre étude.

Lemme 4.1 ([12]) *Supposons que $y, f, g, h, m \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$. Si l'inégalité*

$$y(t) \leq f(t) + g(t) \int_{t_0}^{t} \{h(s)y(s) + m(s)\} \Delta s, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}$$

est vérifiée, alors

$$y(t) \leq f(t) + g(t) \int_{t_0}^{t} \{h(s)f(s) + m(s)\} \exp\left[\int_{\sigma(s)}^{t} h(\tau)g(\tau)\Delta\tau\right] \Delta s, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}.$$

Théorème 4.1 ([4]) *Soit g une fonction croissante et continue, $p \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, $y \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Soit w la solution de*

$$w^{\Delta} = p(t)g(w(t)), \; w(t_0) = \beta.$$

Supposons qu'il existe une fonction bijective G satisfaisant $(G \circ w)^{\Delta} = p$. Si l'inégalité

$$y(t) \leq \beta + \int_{t_0}^{t} p(\tau)g(y(\tau))\Delta\tau$$

est satisfaite pour tout $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}$, alors

$$y(t) \leq G^{-1}\left[G(\beta) + \int_{t_0}^{t} p(\tau)\,\Delta\tau\right].$$

Théorème 4.2 ([14]) *Soit $a \in \mathbb{T}$ et $t_0 \in \mathbb{T}_a^{k,+}$. Supposons que $u, f \in C_{rd}(\mathbb{T}_a^+, \mathbb{R}_+)$ et $S : \mathbb{T}_a^+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction rd-continue et Δ-différentiable par rapport à la première variable t, satisfaisant*

$$0 \leq S(t,x) - S(t,y) \leq R(t,y)(x-y), \tag{4.4}$$

pour $t \in \mathbb{T}_a^+, x \geq y \geq 0$ où $R : \mathbb{T}_a^+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction rd-continue et Δ-différentiable par rapport à la première variable t. Soient $\upsilon, \alpha, \varepsilon$ des fonctions non negatives rd-continues sur $\mathbb{T}_a^+$ telles que υ est non-croissante avec $\alpha(t) \leq 1$. Supposons aussi que

$$S^{\Delta_t}(t, \upsilon(t_0)) \geq 0, \quad R^{\Delta_t}(t, \upsilon(t_0)) \geq 0 \quad \text{pout tout } t \in \mathbb{T}_a^{k,+}.$$

Si $\zeta(t,s)$ est définie comme dans le Théorème 1.1, telle que $\zeta(t,s) \geq 0$ et $\zeta^{\Delta_t}(t,s) \geq 0$ pour $t, s \in \mathbb{T}_{t_0}^{k,+}$ avec $s \leq t$, alors

$$u(t) \leq \upsilon(t) + \alpha(t)\int_{t_0}^{t} \varepsilon(\eta)\left(S(\eta, u(\eta)) + \int_{t_0}^{\eta} \zeta(\eta,\tau)S(\tau, u(\tau))\Delta\tau\right)\Delta\eta,$$

pour tout $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{k,+}$, *implique*

$$u(t) \leq v(t) + \alpha(t) \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\eta) \left(S(t_0, v(t_0)) e_\phi(\eta, t_0) + \int_{t_0}^{\eta} e_\phi(\eta, \sigma(\tau)) \psi(\tau) \Delta\tau \right) \Delta\eta,$$

pour tout $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{k,+}$, *avec*

$$\phi(t) := R(\sigma(t), v(t_0))\varepsilon(t) + \tfrac{R^{\Delta_t}(t, v(t_0))}{R(t, v(t_0))} + \zeta(\sigma(t), t) + \int_{t_0}^{t} \zeta^{\Delta_t}(t, \tau)\Delta\tau$$

et

$$\psi(t) := S^{\Delta_t}(t, v(t_0)) + \zeta(\sigma(t), t) S(t, v(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \zeta^{\Delta_t}(t, \tau) S(\tau, v(t_0)) \Delta\tau.$$

Preuve. Définissons la fonction $w(t)$ par

$$w(t) := \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\eta) \left(S(\eta, u(\eta) + \int_{t_0}^{\eta} \zeta(\eta, \tau) S(\tau, u(\tau)) \Delta\tau \right) \Delta\eta.$$

Donc,

$$u(t) \leq v(t) + w(t). \tag{4.5}$$

Comme w est Δ-différentiable sur $\mathbb{T}_{t_0}^{k,+}$, il est facile de trouver l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) \quad &\leq \quad \varepsilon(t) \left(S(t, v(t_0)) + R(t, v(t_0)) w(t) \right. \\ &\quad + \left. \int_{t_0}^{t} \zeta(t, \tau) \left(S(\tau, v(t_0)) + R(\tau, v(t_0)) w(\tau) \right) \Delta\tau \right). \end{aligned}$$

Définissons la fonction auxiliaire z par

$$\begin{aligned} z(t) \quad &: \quad = S(t, v(t_0)) + R(t, v(t0)) w(t) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \zeta(t, \tau)(S(\tau, v(t_0)) + R(\tau, v(t_0)) w(\tau)) \Delta\tau. \end{aligned}$$

Il est clair que z est Δ-différentiable non-décroissante, et on a

$$w^{\Delta}(t) \leq \varepsilon(t) z(t),$$

$$z(t_0) = S(t_0, v(t_0))$$

et

$$R(t, v(t_0))w(t) \leq z(t). \tag{4.6}$$

Calculons la Δ-dérivée de z et utilisons les propriétés de S, on obtient

$$\begin{aligned}
z^{\Delta}(t) &= S^{\Delta_t}(t, v(t_0)) + R(\sigma(t), v(t_0))w^{\Delta}(t) + R^{\Delta_t}(t, (v(t_0))w(t) + \zeta(\sigma(t), t) \\
&\quad (S(t, v(t_0)) + R(t, v(t_0))w(t)) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \zeta^{\Delta_t}(t, \tau) \left(S(\tau, v(t_0)) + R(\tau, v(t_0))w(\tau)\right)\Delta\tau \\
&\leq \left(R\left(\sigma\left(t\right), v\left(t_0\right)\right) \varepsilon(t) + \tfrac{R^{\Delta_t}(t,(v(t_0))}{R(t,v(t_0))} + \zeta\left(\sigma\left(t\right), t\right) + \int_{t_0}^{t} \zeta^{\Delta_t}\left(t, \tau\right) \Delta\tau \right) z(t) \\
&\quad + S^{\Delta_t}(t, v(t_0)) + \zeta\left(\sigma\left(t\right), t\right) S(t, v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \zeta^{\Delta_t}\left(t, \tau\right) \left(S(\tau, v(t_0))\Delta\tau\right. \\
&= \phi(t)z(t) + \psi(t).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Appliquons le Lemme 1.2, à l'inégalité (4.7), on trouve

$$z(t) \leq \left(S(t_0, v(t_0)\right) e_{\phi}(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\phi}(t, \sigma(\tau))\psi(\tau)\Delta\tau.$$

Par une simple combinaison de l'inégalité précédente et l'inégalité (4.6), on obtient

$$w^{\Delta}(t) \leq \varepsilon(t) \left(S\left(t_0, v\left(t_0\right)\right) e_{\phi}\left(t, t_0\right) + \int_{t_0}^{t} e_{\phi}(t, \sigma(\tau))\psi(\tau)\Delta\tau \right).$$

La Δ-intégration de la dernière inégalité sur $[t_0, t] \cap \mathbb{T}_a^{k,+}$, donne l'estimation suivante :

$$w(t) \leq \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\eta) \left(S\left(t_0, v\left(t_0\right)\right) e_{\phi}\left(\eta, t_0\right) + \int_{t_0}^{\eta} e_{\phi}(\eta, \sigma(\tau))\psi\left(\tau\right) \Delta\tau \right) \Delta\eta.$$

Substituons l'inégalité précédente dans l'inégalité (4.5), on trouve l'inégalité souhaitée pour u. ■

Définition 4.1 ([29]) *Soit $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$. w est dite de* *classe $\widehat{\mathcal{H}}$, si elle vérifie les conditions suivantes*

- *$w(u)$ est une fonction croissante et continue pour $u \geq 0$ et positive pour $u > 0$.*
- *Il existe une fonction continue ϕ sur $\mathbb{R}^+$ avec $w(\alpha u) \leq \phi(\alpha)w(u)$ pour $\alpha > 0$, $u \geq 0$.*

Nous présentons maintenant deux résultats sur la stabilité du système (4.2) obtenue dans [12, 13] .

Théorème 4.3 ([12]) *Il existe une fonction continue ϕ sur $\mathbb{R}^+$ avec $w(\alpha u) \leq \phi(\alpha)w(u)$ pour $\alpha > 0, u \geq 0$. Si les conditions suivantes sont satisfaites*

- *le système linéaire (4.1) est uniformément exponentiellement stable.*
- *Le terme perturbé satisfait*

$$F(t,x) \leq \alpha(t)\|x\| + \chi(t).$$

- $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{\alpha(s)}{1-\lambda\mu(s)}\Delta s \leq \widetilde{d} < +\infty, \ \int_{t_0}^{+\infty} \chi(s)e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\,\Delta s \leq \overline{k} < +\infty.$

Alors le système perturbé (4.2) est uniformément exponentiellement stable.

Théorème 4.4 ([13]) *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

- *Le système linéaire (4.1) est uniformément exponentiellement stable.*
- *Le terme perturbé satisfait*

$$\|F(t,x)\| \leq m(t)\|x\|^p,$$

où $m \in C_{rd}(\mathbb{T}^+_{t_0}, \mathbb{R}_+)$ et $p \in \,]0,1[$.

- $\int_{t_0}^{\infty} e_{-\lambda}(a,\sigma(s))m(s))^{\frac{1}{q}}\Delta s \leq \widetilde{m}$ *avec* $q = 1-p$.

Alors le système perturbé (4.2) est uniformément exponentiellement stable.

En 2005 **Peterson** et **Raffoul** [45], ont étudié la stabilité exponentielle de la solution zéro pour les systèmes d'équations dynamiques sur des échelles de temps. Ils ont définis une fonction de Lyapunov de type I , puis formulés les inégalités appropriées sur ces fonctions qui garantissent que la solution zéro décroît de manière exponentielle vers le zéro.

Théorème 4.5 ([45]) *Supposons que $D \subset \mathbb{R}^n$ et qu'il existe une fonction de Lyapunov $V : D \longrightarrow [0, \infty)$ de type I (voir Définition 1.29) telle que pour tout $(t, x) \in [0, \infty) \times D$, on a :*

$$\begin{aligned} \lambda_1(t)\|x\|^p &\leq V(x) \leq \lambda_2(t)\|x\|^q, \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \tfrac{-\lambda_3(t)\|x\|^r + Le_{\ominus\delta}(t,0)}{1+M\mu(t)}, \\ V(x) - V^{\frac{r}{q}}(x) &\leq \gamma e_{\ominus\delta}(t,0), \end{aligned}$$

où $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ sont des fonctions positives avec $\lambda_1(t)$ non décroissante, p, q, r sont des constantes positives, $L, \gamma \geq 0$ et $\delta > \inf\limits_{t \geq t_0 \geq 0} \frac{\lambda_3(t)}{(\lambda_2)^{\frac{r}{q}}}$. Alors la solution zéro du système (4.3) est exponentiellement stable.

Remarque 4.1 *Dans le Théorème 4.5, si $\lambda_i, (i = 1, 2, 3)$ sont des constantes positives, alors la solution zéro du système (4.3) est uniformément exponentiellement stable. La preuve de la remarque découle du Théorème 4.5 en prenant $\delta > \inf\limits_{t \geq t_0 \geq 0} \frac{\lambda_3(t)}{(\lambda_2)^{\frac{r}{q}}}$ et $M = \frac{\lambda_3(t)}{(\lambda_2)^{\frac{r}{q}}}$.*

Dans [11], **Ben Nasser** et **Hammami** ont étudié le stabilité pratique pour les systèmes perturbés non linéaires aux échelles de temps. Basé sur la technique de Lyapunov.

Théorème 4.6 ([11]) *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov $V : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continûment différentiable, qui satisfait les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} \alpha_1\|x\|^2 &\leq V(t,x) \leq \alpha_2\|x\|^2 + A(1+\mu(t)\delta)e_{\ominus\varphi}(t,t_0), \\ V^{\Delta}(t,x) &\leq \tfrac{-\alpha_3}{1+\mu(t)\delta}\|x\|^2, \end{aligned}$$

où $A, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta, \varphi$ sont des constantes positives avec $\varphi + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} < \delta$. Alors le système (4.3) est globalement uniformément pratiquement asymptotiquement stable.

4.2 Nouveaux résultats sur l'étude de la stabilité exponentielle et pratique

Nous énonçons maintenant avec preuve quelques nouveaux résultats concernant l'étude de la stabilité exponentielle du système perturbé (4.2) en jouant sur le terme perturbé F.

Théorème 4.7 *Supposons que le système linéaire (4.1) est uniformément exponentiellement stable avec des constantes positives λ, γ ainsi que le terme perturbé satisfaisant*

$$F(t,x) \leq g(t)w(\|x\|), \; t \in \mathbb{T}_{t_0}^+, \tag{4.8}$$

où $g(t)$ une fonction positive et rd-continue et $w \in \widehat{H}$. Soit r la solution du système suivant :

$$r^{\Delta}(t) = p(t)w(r(t)), \; r(t_0) = \gamma \tag{4.9}$$

et il existe une fonction bijective W satisfaisant

$$(W \circ r)^{\Delta} = \gamma p \quad \text{sachant que} \int_{t_0}^{\infty} p(s)\Delta s < \infty, \tag{4.10}$$

pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$, $p(t) = \frac{\gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(t))}{\|x_0\|} g(t) w\left(\frac{\|x_0\|}{\gamma e_{-\lambda}(t_0,t)}\right)$. Alors le système perturbé (4.2) est uniformément exponentiellement stable.

Preuve. Soit le système linéaire (4.1) uniformément exponentiellement stable, la fonction correspondante de la matrice de transition satisfait la condition

$$\|R_A(t,t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0). \tag{4.11}$$

La solution du système perturbé (4.1) vérifie l'équation intégrale

$$x(t) = R_A(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R_A(t,\sigma(s))F(s,x(s))\Delta s, \tag{4.12}$$

En prenant les deux parties de l'équation (4.12) en norme avec l'utilisation de (4.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|R_A(t,t_0)\|\,\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|R_A(t,\sigma(s))\|\,\|F(s,(x(s))\|\,\Delta s, \\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\,\|x_0\| + e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))g(s)w(\|x(s)\|)\Delta s, \\
&\leq e_{-\lambda}(t,t_0)\left[\gamma\,\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))g(s)w(\|x(s\|)\Delta s\right]. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

D'où

$$\tfrac{e_{-\lambda}(t_0,t)\|x(t)\|}{\|x_0\|} \leq \gamma + \gamma \int_{t_0}^{t} \tfrac{e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))}{\|x_0\|} g(s) w\left(\tfrac{\|x_0\|}{e_{-\lambda}(t_0,s)}\tfrac{e_{-\lambda}(t_0,s)\|x(s\|}{\|x_0\|}\right)\Delta s.$$

Posons maintenant $u(t) = \frac{e_{-\lambda}(t_0,t)\|x(t)\|}{\|x_0\|}$, nous obtenons

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^{t} \tfrac{\gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))}{\|x_0\|} g(s) w\left(\tfrac{\|x_0\|}{e_{-\lambda}(t_0,s)} u(s)\right)\Delta s. \qquad (4.14)$$

Puisque la fonction w est de classe $\widehat{H}$, nous aurons

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^{t} \tfrac{\gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))}{\|x_0\|} g(s)\phi\left(\tfrac{\|x_0\|}{e_{-\lambda}(t_0,s)}\right) w(u(s))\Delta s,$$

Prenons

$$p(t) = \frac{\gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(t))}{\|x_0\|} g(t)\phi\left(\frac{\|x_0\|}{e_{-\lambda}(t_0,t)}\right).$$

Alors, nous obtenons :

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^{t} p(s)w(u(s))\Delta s.$$

Appliquons le Théorème 4.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq W^{-1}\left[W(\gamma) + \int_{t_0}^{t} p(s)\Delta s\right], \qquad (4.15) \\
&\leq W^{-1}\left[W(\gamma) + \int_{t_0}^{\infty} p(s)\Delta s\right].
\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{T}_{t_0}^+$, alors

$$\|x(t)\| \leq de_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\|, d \geq 1,$$

où

$$d = W^{-1}\left[W(\gamma) + \gamma \int_{t_0}^{\infty} p(s)\Delta s\right].$$

Alors le système perturbé (4.2) est uniformément exponentiellement stable. ■

Théorème 4.8 *Supposons qu'ils existent des fonctions $d, k \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, qui vérifient les conditions suivantes :*

- *i) Le système linéaire (4.1) est uniformément exponentiellement stable, avec λ, γ des constantes positives.*
- *ii) Le terme perturbé satisfait la condition :*

$$\|F(t,x)\| \leq \eta\left(d(t)\|x\| + k(t)\right), \tag{4.16}$$

où $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante différentiable sur $]0,\infty[$ telle que sa dérivée première η' est continue et décroissante sur $]0,\infty[$.

- *iii) Il existe deux constantes $\widetilde{d}$, $\widetilde{k} \geq 0$ telles que*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \tfrac{\eta'(k(s))d(s)}{1-\lambda\mu(s)}\Delta s \leq \widetilde{d} < +\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \eta(k(s))e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\Delta s \leq \widetilde{k} < +\infty.$$

Alors, le système perturbé (4.2) est uniformément exponentiellement stable.

Preuve. Soit $t_0 \in \mathbb{T}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour tout t_0 et $x_0 = x(t_0)$. La solution du système perturbé (4.2) vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\|x(t)\| \leq \|R_A(t,t_0)\|\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|R_A(t,\sigma(s))\|\|F(s,(x(s))\|\Delta s.$$

Comme le système linéaire (4.1) est uniformément exponentiellement stable, d'après les conditions i) et ii), nous obtenons facilement

$$\|x(t)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\| + \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\eta\left(d(s)\|x\| + k(s)\right)\Delta s. \tag{4.17}$$

Par une simple application du Théorème de la valeur moyenne à la fonction η, nous aurons, pour tout $x_1 > y_1 > 0$, il existe $c \in]y_1, x_1[$ tel que $\eta(x_1) - \eta(y_1) = \eta'(c)(x_1 - y_1) \leq \eta'(y_1)(x_1 - y_1)$. Ainsi, nous avons :

$$\eta\left(d(s)\|x\| + k(s)\right) \leq \eta'(k(s)) \times d(s)\|x\| + \eta(k(s)). \tag{4.18}$$

Et en utilisant les deux inégalités (4.17) et (4.18) précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq\ & \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\| \\ & + \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\left[\eta'(k(s)) \times d(s)\|x\| + \eta(k(s)\right]\Delta s.\end{aligned}$$

Appliquons le Lemme 4.1 à cette dernière inégalité, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \leq\ & \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\left(\|x_0\| + (\int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\eta'(k(s))d(s)\gamma e_{-\lambda}(s,t_0)\|x_0\|\right. \\ & + e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\eta(k(s)) \\ & \left. \times \exp\left(\int_{\sigma(s)}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(\tau))\eta'(k(\tau)) \times d(\tau)\gamma e_{-\lambda}(\tau,t_0)\Delta\tau\right)\Delta s\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

D'après la condition iii), l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \gamma\left(1 + \gamma\widetilde{d}\exp\left(\gamma\widetilde{d}\right)\right)e_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\| + \gamma\widetilde{k}\exp\left(\gamma\widetilde{d}\right)e_{-\lambda}(t,t_0) \\ &= \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\|\left[1 + \gamma\widetilde{d}\exp\left(\gamma\widetilde{d}\right) + \frac{\widetilde{k}\exp\left(\gamma\widetilde{d}\right)}{\|x_0\|}\right].\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ainsi le système perturbé (4.2) est uniformément exponentiellement stable. ■

Théorème 4.9 *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (H_1) *Le système nominal (4.1) est globalement uniformément exponentiellement stable.*
- (H_2) *Le terme perturbé vérifie*

$$\|F(t,x(t))\| \leq \epsilon(t)(S(t,\|x(t)\|)+y(t)),$$

$$y^{\Delta}(t) \leq \xi(t)S(t,\|x(t)\|),\ y(a)=0. \tag{4.21}$$

- (H_3) *Il existe une constante positive m telle que :*

$$\begin{aligned} &\int_a^{+\infty} \varepsilon_1(\eta)\left(S(t_0,\delta)e_{\phi_\delta}(\eta,a)+\int_a^{\eta} e_{\phi_\delta}(\eta,\sigma(\tau))\psi_\delta(\tau)\,\Delta\tau\right)\Delta\eta \\ \leq\ & m\delta,\ \forall\delta\in\mathbb{R}_+,\forall t_0\in\mathbb{T}_a^+, \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(t) := \gamma e_{-\lambda}(a,\sigma(t))\epsilon(t)$, $\phi_\delta(t) := R(\sigma(t),\delta)\varepsilon_1(t)+\frac{R^{\Delta_t}(t,\delta)}{R(t,\delta)}+\xi(t)$ *et* $\psi_\delta(t) := S^{\Delta_t}(t,\delta)+\xi(t)S(t,\delta)$ *pour* $t\in\mathbb{T}_a^+$ *et* $\delta\in\mathbb{R}_+$. *Alors, le système perturbé (4.2) est globalement uniformément exponentiellement stable.*

Preuve. Soit $\delta\in\mathbb{R}_+$ tel que $\gamma\|x_0\|=\delta$. Utilisons la solution $x(t)$ de (4.2) qui vérifie

$$\|x(t)\| \leq \|R_A(t,t_0)\|\,\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|R_A(t,\sigma(s))\|\,\|F(s,x(s))\|\,\Delta s.$$

Prenant compte de l'hypothèse (H_1) et le terme de perturbation (4.21), on peut trouver une estimation de la solution $x(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \ \leq\ & \gamma\|x_0\|e_{-\lambda}(t,t_0)+e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(\eta))\epsilon(\eta) \\ & \times\left(S(\eta,\|x(\eta)\|)+\int_{t_0}^{\eta}\xi(\tau)S(\tau,\|x(\tau)\|)\,\Delta\tau\right)\Delta\eta. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Appliquons le Théorème 4.4 à l'inégalité (4.22), avec les fonctions $v(t) := \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\|$, $\alpha(t) := e_{-\lambda}(t,t_0)$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\zeta(t,s) := \xi(s)$, $\phi = \phi_\delta$ et $\psi = \psi_\delta$ on obtient

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \gamma \|x_0\| e_{-\lambda}(t,t_0) + e_{-\lambda}(t,t_0)\int_a^t \varepsilon_1(\eta) \\ &\times \left(S(t_0,\delta)\, e_{\phi_\delta}(\eta,a) + \int_a^\eta e_{\phi_\delta}(\eta,\sigma(\tau))\psi_\delta(\tau)\Delta\tau\right)\Delta\eta. \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Utilisons l'hypothèse (H_3) et (4.23), on obtient l'estimation suivante :

$$\|x(t)\| \leq \gamma(1+m)\|x_0\| e_{-\lambda}(t,t_0).$$

Ce qui montre que le système perturbé (4.2) est globalement uniformément exponentiellement stable. ∎

Dans ce qui suit, nous énonçons avec preuve un nouveau résultat sur l'étude de la stabilité pratique pour des systèmes perturbés non linéaire aux échelles de temps, basé sur la technique de Lyapunov. Ce résultat est une généralisation du Théorème 4.6 obtenu par **B. Ben Nasser** et **M. A. Hammami** [11].

Dans le théorème suivant, nous supposons que $\mathbb{T}$ est une échelle de temps dont la fonction de granulation est bornée, c'est-à-dire $\mu(t) \leq \widehat{\mu} < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Théorème 4.10 *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov* $V : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continûment différentiable, qui satisfait les conditions suivantes :*

$$\alpha_1\|x\|^p \leq V(t,x) \leq \alpha_2\|x\|^q + A(1+\mu(t)\delta)\, e_{\ominus\varphi}(t,t_0) \qquad (4.24)$$

et

$$V^\Delta(t,x) \leq \tfrac{-\alpha_3}{1+\mu(t)\delta}\|x\|^r, \qquad (4.25)$$

où $A, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \delta$ *et* φ *sont des constantes positives.* $q \geq r \geq 0, q \neq 0, p \geq 1$ *avec* $\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}} \geq \delta$. *Alors le système (4.3) est globalement uniformément pratiquement exponentiellement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ une solution du système (4.3), pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$, $t \in \mathbb{T}_{t_0}^+$ et pour $0 < \delta < \varphi$, $K > 0$, nous commençons par la dérivation de $V(x(t))\, e_\delta(t, t_0)$ par rapport à t au sens des échelles de temps, nous donnons

$$[V(x(t))\, e_\delta(t, t_0)]^\Delta = V^\Delta(t, x(t)) e_\delta^\sigma(t, t_0) + V(x(t)) e_\delta^\Delta(t, t_0). \tag{4.26}$$

Utilisons l'inégalité (4.25), nous trouvons

$$\begin{aligned}
[V(x(t))\, e_\delta(t, t_0)]^\Delta &\leq \tfrac{-\alpha_3}{1+\mu(t)\delta} \|x\|^r (1 + \mu(t)\delta)\, e_\delta(t, t_0) + \delta V(x(t)) e_\delta(t, t_0) \\
&\leq -\alpha_3 \|x\|^r e_\delta(t, t_0) + \delta V(x) e_\delta(t, t_0). \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (4.24), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&[V(x(t))\, e_\delta(t, t_0)]^\Delta \\
&\leq \left(-\tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}} [V(x) - A(1 + \mu(t)\delta)\, e_{\ominus\varphi}(t, t_0)]^{r/q} + \delta V(x(t))\right) e_\delta(t, t_0). \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Appliquons le Lemme 1.3 à l'expression $[V(x) - A(1 + \mu(t)\delta)\, e_{\ominus\varphi}(t, t_0)]^{r/q}$ et substituons le résultat dans (4.28), on obtient

$$\begin{aligned}
&[V(x(t))\, e_\delta(t, t_0)]^\Delta \\
&\leq \left(\delta V(x(t)) - \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}} \left[\tfrac{r}{q} K^{\frac{r-q}{q}} [V(x) - A(1 + \mu(t)\delta)\, e_{\ominus\varphi}(t, t_0)] + \tfrac{q-r}{q} K^{\frac{r}{q}}\right]\right) e_\delta(t, t_0) \\
&\leq \Big(\delta V(x(t)) - \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}} \tfrac{r}{q} K^{\frac{r-q}{q}} V(x) + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}} \tfrac{r}{q} K^{\frac{r-q}{q}} A(1 + \mu(t)\delta)\, e_{\ominus\varphi}(t, t_0) \\
&\quad - \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}} \tfrac{q-r}{q} K^{\frac{r}{q}}\Big) e_\delta(t, t_0). \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Il est facile de constater que

$$-\tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}} \tfrac{q-r}{q} K^{\frac{r}{q}} \leq \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}} \tfrac{r}{q} K^{\frac{r}{q}}. \tag{4.30}$$

Utilisons l'inégalité (4.30), et la condition $\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}} \geq \delta$. Ainsi l'inégalité (4.29) implique l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \left[V\left(x\left(t\right)\right)e_{\delta}\left(t,t_0\right)\right]^{\Delta} \\
\leq\ & \Big(\delta V(x\left(t\right)) - \delta V\left(x\right) + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A\left(1+\mu\left(t\right)\delta\right) \\
& \times e_{\ominus\varphi}\left(t,t_0\right) + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\Big)\, e_{\delta}\left(t,t_0\right) \\
\leq\ & \left(\tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A\left(1+\mu\left(t\right)\delta\right)e_{\ominus\varphi}\left(t,t_0\right) + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\right) e_{\delta}\left(t,t_0\right)
\end{aligned}$$

Utilisons les propriétés de la fonction exponentielle aux échelles de temps, nous donnons

$$\begin{aligned}
& \left[V\left(x\left(t\right)\right)e_{\delta}\left(t,t_0\right)\right]^{\Delta} \\
\leq\ & \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A\left(1+\mu\left(t\right)\delta\right)e_{\delta\ominus\varphi}\left(t,t_0\right) + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}e_{\delta}\left(t,t_0\right). \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Intégrons les deux côtés de l'inégalité (4.31) de t_0 à t avec $x_0 = x\left(t_0\right)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\left[V\left(x\left(t\right)\right)e_{\delta}\left(t,t_0\right)\right]^{\Delta} \leq\ & \int_{t_0}^{t}\tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A\left(1+\mu\left(t\right)\delta\right)e_{\delta\ominus\varphi}\left(t,t_0\right) \\
& + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}e_{\delta}\left(t,t_0\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
V\left(x\left(t\right)\right)e_{\delta}\left(t,t_0\right) - V(x_0) \leq\ & \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi}e_{\delta\ominus\varphi}(t,t_0) - \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi} \\
& + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\tfrac{1}{\delta}e_{\delta}\left(t,t_0\right) - \tfrac{1}{\delta}\tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}.
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} e_{\delta\ominus\varphi}(t,t_0) = 0$ pour $(\delta < \varphi)$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
V\left(x\left(t\right)\right)e_{\delta}\left(t,t_0\right) \leq\ & V(x_0) - \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi} \\
& + \tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\tfrac{1}{\delta}e_{\delta}\left(t,t_0\right) - \tfrac{1}{\delta}\tfrac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\tfrac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}.
\end{aligned}$$

Utilisons les propriétés de la fonction exponentielle aux échelles de temps, peut être reformulée l'inégalité ci-dessus comme suit :

$$\begin{aligned} V\left(x\left(t\right)\right) &\leq \left(V(x_0) - \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi}\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}} + \frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\frac{1}{\delta}e_\delta\left(t,t_0\right)\right) e_{\ominus\delta}(t,t_0) \\ &\leq \left(V(x_0) - \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi} - \frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\right) \\ &\quad \times e_{\ominus\delta}(t,t_0) + \frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}. \end{aligned}$$

En combinant (4.17) avec l'inégalité ci-dessus, ensuite appliquons la puissance $\frac{1}{p}$ sur les deux cotés, nous aboutirons

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1/p}\left(\left(V(x_0) - \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi} - \frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\right)\right. \\ &\quad \left.\times\, e_{\ominus\delta}(t,t_0) + \frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Appliquons une autre fois, le Lemme 1.2, sur cette dernière, nous pouvons donner une estimation de $\|x\left(t\right)\|$ comme suit :

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1/p}\left(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\left(\left(V(x_0) - \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi} - \frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\times\, e_{\ominus\delta}(t,t_0) + \frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{[\alpha_2]^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\right) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right) \\ &\leq \alpha_1^{-1/p}\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\left(V(x_0) - \frac{\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{q}}A(1+\mu(t)\delta)}{\delta\ominus\varphi} - \frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}}\right) e_{\ominus\delta}(t,t_0) \\ &\quad +\alpha_1^{-1/p}\left(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}} + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent $R = \alpha_1^{-1/p}\left(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\frac{1}{\delta}\frac{\alpha_3}{(\alpha_2)^{r/q}}\frac{r}{q}K^{\frac{r}{q}} + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)$. La preuve est ainsi achevée. ■

Remarque 4.2 *Cet aspect de stabilité concerne le cas où la taille des conditions initiales* *peut être aléatoirement croissante et les trajectoires correspondantes convergent de manière stable par une fonction exponentielle d'échelle de temps décroissante, vers un petit voisinage de l'origine.*

4.3 Applications

Exemple 4.1 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $t_0 = 0$. La fonction de granulation est supposée bornée*

$$0 \leq \mu(t) < \mu_{\max} = \frac{1}{2}, \ \forall t \in \mathbb{T}_0^+.$$

On considère le système dynamique suivant

$$\begin{cases} x_1^\Delta = x_1(t) + \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{(t+1)(\sigma(t)+1)}|x_1(t)| + \frac{k(t)|x_2(t)|}{\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+1}} + 1), \\ x_2^\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{1}{(t+1)(\sigma(t)+1)}|x_2(t)| + \frac{k(t)|x_1(t)|}{\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+1}} + 1), \\ x(0) = (x_{1,0}, x_{2,0}), \end{cases} \tag{4.32}$$

où $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$, $k \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ et

$$k(t) = \frac{t+\sigma(t)+2}{(t+1)^2(\sigma(t)+1)^2} e_{-\lambda}(\sigma(t), 0).$$

On remarque que le système précédent se transforme sous la forme matricielle suivante :

$$x^\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{(t+1)(\sigma(t)+1)}|x_1(t)| + \frac{k(t)|x_2(t)|}{\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+1}} + 1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{1}{(t+1)(\sigma(t)+1)}|x_2(t)| + \frac{k(t)|x_1(t)|}{\sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)+1}} + 1) \end{pmatrix}, \tag{4.33}$$

où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$, $\mu \neq 1$, $F(t,0) = 0$ et le système linéaire admet l'unique solution $x(t) = R_A(t,0)x(t_0)$, où $R_A(t,0)$ est la matrice exponentielle *donnée par :*

$$R_A(t,t_0) = \begin{pmatrix} e_{-1}(t,0) & 0 \\ 0 & e_{-1}(t,0) \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{T}_0^+ \tag{4.34}$$

et

$$\|R_A(t,t_0)\| = \sqrt{2}e_{-1}(t,0). \tag{4.35}$$

Il est clair que la condition (i) du Théorème 4.8 est vérifié, comme on a trouvé deux constantes positives $(\lambda,\gamma) = \left(1,\sqrt{2}\right)$*, ce qui confirme que le système linéaire est uniformément exponentiellement stable. Aussi le terme perturbé satisfait la condition (ii), avec une fonction* $n(x) = \ln(x+1)$ *croissante et différentiable sur* $\mathbb{R}_+$ *et sa dérivée première continue et décroissante sur* $\mathbb{R}_+$*.*

$$\|f(t,x)\| \leq \ln\left(\tfrac{1}{(t+1)(\sigma(t)+1)}\|x\| + k(t) + 1\right) = n\left(d(t)\|x\| + k(t)\right). \tag{4.36}$$

Maintenant, nous vérifions la dernière condition du Théorème 4.8 . On a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \tfrac{\eta'(k(s))d(s)}{1-\lambda\mu(s)}\Delta s &= \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{(1-\mu(s))(1+k(s))}\tfrac{1}{(s+1)(1+\sigma(s))}\Delta s, \\ &\leq \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{(1-\mu(s))}\tfrac{1}{(s+1)(1+\sigma(s))}\Delta s, \end{aligned}$$

$$\leq 2\int_0^{+\infty} \tfrac{1}{(s+1)(1+\sigma(s))}\Delta s = 2 = \widetilde{d} < +\infty. \tag{4.37}$$

Comme

$$\int_0^{+\infty} k(s)e_{-\lambda}(0,\sigma(s))\Delta s < +\infty,$$

donc, il existe $\widetilde{k}$ *telle que*

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \eta(k(s))e_{-\lambda}(0,\sigma(s))\Delta s \\ = &\int_0^{+\infty} \ln(k(s)+1)e_{-\lambda}(0,\sigma(s))\Delta s, \\ \leq &\int_0^{+\infty} k(s)e_{-\lambda}(0,\sigma(s))\Delta s = \int_0^{+\infty} \tfrac{s+\sigma(s)+2}{(s+1)^2(\sigma(s)+1)^2}\Delta s, \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\tfrac{-1}{s+1}\right)^{\Delta} \Delta s = 1 = \widetilde{k} < +\infty. \tag{4.38}$$

Toutes les hypothèses du Théorème 4.8 sont vérifiées. Donc le système perturbé (4.32) est uniformément exponentiellement stable.

Exemple 4.2 *Soit $a \geq 1$, $\mathbb{T}$ une échelle de temps discrète avec une taille de pas non uniforme. La fonction de granulation est supposée bornée, i.e. $0 < \mu(t) < 2$ pour tout $t \in \mathbb{T}_a^+$. Considérons le système perturbé suivant :*

$$\begin{cases} x_1^{\Delta}(t) = \left(\epsilon(t) - \frac{1}{2}\right) x_1(t) + \epsilon(t) z_1(t), \\ x_2^{\Delta}(t) = \left(\epsilon(t) - \frac{1}{2}\right) x_2(t) + \epsilon(t) z_2(t), \end{cases} \tag{4.39}$$

avec

$$\begin{cases} z_1^{\Delta}(t) = \frac{1}{t\ \sigma(t)} |x_2(t)| \quad si\ t > a, \\ z_2^{\Delta}(t) = \frac{1}{t\ \sigma(t)} |x_1(t)| \quad si\ t > a, \\ z_1(a) = z_2(a) = 0, \end{cases}$$

où $x = (x_1, x_2)^{\top} \in \mathbb{R}^2$ et $\epsilon(t) = \frac{1}{t\sigma(t) e_{-\frac{1}{2}}(a, \sigma(t))}$. Le système (4.39) peut s'écrire sous la forme du système (4.2) et le terme perturbé satisfaisant la condition (H_2) avec $\xi(t) = \frac{1}{t\sigma(t)}$, $S(t,x) = x$. Comme l'hypothèse (H_1) est vérifiée avec $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$. Dans ce cas, $\phi_\delta(t) = \varepsilon_1(t) + \xi(t) = \gamma e_{-\frac{1}{2}}(a, \sigma(t)) \epsilon(t) + \xi(t)$ et $\psi_\delta(t) = \xi(t)\delta$. Utilisons le fait que $\varepsilon_1(t) \leq \phi_\delta(t)$ et $\xi(t) \leq \phi_\delta(t)$, on peut vérifier que

$$\int_a^t \varepsilon_1(\eta) \left(e_{\phi_\delta}(\eta, a) + \underbrace{\int_a^{\eta} e_{\phi_\delta}(\eta, \sigma(\tau)) \Delta\tau}_{\leq e_{\phi_\delta}(\eta, a) - 1} \right) \Delta\eta \leq 2 e_{\phi_\delta}(t, a).$$

L'hypothèse (H_3) impose la convergence de

$$\int_a^{+\infty} \phi_\delta(\eta) \Delta\eta = \int_a^{+\infty} (\varepsilon_1(\eta) + \xi(\eta)) \Delta\eta.$$

De plus on a

$$\int_a^t \varepsilon_1(\eta)\,\Delta\eta = \gamma \int_a^t \tfrac{1}{\eta\sigma(\eta)}\Delta\eta = \gamma\left(\tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{t}\right) \leq \tfrac{1}{a}$$

et

$$\int_a^t \xi(\eta)\,\Delta\eta = \int_a^t \tfrac{1}{\eta\sigma(\eta)}\Delta\eta \leq \tfrac{1}{a}.$$

D'où

$$e_{\phi_\delta}(t,a) \leq \exp\left(\int_a^t \phi_\delta(\eta)\,\Delta\eta\right) \leq \exp\left(\tfrac{2}{a}\right).$$

Finalement, toutes les hypothèses du Théorème 4.9 sont vérifiées et donc le système (4.39) est globalement uniformément exponentiellement stable.

Conclusion

Dans cette thèse, notre étude a porté sur de nouvelles inégalités intégrales de type Bihari-Gamidov, pour des fonctions à deux variables aux échelles de temps, ainsi que quelques inégalités intégro-différentielles à retard ont été développé.

Ces inégalités intégrales jouent un rôle important dans l'étude de différents types d'équations différentielles et intégro-différentielles.

On a procédé à l'étude de la stabilité de certains systèmes perturbés aux échelles de temps par l'approche des inégalités intégrales. Nous nous sommes intéressés, plus particulièrement, à la stabilité pratique de ces systèmes. En généralisant quelques conditions, et en utilisant la fonction de Lyapunov.

Publications Internationales :

1- **M. Meramria, K. Boukerrioua and B. Kilani, Further Results of Certain Bihari-Gamidov Type Integral Inequalities in Two Independent Variables on Time Scales and Applications. Surveys in Mathematics and its Applications 16 (2021), $111-126$.**

2- **K. Boukerrioua, D. Diabi, M. Meramria, M. A. Hammami, Sufficient conditions for uniform exponential stability of some classes of dynamic equations on time scales and applications, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 41(1), (2021), 60-70.**

Bibliographie

[1] A. Abdeldaim, A. A. El-Deeb, *On generalized of certain retarded nonlinear integral inequalities and its applications in retarded integro-differential equations*, Appl. Math. Comput, Vol. 256, April (2015), pp. 375–380.

[2] A. Abdeldaim, *Nonlinear retarded integral inequalities of Gronwall-Bellman type and applications*, Journal of Mathematical Inequalities, Vol. 10, No. 1 (2016), 285–299.

[3] R. P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities*, 2nd ed., Marcel Dekker, New York, (2000).

[4] R. P. Agarwal, M. Bohner and A. Peterson, *Inequalities on Time Scales : A Survey*, Math. Inequal. Appl, Vol. 4, (2001), pp. 535–557.

[5] B. Aulbach and S. Hilger, *Linear Dynamic Processes with Inhomogeneous Time Scale*, In "Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems" (Gaussing, 1990), Mathematical. Research. Vol. 59, Akademie Verlag, Berlin, (1990), pp. 9-20.

[6] D. Bainov and P. Simeonov, *Integral Inequalities and Applications*, Mathematics and its Applications, Vol. 57, (East European Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1992).

[7] R. Bellman. *The stability of solutions of linear differential equations*, Duke. Math. J. 10, (1943), pp. 643–647.

[8] R. Bellman, *Asymptotic series for the solutions of linear differential-difference equations.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 7, (1958), pp. 261–269.

[9] A. Ben Abdallah, I. Ellouze, and M. A. Hammami, *Practical stability of nonlinear time-varying cascade systems*, Dynamical and Control Systems, Vol. 15, No. 1, (2009), pp. 45–62.

[10] A. Ben Makhlouf, M. Kharrat, M. A. Hammami, D. Baleanu, *Henry–Gronwall type q-fractional integral inequalities*, Math. Meth. Appl. Sci, 2020, 1–7.

[11] B. Ben Nasser, M. A. Hammami, *On Practical Stability of Time Scale Perturbed Systems*, Dynamical Systems and Geometric Theories, Vol. 12, No. 1, 2014, pp. 51–67.

[12] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. A. Hammami, *On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities*, Appl. Sci, Vol. 16, 2014, 56–71.

[13] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. A. Hammami, *On stability and stabilization of perturbed time scale systems with Gronwall inequalities*, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom, Vol. 11, 2015, 207–235.

[14] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. Defoort, M. Djemai, M. A. Hammami, T.-M. Laleg-Kirati, *Sufficient conditions for uniform exponential stability and h-stability of some classes of dynamic equations on arbitrary time scales*, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems 32 (2019), 54–64.

[15] I. Bihari, *A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations*, Acta Math Acad Sci Hunar.7 , (1956), pp. 71–94.

[16] M. Bohner and A. *Peterson, Dynamic Equations on Time Scales* : An Introduction with Applications, Birkhäuser Boston, (2001).

[17] M. Bohner and A. A. Martynyuk, *Elements of Stability Theory of A. M. Liapunov for Dynamic Equations on Time Scales*. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, Vol. 7, No. 3, (2007), pp. 225-251.

[18] M. Bohner and S. G. Georgiev, *Multivariable Dynamic Calculus on Time Scales,* Springer International Publishing Switzerland, December (2016).

[19] K. Boukerrioua, D. Diabi and B. Kilani, *On some new Generalizations of certain Gamidov Integral Inequalities in two Independent Variables and their Applications.* Facta Universitatis (Niš) Series : Mathematics and informatics. Vol. 33, No 3 (2018), pp. 467-479.

[20] K. Boukerrioua, I. Meziri and T. Chiheb, *Some Refinements of Certain Gamidov Integral Inequalities on time Scales and Applications.* Kragujevac Journal Of Mathematics. Vol. 42, No. 1, (2018), pp. 131–152.

[21] K. Boukerrioua, B. Kilani and I. Meziri, *Refinements of some retarded integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and their applications*, Surveys in Mathematics and its Applications, Vol. 15 (2020), 225–255.

[22] **K. Boukerrioua, D. Diabi, M. Meramria, M. A. Hammami, Sufficient conditions for uniform exponential stability of some classes of dynamic equations on time scales and applications, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 41(1), (2021), 60–70.**

[23] K. Cheng and C. Guo, *New Explicit Bounds on Gamidov Type Integral Inequalities for Functions in Two Variables and Their Applications*, Abstract and Applied Analysis, (2014), Article ID 539701.

[24] K. Cheng, C. Guo and M. Tang, *Some Nonlinear Gronwall-Bellman-Gamidov Integral Inequalities and Their Weakly Singular Analogues with Applications*, Abstract and Applied Analysis, (2014), Article ID 562691.

[25] S. K. Choi, D. M. Im and N. Koo, *Stability of Linear Dynamic Systems on Time Scales,* Adv. Differ. Equ., Art ID 670202, (2008), 12 pages.

[26] M. Corless, *Guaranteed rates of exponential convergence for uncertain systems*, Optimization Theory and Applications, Vol. 64, (1990), pp. 481–494.

[27] F. Crauste, *Equations à Retard et Modèles de Dynamiques de Populations Cellulaires*, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2014.

[28] J. J. DaCunha, *Stability for Time Varying Linear Dynamic Systems on Time Scales*, J. Comput. Appl. Math. 176 , No. 2, (2005), pp. 381-410.

[29] F. Dannan, *Integral inequalities of Gronwall–Bellman–Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 108, (1985) 151–164.

[30] T. S. Doan, A. Kalauch, and S. Siegmund, *Exponential Stability of Linear Time-Invariant Systems on Time Scales*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, Vol. 9, No. 1, (2009), pp. 37–50.

[31] Sh. G. Gamidov, *Certain Integral Inequalities for Boundary Value Problems of Differential Equations*, Differ. Uravn. 5 (1969), pp. 463-472.

[32] T. H. Gronwall, *Note on the Derivatives With Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations*. Ann. of Math.(2), Vol. 20, No. 4, Jul. (1919), pp. 292–296.

[33] A. E. Hamza and K. M. Oraby, *Stability of abstract dynamic equations on time scales*, Adv. Differnce. Equ, 143 :15, (2012).

[34] S. Hilger, *Ein Ma kettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten*, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[35] F. Jiang, F. Meng, *Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay*, J. Comput. Appl. Math, Vol. 205, (2007), pp. 479–486.

[36] S.D. Kendre and S.G. Latpate, *On Some Mixed Integral Inequalities and its Applications*, Theoretical Mathematics and Applications, Vol. 5, No. 1, (2015), 1–14.

[37] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, New York, 3e edition, (2002).

[38] V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk, *Stability Analysis of Nonlinear Systems*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 125. Marcel Dekker, Inc., New York, (1989).

[39] Z. Li and W. S. Wang, *Some Nonlinear Gronwall–Bellman type retarded integral inequalities with power and their applications*. Appl. Math. Comput, Vol. 347, pp. 839–852, April 2019.

[40] A. M. Lyapunov, *The general problem of the stability of motion*, International Journal of Control, Vol. 55, No. 3, (1992), pp. 521-790.

[41] A. A. Martynyuk, *On the exponential stability of a dynamical system on a time scale*, Doklady Mathematics, Vol. 78, No. 1, (2008), pp. 525–540.

[42] **M. Meramria, K. Boukerrioua and B. Kilani, Further Results of Certain Bihari-Gamidov Type Integral Inequalities in Two Independent Variables on Time Scales and Applications. Surveys in Mathematics and its Applications 16 (2021), 111–126.**

[43] B. G. Pachpatte, *Inequalities for Differential and Integral Equations*, Academic Press, London, (1998).

[44] B. G. Pachpatte, *Explicit Bounds on Gamidov Type Integral Inequalities*, Tamkang Journal of Mathematics, Vol. 37, No. 1, Spring (2006), pp. 1–9.

[45] A. C. Peterson and Y. N. Raffoul, *Exponential Stability of Dynamic Equations on Time Scales*, Advances in Difference Equations, 2 (2005), pp. 133–144.

[46] C. Pötzsche, *Chain rule and invariance principle on measure chains*, Comput. Appl. Math, (2001).

[47] H. Song and F. Meng, *Some Generalizations of Delay Integral Inequalities of Gronwell-Bellman type with Power and Their Applications*, Math. Found. Comput, October 2021.

[48] Y. Tian, Y. Cai, Y. Sun, *Asymptotic behavior of switched delay systems with nonlinear disturbances*, Appl. Math. Comput, Vol. 268, pp. 522–533, October 2015.

[49] Y. Tian and M. Fan, *Nonlinear integral inequality with power and its application in delay integro-differential equations,* Adv. Differ. Equ, 142 (2020).