الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research

Badji Mokhtar-Annaba University-
Faculty of Science
Department ofMathematics

جامعة باجي مختار-عنابة -
كلية العلوم–قسم الرياضيات

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités et Statistique

Contrôlabilité des systèmes stochastiques en dimension finie et infinie.

Par:

FERRAG AZOUZ

Sous la direction de

Directeur de thèse	BENCHAABANE Abbes	MCA.U.Guelma
Co-Directeur de thèse	Zeghdoudi Halim	Pr.U.B.M.Annaba

Devant le jury

PRESIDENT	Sahari Mohamed Lamine	MCA.U.B.M.Annaba
Examinateur	Sakrani Samia	Pr.U.Guelma
Examinateur	Ouaoua Amar	MCA.U.Skikda

2021

Table des matières

Remerciement

Cest un réel plaisir pour moi décrire ces lignes par lesquelles je tiens à remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, de diverses manières, à ce travail.
J'aimerais en premier lieu remercier mon Dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.
Je souhaite avant tout remercier mon directeur de mémoire, Dr Benchaabane Abbes, pour le temps quil a consacré à mapporter les outils méthodologiques indispensables à la conduite de cette recherche. Son exigence ma grandement stimulé.
J'adresse toute ma reconnaissance à mon co-encadreur, Professeur Zaghdoudi Halim, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils de rédaction, qui ont été très précieux.
Je tiens également à remercier Dr Sahari Mohamed Lamine pour lhonneur quil m'a fait en présidant le jury de cette thèse.
Mes remerciements vont aussi aux Pr Sakrani Samia et Dr Ouaoua Amar qui mont fait lhonneur de participer à mon jury.
Enfin j'adresse mes sincères remerciements à toute ma famille, mes amis et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

ملخص الاطروحة

تنقسم هذه الأطروحة إلى ثلاثة أجزاء رئيسية اهتماماتها محتلفة تماما ولكنها تدور جميعا حول نظرية إمكانية التحكم في الأنظمة العشوائية واللاعشوائية الخطية وغير الخطية. يدرس الجزء الأول إمكانية التحكم في الأنظمة التفاضلية بمشتق معمم قابل للتوافق، يتعلق الجزء الثاني بإمكانية التحكم التقريبية للأنظمة العشوائية غير الخطية المحايدة المتذبذبة التكاملية -التفاضلية في فضاء ذو بعد غير منته مع فرض إمكانية التحكم في الأنظمة الخطية المرافقة لهذه الأنظمة، بينما تهتم الدراسة الثالثة بفئة من المعادلات التفاضلية العشوائية المتذبذبة الممولة من منبعين عشوائيين في آن واحد روزنبلات ووينر.

Résumé

Cette thèse se divise en trois grandes parties dont les préoccupations sont assez distinctes mais qui gravitent toutes autour de la théorie de la contrôlabilité des systèmes stochastiques et déterministes linéaires et non-linéaires. La première partie étudie La contrôlabilité des systèmes différentiels avec une dérivée conformable généralisée. La seconde concerne la contrôlabilité approximative pour les systèmes non linéaire stochastiques intégro-différentiels impulsifs neutres dans un espace de dimension infinie, en supposant la contrôlabilité des systèmes linéaires associés. La troisième étude concerne une classe des équations différentielles impulsive stochastiques gouvernées simultanément par un processus de Rosenblatt et un processus de Wiener.

Abstract

This thesis is divided into three main parts whose concerns are quite distinct but which all revolve around the theory of the controllability of linear and non-linear stochastic and deterministic systems. The first part studies the controllability of differential systems with a generalized conformable derivative. The second concerns the approximate controllability for impulsive neutral integro-differential stochastic nonlinear systems in an infinite dimensional space, assuming the controllability of the associated linear systems. The third study concerns a class of stochastic impulse differential equations directed simultaneously by a Rosenblatt process and a Wiener process.

Certains notations seront utilisées tout au long de cette thèse que nous listons ci-dessous :

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}^n$: espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$.
- T : Un réel positif.
- Ω : Un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$.
- $\mathcal{L}(E,F)$: ensemble des applications linéaires continues définies sur un espace vectoriel E et à valeurs dans un autre espace vectoriel F.
- $\mathcal{L}(E)$ L'espace de tous les applications linéaires continues définies de E dans lui même.
- $\mathcal{E}'$ Espace dual de E.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées réelles de taille n.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices réelles à n lignes et m colonnes.
- A^* : L'adjoint d'un opérateur A.

— $L^p(\Omega, X)$: ensemble des applications mesurables de Ω dans X de puissance p intégrable.

- $L^\infty(\Omega, X)$: ensemble des applications mesurables bornées de Ω dans X.
- $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \mathbb{C})$.
- L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- $(\mathcal{F}_t / t \in [0,T])$ le filtration engendré par $(\omega(s), 0 \leq s \leq t)$.
- $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R}^n)$ l'espace de Hilbert de toutes les variables $\mathcal{F}_T$-mesurables carrée intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
- $L_p^{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hilbert de tous les processus carré intégrables et $\mathcal{F}_t$-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.
- $\mathbf{H}_2$ l'espace de Banach de tous les processus carré intégrables et $\mathcal{F}_t$ -adapté $\varphi(t)$, muni de la norme
$$\|\varphi\|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|\varphi(t)\|^2.$$
- $U_{ad} = L_2^{\mathcal{F}}([0,T], \mathbb{R}^m)$
- $S(t) = \exp(At)$.

1 Introduction

Introduction Un système dynamique est une structure mathématique utilisée pour modéliser l'évolution déterministe d'un système physique ou d'un phénomène dans le temps. Par exemple, les équations différentielles ordinaires sont normalement interprétées comme décrivant l'évolution dans le temps, et donc, déterminent les systèmes dynamiques. Le mot clé ici, cependant, est déterministe ; un système dynamique est déterministe car le futur est (en principe) totalement prévisible .
Et si ce n'était pas le cas, cependant ? Que se passe-t-il s'il y a un certain ń caractère aléatoire intrinsèque ż dans le système, ce qui rend prédiction parfaite de l'avenir impossible ? Peut-être des tendances très fortes ou des corrélations existent toujours, mais il y a toujours un élément d'incertitude. La structure mathématique utilisée pour modéliser ce genre de phénomène est un processus stochastique.
Un processus stochastique est une structure mathématique utilisée pour modéliser les différents phénomènes où la prédiction du futur est impossible pour des raisons différentes : soit le système est soumis à une ou plusieurs forces inconnues, ou bien tout simplement, les forces agissent d'une façon aléatoire. Citant à titre d'exemple, les systèmes suivants :
- Le mouvement d'une particule dans un fluide (mouvement Brownien).
- Le nombre de photons absorbés ou émis par un atome.
- La position d'un piston soumis au choc des molécules d'un gaz.
- Le mouvement des planètes lointaines.

La théorie du contrôle classique est basé sur des approches déterministes. Cependant, l'incertitude est la caractéristique fondamentale de plusieurs systèmes dynamiques réels. La théorie des systèmes dynamiques stochastiques est devenue maintenant un sujet de recherche bien établi, qui est encore en développement intensif et offre de nombreux problèmes ouverts dans plusieurs domaines d'application, problèmes de l'économie, problèmes de décision, la physique statistique, l'épidémiologie, la théorie de risque, les mathématique de l'assurance, la théorie de fiabilité et autres méthodes basées sur des équations stochastiques, et la modélisation stochastique a été largement utilisée pour modéliser les phénomènes apparaissant dans de nombreuses branches de la science comme la biologie, l'économie, la mécanique, l'électronique et la télécommunication.
La notion de contrôlabilité est d'une grande importance dans la théorie de contrôle ; c'est une propriété de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. De nombreux problèmes fondamentaux de la théorie de contrôle (stabilité et stabilisation, contrôle optimal) ne peuvent être résolus que sous l'hypothèse que le système soit contrôlable.

La contrôlabilité fait partie des propriétés dites structurales qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classifier, par leurs propriétés algébriques et géométrique. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé et permet de construire des lois de commande de façon effective.
L'étude de la contrôlabilité a commencé au début des années soixante, quand la théorie de contrôlabilité était basée sur la description sous forme d'espace d'état sous des systèmes de contrôle linéaires invariants dans le temps et variables dans le temps ont été mis au points. De plus, pour les systèmes dynamiques déterministes linéaires et non linéaires, il existe plusieurs différentes conditions de nécessité et de suffisance pour la contrôlabilité globale et locale.
Notre thèse comporte cinq chapitres et est organisée comme suit :
Le premier chapitre aborde la contrôlabilité, après de courtes définitions, nous étudions en détail les systèmes linéaires, autonomes et non autonomes. Leur contrôlabilité est caractérisée par le critère de Kalman.
Dans les années récentes, divers problèmes de contrôlabilité pour des types différents de systèmes dynamiques linéaires, semi linéaires et non linéaires ont été étudiés dans plusieurs publications et monographies.
Les concepts de contrôlabilité jouent un rôle essentiel dans la théorie du contrôle déterministe. Dans le cadre de systèmes déterministes : Kalman [36] a introduit le concept de contrôlabilité pour les systèmes de contrôle linéaires déterministes à dimensions finies.
Les concepts de base de la théorie du contrôle dans les espaces à dimensions finies ont été introduits dans [15].
Dans [63] Naito a établi suffisamment les conditions de contrôlabilité approximative dun système de contrôle déterministe semi-linéaire dominé par la partie linéaire en utilisant le théorème de points fixes de Schauder. Balachandran et al [12] ont obtenu des résultats de la contrôlabilité des systèmes non linéaires dans les espaces de Banach.
Dans [91, 90] Wang a étendu les résultats de [63] et établi des conditions suffisantes pour les systèmes semi-linéaires déterministes retardés en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et le concept de solution fondamentale.
Dans [84, 85] Sukavanam et al. ont obtenu les résultats pour la contrôlabilité approximative d'un système semi-linéaire retardé dans le contrôle avec terme non linéaire croissant, en utilisant le théorème à point fixe de Schauder.
Ces dernières années, dans [39], la dérivée fractionnaire conformable a été définie. Les chercheurs de [1] ont travaillé à l'amélioration de ces dérivés.
De nombreuses recherches et descriptions sont actuellement en cours sur celui-ci, nous donnons les ouvrages connexes suivants [35, 62]. En effet, les auteurs de [35] ont travaillé sur les solutions analytiques du système d'équations de Robertson fractionnaires en temps conformes.
De plus, les auteurs de [62] ont détaillé l'analyse de stabilité des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire conformes en fonction d'un paramètre. Après cela, une généralisation de la dérivée fractionnaire conforme classique est étudiée dans [49] et [97]. En fait, les auteurs de [97] ont introduit une nouvelle classe de dérivées fractionnaires appelées dérivées fractionnaires conformables généralisées.
De plus, dans [49], les auteurs ont prouvé quelques résultats d'unicité de la solution

de l'équation de diffusion.
Dans Le deuxième chapitre, on a étudié la contrôlabilité des systèmes différentiels à dérivée conformable généralisée . En élaborant le critère de rang et le critère de Gram conformable, les conditions suffisantes et nécessaires pour vérifier qu'un système conformable généralisé linéaire est complètement nul-contrôlable sont données. Et on a donné une généralisation complète au cas général des systèmes d'ordres fractionnaires conformables. De plus, par le théorème du point fixe de Krasnoselskii, on a obtenu un résultat de contrôlabilité complète pour un système semi-linéaire conformable généralisé.
C'est bien connu que la contrôlabilité de léquation déterministe est largement utilisée dans de plusieurs domaines scientifiques et technologique. Mais dans de nombreux problèmes pratiques tels que la fluctuation des cours des actions où le système soumis à des fluctuations thermiques, dynamique de population, etc.., un peu daléa apparaît. Le système devrait donc être une forme stochastique.
Le troisième chapitre introduit les notions principales de calcul stochastique qui sont utilisées dans le reste de cette thèse, en particulier, le mouvement Brownien, les martingales et le processus de Rosenblat. Notre principal intérêt dans ce chapitre consiste à l'étude, du processus de Rosenblatt. Bien qu'il ait reçu une attention moins importante que le mouvement Brownien fractionnaire, ce processus présente toujours un intérêt pour les applications pratiques en raison de son auto-similitude, de la stationnarité des incréments et de la dépendance à longue distance.
En fait, la très grande utilisation du mouvement Brownien fractionnaire dans la pratique (hydrologie, télécommunications) sont dus à ces propriétés ; on préfère en général le mouvement Brownien fractionnaire (MBF) avant les autres processus car il est gaussien et le calcul est plus facile ; mais dans des situations concrètes où la gaussianité n'est pas plausible.
Il existe une littérature cohérente qui se concentre sur différents aspects théoriques des processus de Rosenblatt. Rappelons certains de ces travaux. Par exemple, les propriétés extrêmes de la distribution de Rosenblatt ont été étudiées par J.M. Albin dans [4] et [3]. Le taux de la convergence vers le processus de Rosenblatt dans le théorème des limites non centrales a été donné par Leonenko et Ahn [47]. Pipiras [69] et Pipiras et Abry [2] ont étudié l'expansion de type ondelette du processus de Rosenblatt. Une loi du logarithme itéré a été donné dans [31].
Parmi les applications du processus de Rosenblatt en statistique ou en économétrie, nous mentionnons les suivantes :

1. Dans le problème de teste de racine unitaire avec des erreurs étant des transformations non linéaires de processus linéaires avec une dépendance à longue portée, les distributions asymptotiques dans le modèle sont montrées dans [94] comme étant fonctionnelles de Processus Hermite ;
2. les distributions limites des solutions paraboliquement rééchelonnées de l'équation de chaleur avec des données singulières non gaussiennes ont un comportement similaire à la distribution de Rosenblatt (voir [46]) ;
3. la distribution de Rosenblatt semble également être la distribution asymptotique dun estimateur liée à l'approche bootstrap semi-paramétrique pour les tests d'hypothèses (voir [33]) ou pour l'estimation de la longue portée paramètre de dépendance [38].

Dans le cadre de systèmes stochastiques, Bashirov et al.[14] ont fourni quelques concepts pour la contrôlabilité des systèmes stochastiques linéaires. En utilisant ces concepts, Mahmudov [54] a établi les conditions suffisantes pour la contrôlabilité des systèmes stochastiques linéaires dans les espaces de Hilbert. Dans [40, 43] Klamka a obtenu quelques conditions suffisantes pour la contrôlabilité des systèmes linéaires à retard en dimension finie en utilisant le théorème de Rank. Dans [55, 57], Mahmudov a obtenu des résultats pour la contrôlabilité des systèmes stochastiques semi-linéaires en utilisant le théorème à point fixe de Banach.
Shen et al. [79] ont étendu les résultats de [42] en dimension infinie en utilisant la technique de [55] et ont obtenu les conditions suffisantes pour la contrôlabilité relative des systèmes non linéaires stochastiques à retard en contrôle.
Dans [86] Sukavanam et al. ont obtenu des résultats pour la contrôlabilité stochastique d'un système de commande semi-linéaire de premier ordre abstrait utilisant le théorème à points fixes de Schauder.
Récemment Shukla et al. [80] ont obtenu des conditions suffisantes pour une contrôlabilité approximative de système stochastique semi-linéaire retardé avec des conditions non locales utilisant théorème de point fixe de Banach.
Dans le quatrième chapitre, nous étudions la contrôlabilité approchée pour les systèmes stochastiques intégro-différentiels neutre impulsifs non-linéaires dans les espaces de dimension infinie, en supposant la contrôlabilité des systèmes linéaires associés. Nous proposons dans Le cinquième chapitre, une classe d'équations différentielles fonctionnelles stochastiques impulsives gouvernées simultanément par un processus de Rosenblatt et un Processus de Wiener. Nous démontrons un résultat de la contrôlabilité approximative de la solution douce selon le principe du point fixe de Banach.

II La contrôlabilité

Un système de contrôle est un système dynamique sur lequel on peut agir au moyen d'un contrôle ou d'une commande. La contrôlabilité dans le cas des systèmes dynamiques stochastiques linéaires et non-linéaires, a récemment reçue l'attention de beaucoup de chercheurs et a été discutées dans différents articles et monographies. Un point de départ de la théorie du contrôle est l'équation différentielle

$$y' = f(y, u), \quad y(0) = x \in \mathbb{R}^m \tag{II.1}$$

avec le côté droit dépendant d'un paramètre $u \in U \subset \mathbb{R}^m$. L'ensemble U est appelé l'ensemble des paramètres de contrôle. Les équations différentielles dépendants d'un paramètre ont fait l'objet de la théorie des équations différentielles depuis longtemps. La question de la dépendance continue des solutions aux paramètres a été posée et démontrée dans des conditions appropriées.
L'un des principaux objectifs de la théorie du contrôle est de trouver une stratégie telle que la sortie correspondante a les propriétés souhaitées en fonction des propriétés impliquées.
Tout au long de ce chapitre, nous nous référons principalement à [15, 29, 21, 36, 37]
Rappelons d'abord la définition de la résolvante du système linéaire variable dans le temps $\dot{x} = A(t)x$.

II.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

On fait rappelle sur les notions de base sur les équations différentielles linéaires et les principaux concepts de la contrôlabilité et les formules spécifiques pour les contrôles transférant un état à un autre ainsi que les caractérisations algébriques des systèmes contrôlables.
L'objet de base de la théorie classique du contrôle est un système linéaire décrit par une équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{II.2}$$

Les transformations linéaires $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, B : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sera identifié avec des matrices ou des éléments de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
La solution de II.2 est de la forme

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \tag{II.3}$$

avec

$$S(t) = \exp(At),\ t \geq 0.$$

Le système II.2 peut être étendu à des matrices dépendant du temps $A(t) \in M(n,n), B(t) \in M(n,m), t \in I = [0,T]$, et donc pour le système

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Une fonction arbitraire $u()$ définie sur $[0,+\infty)$ localement intégrable et avec des valeurs en $\mathbb{R}^m$ sera appelé un contrôle, une stratégie ou une entrée du système. La solution correspondante de l'équation II.2 sera notée par $y^{x,u}(.)$, pour souligner la dépendance à la condition initiale x et au entrée $u(.)$.
On dit qu'un contrôle u transfère un état a à un état b au moment $T > 0$ si $y^{a,u}(T) = b$.
On dit alors aussi que l'état a peut être dirigé vers b au temps ou que l'état b est accessible ou atteignable à partir de a au temps T.
Dans cette formule, la matrice Q_T, appelée matrice de contrôlabilité ou matrice Gramiaenne de contrôlabilité , apparaît :

$$Q_T = \int_0^T S(t)BB^*S^*(t)dt, \quad T > 0.$$

On vérifie facilement que Q_T est symétrique et définie non négative.

Exemple II.1.1 *Si*

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

alors la matrice de contrôlabilité au temps T est alors

$$\begin{aligned} Q_T &= \int_0^T e^{-sA}B(s)B(s)^T e^{-sA^T} ds \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} \cos 2s & 0 \\ \sin 2s & 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2T & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2T & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le théorème ci-dessous donne une formule pour un contrôle transférant a à b.

Théorème II.1.1 *[21] Supposons que pour $T > 0$ la matrice Q_T soit non singulière. Alors*

1. *Pour $a, b \in \mathbb{R}^n$, le contrôle*
$$\hat{u}(s) = -B^*S^*(T-s)Q_T^{-1}(S(T)a-b), \qquad s \in [0,T], \tag{II.4}$$
transfère a vers b au temps T;
2. *Parmi tous les contrôles conduisant a vers b au temps T le contrôle $\hat{u}$ minimise l'intégral $\int_0^T |u(s)|^2 ds$. De plus*
$$\int_0^T |u(s)|^2 ds = \langle Q_T^{-1}(S(T)a-b), S(T)a-b\rangle \tag{II.5}$$

Preuve :

1. De II.5 et II.4 on obtient que

$$\begin{aligned} y^{a,\hat{u}}(T) &= S(T)a - \big(\int_0^T S(T-s)BB^*S^*(T-s)ds\big)(Q_T^{-1}(S(T)a-b) \\ &= S(T)a - Q_T(Q_T^{-1}(S(T)a-b), S(T)a-b) = b \end{aligned}$$

2. La formule II.5 est une conséquence d'un simple calcul

$$\begin{aligned} \int_0^T |u(s)|^2 ds &= \int_0^T |B^*S^*(T-s)Q_T^{-1}(S(T)a-b)|^2 ds \\ &= \langle \int_0^T S(T-s)BB^*S^*(T-s)(Q_T^{-1}(S(T)a-b), Q_T^{-1}S(T)a-b\rangle \\ &= \langle Q_TQ_T^{-1}(S(T)a-b), Q_T^{-1}(S(T)a-b)\rangle \\ &= \langle Q_T^{-1}(S(T)a-b), S(T)a-b\rangle \end{aligned}$$

Maintenant, soit $u(.)$ un contrôle arbitraire qui transfère a vers b. On peut supposer que $u(.)$ est carré intégrable sur $[0,T]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u(s), \hat{u}(s)\rangle ds &= -\int_0^T \langle u(s), B^*S^*(T-s)Q_T^{-1}(S(T)a-b)\rangle ds \\ &= -\langle \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds, (Q_T^{-1}(S(T)a-b)\ \rangle \\ &= \langle S(T)a-b, Q_T^{-1}(S(T)a-b)\rangle \\ &= \int_0^T \langle \hat{u}(s), \hat{u}(s)\rangle ds. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_0^T |u(s)|^2 = \int_0^T |\hat{u}(s)|.2ds + \int_0^T |u(s)-\hat{u}(s)|^2 ds$$

cela signifie que $\int_0^T |\hat{u}(s)|^2 ds$ est minimale.

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour que le système II.2 soit contrôlable. □

Théorème II.1.2 *[21] Un état arbitraire b est atteignable à partir de a, alors la matrice Q_T n'est pas singulière pour un arbitraire $T > 0$.*

Définition II.1.1 *(Ensemble accessible) :[29] L'ensemble des points accessibles à partir de a au temps $T > 0$ est*

$$\begin{aligned} Acc(a,T) = b \in \mathbb{R}^n \ \ \exists u \in L^\infty_{loc}([0,T],\mathbb{R}^m), \exists x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n. \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \ \ p.p. \quad sur[0,T], \\ x(0) = a, \ \ x(T) = b. \end{aligned}$$

Autrement dit,$Acc(x_0,T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système II.2 en temps T , lorsqu'on fait varier le contrôle u.
Le système II.2 est appelé contrôlable si un état arbitraire $b \in \mathbb{R}^n$ est accessible à partir de n'importe quel état $a \in \mathbb{R}^n$

Définition II.1.2 *[29] Le système II.2 est appelé contrôlable (ou commandable) au temps T si un état arbitraire $b \in \mathbb{R}^n$ est accessible à partir de n'importe quel état $a \in \mathbb{R}^n$. C'est à dire si $Acc(a,T) = \mathbb{R}^n$, autrement dit pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$ il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie a à b en temps T. i.e :*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \ \exists u \in L^\infty_{loc}([0,T],\mathbb{R}^m), \ \exists x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = Ax(t) + Bu(t) \, p.p. \quad sur[0,T], \\ x(0) & = x_0, x(T) = b. \end{cases}$$

Le système II.2 est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} Acc(x_0,T)$$

Si pour arbitraire a, $b \in \mathbb{R}^n$ l'atteinte a lieu à un moment donné $T > 0$, on dit que le système est contrôlable au temps T.

II.1.1 Conditions de type Kalman pour la contrôlabilité

Pour vérifier La condition nécessaire et suffisante de la contrôlabilité donnée dans le Théorème II.1 , il faut calculer la matrice Q_T, ce qui peut être assez difficile (et même impossible) dans de nombreux cas, même pour de simples systèmes de commande linéaire. Dans cette section nous donnons un nouveau critère de contrôlabilité qui est beaucoup plus simple à vérifier. Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t, elle est dite condition de Kalman.

Théorème II.1.3 *[29] Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit contrôlable en temps T si et seulement si : la matrice $C = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B)$ est de rang égal à n.*
La matrice C est appelée matrice de Kalman. la condition $rangC = n$ est appelée condition de Kalman.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme II.1.1 *La matrice C est de rang n si est seulement si l'application linéaire :*

$$\begin{aligned} \phi : & L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & u \longmapsto \int_0^T \exp^{(T-t)} Bu(t)dt \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve : Supposons tout d'abord que $rangC < n$, et montrons que ϕ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n - 0$ que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi C = 0$. par conséquent :

$$\psi B = \psi AB = ... = \psi A_{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème de Cayley Hamilton, il existe des réels $a_0, a_1 ..., a_{n-1}$ tel que

$$A^n = a_0 I + .. + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout entier k :

$$\psi A^k B = 0,$$

et donc, pour tout $t \in [0, T^*]$:

$$\psi e^{tA} B = 0.$$

Par conséquent pour tout contrôle u on a :

$$\psi \int_0^t e^{(T^*-t)A} Bu(t)dt = 0,$$

i.e. $\psi\phi(u) = 0$, et donc ϕ n'est pas surjective.
Réciproquement, si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^t e^{(T-t)A} Bu(t)dt = 0$$

Ceci implique, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\psi exp(T-t)AB = 0.$$

En $t = T$ on obtient $\psi B = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport à t, puis en prenant $t = T$, on obtient $\psi AB = 0$ .Ainsi par dérivations successives on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = ... \psi A^{n-1} B = 0,$$

donc $\psi C = 0$, et $rangC < n$. $\square$ Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème II.1.3 .
Si la matrice C est de rang n, alors d'après le lemme II.1.3 l'application ϕ est surjective, i.e. $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est :

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int e^{(T-t)A}Bu(t)dt,$$

donc l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$Acc(T^*, x_0) = e^{T^*A}x_0 + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

et donc le système est contrôlable. □
Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en x_0 et l'ensemble accessible en temps T s'écrit :

$$Acc(T, x_0) = \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui prouve que ϕ est surjective, et donc d'après le lemme II.1.1 la matrice C est de rang n.□

Exemple II.1.2 *Le système suivant :*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Ax + Bu$$

est contrôlable car la matrice de Kalman $C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang égal à* 2.

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas non autonome (instationnaire) i.e. dans le cas ou les matrices A et B dépendent du temps t.

Théorème II.1.4 *[21] Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$C(T) = \int_0^T S(t)^{-1}B(t)B^*(t)(S(t)^{-1})^*dt \tag{II.6}$$

est inversible.
La matrice $C(T)$ est appelée matrice de contrôlabilité. Elle vérifie $C(T) = C^*(T)$, et $x^*C(T)x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $C(T)$ est une matrice symétrique positive.

Preuve : Pour toute solution $x(t)$, on a

$$x(T) = S(T)x_0 + S(T)\int_0^T S(s)^{-1}B(s)u(s)ds.$$

Posons $x^* = S(T)x_0$.
Si $C(T)$ est inversible, posons $u(t) = (M(t)^{-1}B(t))^T\psi$, avec $\psi \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$x(T) = x^* + S(T)C(T)\psi,$$

et il suffit de prendre $\psi = (S(T)C(T))^{-1}(x_1 - x^*)$.
Réciproquement, si $C(T)$ n'est pas inversible, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n - 0$ tel que $\psi^T C(T)\psi = 0$. On en déduit :

$$\int_0^T \|(S(t)^{-1}B(t))^T\psi\|^2 dt = 0,$$

d'ou $(S(t)^{-1}B(t))^T\psi = 0$ p.p sur $[0.T]$, et donc , pour tout contrôle u, on a

$$\psi^T \int_0^T S(t)^{-1}B(t)u(t)dt = 0.$$

Posons $\psi_1 = (S(T)^{-1})^*\psi$; on a pour tout contrôle u

$$\psi^T(x_u(T) - x^*) = 0,$$

i.e. $x_u(T \in x^* + \psi^\perp$ ($\psi^\perp$ étant l'orthogonal de ψ), et donc le système n'est pas contrôlable. $\square$

II.2 Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + u(t)\cos t \\ \dot{y}(t) = x(t) + u(t)\sin t \end{cases}$$

L'écriture matricielle du système est

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cot(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} u(t)$$

On posera

$$A(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \text{et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La résolvante du système $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ est donnée par la formule $S(t) = e^{tA}$. Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$. Un calcul simple montre que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} & \frac{1}{2}ie^{it} - \frac{1}{2}ie^{-it} \\ \frac{1}{2}ie^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it} & \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} M(t)^{-1}B(t)B(t)^T(M(t)^{-1})^T &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \sin t \\ \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de contrôlabilité au temps T est alors

$$
\begin{aligned}
C(T) &= \int_0^T e^{-sA} B(s) B(s)^* e^{-sA^T} ds \\
&= \int_0^T \begin{pmatrix} \cos 2s & 0 \\ \sin 2s & 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 2T & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2T & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Il est clair que la matrice $C(T)$ n'est pas inversible, donc le système donné n'est pas contrôlable.
En dimension infinie linéaire, par exemple, l'état appartient à un espace fonctionnel bien choisi. Pour les systèmes dynamiques de dimension infinie, il est nécessaire de distinguer les notions de contrôlabilité approximative et exacte. Il découle directement du fait que dans les espaces de dimension infinie, il existe des sous-espaces linéaires qui ne sont pas fermés.

III Contrôlabilité des systèmes différentiels à dérivée conformable généralisée

La présentation d'un système non linéaire à dérivée non entière est appelée système d'ordre fractionnaire (SOF). Il existe de nombreuses applications des SOF Dans des domaines du monde réel, que ce soit dans le traitement du signal, la chimie, l'électricité, la thermique ou la théorie du contrôle, par exemple la conception d'observateurs[22, 24, 82], stabilité en temps fini [61], estimation des défauts [64], et stabilité assymptotique [26, 59, 30]. En fait, ce qui concerne la conception de l'observateur, les auteurs de [22] ont présenté une conception d'observateur d'ordre fractionnaire pour les systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire. S'agissant de la stabilité temporelle finie, Naifar et al. dans [61] ont décrit le concept de stabilité en temps fini des systèmes linéaires à retard d'ordre fractionnaire. Dans le contexte de l'estimation des fautes, Ibrahima N'Doye et Taous-Meriem Laleg-Kirati dans [64] ont détaillé l'estimation adaptative des fautes d'ordre fractionnaire pour une classe de systèmes d'ordre fractionnaire non linéaires. Enfin, en ce qui concerne la stabilité asymptotique, Dans [26], les auteurs ont présenté la stabilité asymptotique des systèmes non linéaires d'ordre distribué variant dans le temps avec les dérivées fractionnaires de prabhakar.
En outre, il existe de nombreux articles récents sur les applications des SOF dans le monde réel comme le génie électrique(voir [82], [60] et [7]).
D'autre part, la théorie de la contrôlabilité est très importante dans les systèmes de contrôle. De nombreux travaux connexes ont étudié la contrôlabilité complète des systèmes de contrôle [93, 98]. En fait, Jiang, W dans [93] a présenté la contrôlabilité des systèmes fractionnaire avec retard au contrôle. De plus, les auteurs de [98] ont travaillé sur la contrôlabilité d'un système dynamique neutre fractionnaire linéaire invariant dans le temps. En particulier, de nombreux travaux tirés des citations ci-dessus [92, 96, 60, 28] ont décrit la contrôlabilité complète des systèmes conformes. En particulier, Wang et al. [92]ont étudié la contrôlabilité de systèmes semi-linéaires conformables. De plus, les auteurs de [96] ont décrit le système différentiel conformable linéaire et sa contrôlabilité.
La contrôlabilité des systèmes linéaires et semi-linéaires conformables est introduite et décrite. A titre d'exemple de comparaison, les travaux présentés dans [92] ont utilisé la dérivée conformable classique pour prouver leurs principaux résultats. Alors que, dans notre cas, on a fait une généralisation complète au cas général des systèmes d'ordres fractionnaires conformables.
Les contributions principales de ce chapitre sont mises en évidence comme suit :

— A notre connaissance, parmi tous les travaux existants dans la littérature, il n'y a

pas de développement de recherche qui traite de la contrôlabilité des systèmes linéaires et semi-linéaires comformables généraux.
— La validité d'un tel développement pour la dérivée fractionnaire conformable générale ouvrira plusieurs perspectives et solutions pour les applications en théorie de contrôle.

III.1 Préliminaries

Nous commençons cette section en rappelant quelques définitions, quelques lemmes et théorèmes [51, 26, 49, 97].

Définition III.1.1 *Supposons une fonction ϕ définie sur $[a,b)$ alors, la Dérivée Conformable Généralisée (DCG) à partir du réel a de ϕ est définie par*

$$T_a^{\theta,\psi_a}\phi(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi\left(t+\varepsilon\psi_a(t,\theta)\right)-\phi(t)}{\varepsilon}, \tag{III.1}$$

pour tout $t > a$, avec $\theta \in (0,1)$ et $\psi_a(t,\theta)$ est une fonction continue non- négative qui dépend de t et satisfait

$$\psi_a(t,1) = 1,$$

$$\psi_a(.,\theta_1) \neq \psi_a(.,\theta_2),\ \textit{avec}\ \theta_1 \neq \theta_2\ \textit{et}\ \theta_1,\theta_2 \in (0,1].$$

Si $T_a^{\theta,\psi_a}\phi(t)$ existe, pour tout $t \in (a,c)$, pour certain $c > a$ et $\lim_{t\longrightarrow a^+} T_a^{\theta,\psi_a}\phi(t)$ existe, alors

$$T_a^{\theta,\psi_a}\phi(a) := \lim_{t\longrightarrow a^+} T_a^{\theta,\psi_a}\phi(t). \tag{III.2}$$

Remarque III.1.1 — *La DCG généralise la dérivée classique pour $(\theta = 1)$ et la dérivée comformable dans le cas où $\psi_a(t,\theta) = (t-a)^{1-\theta}$ (voir [51] et [26] pour $a = 0$).*
— *Pour approfondir l'étude des propriétés de DCG, on suppose que $\psi_a(t,\theta) > 0$, pour tout $t > a$ et $\dfrac{1}{\psi_a}(.,\theta)$ est intégrable.*

Définition III.1.2 *Soit $0 < \theta < 1$. L'intégral Fractionnaire Conformable (IFC) d'une fonction ϕ est définie par*

$$I_a^{\theta,\psi_a}\phi(t) = \int_a^t \frac{\phi(x)}{\psi_a(x,\theta)}dx. \tag{III.3}$$

Lemme III.1.1 *Soit la fonction continue ϕ définie sur $[a,b]$. Alors pour tout $t \geq a$ on a*

$$T_a^{\theta,\psi_a} I_a^{\theta,\psi_a}\phi(t) = \phi(t). \tag{III.4}$$

Lemme III.1.2 *Supposons que ϕ est une fonction absolument continue sur $[a,b]$. Alors pour tout $t \geq a$ nous avons*

$$I_a^{\theta,\psi_a} T_a^{\theta,\psi_a}\phi(t) = \phi(t) - \phi(a). \tag{III.5}$$

Lemme III.1.3 *Soit $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{R}$, et les fonctions $\phi_1, \phi_2 : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $T_a^{\theta,\psi_a}\phi_1(t)$ et $T_a^{\theta,\psi_a}\phi_2(t)$ existe sur (a,b). Alors*

- $T_a^{\theta,\psi_a}(\rho_1\phi_1 + \rho_2\phi_2)(t) = \rho_1 T_a^{\theta,\psi_a}\phi_1(t) + \rho_2 T_a^{\theta,\psi_a}\phi_2(t)$;
- $T_a^{\theta,\psi_a}\rho_3 = 0$;
- $T_a^{\theta,\psi_a}(\phi_1\phi_2)(t) = \phi_1(t)T_a^{\theta,\psi_a}\phi_2(t) + \phi_2(t)T_a^{\theta,\psi_a}\phi_1(t)$;
- $T_a^{\theta,\psi_a}(\frac{\phi_1}{\phi_2})(t) = \frac{\phi_2(t)T_a^{\theta,\psi_a}\phi_1(t) - \phi_1(t)T_a^{\theta,\psi_a}\phi_2(t)}{\phi_2^2(t)}$, *pour tout $t \in (a,b)$ tel que* $\phi_2(t) \neq 0$.

Remarque III.1.2 *Soit $\vartheta \in \mathbb{R}^*$. Si $g(t) := \mathbb{E}_\theta^{\psi_a}\left(\vartheta, t, a\right) = e^{\vartheta \int_a^t \frac{1}{\psi_a(x,\theta)}dx}$, alors*

$$T_a^{\theta,\psi_a}g(t) = \vartheta g(t)$$

et

$$I_a^{\theta,\psi_a}g(t) = \frac{1}{\vartheta}\left(g(s) - 1\right)$$

.

III.2 Systèmes linéaires

Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} T^{\alpha,\psi_{t_0}}x(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [t_0, b], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{III.6}$$

La solution du problème (III.6) est donnée par :

$$x(t) = E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t, t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)Bu(s)ds, \tag{III.7}$$

avec

$$E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t, t_0) = \exp\left(A\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)}ds\right). \tag{III.8}$$

Définition III.2.1 *Un système* (III.6) *est dit contrôlable sur $[t_0, b]$ si pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ il existe un contrôle $u(t)$ tel que la solution $x(t)$ de ce système satisfit $x(t_0) = x_0$ et $x(b) = x_1$.*

Nous introduisons une notation d'une matrice Grammienne de contrôlabilité W comme suit

$$W = \int_{t_0}^b \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)}\left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)B\right]\left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)B\right]^* ds. \tag{III.9}$$

Théorème III.2.1 *Le système de contrôle* (III.6) *est contrôlable sur* $[t_0, b]$ *si et seulement si la matrice Grammienne de contrôlabilité* W *définie par* (III.9) *est définie positive, pour* $b > 0$.

Preuve : Supposons que W est définie positive, alors son inverse est bien défini. Définissons la fonction de contrôle suivante

$$u(t) = B^* E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A^*, t, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A^*, b, t_0) W^{-1}[x_1 - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)x_0]. \tag{III.10}$$

En substituant $t = b$ dans (III.7) et utilisant (III.10) on trouve

$$\begin{aligned} x(b) &= E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0) \\ &\quad \times BB^* E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A^*, s, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A^*, b, t_0) W^{-1}[x_1 - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)x_0] ds \\ &= E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)x_0 + WW^{-1}[x_1 - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)x_0] \\ &= x_1. \end{aligned} \tag{III.11}$$

Ainsi le système (III.6) est contrôlable.
Inversement, supposons que la matrice Grammienne de contrôlabilité W est non définie positive. Il existe donc un y non nul tel que $y^*Wy = 0$, alors

$$y^*Wy = \int_{t_0}^{b} y^* \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)B\right] \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)B\right]^* y ds = 0, \tag{III.12}$$

cela implique que

$$y^* \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, t, t_0)B\right] = 0, \quad \text{on } [t_0, b]. \tag{III.13}$$

Soit $x_0 = \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)\right]^{-1} y$. Il résulte du résultat ci-dessus qu'il existe $u(t)$ qui transfère x_0 à l'origine sur $[t_0, b]$. Alors

$$\begin{aligned} x(b) &= E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)Bu(s) ds \\ &= y + \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)Bu(s) ds. \end{aligned} \tag{III.14}$$

Donc

$$y^*y + \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} y^* E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)Bu(s) ds = 0. \tag{III.15}$$

En utilisant (III.13), on obtient $y^*y = 0$ c'est une contradiction avec $y \neq 0$. Ainsi la matrice W est définie positive.□
Considérons maintenant une notation d'un critère de rang comme suit :

$$\Gamma_c = \left[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B\right]. \tag{III.16}$$

Théorème III.2.2 *Le système de contrôle* (III.6) *est contrôlable sur* $[t_0, b]$ *si et seulement si rank* $\Gamma_c = n$.

Preuve : Supposons que le système (III.6) est non contrôlable. D'après le théorème ci-dessus, il existe un non nul y tel que

$$y^* \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, t, t_0) B\right] = 0, \quad \text{on } [t_0, b]. \tag{III.17}$$

Prenons $t = b$ in (III.17), on obtient $y^* B = 0$. Par la dérivation de (III.17) et de $\psi_{t_0}(t, \alpha) \neq 0$, on a

$$y^* A \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, t, t_0) B\right] = 0, \quad \text{on } [t_0, b]. \tag{III.18}$$

Prenons $t = b$ dans (III.18) on obtient $y^* AB = 0$. Répétez l'opération $n - 1$ fois on obtient

$$y^* B = 0, \quad y^* AB = 0, \quad , ..., y^* A^{n-1} B = 0. \tag{III.19}$$

Donc

$$y^* \left[B \ AB \ ... \ A^{n-1} B\right] = 0. \tag{III.20}$$

Selon $y \neq 0$ alors $rank(\Gamma_c) < n$.
Inversement, supposons que le $rank(\Gamma_c) < n$, alors il existe un $y \neg 0$ tel que

$$y^* \Gamma_c = y^* \left[B \ AB \ ... \ A^{n-1} B\right] = 0. \tag{III.21}$$

Donc

$$y^* A^i B = 0, \qquad \text{for } i = 0, 1, ..., n - 1. \tag{III.22}$$

Par le théorème de Cayley Hamilton , on a

$$y^* A^i B = 0, \qquad \text{for } i = 0, 1, 2, ... \tag{III.23}$$

Ceci implique que pour tout $t \in [t_0, b]$

$$y^* E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) \frac{A^i \left(\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} ds\right)^i}{i!} B = 0, \qquad \text{for } i = 0, 1, 2, ... \tag{III.24}$$

Par conséquent

$$y^* \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, t, t_0) B\right] = 0, \quad \text{on } [t_0, b]. \tag{III.25}$$

De (III.25) et la définition de la matrice W, on obtient

$$y^* W y = \int_{t_0}^b y^* \frac{1}{\psi_{t_0}(s, \alpha)} \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, t, t_0) B\right] \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, t, t_0) B\right]^* y ds = 0, \tag{III.26}$$

donc la matrice W n'est pas définie positive. Il résulte du théorème ci-dessus que le système n'est pas contrôlable. □

III.3 Exemple

Considérons le système III.6 avec $\psi_{t_0}(\alpha, t) = 1 + (1-\alpha)(t - t_0)$, $t_0 = 0, b = 1, \alpha = \frac{1}{2}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de Gram conforme est donnée par

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,b,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) B \right] \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,b,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) B \right]^* ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{2}s} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2+s}\right)^4 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2+s}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2+s}\right)^4 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2+s}\right)^2 \end{pmatrix}^* ds \\ &= 2 \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{3^8}{(2+s)^9} & 0 \\ 0 & \frac{3^4}{(2+s)^5} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 6.1572 & 0 \\ 0 & 2.0313 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1624 & 0 \\ 0 & 0.4923 \end{pmatrix}.$$

Cela implique que W est non singulière, donc le système est contrôlable sur $[0, 1]$.

III.4 Systèmes semilinéaires

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} T^{\alpha,\psi_{t_0}} x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) + Bu(t), & t \in [t_0, b], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{III.27}$$

Nous introduisons les hypothèses suivantes

(A1) La fonction $\frac{1}{\psi_{t_0}}$ est carrée intégrable et l'opérateur $\mathcal{W} : L^2(J, \mathbb{R}^r) \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathcal{W}u = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) Bu(s) ds \tag{III.28}$$

a un opérateur inverse $\mathcal{W}^{-1}$ tel que $\mathcal{W}^{-1}$ prend ses valeurs dans $L^2(J,\mathbb{R}^r) \setminus \ker \mathcal{W}$.

(A2) $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue , et il existe $L_f(.) \in C(J,\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L_f(t) \|x-y\| \quad \text{for all } x,y \in \mathbb{R}^n \text{ and } t \in J. \tag{III.29}$$

Pour $x(t) \in C(J,\mathbb{R}^n)$, on définit la fonction contrôle $u_x(t)$ par

$$\begin{aligned} u_x(t) = \; & \mathcal{W}^{-1} \Big[x_1 - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,b,t_0)x_0 \\ & - \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,b,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) f(s,x(s)) ds \Big] (t), \quad t \in J. \end{aligned} \tag{III.30}$$

Tout d'abord en utilisant (III.30) on montre que, l'opérateur $\mathcal{P} : C(J,\mathbb{R}^n) \to C(J,\mathbb{R}^n)$ défini par

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}x)(t) = \; & E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) f(s,x(s)) ds \\ & + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) Bu_x(s) ds \end{aligned} \tag{III.31}$$

a un point fixe x, qui est une solution du système (III.27). Pour prouver le résultat de contrôlabilité relative du système (III.27), nous utilisons le théorème du point fixe de Krasnoselskii. Considérons $\mathcal{B}_r = \{x \in C(J,\mathbb{R}^n) : \|x\|_C \leq r\}$, notons que $\mathcal{B}_r$ est un sous-ensemble fermé, borné et convexe de $C(J,\mathbb{R}^n)$.

Théorème III.4.1 ***(Theorème de Krasnoselskii)****[81] : Soit M un sous-ensemble non vide convexe fermé d'un espace de Banach E. Supposons que A et B sont des applications de M dans E et que*

(i) $Ax + By \in M$, $(\forall x, y \in M)$,

(ii) A est compacte et continue.

(iii) B est une application contractante.

Alors il existe y dans M tel que $Ay + By = y$.

Dans ce qui suit, nous considérons

$$R = \left\| \mathcal{W}^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2(J,\mathbb{R}^r) \setminus \ker \mathcal{W})}, \qquad \mathcal{N}_A = \|A\|, \qquad \mathcal{R}_f = \sup_{t \in J} \|f(t,0)\|,$$

$$H_1 = E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) \|x_0\| + \frac{\mathcal{R}_f}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) - 1 \right),$$

$$H_2 = \frac{1}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) - 1 \right) \|L_f\|_{C(J,\mathbb{R}^+)},$$

$$H_3 = RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\left(\int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}^2(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(2\mathcal{N}_A, s, t_0)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ensuite, on considère l'opérateur $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_1$ tel que

$$(\mathcal{P}_1 x)(t) = E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t, t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)Bu_x(s)ds, \quad t \in J. \tag{III.32}$$

$$(\mathcal{P}_2 x)(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t, t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)f(s, x(s))ds, \quad t \in J. \tag{III.33}$$

Théorème III.4.2 *Supposons que $(A1)$, $(A2)$ soient satisfaits. Alors le système* (III.27) *est complètement contrôlable si la condition suivante est vérifiée :*

$$H_2\left[1 + H_3\|B\|\right] < 1. \tag{III.34}$$

Preuve : La preuve sera donnée en plusieurs étapes.
Étape 1. Nous montrons que $\mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(y) \in \mathcal{B}_r$ pour tout $x, y \in \mathcal{B}_r$.
Selon $(A1)$, $(A2)$ et la remarque III.1.2 et en utilisant le fait $\left\|e^{At}\right\| \le e^{\|A\|t}$, on obtient pour tout $x \in \mathcal{B}_r$ et $t \in J$,

$$\begin{aligned}
&\|u_x\|_{L^2(J,\mathbb{R}^r)\setminus \ker \mathcal{W}} \\
&\le \left\|\mathcal{W}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2(J,\mathbb{R}^r)\setminus \ker \mathcal{W})} \\
&\quad \times \left\|\left[x_1 - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)x_0 - \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, b, t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A, s, t_0)f(s, x(s))ds\right]\right\| \\
&\le R\|x_1\| + RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\|x_0\| \\
&\quad + RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0)\|f(s, x(s)) - f(s,0) + f(s,0)\| ds \\
&\le R\|x_1\| + RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\|x_0\| \\
&\quad + RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0)L_f(s)\|x(s)\| ds \\
&\quad + RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0)\|f(s,0)\| ds \\
&\le R\|x_1\| + RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\|x_0\| \\
&\quad + \frac{R}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0) - 1\right)\|L_f\|_{C(J,\mathbb{R}^+)}\|x\|_{C(J,\mathbb{R}^n)} \\
&\quad R\frac{\mathcal{R}_f}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0) - 1\right) \\
&\le R\|x_1\| + RH_1 + RH_2 r
\end{aligned} \tag{III.35}$$

Selon $(A1)$, $(A2)$, et la remarque III.1.2 et utilisant le fait $\left\|e^{At}\right\| \leq e^{\|A\|t}$. On obtient pour tout $x, y \in \mathcal{B}_r$ et $t \in J$

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{P}_1(x)(t) + \mathcal{P}_2(y)(t)\| \\
&\leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\|x_0\| + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0)\|f(s, y(s))\|\, ds \\
&\quad + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0)\|B\|\|u_x(s)\|\, ds \\
&\leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\|x_0\| + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0)L_f(s)\|y(s)\|\, ds \\
&\quad + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0)\|f(s,0)\|\, ds \\
&\quad + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}^2(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(2\mathcal{N}_A, s, t_0) ds\right)^{\frac{1}{2}}\|B\|\|u_x\|_{L^2(J,\mathbb{R}^r)} \\
&\leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\|x_0\| + \frac{1}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0) - 1\right)\|L_f\|_{C(J,\mathbb{R}^+)}\|y\|_{C(J,\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \frac{\mathcal{R}_f}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0) - 1\right) \\
&\quad + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0)\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{\psi_{t_0}^2(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(2\mathcal{N}_A, s, t_0) ds\right)^{\frac{1}{2}}\|B\|\left(R\|x_1\| + RH_1 + RH_2 r\right) \\
&\leq H_1\left(1 + H_3\|B\|\right) + H_3\|B\|\|x_1\| + H_2\left(1 + H_3\|B\|\right) r \\
&\leq r,
\end{aligned} \tag{III.36}$$

pour

$$r = \frac{H_1\left[1 + H_3\|B\|\right] + H_3\|B\|\|x_1\|}{1 - H_2\left[1 + H_3\|B\|\right]}. \tag{III.37}$$

Alors, $\mathcal{P}_1(x) + \mathcal{P}_2(y) \in \mathcal{B}_r$ pour tout $x, y \in \mathcal{B}_r$.

Étape 2. On démontre que $\mathcal{P}_1$ est une application contractante .

Selon $(A1)$, $(A2)$, et la remarque III.1.2 et utilisant le fait $\left\|e^{At}\right\| \leq e^{\|A\|t}$, on obtient pour tout $x, y \in \mathcal{B}_r$ et $t \in J$

$$\begin{aligned}
&\left\|u_x - u_y\right\|_{L^2(J,\mathbb{R}^r)\setminus \ker \mathcal{W}} \\
&\quad \leq \left\|\mathcal{W}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2(J,\mathbb{R}^r)\setminus \ker \mathcal{W})} \\
&\quad\quad \times \left\| \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,b,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) \left(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right) ds \right\| \\
&\quad \leq R E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,s,t_0) L_f(s) \left\|x(s) -, y(s)\right\| ds \\
&\quad \leq \frac{R}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,b,t_0) - 1\right) \left\|L_f\right\|_{C(J,\mathbb{R}^+)} \left\|x - y\right\|_{C(J,\mathbb{R}^n)} \\
&\quad \leq R H_2 \left\|x - y\right\|_{C(J,\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{III.38}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{P}_1 x)(t) - (\mathcal{P}_1 y)(t)\right\| \\
&\quad \leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,t,t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,s,t_0) \left\|B\right\| \left\|u_x(s) - u_y(s)\right\| ds \\
&\quad \leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,t,t_0) \left(\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}^2(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(2\mathcal{N}_A,s,t_0) ds\right)^{\frac{1}{2}} \left\|B\right\| \left\|u_x - u_y\right\|_{L^2(J,\mathbb{R}^r)} \\
&\quad \leq H_2 H_3 \left\|B\right\| \left\|x - y\right\|_{C(J,\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{III.39}$$

Alors,

$$\left\|(\mathcal{P}_1 x) - (\mathcal{P}_1 y)\right\| \leq K \left\|x - y\right\|, \quad \text{for} \quad K = H_2 H_3 \left\|B\right\|. \tag{III.40}$$

De (III.34), on en déduit que $\mathcal{P}_1$, est une contraction .
Étape 3. Nous montrons que $\mathcal{P}_2$ est un opérateur continu et compact.
Il est facile de montrer que $\mathcal{P}_2$ est un continu puisque f est continu. Ensuite, nous montrons que $\mathcal{P}_2$ est compact à cette fin, nous montrons que $\mathcal{P}_2(\mathcal{B}_r) \subset C(J, \mathbb{R}^n)$ est borné et équicontinu.
Pour tout $x \in \mathcal{B}_r$ et $t_1, t_2 \in J$ tels que $t_2 > t_1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\|(\mathcal{P}_2 x)(t_2) - (\mathcal{P}_2 x)(t_1)\right\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_2} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t_2,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) f(s,x(s)) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t_1,t_0) E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0) f(s,x(s)) ds \right\| \\
&\leq \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2,
\end{aligned} \tag{III.41}$$

avec

$$\mathcal{J}_1 = \left\|E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t_2,t_0) - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,t_1,t_0)\right\| \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A,s,t_0) \left\|f(s,x(s))\right\| ds \tag{III.42}$$

et
$$\mathcal{J}_2 = E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_2, t_0) \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) \left\| f(s, x(s)) \right\| ds. \tag{III.43}$$

Maintenant, nous prouvons que $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ tendent vers zéro lorsque t_1 tend vers t_2. D'après $(A1)$, $(A2)$ et la remarque III.1.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &\leq \left\| E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_2, t_0) - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_1, t_0) \right\| \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) L_f(s) \left\| x(s) \right\| ds \\
&\quad + \left\| E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_2, t_0) - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_1, t_0) \right\| \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) \left\| f(s, 0) \right\| ds \\
&\leq \frac{r}{\mathcal{N}_A} \left\| E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_2, t_0) - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_1, t_0) \right\| \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_1, t_0) - 1 \right) \left\| L_f \right\|_{C(J, \mathbb{R}^+)} \\
&\quad + \frac{\mathcal{R}_f}{\mathcal{N}_A} \left\| E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_2, t_0) - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A, t_1, t_0) \right\| \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_1, t_0) - 1 \right),
\end{aligned} \tag{III.44}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &\leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_2, t_0) \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) L_f(s) \left\| x(s) \right\| ds \\
&\quad + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_2, t_0) \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) \left\| f(s, 0) \right\| ds \\
&\leq \frac{r}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_2, t_0) \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_2, t_0) - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_1, t_0) \right) \left\| L_f \right\|_{C(J, \mathbb{R}^+)} \\
&\quad + \frac{\mathcal{R}_f}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_2, t_0) \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_2, t_0) - E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t_1, t_0) \right).
\end{aligned} \tag{III.45}$$

Comme t_1 tend vers t_2, le côté droit des deux inégalités ci-dessus tend vers 0. Donc $\mathcal{P}_2(\mathcal{B}_r)$ est équicontinu. Il reste à montrer que $\mathcal{P}_2(\mathcal{B}_r)$ est borné.
Pour chaque $x \in \mathcal{B}_r$ et $t \in J$. D'après $(A1)$, $(A2)$ et remarque III.1.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| (\mathcal{P}_2 x)(t) \right\| &\leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) \left\| f(s, x(s)) \right\| ds \\
&\leq E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) L_f(s) \left\| x(s) \right\| ds \\
&\quad + E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, t, t_0) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, s, t_0) \left\| f(s, 0) \right\| ds \\
&\leq \frac{r}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0) \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0) - 1 \right) \left\| L_f \right\|_{C(J, \mathbb{R}^+)} \\
&\quad + \frac{\mathcal{R}_f}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0) \left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0) - 1 \right).
\end{aligned} \tag{III.46}$$

Donc $\mathcal{P}_2(\mathcal{B}_r)$ est borné. Par le théorème du point fixe de Krasnoselskii, nous concluons que $\mathcal{P}$ a un point fixe $x \in \mathcal{B}_r$. Cela implique que $x(b) = x_1$. $\square$

III.5 Exemple

Considérons le système III.27 avec $n = r = 2$, $\psi_{t_0}(\alpha, t) = 1 + (1-\alpha)(t - t_0)$, $t_0 = 0$, $b = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}(t+1)\arctan(x_1(t)) \\ \frac{1}{10}(t+1)\arctan(x_2(t)) \end{pmatrix}.$$

Clairement que la fonction $\frac{1}{\psi_{t_0}}$ est carré intégrable. La matrice de Gram conforme est donnée par

$$\begin{aligned}
W &= \int_{t_0}^{b} \frac{1}{\psi_{t_0}(s,\alpha)} \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,b,t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0)B\right] \left[E_\alpha^{\psi_{t_0}}(A,b,t_0)E_\alpha^{\psi_{t_0}}(-A,s,t_0)B\right]^* ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{2}s} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2+s}\right)^{0.2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2+s}\right)^{0.6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{2+s}\right)^{0.2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{2+s}\right)^{0.6} \end{pmatrix}^* ds \\
&=2 \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{3^{0.4}}{(2+s)^{1.4}} & 0 \\ 0 & \frac{3^{1.2}}{(2+s)^{2.2}} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} 0.8804 & 0 \\ 0 & 1.0445 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alors

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1.1358 & 0 \\ 0 & 0.9574 \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\left\|\mathcal{W}^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, L^2(J,\mathbb{R}^r)\setminus \ker \mathcal{W})} = \left\|W^{-1}\right\|^{\frac{1}{2}}$ comme dans le cas de la dérivée conforme donnée dans [92]. Ainsi $R = 1.0657$.

De plus, nous avons pour tous $x, y (\in \mathbb{R}^2$ et $t \in J$

$$\begin{aligned}\|f(t,x)-f(t,y)\| &= \frac{1}{10}(t+1)\left[(\arctan(x_1)(t)-\arctan(y_1)(t))^2\right.\\ &\qquad \left.+(\arctan(x_2)(t)-\arctan(y_2)(t))^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{1}{10}(t+1)\left[(x_1(t)-y_1(t))^2+(x_2(t)-y_2(t))^2\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{1}{10}(t+1)\|x-y\|.\end{aligned}$$

Alors $L_f(t) = \frac{1}{10}(t+1) \in C(J, \mathbb{R}^+)$ et $\|L_f\|_{C(J,\mathbb{R}^+)} = \frac{1}{5}$. De plus, on obtient

$$\mathcal{N}_A = \|A\| = 0.3,\ H_2 = \frac{1}{\mathcal{N}_A} E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\left(E_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0) - 1\right)\|L_f\|_{C(J,\mathbb{R}^+)} = 0.23418,$$

$$H_3 = RE_\alpha^{\psi_{t_0}}(\mathcal{N}_A, b, t_0)\left(\int_{t_0}^{b}\frac{1}{\psi_{t_0}^2(s,\alpha)}E_\alpha^{\psi_{t_0}}(2\mathcal{N}_A, s, t_0)ds\right)^{\frac{1}{2}} = 1.2492.$$

Donc

$$H_2\left[1 + H_3\|B\|\right] = 0.52672 < 1.$$

Toutes les conditions du théorème III.4.2 sont satisfaites. Ensuite, le système est entièrement contrôlable sur $[0, 1]$.

Hindawi
Complexity
Volume 2021, Article ID 2817092, 11 pages
https://doi.org/10.1155/2021/2817092

Research Article

Controllability of Differential Systems with the General Conformable Derivative

Ferrag Azouz,[1] **Djalal Boucenna**,[1,2] **Abdellatif Ben Makhlouf**,[3] **Lassaad Mchiri**,[4] **and Abbes Benchaabane**[5,6]

[1]*High School of Technological Teaching, Enset, Skikda, Algeria*
[2]*Laboratory of Advanced Materials, Department of Mathematics Faculty of Sciences, Badji Mokhtar Annaba University, P.O. Box 12, Annaba 23000, Algeria*
[3]*Department of Mathematics, College of Science, Jouf University, P.O. Box. 2014, Sakaka, Saudi Arabia*
[4]*Department of Statistics and Operations Research, College of Sciences, King Saud University, Riyadh 11451, Saudi Arabia*
[5]*Laboratory of Analysis and Control of Differential Equations "ACED", Univ. 8 May 1945 Guelma, Guelma, Algeria*
[6]*8 May 1945 University, Guelma 24000, Algeria*

Correspondence should be addressed to Abdellatif Ben Makhlouf; abmakhlouf@ju.edu.sa

Received 15 June 2021; Accepted 18 September 2021; Published 11 October 2021

Academic Editor: Carlos Aguilar-Ibanez

In this paper, the controllability of differential systems with the general conformable derivative is studied. By elaborating the rank criterion and the conformable Gram criterion, sufficient and necessary conditions to investigate that a linear general conformable system is null completely controllable are given. We obtain a full generalization to the general conformable fractional-order system case. In addition, Krasnoselskii's fixed point theorem to obtain a complete controllability result for a semilinear general conformable system is applied.

1. Introduction

The presentation of a nonlinear system with the noninteger derivative is named fractional-order system (FOS). There are many applications of FOSs on real-world fields, whether in signal processing, chemistry, electricity, thermal, or control theory, for example, observer design [1–3], finite-time stability [4], fault estimation [5], and asymptotic stability [6–8]. In fact, with regard to observer design, authors in [1] presented a fractional-order observer design for fractional-order nonlinear systems. Dealing with finite-time stability, Naifar et al. in [4] described the finite-time stability concept of linear fractional-order time-delay systems. In the context of fault estimation, Ibrahima N'Doye and Taous-Meriem Laleg-Kirati in [5] detailed the fractional-order adaptive fault estimation for a class of nonlinear fractional-order systems. Finally, with regard to asymptotic stability, in [6], authors presented the asymptotic stability of distributed-order nonlinear time-varying systems with the Prabhakar fractional derivatives.

In recent years, in [9], the conformable fractional derivative has been defined. Recently, Abdeljawad [10] worked to improve such a derivative. Much research and descriptions are currently being carried out on it, and we give the following related works [11, 12]. Indeed, authors in [11] worked on the analytical solutions of the system of conformable time-fractional Robertson equations with 1D diffusion. Furthermore, authors in [12] detailed the stability analysis of conformable fractional-order nonlinear systems depending on a parameter. After that, a generalization of the classical conformable fractional derivative is investigated [13, 14]. In fact, the authors of [14] introduced a new class of fractional derivative called the general conformable fractional derivative. Furthermore, in [13], the authors proved some uniqueness results of the solution of the diffusion equation.

IV Processus stochastiques

IV.1 Introduction

Un processus dynamique est une structure mathématique utilisée pour modéliser l'évolution déterministe de certains phénomènes (physique) dans le temps. Le mot clé ici est déterministe. On dit qu'un système est déterministe si son future est complètement prédictible connaissant de son état initial.
Mais s'il y a quelques intrinsèque randomisations dans le système, qui rend la prédiction parfaite du future impossible, on utilise alors une autre structure mathématique dite processus stochastique.
La modélisation stochastique a été largement utilisée pour modéliser les phénomènes apparaissant dans de nombreuses branches de la science comme la biologie, l'économie, la mécanique,l'électronique et la télécommunication.
Dans ce chapitre, nous nous sommes appuyés sur les références [67, 44].

Définition IV.1.1 *Un processus stochastique est simplement une collection de variables $X(t), t \in I$. L'indice t représente souvent le temps et l'ensemble I est l'ensemble d'indices du processus. Les ensembles d'indices les plus courants sont $I = \{0, 1, 2, \}$, représentant le temps discret, et $I = [0, \infty)$, représentant le temps continu. Stochastique en temps discret les processus sont des séquences de variables aléatoires.*
Les processus en temps continu sont d'innombrables collections de variables aléatoires. Les variables aléatoires d'un processus stochastique prennent des valeurs dans un espace commun d'état, discret ou continu. Un processus stochastique est spécifié par ses espaces d'indices et d'état, et par les relations de dépendance entre ses variables.

IV.2 Mouvement Brownien

Robert Brown (1828) *observe le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. Delsaux* (1877) *explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Bachelier* (1900) *met en évidence*

le caractère markovien du mouvement Brownien, en vue d'étudier les cours de la Bourse. Einstein (1905) détermine la densité de transition du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. Smoluchowski (1905) décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires. N. Wiener (1923) réalise la première étude mathématique rigoureuse et donne une démonstration de l'existence du Brownien.
Le mouvement Brownien est un processus stochastique d'espace d'états continu en temps continu.
Le nom fait également référence à un processus physique.
On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et un processus* $(B(t), t \geq 0)$ *sur cet espace.*

Définition IV.2.1 *Le processus* $(B(t), t \geq 0)$ *est un mouvement Brownien ou processus de Wiener si*

(i) $P(B_0 = 0) = 1$ *(le mouvement Brownien est issu de l'origine).*

(ii) $0 \leq s \leq t, B(t) - B(s)$ *est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance* $t - s$*, .i.e., pour tout* $a < b$ *on a*

$$P\{a \leq B(t) - B(s) \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{\frac{x^2}{2(t-s)}} dx$$

(iii) $B(t, \omega)$ *a des incréments indépendants, .i.e,* $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$*, les variables* $B(t_n) - B(t_{n-1}), ..., B(t_1) - B(t_0), B(t_0)$ *sont indépendantes.*

Remarque IV.2.1 *Un mouvement Brownien* $W(t)$ *est standard si* $W_0 = 0$ *p.s ,* $\mathbf{E}(W(t)) = 0$*, et* $\mathbf{E}((W(t))^2) = t$.

Proposition IV.2.1 *Un processus gaussien continu* $B(t), t \in \mathbb{R}^+$ *est un mouvement Brownien si et seulement si* $\mathbf{E}(B(t)) = 0, \mathbf{E}(B(t)B(s)) = min(s,t)$*, pour tout* $t, s \geq 0$.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé complet i.e. si* $B \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(B) = 0$ *et* $A \subset B$*, alors* $A \in \mathcal{F}$.
Une base stochastique est la donnée de $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *où* $\mathcal{F}_t$ *est une famille de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *pour* $s \leq t$. $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *s'appelle une filtration.*
On dira que le processus $\{X(t),\ t \geq 0\}$ *est adapté à* $\mathcal{F}_t$ *si* $\forall t \geq 0, X(t)$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
L'application (pour $\omega \in \Omega$ *fixé)*

$$\begin{aligned} X(\omega) :&\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n \\ &t \mapsto X(t)(\omega) \end{aligned}$$

s'appelle une trajectoire du processus.

Remarque IV.2.2 *Notons que la filtration naturelle du mouvement Brownien* $(B_t, t \geq 0)$ *est* $\mathcal{F}^B(t) = \sigma(B(s), s \leq t)$.

Définition IV.2.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *une filtration de cet espace. Une famille* $(M_t)_{t\geq 0}$ *adapté de variables aléatoires intégrables* $(E|M_t| < +\infty)$ *est*

— *une martingale si pour tout* $s \leq t$, $\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) = M(s)$.

— *une sur martingale si pour tout* $s \leq t$, $\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) \leq M(s)$.
— *une sous martingale si pour tout* $s \leq t$, $\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) \geq M(s)$.

Exemple IV.2.1 *Soit* X_n *une suite de variables aléatoires indépendants et de distribution identique avec espérance finie et soit* $S_n = X_1 + ... + X_n$. *Alors* S_n *est un sous martingale si* $\mathbf{E}(X_1) \geq 0$ *et sur martingale si* $\mathbf{E}(X_1) \leq 0$.

Exemple IV.2.2 *Un mouvement Brownien* $B(t)$ *est une martingale. Pour voir ce fait, laissez* $\mathcal{F}_t = \{B(s), s \leq t\}$. *Alors pour tout* $s \leq t$,

$$\mathbf{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B(t)B(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(B(s)|\mathcal{F}_s).$$

Puisque $B(t) - B(s)$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$, *nous avons* $\mathbf{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B(t) - B(s))$. *Mais* $\mathbf{E}(B(t)) = 0$ *pour tout* t. *D'où* $\mathbf{E}(B(t) - B(s)|\mathcal{F}_s) = 0$.
On d'autre part, $E(B(s)|\mathcal{F}_s) = B(s)$ *car* $B(s)$ *est* $\mathcal{F}_s$*-mesurable. Donc* $\mathbf{E}(B(t)|\mathcal{F}_s) = B(s)$ *pour tout* $s \leq t$ *et cela montre que* $B(t)$ *est une martingale.*

IV.3 Processus de Rosenblatt

Un objet similaire est exactement ou approximativement similaire à une partie de lui-même. Les processus auto-similaires sont invariants dans distribution sous une échelle appropriée. Ils présentent un intérêt considérable dans la pratique, car certains aspects de l'auto-similarité apparaissent dans différents phénomènes comme les télécommunications, l'économie, l'hydrologie ou la turbulence. Nous nous référons au travaux de Taqqu [88] pour un guide sur l'apparition de l'autosimilarité dans de nombreuses applications et aux monographies par Samorodnitsky et Taqqu [74] et par Embrechts et Maejima [27] pour des expositions complètes sur l'autosimilaire processus.
Considérons $(\xi_n), n \in \mathbb{Z}$ *une séquence gaussienne stationnaire avec un moyen zéro* 0 *et une variance* 1 *telle que sa fonction de corrélation satisfait*

$$r(n) := \mathbb{E}(\xi_0\xi_n) = n^{\frac{2H-2}{k}}\mathbf{L}(n)$$

avec $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ *et* $\mathbf{L}$ *est une fonction variant lentement à l'infini. Notons par* $\mathbb{H}_m(x)$ *le polynôme de Hermite de degré* m *donnée par* $\mathbb{H}_m(x) = (-1)^m \exp\frac{x^2}{2}\frac{d^m}{dx^m}\exp\frac{-x^2}{2}$. *Soit* g *une fonction telle que* $\mathbb{E}(g(\xi_0)) = 0$ *et* $\mathbb{E}(g(\xi_0)^2) < \infty$.
Supposons que g *admet l'expansion suivante dans les polynômes Hermite*

$$g(x) = \sum_{j\geq 0} c_j\mathbb{H}_j, \qquad c_j = \frac{1}{j!}\mathbb{E}(g(\xi_0\mathbb{H}_j(\xi_0)))$$

alors

$$k = minj;\, c_j \neq 0.$$

Puisque $\mathbb{E}(g(\xi_0)) = 0$*, nous avons* $k \geq 0$*. Le théorème de limite non centrale dit que*

$$\frac{1}{nH}\sum_{j=1}^{[nH]} g(\xi_j)]$$

converge au sens de distribution en dimension finie lorsque $n \longrightarrow \infty$ *vers le processus*

$$Z_H^k(t) = c(H,k)\int_{\mathbb{R}^K}\int_0^t \left(\prod_{j=1}^{k}(s-y_i)_+^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1-H}{k}\right)}\right) dsdB(y_1)...dB(y_k) \tag{IV.1}$$

où $x_+ = \max(x,0)$ *et l'intégrale ci-dessus est une intégrale stochastique de Wiener-Itô par rapport à un Mouvement Brownien* $B(y)_{y\in\mathbb{R}}$*(voir [66] pour la définition). La constante* $c(H,k)$ *est positive et elle sera prise tel que* $\mathbb{E}(Z(1)^2) = 1$*. Le processus* $(Z_H^k(t)_{t\geq 0}$ *est appelé processus de Hermite et il est H-auto similaire dans le sens que pour tout* $c > 0$*,* $((Z_H^k(ct) =^d (c^H Z_H^k(t)$*, où* $=^d$ *signifie l'équivalence de toutes les distributions de dimensions finies , et il a des incréments stationnaires. Quand* $k = 1$ *le processus donné par IV.1 n'est rien d'autre que le mouvement Brownien fractionnaire (MBF) avec paramètre de Hurst* $H \in (\frac{1}{2}, 1)$*. Pour* $k \geq 2$ *le processus n'est pas gaussien. Si* $k = 2$ *alors le processus IV.1 est connu comme Processus de Rosenblatt (il a en fait été nommé ainsi par Taqqu dans [87]). Le mouvement Brownien fractionnaire est bien sûr le processus le plus étudié dans la classe des processus de Hermite en raison de son importance significative dans la modélisation. Un calcul stochastique à son égard a été intensivement développé au cours de la dernière décennie. Nous nous référons, entre autres, à [5, 6, 25, 32].*
Outre ces applications plus ou moins pratiques du processus de Rosenblatt, notées dans la suite par Z, notre motivation est également théorique ; cela vient du récent intérêt intense de pousser plus loin le calcul stochastique par rapport à des processus intégrateurs de plus en plus généraux. Nous pensons que ce processus constitue un exemple intéressant et instructif où les techniques récemment développées du calcul stochastique généralisé peuvent trouver un banc d'essai important. Nous mentionnons également que, le processus n'étant pas gaussien, plusieurs idées nouvelles nécessaire pour développer le calcul (par exemple pour prouver sa forme intégrale stochastique sur un intervalle fini ou pour utiliser un calcul de type divergence). Dans cette section, nous analyserons certaines propriétés de base du processus de Rosenblatt ; en particulier nous sommes intéressés dans sa représentation comme intégrale stochastique sur un intervalle fini. Comme nous l'avons dit, ce processus est obtenu en prenant $k = 2$ *dans la relation IV.1*

$$Z_2(t) := Z(t) = a(H)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t (s-y_1)_+^{\left(-\frac{2-H}{2}\right)}(s-y_2)_+^{\left(-\frac{2-H}{2}\right)}\right) dsdB(y_1)dB(y_2) \tag{IV.2}$$

$(B(y),\ y \in \mathbb{R})$ *est le mouvement Brownien standard sur* $\mathbb{R}$*.* $a(H)$ *est une constante de normalisation positive. Il résulte en fait de [58] que*

$$a(H)^2 = \left(\frac{\beta(\frac{H}{2}, H-1)^2}{2H(2H-1)}\right)^{-1}$$

Puisque notre principal intérêt consiste dans la construction du calcul stochastique par rapport au processus Z, la représentation IV.3 n'est pas très commode; comme dans le cas MBF, nous aimerions représenter Z_t comme une intégrale stochastique par rapport à un mouvement Brownien à intervalle de temps $[0, T]$. Rappelons que le MBF avec $H > \frac{1}{2}$ peut être écrit comme

$$B_t^H = \int_0^t K^H(t,s)dWs \tag{IV.3}$$

$(W_t, t \in [0,T])$ *est le processus standard de Wiener et*

$$K^H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} dWs \tag{IV.4}$$

Avec $t > s$ et

$$c_H = \left(\frac{2H(2H-1)}{\beta(\frac{H}{2}, H-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{IV.5}$$

A noter que pour prouver la représentation IV.3 (du moins en droit) il suffit de voir que le bon membre a le même covariance R dans le MBF, sinon, on peut facilement voir à partir de l'expression du noyau K que le membre droit en IV.3 est H-auto similaire avec des incréments stationnaires et en conséquence il ne peut être rien d'autre qu'un mouvement Brownien fractionnaire avec le paramètre H. Puisque le processus de Rosenblatt n'est pas gaussien, la preuve dans son cas d'une représentation similaire à IV.3 a besoin d'une démonstration supplémentaire; en fait, nous avons la proposition suivante :

Proposition IV.3.1 *Soit K le noyau dans IV.3 et soit $Z(t)_{t\in[0,T]}$ un processus de Rosenblatt de paramètre H. Alors nous avons*

$$Z_2(t) = d(H) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t (s-y_1)_+^{\left(-\frac{2-H}{2}\right)} (s-y_2)_+^{\left(-\frac{2-H}{2}\right)} d\mu \right) dB(y_1)dB(y_2) \tag{IV.6}$$

$(B_t, t \in [0,T])$ *est le mouvement Brownien,*

$$H' = \frac{H+1}{2} \tag{IV.7}$$

et

$$d_H = \left(\frac{H}{2H(2H-1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{IV.8}$$

Remarque IV.3.1
- *i La représentation ci-dessus n'a pas été prouvée auparavant. Ce fait n'est pas surprenant puisque même la représentation correspondante du MBF en utilisant le noyau de K^H est assez nouveau (c'est dû à [65]).*
- *ii La constante $d(H)$ est une constante de normalisation, elle a été choisie de telle sorte que $\mathbb{E}(Z(t)Z(s)) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.*

En effet

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z(t)Z(s)) &= 2d(H)^2 \int_0^{t\wedge s}\int_0^{t\wedge s} dy_1 dy_2 \\
&\times \left(\int_{y_1\vee y_2}^{t}\int_{y_1\vee y_2}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_2)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\nu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\nu,y_2)d\mu d\nu \right) \\
&= 2d(H)^2 \int_0^{t\wedge s}\int_0^{t\wedge s} d\mu d\nu \left(\int_{y_1\vee y_2}^{t}\int_{y_1\vee y_2}^{s} \frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_2) \right) \\
&= 2d(H)^2(H'(2H'-1))^2 \int_0^t\int_0^s |\mu-\nu|^{2H-2} d\mu d\nu = \mathcal{R}(s,t)
\end{aligned}
$$

iii On peut voir sans difficulté que le processus

$$
Z'_H(t) := 2d(H)^2 \int_0^t\int_0^t dy_1 dy_2 \left[\int_{y_1\vee y_2}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_2)d\mu \right] dB(y_1)dB(Y_2)
$$

définit un processus H-auto similaire à incréments stationnaires. En effet, pour tout $c > 0$

$$
\begin{aligned}
Z'(ct) &= \int_0^{ct}\int_0^{ct} dy_1 dy_2 \left[\int_{y_1\vee y_2}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_2)d\mu \right] dB(y_1)dB(Y_2) \\
&= \int_0^{ct}\int_0^{ct} dy_1 dy_2 \left[\int_{\frac{y_1}{c}\vee\frac{y_2}{c}}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(c\mu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(c\mu,y_2)d\mu \right] dB(y_1)dB(y_2) \\
&= \int_0^{t}\int_0^{t} dy_1 dy_2 \left[\int_{y_1\vee y_2}^{t} \frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_2)d\mu \right] dB(cy_1)dB(cy_2)
\end{aligned}
$$

et puisque $B(cy_1) =^{(d)} c^{\frac{1}{2}}B(y)$ *et* $\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(c\mu,y_i) = c^{H'-\frac{3}{2}}\frac{\partial K^{H'}}{\partial\mu}(\mu,y_i)$ *on obtient* $Z'(ct) =^{(d)} c^H Z'_H(t)$
Le fait que Z' *a des incréments stationnaires découle de la relation*

$$
K^{H'}(t+h,s)K^{H'}(t,s) = K^{H'}(ts,h)
$$

pour tout $s,t \in [0,T]$ *;* $s < t$ *et* $h > 0$*.*
À partir de maintenant, nous utiliserons la version du processus de Rosenblatt donnée par le côté droit de IV.6.

Nous terminerons cette section en prouvant que le processus de Rosenblatt possède une propriété similaire au MBF, c'est-à-dire qu'elle peut être approximée par une séquence de semimartingales (ici en fait, puisque $H > \frac{1}{2}$ *, par une séquence de processus de variation bornés). Dans le cas MBF, la propriété est héritée par l'intégrale de divergence (voir [5, 8, 18]) ; ce fait peut être utilisé pour construire des modèles financiers avec le processus de Rosenblatt comme bruit (voir [8]). L'observation de base est que, si l'on échange formellement les intégrales stochastique et les* *intégrales de Lebesgue dans IV.6, on obtient*

$$Z(t) = \int_0^t \int_0^\mu \int_0^\mu \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2) d\mu \right] dB(cy_1) dB(cy_2)$$

mais l'expression ci-dessus n'aura pas de sens car le noyau $\frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1)\frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2)$ *n'appartient pas à* $L^2([0,T]^2)$ *puisque la dérivée partielle* $\frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1)$ *se comporte sur la diagonale comme* $(\mu - y)^{\frac{H-2}{2}}$ *Définissons, pour tout* $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} Z^\epsilon(t) &= d(H) \int_0^t \int_0^t dy_1 dy_2 \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_2) d\mu \right] dB(y_1) dB(Y_2) \\ &= \int_0^t \left(\int_0^\mu \int_0^\mu \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_2) dB(y_1) dB(y_2) \right) d\mu \\ &= \int_0^t A_\epsilon(\mu) d\mu \end{aligned}$$

Puisque $A_\epsilon \in L^2([0,T] \times \Omega)$ *pour tout* $\epsilon > 0$ *et il est adapté, il s'ensuit que le processus*Z^ϵ *est une semi martingale.*

Proposition IV.3.2 *Pour tout* $t \in [0,T], Z^\epsilon(t) \longrightarrow Z(t)$ *dans*$L^2(\Omega)$.

Preuve :

$$\begin{aligned} Z^\epsilon(t) - Z(t) &= \int_0^t \int_0^t dB(y_1) dB(Y_2) \\ &\times \left(\int_{y_1 \vee y_2}^t \left(\frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2) \right) d\mu \right) \\ &= \int_0^t \left(\int_0^\mu \int_0^\mu \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_2) dB(y_1) dB(y_2) \right) d\mu \\ &= \int_0^t A_\epsilon(\mu) d\mu \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z^\epsilon(t) - Z(t))^2 = 2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t dy_1 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^t \int_{y_1 \vee y_2}^t d\nu d\mu \\ \times (\frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2)) \\ \times (\frac{\partial K^{H'}}{\partial \nu}(\nu + \epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \nu}(\nu + \epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\nu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \nu}(\nu, y_2)). \end{aligned}$$

Il est clair que la quantité $\frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu + \epsilon, y_2) - \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2)$ *tend vers* 0 *lorsque* $\epsilon \longrightarrow 0$ *pour tout* μ, y_1 *et* y_2 *et le résultat est vérifié en utilisant le théorème de* *la convergence dominée.* $\square$

IV.3.1 Intégrales de Wiener par rapport au processus de Rosenblatt

La structure de covariance du processus de Rosenblatt permet de construire des intégrales de Wiener par rapport à celui-ci. Nous nous référons à Maejima et Tudor [58] pour la définition des intégrales de Wiener par rapport à Hermite général et à Kruket al. [45] pour un contexte plus général. Rappelons les points principaux et traduisons cette construction dans notre contexte. On note que

$$Z(t) = \int_0^T \int_0^T I(1_{[0,t]})(y_1, y_2) dB(y_1) dB(y_2)$$

I est un opérateur défini sur l'ensemble des fonctions $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et prend ses valeurs dans l'ensemble des fonctions* $f : [0, T]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *et donné par*

$$If(y_1 y_2) = d(H) \int_{y_1 \vee y_2}^T f(\mu) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2) d\mu \qquad \text{(IV.9)}$$

Si f *est un élément de* ϵ *l'ensemble des fonctions étagées sur* $[0, T]$ *de la forme*

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}, \qquad t_i \in [0, t] \qquad \text{(IV.10)}$$

alors nous définissons naturellement son intégrale de Wiener par rapport à Z par

$$\int_0^T f(\mu) dZ(\mu) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i Z(t_i) - Z(t_{i+1}) = \int_0^T \int_0^T I(f)(y_1, y_2)^2 dB(y_1) dB(y_2) \qquad \text{(IV.11)}$$

Soit A *l'ensemble des fonctions* f *telles que*

$$\|f\|_H^2 = \int_0^T \int_0^T I(f)(y_1, y_2)^2 dy_1 dy_2 < \infty \qquad \text{(IV.12)}$$

On peut voir que

$$\begin{aligned}
\|f\|_H^2 &= 2d(H)^2 \int_0^T \int_0^T \left(\int_{y_1 \vee y_2}^T f(\nu) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2) \right)^2 dy_1 dy_2 \\
&= 2d(H)^2 \int_0^T \int_0^T dy_1 dy_2 \int_{y_1 \vee y_2}^T \int_{y_1 \vee y_2}^T d\mu d\nu \\
&\quad \times f(\mu) f(\nu) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_2) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \nu}(\nu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \nu}(\nu, y_2) \\
&= 2d(H)^2 \int_0^T \int_0^T \left(\int_0^{\mu \wedge \nu} \frac{\partial K^{H'}}{\partial \mu}(\mu, y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial \nu}(\nu, y_1) \right)^2 d\mu d\nu \\
&= H(H-2) \int_0^T \int_0^T f(\mu) f(\nu) |\mu - \nu|^{2H-2} d\nu d\mu.
\end{aligned}$$

Nous pouvons démontrer [45]ou [58] que l'application

$$f \longrightarrow \int_0^T f(\mu) dZ(\mu)$$

définit une isométrie de ϵ *dans* $\mathbb{L}^2(\Omega)$ *et il peut être étendu par continuité à une isométrie de* A *dans* $\mathbb{L}^2(\Omega)$ *car* ϵ *est dense dans* A *(voir [68]). Nous appellerons cette extension l'intégrale de Wiener de* $f \in A$ *par rapport à* Z*.*

V Contrôlabilité approximative des systèmes stochastiques impulsifs neutres généraux

De nombreux systèmes physiques tels que les systèmes quantiques, les systèmes de mécanique des fluides, etc. représenté par un nombre infini de degrés de liberté et leur évolution suit par une équation aux dérivées partielles. La théorie du contrôle, à savoir problèmes de contrôlabilité pour les équations aux dérivées partielles est un description mathématique de telles situations. La contrôlabilité a été largement étudiée en déterminisme non linéaire systèmes dans un espace de dimension finie ([11], [41]). Le problème de la contrôlabilité des systèmes stochastiques linéaires a été étudié par divers auteurs [53]

. La contrôlabilité des systèmes stochastiques non linéaires dans des espaces de dimension finie a été étudié par de nombreux auteurs [56], [13]).

Les équations différentielles stochastiques (EDS) en dimensions infinies ont beaucoup d'attention ces dernières années et les résultats de l'existence peuvent être trouvé dans plusieurs livres, pour la dimension infinie, le lecteur peut se référer ([23], [70]). De nombreux auteurs ont prouvé la contrôlabilité des systèmes différentiels en supposant que l'opérateur de contrôlabilité a un inverse induit sur un espace quotient [72]. Cependant, si le semi-groupe associé au système est compact, alors l'opérateur de contrôlabilité est aussi compacte, et par conséquent, l'inverse induit n'existe pas dans l'espace d'état de dimension infinie. Li et al. [48] ont étudié la contrôlabilité complète des systèmes différentiels du fonctionnel impulsif de premier ordre dans l'espace de Banach ; Chang [19] a étudié la contrôlabilité complète des systèmes différentiels fonctionnels impulsifs à retard infini ; Sakthivel et al. [71] a discuté de la contrôlabilité complète des systèmes différentiels impulsifs non linéaires du second ordre. Cependant, le problème de contrôlabilité complète des systèmes stochastiques intégro-différentiels impulsifs n'a pas encore été étudiée dans l'espace de dimension infini.

Ces dernières années, de nombreux systèmes en physique et en biologie présentent des comportement dynamique dû à des sauts brusques à certains instants de l'évolution traiter. Des équations différentielles impliquant des effets impulsifs se produisent dans de nombreux applications : pharmacocinétique, rayonnement d'ondes électromagnétiques, dynamique des populations, systèmes biologiques, augmentation brutale du glycérol dans culture fed-batch, biotechnologie, nano-électronique ([50], [17], [48]). Dans ces modèles, les processus sont caractérisés par le fait qu'ils subissent des changements brusques d'état à certains moments du temps entre des intervalles d'évolution continue [83]. Pour la théorie de base des équations différentielles impulsives le lecteur peut se référer à Samoilenko et Perestyuk [73]. Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous donnons des définitions, des résultats préliminaires *et prouvons les lemmes nécessaires. Dans la section 3, nous énonçons et prouvons notre résultat principal sur la contrôlabilité approchée de équation différentielle fonctionnelle stochastique dans les espaces de Hilbert. En supposant que le contrôlabilité approximative du système déterministe correspondant. Les la compacité du semi-groupe n'est pas supposée et des conditions suffisantes du contrôlabilité complète sont formulés et prouvés en utilisant la technique du point fixe , dans la section 4, nous avons donné un exemple pour illustrer le résultat.*

V.1 Préliminaires et description du système

Dans cette section, nous introduisons les définitions des notations et les faits préliminaires qui sont utilisés dans tout le chapitre. $\mathcal{L}(X,Y) :=$ *L'espace de tout opérateurs linéaires bornés d'un espace de Hilbert* X *à un espace de Hilbert* Y. *Nous considérons trois espaces séparables réels de Hilbert* H, E *et* U.

- $(\Omega, \mathcal{F}, P) :=$ *L'espace de probabilité complet avec une filtration* $\{\mathcal{F}_t \mid t \in [0,T]\}$ *satisfaire les conditions habituelles.*
- *Soit* $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *une base orthonormale de E. Supposons que* $\{w(t) : t \geq 0\}$ *est un processus de Wiener cylindrique à valeurs dans E avec un opérateur de covariance nucléaire de trace finie* $Q \geq 0$, *rappelons que* $trQ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ *(tr est la trace de l'opérateur), qui satisfit* $Qe_n = \lambda e_n$. *Alors, en fait,* $w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} w_n(t) e_n$, *avec* $\{w_n(t)\}_{n\geq 1}$ *sont mutuellement des processus de Wiener standard unidimensionnels indépendants et* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^w$, *où* $\mathcal{F}_t^w$ *est le σ-algèbre engendré par* $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$ *et* $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
- *Soit* $\varphi \in \mathcal{L}(E,H)$ *et définissons* $\|\varphi\|_Q^2 = tr\,[\varphi Q \varphi^*] = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sqrt{\lambda_n} \varphi e_n \right\|^2$. *Si* $\|\varphi\|_Q < \infty$, *alors* φ *est appelé un opérateur Q-Hilbert–Schmidt. Soit* $\mathcal{L}_Q(E,H)$ *l'espace de tous les opérateurs Q-Hilbert–Schmidt* $\varphi : E \to H$. *La complétude* $\mathcal{L}_Q(E,H)$ *de* $\mathcal{L}(E,H)$ *par rapport à la topologie induite par la norme* $\|\varphi\|_Q^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle$ *est un espace de Hilbert.*
- $L_2(\mathcal{F}_T, H) :=$ *l'espace de Hilbert de tous les* $\mathcal{F}_T-$*mesurables, carrées intégrables à valeurs dans l'espace Hilbert* H.
- $L_2^{\mathcal{F}}([0,T], H) :=$ *est l'espace de Hilbert de tous les processus carrées intégrables et* $\mathcal{F}_t-$*adaptés à valeurs dans* H.
- $L_2([0,T], U) :=$ *est l'espace de Hilbert des fonctions contrôles admissibles pour un espace de Hilbert séparable* U.
- $C([0,T]; L_2(\Omega, H)) := \{x : [0,T] \to L_2(\Omega, H) : x(t)$ *est continu partout sauf pour certains* t_k *avec* $x(t_k^-)$ *et* $x(t^+)$ *existe et* $x(t_k^-) = x(t_k)$, $k = 1, ...r.\ r \in \mathbb{N}\}$.
- $\mathbf{H}_2 :=$ *Le sous espace fermé dans* $C([0,T]; C([0,T]; L_2(\Omega, H)))$ *composé des processus* $\mathcal{F}_t$*-adaptés à valeurs dans* $Hx(t)$. $\mathbf{H}_2$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|x\|_{\mathbf{H}_2} = \left(\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E} \, \|x(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons le système stochastique linéaire suivant

$$\begin{cases} dx(t) = [Ax(t) + Bu(t)]\,dt + \sigma(t)dw(t), \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{V.1}$$

Introduisons maintenant les opérateurs suivants

— *L'opérateur* $L_0^T \in \mathcal{L}\left(L_2([0,T],U), L_2(\Omega,H)\right)$ *est défini par*

$$L_0^T = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds.$$

Clairement, l'opérateur adjoint $\left(L_0^T\right)^* : L_2(\Omega,H) \to L_2([0,T],U)$ *est défini par*

$$(L_0^T)^* z = B^* S^*(T-t)\mathbf{E}(z \mid \mathcal{F}_t).$$

— *L'opérateur de la contrôlabilité* Π_0^T *associé à (V.1) est*

$$\Pi_s^T(.) = \int_s^T S(T-t)BB^*S^*(T-t)\mathbf{E}(. \mid \mathcal{F}_t)dt,$$

qui appartient à $\mathcal{L}\left(L_2(\mathcal{F}_T,H), L_2(\mathcal{F}_T,H)\right)$ *et la matrice de contrôlabilité* $\Gamma_s^T \in \mathcal{L}(H,H)$

$$\Gamma_s^T = \int_s^T S(T-t)BB^*S^*(T-t)dt, \quad 0 \le s \le t.$$

Dans ce travail, nous considérons le système intégrodifférentiel stochastique semi linéaire impulsif suivant

$$\begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt \\ \qquad +F_1\left(t, x(t), f_{1,1}(\eta x(t)), f_{1,2}(\delta x(t)), f_{1,3}(\xi x(t))\right)dt \\ \qquad +F_2\left(t, x(t), f_{2,1}(\eta x(t)), f_{2,2}(\delta x(t)), f_{2,3}(\xi x(t))\right)dw(t), \\ t \in [0,T],\ t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1,2,...,r.\ r \in \mathbb{N} \\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases} \tag{V.2}$$

dans un espace de Hilbert réel séparable H, et, pour $i = 1,2$

$$\begin{aligned} f_{i,1}(\eta x(t)) &= \int_0^t f_{i,1}(t,s,x(s))ds, \\ f_{i,2}(\delta x(t)) &= \int_0^T f_{i,2}(t,s,x(s))ds, \\ f_{i,3}(\xi x(t)) &= \int_0^t f_{i,3}(t,s,x(s))dw(s). \end{aligned}$$

Ici, A est un opérateur fermé, densément défini, générateur d'un semi-groupe analytique $\{S(t),\ t \ge 0\}$ *on H, B est un opérateur de U dans H.*

$$\begin{aligned} &F_1 : J \times H \times H \times H \times H \to H, && f_{i,1}, f_{i,2} : J \times J \times H \to H,\ I_k : H \to H, \\ &F_2 : J \times H \times H \times H \times H \to \mathcal{L}_Q(E,H),\ ' && f_{i,3} : J \times J \times H \to \mathcal{L}_Q(E,H). \end{aligned}$$

De plus, t_k satisfit $0 = t_0 < t_1 < ... < t_r < T$, $x(t_k^+)$ et $x(t_k^-)$ représentent la limite droite et gauche de $x(t)$ dans $t = t_k$. Et $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ représente l'impulsion à l'état x au temps t_k, où I_k détermine la taille de l'impulsion. La valeur initiale x_0 est une variable aléatoire carrée intégrable $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans H et indépendant de w. Le système (V.2) est sous une forme très générale et il couvre de nombreux modèles possibles avec diverses définitions de $f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{1,3}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$, $f_{2,3}$.
Dans ce chapitre, nous adoptons la définition suivante de solution douce de système (V.2),

$$\begin{aligned} x(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)\left(Bu(s) + (\widehat{F}_1 x)(s)\right) ds \\ &+ \int_0^t S(t-s)(\widehat{F}_2 x)(s) dw(s) \\ &+ \sum_{0<t_k<t} S(t-t_k) I_k(x(t_k^-)), \end{aligned} \tag{V.3}$$

avec $u \in L_2([0,T],U)$ et pour $i = 1,2$

$$(\widehat{F}_i x)(t) = F_i\left(t, x(t), f_{i,1}(\eta x(t)), f_{i,2}(\delta x(t)), f_{i,3}(\xi x(t))\right).$$

Définition V.1.1 *Le système (V.2) est approximativement contrôlable sur $[0,T]$ si : $(\bar{\mathcal{R}}_T(x_0)) = L_2(\Omega, H)$. Ici*

$$\mathcal{R}_t(x_0) = \{x(t,x_0,u) : u \in L_2([0,T],U)\},$$

avec $x(t,x_0,u)$ est la solution de (V.2) correspond à $x_0 \in H$ et $u(.) \in L_2([0,T],U)$. $\bar{\mathcal{R}}_t(x_0)$ est la clôture de $\mathcal{R}_t(x_0)$.

Pour la preuve du résultat principal, nous imposons les conditions suivantes aux données du problème

(H1) A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique d'opérateurs linéaires bornés $\{S(t),\ t \geq 0\}$ dans H tel que $\|S(t)\|^2 \leq l_1$, pour une constante $l_1 > 0$.

(H2) Les fonctions $F_1, F_2, f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{1,3}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$ et $f_{2,3}$ sont continues et ils exitent $L_1, K_1, N, L_2, K_2 > 0$ for $x_h, y_h, v_h, z_h \in H$, $h = 1,2$ et $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} &\|F_1(t,x_1,y_1,v_1,z_1) - F_1(t,x_2,y_2,v_2,z_2)\|^2 + \|F_2(t,x_1,y_1,v_1,z_1) - F_2(t,x_2,y_2,v_2,z_2)\|_Q^2 \\ &\leq L_1\left(\|x_1-x_2\|^2 + \|y_1-y_2\|^2 + \|v_1-v_2\|^2 + \|z_1-z_2\|^2\right), \\ &\left\|f_{i,j}(t,s,x_1(s)) - f_{i,j}(t,s,x_2(s))\right\|^2 + \|f_{i,3}(t,s,x_1(s)) - f_{i,3}(t,s,x_2(s))\|_Q^2 \leq K_1\|x_1-x_2\|^2, \\ &\|F_1(t,x_1,y_1,v_1,z_1)\|^2 + \|F_2(t,x_1,y_1,v_1,z_1)\|_Q^2 \leq N \\ &\|F_1(t,x_1,y_1,v_1,z_1)\|^2 + \|F_2(t,x_1,y_1,v_1,z_1)\|_Q^2 \leq L_2\left(1 + \|x_1\|^2 + \|y_1\|^2 + \|v_1\|^2 + \|z_1\|^2\right), \\ &\left\|f_{i,j}(t,s,x_1)\right\|^2 + \|f_{i,3}(t,s,x_1)\|_Q^2 \leq K_2\left(1 + \|x_1\|^2\right). \end{aligned}$$

(H3) Il existent des constants d_k, $q_k > 0$, $r \in \mathbb{N}$ tels que, pour $x, y \in H$

$$\begin{aligned} &\|I_k(x) - I_k(y)\|^2 \leq d_k\|x-y\|^2, \quad k = 1,...,r, \\ &\|I_k(x)\|^2 \leq q_k\left(1 + \|x\|^2\right), \quad k = 1,...,r. \end{aligned}$$

(HA) Le système (V.1) est approximatement contrôlable sur $[0, T]$.

Lemme V.1.1 *Pour tout* $\bar{x}_T \in L_2(\Omega, H)$ *ils existent* $\sigma \in L_2^{\mathcal{F}}(\Omega, L_2(0, T; \mathcal{L}(E, H))$ *tels que*

$$\bar{x}_T = \mathbf{E}(\bar{x}_T) + \int_0^T \sigma(s) dw(s).$$

Les résultats suivants seront utilisés tout au long de ce chapitre.

Lemme V.1.2 *Sous la condition (H2), ils existent des constants réels positifs* $M_1, \hat{M}_1 > 0$ *tels que pour* $x,\ y \in \mathbf{H}_2$*, on a*

$$\int_0^t \mathbf{E} \left\| (\widehat{F}_i x)(s) - (\widehat{F}_i y)(s) \right\|^2 ds \leq M_1 \int_0^t \mathbf{E} \left\| x(s) - y(s) \right\|^2 ds, \tag{V.4}$$

$$\int_0^t \mathbf{E} \left(\left\| (\widehat{F}_i x)(s) \right\|^2 ds \right) \leq \hat{M}_1 \left(1 + \int_0^t \mathbf{E} \left\| x(s) \right\|^2 ds \right). \tag{V.5}$$

Preuve : *Premièrement, nous allons faire la preuve de l'inégalité (V.4), puisque (V.5) peut être établi de la même manière. En utilisant l'inégalité de Hölder et l'hypothèses (H2), on a*

$$\begin{aligned} \left\| (\widehat{F}_i x)(t) - (\widehat{F}_i y)(t) \right\|^2 &\leq 3L_1 \Big(\| x(t)) - y(t)) \|^2 + \| f_{i,1}(\eta x(t)) - f_{i,1}(\eta y(t)) \|^2 \\ &+ \| f_{i,2}(\delta x(t)) - f_{i,2}(\delta y(t)) \|^2 + \| f_{i,3}(\xi x(t)) - f_{i,3}(\xi y(t)) \|_Q^2 \Big), \\ &\leq 3L_1 (1 + 2T^2 K_1 + 4T K_1) \| x(t) - y(t) \|^2 . \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\int_0^t \mathbf{E} \left\| (\widehat{F}_i x)(s) - (\widehat{F}_i y)(s) \right\|^2 ds \leq 3L_1 T(1 + 2T^2 K_1 + 4T K_1) \int_0^t \mathbf{E} \left\| x(s) - y(s) \right\|^2 ds,$$

avec $M_1 = 3L_1 T(1 + 2T^2 K_1 + 4T K_1)$.$\square$
Pour tout $\alpha > 0$ *et* $x_T \in L_2(\Omega, H)$*, nous définissons la fonction contrôle*

$$\begin{aligned} u^\alpha(t, x) &= B^* S^*(T - t)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} \left(\mathbf{E}(x_T) - S(T) x_0 \right) \\ &+ B^* S^*(T - t) \int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} \sigma(s) dw(s) \\ &- B^* S^*(T - t) \int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} S(T - s) (\widehat{F}_1 x)(s) ds \\ &- B^* S^*(T - t) \int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} S(T - s) (\widehat{F}_2 x)(s) dw(s) \\ &- B^* S^*(T - t)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} \sum_{k=1}^r S(T - t_k) I_k(x(t_k^-)). \end{aligned}$$

Lemme V.1.3 *Ils existent des constants réels positifs* $M_2,\ \hat{M}_2 > 0$ *tels que, pour tous* $x,\ y \in \mathbf{H}_2$ *on a*

$$\mathbf{E} \left\| u^\alpha(t, x) - u^\alpha(t, y) \right\|^2 \leq \frac{M_2}{\alpha^2} \int_0^t \mathbf{E} \left\| x(s) - y(s) \right\|^2 ds, \tag{V.6}$$

$$\mathbf{E}\left\|u^{\alpha}(t,x)\right\|^{2} \leq \frac{\hat{M}_{2}}{\alpha^{2}}\left(1+\int_{0}^{t}\mathbf{E}\left\|x(s)\right\|^{2}ds\right). \tag{V.7}$$

Preuve : *On ne prouvera que la première inégalité (V.6), puisque la preuve de la deuxième (V.7) est similaire. Soit* $x,\ y \in \mathbf{H}_2$*, on a*

$$\mathbf{E}\left\|u^{\alpha}(t,x)-u^{\alpha}(t,y)\right\|^{2} \leq 3\mathbf{E}\left\|B^{*}S^{*}(T-t)\int_{0}^{t}(\alpha I+\Gamma_{s}^{T})^{-1}S(T-s)\left[(\widehat{F}_{1}x)(s)-(\widehat{F}_{1}y)(s)\right]ds\right\|^{2}$$
$$+3\mathbf{E}\left\|B^{*}S^{*}(T-t)\int_{0}^{t}(\alpha I+\Gamma_{s}^{T})^{-1}S(T-s)\left[(\widehat{F}_{2}x)(s)-(\widehat{F}_{2}y)(s)\right]dw(s)\right\|^{2}$$
$$+3\mathbf{E}\left\|B^{*}S^{*}(T-t)(\alpha I+\Gamma_{0}^{T})^{-1}\sum_{k=1}^{r}S(T-t_{k})\left[I_{k}(x(t_{k}^{-}))-I_{k}(y(t_{k}^{-}))\right]\right\|^{2}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, le lemme (V.1.2) et les hypothèses sur les données, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\|u^{\alpha}(t,x)-u^{\alpha}(t,y)\right\|^{2} &\leq \frac{3}{\alpha^{2}}\left\|B\right\|^{2}l_{1}^{2}\\ \times\left((T+4)M_{1}\int_{0}^{t}\mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^{2}ds+r\sum_{k=1}^{r}\mathbf{E}\left\|I_{k}(x(t_{k}^{-}))-I_{k}(y(t_{k}^{-}))\right\|^{2}\right)&\\ &\leq \frac{3}{\alpha^{2}}\left\|B\right\|^{2}l_{1}^{2}\left((T+4)M_{1}+r(\sum_{k=1}^{r}d_{k})\right)\times\int_{0}^{t}\mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^{2}ds,\\ &=\frac{M_{2}}{\alpha^{2}}\int_{0}^{t}\mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^{2}ds,\end{aligned}$$

avec $M_{2}=3\left\|B\right\|^{2}l_{1}^{2}\left((T+4)M_{1}+r(\sum_{k=1}^{r}d_{k})\right)$. *Ceci termine la preuve.* $\square$

V.2 Contrôlabilité approximative

Dans cette section, nous présentons notre résultat principal sur la contrôlabilité approchée de système (V.2). En supposant la contrôlabilité approximative du système déterministe correspondant. Pour tout :$\alpha > 0$*, on définit l'opérateur :* $F_{\alpha} : \mathbf{H}_{2} \to \mathbf{H}_{2}$ *par*

$$(F_{\alpha}x)(t)=S(t)x_{0}+\int_{0}^{t}S(t-s)\left(Bu^{\alpha}(s,x(s))+(\widehat{F}_{1}x)(s)\right)ds$$
$$+\int_{0}^{t}S(t-s)(\widehat{F}_{2}x)(s)dw(s)+\sum_{0<t_{k}<t}S(t-t_{k})I_{k}(x(t_{k}^{-})).$$

Les deux lemmes suivants sont énoncés afin de prouver le théorème ci-dessus

Lemme V.2.1 *Pour tout* $x \in \mathbf{H}_{2}$*,* $(F_{\alpha}x)(t)$ *est continue sur l'intervalle* $[0,T]$.

Preuve : *Soit* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. *Alors pour tout* $x \in \mathbf{H}_2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t_2) - (F_\alpha x)(t_1)\right\|^2 &\leq 5\mathbf{E}\left\|(S(t_2) - S(t_1))\, x_0\right\|^2 \\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2 - s)Bu^\alpha(s, x(s))ds - \int_0^{t_1} S(t_1 - s)Bu^\alpha(s, x(s))ds\right\|^2 \\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2 - s)(\widehat{F}_1 x)(s)ds - \int_0^{t_1} S(t_1 - s)(\widehat{F}_1 x)(s)ds\right\|^2 \\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2 - s)(\widehat{F}_2 x)(s)dw(s) - \int_0^{t_1} S(t_1 - s)(\widehat{F}_2 x)(s)dw(s)\right\|^2 \\
&+5\mathbf{E}\left\|\sum_{0<t_k<t_2} S(t_2 - t_k)I_k(x(t_k^-)) - \sum_{0<t_k<t_1} S(t_1 - t_k)I_k(x(t_k^-))\right\|^2, \\
&= J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq 5\left\|(S(t_2) - S(t_1))\right\|^2 \mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2, \\
J_2 &\leq 10\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - s)Bu^\alpha(s, x(s))ds\right\|^2 + 10\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1} \left(S(t_2 - s) - S(t_1 - s)\right) Bu^\alpha(s, x(s))ds\right\|^2, \\
J_3 &\leq 10\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - s)(\widehat{F}_1 x)(s)ds\right\|^2 + 10\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1} \left(S(t_2 - s) - S(t_1 - s)\right)(\widehat{F}_1 x)(s)ds\right\|^2, \\
J_4 &\leq 10\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2 - s)(\widehat{F}_2 x)(s)dw(s)\right\|^2 + 10\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1} \left(S(t_2 - s) - S(t_1 - s)\right)(\widehat{F}_2 x)(s)dw(s)\right\|^2, \\
J_5 &\leq 10r \sum_{t_1<t_k<t_2} \mathbf{E}\left\|S(t_2 - s)I_k(x(t_k^-))\right\|^2 + 10r \sum_{0<t_k<t_1} \mathbf{E}\left\|\left(S(t_2 - s) - S(t_1 - s)\right) I_k(x(t_k^-))\right\|^2.
\end{aligned}$$

On utilise donc la continuité forte de $S(t)$*, ainsi que le théorème de convergence dominé, nous concluons que le membre droit de l'inégalité tend vers zéro car* $t_2 - t_1 \to 0$. *Ainsi, nous concluons que* $(F_\alpha x)(t)$ *est continue à droite dans* $[0, T)$. *A un raisonnement similaire montre qu'il est également continu à gauche dans* $(0, T]$. *Par conséquent, la preuve du lemme est complète.* □

Lemme V.2.2 *L'opérateur* F_α *envoie* $\mathbf{H}_2$ *en lui-même.*

Preuve : *Soit* $x \in \mathbf{H}_2$*, alors on a*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)\right\|^2 &\leq 5\mathbf{E}\left\|S(t)x_0\right\|^2 + 5\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t - s)Bu^\alpha(s, x(s))ds\right\|^2 \\
&+5\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t - s)(\widehat{F}_1 x)(s)ds\right\|^2 + 5\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t_2 - s)(\widehat{F}_2 x)(s)dw(s)\right\|^2 \\
&+5r \sum_{0<t_k<t} \mathbf{E}\left\|S(t - t_k)I_k(x(t_k^-))\right\|^2.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, Lemme (V.1.2) et les hypothèses sur les données, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)\right\|^2 &\leq 5l_1\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2 + 5Tl_1\left\|B\right\|^2\frac{\hat{M}_2}{\alpha^2}\left(1+T\sup_{s\in J}\mathbf{E}\left\|x(s)\right\|^2\right) \\
&+5l_1(T+4)\hat{M}_2\left(1+T\sup_{s\in J}\mathbf{E}\left\|x(s)\right\|^2\right) + 5l_1 r\sum_{k=0}^{r}\mathbf{E}\left\|I_k(x(t_k^-))\right\|^2, \\
&\leq 5l_1\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2 + 5Tl_1\left\|B\right\|^2\frac{\hat{M}_2}{\alpha^2}(1+T\left\|x\right\|^2_{\mathbf{H}_2}) + \left(5l_1(T+4)\hat{M}_2T + 5l_1 r(\sum_{k=1}^{r}q_k)\right)(1+T\left\|x\right\|^2_{\mathbf{H}_2}),
\end{aligned}$$

donc, on obtient que $\|(F_\alpha x)\|^2_{\mathbf{H}_2} < \infty$*. Puisque* $(F_\alpha x)(t)$ *est continue sur* $[0,T]$ *et alors* F_α *envoie* $\mathbf{H}_2$ *en lui même.* □

Preuve du Théorème 1 : *On démontre ce théorème par le théorème classique de point fixe de Banach. Donc, pour tout* $\alpha > 0$ *l'opérateur* F_α *admet un point fixe unique dans* $\mathbf{H}_2$*. Par le Lemme (V.2.2),* F_α *envoie* $\mathbf{H}_2$ *en lui même. Montrer qu'il existe un naturel* n *tel que* F_α^n *est une contraction, soit* $x, y \in \mathbf{H}_2$*, alors pour tout* $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2 &\leq 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)B\left(u^\alpha(s,x(s)) - u^\alpha(s,y(s))\right)ds\right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\left((\widehat{F}_1x)(s)ds - (\widehat{F}_1y)(s)\right)ds\right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\left((\widehat{F}_2x)(s)ds - (\widehat{F}_2y)(s)\right)dw(s)\right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\|\sum_{0<t_k<t_2} S(t-t_k)\left(I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\right)\right\|^2.
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2 &\leq \left(4l_1\left\|B\right\|^2 T\frac{M_2}{\alpha^2} + 4l_1(T+4)M_1 + 4l_1 r(\sum_{k=1}^{r}d_k)\right) \\
&\times\int_0^t\mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds,
\end{aligned}$$

pour tous $x, y \in \mathbf{H}_2$*. On obtient donc une constante réelle positive* $\varphi(\alpha)$ *telle que*

$$\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)-(F_\alpha y)(t)\right\|^2 \leq \varphi(\alpha)\int_0^t\mathbf{E}\left\|x(s)-y(s)\right\|^2 ds. \tag{V.8}$$

pour $0 \leq t \leq T$ *et pour tous* $x, y \in \mathbf{H}_2$*. pour tout entier naturel* n*, il résulte des itérations successives de (V.8) que, sur prendre le dessus* J

$$\left\|(F_\alpha^n x) - (F_\alpha^n y)\right\|^2_{\mathbf{H}_2} \leq \frac{(T\varphi(\alpha))^n}{n!}\left\|x-y\right\|^2_{\mathbf{H}_2}. \tag{V.9}$$

Puisque, pour n suffisamment grand, $\frac{(T\varphi(\alpha))^n}{n!} < 1$*, Nous concluons que* F_α^n *est une contraction stricte sur* $\mathbf{H}_2$ *et donc* F_α *admet un point fixe unique* x_α *dans* $\mathbf{H}_2$*, qui est la solution douce de (V.2).* $\square$
Après avoir obtenu l'existence de la solution douce pour (V.2), on peut étudier les propriétés de contrôlabilité, on obtient le résultat suivant

Théorème V.2.1 *Supposons que les hypothèses (H1)-(H3), (HA) sont vérifiées. Alors le système (V.2) est approximativement contrôlable sur* $[0, T]$*.*

Preuve : *Soit* x_α *la solution de l'équation (V.3), avec* $\mu(t,x) = \mu^\alpha(t,x)$*. En utilisant le théorème de convergence dominée stochastique, il est facile de voir que*

$$\begin{aligned}
x^\alpha(T) = \bar{x}_T &- \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}\left(\mathbf{E}\bar{x}_T - S(T)x_0\right) \\
&+ \alpha \int_0^T (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} S(T-s)(F_1 x^\alpha)(s)ds \\
&+ \alpha \int_0^T (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} S(T-s)\left((F_2 x^\alpha)(s) - \sigma(s)\right) dw(s) \\
&+ \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} \sum_{k=1}^r S(t-t_k) I_k(x^\alpha(t_k^-)).
\end{aligned}$$

par les hypothèses F_1 *et* F_2 *sont uniformément bornés , alors il existe* $\overline{N} > 0$ *tel que*

$$\|(F_1 x^\alpha)(s)\|^2 + \|(F_2 x^\alpha)(s)\|_Q^2 \leq \overline{N},$$

sur $J \times \Omega$*. Alors, il existe une sous suite notée par* $(F_1 x^\alpha)(s)$ *et* $(F_2 x)(s)$ *qui converge faiblement vers* $F_1(s)$ *dans* H*,et* $F_2(s)$ *dans* $\mathcal{L}(U, H)$*. La compacité de* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *implique que* $S(t-s)(F_1 x^\alpha)(s) \to S(t-s)F_1(s)$*,* $S(t-s)(F_2 x^\alpha)(s) \to S(t-s)F_2(s)$ *in* $J \times \Omega$*. D'autre part, par l'hypothèse (HA), l'opérateur* $\alpha(\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} \to 0$ *fortement quand* $\alpha \to 0^+$*, pour tout* $0 \leq s \leq T$ *et de plus* $\left\|\alpha(\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}\right\| \leq 1$*. En utilisant le théorème de la convergence dominée, on obtient*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|x^\alpha(T) - \bar{x}_T\|^2 &\leq 5\left\|\alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}\left(\mathbf{E}\bar{x}_T - S(T)x_0\right)\right\|^2 \\
&+5T\int_0^T \left\|\alpha(\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}\right\|^2 \|S(T-s)\|^2 \mathbf{E}\|(F_1 x^\alpha)(s)\|^2 ds \\
&+5\int_0^T \left\|\alpha(\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}\right\|^2 \|S(T-s)\|^2 \mathbf{E}\|(F_2 x^\alpha)(s)\|^2 ds \\
&+5\left\|\alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}\right\|^2 E\left\|\sum_{k=1}^r S(t-t_k) I_k(x^\alpha(t_k^-))\right\|^2 \\
&+5\int_0^T \left\|\alpha(\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}\sigma(s)\right\|^2 ds \\
&\to 0, \text{ as } \alpha \to 0^+.
\end{aligned}$$

Et nous avons donc la contrôlabilité approximative de (V.2).$\square$

V.3 Exemple

Considérons le système de contrôle classique semi linéaire avec impulsion gouverné par l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} dx(t,z) = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}x(t,z) + b(z)u(t) \\ +G_1\left(t, x(t,z), \displaystyle\int_0^t g_{1,1}(t,s,x(s,z))ds, \int_0^T g_{1,2}(t,s,x(s,z))ds, \int_0^t g_{1,3}(t,s,x(s,z))dw(s)\right) dt \\ +G_2\left(t, x(t,z), \displaystyle\int_0^t g_{2,1}(t,s,x(s,z))ds, \int_0^T g_{2,2}(t,s,x(s,z))ds, \int_0^t g_{2,3}(t,s,x(s,z))dw(s)\right) dw(t), \\ \Delta x(t_k,z) = x(t_k,z), \quad z \in]0,\pi[, \quad k=1,...,r, \\ x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,1], \\ x(0,z) = x_0(z), \quad z \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{V.10}$$

Soit $H = L_2[0,\pi]$, $U = L_2[0,1]$ *et* $x_0 \in L_2[0,\pi]$. *Soit* $A : H \to H,\ Az = z''$ *de domaine* $D(A) = \{\theta \in H : \theta,\ \theta'$ *sont absolument continues,* $\theta'' \in H$ *et* $\theta(0) = \theta(\pi) = 0\}$. *Alors*

$$A\theta = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle \theta, e_n \rangle e_n, \quad \theta \in D(A),$$

avec $e_n(z) = (2/\pi)^{1/2} \sin nz,\ 0 \le z \le \pi,\ n = 1,2,...$*Il est connu que A engendre un semi groupe analytique* $S(t),\ t > 0$ *dans H donné par*

$$S(t)h = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \langle h, e_n \rangle e_n, \quad h \in H,$$

tel que $S(t)$ *satisfit l'hypothèse (H1). Soit* $Bu : [0,1] \to H$ *tel que*

$$(Bu)(z) = b(z)u, \quad 0 \le z \le \pi,\ u \in [0,1],\ b(z) \in L_2[0,\pi],$$

B est un opérateur borné de U dans H.
Ici $G_1, G_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont uniformément bornées et* $g_{ij} : [0,1] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *for* $i = 1,2,\ j = 1,3$. *On suppose que ces fonctions satisfont la condition de Lipschitz et la condition de croissance linéaire. Définissons les fonctions*

$$\begin{matrix} F_1 : J \times H \times H \times H \times H \to H, \\ F_2 : J \times H \times H \times H \times H \to \mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}E; H), \end{matrix}, \quad \begin{matrix} f_{i,1}, f_{i,2} : J \times J \times H \to H, \\ f_{i,3} : J \times J \times H \to \mathcal{L}_2(Q^{\frac{1}{2}}E; H), \end{matrix}$$

as follows

$$\begin{aligned} &F_i(t, y_1, y_2, y_3, y_4)(z) = G_i(t, y_1(z), y_2(z), y_3(z), y_4(z)), \\ &f_{i,j}(t,s,y)(z) = g_{i,j}(t,s,y(z)), \end{aligned}$$

pour $t \in [0,1],\ y, y_1, y_2, y_3, y_4 \in H$ *et* $0 < z < \pi$. *Au d'autre part, on sait que le système linéaire déterministe (V.10) est approximativement contrôlable sur chaque* $[0,t],\ t > 0$,*à* *condition que*

$$\int_0^{\pi} b(z)e_n(z)dz \neq 0, \quad \textit{for } n = 1, 2, 3, ...$$

Par conséquent, toutes les conditions du théorème 2 sont satisfaites, et par conséquent le système.(V.10) est approximativement contrôlable sur $[0, 1]$.

VI Contrôlabilité approximative des systèmes stochastiques impulsifs gouvernés par le processus de Rosenblat

Motivé par quelques travaux récents sur les résultats de l'existence pour les équations différentielles stochastiques impulsives ([9], [95], [34], [20], [16]) Nous allons démontrer la contrôlabilité approximative d'une solution douce pour la classe des équations différentielles stochastiques fonctionnelles neutres gouvernées par le processus de Wiener et un processus Rosenblatt indépendant de la forme.

$$\begin{cases} dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + f\left(t, x(t)\right)dt + g\left(t, x(t)\right)dW(t) + \sigma(t)dZ_H(t), \\ t \in [0, T],\ t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, 2, ..., m, \\ x(0) = x_0 \in X, \end{cases} \tag{VI.1}$$

où $x(.)$ prend des valeurs dans l'espace de Hilbert séparable X, $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur fermé, linéaire et densément défini sur X. Soit Q_K un opérateur positif, auto-adjoint et de trace classe sur K et soit $\mathcal{L}_2(K, X)$ l'espace de tous les opérateurs Q_K -Hilbert-Schmidt agissant entre K et X équipés de la norme de Hilbert-Schmidt $\|.\|_{\mathcal{L}_2}$. W est un processus Q_K-Wiener sur l'espace de Hilbert K. Soit un opérateur Q positive, auto-adjointe et de trace classe sur Y et soit $\mathcal{L}_2^0(Y, X)$ l'espace de tous les Opérateurs Q - Hilbert-Schmidt agissant entre Y et X équipés du Norme Hilbert-Schmidt $\|.\|_{\mathcal{L}_2^0}$. Z_H est un processus Q-Rosenblatt sur un espace de Hilbert Y. Le processus W et Z_H sont indépendants. f, g et σ sont des fonctions à précisé plus tard. De plus, les moments fixes t_k satisfont $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m < t_{m+1} = T$, $x(t_k^+)$ et $x(t_k^-)$ représentent la limite droite et les limite gauche de $x(t)$ à $t = t_k$. Et $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ représente le saut dans l'état x en temps t_k, où I_k détermine la taille du saut. Soit $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ l'espace de probabilité complet avec le filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t \mid t \in [0, T]\}$ engendré par variables aléatoires $\{Z_H(s),\ W(s),\ s \in [0, T]\}$, x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable indépendante de W et Z_H satisfaisant $\mathbf{E}\|x_0\|^2 < \infty$. On définit les classes des fonctions suivantes : soit $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}_T, X)$ est l'espace de Hilbert de tous les variables aléatoires $\mathcal{F}_T-$mesurables, carrées intégrables à des valeurs dans X, $\mathcal{L}_2^{\mathcal{F}}([0, T], X)$ est l'espace de Hilbert de tous processus carré intégrables et $\mathcal{F}_t-$adaptés à valeurs dans X, $C\left([0, T], \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}_T, X)\right)$ est un espace de Banach d'applications continues sauf pour un nombre fini de points t_k auquel $x(t_k^-)$ et $x(t^+)$ existent et $x(t_k^-) = x(t_k)$ satisfaisant la condition $\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\|x(t)\|^2 < \infty$ et $\mathbf{\Lambda}_2^T$ est le sous-espace fermé de $C\left([0, T], \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}_T, X)\right)$ composé de processus $x(t)$ mesurables *et $\mathcal{F}_t$- adaptés Alors $\mathbf{\Lambda}_2^T$ est un Espace de Banach avec la norme définie par*

$$\|x\|_{\mathbf{\Lambda}_2^T} = \left(\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}\,\|x(t)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\{Z_H(t),\ t \in [0,T]\}$ le processus de Rosenblatt unidimensionnel avec paramètre $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, Z_H a la représentation suivante, voir Tudor [89].

$$Z_H(t) = d(H) \int_0^t \int_0^t \left[\int_{y_1 \vee y_2}^t \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_1) \frac{\partial K^{H'}}{\partial u}(u,y_2) du \right] dB(y_1)dB(y_2), \qquad \text{(VI.2)}$$

avec

$$\begin{cases} B(t)_{t\in[0,T]} \text{ est le processus de Wiener , } \mathcal{B}(.,.) \text{ est la fonction Beta} \\ H' = \dfrac{H+1}{2},\ d(H) = \dfrac{1}{H+1}\sqrt{\dfrac{H}{2(2H-1)}},\ c_H = \sqrt{\dfrac{H(2H-1)}{\mathcal{B}(2-2H, H-1/2)}} \\ K^H(t,s) = 1_{\{t>s\}} c_H s^{1/2-H} \displaystyle\int_s^t (u-s)^{H-3/2} u^{H-1/2} du. \end{cases}$$

Soient X et Y deux espaces de Hilbert réels séparables, $\mathcal{L}(Y;X)$ l'espace de l'opérateur linéaire borné de Y à X, $Q \in \mathcal{L}(Y;X)$ un opérateur défini par $Qe_n = \lambda_n e_n$ avec trace fini $trQ = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, $\lambda_n \geq 0$ et $\{e_n\}$ est une base orthonormée complète dans Y. Nous définir le processus Q-Rosenblatt de dimension infinie sur Y comme

$$Z_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n z_n(t). \qquad \text{(VI.3)}$$

où $(z_n)_{n\geq 0}$ est une famille des Processus réels indépendants de Rosenblatt. Pour plus de détails sur le procédé Rosenblatt, on peut se référer aux articles ([76], [77], [75]). Nous avons, maintenant, le lemme suivant

Lemme VI.0.1 ([78].) *Si $\phi : [0,T] \to \mathcal{L}_2^0(Y;X)$ satisfit $\int_0^T \|\phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} ds < \infty$, alors on a*

$$E\left\|\int_0^t \phi(s)dZ_H(s)\right\|^2 \leq 2Ht^{2H-1} \int_0^t \|\phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0} ds$$

Définition VI.0.1 *Un processus stochastique $x \in \mathbf{\Lambda}_2^T$ est une solution douce de $(VI.1)$ si pour tout $u \in U_{ad} = \mathcal{L}_2^{\mathcal{F}}([0,T], U)$ on a*

$$\begin{aligned} x(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)\left(Bu(s) + f(s,x(s))\right) ds \qquad \text{(VI.4)} \\ &+ \int_0^t S(t-s)g(s,x(s))dW(s) + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dZ_H(s) \\ &+ \sum_{0<t_k<t} S(t-t_k)I_k(x(t_k^-)) \end{aligned}$$

Définition VI.0.2 *Le système* $(VI.1)$ *est approximativement contrôlable sur* $[0,T]$ *si :*

$$\overline{\mathcal{R}_T(x_0,U_{ad})} = \mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{F}_T,X)$$

Ici

$$\overline{\mathcal{R}_T(x_0,U_{ad})} = \{x(T,x_0,u) : u \in U_{ad}\},$$

où $\overline{\mathcal{R}_T(x_0,U_{ad})}$ *est la e clôture de* $\mathcal{R}_T(x_0,U_{ad})$.

Pour la preuve du résultat principal, nous imposons les conditions suivantes aux données du problème.

(Hyp1) *A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact* $\{S(t),\ t\geq 0\}$ *sur X tel que* $\|S(t)\| \leq M$, *pour une constante* $M>0$.

(Hyp2) *La fonction* $f:[0,T]\times X \to X$ *est continue et il existe une constante* C_f *telle que pour* $x,y\in X$ *et* $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned} E\left\|f(t,x)\right\|^2 &\leq C_f(1+E\left\|x\right\|^2) \\ E\left\|f(t,x)-f(t,y)\right\|^2 &\leq C_f E\left\|x-y\right\|^2 \end{aligned}$$

(Hyp3) *La fonction* $g:[0,T]\times X\to \mathcal{L}_2(K,X)$ *est continue et il existe une constante* C_g *telle que pour* $x,y\in X$ *et* $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned} E\left\|g(t,x)\right\|^2_{\mathcal{L}_2} &\leq C_g(1+E\left\|x\right\|^2) \\ E\left\|g(t,x)-g(t,y)\right\|^2_{\mathcal{L}_2} &\leq C_g E\left\|x-y\right\|^2 \end{aligned}$$

(Hyp4) *La fonction* $\sigma:[0,T]\to\mathcal{L}_2^0$ *est bornée par une constante positive L pour tout* $t\in[0,T]$

(Hyp5) $I_k : X\to X$ *est continu et il existent des constantes* $d_k,\ q_k>0$ *telles que, pour* $x,y\in X$

$$\begin{aligned} &i)\ \left\|I_k(x)-I_k(y)\right\|^2 \leq d_k\left\|x-y\right\|^2,\quad k\in\{1,...,m\},\\ &ii)\ \left\|I_k(x)\right\|^2 \leq q_k\left(1+\left\|x\right\|^2\right),\quad k\in\{1,...,m\},\\ &iii)\ M^2 m\left(\sum_{k=1}^m d_k\right) < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(Hyp6) *f et g sont uniformément bornées, alors il existe* $C>0$ *telle que*

$$\left\|f(s,x(s)\right\|^2 + \left\|g(s,x(s)\right\|^2_{\mathcal{L}_2} \leq C,$$

(Hyp7) *Pour tout* $0\leq t<T$, *l'opérateur* $\alpha(\alpha I+\Gamma_t^T)^{-1}\to 0$ *dans la topologie forte des opérateurs lorsque* $\alpha\to 0^+$, *avec* $\Gamma_s^T\in\mathcal{L}(X,X)$ *et*

$$\Gamma_s^T = \int_s^T S(T-t)BB^*S^*(T-t)dt$$

Lemme VI.0.2 *[23] Pour tout* $x_T\in\mathcal{L}_2(\Omega,\mathcal{F}_T,X)$ *il existe une unique* $\Psi\in\mathcal{L}_2^{\mathcal{F}}([0,T];\mathcal{L}_2(K,X))$

telle que

$$x_T = \mathbf{E}(x_T) + \int_0^T \Psi(s)dW(s).$$

Pour tout $\alpha > 0$ *et* $x_T \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{F}_T, X)$

$$\begin{aligned} u^\alpha(t,x) &= B^*S^*(T-t)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}\left(\mathbf{E}(x_T) - S(T)x_0\right) \\ &+B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}\Psi(s)dW(s) \\ &-B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)\sigma(s))dZ_H(s) \\ &-B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f(s,x(s))ds \\ &-B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)g(s,x(s))dW(s) \\ &-B^*S^*(T-t)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}\sum_{0<t_k<t} S(t-t_k)I_k(x(t_k^-)) \end{aligned} \tag{VI.5}$$

Lemme VI.0.3 *Il existe une constante réelle positive* M_u *telle que, pour tout* $x,\ y \in \mathbf{\Lambda}_2^T$ *on a*

$$\mathbf{E}\left\|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(t,y)\right\|^2 \leq \frac{M_u}{\alpha^2}\left\|x-y\right\|^2_{\mathbf{\Lambda}_2^T} \tag{VI.6}$$

$$\mathbf{E}\left\|u^\alpha(t,x)\right\|^2 \leq \frac{M_u}{\alpha^2}\left(1 + \left\|x\right\|^2_{\mathbf{\Lambda}_2^T}\right). \tag{VI.7}$$

Preuve : *Soit* $x,\ y \in \mathbf{\Lambda}_2^T$*, on a*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left\|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(t,y)\right\|^2 \\ &\quad\leq 3\mathbf{E}\left\|B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)\left[f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right]ds\right\|^2 \\ &\quad+3\mathbf{E}\left\|B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)\left[g(s,x(s)) - g(s,y(s))\right]dW(s)\right\|^2 \\ &\quad+3\mathbf{E}\left\|B^*S^*(T-t)(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1}\sum_{k=1}^m S(T-t_k)\left[I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\right]\right\|^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, le théorème isométrique d'Itô et les hypothèses sur les données, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|u^{\alpha}(t,x)-u^{\alpha}(t,y)\right\|^{2} &\leq \frac{3}{\alpha^{2}}\|B\|^{2}M^{4}TC_{f}\int_{0}^{t}\mathbf{E}\|x(s)-y(s)\|^{2}ds \\
&+\frac{3}{\alpha^{2}}\|B\|^{2}M^{4}C_{g}\int_{0}^{t}\mathbf{E}\|x(s)-y(s)\|^{2}ds \\
&+\frac{3}{\alpha^{2}}\|B\|^{2}M^{4}m\left(\sum_{k=1}^{m}d_{k}\right)\mathbf{E}\left\|\left[I_{k}(x(t_{k}^{-}))-I_{k}(y(t_{k}^{-}))\right]\right\|^{2} \\
&\leq \frac{3}{\alpha^{2}}\|B\|^{2}M^{4}TC_{f}T\sup_{s\in[0,T]}\mathbf{E}\|x(s)-y(s)\|^{2} \\
&+\frac{3}{\alpha^{2}}\|B\|^{2}M^{4}C_{g}T\sup_{s\in[0,T]}\mathbf{E}\|x(s)-y(s)\|^{2} \\
&+m\left(\sum_{k=1}^{m}d_{k}\right)\sup_{s\in[0,T]}\mathbf{E}\|x(s)-y(s)\|^{2} \\
&\leq \frac{3}{\alpha^{2}}\|B\|^{2}M^{4}\left[T^{2}C_{f}+TC_{g}+m\left(\sum_{k=1}^{m}d_{k}\right)\right]\|x-y\|^{2}_{\mathbf{\Lambda}_{2}^{T}} \\
&= \frac{M_{u}}{\alpha^{2}}\|x-y\|^{2}_{\mathbf{\Lambda}_{2}^{T}}
\end{aligned}$$

avec $M_{\mu}=3\|B\|^{2}M^{4}\left[T^{2}C_{f}+TC_{g}+m\left(\sum_{k=1}^{m}d_{k}\right)\right]$. *La preuve du (VI.7) est similaire.*□

VI.1 Contrôlabilité approximative

Pour tout $\alpha>0$, *définissons l'opérateur :* $F_{\alpha}:\mathbf{\Lambda}_{2}^{T}\to\mathbf{\Lambda}_{2}^{T}$ *par*

$$\begin{aligned}
(F_{\alpha}x)(t) &= S(t)x_{0}+\int_{0}^{t}S(t-s)\left(Bu^{\alpha}(s,x)+f(s,x(s))\right)ds \\
&+\int_{0}^{t}S(t-s)g(s,x(s))dW(s)+\int_{0}^{t}S(t-s)\sigma(s)dZ_{H}(s) \\
&+\sum_{0<t_{k}<t}S(t-t_{k})I_{k}(x(t_{k}^{-}))
\end{aligned}$$

Le premier résultat principal est le théorème suivant

Théorème VI.1.1 *Sous les hypothèses (Hyp1)-(Hyp5), le système* $(VI.1)$ *admet une solution douce sur* $[0,T]$.

Preuve : ***Étape 1 :*** *Soit* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$. *Alors pour tout* $x \in \mathbf{\Lambda}_2^T$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t_2) - (F_\alpha x)(t_1)\right\|^2 \\
&\quad \leq 6\mathbf{E}\left\|\left(S(t_2) - S(t_1)\right)x_0\right\|^2 \\
&\qquad +6\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2-s)f(s,x(s))ds - \int_0^{t_1} S(t_1-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\qquad +6\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2-s)g(s,x(s))dW(s) - \int_0^{t_1} S(t_1-s)g(s,x(s))dW(s)\right\|^2 \\
&\qquad +6\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2-s)\sigma(s)dZ_H(s) - \int_0^{t_1} S(t_1-s)\sigma(s)dZ_H(s)\right\|^2 \\
&\qquad +6\mathbf{E}\left\|\sum_{0<t_k<t_2} S(t_2-t_k)I_k(x(t_k^-)) - \sum_{0<t_k<t_1} S(t_1-t_k)I_k(x(t_k^-))\right\|^2 \\
&\qquad +6\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_2} S(t_2-s)Bu^\alpha(s,x(s))ds - \int_0^{t_1} S(t_1-s)Bu^\alpha(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\quad = 6\left(J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6\right)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi par l'inégalité de Hölder, le théorème isométrique d'Itô VI.8 et le supposition (Hyp1)

$$J_1 \leq \left\|S(t_2)-S(t_1)\right\|^2 \mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2$$

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq 2\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\quad +2\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
&\leq 2t_1\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)f(s,x(s))\right\|^2 ds \\
&\quad +2M^2(t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|f(s,x(s))\right\|^2 ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq 2\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)g(s,x(s))dW(s)\right\|^2 \\
&\quad 2+\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2} S(t_2-s)g(s,x(s))dW(s)\right\|^2 \\
&\leq 2\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds \\
&\quad +2M^2\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\left\|g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_4 &\leq 2\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s)dZ_H(s)\right\|^2 \\
&\quad +2\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}S(t_2-s)\sigma(s)dZ_H(s)\right\|^2 \\
&\leq 4Ht_1^{2H-1}\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)\sigma(s)\right\|^2_{\mathcal{L}_2^0}ds \\
&\quad +4M^2H\left(t_2^{2H-1}-t_1^{2H-1}\right)\int_{t_1}^{t_2}\|\sigma(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^0}ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_5 &\leq 2m\sum_{t_1<t_k<t_2}\mathbf{E}\left\|S(t_2-s)I_k(x(t_k^-))\right\|^2 \\
&\quad +2m\sum_{0<t_k<t_1}\mathbf{E}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)I_k(x(t_k^-))\right\|^2 \\
&\leq 2mM^2\sum_{t_1<t_k<t_2}\mathbf{E}\left\|I_k(x(t_k^-))\right\|^2 \\
&\quad +2m\sum_{0<t_k<t_1}\mathbf{E}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)I_k(x(t_k^-))\right\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_6 &\leq 2\mathbf{E}\left\|\int_0^{t_1}\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
&\quad +2\mathbf{E}\left\|\int_{t_1}^{t_2}S(t_2-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
&\leq 2t_1\int_0^{t_1}\mathbf{E}\left\|\left(S(t_2-s)-S(t_1-s)\right)Bu^\alpha(s,x)\right\|^2ds \\
&\quad +2M^2\|B\|^2(t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\|u^\alpha(s,x)\|^2ds
\end{aligned}
$$

Par conséquent, en utilisant la continuité forte de $S(t)$, ainsi que la Le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous concluons que le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro lorsque $t_2 - t_1 \to 0$. Ainsi nous conclure que $(F_\alpha x)(t)$ est continue dans $[0, T]$.

Étape 2 : *Soit $x \in \mathbf{\Lambda}_2^T$, alors on a*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)\right\|^2 \leq\; & 6\mathbf{E}\left\|S(t)x_0\right\|^2 + 6\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)Bu^\alpha(s,x)ds\right\|^2 \\
& +6\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)f(s,x(s))ds\right\|^2 \\
& +6\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t_2-s)g(s,x(s))dW(s)\right\|^2 \\
& +6\mathbf{E}\left\|\int_0^t S(t-s)\sigma(s)dZ_H(s)\right\|^2 \\
& +6\mathbf{E}\left\|\sum_{0<t_k<t} S(t-t_k)I_k(x(t_k^-))\right\|^2
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, le lemme (VI.0.3), le théorème isométrique d'Itô et le hypothèses sur les données, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)\right\|^2 \leq\; & 6\mathbf{E}\left\|S(t)x_0\right\|^2 + 6M^2\left\|B\right\|^2 T\mathbf{E}\int_0^t \left\|u^\alpha(s,x)\right\|^2 ds \\
& +6M^2T\mathbf{E}\int_0^t \left\|f(s,x(s))\right\|^2 ds + 6M^2\mathbf{E}\int_0^t \left\|g(s,x(s))\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds \\
& +12M^2HT^{2H-1}\mathbf{E}\int_0^t \left\|\sigma(s)\right\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds + 6mM^2\sum_{k=1}^m \mathbf{E}\left\|I_k(x(t_k^-))\right\|^2
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\|(F_\alpha x)(t)\right\|^2 \leq\; & 6M^2\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2 + 6M^2\left\|B\right\|^2 T^2\frac{M_u}{\alpha^2}\left(1+\left\|x\right\|_{\mathbf{\Lambda}_2^T}^2\right) \\
& +6M^2T^2C_f\left(1+\left\|x\right\|_{\mathbf{\Lambda}_2^T}^2\right) + 6M^2TC_g\left(1+\left\|x\right\|_{\mathbf{\Lambda}_2^T}^2\right) \\
& +12M^2HT^{2H-1}TL + 6mM^2\left(\sum_{k=1}^m q_k\right)\left(1+\left\|x\right\|_{\mathbf{\Lambda}_2^T}^2\right) \\
\leq\; & 6M^2\left(\mathbf{E}\left\|x_0\right\|^2 + 2HT^{2H-1}TL\right) \\
& +6M^2\left(\left\|B\right\|^2 T^2\left[\frac{M_u}{\alpha^2}+C_f\right] + TC_g + m\left(\sum_{k=1}^m q_k\right)\right)\left(1+\left\|x\right\|_{\mathbf{\Lambda}_2^T}^2\right)
\end{aligned}$$

on obtient ainsi que $\left\|(F_\alpha x)\right\|_{\mathbf{\Lambda}_2^T}^2 < \infty$. Puisque $(F_\alpha x)(t)$ est continue sur $[0,T]$ et donc F_α envoie $\mathbf{\Lambda}_2^T$ sur lui même. $\square$

Étape 3 : *Soit $x, y \in \mathbf{\Lambda}_2^T$, alors pour tout $t \in [0,T]$ on a*

$$
\begin{aligned}
\|(F_\alpha x)(t) - (F_\alpha y)(t)\|^2 \leq\ & 4\mathbf{E}\left\| \int_0^t S(t-s)B\left(u^\alpha(s,x) - u^\alpha(s,y)\right) ds \right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\| \int_0^t S(t-s)\left(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right) ds \right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\| \int_0^t S(t-s)\left(g(s,x(s)) - g(s,y(s))\right) dW(s) \right\|^2 \\
&+4\mathbf{E}\left\| \sum_{0<t_k<t} S(t-t_k)\left(I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\right) \right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Par les hypothèses (Hyp1)-(Hyp5) et l'inégalité de Hölder, Lemme (VI.0.3) et le théorème isométrique d'Itô, on obtient que

$$
\begin{aligned}
\|(F_\alpha x)(t) - (F_\alpha y)(t)\|^2 \leq\ & 4M^2\|B\|^2 t \int_0^t \|u^\alpha(s,x) - u^\alpha(s,y)\|^2 ds \\
&+4M^2 t \int_0^t \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|^2 ds \\
&+4M^2 \int_0^t \|g(s,x(s)) - g(s,y(s))\|^2_{\mathcal{L}_2} ds \\
&+4M^2 m \left(\sum_{k=1}^m d_k\right) \left\|I_k(x(t_k^-)) - I_k(y(t_k^-))\right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\|(F_\alpha x)(t) - (F_\alpha y)(t)\|^2 \leq\ & 4M^2\|B\|^2 t \frac{M_\mu}{\alpha^2} \int_0^t \|x(s) - y(s)\|^2 ds \\
&+4M^2 t C_f \int_0^t \|x(s) - y(s)\|^2 ds \\
&+4M^2 C_g \int_0^t \|x(s) - y(s)\|^2 ds \\
&+4M^2 m \left(\sum_{k=1}^m d_k\right) \left\|x(t_k^-) - y(t_k^-)\right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Alors, on a

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,t]} \mathbf{E}\|(F_\alpha x)(t) - (F_\alpha y)(t)\|^2 \leq\ & 4M^2\left(\|B\|^2 t^2 \frac{M_\mu}{\alpha^2} + t(tC_f + C_g) + m\left(\sum_{k=1}^m d_k\right)\right) \\
& \times \sup_{s\in[0,t]} \mathbf{E}\|x(s) - y(s)\|^2 \\
=\ & \varphi(t) \sup_{s\in[0,t]} \mathbf{E}\|x(s) - y(s)\|^2 ,
\end{aligned}
$$

avec

$$\varphi(t) = 4M^2 \|B\|^2 t^2 \frac{M_\mu}{\alpha^2} + 4M^2 t(tC_f + C_g) + 4M^2 m \left(\sum_{k=1}^{m} d_k \right)$$

On a $\varphi(0) = 4M^2 m \left(\sum_{k=1}^{m} d_k \right) < 1$ *(voir [Hyp5-iii]). Il y a donc* $0 < T_1 \leq T$ *tel que* $0 < \varphi(T_1) < 1$ *et* F_α *est une application de contraction sur* $\mathbf{\Lambda}_2^{T_1}$ *et par conséquent un point fixe unique. Ainsi, en répétant la procédure, nous étendre la solution à l'intervalle* $[0, T]$ *en plusieurs étapes finies. Le deuxième résultat principal est le théorème suivant*

Théorème VI.1.2 *Sous les hypothèses (Hyp1)-(Hyp7), le système* $(VI.1)$ *est approximativement contrôlable sur* $[0, T]$.

Preuve : *Soit* x_α *la solution du système* $(VI.1)$ *correspondant à* $\mu(t,x) = \mu^\alpha(t,x)$*. On obtient par le théorème stochastique de Fubini*

$$\begin{aligned}
x_\alpha(T) \quad = \quad & x_T - \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} (\mathbf{E}\bar{x}_T - S(T)x_0) \\
& + \alpha \int_0^T (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} S(T-s) f(s, x(s) ds \\
& + \alpha \int_0^T (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} \left[S(T-s) g(s, x(s) - \Psi(s) \right] dW(s) \\
& + \alpha \int_0^T (\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} S(T-s) \sigma(s) dZ_H(s) \\
& + \alpha(\alpha I + \Gamma_0^T)^{-1} \sum_{k=1}^{m} S(T - t_k) I_k(x^\alpha(t_k^-)).
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (Hyp6), il existe encore une sous-suite désignée par $\{f(s, x_\alpha(s), g(s, x_\alpha(s)\}$ *qui converge faiblement vers*$\{f(s), g(s)\}$ *dans* $X \times \mathcal{L}_2$ *et* $\left\{ I_k(x^\alpha(t_k^-)) \right\}$ *converge faiblement vers* $\{I_k(w)\}$ *dans X. Par la compacité de* $\{S(t) : t \geq 0\}$*, on a*

$$\begin{array}{l}
S(T-s) f(s, x_\alpha(s) \to S(T-s) f(s) \\
S(T-s) g(s, x_\alpha(s) \to S(T-s) g(s) \\
S(T-t_k) I_k(x^\alpha(t_k^-)) \to S(T-t_k) I_k(w)
\end{array}$$

Par l'hypothèse (Hyp7), nous avons

$$\begin{cases}
\alpha(\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} \to 0 \quad \textit{strongly} \quad \textit{as} \quad \alpha \to 0^+, \quad \textit{for all} \quad 0 \leq s \leq T \\
\left\| \alpha(\alpha I + \Gamma_s^T)^{-1} \right\| \leq 1
\end{cases}$$

Ainsi, par le théorème de la convergence dominée par Lebesgue, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\|x_\alpha(T)-x_T\right\|^2 \\
&\quad \leq 9\mathbf{E}\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_0^T)^{-1}\left(\mathbf{E}x_T-S(T)x_0\right)\right\|^2 \\
&\quad +9\mathbf{E}\int_0^T\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}\Psi(s)\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds \\
&\quad +18HT^{2H-1}\int_0^T\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)\sigma(s)\right\|_{\mathcal{L}_2^0}^2 ds \\
&\quad +9\mathbf{E}\left(\int_0^T\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f(s)\right\| ds\right)^2 \\
&\quad +9\mathbf{E}\left(\int_0^T\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}\right\|\left\|S(T-s)\left(f(s,x_\alpha(s))-f(s)\right)\right\| ds\right)^2 \\
&\quad +9\mathbf{E}\int_0^T\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)g(s)\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds \\
&\quad +9\mathbf{E}\int_0^T\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}\right\|^2\left\|S(T-s)\left(g(s,x_\alpha(s))-g(s)\right)\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 ds \\
&\quad +9\mathbf{E}\left\|\sum_{k=1}^m\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-t_k)I_k(w)\right\|^2 \\
&\quad +9\mathbf{E}\left\|\alpha(\alpha I+\Gamma_s^T)^{-1}\right\|^2\left\|\sum_{k=1}^m S(T-t_k)I_k(x^\alpha(t_k^-))-\sum_{k=1}^m S(T-t_k)I_k(w)\right\|^2 \\
&\quad \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad \alpha\to 0^+
\end{aligned}
$$

Alors le système (VI.1) est approximativement contrôlable.□

VI.2 Exemple

Soit $X=L_2[0,\pi]$, $U=L_2[0,\pi]$ *et* $x_0\in L_2[0,\pi]$. $A\subset D(A):X\to X$ *est l'opérateur linéaire donné par* $Ay=y''$, *avec*

$$D(A)=\{y\in X\ /\ y,\ y' \text{ sont absolument continus } y''\in X,\quad y(0)=y(\pi)=0\}.$$

Soit $B\in L(\mathbb{R},X)$ *défini par*

$$(Bu)(z)=b(x)u,\ 0\leq z\leq\pi,\ u\in\mathbb{R},\ b(x)\in L_2[0,\pi]$$

$W(t)$ *désigne un mouvement Brownien standard à une dimension et* Z_H *est un Rosenblatt, les processus* W *et* Z_H *sont indépendants.*
Considérons le système de contrôle gouverné par les processus W *et* Z_H *pour illustrer la théorie*

obtenue

$$\begin{cases} dx(t,z) = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} x(t,z) + b(z)u(t) + f_1\left(t, x(t,z)\right) \right) dt \\ + g_1\left(t, x(t,z)\right) dw(t) + \sigma(t) dZ_H, \; t \in [0,T], \; z \in [0,\pi] \\ \Delta x(t_k, z) = x(t_k^+, z) - x(t_k^-, z) = \dfrac{1}{2^k} x(t_k, z), \quad t = t_k, \quad k = 1, ..., m, \\ x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,T], \\ x(0,z) = x_0(z), \quad z \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{VI.8}$$

Supposons que $f_1, g_1 : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues, satisfaisant la condition de Lipschitz et la condition de croissance linéaire et uniformément bornés.
Notons tout d'abord qu'il existe un ensemble orthonormé complet $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de vecteurs propres de A avec

$$e_n(z) = \sqrt{(2/\pi)} \sin nz, \; 0 \leq z \leq \pi, \; n = 1, 2, ...$$

et le semi-groupe compact $S(t), \; t \geq 0$, qui est engendré par A tel que

$$Ay = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle y, e_n \rangle e_n(y), \quad y \in D(A),$$
$$S(t)y = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle x, e_n \rangle e_n(y), \quad y \in X.$$

Définissons les fonctions : $f : [0,T] \times X \to X, \; g : [0,T] \times X \to L(K;X)$ comme suit

$$f(t,x)(z) = f_1(t, x(z)),$$
$$g(t,x)(z) = g_1(t, x(z))$$

pour $t \in [0,T], \; x \in X$ and $0 < z < \pi$. Par conséquent, par le théorème 4.1.7 [37], le système déterministe linéaire (VI.8) est approximativement contrôlable sur chaque $[0,t], \; t > 0$,à condition que

$$\int_0^{\pi} b(z) e_n(z) dz \neq 0, \quad \textit{for } n = 1, 2, 3, ...$$

Par conséquent, toutes les conditions du Théorème 2 sont satisfaites, et par conséquent le système.(VI.8) est approximativement contrôlable sur $[0,T]$.

VI.2 Bibliographie

[1] *Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. Journal of computational and Applied Mathematics, 279, 57-66.*

[2] *Abry, P., & Pipiras, V. (2006). Wavelet-based synthesis of the Rosenblatt process. Signal Processing, 86(9), 2326-2339.*

[3] *Albin, J. M. P. (1998). On extremal theory for self-similar processes. The Annals of Probability, 26(2), 743-793.*

[4] *Albin, J. M. P. (1998). A note on Rosenblatt distributions. Statistics & probability letters, 40(1), 83-91.*

[5] *Alos, E., Mazet, O., & Nualart, D. (2001). Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. The Annals of Probability, 29(2), 766-801.*

[6] *Alos, E., & Nualart, D. (2003). Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. Stochastics and Stochastic Reports, 75(3), 129-152.*

[7] *Al-Zhour, Z. (2021). Controllability and observability behaviors of a non-homogeneous conformable fractional dynamical system compatible with some electrical applications. Alexandria Engineering Journal.*

[8] *Androshchuk, T., & Mishura, Y. (2006). Mixed Brownianfractional Brownian model : absence of arbitrage and related topics. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 78(5), 281-300.*

[9] *Anguraj, A., Ravikumar, K., & Baleanu, D. (2020). Approximate controllability of a semilinear impulsive stochastic system with nonlocal conditions and Poisson jumps. Advances in Difference Equations, 2020(1), 1-13.*

[10] *Azouz, F., Boucenna, D., Ben Makhlouf, A., Mchiri, L., & Benchaabane, A. (2021). Controllability of Differential Systems with the General Conformable Derivative. Complexity, 2021.*

[11] *Balachandran, K., & Dauer, J. P. (1987). Controllability of nonlinear systems via fixed-point theorems. Journal of optimization theory and applications, 53(3), 345-352.*

[12] *Balachandran, K., & Dauer, J. P. (2002). Controllability of nonlinear systems in Banach spaces : a survey. Journal of Optimization Theory and Applications, 115(1), 7-28.*

[13] *Balachandran, K., & Karthikeyan, S. (2008). Controllability of nonlinear Itô type stochastic integrodifferential systems. Journal of the Franklin Institute, 345(4), 382-391.*

[14] *Bashirov, A. E., & Kerimov, K. R. (1997). On controllability conception for stochastic systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 35(2), 384-398.*

[15] *Barnett, S. (1975). Introduction to Mathematical Control Theory. Clarendon press, Oxford.*

[16] *Benchaabane, A. (2016). Complete controllability of general stochastic integrodifferential systems. MATHEMATICAL REPORTS, 18(4), 437-448.*

[17] *Benchaabane, A.,& Sakthivel, R. (2017). Sobolev-type fractional stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients. Journal of Computational and Applied Mathematics, 312, 65-73.*

[18] *Biagini, F., Campanino, M., & Fuschini, S. (2008). Discrete approximation of stochastic integrals with respect to fractional Brownian motion of Hurst index H> 1/2. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 80(5), 407-426.*

[19] *Chang, Y. K. (2007). Controllability of impulsive functional differential systems with infinite delay in Banach spaces. Chaos, Solitons & Fractals, 33(5), 1601-1609.*

[20] *Chen, Q., Debbouche, A., Luo, Z., & Wang, J. (2017). Impulsive fractional differential equations with RiemannLiouville derivative and iterative learning control. Chaos, Solitons & Fractals, 102, 111-118.*

[21] *Coron, J. M. (2007). Control and nonlinearity (No. 136). American Mathematical Society.*

[22] *Dadras, S., & Momeni, H. R. (2011, January). A new fractional order observer design for fractional order nonlinear systems. In International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (Vol. 54808, pp. 403-408).*

[23] *Da Prato, G., & Zabczyk, J. (2014). Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge university press.*

[24] *De Jesús Rubio, J., Lughofer, E., Pieper, J., Cruz, P., Martinez, D. I., Ochoa, G., ... & Garcia, E. (2021). Adapting H-infinity controller for the desired reference tracking of the sphere position in the maglev process. Information Sciences, 569, 669-686.*

[25] *Decreusefond, L. (1999). Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. Potential analysis, 10(2), 177-214.*

[26] *Derakhshan, M., & Aminataei, A. (2020, September). Asymptotic Stability of Distributed-Order Nonlinear Time-Varying Systems with the Prabhakar Fractional Derivatives. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2020). Hindawi.*

[27] *Embrechts, P., & Maejima, M. (2002). Selfsimilar Processes, Princeton Ser. Appl. Math., Princeton University Press, Princeton, NJ.*

[28] *Escobedo-Alva, J. O., Garcia-Estrada, E. C., Paramo-Carranza, L. A., Meda-Campana, J. A., & Tapia-Herrera, R. (2018). Theoretical application of a hybrid observer on altitude tracking of quadrotor losing GPS signal. IEEE Access, 6, 76900-76908.*

[29] *Evans, L. C. (1983). An introduction to mathematical optimal control theory version 0.2. Lecture notes available at http ://math. berkeley. edu/ evans/control. course. pdf.*

[30] *García-Sánchez, J. R., Tavera-Mosqueda, S., Silva-Ortigoza, R., Hernández-Guzmán, V. M., Sandoval-Gutiérrez, J., Marcelino-Aranda, M., ... & Marciano-Melchor, M. (2018). Robust switched tracking control for wheeled mobile robots considering the actuators and drivers. Sensors, 18(12), 4316.*

[31] *Goodman, V., & Kuelbs, J. (1993). Gaussian chaos and functional laws of the iterated logarithm for Ito-Wiener integrals. In Annales de l'IHP Probabilités et statistiques (Vol. 29, No. 4, pp. 485-512).*

[32] *Gradinaru, M., Nourdin, I., Russo, F., & Vallois, P. (2003). m-order integrals and generalized Itôs formula ; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst parameter. Preprint, to appear in Annales de lInstitut Henri Poincaré.*

[33] Hall, P., Härdle, W., Kleinow, T., & Schmidt, P. (2000). Semiparametric bootstrap approach to hypothesis tests and confidence intervals for the Hurst coefficient. Statistical inference for stochastic processes, 3(3), 263-276.

[34] Huang, H., Wu, Z., Hu, L., Wei, Z., & Wang, L. (2018). Existence and controllability of second-order neutral impulsive stochastic evolution integro-differential equations with state-dependent delay. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 20(1), 1-27.

[35] Iyiola, O. S., Tasbozan, O., Kurt, A., & Çenesiz, Y. (2017). On the analytical solutions of the system of conformable time-fractional Robertson equations with 1-D diffusion. Chaos, Solitons & Fractals, 94, 1-7.

[36] Kalman, R.E. (1963) Controllability of linear systems. Contrib. Differ. Equ.1, 190213.

[37] Kalman, R. E., Ho, Y., & Narendra, K. S. (1963). Controllability of Linear Dynamical Systems, volume 1 of Contributions to Differential Equations.

[38] Kettani, H., & Gubner, J. (2003). Estimation of the long-range dependence parameter of fractional Brownian motionin. Proc. 28th IEEE LCN03.

[39] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., & Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. Journal of computational and applied mathematics, 264, 65-70.

[40] Klamka, J., & Socha, L. (1977). Some remarks about stochastic controllability. IEEE Transactions on Automatic Control, 22(5), 880-881.

[41] Klamka, J. (2000). Schauder's fixed-point theorem in nonlinear controllability problems. Control and Cybernetics, 29, 153-165.

[42] Klamka, J. (2007). Stochastic controllability of linear systems with delay in control. Bulletin of the Polish Academy of Sciences : Technical Sciences, 23-29.

[43] Klamka, J. (2008). Stochastic controllability and minimum energy control of systems with multiple delays in control. Applied Mathematics and Computation, 206(2), 704-715.

[44] Klebaner, F. C. (2012). Introduction to stochastic calculus with applications. World Scientific Publishing Company.

[45] Kruk, I., Russo, F., & Tudor, C. A. (2007). Wiener integrals, Malliavin calculus and covariance measure structure. Journal of Functional Analysis, 249(1), 92-142.

[46] Leonenko, N. N., & Woyczynski, W. A. (1998). Scaling limits of solutions of the heat equation for singular non-Gaussian data. Journal of statistical physics, 91(1), 423-438.

[47] Leonenko, N. N., & Anh, V. V. (2001). Rate of convergence to the Rosenblatt distribution for additive functionals of stochastic processes with long-range dependence. Journal of applied mathematics and stochastic analysis, 14(1), 27-46.

[48] Li, M., Wang, M., & Zhang, F. (2006). Controllability of impulsive functional differential systems in Banach spaces. Chaos, Solitons & Fractals, 29(1), 175-181.

[49] Li, S., Zhang, S., & Liu, R. (2020). The existence of solution of diffusion equation with the general conformable derivative. Journal of Function Spaces, 2020.

[50] Liu, X., & Ballinger, G. (2003). Boundedness for impulsive delay differential equations and applications to population growth models. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 53(7-8), 1041-1062.

[51] Lu, Z., Zhu, Y., & Xu, Q. (2021). Asymptotic stability of fractional neutral stochastic systems with variable delays. European Journal of Control, 57, 119-124.

[52] *Maejima, M., & Tudor, C. A. (2007). Wiener integrals with respect to the Hermite process and a non-central limit theorem. Stochastic analysis and applications, 25(5), 1043-1056.*

[53] *Mahmudov, N. I. (2001). Controllability of linear stochastic systems. IEEE Transactions on Automatic control, 46(5), 724-731.*

[54] *Mahmudov, N. I. (2001). Controllability of linear stochastic systems in Hilbert spaces. Journal of mathematical Analysis and Applications, 259(1), 64-82.*

[55] *Mahmudov, N. I., & Zorlu, S. (2003). Controllability of non-linear stochastic systems. International Journal of Control, 76(2), 95-104.*

[56] *Mahmudov, N. I., & Zorlu, S. (2005). Controllability of semilinear stochastic systems. International Journal of Control, 78(13), 997-1004.*

[57] *Mahmudov, N. I., & Semi, N. (2012). Approximate controllability of semilinear control systems in Hilbert spaces.*

[58] *Maejima, M., & Tudor, C. A. (2007). Wiener integrals with respect to the Hermite process and a non-central limit theorem. Stochastic analysis and applications, 25(5), 1043-1056.*

[59] *Martinez, D. I., Rubio, J. D. J., Aguilar, A., Pacheco, J., Gutierrez, G. J., Garcia, V., ... & Juarez, C. F. (2020). Stabilization of Two Electricity Generators. Complexity, 2020.*

[60] *Martinez, D. I., Rubio, J. D. J., Garcia, V., Vargas, T. M., Islas, M. A., Pacheco, J., ... & Aguilar-Ibañez, C. (2021). Transformed Structural Properties Method to Determine the Controllability and Observability of Robots. Applied Sciences, 11(7), 3082.*

[61] *Naifar, O., Nagy, A. M., Makhlouf, A. B., Kharrat, M., & Hammami, M. A. (2019). Finitetime stability of linear fractionalorder timedelay systems. International journal of robust and nonlinear control, 29(1), 180-187.*

[62] *Naifar, O., Rebiai, G., Makhlouf, A., Hammami, M. A., & Guezane-Lakoud, A. (2020). Stability analysis of conformable fractional-order nonlinear systems depending on a parameter. Journal of Applied Analysis, 26(2).*

[63] *Naito, K. (1987). Controllability of semilinear control systems dominated by the linear part. SIAM Journal on control and Optimization, 25(3), 715-722.*

[64] *N'Doye, I., & Laleg-Kirati, T. M. (2015, July). Fractional-order adaptive fault estimation for a class of nonlinear fractional-order systems. In 2015 American Control Conference (ACC) (pp. 3804-3809). IEEE.*

[65] *Norros, I., Valkeila, E., & Virtamo, J. (1999). An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. Bernoulli, 571-587.*

[66] *Nualart, D. (1995). The Malliavin calculus and related topics.*

[67] *Oksendal, B. (2013). Stochastic differential equations : an introduction with applications. Springer Science & Business Media.*

[68] *Pipiras, V., & Taqqu, M. S. (2000). Integration questions related to fractional Brownian motion. Probability theory and related fields, 118(2), 251-291.*

[69] *Pipiras, V. (2004). Wavelet-type expansion of the Rosenblatt process. Journal of Fourier Analysis and Applications, 10(6), 599-634.*

[70] *Prévôt, C., & Röckner, M. (2007). A concise course on stochastic partial differential equations (Vol. 1905, pp. vi+-144). Berlin : Springer.*

[71] Sakthivel, R., Mahmudov, N. I., & Kim, J. H. (2009). On controllability of second order nonlinear impulsive differential systems. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 71(1-2), 45-52.

[72] Sakthivel, R., & Ren, Y. (2011). Complete controllability of stochastic evolution equations with jumps. Reports on Mathematical Physics, 68(2), 163-174.

[73] Samoilenko, A. M., & Perestyuk, N. A. (1995). Impulsive differential equations. world scientific.

[74] Samorodnitsky, G., & Taqqu, M. (1994). Non-Gaussian Stable Processes : Stochastic Models with Infinite Variance. Chapman ft Hall, London.

[75] Saravanakumar, S., & Balasubramaniam, P. (2019). On impulsive Hilfer fractional stochastic differential system driven by Rosenblatt process. Stochastic Analysis and Applications, 37(6), 955-976.

[76] Sathiyaraj, T., Wang, J., & O'Regan, D. (2021). Controllability of stochastic nonlinear oscillating delay systems driven by the Rosenblatt distribution. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics, 151(1), 217-239.

[77] Shen, G., Sakthivel, R., Ren, Y., & Li, M. (2020). Controllability and stability of fractional stochastic functional systems driven by Rosenblatt process. Collectanea mathematica, 71(1), 63-82.

[78] Shen, G., & Ren, Y. (2015). Neutral stochastic partial differential equations with delay driven by Rosenblatt process in a Hilbert space. Journal of the Korean Statistical.

[79] Shen, L., & Sun, J. (2012). Relative controllability of stochastic nonlinear systems with delay in control. Nonlinear Analysis : Real World Applications, 13(6), 2880-2887.

[80] Shukla, A., Arora, U., & Sukavanam, N. (2015). Approximate controllability of retarded semilinear stochastic system with non local conditions. Journal of Applied Mathematics and Computing, 49(1), 513-527.

[81] Smart, D. R. (1980). Fixed point theorems (Vol. 66). Cup Archive.

[82] Soriano, L. A., Zamora, E., Vazquez-Nicolas, J. M., Hernández, G., Barraza Madrigal, J. A., & Balderas, D. (2020). PD Control Compensation Based on a Cascade Neural Network Applied to a Robot Manipulator. Frontiers in Neurorobotics, 78.

[83] Subalakshmi, R., & Balachandran, K. (2009). Approximate controllability of nonlinear stochastic impulsive integrodifferential systems in Hilbert spaces. Chaos, Solitons & Fractals, 42(4), 2035-2046.

[84] Sukavanam, N. (1993). Approximate controllability of semilinear control systems with growing nonlinearity. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 353-353.

[85] Sukavanam, N., & Tafesse, S. (2011). Approximate controllability of a delayed semilinear control system with growing nonlinear term. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 74(18), 6868-6875.

[86] Sukavanam, N., & Kumar, M. (2010). S-controllability of an abstract first order semilinear control system. Numerical functional analysis and optimization, 31(9), 1023-1034. Society, 44(1), 123-133.

[87] Taqqu, M. S. (1975). Weak convergence to fractional brownian motion and to the rosenblatt process. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 31(4), 287-302.

[88] Taqqu, M. S. (1986). A bibliographical guide to self-similar processes and long-range dependence. In Dependence in probability and statistics (pp. 137-162). Birkhäuser, Boston, MA.

[89] Tudor, C. A. (2008). Analysis of the Rosenblatt process. ESAIM : Probability and statistics, 12, 230-257.

[90] Wang, L. (2005). Approximate controllability of delayed semilinear control systems. Journal of Applied Mathematics and stochastic analysis, 2005(1), 67-76.

[91] Wang, L. W. (2009). Approximate controllability for integrodifferential equations with multiple delays. Journal of optimization theory and applications, 143(1), 185-206.

[92] Wang, X., Wang, J., & Fekan, M. (2020). Controllability of conformable differential systems. Nonlinear Analysis : Modelling and Control, 25(4), 658-674.

[93] Wei, J. (2012). The controllability of fractional control systems with control delay. Computers & Mathematics with Applications, 64(10), 3153-3159.

[94] Wu, W. B. (2006). Unit root testing for functionals of linear processes. Econometric Theory, 22(1), 1-14.

[95] Xu, L., Ge, S. S., & Hu, H. (2019). Boundedness and stability analysis for impulsive stochastic differential equations driven by G-Brownian motion. International Journal of Control, 92(3), 642-652.

[96] Younas, A., Abdeljawad, T., Batool, R., Zehra, A., & Alqudah, M. A. (2020). Linear conformable differential system and its controllability. Advances in Difference Equations, 2020(1), 1-26.

[97] Zhao, D., & Luo, M. (2017). General conformable fractional derivative and its physical interpretation. Calcolo, 54(3), 903-917.

[98] Zhou, X. F., Wei, J., Hu, L. G. (2013). Controllability of a fractional linear time-invariant neutral dynamical system. Applied Mathematics Letters, 26(4), 418-424.