



Département de Mathématiques

Année : 2021



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

**Analyse numérique d'une classe de
problèmes de l'obstacle.**

Option

Contrôle Optimal déterministe et stochastique

Par

Melle DJERIDI BOCHRA

DIRECTEUR DE THÈSE : GHANEM RADOUEN Prof U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR: SISSAOUI HOCINE Prof U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : HAIOUR MOHAMED Prof U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : MAOUNI MESSEOUD Prof U. SKIKDA

EXAMINATEUR : TAALLAH FREKH Prof U.B.M. ANNABA

Dédicace

À MA TRÈS CHÈRE MÈRE

À la plus douce et la plus merveilleuse de toutes les mamans. Tu n'a pas cessé de me soutenir et de m'encourager, ton amour, ta générosité exemplaire et ta présence constante ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Tes prières ont été pour moi un grand soutien tout au long de mes études.

À MON TRÈS CHER PÈRE

À celui qui m'a aidé à découvrir le 'savoir' le trésor inépuisable. De tous les pères, tu as été le meilleur, tu as su m'entourer d'attention, m'inculquer les valeurs nobles de la vie, m'apprendre le sens du travail, de l'honnêteté et de la responsabilité.

Que ALLAH te rend à moi.

À MES CHÈRS FRÈRES ET SOEURS

Salah Addine ; Abdou ; Séddik ; Moufida ; Farès, et surtout à ma chère Sabrina, merci pour cette complicité que nous partageons, et pour ta capacité à toujours croire en ta petite soeur.

Plus largement, merci à tous les membres de mes deux familles Djeridi et Chiad pour tous ces bons moments partagés.

Je désire remercier mes amis de l'Université de Badji Mokhtar Annaba, qui m'ont soutenue et divertie tout au long de l'accomplissement de ce travail.

Remerciement

Tout d'abord je remercie Allah le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail, car tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu sa bénédiction, il n'y a pas une parole plus convenable pour le remercier que celle de Salomon, quand il a dit : < Rabi awze3ni an achkora ni3mataka alati an3amta 3alai wa 3ala walidai wa an a3mala salihan tardah waadkhilni bi rahmatika fi 3ibadika assalihin >.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le professeur **Ghanem Radouen** d'avoir accepté de rapporter mon travail, se fut un grand honneur pour moi et pour l'orientation, la confiance, la patience qui ont constitué un rapport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Prof. **Sissaoui Hocine** pour les nombreuses remarques qu'il a fait sur mon travail.

Je tiens à remercier, *Mr Haiour Mohamed*, d'avoir accepté la présidence du jury de mon travail, qu'il trouve ici toutes mes expressions respectueuses.

Je remercie également, Mr Maouni Messeoud, de m'avoir fait l'honneur de faire partie des membres du jury et d'examiner ce travail. je tiens à vous remercier.

Je remercie également, Mr Taalah Frekh de m'avoir fait l'honneur de faire partie des membres du jury et d'examiner ce travail. Je tiens à vous remercier.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à ma famille pour leur soutien sans faille et pour l'équilibre qu'elle m'a apporté et pour leurs encouragements.

Enfin, je veux remercier toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près à l'avancement de ce travail.

A la fin, je dit : << Alhamdo lilah aladi hadana lihada wa ma konaa linahtadia lawala an hadana alah.>>

TABLE DES MATIÈRES

Abstract	vi
Résumé	vii
Introduction générale	1
1 Inéquations variationnelles elliptiques et leur approximation	5
1.1 Notations	6
1.2 Hypothèses et définitions générales	8
1.3 Formulation du problème	9
1.3.1 Formulation générale d'une inéquation variationnelle	9
1.3.2 Formulation générale du problème de l'obstacle	10
2 Méthode spectrale et Méthode des éléments spectraux	15
2.1 Méthodes des éléments finis	15
2.1.1 Principe général	16
2.2 Méthodes d'approximation spectrale	17
2.2.1 Polynômes de Legendre et formules de quadrature	17

2.2.2	Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale	21
2.3	Méthode des éléments spectraux	23
2.3.1	Principes de base	23
2.3.2	Quelques inégalités locales	31
3	L'étude du problème discret	34
3.1	Le problème variationnel discret	35
3.2	Estimations d'erreurs a priori et a posteriori	36
3.2.1	L'estimation d'erreur a priori	36
3.2.2	L'estimation d'erreur a posteriori	40
4	Tests numériques et algorithme	53
4.1	Solution numérique des modèles Black-Scholes d'options américaines	55
4.2	Résultats numériques liés à l'estimation d'erreur a priori	57
4.3	Résultats numériques liés à l'estimation d'erreur a posteriori	60
	Conclusion et Perspective	69
	Bibliographie	70

ABSTRACT

The purpose of this work is the determination of the numerical solution of a classical unilateral stationary elliptic obstacle problem. The numerical technique combines Moreau-Yoshida penalty and spectral finite element approximations. The penalized method transforms the obstacle problem into a family of semilinear partial differential equations. The discretization uses a non-overlapping spectral finite element method with Legendre-Gauss-Lobatto nodal basis using a conforming mesh. The strategy is based on approximating the solution using a spectral finite element method. The discrete system obtained is solved by an iterative algorithm based on the confidence region. In addition, by coupling the penalty and the discretization parameters, we prove a priori and a posteriori error estimates where reliability and efficiency of the estimators are shown for Legendre spectral finite element method. Such estimators can be used to construct adaptive methods for the obstacle problems. Moreover, numerical results are given to corroborate the error estimates.

Keywords : Obstacle problem, Penalty approximation, Spectral method, Finite element method, A priori error estimate, A posteriori error estimate.

RÉSUMÉ

Le but de ce travail est de déterminer la solution numérique d'un problème d'obstacle elliptique stationnaire unilatéral classique. La technique numérique combine la pénalisation de Moreau-Yoshida et les approximations spectrales par éléments finis. La méthode de pénalisation transforme le problème de l'obstacle en une famille d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires. La discrétisation utilise une méthode des éléments spectraux sans recouvrement avec une base nodale de Gauss-Lobatto Legendre utilisant un maillage uniforme. La stratégie est basée sur l'approximation de la solution à l'aide d'une méthode spectrale aux éléments finis. Le système discret obtenu est résolu par un algorithme itératif basé sur la région de confiance. De plus, en couplant la pénalisation et les paramètres de discrétisation, on prouve des estimations d'erreur a priori et a posteriori où la fiabilité et l'efficacité des estimateurs sont montrées pour la méthode des éléments spectraux de Legendre. De tels estimateurs peuvent être utilisés pour construire des méthodes adaptatives pour les problèmes de l'obstacle. De plus, des résultats numériques sont fournis pour corroborer les estimations d'erreur.

Mots clés : Problème d'obstacle, Approximation de pénalisation, Méthode spectrale, Méthode des éléments finis, Estimation d'erreur a priori, Estimation d'erreur a posteriori.

الملخص

الغرض من هذا العمل هو تحديد الحل العددي لمشكلة عقبة إهليلجية كلاسيكية ثابتة أحادية الجانب. تجمع التقنية العددية بين جزاء Moreau-Yoshida الطيفية وتقريب العناصر المحددة الجانب. يحول الأسلوب المعاقب مشكلة العقبة إلى عائلة من المعادلات التفاضلية الجزئية شبه الخطية. يستخدم التقدير طريقة عنصر طيفي محدود غير متداخلة مع أساس عقدي Legendre-Gauss-Lobatto باستخدام شبكة مطابقة. تعتمد الاستراتيجية على تقريب الحل باستخدام طريقة العناصر المحددة الطيفية ، ومن ثم سيتم حل النظام المنفصل الذي تم الحصول عليه بواسطة خوارزمية تكرارية تعتمد على منطقة الثقة التكرارية بالإضافة إلى ذلك ، من خلال اقتران العقوبة ومعلمات التقدير ، نثبت تقديرات الخطأ المسبق واللاحق حيث يتم عرض موثوقية وكفاءة المقدرات لطريقة العناصر المحددة الطيفية ل Legendre. يمكن استخدام مثل هذه المقدرات لبناء طرق تكيفية لمشاكل العوائق. علاوة على ذلك ، يتم إعطاء النتائج العددية لتأكيد تقديرات الخطأ .

الكلمات المفتاحية: مشكلة العقبة ، تقريب العقوبة ، الطريقة الطيفية ، طريقة العناصر المحددة ، تقدير الخطأ المسبق ، تقدير الخطأ اللاحق.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des inéquations variationnelles est un domaine important de mathématiques. Le problème de l'obstacle sous forme d'inéquation variationnelle est un problème important qui a été étudié par de nombreux chercheurs. Ses applications se trouvent par exemple dans l'ingénierie, l'économie et la finance. Ces problèmes impliquent généralement de trouver des points d'équilibre d'un système ou des problèmes d'optimisation de forme soumis à des contraintes données appelées obstacles. Pour plus de détails sur les inéquations variationnelles et leurs applications on peut, par exemple, consulter [3, 27, 42, 55].

Dans ce travail, le problème de l'obstacle en question est un prototype pour une classe des problèmes d'obstacles unilatéraux elliptiques qui impliquent des frontières libres modélisant de nombreux phénomènes tels que la transition de phase, l'écoulement de jet et l'expansion de gaz dans un milieu poreux ; voir par exemple [27] . De plus, l'étude du problème de l'obstacle pertinent dans un tel contexte conduit à ouvrir de nouvelles directions et est motivée par des problèmes de génie mécanique et de finance mathématique, voir par exemple [34, 41].

Par conséquent, pour la résolution de ce type de problèmes, des méthodes numériques sont nécessaires. Selon la littérature mathématique, la méthode des éléments finis semble être la plus populaire pour la discrétisation et la résolution des problèmes de l'obstacle, voir par exemple [19, 26, 61]. En outre, d'autres méthodes numériques peuvent également être trouvées, telles que la méthode des différences finies [9] et la méthode des volumes finis [62].

La méthode des éléments finis [58] est une méthode variationnelle et fait partie

des outils des mathématiques appliquées. En analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Elle repose sur l'approximation des solutions par des fonctions dont la restriction à chaque élément du domaine est un polynôme de bas degré.

Les méthodes spectrales (Tau, Galerkin, pseudo-spectrale et collocation) ont été introduites pour la première fois par D. Gottlieb et S.Orszag dans [31] et [51], ensuite développées par C . Bernardi et Y.Maday [10],[11] et [9]. Elles reposent sur l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles initialement par des séries de Fourier tronquées puis par des polynômes de haut degré (l'ensemble des polynômes de Jacobi). Les méthodes spectrales utilisent des formules de quadrature numérique pour évaluer les intégrales obtenues dans la formulation variationnelle, plus précisément la formule de Gauss-Lobatto. Le problème est discrétisé aux nœuds de cette formule qui sont, dans notre travail, les racines des dérivés des polynômes de Legendre.

La méthode des éléments spectraux a été proposée initialement par Patera en 1984 dans [52], et introduite au début des années 90 en géophysique par Seriani & Priolo (1994) dans [57]. La méthode des éléments finis spectraux peut utiliser des bases polynômiales de Chebyshev (Priolo et al., 1994) [53] ou encore de Legendre (Komatitsch & Vilotte, 1998) [44]. La combinaison des polynômes de Legendre et des points de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre permet d'obtenir une matrice de masse purement diagonale aboutissant à une méthode totalement explicite.

En outre, l'un des intérêts majeurs de la méthode des éléments spectraux est la convergence spectrale (en terme de précision) obtenue par les bases polynômiales considérées. En revanche, l'efficacité de la méthode des éléments spectraux est subordonnée à l'usage de maillages rectangulaires (2D) ou hexaédriques (3D) où sont définis les points de Gauss-Lobatto-Legendre. De tels maillages présentent certaines contraintes en matière de flexibilité géométrique qui rendent difficile la création de maillages adaptatifs. L'extension de la méthode des éléments finis spectraux aux maillages triangulaires (2D) ou tétraédriques (3D) nécessite la définition de points de quadrature optimaux dans les n -simplexes qui reste aujourd'hui un sujet de recherche actif (Pasquetti & Rapetti, 2006 ; Mercerat et al., 2006) [54]. Afin d'affaiblir la contrainte relative aux maillages hexaédriques conformes, la possibilité d'utiliser des maillages non conformes via la technique des joints a également été étudiée par (Casadei et al., 2002) dans [23]. Cette technique permet de considérer des maillages non conformes entre plusieurs domaines et mettre en oeuvre une condition de raccord entre ces domaines afin d'étudier la continuité de la solution. Cette

dernière approche n'est pas considérée dans cette thèse.

La méthode des éléments finis spectraux d'ordre élevé permet une approximation sur des géométries plus complexes employant des fonctions continues d'interpolation de Lagrange par morceaux, où les points de collocation sont les racines de polynômes orthogonaux (Gauss-Lobatto point d'intégration). Elle combine les avantages des méthodes des éléments finis et spectraux. Comme la méthode des éléments finis, le domaine du problème de l'obstacle est divisé en K sous-domaines disjoints. Dans chaque sous-domaine, une approximation est construite comme une combinaison linéaire d'ordre élevé de polynômes orthogonaux, où le paramètre d'approximation λ est un K -uplet donné par le polynôme de degré N et le pas h de chaque sous-domaine.

Cependant, la méthode de convergence des éléments finis spectraux est obtenue soit en augmentant le degré N des polynômes, ou en augmentant le nombre de sous-domaines K . Nous notons que la méthode des éléments spectraux est similaire aux méthodes hp -éléments finis dans lesquelles le raffinement de la grille peut être obtenu en augmentant le nombre d'éléments (h -raffinement) et/ou en augmentant l'ordre polynomial d'approximation au sein de chaque élément (p -raffinement). La motivation de cette thèse est l'utilisation des éléments finis hp -spectraux pour de tels problèmes. Il semble qu'il n'y a pas de travail sur la méthode des éléments hp -spectraux et cette approche constitue une contribution originale à la discrétisation d'un problème d'obstacle pénalisé. Ce travail actuel repose beaucoup sur des études antérieures sur l'indicateur d'erreur résiduel basé sur l'étude de French et al. [26] pour une solution par éléments finis du problème de l'obstacle pénalisé.

L'objectif de cette thèse est double. Premièrement, il s'agit d'appliquer la méthode des éléments spectraux de Legendre à un problème d'obstacle donné, ensuite prouver en détail, une estimation d'erreur a priori. A l'aide de l'opérateur d'interpolation de Clément-Scott-Zhan [56], on souhaite obtenir des estimations d'erreur a posteriori de l'élément hp -spectral des solutions pénalisées. Pour cela, nous utilisons d'abord la technique de la pénalisation pour approcher le problème de l'obstacle qui sera ainsi remplacé par une famille de problèmes elliptiques semi-linéaires. L'approximation du problème de l'obstacle par une équation régularisée pénalisée, en introduit un paramètre d'approximation noté δ , voir par exemple [4] et [47]. Deuxièmement, pour la discrétisation numérique du problème de l'obstacle pénalisé, on utilise la méthode des éléments spectraux de Legendre, voir [36] et [49] et pour la résolution numérique, on utilise une méthode itérative basée sur une

stratégie de région de confiance, [38], [43]

Puisque y_λ^δ est une solution discrète d'un problème discret arbitraire, l'idée principale des estimations d'erreur a posteriori est d'associer à chaque sous-domaine Ω_e l'estimateur η_e , qui peut être calculé explicitement en fonction de la solution y_λ^δ et des informations données de telle sorte que les estimations suivantes soient satisfaites (voir [7]).

L'erreur $\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)}$ est la borne supérieure telle que

$$\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1^\lambda \left(\sum_e (\eta_e^2 + k_{1e}) \right)^{\frac{1}{2}},$$

Chaque quantité η_e est bornée comme suit

$$\eta_e \leq c_2^\lambda \left(\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega_e)} + k_{2e} \right),$$

où les termes k_{1e} et k_{2e} dépendent des données connues du problème considéré.

Ainsi, la famille des indicateurs d'erreur est optimale si les constantes c_1^λ et c_2^λ sont bornées indépendamment de λ , ce qui est le cas dans un espace à une dimension, mais ce n'est plus vrai dans les espaces de dimension supérieure.

Le mémoire se présente comme suit : on commence par une introduction générale puis dans le premier chapitre, on présente la définition du problème variationnel pour le problème modèle et on passe, brièvement, en revue les arguments d'existence et de régularité des problèmes de l'obstacle continu et pénalisés. On rappelle aussi leurs principales propriétés et on introduit la notation qui sera utilisée tout au long de ce travail. Le chapitre 2 contient, d'une part, une présentation générale concernant les méthodes spectrales et éléments finis et d'autre part, on donne un aperçu de la méthode des éléments spectraux de Legendre ainsi que leurs propriétés fondamentales. Dans le chapitre 3, on donne la description de la discrétisation du problème de l'obstacle pénalisé et des estimations d'erreur a priori et des preuves rigoureuses des estimations d'erreurs a posteriori. Dans le chapitre 4, on présente un algorithme itératif basé sur la région de confiance pour résoudre le problème discret. Pour la corroboration des résultats théoriques, on considère des exemples numériques. Le mémoire s'achève par une conclusion, des perspectives et des références.

CHAPITRE 1

INÉQUATIONS VARIATIONNELLES ELLIPTIQUES ET LEUR APPROXIMATION

Les inéquations variationnelles représentent une classe importante de problèmes non linéaires d'origine physique, mécanique ou autre [24]. Plusieurs auteurs ont étudié l'existence, l'unicité et la régularité de la solution de ces problèmes [14],[?].

Les problèmes de contrôle optimal gouvernés par des inéquations variationnelles sont des problèmes intéressants car ils permettent de contrôler certaines frontières libres via les inéquations variationnelles associées (voir [16]) et aboutissent à des questions d'optimisation de forme. Les résultats d'existence et d'unicité sont nombreux (voir par exemple Barbu dans [5]).

On s'intéresse dans ce chapitre à la formulation en inéquations variationnelles des problèmes de type obstacle. On va rappeler les principaux résultats sur l'existence, l'unicité de la solution des inéquations variationnelles ainsi que leur approximation. On outre, on donne la formulation générale des inéquations variationnelles ainsi que celle des problèmes d'obstacle sous la forme variationnelle.

1.1 Notations

Dans cette section, on commence par donner quelques éléments qui seront utilisés dans une analyse ultérieure. On présente pour le moment les notations utilisées dans ce travail. On rappelle ici les espaces dans lesquels se trouvent les solutions. Plus généralement, on donne tous les espaces utilisés pour l'analyse numérique du problème (propriétés de régularité, approximation, ...). Les notations utilisées pour les espaces de Sobolev sont classiques ainsi que les démonstrations qui peuvent être trouvées, par exemple, dans [15].

Dans la suite de ce travail, Ω est un ensemble ouvert borné, régulier et convexe dans \mathbb{R}^d où ($d \leq 3$), avec une frontière $\partial\Omega$ continue et lipschitzienne et $\mathbf{x} = (x, y)$ un point générique. Ainsi, on rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω [1], $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω . On introduit également l'espace $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. Soit p tel que $1 \leq p < +\infty$, on note par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions v de Ω dans \mathbb{R} mesurables tel que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} < +\infty,$$

où $\|v\|_{L^p(\Omega)}$ désigne la norme, définie par

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |v(x)|,$$

où, il est bien connu que, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour cette norme, qui est réflexif si et seulement si $1 \leq p < +\infty$. On sait également que

- Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ contient l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ comme sous-espace dense.
- Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est continu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans le cas particulier où $p = 2$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

La théorie des distributions permet de définir pour les espaces $L^p(\Omega)$ des dérivées d'ordre quelconque à valeur dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: pour tout d -uplet $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de \mathbb{N}^d , $|\alpha|$ représente la longueur $\alpha_1 + \dots + \alpha_d$ et on note par ∂^α la dérivée partielle d'ordre total $|\alpha|$ et d'ordre α_j par rapport à la j -ème variable, $1 \leq j < n$.

Définition 1.1. Soient p tel que $1 \leq p < +\infty$, et m un entier positif, on définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\}.$$

Soient p un nombre réel, $1 \leq p < +\infty$, et m un entier positif. On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$, que l'on le munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p} \quad \text{si } p < +\infty. \quad (1.1)$$

Il est facile de vérifier que l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif lorsque $1 \leq p < +\infty$. Dans le cas particulier où $p = 2$, l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.1)

$$(u, v) \rightarrow \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u)(x) (\partial^\alpha v)(x) dx.$$

Corollaire 1.1. *Pour tout nombre réel p , tel que $1 \leq p < +\infty$, et tout entier positif m , la semi-norme*

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

est une norme sur l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$, équivalente à la norme $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

Définition 1.2. *Soient p un nombre réel, tel que $1 \leq p < +\infty$, et m un entier positif. On définit le nombre réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On note par $W^{-m,q}(\Omega)$ le dual de l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$, et on le munit de la norme duale*

$$\|f\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{m,p}(\Omega), v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{W^{m,p}(\Omega)}},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $W^{-m,p'}(\Omega)$ et $W_0^{m,p}(\Omega)$. Dans le cas particulier où $p = 2$, on a $q = 2$. On note respectivement par $H_0^m(\Omega)$ et $H^{-m}(\Omega)$ les espaces $W_0^{m,2}(\Omega)$ et $W^{-m,2}(\Omega)$, et on utilise la même notation pour les normes associées ; on pose

$$H^{-m}(\Omega) := (H_0^m(\Omega))',$$

alors

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega),$$

où les inclusions précédentes sont considérées algébriquement et topologiquement.

Notation 1.1. *Dans la suite, on note la norme définie sur l'espace de Sobolev d'ordre m dans Ω par $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ et par $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme sur $L^2(\Omega)$.*

Soient α_i , avec $i = 1, 2$ deux constantes positives telles que $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$. On définit la forme bilinéaire $\sigma(\cdot, \cdot)$ pour tout u et v dans $H^1(\Omega)$ par

$$\sigma(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sigma_0(x) u(x) v(x) dx + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_{\partial\Omega} u(\sigma) v(\sigma) d\sigma,$$

Si $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$, où σ_0 et σ_{ij} satisfont l'hypothèse

$$\begin{cases} \sigma_0, \sigma_i, \sigma_{ij} \in L^\infty(\Omega), \\ \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij} \theta_i \theta_j \geq m \sum_{i=0}^n \theta_i^2, \quad m > 0, \quad (\text{p.p.}) \text{ presque partout dans } \Omega, \forall \theta \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans le cas où, $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 = 0$, la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est définie par

$$\sigma(u, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sigma_0(x) u(x) v(x) dx,$$

on a alors $\sigma(u, v) = \langle Au, v \rangle$, où

$$Av = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \right) + \sigma_0(x) v.$$

On appelle A dans $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ l'opérateur linéaire (elliptique) associé à $\sigma(.,.)$. On dit que la forme bilinéaire est continue sur $H^1(\Omega)$ si elle satisfait les conditions de continuité (H_1) et de coercivité (H_2) qui seront données ci-dessous.

En outre, dans la suite de ce travail, C et c sont des constantes positives génériques indépendantes des paramètres d'approximation qui peuvent ne pas être les mêmes à chaque occurrence.

1.2 Hypothèses et définitions générales

Soient V et H deux espaces de Hilbert réels tels que V est dense dans H et $V \subset H \subset V'$ algébriquement et topologiquement où V' est le dual de V , de plus l'injection $V \subset H$ est supposée compacte. Le crochet de dualité entre V et V' est noté par $\langle ., . \rangle$ et le produit scalaire dans H par $(.,.)_H$, $\|.\|_V$ est la norme de V .

Soit $\sigma(.,.)$ une forme bilinéaire continue de $V \times V$ dans \mathbb{R} et f appartenant à V' On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \in K \text{ tel que :} \\ \sigma(y, v - y) \geq (f, v - y), \quad \text{pour tout } v \text{ dans } K \end{cases} \quad (\text{PVI})$$

Le problème (PVI) est appelé inéquation variationnelle. On définit aussi un problème plus général (PVI1) qui est équivalent au problème (PVI). Si la forme bilinéaire $\sigma(u, v)$ est continue et linéaire en v , alors $\sigma(u, v) = (Au, v)$, où A est l'opérateur

associé à la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$. Ainsi on définit le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y \in K \text{ tel que :} \\ \langle Ay, v - y \rangle \geq \langle f, v - y \rangle, \text{ pour tout } v \text{ dans } K \end{array} \right. \quad (\text{PVI1})$$

On dit que (PVI1) est plus général car A n'est pas nécessairement symétrique. En plus, si la forme bilinéaire est symétrique, on définit une troisième formulation de ce problème qui est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y \in K \text{ tel que :} \\ J(y) \leq J(v), \text{ pour tout } v \text{ dans } K \end{array} \right. \quad (\text{Pmin})$$

où : $J(y) = \frac{1}{2}\sigma(y, y) - \langle f, y \rangle$ et K un ensemble fermé et convexe.

Dans la suite on rappelle les résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème (PVI). Pour cela on a besoin de quelques définitions.

Définition 1.3. *La forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\sigma(y, v) \leq C \|y\|_V \|v\|_V, \quad (\text{H1})$$

Définition 1.4. *La forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est V -elliptique sur $V \times V$ s'il existe une constante $c > 0$ tel que :*

$$\sigma(v, v) \geq c \|v\|_V^2. \quad (\text{H2})$$

Théorème 1.1. (Stampachia) [29] *Soient $\sigma(.,.)$ une forme bilinéaire continue et V -elliptique et K un ensemble convexe fermé, alors il existe une solution unique du problème (PVI) dans K .*

1.3 Formulation du problème

1.3.1 Formulation générale d'une inéquation variationnelle

- Comme la forme bilinéaire $\sigma(.,.)$ est associée à l'opérateur A , on déduit de la continuité de la forme $\sigma(.,.)$ donnée par (H₁) que

$$\langle Ay, v \rangle \leq C \|y\|_V \|v\|_V.$$

- et de la coercivité de $\sigma(.,.)$ donnée par (H₂) que

$$\langle Ay, y \rangle \geq \sigma \|y\|_V^2.$$

- Dans la suite, on se donne une fonction convexe Φ , propre et semi-continue inférieurement de V dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et on note par

$$\text{dom}\Phi := \{y \in V \mid \Phi(y) \leq +\infty\},$$

qui est également un ensemble convexe et V -fermé. Rappelons que le sous-différentiel de Φ en y_0 dans V (voir [5], [13], [6], [21]) est donné par

$$\partial\Phi(y_0) = \{z^* \text{ dans } V' \mid \text{pour tout } y \text{ dans } V \quad \Phi(y) - \Phi(y_0) - \langle z^*, y - y_0 \rangle \geq 0\}$$

Le problème suivant est appelé inéquation variationnelle générale où il s'agit de trouver y dans $\text{dom}(\Phi)$ tel que

$$\langle Ay, z - y \rangle + \Phi(z) - \Phi(y) \geq 0, \text{ pour tout } z \text{ dans } V, \quad (1)$$

1.3.2 Formulation générale du problème de l'obstacle

Le problème de l'obstacle est un exemple typique d'inéquation variationnelle du premier type et des problèmes de frontière libre. Par exemple, un problème d'obstacle consiste à trouver la position d'équilibre d'une membrane élastique dont la frontière est maintenue fixe et est déplacée par un obstacle rigide donné. Ce problème modélise le problème des surfaces minimales ainsi que la capacité d'un ensemble en théorie du potentiel [39]. On peut citer d'autres problèmes importants tels la torsion d'un cylindre elastico-plastique, le problème de Stefan, etc, pouvant être formulés par transformation en un problème de type obstacle. A cet effet, on suggère les références [24], [?], [29], [37], [42] et [46]. Puisque le problème de l'obstacle est difficile à résoudre analytiquement, la solution approchée est habituellement calculée par différentes méthodes numériques.

Dans ce qui suit, on étudie un problème de frontière libre pour un problème de type obstacle unilatéral. Ce dernier peut être transformé en un problème d'inéquation variationnelle que l'on peut aussi l'écrire sous forme d'équation semi-linéaire elliptique.

Formulation du problème de l'obstacle elliptique

Pour faciliter la compréhension, on prend l'exemple du problème dit de l'obstacle elliptique du second ordre. On suppose que l'opérateur A est l'opposé du Laplacien, à savoir $-\Delta$, avec le choix typique $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$, et on considère le problème

suisant :

$$y - \varphi \geq 0, \quad -\Delta y - f \geq 0 \quad (y - \varphi)(-\Delta y - f) = 0, \quad \text{p.p dans } \Omega \quad (2)$$

avec f dans $L^2(\Omega)$ et φ dans $H_0^1(\Omega)$, la solution y représente un petit déplacement transversal d'une membrane élastique Ω fixée le long de sa frontière $\partial\Omega$, soumise à une force f et un obstacle rigide φ .

Le problème de l'obstacle est l'exemple type d'un problème de frontière libre que l'on peut interpréter ainsi : la solution y divise le domaine Ω en deux sous domaines $I(y)$ and $N(y) = \Omega \setminus I(y)$, le premier ensemble est appelé ensemble de contact qui est fermé et est un sous ensemble de Ω où $y = \varphi$:

$$\Omega = I(y) \cup N(y),$$

où

$$I(y) = \{x \in \Omega, y(x) = \varphi(x)\},$$

Le second ensemble $N(y)$ est le complémentaire de $I(y)$ défini par

$$N(y) = \{x \in \Omega, y(x) > \varphi(x)\},$$

et est appelé l'ensemble de non-contact et est déterminé comme l'ensemble des points x où $y(x) > \varphi(x)$ (voir figure 1.1).

L'ensemble

$$F = \partial I(y) \cap \Omega = \partial N(y) \cap \Omega$$

est appelé ensemble de frontière libre, pour plus de détails(voir [55]).

On peut réécrire le problème (2) sous la forme de l'inéquation variationnelle suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } y \text{ dans } \mathbf{D}(\varphi) \text{ tel que} \\ \sigma(y, v - y) \geq (f, v - y), \quad \text{pour tout } v \text{ dans } \mathbf{D}(\varphi) \end{cases} \quad (\text{P})$$

où l'ensemble \mathbf{D} est défini par

$$\mathbf{D}(\varphi) = \{v \mid v \text{ dans } H_0^1(\Omega), v \geq \varphi \text{ presque partout dans } \Omega\}.$$

et f est dans $L^2(\Omega)$.

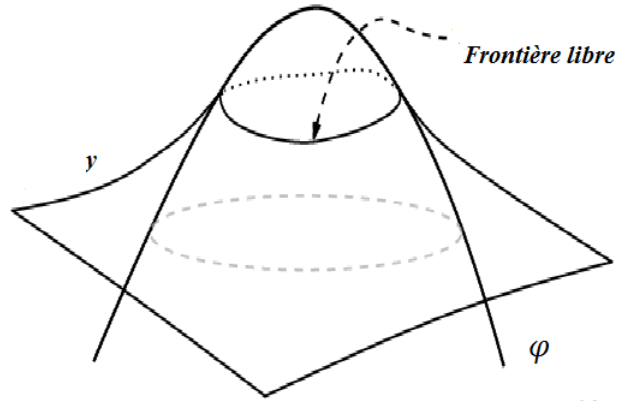


FIGURE 1.1 – L'obstacle φ , la solution y et la frontière libre $\partial \{y > \varphi\}$.[35]

De plus, pour tout φ dans $H_0^1(\Omega)$, le problème de l'obstacle (P) a une unique solution y dans $H_0^1(\Omega)$, d'autre part, si φ est dans $H^2(\Omega)$ alors y est dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ [42].

Si dans (1) on prend $\Phi(\cdot)$ égal à $I_{\mathbf{D}(\varphi)}$, le problème d'obstacle précédent peut s'écrire également comme une inclusion différentielle sous la forme :

$$-\Delta y + \partial I_{\mathbf{D}(\varphi)}(y) \ni f \quad \text{dans } \Omega \text{ et } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

où $\partial I_{\mathbf{D}(\varphi)}(y)$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice $I_{\mathbf{D}(\varphi)}$ de \mathbf{D} , définie par

$$I_{\mathbf{D}(\varphi)}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in \mathbf{D} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le sous-différentiel $\partial I_{\mathbf{D}(\varphi)}$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\partial I_{\mathbf{D}(\varphi)}(y) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v(x)(y(x) - z(x)) \geq 0, \text{ pour toute } z \text{ dans } \mathbf{D}(\varphi) \right\},$$

ou d'une manière équivalente

$$\partial I_{\mathbf{D}(\varphi)}(y) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v \in \beta_0(y - \varphi), \text{ presque partout dans } \Omega\},$$

où $\beta_0(\cdot)$ est défini de \mathbb{R} dans $2^{\mathbb{R}}$ est le graphe maximal monotone défini par [4]

$$\beta_0(r) := \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0 \\ \mathbb{R}^- & \text{si } r = 0 \\ \emptyset & \text{si } r < 0 \end{cases} \quad (2)$$

La méthode de pénalisation est la plus ancienne et la plus utilisée puisqu'il s'agit d'approcher l'opérateur multivoque $\partial I_{\mathbf{D}}$ de l'inéquation variationnelle (Barbu [5] et [6]). En effet, on peut considérer $\partial I_{\mathbf{D}} = \beta_0$, et on se donne une approximation régulière β_δ de β_0 tel que $\beta_\delta = \frac{1}{\delta}\beta$.

Alors le problème de l'obstacle (P) peut être approximé par l'équation semi-linéaire suivante [4]

$$Ay^\delta + \beta_\delta(y^\delta - \varphi) = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et } y^\delta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3)$$

où $\delta > 0$ est un paramètre fixé qu'on appelle paramètre de pénalisation, et la fonction pénalisée β est bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} avec une dérivée première bornée et satisfaisant aux hypothèses suivantes :

$H_3.$ β est monotone(croissante).

$H_4.$ $\beta(r) - r$ est décroissante.

$H_5.$ pour tout r dans \mathbb{R} , $\beta(r)r \geq 0$.

$H_6.$ β Lipschitzienne-continue, c'est-à-dire, pour tout r_1, r_2 dans \mathbb{R}

$$|\beta(r_2) - \beta(r_1)| \leq |r_2 - r_1|$$

$H_7.$ $\beta(r) = 0$ si et seulement si $r \in \mathbf{D}(\varphi)$.

Ainsi, la formulation variationnelle du problème pénalisé (3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } y^\delta \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \sigma(y^\delta, v) + (\beta_\delta(y^\delta - \varphi), v) = (f, v), \quad \text{pour toute } v \text{ dans } H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (P^\delta)$$

où pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, on a

$$\sigma(y^\delta, v) = (\nabla y^\delta, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla y^\delta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (4)$$

Comme $\beta(y^\delta - \cdot)$ est non-décroissante, alors il est bien connu d'après [28] que le problème pénalisé (P^δ) a une solution unique, et l'ensemble $\{y^\delta\}_\delta$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$,

ce qui signifie qu'il existe y dans $H_0^1(\Omega)$ de telle sorte que pour une sous-suite notée aussi par $\{y^\delta\}_\delta$ converge faiblement vers y dans $H_0^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$ lorsque δ tend vers 0. Comme $\beta_\delta(y^\delta - \varphi)$ converge vers 0 lorsque δ tend vers 0 cela signifie que y appartient à $\mathbf{D}(\varphi)$, où y est la solution du problème (P) . De plus, pour φ fixé dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et f dans $L^2(\Omega)$, la solution unique y^δ appartient à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ [50].

Dans le chapitre suivant, on fait appel à quelques notions de base liées à la méthode des éléments finis spectraux qui seront utiles pour la suite de ce travail.

CHAPITRE 2

MÉTHODE SPECTRALE ET MÉTHODE DES ÉLÉMENTS SPECTRAUX

La méthode des éléments spectraux est une technique de décomposition de domaine reposant sur une partition du domaine de calcul en sous-domaines sans recouvrement et permet d'utiliser des discrétisations complètement indépendantes sur chaque sous-domaine. L'un de ses objectifs est de coupler les méthodes spectrales avec la discrétisation par éléments finis [9].

2.1 Méthodes des éléments finis

Dans cette section, on va considérer la méthode des éléments finis. On va présenter son principe général et quelques notions élémentaires s'y rapportant.

2.1.1 Principe général

Notions élémentaires sur les maillages

Intuitivement, un maillage d'un domaine Ω est une partition de Ω en mailles. Pour simplifier, on suppose que ces mailles sont des intervalles en dimension une et des rectangles en dimension deux. Les mailles sont également appelées les cellules du maillage.

La famille de mailles constituant le maillage sera notée $\{R_m\}_{1 \leq m \leq N_{ma}}$, où N_{ma} est le nombre de mailles. Par hypothèse, les mailles sont des fermées et leurs intérieurs sont deux à deux disjoints. Par la suite, on pose :

$$h_{R_m} = \text{diam}(R_m) = \max_{x_1, x_2 \in R_m} \|x_1 - x_2\|_{\mathbb{R}^d}, \quad m \in \{1, \dots, N_{ma}\},$$

où, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d : On pose également :

$$h = \max_{1 \leq m \leq N_{ma}} h_{R_m},$$

et

$$\gamma_h = \{R_m\}_{1 \leq m \leq N_{ma}}.$$

Dans les applications, on est souvent amené à considérer une suite de maillages de plus en plus fins, ce qu'on notera conventionnellement $\{\gamma_h\}_{h>0}$ (famille de maillages).

Remarque 2.1. *En dimension 2, la famille de maillage $\{\gamma_h\}_{h>0}$ est appelée souvent famille de rectangulations.*

Définition 2.1. (Maillage régulier) *Un maillage régulier est un maillage dont tous les éléments sont réguliers. En outre, soit $\{\gamma_h\}_{h>0}$ une famille de maillage de Ω . On dit qu'il s'agit d'une famille de maillage régulier si :*

1- h défini précédemment tend vers zéro.

2- Il existe une constante C telle que, pour tout $h > 0$ et tout R_m dans γ_h , on a

$$\frac{h}{\rho(R_m)} \leq C,$$

où $\rho(R_m)$ défini comme étant le diamètre de la plus grande boule contenue dans R_m .

Définition 2.2. *Un n -simplexe R de \mathbb{R}^n est l'enveloppe convexe de $(n + 1)$ points P_j , $1 \leq j \leq n + 1$, appelés sommets de R .*

Remarque 2.2. On note que tout n -simplexe est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n et les sommets ou noeuds du maillage γ_h sont les sommets des n -simplexes R_i qui le composent. Par convention, le paramètre h désigne le maximum des diamètres des n -simplexes R_i .

Définition 2.3. Pour tout entier m , avec $0 \leq m \leq n - 1$, une m -face d'un n -simplexe R est un m -simplexe dont les $m + 1$ sommets font partie des $n + 1$ sommets de R . En particulier, tout $(n - 1)$ -face est appelée face, tout 1 -face est appelée arête et toute 0 -face est appelée sommet.

Définition 2.4. On dit que le domaine Ω est polyédrique si $\bar{\Omega}$ est une réunion finie de polyèdres de \mathbb{R}^n , où $\bar{\Omega}$ désigne l'adhérence du domaine Ω .

Remarque 2.3. Rappelons qu'un polyèdre est une intersection finie de demi-espaces de \mathbb{R}^n et que les parties de son bord qui appartiennent à un seul hyperplan sont appelées ses faces.

Définition 2.5. Soit Ω un ouvert polyédrique de \mathbb{R}^n . Un maillage triangulaire ou une triangulation de $\bar{\Omega}$ est un ensemble γ_h de n -simplexes $(R_i)_{1 \leq i \leq N}$ qui vérifient :

$$1- R_i \subset \bar{\Omega} \text{ et } \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N R_i,$$

2- L'intersection $R_i \cap R_j$ de deux n -simplexes distincts est un m -simplexe, avec $0 \leq m \leq n - 1$, dont tous les sommets sont aussi des sommets de R_i et R_j .

2.2 Méthodes d'approximation spectrale

Les méthodes spectrales et éléments spectraux utilisent des polynômes d'approximation de haut degré. On définit tout d'abord les espaces discrets correspondants. Une grande partie de l'analyse numérique de ces méthodes fait appel à une base de polynômes orthogonaux dont on rappelle les principales propriétés. On décrit ensuite les formules de quadrature qui sont employées pour évaluer les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle. Finalement, on donne des inégalités inverses sur les polynômes qui seront utilisées par la suite.

2.2.1 Polynômes de Legendre et formules de quadrature

Une grande partie de l'analyse numérique des méthodes spectrales fait appel à une base de polynômes orthogonaux dont on donne les principales propriétés. On décrit ensuite

les formules de quadrature qui sont employées pour évaluer les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle.

• **Polynômes de Legendre :**

Les polyômes de Legendre sont notés habituellement par $L_k(x)$, où k désigne le degré du polynôme $L_k(x)$ par rapport à la variable x , telle que la parité de $L_k(x)$ est la même que celle du degré k . Ils forment une famille de polynômes $\{L_k\}_k$ deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(\Lambda)$ par rapport à la fonction poids $\omega(x) = 1$, par suite on a

$$\int_{\Lambda} L_i(x)L_j(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les polynômes de Legendre, pour k entier naturel, peuvent aussi être construits grâce à la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \\ L_1(x) = x, \\ L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xL_k(x) - \frac{k}{k+1}L_{k-1}(x), \quad \text{pour tout } x \text{ dans } [-1, 1], \end{cases} \quad (5)$$

telle que pour l'implémentation et la mise en œuvre numérique des polynômes de Legendre $L_k(x)$, on peut faire appel à la relation de récurrence (5). Par suite, on donne quelques relations qui sont importantes pour l'approximation numérique et la démonstration de certaines propriétés qui vont suivre. Pour une lecture plus approfondie, on peut se référer, par exemple, à [18].

• **Formules de quadrature :**

Il est bien connu que les zéros et les extremas des polynômes de Legendre servent à la construction de *formules de quadrature numérique* de grande précision, c'est-à-dire, qui sont exactes sur un espace de polynômes de degré élevé : il s'agit principalement des formules de Gauss et de Gauss-Lobatto [18]. Une famille de formules englobant les deux précédentes est étudiée en détail dans [9]. On rappelle quelques caractéristiques des formules de *Gauss* et de *Gauss-Lobatto* pour approcher les intégrales qui sont utiles dans la suite.

1. **Formules de quadrature sur l'intervalle :**

Proposition 2.1. *Soit N un entier positive fixé. Il existe un unique ensemble de N points ζ_j de Λ , avec $1 \leq j \leq N$, et un unique ensemble de N réels ω_j , avec $1 \leq j \leq N$, telle que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme ϕ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$*

$$\int_{-1}^1 \phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=1}^N \phi(\zeta_j) \omega_j, \quad (6)$$

Les nœuds ζ_j , $1 \leq j \leq N$, sont les zéros du polynôme L_N . Les poids ω_j avec $1 \leq j \leq N$, sont positifs.

Démonstration. [9]. ■

Remarque 2.4. Dans tout ce qui suit, on désigne par ζ_j , avec $1 \leq j \leq N$, les zéros de L_N , qui sont les nœuds de la formule de quadrature et par ω_j , avec $1 \leq j \leq N$, les poids qui leur sont associés de façon unique d'après la proposition 2.1. La formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 \phi(\zeta) d\zeta \simeq \sum_{j=1}^N \phi(\zeta_j) \omega_j, \quad (7)$$

est appelée formule de Gauss de type Legendre à N points.

– Il reste à donner une expression des poids ω_j , avec $1 \leq j \leq N$. La plus simple s'écrit

$$\omega_j = \frac{2}{N L'_N(\zeta_j) L_{N-1}(\zeta_j)} \quad (8)$$

Maintenant, on donne une autre formule de quadrature qui diffère de la première essentiellement par le fait que les extrémités -1 et 1 de l'intervalle sont des nœuds de la formule.

Proposition 2.2. Soit N un entier positif fixé. On pose $\zeta_0 = -1$ et $\zeta_1 = 1$. Il existe un unique ensemble de $N - 1$ points ζ_j de Λ , avec $1 \leq j \leq N - 1$, et un unique ensemble de $N + 1$ réels ρ_j , avec $0 \leq j \leq N$, telle que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme ϕ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$

$$\int_{-1}^1 \phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=0}^N \phi(\zeta_j) \rho_j, \quad (9)$$

Les nœuds ζ_j , avec $1 \leq j \leq N - 1$, sont les zéros du polynôme L'_N . Les poids ρ_j , avec $0 \leq j \leq N$, sont positifs.

Démonstration. [9]. ■

Remarque 2.5. Dans tout ce qui suit, on notera par ζ_j , avec $0 \leq j \leq N$, les zéros de $(1 - \zeta^2) L'_N(\zeta)$ rangés par ordre croissant et par ρ_j , avec $0 \leq j \leq N$, les poids qui leur sont associés de façon unique d'après la proposition 2.2. La formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 \phi(\zeta) d\zeta \simeq \sum_{j=0}^N \phi(\zeta_j) \rho_j, \quad (10)$$

est appelée formule de Gauss-Lobatto de type Legendre à $N + 1$ points. Le mode de calcul des poids ρ_j , avec $0 \leq j \leq N$, est donné dans les deux lemmes suivants [9].

Lemme 2.1. Les poids ρ_0 et ρ_N sont égaux à $\frac{2}{N(N+1)}$.

Lemme 2.2. Les poids ρ_j , avec $1 \leq j \leq N - 1$, sont donnés par

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1) L_N^2(\zeta_j)}, \quad (11)$$

– La formule de quadrature de *Gauss-Lobatto* est exacte sur $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. Comme le produit de deux polynômes de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ appartient à \mathbb{P}_{2N} , on va donner une propriété de \mathbb{P}_{2N} mais non nécessairement valable dans $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. Ce résultat intervient à plusieurs reprises dans l'analyse numérique des méthodes spectrales.

Lemme 2.3. On a l'égalité suivante :

$$\sum_{j=0}^N L_N^2(\zeta_j) \rho_j = \left(2 + \frac{1}{N}\right) \|L_N\|_{L^2(\Lambda)}^2,$$

Démonstration. [9]. ■

Corollaire 2.1. Tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ vérifie les inégalités :

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\zeta_j) \rho_j \leq 3 \|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda)}^2,$$

Démonstration. [9]. ■

Lemme 2.4. Pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme L'_n vérifie :

$$\int_{-1}^1 L_n'^2(\zeta) d\zeta = n(n+1),$$

Démonstration. [9]. ■

2. Formules de quadrature sur le carré :

On note par Λ^2 le carré $]-1, 1[^2$ et on désigne par $\mathbf{x} = (x, y)$ le point générique de Λ^2 . L'idée fondamentale est la tensorisation : on commence par traiter la variable y comme un paramètre fixe et on opère en x puis on opère en y . Par ce procédé, on obtient immédiatement que l'ensemble des fonctions

$$L_k \otimes L_l(x, y) = L_k(x) L_l(y), \quad \text{avec } k \text{ et } l \text{ dans } \mathbb{N}, \quad (12)$$

constitue une base orthogonale de $L^2(\Lambda^2)$. On définit respectivement les grilles de *Gauss* et de *Gauss-Lobatto* de type Legendre par Υ_N et Σ_N avec

$$\Upsilon_N = \{(\zeta_i, \zeta_j), \text{ avec } 1 \leq i, j \leq N, \quad \text{où } \zeta_j \text{ sont les zéros de } L_N\},$$

et

$$\Sigma_N = \{(\zeta_i, \zeta_j), \text{ avec } 1 \leq i, j \leq N, \text{ où } \zeta_j \text{ sont les zéros de } (1 - \zeta^2) L'_N\}.$$

Sur le carré Λ^2 , on a des résultats analogues sur les grilles Υ_N et Σ_N . On déduit les résultats suivants [2]

Proposition 2.3. *Soit N un entier positif fixé, pour tout polynôme φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$, on a*

$$\int_{\Lambda^2} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varphi(\zeta_i, \zeta_j) \omega_i \omega_j,$$

et aussi

$$\int_{\Lambda^2} \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi(\zeta_i, \zeta_j) \rho_i \rho_j,$$

Corollaire 2.2. *Tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ vérifie*

$$\|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda^2)}^2 \leq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\zeta_i, \zeta_j) \rho_i \rho_j \leq 9 \|\varphi_N\|_{L^2(\Lambda^2)}^2.$$

2.2.2 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale

Dans cette section, on donne les erreurs d'approximation et d'interpolation polynomiales sur un carré. Dans le cas de l'intervalle, on peut renvoyer le lecteur aux références suivantes ([9], [17] et [2]). Le but de ce paragraphe est d'établir des majorations analogues à la distance d'une fonction de régularité connue en un certain espace de polynômes dans l'espace $H^m(\Lambda^2)$. Dans ce qui suit, le symbole $^{(x)}$ ou $^{(y)}$, après un opérateur monodimensionnel, indiquera que l'on fait agir cet opérateur par rapport respectivement à la variable x ou y .

• Le projecteur Π_N :

Dans un premier temps, on étudie le comportement de la distance dans $L^2(\Lambda^2)$ à l'espace $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$.

Notation 2.1. *On note par Π_N l'opérateur de projection orthogonal de $L^2(\Lambda^2)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$.*

Étant donné une fonction v de $L^2(\Lambda^2)$, on a par exemple pour presque tout y dans Λ [9]

$$\int_{-1}^1 \left(v(\mathbf{x}) - \pi_N^{(x)} v(\mathbf{x}) \right) L_k(x) \, dx = 0, \text{ avec } 0 \leq k \leq N,$$

et comme $\pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)} v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ et que les $L_k(x) L_l(y)$, avec $0 \leq k, l \leq N$, forment une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$, on obtient l'identité suivante [9] :

$$\Pi_N = \pi_N^{(x)} \circ \pi_N^{(y)}$$

De plus, les opérateurs $\pi_N^{(x)}$ et $\pi_N^{(y)}$ commutent.

Théorème 2.1. *Pour tout entier $m \geq 0$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m tel que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda^2)$, on ait*

$$\|v - \Pi_N v\|_{0,\Lambda^2} \leq cN^{-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}.$$

Démonstration. [17]. ■

• **Le projecteur $\Pi_N^{1,0}$**

Ici on s'intéresse à l'approximation des fonctions de $H_0^1(\Lambda^2)$ par des polynômes de l'espace $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$.

Notation 2.2. *On note par $\Pi_N^{1,0}$ l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Lambda^2)$ sur $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ pour le produit scalaire associé à la norme $|\cdot|_{1,\Lambda^2}$.*

Théorème 2.2. *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m tel que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$, on ait*

$$|v - \Pi_N^{1,0} v|_{1,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}.$$

Démonstration. [17]. ■

• **Le projecteur Π_N^k**

On étudie ici l'approximation des fonctions de $H^k(\Lambda^2)$ pour tout entier positif k , laquelle est essentiellement utilisée pour k égal à 2.

Notation 2.3. *Pour tout entier positif k , on note Π_N^k l'opérateur de projection orthogonale de $H^k(\Lambda^2)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$.*

On admet le théorème suivant, et on réfère à [9] pour la démonstration.

Théorème 2.3. *Pour tout entier $m \geq k$, il existe une constante c positive ne dépendant que de k et m tel que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda^2)$, on ait*

$$\|v - \Pi_N^k v\|_{k,\Lambda^2} \leq cN^{k-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}.$$

- **L'opérateur d'interpolation \mathcal{I}_N**

Notation 2.4. On note \mathcal{I}_N l'opérateur d'interpolation sur la grille Σ_N pour toute fonction v continue sur $\bar{\Lambda}^2$.

$\mathcal{I}_N v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ et vérifie :

$$(\mathcal{I}_N v)(\zeta_i, \zeta_j) = v(\zeta_i, \zeta_j), \quad \text{avec } 0 \leq i, j \leq N.$$

Cette définition se traduit bien sûr par l'identité :

$$\mathcal{I}_N = i_N^{(x)} \circ i_N^{(y)} = i_N^{(y)} \circ i_N^{(x)}.$$

Théorème 2.4. Pour tout entier $m \geq 2$, il existe une constante c positive ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Lambda^2)$ on ait

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{0, \Lambda^2} \leq cN^{-m} \|v\|_{m, \Lambda^2}.$$

2.3 Méthode des éléments spectraux

Dans cette section, on présente la procédure utilisée pour construire la méthode des éléments spectraux pour un problème d'obstacle bidimensionnel. Cette méthode fait partie de la catégorie des méthodes des résidus pondérés et offre à la fois les avantages de la méthode des éléments finis (flexibilité géométrique) et de ceux des techniques spectrales (ordre de convergence élevé).

2.3.1 Principes de base

- **Géométrie de la décomposition :**

On considère un entier positive K , et soit γ_h une partition uniforme de domaine Ω en sous-domaines rectangulaires ouverts $\{\Omega_e\}_{e=1}^K$ de sorte que $\Omega = \bigcup_{e=1}^K \Omega_e$, et l'intersection $\Omega_e \cap \Omega_{\acute{e}}$ entre deux éléments distincts peut être l'ensemble vide ou un sommet commun ou un côté commun de Ω_e et $\Omega_{\acute{e}}$. Ainsi pour deux éléments quelconques Ω_e et $\Omega_{\acute{e}}$ dans γ_h où $\bar{\Omega}_e \cap \bar{\Omega}_{\acute{e}} \neq \emptyset$, il existe $\varrho > 0$; tel que :

$$\varrho^{-1}h_e \leq h_{\acute{e}} \leq \varrho h_e, \tag{13}$$

et

$$\varrho^{-1}(N_e + 1) \leq N_e + 1 \leq \varrho(N_e + 1). \quad (14)$$

De plus, pour $d = 2$, on considère l'hypothèse que l'intersection de $\partial\Omega_e$ avec $\partial\Omega$ a des arêtes ou des cotés entiers de Ω_e (voir figure 2.1).

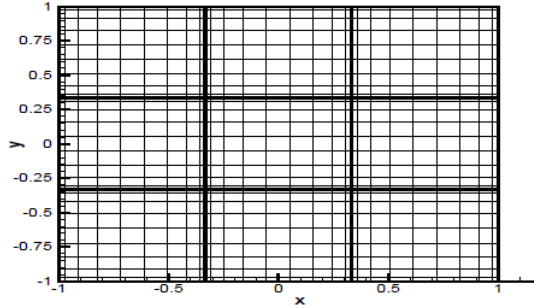


FIGURE 2.1 – Exemple de maillage type éléments spectraux ($N = 9$) et ($h = 3$) .

Bien que chaque direction de l'espace peut être discrétisée indépendamment des autres, chaque élément forme un maillage construit comme produit tensoriel des grilles unidimensionnelles, et par souci de simplicité on considère seulement des mailles obtenues avec le même nombre de nœuds dans chaque direction.

Pour $1 \leq e \leq K$, on note par $\Gamma_{e,l}$ où $1 \leq l \leq L(K)$ les frontières de Ω_e qui ne sont pas contenues dans $\partial\Omega$. Dans la suite, on définit le squelette S de partition $\{\Omega_e\}_{e=1}^K$ par

$$S = \bigcup_{e=1}^K \partial\Omega_e \setminus \partial\Omega = \bigcup_{e=1}^K \bigcup_{l=1}^{L(K)} \Gamma_{e,l}.$$

Soit Ω_e un sous domaine quadrilatéral arbitraire de $\{\Omega_e\}_{e=1}^K$ et soit Σ un élément de référence défini par le carré $\Sigma = S = [-1, 1]^2$ ou le triangle de référence $\Sigma = T = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < -x\}$, où chaque sous-domaine doit être construit de manière à pouvoir être transféré au domaine de référence Σ . (voir figure 2.2)

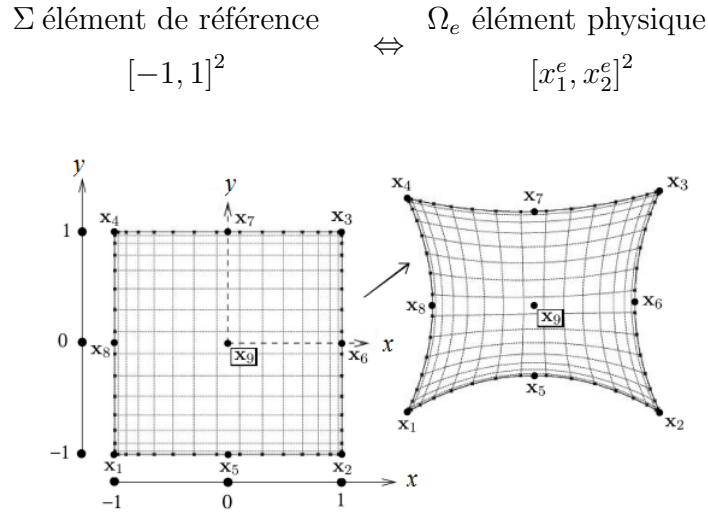


FIGURE 2.2 – Illustration du passage de l'élément de référence $[-1, 1]^2$ à un élément quelconque. Les éléments sont représentés avec leur grille de Gauss-Lobatto-Legendre d'ordre $N = 15$ (soit 16 points de Gauss-Lobatto-Legendre dans chaque direction)[45].

Pour cela, on suppose qu'il existe une fonction inversible χ_e du domaine de référence Σ au domaine arbitraire Ω_e dans lequel le Jacobien associé à χ_e est donné par J_e de manière à assurer la bonne définition des éléments du maillage tel que $J_e(x, y) = |\partial \mathbf{x}(x, y) / \partial \varpi|$. Le Jacobien représente le déterminant de la matrice Jacobienne définie sur chaque élément Ω_e en (x, y) par $(MJ_e) = \partial \mathbf{x} / \partial \varpi$ pour $\mathbf{x} = (x, y)$ et $\varpi = (\zeta, \eta)$, et M est la matrice de masse (diagonale).

Remarque 2.6. *Pour plus de détails sur le maillage du domaine arbitraire, on renvoie le lecteur à la référence [48].*

De plus, on suppose que la triangulation est régulière, c'est-à-dire,

$$h_e^{-1} \|\chi_e'\| + h_e \left\| (\chi_e')^{-1} \right\| \leq \varrho.$$

Remarque 2.7. *Pour garantir qu'il y a une et une seule fonction de transformation de l'élément de référence vers l'élément déformé Ω_e , on vérifie que le Jacobien $J_e = \det(MJ_e)$ est non nul en chaque point de l'élément Ω_e . Alors, il existe une fonction inverse permettant le passage de chaque point $\mathbf{x} = (x, y)$ de l'élément Ω_e à son équivalent $\varpi = (\zeta, \eta)$ dans l'élément de référence [48].*

Par exemple, si l'on considère un élément quadrilatère de $\{\Omega_e\}_{e=1}^K$, la transformation χ_e entre un élément arbitraire $\Omega_e = [a_e, a_{e+1}] \times [b_e, b_{e+1}]$ à un élément de référence $\Sigma = [-1, 1]^2$, où dans la suite Λ_e est égal soit à $[a_e, a_{e+1}]$ ou $[b_e, b_{e+1}]$ et $\Lambda = [-1, 1]$ tel que pour tout \mathbf{x} dans Ω_e et $\varpi = (\zeta, \eta)$, χ_e est défini par :

$$\mathbf{x} = \chi_e(\zeta, \eta) = (\chi_e^1(\zeta), \chi_e^2(\eta)) = \left(2 \frac{\zeta - a_e}{a_{e+1} - a_e} - 1, 2 \frac{\eta - b_e}{b_{e+1} - b_e} - 1 \right), \quad (15)$$

pour cela, on prend $\frac{2}{h} d\zeta = dx$, alors il est facile de déduire :

$$\frac{2}{h_e} (\zeta - a_e) = 1 + x \quad \text{et} \quad \frac{2}{h_e} (a_{e+1} - \zeta) = 1 - x,$$

où $h_e = b_{e+1} - b_e = a_{e+1} - a_e$.

Dans la suite, on note par d_e , avec $1 \leq e \leq K$, la fonction définie dans $\bar{\Omega}_e$ égale au produit des distances des quatre arêtes, tandis que $d_{e,l}$ désigne le produit de la distance d'un point sur $\Gamma_{e,l}$ aux extrémités du coté. Par exemple, la fonction d_e est donnée par

$$d_e(\varpi) = (\zeta - a_e)(a_{e+1} - \zeta)(\eta - b_e)(b_{e+1} - \eta), \quad (16)$$

où la fonction correspondante $d(\mathbf{x})$ définie sur $]-1, 1[^2$, est donnée par

$$d(\mathbf{x}) = (1 - x^2)(1 - y^2),$$

Une approche systématique a été proposée avec la décomposition du domaine en un nombre discret d'éléments formant un maillage contenant des nœuds représentant les inconnues du problème. C'est le principe général de la méthode des éléments finis de laquelle découle la méthode des éléments spectraux. Les problèmes complexes sont décomposés en une multitude de problèmes plus simples. Pour chaque élément, le système matriciel élémentaire est déterminé puis assemblé aux autres systèmes pour former le système global qui est ensuite résolu par une méthode directe ou itérative.

Par ailleurs, la géométrie de chacun des éléments est ramenée par rapport à un élément de référence aux dimensions normalisées et, comme l'interpolation des champs d'inconnues, l'interpolation géométrique est réalisée à partir d'une base lagrangienne. Cette opération permet l'utilisation d'une unique base d'interpolation exprimée dans le repère local de référence commun à tous les éléments. Les équations sont ainsi résolues de

manière locale sur un élément de référence normalisé puis leurs solutions sont renvoyées dans le domaine géométrique par le biais du jacobien de la transformation liant cet élément à chaque élément géométrique. Cette normalisation offre, par ailleurs, la possibilité d'utiliser les règles de quadrature pour l'intégration numérique, celles-ci étant applicables sur des intervalles normalisés.[12]

Par conséquent, la solution du problème de l'obstacle pénalisé (P_δ) est approchée par des polynômes de Legendre L_N pour chaque variable spatiale.

L'utilisation d'éléments quadrilatéraux dans la méthode des éléments spectraux a pour avantage principal de définir des fonctions de base et des nœuds basés sur le produit tensoriel en dimension une.

• Points d'interpolation

On note par ζ_i^N , $i = 0, \dots, N$ les points de Gauss-Lobatto-Legendre d'ordre N dans l'élément de référence Ω , donnés par :

$$\zeta_i^N = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \\ \text{racine de } L'_N(\zeta) & \text{si } i = 1, \dots, N-1 \\ 1 & \text{si } i = N \end{cases}$$

Alors, on définit la grille de Gauss-Lobatto-Legendre Ξ_N par :

$$\Xi_N = \{ \mathbf{x} = (\zeta_i^N, \zeta_j^N), \text{ pour } 0 \leq i, j \leq N \}.$$

On note par \mathcal{I}_N l'opérateur d'interpolation sur cette grille : pour toute fonction v continue sur $\bar{\Omega}$, $\mathcal{I}_N v$ appartient à $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et vérifie [9]

$$(\mathcal{I}_N v)(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Xi_N.$$

On note par \mathbb{P}_N l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à N dans chaque direction spatiale. Dans le cas des éléments finis, il est important de rappeler que les fonctions de base sont généralement construites à partir de polynômes de degré ≤ 2 à l'intervalle $\Lambda = [-1, 1]$. Avec les éléments spectraux, elles seront définies dans \mathbb{P}_N que l'on notera $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ sur le segment. La méthode des éléments spectraux englobe donc clairement le cas des éléments finis. A un élément spectral est associé un ensemble de points choisis suivant l'espace de polynômes \mathbb{P}_N . Ceci permet de le décrire très précisément. Par cette

approche, on évite de diviser un domaine en un trop grand nombre d'éléments. Lorsque l'on augmente le nombre d'éléments, le degré du polynôme restant fixe, cette description est la version "h". C'est celle qui est le plus souvent utilisée en éléments finis. Lorsque l'on augmente le degré du polynôme, la subdivision en sous-domaines étant fixée, on appelle cette approche la version "p". C'est celle qui est le plus souvent utilisée dans les méthodes spectrales. Avec la méthode des éléments spectraux, nous utilisons une combinaison de ces deux versions qui est appelée la version "hp" ou méthode "hp".[12]

Afin de pouvoir définir le support des fonctions tests qui seront utilisées pour discrétiser le problème (P_δ) , on doit définir les polynômes d'interpolation qu'on a utilisés dans $\mathbb{P}_N(\Lambda)$.

• **Polynômes d'interpolation :**

Dans le cas de la méthode des éléments finis et de sa variante spectrale, l'interpolation Lagrangienne est très souvent employée pour interpoler les inconnues du problème ainsi que la géométrie du domaine étudié. La base des fonctions utilisées se compose des polynômes de Lagrange-Legendre et de Gauss-Lobatto qui sont définis de la manière suivante :

$$l_i^N(\zeta) = -\frac{(1-\zeta^2) L_N'(\zeta)}{N(N+1) L_N(\zeta_i^N) (\zeta - \zeta_i^N)}, \quad \text{avec } i = 0, 1, \dots, N \quad (17)$$

qui satisfont la propriété de cardinalité aux points de collocation ζ_i^N

$$l_i^N(\zeta_j^N) = \delta_{ij}, \quad \text{avec } i, j = 0, \dots, N$$

avec δ est le symbole de Kronecker.

Une fois tous les degrés de liberté connus, on peut interpoler la fonction solution et obtenir la valeur interpolée de la solution en tout point du domaine. Donc l'interpolation Lagrangienne revient à donner une signification physique à u , tel que

$$u(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) = \sum_{i,j=0}^N u_{i_j} l_i^N(\zeta) l_j^N(\eta), \quad (18)$$

où $x(\zeta, \eta)$ et $y(\zeta, \eta)$ sont les transformations de coordonnées d'un domaine quadrilatéral arbitraire Ω_e en un élément de référence Ω . Le choix actuel des fonctions de base permet une implémentation efficace des méthodes de quadrature. De plus, elles sont continues sur les interfaces des sous-domaines.

• **Quadrature**

Un tel choix de points dans un élément Ω_e va permettre de pouvoir évaluer de manière très précise l'intégrale d'une fonction continue sur ce support. En outre, nous allons pouvoir utiliser la formule d'intégration de Gauss-Lobatto-Legendre qui lie l'intégrale d'une fonction à la somme de ses valeurs sur les points ζ_i^N munis d'un poids noté ρ_i^N . En effet, pour une coordonnée simple ζ dont l'ensemble des nœuds est ζ_i^N dans $[-1, 1]$, l'égalité suivante est vraie pour tout polynôme ϕ de degré $\leq 2N - 1$

$$\forall \phi \in \mathbb{P}_{2N-1}([-1, 1]), \quad \int_{-1}^1 \phi(\zeta) d\zeta = \sum_{i=0}^N \phi(\zeta_i^N) \rho_i^N.$$

A titre d'exemple, on évalue les intégrales d'une fonction continue f par la formule de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre. Par exemple, on peut écrire en dimension 2

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f d\Omega \cong \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N f(\zeta_i^N, \zeta_j^N) \rho_i^N \rho_j^N,$$

et le produit discret associé est défini pour des fonctions ϕ et ψ continues sur Λ par

$$(\phi, \psi)_N = \sum_{i=0}^N \phi(\zeta_i^N) \psi(\zeta_i^N) \rho_i^N,$$

et pour tout φ_N dans $\mathbb{P}_N([-1, 1])$, la propriété suivante est vraie (voir [9])

$$\|\varphi_N\|_{L^2(-1,1)}^2 \leq \sum_{i=0}^N \varphi_N^2(\zeta_i^N) \rho_i^N \leq 3 \|\varphi_N\|_{L^2(-1,1)}^2, \quad (19)$$

on peut écrire aussi en dimension deux, pour tout φ_N dans $\mathbb{P}_N([-1, 1]^2)$,

$$\|\varphi_N\|_{L^2([-1,1]^2)}^2 \leq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \varphi_N^2(\zeta_i^N, \zeta_j^N) \rho_i^N \rho_j^N \leq 9 \|\varphi_N\|_{L^2([-1,1]^2)}^2, \quad (20)$$

où ρ_i^N pour $i = 0, \dots, N$, sont des poids positifs de dimension une de Gauss-Lobatto Legendre dans Λ et ρ_i^e , avec $i = 0, \dots, N_e$, est le poids correspondant associé au polynôme de Legendre de degré N_e dans le sous-domaine $\Lambda_e = [a_e, a_{e+1}]$, qui est donné par

$$\rho_i^e = \left(\frac{a_{e+1} - a_e}{2} \right) \rho_i = \frac{h_e}{2} \rho_i. \quad (21)$$

On note par (ζ_i^e, ζ_j^e) , avec $0 \leq i, j \leq N_e$, les points de Ω_e sous l'application inverse χ_e des points de Gauss-Lobatto dans l'élément de référence Ω . Cela permet de définir le produit discret pour toutes les fonctions u et v continues pour chaque Ω_e par

$$\begin{aligned} (u, v)_\lambda &= \sum_{e=1}^K (u, v)_{e,N} \\ &= \sum_{e=1}^K \sum_{i=0}^{N_e} \sum_{j=0}^{N_e} u(\zeta_i^e, \zeta_j^e) v(\zeta_i^e, \zeta_j^e) J_e(i, j) \rho_i^e \rho_j^e, \end{aligned} \quad (22)$$

qui coïncide avec le produit scalaire de $L^2(\Omega_e)$ chaque fois que le produit uvJ_e appartient à $\mathbb{P}_{2N_e-1}(\Omega_e)$, où $\mathbb{P}_{2N_e}(\Omega_e)$ est un espace polynomial de degré N_e dans toutes les directions correspondant à l'élément Ω_e , où λ est un paramètre de discrétisation, qui est un K -uplet de paire $\lambda_e = (h_e, N_e)$, tel que h_e est la longueur de Λ_e et h_e^2 est l'aire de Ω_e notée par $|\Omega_e|$ et N_e est un entier positif supérieur ou égal à 2.

Par conséquent, si on définit l'opérateur d'interpolation de Lagrange \mathcal{I}_N de Ξ_N dans $\mathbb{P}_N(\Omega)$, on obtient l'estimation suivante

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{L^2(\Omega)} \leq CN^{-s} \|v\|_{H^s(\Omega)}, \quad (23)$$

et pour toute fonction v dans $H^s(\Omega)$, telle que $s > \frac{3}{2}$, on a l'estimation suivante

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{H^1(\Omega)} \leq CN^{1-s} \|v\|_{H^s(\Omega)}. \quad (24)$$

De plus, on définit l'opérateur d'interpolation \mathcal{I}_λ de $C(\Omega)$ sur $S_\lambda(\Omega)$ comme l'interpolation dans l'élément Ω_e satisfaisant $\mathcal{I}_\lambda|_{\Omega_e} = \mathcal{I}_{\lambda_e}$, tel que

$$S_\lambda(\Omega) = \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_{p_e}(\Omega_e) \text{ pour toute } \Omega_e, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

où p_e est un degré polynomial arbitraire.

D'après [17], on donne les estimations d'interpolation pour la méthode des éléments spectraux à base nodale de Gauss-Lobatto-Legendre comme suit :

Lemme 2.5. *Pour tout entier positif p_e et pour toute fonction v dans $H^{s_e}(\Omega_e)$, tel que $s_e \geq \frac{d+1}{2}$, on a*

$$\|v - \mathcal{I}_{\lambda_e} v\|_{H^1(\Omega_e)} \leq Ch_e^{\min\{p_e+1, s_e\}-1} p_e^{1-s_e} \|v\|_{H^{s_e}(\Omega_e)}, \quad (25)$$

et

$$\|v - \mathcal{I}_{\lambda_e} v\|_{L^2(\Omega_e)} \leq C h_e^{\min\{p_e+1, s_e\}} p_e^{-s_e} \|v\|_{H^{s_e}(\Omega_e)}. \quad (26)$$

La borne supérieure de l'estimation d'erreur a posteriori, est basée sur les estimations d'erreur d'interpolation données par le lemme suivant [49] qui fournit une généralisation de l'estimation des opérateurs de Clément donnée dans [22] et [56] et donne une estimation de l'erreur d'interpolation en fonction du gradient de la fonction interpolée.

Lemme 2.6. *On suppose la partition Υ_h régulière, la distribution polynomiale comparable, et l'opérateur de Clément \mathcal{I}_{λ}^c est défini de $H_0^1(\Omega_e)$ dans $S_{\lambda}(\Omega_e)$. Alors il existe une constante positive C , tels que pour tout entier positif p_e , on a*

$$\|v - \mathcal{I}_{\lambda_e}^c v\|_{L^2(\Omega_e)} \leq C \frac{h_e}{p_e} \|\nabla v\|_{L^2(w_{\Omega_e})}, \quad (27)$$

et

$$\|v - \mathcal{I}_{\lambda_e}^c v\|_{L^2(\Gamma_e)} \leq C \sqrt{\frac{h_l}{p_l}} \|\nabla v\|_{L^2(w_{\Gamma_e})}. \quad (28)$$

tel que h_l est la longueur du bord Γ_e et $p_l = \max\{p_e, p_{e'}\}$, où Ω_e et $\Omega_{e'}$ sont des éléments partageant Γ_e , et w_{Ω_e} , w_{Γ_e} respectivement sont des patches couvrant Ω_e et Γ_e avec quelques couches.

Dans la section suivante, on donne quelques inégalités locales sur un sous-domaine arbitraire A_e qui seront utilisées pour obtenir la borne inférieure de l'estimation d'erreur a posteriori.

2.3.2 Quelques inégalités locales

Dans cette partie, on va donner quelques inégalités locales sur un sous domaine arbitraire Λ_e , qui seront utilisées pour calculer la borne inférieure de l'estimation d'erreur a posteriori. Tout d'abord, on donne une estimation des poids ρ_i^e avec $i = 0, \dots, N_e$, où, pour la démonstration des résultats, on a besoin d'utiliser la transformation (15) sur les inégalités correspondantes indiquées dans le domaine de référence Σ .

Lemme 2.7. Soient α et γ deux nombres réels $-1 < \alpha < \gamma$. Alors l'inégalité inverse suivante est vérifiée pour toute fonction φ suffisamment régulière

$$\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^\alpha d\zeta \leq ch_e^{2(\gamma-\alpha)} \int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi^2(\zeta) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^\gamma d\zeta \quad (29)$$

Démonstration. Ce résultat est obtenu en utilisant l'inégalité de poids donnée par le lemme 1.11 dans [9] page 71 et le changement de variable (15). ■

Maintenant, on donne une série de lemmes qui fournissent les estimations inverses polynomiales dans un intervalle standard.

Lemme 2.8. Toute fonction φ dans $H_0^1(\Lambda_e)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$ch_e^4 \int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta_j^e) (\zeta_j^e - a_e))^{-2} d\zeta \leq \int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi'^2(\zeta^e) d\zeta. \quad (30)$$

Démonstration. Ce résultat est obtenu en utilisant le lemme 1.5 dans [9] (page 68) et le changement de variable (15). ■

Dans les lemmes suivants, on donne des inégalités inverses locales.

Lemme 2.9. L'inégalité suivante est vérifiée pour tous les polynômes φ_{N_e} dans $\mathbb{P}_{N_e}(\Lambda_e)$, où N_e est un nombre entier positif

$$|\varphi_{N_e}|_{H^1(\Lambda_e)}^2 \leq cN_e^2 h_e \left(\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} d\zeta \right). \quad (31)$$

Démonstration. Le résultat est obtenu en utilisant le lemme 1.15 dans [9] (page 73) et le changement de variable (15).

Ainsi, à partir des lemmes (2.9) et (2.10), on déduit que

$$h_e^4 \left(\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} d\zeta \right) \leq |\varphi_{N_e}|_{H^1(\Lambda_e)}^2$$

et

$$h_e^4 \left(\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} d\zeta \right) \leq cN_e^2 h_e \left(\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} d\zeta \right).$$

De plus, par le changement de variable (15), on obtient

$$h_e^2 \left(\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} d\zeta \right) \leq |\varphi_{N_e}|_{H^1(\Lambda_e)}^2$$

et

$$h_e^2 \left(\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} d\zeta \right) \leq c N_e^2 h_e \left(\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta^e) ((a_{e+1} - \zeta^e) (\zeta^e - a_e))^{-1} d\zeta \right).$$

■

Lemme 2.10. Soient α et γ deux nombres réels tel que $-1 < \alpha < \gamma$. Alors pour tout polynôme φ_{N_e} dans $\mathbb{P}_{N_e}(\Lambda_e)$, l'inégalité inverse suivante est vérifiée

$$\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta) ((a_{e+1} - \zeta) (\zeta - a_e))^\alpha d\zeta \leq c \frac{N_e^{2(\gamma-\alpha)}}{h_e^{2(\gamma-\alpha)}} \int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta) ((a_{e+1} - \zeta) (\zeta - a_e))^\gamma d\zeta$$

Démonstration. Ce résultat est obtenu en utilisant le lemme 4 donné dans [8] et le changement de variable (15). ■

Lemme 2.11. Soit γ un nombre réel non-négatif. Alors pour tout polynôme φ_{N_e} dans $\mathbb{P}_{N_e}(\Lambda_e)$, l'inégalité inverse suivante est vérifiée

$$\int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta) ((a_{e+1} - \zeta) (\zeta - a_e))^{2\gamma} d\zeta \leq N_e^{2(2-\gamma)} h_e^{2\gamma-1} \int_{a_e}^{a_{e+1}} \varphi_{N_e}^2(\zeta) ((a_{e+1} - \zeta) (\zeta - a_e))^\gamma d\zeta \quad (32)$$

Démonstration. Ce résultat est facile à démontrer en utilisant le lemme 4 donné dans [8] et le changement de variable (15). ■

CHAPITRE 3

L'ÉTUDE DU PROBLÈME DISCRET

Dans ce chapitre, on présente la discrétisation du problème (P_δ) par la méthode des éléments spectraux. Il s'agit de considérer la formulation variationnelle discrète du problème qu'on va étudier. Tout d'abord, on commence par définir la version discrète de la forme bilinéaire (4) sous la forme

$$\sigma_\lambda(y_\lambda, v_\lambda) = (\nabla y_\lambda, \nabla v_\lambda)_\lambda = \sum_{e=1}^K \sigma_{e,\lambda}(y_\lambda, v_\lambda). \quad (33)$$

où $\sigma_{e,\lambda}$ est obtenu en substituant les intégrales dans σ , par application de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre sur le sous-domaine Ω_e . On obtient

$$\sigma_{e,\lambda}(y_\lambda, v_\lambda) = \int_{\Omega_e} \nabla y_\lambda(\zeta_i^{N_e}, \zeta_j^{N_e}) \nabla v_\lambda(\zeta_i^{N_e}, \zeta_j^{N_e}) d\mathbf{x} \quad (34)$$

Toutefois, la propriété d'exactitude de la formule de quadrature donne

$$\sigma_\lambda(y_\lambda, v_\lambda) = \sigma(y_\lambda, v_\lambda), \text{ pour tous } y_\lambda \text{ et } v_\lambda \text{ dans } V_\lambda$$

où l'espace discret V_λ est donné par

$$V_\lambda = \{v_\lambda \in H_0^1(\Omega) \mid v_\lambda|_{\Omega_e} \text{ dans } \mathbb{P}_{N_e}(\Omega_e)\},$$

le paramètre de discrétisation λ est un K -uplet de couples (h_e, N_e) , où les N_e sont des entiers ≥ 2 .

Comme prouvé dans [9], la forme bilinéaire σ_λ satisfait le lemme suivant

Lemme 3.1. *La forme bilinéaire discrète σ_λ satisfait respectivement les propriétés de continuité*

$$\forall y_\lambda \in V_\lambda, \forall v_\lambda \in V_\lambda, \sigma_\lambda(y_\lambda^\delta, v_\lambda) \leq c \|y_\lambda^\delta\|_{H^1\left(\bigcup_{e=1}^K \Omega_e\right)} \|v_\lambda\|_{H^1\left(\bigcup_{e=1}^K \Omega_e\right)},$$

et de coercivité

$$\forall y_\lambda \in V_\lambda, \sigma_\lambda(y_\lambda^\delta, y_\lambda^\delta) \geq C \|y_\lambda^\delta\|_{H^1\left(\bigcup_{e=1}^K \Omega_e\right)}^2.$$

3.1 Le problème variationnel discret

La méthode de discrétisation utilisée est la méthode des éléments spectraux. Ceci signifie qu'à partir du problème initial, on cherche une solution discrète telles que les équations soient exactement satisfaites en un nombre fini de points. On peut définir le nouveau problème discret en évaluant les intégrales du problème (P_δ) par la méthode de collocation au moyen de formules de quadrature beaucoup plus précises.

Alors, le problème discret (P_λ^δ) s'écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } y_\lambda^\delta \text{ dans } V_\lambda \text{ tel que} \\ \sigma_\lambda(y_\lambda^\delta, v_\lambda)_\lambda + (\beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi), v_\lambda)_\lambda = (f, v_\lambda)_\lambda, \text{ pour tout } v_\lambda \text{ dans } V_\lambda, \end{array} \right. \quad (P_\lambda^\delta)$$

avec $\sigma_\lambda(y_\lambda^\delta, v_\lambda)_\lambda$ donné par (33), où les conditions de coercivité et de continuité (H_1) et (H_2) de la forme σ_λ sont données par le lemme 3.1. Ainsi, les propriétés de la forme σ_λ sont bien connues, en particulier pour toute fonction v_λ dans V_λ , on a

$$|v_\lambda|_{H^1\left(\bigcup_{k=1}^K \Omega_e\right)}^2 \leq \sigma_\lambda(v_\lambda, v_\lambda) \leq 9 |v_\lambda|_{H^1\left(\bigcup_{k=1}^K \Omega_e\right)}^2.$$

Ainsi, on en déduit immédiatement que le problème (P_λ^δ) admet une solution unique.

3.2 Estimations d'erreurs a priori et a posteriori

3.2.1 L'estimation d'erreur a priori

Dans cette partie, on donne quelques résultats de convergence du schéma de discrétisation du problème (P_λ^δ) , en obtenant une estimation a priori de l'erreur entre la solution continue y^δ et son approximation y_λ^δ par la méthode des éléments spectraux. On commence par introduire le problème auxiliaire $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$ défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{y}_\lambda^\delta \text{ dans } V_\lambda \text{ tel que} \\ \sigma_\lambda(\tilde{y}_\lambda^\delta, v_\lambda)_\lambda + (\beta_\delta(y^\delta - \varphi), v_\lambda)_\lambda = (f, v_\lambda)_\lambda, \text{ pour tout } v_\lambda \text{ dans } V_\lambda, \end{array} \right. \quad (\tilde{P}_\lambda^\delta)$$

On considère le lemme suivant qui donne une première estimation de β .

Lemme 3.2. *Soient y^δ , y_λ^δ et \tilde{y}_λ^δ respectivement les solutions des problèmes (P^δ) , (P_λ^δ) et $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$, alors pour l'opérateur de pénalisation β , on trouve l'estimation suivante*

$$\frac{1}{\delta} \|\beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} \quad (35)$$

Démonstration. Comme y^δ , y_λ^δ , et \tilde{y}_λ^δ sont respectivement les solutions des problèmes (P^δ) , (P_λ^δ) et $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\delta^2} \|\beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \left(f - \frac{1}{\delta} \beta(y^\delta - \varphi), \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right) \\ & \quad - \left(f - \frac{1}{\delta} \beta(y_\lambda^\delta - \varphi), \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right) \\ & \quad + \frac{1}{\delta^2} \|\beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, par la définition et les propriétés de β , on peut voir que $\beta(r) - r$ est décroissante (hypothèse H_4), ceci donne

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\delta^2} \left\| \beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad = \left(\beta_\delta(y^\delta - \varphi) - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi), y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right) \\ & \quad + \left(\beta_\delta(y^\delta - \varphi) - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi), (y_\lambda^\delta - \varphi) - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi) + \beta_\delta(y^\delta - \varphi) - (y^\delta - \varphi) \right). \end{aligned}$$

Ou encore une fois, d'après les propriétés de β , et par application de l'inégalité de Young et avec un choix approprié de ε , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\delta^2} \left\| \beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \quad \frac{1}{2\varepsilon} \left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{\delta^2} \left\| \beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\frac{1}{\delta} \left\| \beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)}.$$

■

Lemme 3.3. Soient y^δ , y_λ^δ et \tilde{y}_λ^δ respectivement les solutions des problèmes (P^δ) , (P_λ^δ) et $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$, Alors on obtient l'estimation suivante

$$\left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\delta} \left\| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (36)$$

Démonstration. Soient y_λ^δ et \tilde{y}_λ^δ les solutions respectivement des problèmes (P_λ^δ) et $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)}^2 & = \left(\beta_\delta(y^\delta - \varphi) - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi), y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right) + \\ & \quad \left(\beta_\delta(y^\delta - \varphi) - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi), (y_\lambda^\delta - \varphi) - (y^\delta - \varphi) \right). \end{aligned}$$

D'après les propriétés de β , et en utilisant le Théorème de la moyenne [33], on obtient

$$\left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \left(\beta'_\delta(\chi^\delta) \left\| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

où χ^δ est une valeur donnée entre $y_\lambda^\delta - \varphi$ et $y^\delta - \varphi$. Enfin, d'après les propriétés de β'_δ , on obtient

$$\left| \tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta} \left\| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

■

Lemme 3.4. Soient y^δ , y_λ^δ et \tilde{y}_λ^δ respectivement les solutions des problèmes (P^δ) , (P_λ^δ) et $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$. Alors on obtient l'estimation suivante

$$\left| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} \leq \left| y^\delta - \mathcal{I}_\lambda y^\delta \right|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, on déduit

$$\left\| \beta(y^\delta - \varphi) - \beta(y_\lambda^\delta - \varphi) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\delta}} \left| y^\delta - \mathcal{I}_\lambda y^\delta \right|_{H^1(\Omega)}.$$

Démonstration. En posant $v = v_\lambda$ dans le problème (P_λ^δ) , puis en combinant avec le problème auxiliaire $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$ et sachant que $\mathcal{I}_\lambda y^\delta$ est l'interpolation de y^δ appartenant à V_λ ; il vient, en utilisant l'équation de projection, que

$$\left(\nabla \left(y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right), \nabla v_\lambda \right) = 0, \quad (37)$$

D'où l'on peut, évidemment, déduire des problèmes (P_λ^δ) et $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$, l'inégalité suivante

$$\left| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)}^2 = \left(\nabla \left(y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right), \nabla \left(y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right) \right) \leq \left| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} \left| y^\delta - \mathcal{I}_\lambda y^\delta \right|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalement, on a

$$\left| y^\delta - \tilde{y}_\lambda \right|_{H^1(\Omega)} \leq \left| y^\delta - \mathcal{I}_\lambda y^\delta \right|_{H^1(\Omega)} . \quad (38)$$

De plus, d'après le lemme 3.2, on déduit

$$\left\| \beta (y^\delta - \varphi) - \beta (y_\lambda^\delta - \varphi) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{\delta}} \left| y^\delta - \mathcal{I}_\lambda y^\delta \right|_{H^1(\Omega)} .$$

■

Lemme 3.5. Soient y^δ et \tilde{y}_λ^δ respectivement les solutions de (P^δ) et $(\tilde{P}_\lambda^\delta)$, alors on obtient

$$\left\| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left| \varphi - \mathcal{I}_\lambda \varphi \right|_{H^1(\Omega)} .$$

Démonstration. Pour tout ϑ dans $L^2(\Omega)$, il existe v dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ tel que

$$(\nabla \varphi, \nabla v) = (\vartheta, v), \quad \text{pour tout } v \text{ in } H_0^1(\Omega),$$

alors, on obtient

$$\left| \varphi \right|_{H^2(\Omega)} \leq c \left\| \vartheta \right\|_{L^2(\Omega)},$$

En posant $\vartheta = y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta$, $v = y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta$, et en utilisant le théorème d'Aubin-Nitsch et faisant appel à l'équation de projection (37), comme $\mathcal{I}_\lambda \varphi$ appartient à V_λ , on obtient

$$\left\| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \varphi - \mathcal{I}_\lambda \varphi \right|_{H^1(\Omega)} \left| y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta \right|_{H^1(\Omega)} .$$

■

Ainsi, d'après les résultats donnés par les lemmes 3.4 et 3.5, on peut facilement déduire le théorème suivant.

Théorème 3.1. Soient y^δ et y_λ^δ respectivement les solutions de (P^δ) et (P_λ^δ) , alors on obtient l'estimation suivante

$$\left\| y^\delta - y_\lambda^\delta \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sum_{e=1}^K h_e^{\min\{N_e+1, s_e\}^{-1} N_e^{1-s_e}} \left(\left\| y^\delta \right\|_{H^{s_e}(\Omega_e)} + \frac{1}{\delta} \left\| \varphi \right\|_{H^{s_e}(\Omega_e)} \right),$$

où C est une constante positive indépendante de λ et δ .

Démonstration. Soient y^δ et y_λ^δ respectivement les solutions de (P^δ) et (P_λ^δ) , on peut écrire

$$\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|y^\delta - \tilde{y}_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{y}_\lambda^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)}.$$

En suite, en utilisant les lemmes 3.3 et 3.4, et 3.5, on déduit

$$\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|y^\delta - \mathcal{I}_\lambda y^\delta\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C}{\sqrt{\delta}} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda \varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalement, on utilise l'estimation donnée dans le lemme 2.5 pour conclure. ■

3.2.2 L'estimation d'erreur a posteriori

Dans cette section, on définit l'estimateur d'erreur résiduel a posteriori et on montre sa fiabilité et son efficacité, c'est-à-dire, on donne une borne inférieure et une borne supérieure en termes de l'erreur exacte de la solution discrète pour l'estimateur d'erreur.

• Borne supérieure de l'estimation d'erreur a posteriori

Dans le théorème suivant, on donne le résultat principal de l'estimation d'erreur a posteriori du problème de l'obstacle pénalisé (P_λ^δ) , qui est l'estimation de la borne supérieure (fiabilité de l'indicateur d'erreur) de l'erreur entre la solution exacte et son approximation spectrale en terme de l'indicateur d'erreur.

Théorème 3.2. Soient y^δ et y_λ^δ respectivement les solutions des problèmes (P^δ) et (P_λ^δ) , alors on obtient l'estimation suivante

$$\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sum_{e=1}^K (\eta_{\alpha,e}),$$

où C est une constante positive indépendante de λ et δ .

De plus, l'indicateur local $\eta_{\alpha,e}$ pour α dans $[0, 1]$, associé à l'élément Ω_e est la somme des deux termes η_{α,B_e} et η_{α,E_e} , où le premier terme est le résidu pondéré interne

donné par

$$\eta_{\alpha, B_e} = \left(\frac{h_e}{N_e} \left\| (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)} \right), \quad (39)$$

et le second, est le résidu pondéré externe donné par

$$\eta_{\alpha, E_e} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L(K)} \left(\frac{h_l}{N_l} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial_n y_\lambda}{\partial \eta} \right] d_{e,l}^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}, \quad (40)$$

où le crochet $[\]$ désigne le saut d'une fonction à travers l'interface entre deux sous-domaines, et $\mathcal{I}_\lambda^c \varphi$ est la projection de φ appartenant à $L_2(\Omega_e)$ sur l'espace des polynômes de degré $N_e - 1$. Ainsi, on peut facilement déduire que l'indicateur global est donné par la somme des indicateurs locaux. De plus, on définit η_α , par

$$\eta_\alpha = \sum_{e=1}^k \eta_{\alpha, e}. \quad (41)$$

Démonstration. Soit R_λ^δ le résidu défini par

$$R_\lambda^\delta = -\Delta y_\lambda^\delta + \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi) - f, \quad (42)$$

qui appartient à $H^{-1}(\Omega)$. Par suite, pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle R_\lambda^\delta, v \rangle &= (\nabla y_\lambda^\delta, \nabla v) + \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{k,l}} \partial_n (y_\lambda^\delta)(\tau) v(\tau) d\tau + \\ &\quad + (\beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi), v)_{L^2(\Omega_e)} - (f, v)_{L^2(\Omega_e)}, \end{aligned} \quad (43)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ et (\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Dans la suite, on définit e_y et e_β par

$$e_y = y^\delta - y_\lambda^\delta \quad \text{and} \quad e_\beta = \beta_\delta (y^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi) - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \varphi),$$

où il est clair que e_y et e_β sont dans $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, on peut écrire l'égalité (43), comme suit

$$\begin{aligned}
(\nabla y_\lambda^\delta, \nabla v)_\lambda + \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} \partial_n (y_\lambda^\delta) (\tau) v (\tau) d\tau \\
+ (\beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi), v) - (\mathcal{I}_\lambda^c f, v)_{L^2(\Omega_e)} - \langle R_\lambda^\delta, v \rangle = 0 \quad (44)
\end{aligned}$$

D'après le problème continu (P_δ) et l'équation (44), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\text{pour } e_y \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad (\nabla e_y, \nabla v)_\lambda + \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} \partial_n (y^\delta - y_\lambda^\delta) (\tau) v (\tau) d\tau \\
+ (e_\beta, v)_{L^2(\Omega_e)} = \langle R_\lambda^\delta, v \rangle.
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
\text{pour } e_y \text{ dans } H_0^1(\Omega), \quad (\nabla e_y, \nabla v)_\lambda = \langle R_\lambda^\delta, v \rangle \\
- \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} \partial_n (y^\delta - y_\lambda^\delta) (\tau) v (\tau) d\tau \\
- (e_\beta, v)_{L^2(\Omega_e)}. \quad (45)
\end{aligned}$$

Pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, on choisit de prendre $v = e_y$. Par suite l'égalité (45) s'écrit sous la forme

$$(\nabla e_y, \nabla e_y)_\lambda = \langle R_\lambda^\delta, e_y \rangle - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} [\partial_n y_\lambda^\delta] (\tau) e_y (\tau) d\tau - (e_\beta, e_y)_{L^2(\Omega_e)}.$$

De l'égalité (43) et d'après la relation d'orthogonalité de Galerkin, on déduit que R_λ^δ est orthogonal à V_λ , alors on a

$$\langle R_\lambda^\delta, v_\lambda \rangle = 0, \text{ pour tout } v_\lambda \text{ dans } V_\lambda.$$

Alors pour tout v_λ dans $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$, on peut prendre $v_\lambda = \mathcal{I}_\lambda^c e_y$; ceci donne

$$(\nabla e_y, \nabla e_y)_\lambda = \langle R_\lambda^\delta, e_y - \mathcal{I}_\lambda^c e \rangle - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} [\partial_n y_\lambda^\delta] (\tau) e_y (\tau) d\tau - (e_\beta, e_y),$$

où \mathcal{I}_λ^c désigne l'opérateur d'interpolation de Clément de $H_0^1(\Omega_e)$ dans $\mathbb{P}_{N_e}^0(\Omega_e)$.

Sachant que la fonction β est croissante, c'est-à-dire, on a

$$(\beta_\delta (y^\delta - \varphi) - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \varphi), y^\delta - y_\lambda^\delta) \geq 0,$$

ou encore

$$-(\beta_\delta (y^\delta - \varphi) - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \varphi), y^\delta - y_\lambda^\delta) \leq 0,$$

ou bien

$$-(e_\beta, e_y) \leq 0,$$

et comme

$$(\nabla e_y, \nabla e_y)_{L^2(\Omega)} = \|\nabla e_y\|_{L^2(\Omega)}^2, p[/]$$

alors on obtient

$$\|\nabla e_y\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \langle R_\lambda^\delta, e_y - \mathcal{I}_\lambda^c e \rangle - \frac{1}{2} \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} [\partial_n y_\lambda^\delta](\tau) (e_y - \mathcal{I}_\lambda^c e)(\tau) d\tau.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que

$$\begin{aligned} \|\nabla e_y\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|R_\lambda^\delta\|_{L^2(\Omega)} \|e_y - \mathcal{I}_\lambda^c e\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \|[\partial_n y_\lambda^\delta]\|_{L^2(\Gamma_{e,l})} \|e_y - \mathcal{I}_\lambda^c e\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on obtient

$$\begin{aligned} \|e_y\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left(\left(\|\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)\|_{L^2(\Omega)} + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|e_y - \mathcal{I}_\lambda^c e\|_{L^2(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{e=1}^K \sum_{l=1}^{L(K)} \|[\partial_n y_\lambda^\delta]\|_{L^2(\Gamma_{e,l})} \|e_y - \mathcal{I}_\lambda^c e\|_{L^2(\Gamma_{e,l})} \right). \end{aligned}$$

Par application des lemmes 2.7 et 2.11 dans chaque direction pour $\nu = 0$ et $\gamma = \alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} \|e_y\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{e=1}^K \left(\left(\left(\frac{N_e}{h_e} \right)^{2\alpha} \left(\frac{h_e}{N_e} \right) \left\| (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{h_e}{N_e} \right) \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega)} \right) \|e_y\|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L(K)} \left(\frac{N_l}{h_l} \right)^{2\alpha} \left(\frac{h_l}{N_l} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_{e,l}^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})} \|e_y\|_{H^1(\Gamma_{e,l})} \right). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned} \|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq & C \sum_{e=1}^K \left(\left(\left(\frac{N_e}{h_e} \right)^{2\alpha} \left(\frac{h_e}{N_e} \right) \left\| (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \right. \\ & \left. \left(\frac{h_e}{N_e} \right) \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega)} \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L(K)} \left(\frac{N_l}{h_l} \right)^{2\alpha} \left(\frac{h_l}{N_l} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_{e,l}^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}. \end{aligned}$$

■

• Borne inférieure de l'estimation d'erreur a posteriori

On s'intéresse maintenant à la détermination des bornes inférieures de l'estimation d'erreur a posteriori (efficacité de l'indicateur d'erreur), où on montre que $\hat{\eta}_{\alpha,e}$ est aussi une borne inférieure de $\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)}$. Cependant, ceci n'est pas vraie en raison de l'inadéquation des inégalités inverses des polynômes. Ainsi, en utilisant les résultats existant sur l'estimation d'erreur a posteriori pour la méthode hp des éléments finis appliquée aux équations elliptiques, on peut obtenir une borne inférieure de l'erreur $\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)}$ en terme de l'indicateur local $\eta_{\alpha,e}$, α dans $[0, 1]$. Comme mentionné dans [7], les choix les plus naturels pour α sont 0 et 1. Ainsi, pour optimiser le choix de l'indicateur, on va établir les majorations pour toutes les valeurs de α .

Les lemmes suivants donnés dans [60] fournissent ainsi un résultat pour l'extension au bord.

Lemme 3.6. *Soit Γ_e le bord de Ω_e , alors pour chaque polynôme φ_{p_e} , de degré p_e sur Γ_e , $\varepsilon \in]0, 1]$ et $\gamma \in]\frac{1}{2}, 1]$, il existe une extension φ_{p_e} dans $H^1(\Omega_e)$ tels que*

$$q_{\Omega_e \setminus \Gamma_e}^{N_e} = q_{\Gamma_e}^{N_e} d_{e,l}^\gamma \quad \text{et} \quad \varphi_{p_e} \setminus_{\Gamma_{e,l} \setminus \Gamma_e} = 0, \quad (46)$$

$$\|\varphi_{p_e}\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \leq C h_e \varepsilon \left\| \varphi_{p_e} d_{e,l}^{\frac{\gamma}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_e)}^2, \quad (47)$$

et

$$\|\nabla \varphi_{p_e}\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \leq \frac{C}{h_e} (\varepsilon N^{2(2-\gamma)} + \varepsilon^{-1}) \left\| \varphi_{p_e} d_{e,l}^{\frac{\gamma}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_e)}^2. \quad (48)$$

Démonstration. La preuve est immédiate, en utilisant le lemme 2.6 dans [49] et le changement de variable (15). \blacksquare

Théorème 3.3. Soient α donné dans $[0, 1]$ et $\varepsilon > 0$, alors l'estimation suivante est satisfaite

$$\hat{\eta}_{\alpha,e}^2 \leq Ch_e^{4\alpha} N_e^{2(1-\alpha)} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)}^2 + C \frac{h_e^{2(2\alpha+1)}}{N_e^{2(1-\mu^+)}} \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)}^2 + \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (49)$$

où

$$\hat{\eta}_{\alpha,e} = \frac{h_e}{N_e} \left\| (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^\alpha \right\|_{L^2(\Omega_e)},$$

tel que $\mu^+ = \max \{ \frac{1}{2} + \varepsilon - \alpha, 0 \}$ et C est une constante positive indépendante de λ et δ .

Démonstration. Pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$, on a

$$a(y^\delta - y_\lambda^\delta, v) = \sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega_e} (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi))(\mathbf{x}) (v - v_\lambda)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} \partial_n (y^\delta - y_\lambda^\delta)(\tau) (v - v_\lambda)(\tau) d\tau - \int_{\Omega_e} (\beta_\delta (y^\delta - \varphi) - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right), \quad (50)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega_e} (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi))(\mathbf{x}) (v)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L(K)} \int_{\Gamma_{e,l}} \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial n} \right](\tau) v(\tau) d\tau \right) = a(y^\delta - y_\lambda^\delta, v) - \sum_{e=1}^K \left(\int_{\Omega_e} (\beta_\delta (y^\delta - \varphi) - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi))(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right).$$

Premièrement, pour α dans $]0, 1[$, on prend $v = v_e$ dans la relation (50), ainsi on obtient

$$v_e = \begin{cases} (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^\alpha & \text{dans } \Omega_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} \mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi) v_e \, d\mathbf{x} = \\ &\int_{\Omega_e} f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi) v_e \, d\mathbf{x} + \\ &\int_{\Omega_e} (\mathcal{I}_\lambda^c f - f) v_e \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &\leq |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} |v_e|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &\|(\beta_\delta (y^\delta - \varphi) - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi))\|_{L^2(\Omega_e)} \|v_e\|_{L^2(\Omega_e)} + \\ &\|\mathcal{I}_\lambda^c f - f\|_{L^2(\Omega_e)}^2, \quad (51) \end{aligned}$$

En considérant la semi-norme de v dans H^1 , il vient

$$\begin{aligned} |v_e|_{H^1(\Omega_e)}^2 &= \|\nabla v_e\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \\ &= \int_{\Omega_e} (\nabla (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^\alpha)^2 \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |v_e|_{H^1(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} \{ \nabla (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^\alpha + \\ &(\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) \nabla d_e^\alpha \}^2 \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |v_e|_{H^1(\Omega_e)}^2 &\leq 2 \int_{\Omega_e} \left(\nabla ((\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)))^2 d_e^{\alpha 2} + \right. \\ &\left. (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi))^2 (\nabla d_e^\alpha)^2 \right) \, d\mathbf{x}. \quad (52) \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant les inégalités polynomiales inverses données dans les lemmes 2.11 et 2.12 sur chaque variable spatiale avec $\nu = 2(\alpha - 1)$ et $\gamma = \alpha$, et comme $\alpha > \frac{1}{2}$, alors l'inégalité (52) peut s'écrire sous la forme

$$|v_e|_{H^1(\Omega_e)}^2 \leq Ch_e^{2(2\alpha-1)} N_e^{2(2-\alpha)} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2, \quad (53)$$

Le lemme 2.8, donne

$$\begin{aligned} \|v_e\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &\leq h_e^{2\alpha} \left\| (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \\ &\leq h_e^{2\alpha} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)}^2, \end{aligned} \quad (54)$$

En substituant les inégalités (53) et (54) dans l'inégalité (51) et en utilisant encore le lemme 2.8, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)} &\leq C h_e^{2\alpha-1} N_e^{(2-\alpha)} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &h_e^{2\alpha} \left(\frac{1}{\delta} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)} + \frac{1}{\delta} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)} \right), \end{aligned} \quad (55)$$

Multipliant l'inégalité (55) par $\frac{h_e}{N_e}$, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{\alpha,e} &\leq C h_e^{2\alpha} N_e^{(1-\alpha)} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &C \frac{h_e^{(2\alpha+1)}}{N_e} \left(\frac{1}{\delta} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)} + \frac{1}{\delta} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)} \right), \end{aligned} \quad (56)$$

où $\hat{\eta}_{\alpha,e} = \frac{h_e}{N_e} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)}$ ou encore $\hat{\eta}_{\alpha,e} = \frac{h_e}{N_e} \left\| (f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)}$.

Dans le cas $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, en utilisant l'inégalité donnée dans le lemme 2.11 pour chaque variable avec $\nu = \alpha$ tel que $\gamma > \frac{1}{2}$, avec $\varepsilon > 0$, et en posant $\gamma = \frac{1}{2} + \varepsilon$, l'estimation (56), donne

$$\begin{aligned} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)} &= \frac{N_e}{h_e} \hat{\eta}_{\alpha,e} \\ &= \left\| (f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)} \\ &\leq C N_e^{\gamma-\alpha} \left\| (f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)) d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)} \\ &= C N_e^{\gamma-\alpha} \left(\frac{N_e}{h_e} \eta_{\gamma,e} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)} &= \frac{N_e}{h_e} \hat{\eta}_{\alpha,e} \leq h_e^{(2\alpha-1)} N_e^{(2-\alpha)} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &C h_e^{2\alpha} N_e^{(\frac{1}{2}+\varepsilon-\alpha)} \left(\frac{1}{\delta} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)} + \frac{1}{\delta} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)} \right). \end{aligned}$$

Donc, il vient

$$\begin{aligned} \left\| v_e d_e^{-\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Omega_e)} &\leq h_e^{(2\alpha-1)} N_e^{(2-\alpha)} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &Ch_e^{2\alpha} N_e^{(\frac{1}{2}+\varepsilon-\alpha)} \left(\frac{1}{\delta} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)} + \frac{1}{\delta} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

En appliquant une autre fois, l'inégalité polynomiale inverse du lemme 2.11 à l'inégalité (57), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{\alpha,e} &\leq Ch_e^{2\alpha} N_e^{1-\alpha} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &Ch_e^{(1+2\alpha)} N_e^{(\varepsilon-\alpha-\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{\delta} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)} + \frac{1}{\delta} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

D'après les estimations (56) et (58), on peut déduire que

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{\alpha,e}^2 &\leq Ch_e^{4\alpha} N_e^{2(1-\alpha)} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} + \\ &\frac{h_e^{2(2\alpha+1)}}{N_e^{2(1-\mu^+)}} \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)}^2 + \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \right), \end{aligned}$$

où $\mu^+ = \max \left\{ \frac{1}{2} + \varepsilon - \alpha, 0 \right\}$. ■

Pour obtenir une borne supérieure locale de l'indicateur d'erreur $\eta_{\alpha,e}$, on considère le terme résiduel de bord $\tilde{\eta}_{\alpha,e}$, et on introduit l'ensemble suivant

$$\omega_e = \cup \{ \Omega'_e \mid \Omega'_e \text{ and } \Omega_e \text{ partagent au moins un coté commun, pour } 1 \leq e \leq K \},$$

Théorème 3.4. *L'estimation suivante reste valable pour α dans $[0, 1]$ et $\varepsilon > 0$*

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\alpha,e}^2 &\leq C \frac{N_e^{(2\mu^++1)}}{h_e^{2\mu^+}} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + \\ &C \frac{N_e^{2(\mu^++\varepsilon-1)}}{h_e^{2(\mu^+-1)}} \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\omega_e)}^2 + \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\omega_e)}^2 \right), \end{aligned} \quad (59)$$

où

$$\tilde{\eta}_{\alpha,e}^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L(K)} \frac{h_l}{N_l} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_{e,l}^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2,$$

tel que $\mu^+ = \max \left\{ \frac{1}{2} + \varepsilon - \alpha, 0 \right\}$ et C est une constante positive indépendante de λ et δ .

Démonstration. Pour un élément Ω_e de frontière $\Gamma_{e,l}$, on choisit l'élément $\Omega_e^\#$ tel que $\partial\Omega_e^\# \cap \partial\Omega_e = \Gamma_{e,l}$. En outre, soient $\bar{\Omega}_{\Gamma_{e,l}} = \bar{\Omega}_e^\# \cup \bar{\Omega}_e$ et $w_e = \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_e^{\frac{\alpha}{2}}$, où w_e est une fonction dans $H^1(\Omega_e)$ par morceaux. La relation (46) montre que w_e s'annule sur $\partial\Omega_{\Gamma_{e,l}}$, donc $w_e \in H_0^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})$. On a aussi étendu w_e à Ω , de telle sorte que $w_e = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_{\Gamma_{e,l}}$. Donc on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2 &= a(y - y_\lambda, w_e) + \int_{\Omega_k} (\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi))(x) w_e(x) dx - \\ &\quad \int_{\Omega_k} (f - \mathcal{I}_\lambda^c f) w_e(x) dx - \\ &\quad \int_{\Omega_k} (\beta_\delta(y^\delta - \varphi) - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi)) w_e(x) dx, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2 &\leq C \left(|y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} |w_e|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + \right. \\ &\quad \left\| \mathcal{I}_\lambda f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta(y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi) \right\|_{L^2(\Omega_e)} \|w_e\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + \\ &\quad \frac{1}{\delta} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)} \|w_e\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + \\ &\quad \frac{1}{\delta} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)} |w_e|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + \\ &\quad \left. \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)} \|w_e\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} \right). \quad (60) \end{aligned}$$

Dans le cas où $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, et utilisant l'inéquation (48), on obtient

$$|w_e|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 \leq \frac{C}{h_e} (\varepsilon N_e^{2(2-\alpha)} + \varepsilon^{-1}) \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_{e,l}^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2. \quad (61)$$

De plus, l'inégalité (47) donne

$$\|w_e\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 \leq C h_e \varepsilon \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_{e,l}^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2. \quad (62)$$

En substituant les inégalités (61) et (62) dans l'inégalité (60), on trouve

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2 &\leq C \left(\left(\frac{1}{h_e} (\varepsilon N_e^{2(2-\alpha)} + \varepsilon^{-1}) \right)^{\frac{1}{2}} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + \right. \\ &\quad (h_e \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + \\ &\quad \frac{(h_e \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\delta} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + \\ &\quad \left. \frac{(h_e \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\delta} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} + (h_e \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})} \right). \end{aligned}$$

Cependant, si on prend $\alpha = 0$, dans l'inégalité (57), on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_\lambda^c f + \Delta y_\lambda^\delta - \beta_\delta (y_\lambda^\delta - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi)\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &\leq C \left(\frac{N_e^4}{h_e^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)}^2 + \right. \\ &\quad N_e^{(2\varepsilon-1)} \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)}^2 + \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_e)}^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \right) \right), \end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière dans l'estimation (60), on a

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2 &\leq \frac{1}{h_e} (\varepsilon N_e^{2(2-\alpha)} + \varepsilon^{-1} + \varepsilon N_e^4) |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \\ &\quad (\varepsilon h_e N_e^{(2\varepsilon-1)} + \varepsilon h_e) \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 \right), \end{aligned}$$

si $\alpha > \frac{1}{2}$, en posant $\varepsilon = \frac{1}{N_e^2}$ dans la dernière inégalité, on peut enfin obtenir

$$\begin{aligned} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_e^{\frac{\alpha}{2}} \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2 &\leq \frac{N_e^2}{h_e} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \\ &\quad (h_e N_e^{(2\varepsilon-3)}) \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 \right). \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\alpha,e}^2 \leq & CN_e |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \\ & \left(\frac{h_e^2}{N_e^{2(2-\varepsilon)}} \right) \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_{\Gamma_{e,l}})}^2 \right), \end{aligned} \quad (63)$$

où

$$\tilde{\eta}_{\alpha,e}^2 = \frac{h_l}{N_l} \left\| \left[\frac{\partial y_\lambda^\delta}{\partial \eta} \right] d_{e,l}^2 \right\|_{L^2(\Gamma_{e,l})}^2.$$

Dans le cas $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, en posant $\gamma = \frac{1}{2} + \varepsilon$, et en utilisant le lemme 2.11 et en tenant compte de l'estimation (63), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\alpha,e}^2 \leq & C \frac{N_e^{2(1+\varepsilon-\alpha)}}{h_e^{(1+2\varepsilon-2\alpha)}} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + \\ & \frac{N_e^{(4\varepsilon-2\alpha-3)}}{h_e^{(2\varepsilon-2\alpha-1)}} \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\omega_e)}^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\omega_e)}^2 \right). \end{aligned} \quad (64)$$

D'après les estimations (63) et (64), on peut enfin écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\alpha,e}^2 \leq & C \frac{N_e^{(2\mu^++1)}}{h_e^{2\mu^+}} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + \\ & C \frac{N_e^{2(\mu^++\varepsilon-3)}}{h_e^{2(\mu^+-1)}} \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\omega_e)}^2 + \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\omega_e)}^2 \right), \end{aligned}$$

où $\mu^+ = \max \left\{ \frac{1}{2} + \varepsilon - \alpha, 0 \right\}$. ■

Théorème 3.5. *Soit α dans $[0, 1]$ avec $\varepsilon > 0$, alors l'estimation suivante est satisfaite*

$$\eta_{\alpha,e}^2 \leq h_e^{4\alpha} N_e^{(2\mu^{+1}+1)} \left(|y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + C h_e^{2(2\alpha+1)} N_e^{2(\mu^{+}+\varepsilon-2)} \left(\frac{1}{\delta^2} \|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\omega_e)}^2 + \frac{1}{\delta^2} |y^\delta - y_\lambda^\delta|_{H^1(\omega_e)}^2 + \|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\omega_e)}^2 \right) \right),$$

où $\eta_{\alpha,e}^2 = \hat{\eta}_{\alpha,e}^2 + \tilde{\eta}_{\alpha,e}^2$ et C est une constante positive indépendante de λ et δ .

Démonstration. Comme $\eta_{\alpha,e}^2 = \hat{\eta}_{\alpha,e}^2 + \tilde{\eta}_{\alpha,e}^2$, il est clair que le résultat est obtenu en utilisant les inégalités (50) et (59), pour toute α dans $[0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. ■

Remarque 3.1. 1. Les termes d'ordre supérieur sont ignorés comme indiqué dans [30] par la Remarque 6.4.

2. D'après les théorèmes 3.2 et 3.5, il s'ensuit que η_0^2 donne une borne supérieure de l'erreur a posteriori, tandis que $\eta_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^2$ donne une borne inférieure de l'erreur a posteriori.

3. Avec le facteur $h^{2\alpha} N_e^{1+\max\{1+2\varepsilon-2\alpha, 0\}} = h_e^{4\alpha} N_e^{(2\mu^{+1}+1)}$, l'estimateur η_α^2 donne une erreur a posteriori inférieure.

4. Avec f et φ régulières et pour un N suffisamment grand et un h suffisamment petit, les quantités $\|f - \mathcal{I}_\lambda^c f\|_{L^2(\Omega_e)}^2$ et $\|\varphi - \mathcal{I}_\lambda^c \varphi\|_{L^2(\Omega_e)}^2$ peuvent être négligeables par rapport aux autres termes.

CHAPITRE 4

TESTS NUMÉRIQUES ET ALGORITHME

Ce chapitre s'inspire beaucoup de la référence [50]. Soit :

$$\beta(r) = \max\{0, r\} = \begin{cases} r & \text{si } r \leq 0 \\ 0 & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

satisfaisant les hypothèses H_3 à H_7 (chapitre 1). On présente quelques tests numériques avec plusieurs courbes pour fournir une vérification empirique des estimations théoriques données par les théorèmes 3.1 à 3.5. On démontre l'optimalité de l'erreur entre les solutions continues et les solutions discrètes où n_e représente le nombre d'éléments dans chaque direction, N désigne le degré du polynôme de Legendre, $\|e_{y_\lambda^\delta}\|_{H^1(\Omega)}$ la norme de l'erreur $\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)}$ et β_λ^δ donne les valeurs numériques de $\beta_\delta(y_\lambda^\delta - \varphi)$.

Les résultats numériques sont donnés dans les tableaux ci-dessous, où on résume le comportement des erreurs dans la norme H^1 de la solution numérique et les valeurs numériques de $\beta_\delta(y^\delta - \varphi)$ pour les différentes valeurs des paramètres de discrétisation N et n_e . On représente également l'erreur dans H^1 sur un repère logarithmique de la solution numérique du problème discret (P_λ^δ) respectivement par rapport à N et h .

La méthode des éléments spectraux utilise l'idée de la région de confiance. Il s'agit d'étudier la convergence de l'ensemble de confiance vers le problème régularisé. On

appelle A_{k+1} l'ensemble actif ou bien la région de confiance et elle est donnée par

$$A_{k+1} = \{x \in \Omega, y_{\lambda, k+1}^\delta(x) > \varphi(x)\},$$

L'ensemble complémentaire des sommets ρ/A_{k+1} est appelé l'ensemble inactif, tels que les éléments de ρ sont les sommets sur Γ_c . Maintenant notre objectif est de trouver le bon sous ensemble A_{k+1} des sommets de ρ , pour lequel le corps est en contact avec l'obstacle (voir figure 4.1)

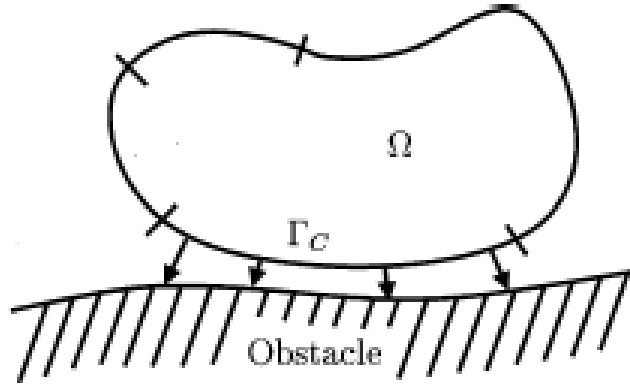


FIGURE 4.1 – Exemple d'un problème de contact .

Pour résoudre numériquement le problème pénalisé discret exprimé par (P_λ^δ) et pour trouver la région de confiance A_{k+1} , on utilise un algorithme donné dans [50] pour aboutir à l'algorithme formel suivant :

Algorithme

- 1 : Début
- 2 : Données : $\{y_{\lambda,0}^\delta, \delta, \varepsilon, y^\delta\}$, où $y_{\lambda,0}^\delta$ est choisit dans V_λ , δ et ε dans \mathbb{R}_+^* ,
- 3 : Poser $A_k = \{i : (y_{\lambda,k}^\delta - \varphi)_i > 0\}$,
- 4 : Résoudre $-\Delta y_{\lambda,k}^\delta + I_{\Omega \setminus A_k}(y_{\lambda,k}^\delta - \varphi) = f$. $\{I_{\Omega \setminus A_k}$ est la fonction caractéristique de $\Omega \setminus A_k\}$
- 5 : Poser $y_{\lambda,k+1}^\delta = \max\{y_{\lambda,k+1}^\delta, \varphi\}$, $A_{k+1} = \{x \in \Omega, y_{\lambda,k+1}^\delta(x) > \varphi(x)\}$,
- 6 : Si $\|y_{\lambda,k+1}^\delta - y_{\lambda,k}^\delta\| < \varepsilon$, Stop.
- 7 : Répondre : $y_{\lambda,k+1}^\delta$ est une solution
- 8 : Sinon : $y_{\lambda,k}^\delta \leftarrow y_{\lambda,k+1}^\delta$ passer à l'étape 3.

9 : Fin Si

10 : Fin

Les résultats numériques donnés dans les tableaux ci-dessous indiquent que l'augmentation du degré polynômial N ou la diminution du pas h du maillage peut réduire l'erreur $\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega)}$. Ceci montre la convergence de la méthode. Il faut noter que tous les calculs numériques sont effectués sur un ordinateur personnel avec un processeur *Core i5-3210M* à $2,50\text{GHz}$ et 4GB RAM .

4.1 Solution numérique des modèles Black-Scholes d'options américaines

Avant de donner les résultats numériques associés aux estimations d'erreurs obtenues précédemment, on présente dans cette section la solution numérique d'un problème d'option américaine.

Exemple 4.1. *Le modèle Black-Scholes pour la valeur p d'une option de vente américaine au prix de l'actif (s_1, s_2) en $\Omega_\infty = [0, \infty)^2$ et au temps $t \in [0, T)$ conduit au problème de l'obstacle parabolique $\mathcal{L}p \geq 0, p - \varphi \geq 0, (\frac{\partial p}{\partial t} - \mathcal{L}p)(p - \varphi) = 0$ dans $\mathbb{R}_+^2 \times]0, T[$, (4.1) avec la condition d'arrêt $p(\cdot, T) = g$, tel que p est le prix d'un put américain avec fonction de gain φ et l'opérateur elliptique \mathcal{L} donné par*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^2 E_{k,l} s_k s_l \frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_l} + \sum_{k=1}^2 (r - q_k) s_k \frac{\partial}{\partial s_k} - r,$$

pour s_k , avec $k = 1, 2$ et t appartenant respectivement à Ω_∞ et $[0, T]$, où r désigne le taux d'intérêt, q_k est le paiement de la dividende pour l'assertion s_k avec $k = 1, 2$, et E est la matrice de volatilité qui est définie, symétrique et positive donnée par

$$E = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sigma_1 \sigma_2 \\ \frac{2\rho}{1+\rho^2} \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (66)$$

où $\sigma_k > 0$ est la volatilité et $\rho \in [0, 1]$ est le taux de corrélation. Comme proposé dans [40], un choix d'une condition aux limites simple est $g = \varphi$. Ensuite, on introduit l'équation pénalisée associée au problème de l'obstacle parabolique (65)

$$\begin{cases} \frac{\partial p^\delta}{\partial t} - \mathcal{L}p^\delta + \beta_\delta (p^\delta - \varphi) = 0 & \text{dans } \Omega_\infty \times]0, T[\\ p^\delta(\cdot, T) = g \end{cases} \quad (67)$$

puis, on discrétise l'équation précédente (67) par un schéma d'Euler implicite en fonction du temps t . Pour ce faire, en introduisant une partition de l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles $[t_{i-1}, t_n]$, pour $1 \leq i \leq N$, avec $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ et $\Delta t_i = \max_i \Delta t_i$, on obtient le problème semi-discret suivant

$$\frac{1}{\Delta t} (p_{n+1}^\delta - p_n^\delta) + \mathcal{L}p_n^\delta + \beta_\delta (p_n^\delta - \varphi) = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N$$

où, par rapport au temps Δt , le problème semi-discret précédent conduit au problème stationnaire suivant

$$\mathcal{L}p^\delta + \beta_\delta (p^\delta - \varphi) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_+^2$$

Comme considéré dans [59], le test numérique nécessite un intervalle Ω_∞ borné. Dans ce qui suit, Ω_∞ est égal à $[0, 300]^2$ et on utilise le prix d'exercice $K = 100$, $r = 0.05$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$, $\varrho = 0$, le taux de dividende constant $q_1 = q_2 = 0.015$ et la fonction de paiement $\varphi = g = \max(0, K - \max(s_1, s_2))$ dans Ω_∞ et $\delta = 1e - 2$, ceci correspond au contrat de min-put américain, où $K > 0$ est le prix d'exercice. La solution numérique est représentée graphiquement par la figure suivante :

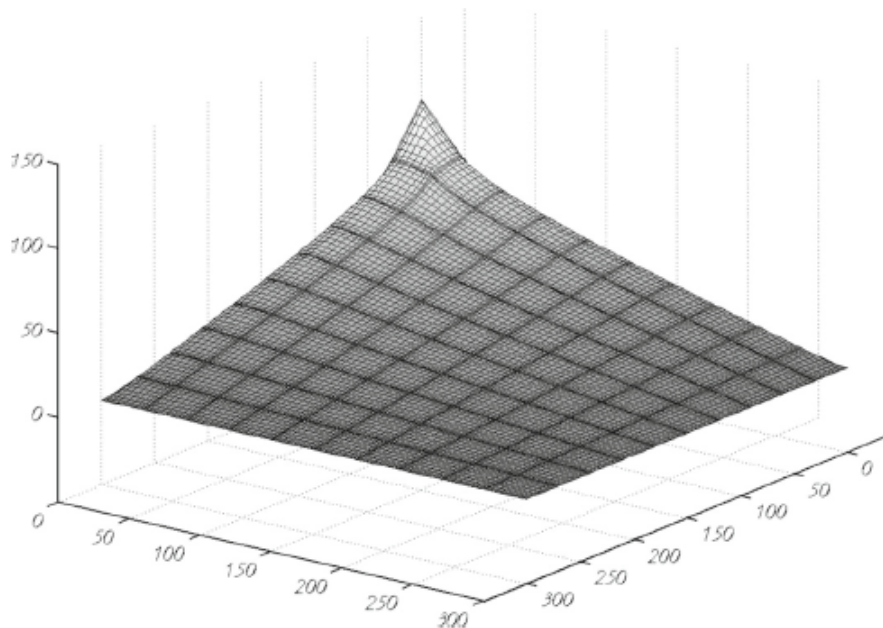


FIGURE 4.2 – Solution d'option de vente américaine.

et les régions de contact et non-contact sont données graphiquement ci-dessous :

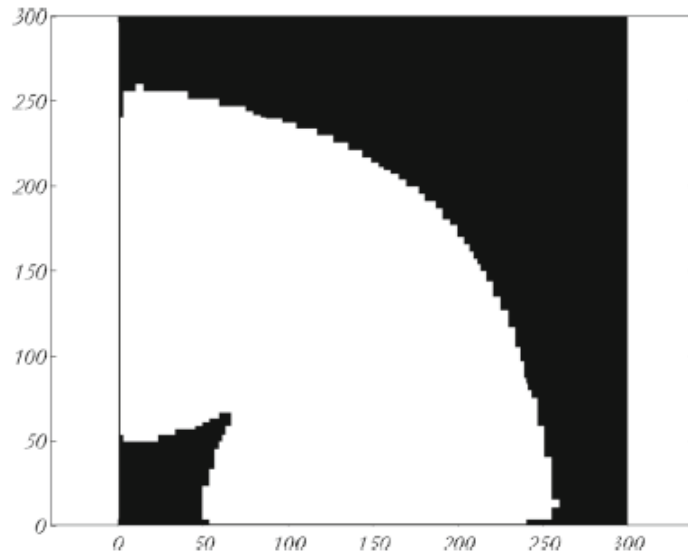


FIGURE 4.3 – Région de contact en noir.

4.2 Résultats numériques liés à l'estimation d'erreur a priori

Cette sous-section est consacrée à l'interprétation numérique de l'estimation d'erreur a priori, où on présente un exemple numérique pour évaluer l'estimation $\|y^\delta - y_\lambda^\delta\|_{H^1(\Omega_e)}$.

Exemple 4.2. Pour l'estimation d'erreur a priori, on considère le modèle du problème de l'obstacle où on prend $f = -\Delta\varphi$, ainsi la solution se calcule facilement, donnant $y = \varphi$ dans le domaine $\Omega = [0, 1]^2$, avec la condition de Dirichlet homogène $y = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, une solution du problème de l'obstacle (2), peut être donnée par $\varphi(x, y) = xy \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)$ avec $\delta = 1e - 2$.

Les tableaux 1 et 2 résument les résultats numériques tandis que les diagrammes de convergence sont représentés dans les figures 4.4 et 4.5.

	n_e							
	1		2		4		8	
N	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$
2	$3.93e-01$	$2.89e-02$	$3.96e-02$	$3.30e-03$	$5.31e-03$	$3.24e-04$	$6.72e-04$	$1.94e-05$
4	$3.15e-02$	$4.50e-04$	$7.26e-04$	$1.81e-05$	$2.45e-05$	$2.82e-07$	$7.79e-07$	$3.76e-09$
8	$1.37e-05$	$2.23e-08$	$1.87e-08$	$6.91e-11$	$3.83e-11$	$5.35e-14$	$7.52e-14$	$9.21e-17$
10	$1.16e-07$	$8.77e-11$	$3.97e-11$	$7.47e-14$	$2.01e-14$	$1.34e-16$	$7.14e-16$	$1.47e-16$

TABLE 4.1 – Résultats numériques de l'analyse a priori en fonction de N pour chaque valeur de n_e .

	N							
	1		2		4		8	
n_e	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$
1	$3.93e-01$	$2.89e-02$	$3.15e-02$	$4.50e-04$	$1.37e-05$	$2.23e-08$	$1.16e-07$	$8.77e-11$
2	$3.96e-02$	$3.30e-03$	$7.26e-04$	$1.81e-05$	$1.87e-08$	$6.91e-11$	$3.97e-11$	$7.47e-14$
4	$5.31e-03$	$3.24e-04$	$2.45e-05$	$2.82e-07$	$3.83e-11$	$5.35e-14$	$2.01e-14$	$1.34e-16$
8	$6.72e-04$	$1.94e-05$	$7.79e-07$	$3.76e-09$	$7.52e-14$	$9.21e-17$	$7.14e-16$	$1.47e-16$

TABLE 4.2 – Résultats numériques de l'analyse a priori en fonction de n_e pour chaque valeur de N .

Les résultats numériques associés aux tableaux 4.1 et 4.2 sont représentés respectivement dans les figures 4.4 et 4.5.

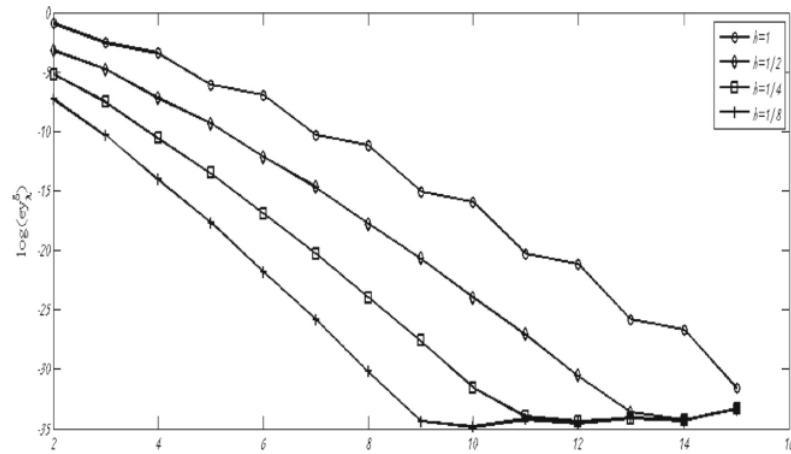


FIGURE 4.4 – Historique de convergence de $e_{y_\lambda}^\delta$ par rapport au degré N pour plusieurs valeurs de h .

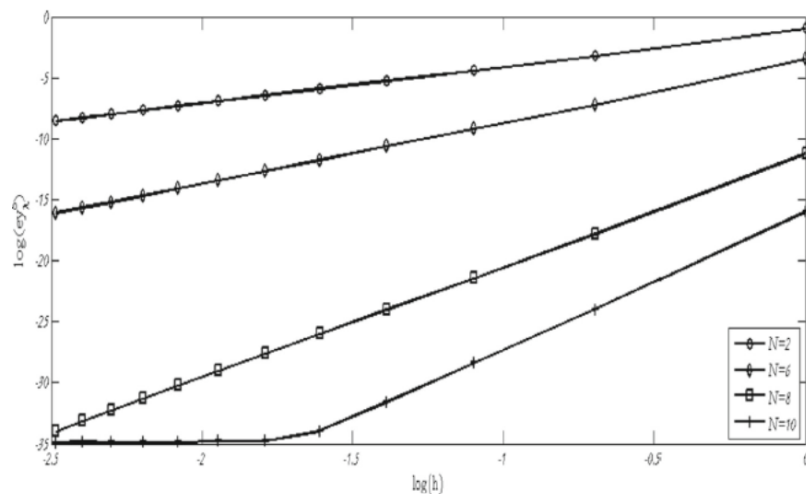


FIGURE 4.5 – Historique de convergence de $e_{y_\lambda}^\delta$ par rapport au pas h pour plusieurs valeurs de N

Pour les trois valeurs de h suivantes : $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$ et $h = \frac{1}{8}$, on donne les graphes dans un repère semi-log de l'erreur dans la figure 4.4. Comme prévu, la convergence exponentielle est atteinte par rapport à N . Ainsi, les représentations graphiques de l'erreur, pour $N = 2$, $N = 6$ et $N = 10$, sont présentées dans la figures 4.5 qui montrent que la précision machine est atteinte lorsque $N = 12$. Donc la convergence vers la solution exacte est de type algébrique et est réalisée avec un ordre de précision égal à $N - 1$ par

rapport à h comme il a été démontré mathématiquement.

4.3 Résultats numériques liés à l'estimation d'erreur a posteriori

Cette sous-section est consacrée à une interprétation numérique de l'estimation d'erreur a posteriori. On donne une étude de la convergence numérique, où on présente deux exemples numériques pour illustrer la performance des estimateurs d'erreur.

Exemple 4.3. *Considérons l'exemple suivant qui est consacré à un problème de l'obstacle unilatéral à deux dimensions défini sur $\Omega = [0, 1]^2$, où $\varphi(x, y) = -0.008(1 + 2x + 2y)$, $f(x, y) = -16xy(1 - x)(1 - y)$ et $\delta = 1e - 2$, avec la condition de Dirichlet homogène $y = 0$ sur $\partial\Omega$. On réalise une étude de la convergence numérique dans laquelle les résultats numériques pour y_λ^δ sont représentés dans la figure 4.6 avec l'obstacle φ et la région de contact correspondante est donnée dans la figure 4.7. Les tableaux 4.3 et 4.4 montrent les différentes contributions de η_α pour $\alpha = 0$, et les graphes de la convergence sont représentés par les figures 4.8 et 4.9 respectivement.*

N	n_e							
	1		2		4		8	
	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$
2	2.67e - 01	1.00e - 04	1.31e - 02	2.07e - 05	5.41e - 04	3.45e - 06	2.32e - 05	5.94e - 07
4	1.57e - 02	2.500e - 05	6.58e - 04	4.20e - 06	2.57e - 05	6.57e - 07	1.07e - 06	1.09e - 07
8	9.79e - 04	6.25e - 06	3.82e - 05	9.79e - 07	1.46e - 06	1.49e - 07	6.01e - 08	2.46e - 08
10	4.00e - 04	4.00e - 06	1.55e - 05	6.21e - 07	5.92e - 07	9.47e - 08	2.42e - 08	1.55e - 08

TABLE 4.3 – Résultats numériques de l'analyse a posteriori en fonction de N pour chaque valeur de n_e .

n_e	N							
	2		4		8		10	
	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$
1	$2.67e-01$	$1.00e-04$	$1.57e-02$	$2.50e-05$	$9.79e-04$	$6.25e-06$	$4.00e-04$	$4.00e-06$
2	$1.31e-02$	$2.07e-05$	$6.58e-04$	$4.20e-06$	$3.82e-05$	$9.79e-07$	$1.55e-05$	$6.21e-07$
4	$5.41e-04$	$3.45e-06$	$2.57e-05$	$6.57e-07$	$1.46e-06$	$1.49e-07$	$5.92e-07$	$9.47e-08$
8	$2.32e-05$	$5.94e-07$	$1.07e-06$	$1.09e-07$	$6.01e-08$	$2.46e-08$	$2.42e-08$	$1.55e-08$

TABLE 4.4 – Résultats numériques de l'analyse a posteriori en fonction de n_e pour chaque valeur de N .

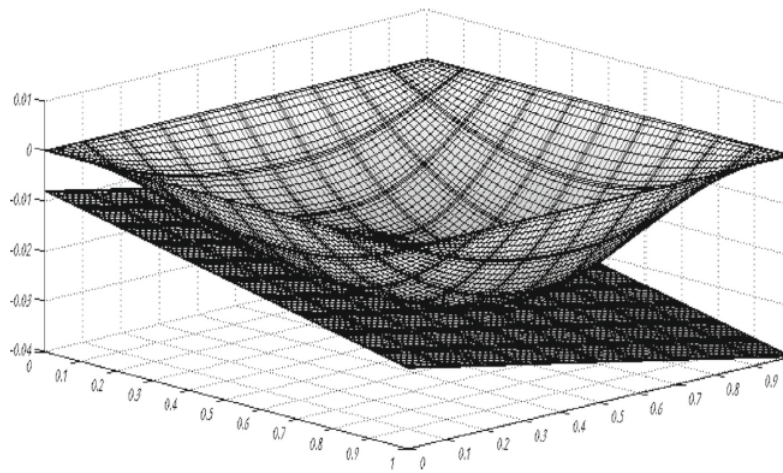


FIGURE 4.6 – Solution numérique y_λ^δ et la fonction obstacle φ .

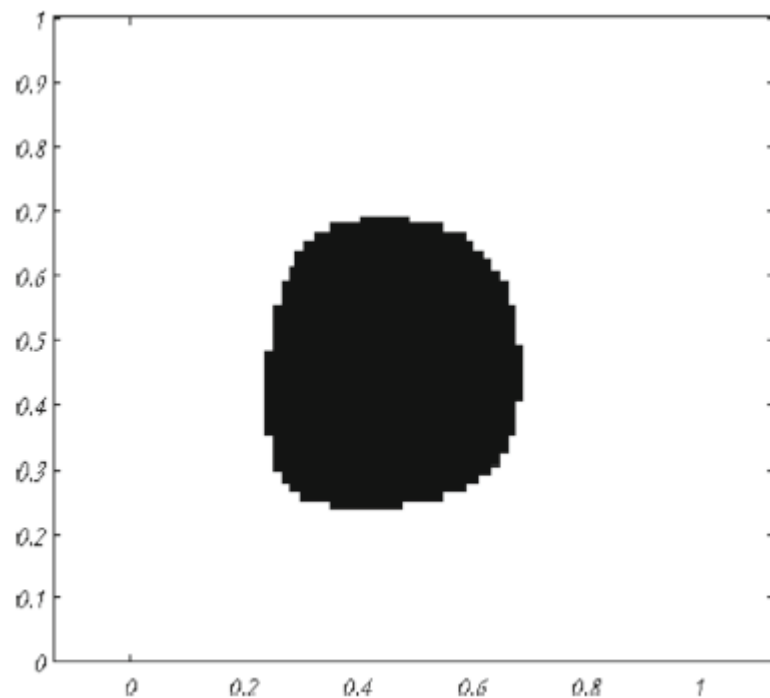
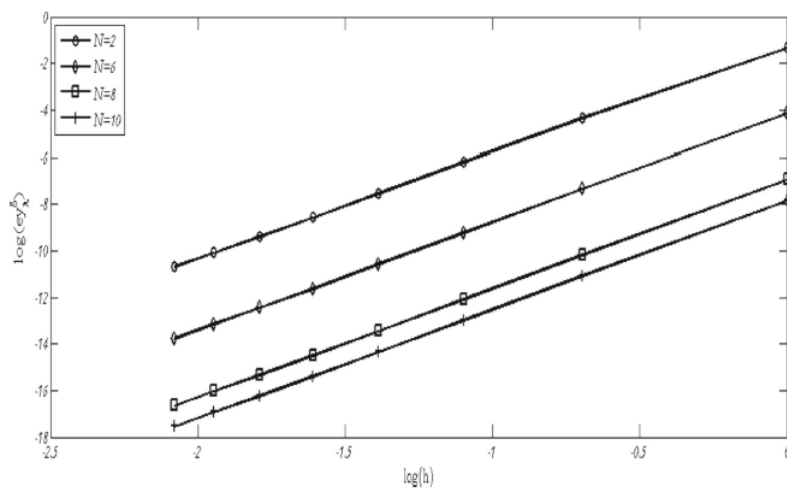


FIGURE 4.7 – Région de contact en noir.

FIGURE 4.8 – Historique de la convergence de $e_{y_\lambda^\delta}$ par rapport au degré N pour plusieurs valeurs de h où $\alpha = 0$.

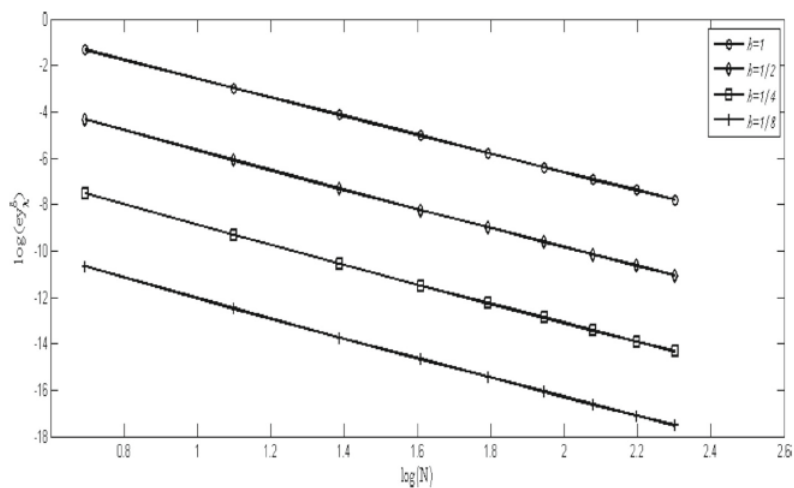


FIGURE 4.9 – Historique de la convergence de $e_{y_\lambda^\delta}$ par rapport au pas h pour plusieurs valeurs de N où $\alpha = 0$.

La variation des résultats numériques par rapport à h pour un degré fixe $N = 6$ est donnée dans la figure 4.10, dans un repère log-log. L'indicateur d'erreur η_α pour $\alpha = 0, 0.5$ et 1 décroît algébriquement, tandis que η_1 et $\eta_{\frac{1}{2}}$ décroissent plus rapidement que η_0 lorsque N augmente.

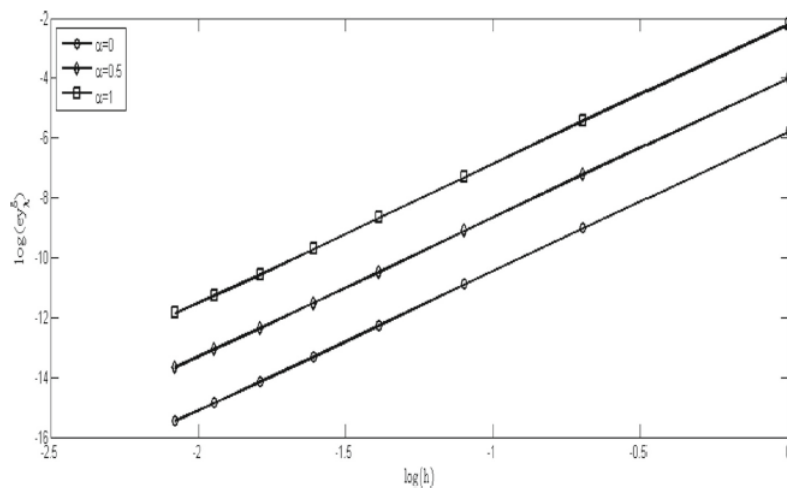


FIGURE 4.10 – Historique de la convergence de $e_{y_\lambda^\delta}$ par rapport au pas h pour plusieurs valeurs de α .

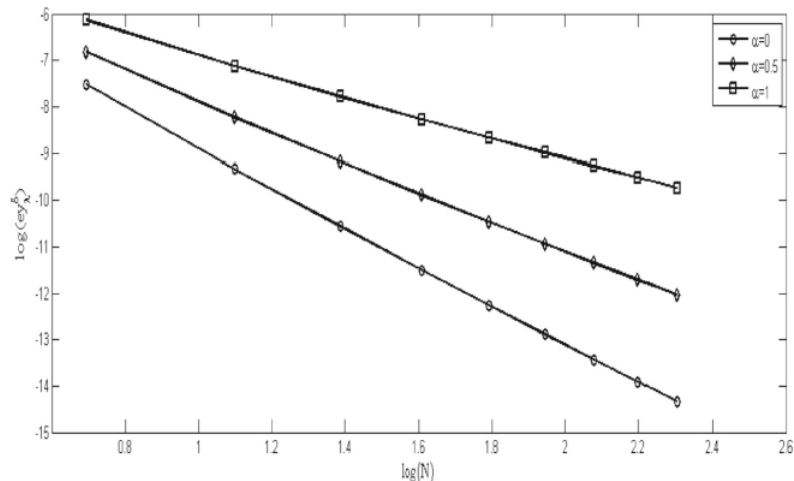


FIGURE 4.11 – Historique de la convergence de $e_{y_\lambda^\delta}$ par rapport au degré N pour plusieurs valeurs de α .

La figure 4.11 représente le graphique des résultats numériques par rapport au degré N pour un maillage uniforme avec $n_e = 4$ dans un repère log-log, et η_0 présente une quasi-décroissance algébrique identique à celle des autres indicateurs d'erreurs. On remarque que η_1 et $\eta_{\frac{1}{2}}$ décroissent plus rapidement lorsque N augmente.

Exemple 4.4. Reprenons l'exemple donné dans [59], où la solution exacte est inconnue. On considère l'obstacle affine par morceaux $\varphi(\mathbf{x}) = |x - 0.5| + |y - 0.5| - 0.3$ et $f = 10$, avec $\delta = 1e - 2$ et la condition de Dirichlet homogène dans le domaine $[0, 1]^2$.

On réalise une étude de convergence numérique dans laquelle les résultats numériques pour y_λ^δ sont représentés dans la figure 4.16 avec l'obstacle φ et la région de contact correspondante sont donnés sur la figure 4.17, tandis que les tableaux 4.5 et 4.6 affichent les différentes contributions de η_α pour $\alpha = 0$. Les graphes de convergence sont respectivement représentés dans les figures 4.12 et 4.13.

N	n_e							
	1		2		4		8	
	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$
2	$2.87e-01$	$9.23e-03$	$4.10e-03$	$2.18e-04$	$5.02e-05$	$9.09e-06$	$8.86e-06$	$1.97e-05$
4	$7.65e-03$	$8.97e-04$	$3.11e-05$	$4.92e-06$	$9.17e-07$	$1.19e-06$	$3.91e-07$	$3.84e-06$
8	$9.12e-05$	$4.55e-05$	$3.31e-07$	$1.87e-07$	$3.21e-08$	$2.57e-07$	$2.18e-08$	$8.81e-07$
10	$2.10e-05$	$1.73e-05$	$8.17e-08$	$6.37e-08$	$1.19e-08$	$1.61e-07$	$8.79e-09$	$5.57e-07$

TABLE 4.5 – Résultats numériques de l'analyse a posteriori en fonction de N pour chaque valeur de n_e .

n_e	N							
	2		4		8		10	
	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$	$\ ey_\lambda^\delta\ _{H^1(\Omega)}$	$\ \beta_\delta^\lambda\ _{L^2(\Omega)}$
1	$2.87e-01$	$9.23e-03$	$7.65e-03$	$8.97e-04$	$9.12e-05$	$4.55e-05$	$2.10e-05$	$1.73e-05$
2	$4.10e-03$	$2.18e-04$	$3.11e-05$	$4.92e-06$	$3.31e-07$	$1.87e-07$	$8.17e-08$	$6.37e-08$
4	$5.02e-05$	$9.09e-06$	$9.17e-07$	$1.19e-06$	$3.21e-08$	$2.57e-07$	$1.19e-08$	$1.61e-07$
8	$8.86e-06$	$1.97e-05$	$3.91e-07$	$3.84e-06$	$2.18e-08$	$8.81e-07$	$8.79e-09$	$5.57e-07$

TABLE 4.6 – Résultats numériques de l'analyse a posteriori en fonction de n_e pour chaque valeur de N .

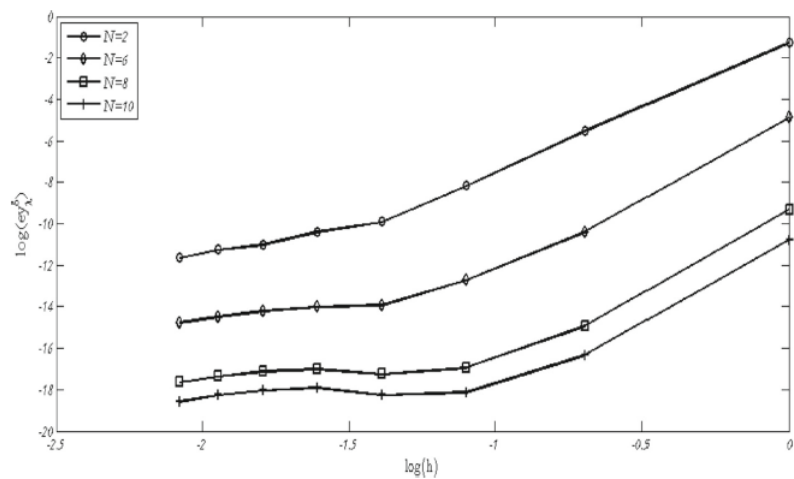


FIGURE 4.12 – Historique de la convergence de $e_{y_\lambda^\delta}$ par rapport au pas h pour plusieurs valeurs de N où $\alpha = 0$.

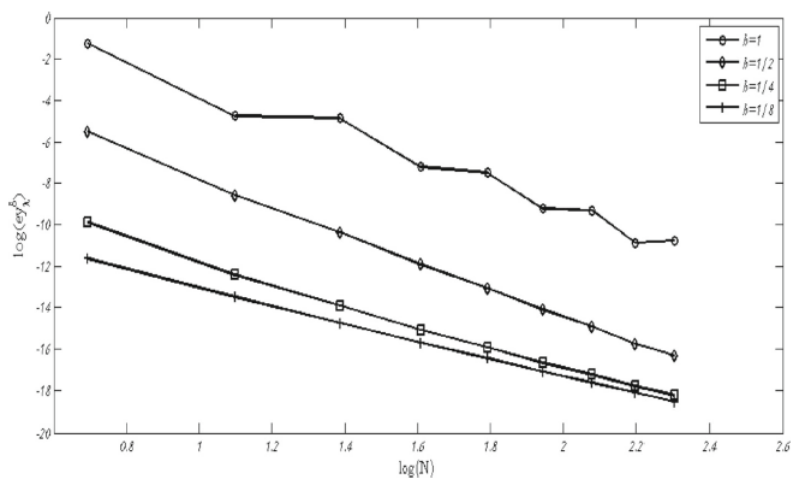


FIGURE 4.13 – Historique de la convergence de $e_{y_\lambda^\delta}$ par rapport au degré N pour plusieurs valeurs de h où $\alpha = 0$.

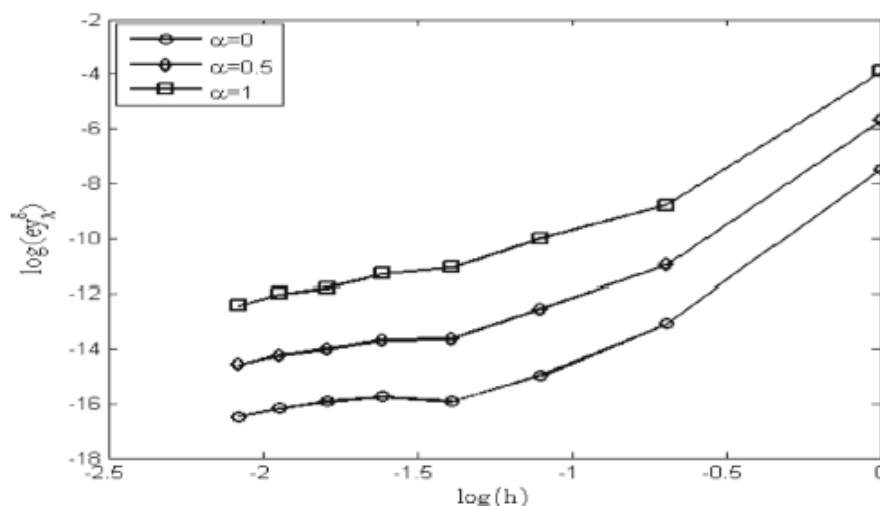


FIGURE 4.14 – Historique de convergence de e_y^δ par rapport au pas h pour plusieurs valeurs de α .

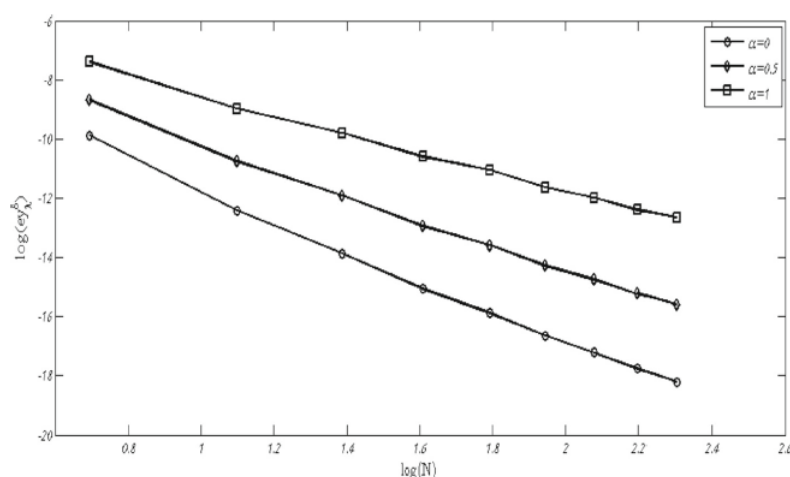


FIGURE 4.15 – Historique de convergence de $e_{y_\lambda}^\delta$ par rapport au degré N pour plusieurs valeurs de α .

Dans ce qui suit, les résultats numériques pour y_λ^δ sont représentés dans la figure 15 avec l'obstacle φ et la région de contact correspondante est donnée dans la figure 4.17. La figure 4.14 montre la variation des résultats numériques par rapport au pas h pour le degré $N = 6$ dans un repère log-log. L'indicateur d'erreur η_α pour plusieurs valeurs $\alpha = 0, 0,5, \text{ et } 1$ se désagrège algébriquement, tandis que η_1 et $\eta_{\frac{1}{2}}$ décroissent plus

rapidement que η_0 lorsque N augmente. Le graphe des résultats numériques par rapport au degré N pour un maillage uniforme fixe avec $n_e = 4$ dans un repère log-log est donné dans la figure 4.15 tandis que η_0 montre presque la même décroissance algébrique que les autres indicateurs d'erreurs. On remarque que η_1 et $\eta_{\frac{1}{2}}$ décroissent plus rapidement lorsque N augmente .

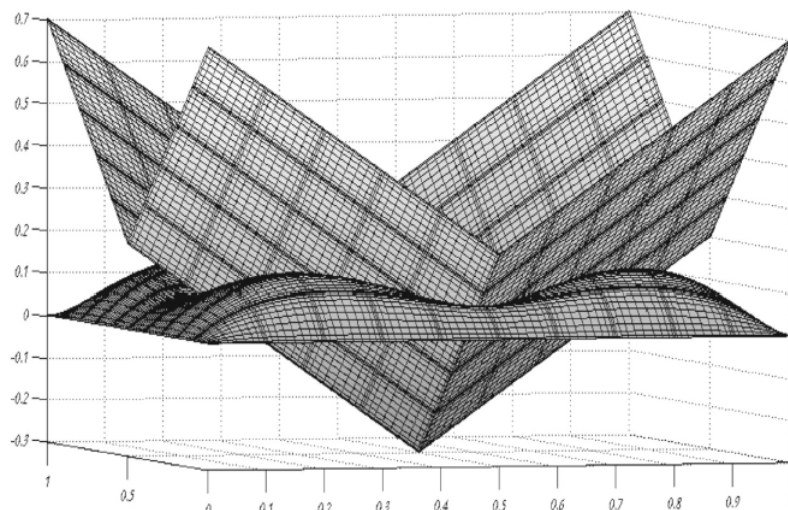


FIGURE 4.16 – Solution numérique y_λ^δ et la fonction obstacle φ .

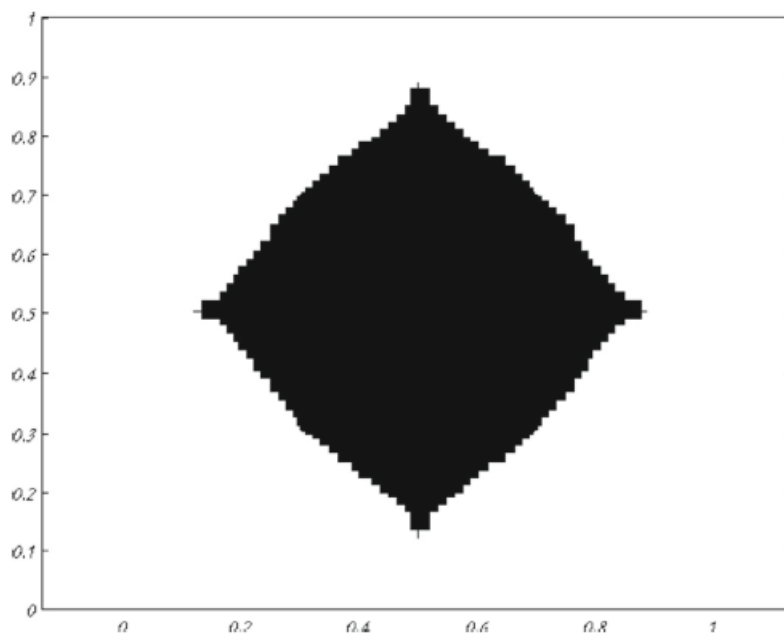


FIGURE 4.17 – Région de contact en noir.

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

Dans ce travail, on a considéré une approximation uniforme par la méthode des éléments spectraux de Legendre pour la discrétisation d'un problème d'obstacle elliptique pénalisé. On a construit une estimation d'erreur a priori et on a obtenu les bornes supérieure et inférieure d'une estimation d'erreur a posteriori pour la solution du problème discret. De plus, on a considéré quelques tests numériques pour montrer la précision de ces estimations. Une éventuelle étude consiste à considérer la méthode des éléments spectraux non uniformes pour décrire et analyser le problème considéré ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adams, R.A., Fournier, J.J.F. : *Sobolev Spaces* . Elsevier, New York (2003).
- [2] Azaiez, M., Dauge, M.et Maday, Y. : *Méthodes spectrales et des éléments spectraux*, [https ://perso.univ-rennes1.fr](https://perso.univ-rennes1.fr).
- [3] Baiocchi, C. : *Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free-boundary Problems*. . Wiley, Chichester (1984).
- [4] Barbu, V. : *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer, New York (2010).
- [5] Barbu, V. : *Optimal control of variational inequalities*. Pitman, London (1984).
- [6] Barbu, V. : *Analysis and control of non linear infinite dimensional systems*. Mathematics in science and engineering, 190, Academic Press, San Diego (1993).
- [7] Bernardi, C. : *Indicateurs d'erreur en $h - N$ version des elements spectraux*. ESAIM Math. Modell. Numer. Anal. 30, 1–38 (1996).
- [8] Bernardi, C., Fiétier, N., Owens, R.G. : *An error indicator for mortar element solutions to the stokes problem*. IMA J. Numer. Anal. 21, 857–886 (2001).
- [9] Bernardi, C., Maday, Y., Rapetti, F. : *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites elliptiques*. Springer, Berlin (2004).
- [10] Bernardi, C., Girault, V., Maday, Y. : *Approximation Variationnelle : Méthodes d'éléments Finis et Méthodes Spectrales*. Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre (1990).
- [11] Bernardi, C., Maday, Y. : *Spectral, Spectral Element and Mortar Element Methods*. Université Pierre et Marie Curie, Cours de DEA, Novembre (1998).

- [12] Bodard, N. : *Interaction fluide-structure par la méthode des éléments spectraux*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale De Laussane EPFL. (2006)
- [13] Bonnans, F., Gasas, E. : *An extension of Pontryagin's principle for state constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities*. SIAM Journal on control optimization, (33), 274-298 (1995).
- [14] Brezis, H. : *Problèmes Unilatéraux*. J. de Math pures et appliquées. 51, 1-168, (1972).
- [15] Brezis, H., Kinderlehrer, D. : *The smoothness of solutions to nonlinear variational inequalities*. Indiana university variational inequalities journal, 23, 831-844, (1974).
- [16] Bermudez, A., Saguez, C. : *Pointwise control of a variational inequality in free boundary problems : Theory and Applications*. 475-478, Pitman Res, Note Math, Ser, 168. (1987).
- [17] Canuto, C., Hussaini, Y.M., Quarteroni, M.Y., Zang, A. : *Spectral Methods : Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*. Springer, Berlin (2007).
- [18] Canuto, C., M.Y Hussaini, A., Quarteroni, C et Zang, T. A. : *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, New York, (1988).
- [19] Chang, L., Gong, W., Yan, N. : *Finite element method for a nonsmooth elliptic equation*. Front. Math. China 5(2), 191–209 (2010).
- [20] Cheng, X.L., Lian, Xue L. : *On the error estimate of finite difference method for the obstacle problem*. Appl. Math. Comput. 183(1), 416–422 (2006).
- [21] Clarke, F.H. : *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM Classics in applied Mathematics 5, Phi-ladelphia (1990).
- [22] Clément, P. : *Approximation by finite element functions using local regularization*. Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Anal. Numér. que. 9(R2), 77–84, (1975).
- [23] Casadei, F., Gabellin, E., Fotia, G., Maggio, F., Quarteroni, A. : *A mortar finite element method for complex 2D and 3D elastodynamic problems*. Comput, Method Apply. Mech. Engrg, 191, 5119-5148 (2002). Numerical functional analysis and optimization. 26, 49-68. (2005).
- [24] Duvaut, G., J.L, Lions. : *Les inequations en mecanique et en physique*. Dunod. Paris (1972).
- [25] Djeridi, B., Ghanem, R., Sissaoui, H. : *Spectral element methods a priori and a posteriori estimates for penalized unilateral obstacle problem*. Journal of scientific computing 85, 54 (2020).

- [26] French, D.A., Larsson, S., Nochetto, R.H. : *Pointwise a posteriori error analysis for an adaptive penalty finite element method for the obstacle problem*. *Comput. Methods Appl. Math.* 1(1), 18–38 (2001).
- [27] Friedman, A. : *Variational Principles and Free-Boundary Problems*. Courier Corporation, Chelmsford (2010).
- [28] Gilbarg, D., Trudinger, N.S. : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin (2015).
- [29] Glowinski, R. : *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer Verlag, New-York (1984).
- [30] . Gong, W., Liu, W., Yan, N. : *A posteriori error estimates of hp-FEM for optimal control problems*. *Int. J. Numer. Anal. Model.* (2011).
- [31] Gottlieb, D., Orszag, S.A. : *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications*. Philadelphia, (1977).
- [32] Grisvard, P. : *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, vol. 69. SIAM, Philadelphia (2011).
- [33] Gregory, L. : *Théorème de la moyenne*. 18 Juin 2013.
https://www.loichot.ch/maths_d/3 - Moyenne.pdf
- [34] Guan, Y. : *Mathematical justification of an obstacle problem in the case of a plate*. *Chin. Ann. Math. Ser. B* 38(5), 1047–1058 (2017).
- [35] Geshkovski, B. : *Obstacle problems : Theory and applications*. Université de Bordeaux. E-MAIL : borjan.geshkovski@etu.u-bordeaux.fr
- [36] Han, J., Yang, Y. : *A class of spectral element methods and its a priori/a posteriori error estimates for 2nd order elliptic eigenvalue problems*. *Abstract Appl. Anal.* (2013).
- [37] Han, W., Reddy, B.D : *Plasticity : Mathematical Theory and Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York. (1990).
- [38] Hueber, S., Wohlmuth, B.I. : *A primal–dual active set strategy for non-linear multibody contact problems*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194, 3147–3166 (2005).
- [39] Im-Young, J. : *Free boundary and its applications in finance math*. Seoul national university (2013).
- [40] Kangro, R., Nicolaidis, R. : *Far field boundary conditions for Black-Scholes equations*. *SIAM J. Numer. Anal.* 38(4), 1357–1368 (2000).
- [41] Karatzas, I., Shreve, S.E., Karatzas, I., Shreve, S.E. : *Methods of Mathematical Finance*, vol. 39. Springer, Berlin (1998)

- [42] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G. : *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, vol. 31. SIAM, Philadelphia (1980)
- [43] Kazufumi, I., Karl, K. : *Semi-Smooth Newton Methods for variational inequalities of the first kind*. M2AN, Vol. 37(1) 41–62 (2003).
- [44] Komatitsch, D., Vilotte, J.P. : *The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures*. Bull. Sismol. Soc. Am., 88 :368-392. (1998)
- [45] Komatitsch, D. : *Méthodes spectrales et éléments spectraux pour l'équation de l'élastodynamique 2D et 3D en milieu hétérogène*. Ph.D. thesis, Institut de Physique du Globe, Paris, France (1997)
- [46] Kikuchi, N., Oden, J.T. : *Contact problems in elasticity. A study of variational inequalities and finite element methods*. Philadelphia. Siam. (1988).
- [47] Lions, J.L. : *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non linéaires*. Dunod, Paris (1969)
- [48] Madec, R. : *Méthode des éléments spectraux pour la propagation d'ondes sismiques en milieu géologique fluide-solide avec pas de temps locaux et couches absorbantes parfaitement adaptées C-PML*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour. (2010). <https://tel.archives-ouvertes.fr>
- [49] Melenk, J.M., Wohlmuth, B.I. : *On residual-based a posteriori error estimation in hp-fem*. Adv. Comput. Mathematics 15(1–4), 311–331 (2001).
- [50] Murea, C.M., Tiba, D. : *A direct algorithm in some free boundary problems*. J. Numer. Math. 24(4), 253–271 (2016).
- [51] Orszag, S.A. : *Comparison of Pseudospectral and Spectral Approximations*. S.A. Stud. Appl. Math. 51(1972) ; 253-259.
- [52] Patera, A.T. : *A spectral element method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion*. J. Comput. Phys. 54(3), 468–488 (1984).
- [53] Priolo, E., Carcione, J.M., Seriani, G. : *Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques*. J. Acoust. Soc. Am, 95, 681-693 (1994)
- [54] Pasquetti, R., Rapetti, F., Mercier, F. : *Spectral element methods on unstructured meshes : Comparisons and recent advances*. Journal of scientific computing, 27 :377-387. (2006).
- [55] Rodrigues, J.F. : *Obstacle Problems in Mathematical Physics*, vol. 134. Elsevier, Amsterdam (1987)

- [56] Scott, L.R., Zhang, S. : *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*. Math. Comput. 54(190), 483–493 (1990).
- [57] Seriani, G., Priolo, E. : *Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media*. Finite element in analysis and design, 16, 337-348 (1994).
- [58] Vincent, M. : *Méthode des éléments finis*. Vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode, France (2013), [http ://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.fr)
- [59] Weiss, A., Wohlmuth, B.I. : *A posteriori error estimator for obstacle problems*. SIAM J. Sci. Comput. 32(5), 2627–2658 (2010).
- [60] Wang, W., Xu, C. : *A posteriori error estimation of spectral and spectral element methods for the Stokes/Darcy coupled problem*. J.Math. Study 47(1), 85–110 (2014).
- [61] Zeng, Y., Wang, F. : *Error estimates of the weakly over-penalized symmetric interior penalty method for two variational inequalities*. Comput. Mth. Appl. 69(8), 760-770 (2015).
- [62] Zhang, T., Tang, L. : *Finite volume method for the variational inequalities of first and second kinds*. Math.Methods Appl. Sci. 38(17), 3980-3989 (2015).