

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR - ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2021/2022

Département de Mathématiques
Laboratoire de Modélisation Mathématique et Simulation Numérique



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en Mathématiques

ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET NUMÉRIQUE DE QUELQUES
PROBLÈMES D'ÉLASTICITÉ

Option

Équations Différentielles et Applications

Par

Djellali Fayssal

DIRECTEUR DE THÈSE : Taallah Frekh Prof. U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : Labidi Soraya M.C.A. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Djellit Ali Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Nouri Fatma-Zohra Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Badraoui Salah Prof. UNIV. GUELMA

Remerciements

C'est avec une grande émotion que je rends grâce à **Allah** le seul puissant de m'avoir donné la force, le courage, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés et d'achever ce travail que j'ai tant attendu et espéré.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse **Mr Frekh Taallah** professeur à l'université de Annaba. Je le remercie de m'avoir encadré, aussi pour ses suggestions, analyse, remarques qui ont contribué à enrichir et ouvrir de nombreuses perspectives sur ces travaux de thèse. Je tiens aussi à remercier la directrice de notre laboratoire LAM2SIN **Pr. Nouri Fatma Zohra** pour ses encouragements et ses conseils, tout au long de ma formation LMD.

Mes remerciements vont également à **Mme Labidi Soraya** maitre de conférence à l'université de Annaba pour avoir accepté de co-diriger ce travail. Je lui suis reconnaissant de m'avoir fait bénéficier de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, et de sa grande efficacité que je n'oublierai jamais.

Je tiens à remercier **Mr Djellit Ali** professeur à l'université de Annaba, et directeur du laboratoire LMDM, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de conduire le jury pour l'examination et le jugement.

J'adresse également mes sincères remerciements à **Mme Nouri Fatma Zohra** professeur à l'université de Annaba, ainsi que **Mr. Badraoui Salah** professeur à l'université de Guelma, qu'ils m'ont fait le grand honneur pour leurs participation à ce jury en qualité d'examineurs, et pour le temps consacré à la lecture de cette thèse.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Annaba, en particulier **Pr. Mazouzi Saïd**, **Pr. Chorfi Lahcen** et **Pr. Hadji Mohamed Lakhder** pour m'avoir donné les bases de mon savoir mathématique et qui ont partagé avec moi leurs connaissances.

Tous **les membres du laboratoire LAM2SIN**, toute fonction confondue, trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements pour leur aide multiforme inoubliable.

Je les ai gardés pour la fin car j'avais, j'ai et j'aurai pour eux une estime inégalée. Je veux parler de mes parents, mon épouse, mon frère et ma soeur. Je les remercie pour leur patience, leur soutien moral et matériel, leur encouragements qu'elles ont pu m'offrir en leur promettant que le meilleur reste à venir.

Résumé

Dans cette thèse, on a étudié le comportement asymptotique de quelques systèmes élastiques où la dissipation est introduite par la présence d'un terme thermo-élastique ou thermo-visco-élastique. Nous avons commencé par un système élastique poreux couplé avec des effets thermiques, où le flux de chaleur est donné par la théorie de Green et Naghdi appelée type III. En utilisant la méthode de multiplicateurs, on a montré un résultat de décroissance dans le cas où la fonction de relaxation g décroît exponentiellement ou polynomialement ou d'une manière plus générale si et seulement si le numéro de stabilité K est nul.

Le second travail est un problème de type Timoshenko, deux dissipations thermiques ont été considéré, agissant sur la force de cisaillement et sur le moment de flexion, où le flux de chaleur dans ce cas est donné par la loi de Cattaneo. En utilisant la théorie du semi-groupe, on a prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème. De plus, un résultat de stabilité exponentielle a été établi.

Ensuite, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un système de Timoshenko avec une seule dissipation thermo-visco-élastique, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Aussi, on a prouvé la stabilité d'une manière générale dans le cas où le nombre de stabilité ζ_0 est nul.

Finalement, on propose un schéma numérique de type différences finies pour un système thermoélastique de Timoshenko avec dissipation de frottement. Des simulations numériques confirmant nos résultats sont présentés.

Mots-clés : Système poreux élastique ; Système de Timoshenko ; Thermoélasticité de type III ; Loi de Cattaneo ; Fonction de relaxation ; Décroissance exponentielle ; Décroissance générale ; Fonctionnelle de Lyapunov.

Abstract

In this thesis, we studied the asymptotic behavior of some elastic systems where the damping is introduced by the presence of a thermo-elastic or thermo-visco-elastic term. We started with a porous elastic system coupled with thermal effects, where the heat flux is given by Green and Naghdi's theory of type III. By using the multiplier method, we show a general decay result depending on the stability number K , from which the exponential and polynomial decay estimates are only special cases.

The second work is a Timoshenko type problem with two thermal dissipations, acting on the shear force and on the bending moment, where the heat flux in this case is given by Cattaneo's law. Using the semi-group theory, the existence and uniqueness of the solution of the problem was proved. Moreover, an exponential stability result has been established.

Then, the existence and uniqueness of the solution of a Timoshenko system with a unique thermo-visco-elastic damping was proved, using the Faedo-Galerkin method. Also, we established a general decay result in case the stability number ζ_0 is zero.

Finally, we propose a numerical scheme of finite difference type for a thermoelastic Timoshenko system with friction dissipation. Numerical simulations confirming our results are presented.

Keywords : Porous elastic system ; Timoshenko system ; Thermoelasticity of type III ; Cattaneo's law ; Relaxation function ; Exponential decay ; General decay ; Lyapunov functional.

المُلخَص

في هذه الأطروحة، ندرس جمل معادلات مرنة تحتوي على نوعين من التخميد، تخميد مرن حراري أو تخميد مرن حراري لزج. بدأنا بدراسة مسألة جملة معادلات حرارية مسامية لزجة، حيث يتم إعطاء التدفق الحراري من خلال نظرية Green et Naghdi المسماة بالصنف III . باستخدام طريقة المضاعف، تم إثبات إستقرار عام للطاقة يتعلق بالتابع المعروف لحد الذاكرة والذي يشمل الإستقرارين الجبري والأسّي ويتعلق كذلك برقم الإستقرار K .

في الموضوع الثاني تمت دراسة جملة معادلات لنظام Timoshenko ، بإضافة تخميدين حراريين يعملان على قوة القص ولحظة الإنحناء، في هذه المرة يعطى التدفق الحراري بقانون Cattaneo . تم إثبات وجود حلّ وحيد للجملة عن طريق نظرية semi-groupe . إضافة إلى ذلك، تم البرهان على أنّ التخميدتين كافيتان لدفع الجملة إلى الإستقرار الأسّي.

بعد ذلك، درسنا جملة معادلات لنظام Timoshenko ، ولكن هذه المرة بتخميد حراري من الصنف III . تم إثبات وجود و وحدانية الحل للجملة بواسطة طريقة Faedo-Galerkin ، وأيضا أثبتنا أنّ الطاقة تتجه للإستقرار العام الذي يتعلق برقم الإستقرار ζ_0 .

أخيرا، نقترح مخططا رقميا بواسطة طريقة الفروق المحدودة لمسألة Timoshenko حرارية مع تخميد الاحتكاك. يتم عرض عمليات المحاكاة الرقمية التي تؤكد نتائجنا.

الكلمات المفتاحية : نظام مسامي مرّن، نظام Timoshenko ، المرونة الحرارية من النوع III ، قانون Cattaneo ، دالة الإسترخاء، الإستقرار الأسّي، الإستقرار العام، دالة Lyapunov .

Table des matières

Introduction générale	xix
1 Notions préliminaires	1
1.1 Topologies faibles, compacité faibles	1
1.1.1 Topologie faible, topologie faible *	1
1.1.2 Compacité faible, compacité faible *	2
1.2 Espaces fonctionnels	3
1.2.1 Les espaces L^p	3
1.2.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	3
1.3 Rappel sur la théorie des semi groupes	5
1.3.1 Quelques définitions	5
1.3.2 Théorèmes fondamentaux	6
1.4 Méthode de Faedo-Galerkin	7
1.4.1 Problème approché	8
1.4.2 Estimation à priori et convergence	8
1.5 Produit de convolution	8
1.6 Inégalités algébriques	11
2 Décroissance générale de l'énergie des solutions d'un système élastique poreux avec dissipation thermo-viscoélastique	12
2.1 Introduction	12
2.2 Décroissance générale	15
3 Stabilité exponentielle d'un système thermoélastique de Timoshenko avec la loi de Cattaneo	27
3.1 Introduction	27
3.2 Existence et unicité	31
3.3 Stabilité exponentielle	35
4 Décroissance générale d'un système de Timoshenko avec thermoélasticité de type III	44
4.1 Introduction	44

4.2	Existence et unicité	47
4.3	Décroissance générale	56
4.3.1	Preuve du Théorème 4.3.1	64
5	Etude théorique et numérique du problème de Timoshenko avec la loi de Cattaneo	68
5.1	Introduction	68
5.2	Existence, unicité et décroissance exponentielle	69
5.3	Discrétisation du modèle	70
5.4	Convergence	76
5.5	Mise en oeuvre numérique	82
5.5.1	Algorithme	82
5.5.2	Résultats numériques et commentaires	82
	Bibliographie	86

Introduction générale

Durant ces dernières décennies, les structures flexibles sont devenues de plus en plus utilisées dans les domaines de la technologie et de l'ingénierie, ce qui a suscité l'intérêt des chercheurs pour les problèmes de la stabilisation des systèmes de type élastique, thermoplastique, viscoélastique, etc. De nombreux travaux à ce sujet existent dans la littérature et un progrès important a été réalisé dans ce domaine.

Principalement cette thèse porte sur l'étude de la stabilisation de quelques systèmes thermoélastiques sous l'effet de différents types de dissipations.

La thermoélasticité s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et déformations dans les corps de solides élastiques et vice-versa. En d'autre terme, cette théorie prend en compte les processus, ou les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques mais également des variations de la température.

La dynamique des solides élastiques engendre des vibrations provoquées par excitation comme les charges extérieures imposées sur le solide ou de l'environnement, séisme, explosion ou choc avec d'autres objets,...etc. Ces vibrations sont connues par leur influence néfaste sur la structure de solide ou sur son fonctionnement et pour ces raisons là qu'elles constituent un problème majeur dans les domaines de l'ingénierie et de l'industrie. Pour pallier ce problème, la stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétroaction (feedback), elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro de façon plus au moins rapide par un mécanisme de dissipation. Pratiquement, pour stabiliser le système, divers façons ont été proposés par exemple introduire des amortissements dans le système ou la frontière ou une partie de frontière ainsi que différentes dissipations ont été élaborées par exemple les dissipations de type frictionnelle, thermique ou viscoélastique ou combinaison de celles-ci.

Plus précisément, on s'intéresse à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note par $E(t)$. Il existe plusieurs types de stabilisation que l'on peut étudier

- 1) Stabilisation forte : $E(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
 - 2) Stabilisation logarithmique : $E(t) \leq C (\log(t))^{-\delta}$, $\forall t > 0$, $(C, \delta > 0)$.
 - 3) Stabilisation polynomiale : $E(t) \leq C t^{-\delta}$, $\forall t > 0$, $(C, \delta > 0)$.
 - 4) Stabilisation uniforme : $E(t) \leq C e^{-\delta t}$, $\forall t > 0$, $(C, \delta > 0)$.
- Où C dépend des données initiales.

Cette thèse est fondée sur deux concepts : la thermoélasticité non classique et la thermoélasticité poreuse. En particulier, on s'intéresse à la stabilité des systèmes de Timoshenko et poreux où le flux de la chaleur est proposé dans la théorie de thermoélasticité non classique.

Thermoélasticité non classique

La thermoélasticité classique s'intéresse à l'effet de la chaleur sur la déformation d'un solide élastique et à l'effet inverse de la déformation sur l'état thermique du solide. Elle se base sur le principe de la théorie classique de la conduction thermique, typiquement donnée par la loi de Fourier

$$q = -\kappa \nabla \theta,$$

où q est le vecteur de conduction thermique, θ est la différence de température et κ est le coefficient de la conductivité thermique. Par conséquent, cette équation prédit une vitesse infinie de propagation de la chaleur, ou encore toute perturbation thermique à un point a un effet instantané dans le reste du corps, ce qui est physiquement irréaliste et les expériences ont montré que la conduction thermique dans certains cristaux diélectriques à basse température est libre de ce paradoxe (la vitesse de propagation infinie) et que les perturbations, qui sont presque entièrement thermiques, se propagent à une vitesse finie. Cette propagation de l'ondulatoire de la chaleur est connue sous le nom de deuxième son.

Pour enlever ce paradoxe physique, plusieurs théories ont été élaborées. Cattaneo a proposé un modèle dans lequel la température se propage à vitesse finie. Cette loi de transfert de la chaleur est appelée loi de Cattaneo [18], elle consiste à remplacer la loi de Fourier par la loi de Cattaneo suivante :

$$\tau q + q + \kappa \nabla \theta = 0, \tag{1}$$

où $\tau > 0$ est le temps de relaxation. Avec cette relation, l'énergie interne donnée par

$$e = \tilde{e}(\theta), \quad (2)$$

n'est plus compatible avec la deuxième loi de la thermodynamique. Coleman et al. [23] ont montré en 1982 que, si (1) est adoptée, alors la compatibilité avec la thermodynamique exige que (2) devrait être remplacée par

$$e = \tilde{e}(\theta, q) = a(\theta) + \sigma(\theta)q^2,$$

où σ est une fonction déterminée par τ et κ .

Au cours du dernier siècle, Green et Naghdi [39, 40, 41] ont introduit trois nouveaux types de la théorie thermoélastique fondés sur une égalité entropique au lieu de l'inégalité entropique habituelle. Dans chacune de ces théories, la relation constitutive du flux de la chaleur est présentée par une équation aux dérivées partielles qui est différente des autres théories. Par conséquent, les trois théories sont obtenues et appelées thermoélasticité de type I, type II et de type III, respectivement. Dans cette direction de recherche, de nombreuses contributions mathématiques et physiques ont été apportées dans ce domaine. Voir par exemple les articles [19, 20, 21, 78, 79, 80, 82].

Lorsque ces théories sont linéarisées, la thermoélasticité de type I conduit à la conduction de la chaleur habituelle par la loi de Fourier. Le type II conduit à une équation du Télégraphe

$$\theta_{tt} + \frac{1}{\tau}\theta_t = c^2\Delta\theta,$$

où τ est un paramètre réel de relaxation strictement positive, et le type III conduit à l'équation de Jeffrey

$$\tau q_t + q + \kappa_1\Delta\theta + \tau\kappa_2\nabla\theta_t = 0. \quad (3)$$

La thermoélasticité de type II est une théorie alternative pour décrire les interactions thermomécaniques dans les matériaux élastiques. Les auteurs dans [39] ont proposé l'utilisation de la variable de déplacement thermique

$$\psi = \int_{t_0}^t \theta(x, s)ds + \psi_0,$$

au lieu de la température θ . A l'échelle macroscopique cette variable représente une grandeur de déplacement thermique à l'échelle moléculaire. Au cours des deux dernières décennies, cette théorie a fait l'objet de quelques travaux intéressants, voir par exemple [22, 44, 50, 81].

Dans la théorie de la thermoélasticité de type III, le flux de la chaleur est une combinaison de ceux de type I et II et ces dernières ne sont que des cas limites de flux

de la chaleur de type III. Le système de thermoélasticité de type III est de nature dissipatif alors que celui de type II est sans dissipation de l'énergie. Dans ces deux théories de type II et III, la chaleur se propage par le biais d'ondes thermiques et la vitesse de propagation d'onde est finie.

Nombreux travaux ont été publiés pour les systèmes thermoélastiques de type III. Quintanilla et al. [82] ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} - \kappa \theta_{txx} + \gamma u_{ttx} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4)$$

avec des données initiales et différentes conditions aux bords, où u est le déplacement, θ est la température et les coefficients $\alpha, \beta, \delta, \kappa, \gamma$ sont des constantes positives. Les auteurs ont utilisé la méthode d'énergie et la méthode spectrale pour montrer que la dissipation forte ($-\kappa \theta_{txx}$) stabilise le système (4) exponentiellement.

Concernant les systèmes de Timoshenko avec thermoélasticité de type III, on cite le travail de Messaoudi et al. [56] qui ont traité le système de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k (\varphi_x + \psi)_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} = b \psi_{xx} - k (\varphi_x + \psi) - \beta \theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_{tt} = \delta \theta_{xx} + \kappa \theta_{txx} - \gamma \psi_{ttx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (5)$$

où φ, ψ, θ désignent le déplacement transversal de la poutre, l'angle de rotation du filament de la poutre et la température, respectivement. Les coefficients $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \beta, \delta, \gamma, \kappa$ sont des constantes positives. Ils ont prouvé un résultat de stabilité exponentielle pour le système (5) à condition que les vitesses de propagation d'onde sont égales, c'est à dire $\left(\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}\right)$.

Djebabla et Tatar. [30] ont analysé un système de Von Kármán avec thermoélasticité de type III. Ce système est présenté par :

$$\begin{cases} u_{tt} - D_1 \left[u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right]_x + \gamma \theta_{tx} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2) w_x \right]_x + D_2 w_{xxxx} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \theta_{tt} - l \theta_{xx} + K_2 \theta_t + \gamma u_{tx} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Ici, u, w, θ désignent le déplacement longitudinal, le déplacement transversal et la température, respectivement. Les coefficients $D_1, D_2, K_1, K_2, l, \gamma$ sont des constantes positives. Les auteurs ont prouvé un résultat de stabilité exponentielle indépendante d'aucune relation entre les coefficients du système.

Récemment, Santos [86] a étudié un système de Bresse avec thermoélasticité de type III, le système est donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - l\kappa_0(\omega_x - l\varphi) + \kappa\theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) - \kappa\theta = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_1 \omega_{tt} - \kappa_0(\omega_x - l\varphi)_x + l\kappa(\varphi_x + \psi + l\omega) - \kappa l\theta = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta\theta_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi + l\omega)_{tt} - \gamma\theta_{txx} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (6)$$

où $\varphi, \psi, \omega, \theta$ désignent le déplacement vertical, l'angle de rotation, le déplacement longitudinal et la température, respectivement. Les coefficients $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \kappa, l, \kappa_0, b, \delta$ et γ sont des constantes positives. Un résultat de stabilité exponentielle a été prouvé par l'auteur pour le système (6) avec des conditions initiales et aux limites si et seulement si les coefficients du système vérifient

$$\frac{\rho_1}{\kappa} = \frac{\rho_2}{b}, \quad \text{et} \quad \kappa = \kappa_0.$$

Thermoélasticité poreuse

Dans la théorie d'élasticité, les solides élastiques avec des vides ont attirés l'attention de nombreux chercheurs depuis que Goodman et Cowin ont proposé une nouvelle théorie [38]. En fait, ils ont introduit la théorie du milieu continu des matériaux granulaires avec des vides dans la théorie des solides élastiques avec vides. Plus précisément, cette théorie est regardée comme une extension de la théorie classique de l'élasticité aux milieux poreux. En plus des effets élastiques, ces matériaux possèdent une microstructure avec la propriété que la masse en chaque point est obtenue comme le produit de la densité massique de la matrice du matériau avec la fraction volumique. Cette idée a été proposée par Nunziato et Cowin [75] lorsqu'ils ont développé la théorie non linéaire des matériaux élastiques poreux.

L'importance des matériaux avec microstructure a été démontrée par le nombre considérable d'articles publiés dans différents domaines d'application tels que l'industrie pétrolière, la science des matériaux, la biologie, etc. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux articles suivants [24, 25] et les références qui s'y trouvent.

Nous tenons à noter que les chercheurs se sont intéressés à l'analyse du comportement asymptotique en considérant les mécanismes de dissipation aux niveaux microscopique et/ou macroscopique. De nombreux articles ont été publiés, dans lesquels les auteurs ont déterminé le type et le taux de décroissance. La première contribution dans cette direction a été obtenu en 2003 par Quintanilla [83], où le système suivant a été considéré :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + \beta \varphi_x, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ J \varphi_{tt} = \delta \varphi_{xx} - \beta u_x - \tau \varphi_t - \xi \varphi, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (7)$$

où u est le déplacement d'un matériau élastique solide, φ la fraction volumique. Les coefficients $\rho, J, \mu, \delta, \xi, \tau$ sont des constantes positives et β satisfait $\beta^2 < \mu \xi$. L'auteur a prouvé que la dissipation poreuse $-\tau\varphi_t$ n'est pas assez forte pour stabiliser le système (7) exponentiellement. Plus tard, Apalara [10] a utilisé la méthode de l'énergie pour prouver que la dissipation poreuse $-\tau\varphi_t$ est suffisante pour conduire le système (7) à l'état d'équilibre de manière exponentielle à condition que les vitesses des ondes soient égales, c'est à dire

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\delta}{J}. \quad (8)$$

Dans [53], Magana et Quintanilla ont considéré le système (7) avec une dissipation viscoélastique de la forme γu_{txx} dans la première équation avec $\tau = 0$, ils ont montré que la présence d'une dissipation viscoélastique n'est pas assez forte pour stabiliser le système considéré exponentiellement. Dans le même travail, ils ont également montré que ni l'ajout de la température au problème viscoélastique-poreux ni l'ajout de la microtempérature au problème élastique-viscoporeux peut stabiliser le système de manière exponentielle. Cependant, la combinaison de la viscoélasticité et de la dissipation poreuse ou l'ajout de la microtempérature dans les problèmes élastiques poreux conduisent la solution à une décroissance exponentielle.

Casas et al. [16] ont considéré un système élastique poreux couplé avec des effets thermiques, donné par :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ J\varphi_{tt} = \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - \tau\varphi_t, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ c\theta_t = \kappa\theta_{xx} - \beta u_{tx} - m\varphi_t, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (9)$$

où θ est la température donnée par la loi de Fourier. Les auteurs ont prouvé que la présence des dissipations de température et poreuse agissant ensemble stabilisent le système de manière exponentielle. Les mêmes auteurs [17] ont ensuite considéré (9) avec $\tau = 0$, et ont montré que l'effet thermique seul n'est pas assez fort pour obtenir une stabilité exponentielle.

Pamplona et al. [76] ont étudié un système thermoélastique poreux de la forme :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \gamma u_{txx}, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ J\varphi_{tt} = \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \\ c\theta_t = \kappa\theta_{xx} - \beta u_{tx} - m\varphi_t, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (10)$$

et ont montré que l'amortissement fort dans l'équation élastique combiné à l'effet de la température n'est pas suffisant pour obtenir une stabilité exponentielle. En effet,

pour des solutions régulières, la décroissance est polynomiale.

Dans [89], Soufyane a été le premier qui a proposé un problème thermoélastique poreux avec une dissipation de type mémoire. Le système est présenté par :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \varphi_x - \theta_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varphi_{tt} = \varphi_{xx} - u_x - \varphi + \theta - \int_0^t g(t-s)\varphi_{xx}(s)ds, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \theta_t = \theta_{xx} - u_{tx} - \varphi_t, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (11)$$

où g est une fonction positive décroissante, et il a prouvé que la décroissance est exponentielle (respectivement polynomiale) lorsque la fonction de relaxation est décroît exponentiellement (respectivement polynomialement).

Notons que le flux de chaleur utilisé dans les trois systèmes précédents est donné par la loi de Fourier. Afilal et al. [68] ont étudié un système thermoélastique poreux avec une dissipation de type mémoire, où le flux de chaleur est donné par la loi de Cattaneo, plus précisément, ils ont examiné le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ J\varphi_{tt} = \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - \int_0^t g(t-s)\varphi_{xx}(s)ds, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ c\theta_t = -q_x - \beta u_{tx} - m\varphi_t, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \tau_0 q_t = -q - \kappa\theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (12)$$

un résultat similaire à celui trouvé dans [89] a été établi en utilisant les techniques de multiplicateurs.

Apalara [12] a considéré un système élastique poreux avec des effets de micro-températures,

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ J\varphi_{tt} = \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - d\theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ c\theta_t = \kappa\theta_{xx} - k\theta - d\varphi_{tx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (13)$$

où θ ici désigne la microtempérature, il a montré que le système (13) est exponentiellement (ou polynomialement) stable en fonction de (8). Le même résultat a été trouvé par Lacheheb et al. [49], quand ils ont considéré le même système avec la thermoélasticité de type III au lieu de la thermoélasticité classique.

Un grand progrès a été consacré à l'obtention d'une stabilité (exponentielle ou polynomiale) des solutions en thermoélasticité poreuse et de nombreux résultats ont été établis. Parmi eux, on peut citer les articles suivants [13, 34, 50, 62, 63, 65, 90, 91, 94].

Systèmes de Timoshenko

En 1921, Timoshenko a proposé un modèle en mécanique vibratoire considéré comme une amélioration des modèles des poutres de type Euler-Bernoulli et de type Rayleigh en tenant compte aussi bien des déformations de cisaillement que le moment de flexion. Le modèle mathématique est décrit par deux équations aux dérivées partielles émanant de son article [92]. Le modèle d'Euler-Bernoulli est limité à l'étude de la vibration transversale d'une poutre permettant la transmission de l'énergie avec une vitesse proche de l'infini. Plus tard, Rayleigh a modifié la poutre d'Euler-Bernoulli en proposant son modèle qui est basé sur l'ajout de l'inertie de rotation. Dans la pratique, ces deux modèles ne conviennent pas aux problèmes concrets, par conséquent, ils ont que peu d'applications. Par contre, le modèle de Timoshenko peut résoudre la majorité des problèmes rencontrés dans les applications. Le modèle est décrit par les deux équations hyperboliques couplées suivantes :

$$\begin{cases} \rho A \varphi_{tt} - \kappa A G (\varphi_x + \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho I \psi_{tt} - (EI \psi_x)_x + \kappa A G (\varphi_x + \psi) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (14)$$

où ρ désigne la masse volumique, A est l'aire de la section transversale, I est le second moment de la section transversale de la poutre, κ est le coefficient de cisaillement, G est le module de rigidité, E est le module d'élasticité de Young, φ est le déplacement transversal de la poutre, ψ est l'angle de rotation du filament de la poutre, t est la variable du temps, x la variable de l'espace au long de la poutre de longueur L dans sa configuration d'équilibre.

Il est important à noter que dans la littérature, les chercheurs ont montré que la présence d'une seule dissipation est insuffisante pour contrôler le système exponentiellement, sauf dans le cas où les vitesses de propagation d'ondes sont égales. Au contraire (les vitesses de propagation d'ondes sont différentes), la stabilité obtenue est polynomiale. Alors que la présence de termes d'amortissements dans les deux équations conduit à la stabilité uniforme. La différence des vitesses de propagation d'ondes est très importante et est notée comme suit :

$$\chi = \frac{\rho_1}{\kappa} - \frac{\rho_2}{b}. \quad (15)$$

Ce nombre a été proposé pour la première fois par Soufyane [87] où la stabilité exponentielle du système de Timoshenko a été prouvé avec la présence d'une seule dissipation agissant sur la deuxième équation du système.

Dans [6], Ammar-Khodja et al. ont considéré un système de Timoshenko avec

dissipation viscoélastique de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(\cdot, s)ds = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (16)$$

notant que, $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $k = \kappa AG$, et $b = EI$. Les auteurs ont prouvé un résultat de stabilité exponentielle pour le système (16) dépendant de la fonction de relaxation g et si $\chi = 0$, dans le cas où $\chi \neq 0$, ils ont montré que le système est stable de manière polynomiale. Le même résultat a été établi par Munôz Rivera et al. [72] quand ils ont considéré un système de Timoshenko avec terme de mémoire infini de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(\cdot, t-s)ds = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Munôz Rivera et al. [69] ont proposé un amortissement de nature différente, ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3 \theta_t - \kappa\theta_{xx} + \delta\psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (17)$$

où θ est la température, et les constantes $\rho_3, \kappa, \delta > 0$ représentent les paramètres physiques de la théorie de la thermoélasticité. Il est clair que cet amortissement n'agit pas directement sur les équations du système d'origine (équations (17)₁ et (17)₂) ou la frontière, mais comme un effet thermique donné par une équation de la chaleur (équation (17)₃) et couplé avec les équations du système de Timoshenko. Les auteurs ont montré que l'équation de la chaleur, qui produisant une dissipation de l'énergie, est capable de stabiliser le système exponentiellement si et seulement si $\chi = 0$. De plus, ils ont prouvé un résultat de stabilité polynomiale du système (17) dans le cas $\chi \neq 0$.

Notons que le flux de chaleur dans le système précédent (17), est donné par la loi de Fourier. L'étude du système de Timoshenko avec la loi de Cattaneo est particulièrement intéressante car le comportement du système de Timoshenko en thermoélasticité du second son est différent de celui de thermoélasticité classique. En fait, le premier travail publié dans ce sens a été donné par Fernandez Sare et al. [36], où ils ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta\theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \delta\psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (18)$$

et ils ont prouvé que le système (18) n'est pas exponentiellement stable même si les vitesses de propagation d'ondes sont égales ($\chi = 0$).

Dans les systèmes précédents (17,18) le couplage du système de Timoshenko avec les effets thermiques est considéré sur le moment de flexion. En 2014, Almeida Júnior et al. [3] ont proposé un nouveau couplage, où les effets thermiques agissant sur la force de cisaillement, plus précisément, ils ont considéré le système :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t - \delta \theta_{xx} + \gamma(\varphi_x + \psi)_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (19)$$

Les résultats relatifs à ce système dissipatif sont la stabilité exponentielle si et seulement si les vitesses de propagation d'ondes sont les mêmes et ceci est généralement connu lorsqu'il y a des dissipations dans les systèmes de Timoshenko. Ils ont prouvé la stabilité polynomiale dans le cas contraire ($\chi \neq 0$).

Récemment, Alves et al. [4] ont considéré un autre nouveau couplage du système de Timoshenko avec les effets thermiques, où cette fois, le couplage agissant sur le moment de flexion et la force de cisaillement à la fois, ils ont étudié le système :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta + \delta \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t - c_0 \theta_{xx} + \gamma(\varphi_x + \psi)_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_4 \vartheta_t - c_1 \vartheta_{xx} + \delta \psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (20)$$

ils ont prouvé que les deux dissipations de températures conduisent le système à une stabilité uniforme pour n'importe quelles valeurs du paramètres du système ou de type des conditions aux limites.

Plusieurs résultats de stabilité ont été établis par les chercheurs concernant les systèmes de Timoshenko, nous appelons le lecteur intéressé à voir [2, 70, 71, 88, 84] pour les systèmes de Timoshenko avec frottement, [42, 43, 57, 60] pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement viscoélastique, [5, 9, 11, 14, 36, 37, 56, 58, 59, 64, 85] pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement thermoélastique, [7, 54] pour les systèmes de Timoshenko avec dissipations aux limites.

Description de la thèse

Ce manuscrit est divisé en cinq chapitres et ordonné comme suit :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on rappelle les outils qu'on a utilisé tout au long de cette thèse. On présente quelques définitions et résultats de l'analyse fonctionnelle (les topologies faibles, espace de Sobolev,...). Egalement on donne quelques théorèmes et méthodes d'existence des problèmes d'évolution (théorème de Hille-Yosida,...).

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité d'un problème élastique poreux avec des effets thermiques où la conduction de la chaleur est donnée par la théorie de Green et Naghdi type III. Le système est de la forme :

$$\begin{cases} \rho \chi_{tt} = \mu \chi_{xx} + b \eta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ J \eta_{tt} = \delta \eta_{xx} - b \chi_x - \xi \eta - m \theta_{tx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ c \theta_{tt} = l \theta_{xx} - \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds - m \eta_{tx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \chi(0, t) = \chi(1, t) = \eta_x(0, t) = \eta_x(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, & t > 0, \\ \chi(x, 0) = \chi_0(x), \quad \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), & x \in (0, 1), \\ \chi_t(x, 0) = \chi_1(x), \quad \eta_t(x, 0) = \eta_1(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

sous certaines hypothèses sur la fonction de relaxation g , on prouve que les solutions énergies sont stables de manière générale et que la stabilité exponentielle et polynômiale deviennent un cas particulier, en utilisant la méthode des multiplicateurs. Notre résultat améliore celui démontré par Lacheheb et Messaoudi [49] et il a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale intitulée :

"General decay of porous elastic system with thermo-viscoelastic damping". Djellali, F., Labidi, S., Taallah, F. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications (2021). DOI : 10.32523/2306-6172-2021-9-1-31-43

Chapitre 3 : L'objectif de ce chapitre est dévoué au traitement d'un système de Timoshenko avec deux dissipations thermiques où le flux de la chaleur est donné par la loi de Cattaneo agissant sur la force de cisaillement et le moment de flexion.

Le système est présenté par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta + \delta \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \gamma(\varphi_x + \psi)_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \tau q_t + q + \kappa_1 \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_4 \vartheta_t + p_x + \delta \psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varsigma p_t + p + \kappa_2 \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x); \psi(x, 0) = \psi_0(x); \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); x \in (0, L), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x); q(x, 0) = q_0(x); \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x); p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in (0, L), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & t > 0, \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = p(0, t) = p(L, t) = 0, & t > 0. \end{array} \right.$$

En appliquant la théorie des semi groupes, on montre que notre système est bien posé. Ensuite, on prouve un résultat de stabilité uniforme du système par la méthode de multiplicateurs. Ceci a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale intitulée :

"Exponential stability of thermoelastic Timoshenko system with Cattaneo's law". Djellali, F., Labidi, S., Taallah, F. *Annali Dell'Universita Di Ferrara*. **67**, 43–57 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11565-021-00360-y>

Chapitre 4 : Ce chapitre concerne un système de Timoshenko amorti par une seule dissipation thermique de type III agissant sur la force de cisaillement. Plus précisément, on considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \chi_{tt} - k(\chi_x + \xi)_x + m\theta_{tx} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \xi_{tt} - b\xi_{xx} + k(\chi_x + \xi) - m\theta_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_{tt} - l\theta_{xx} + \int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(\cdot, s) ds + m\chi_{tx} + m\xi_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \chi_x(0, t) = \chi_x(L, t) = \xi(0, t) = \xi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, & t > 0, \\ \chi(x, 0) = \chi_0(x), \quad \xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), & x \in (0, L), \\ \chi_t(x, 0) = \chi_1(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi_1(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), & x \in (0, L), \end{array} \right.$$

on utilise la méthode de Faedo Galerkin pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce système. De plus, on prouve que l'énergie du système décroît d'une manière générale en fonction de certains paramètres du système. Ce résultat améliore plusieurs travaux dans la littérature par exemple l'article de Ghennam et Djebabla [37]. Il a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale :

Djellali, F., Labidi, S., Taallah, F. : "General decay for a viscoelastic-type Timoshenko system with thermoelasticity of type III". *Applicable Analysis* (2021). <https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1967329>

Chapitre 5 : Dans ce chapitre, on examine un système thermoélastique de Timoshenko avec dissipation de frottement. Le système est déterminé par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta\theta_x - \psi_t, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t = -q_x - \delta\psi_{tx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \tau q_t = -\beta q - \theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x); \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x); & x \in (0, 1), \\ \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); \quad q(x, 0) = q_0(x); & x \in (0, 1), \\ \varphi_x(0, t) = \varphi_x(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = q(0, t) = q(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{array} \right.$$

On donne des résultats théoriques sur l'existence et l'unicité de la solution et la décroissance de l'énergie. Ensuite, on présente un schéma basé sur les différences finies pour ce système ainsi que l'énergie numérique. Enfin, quelques tests numériques seront présentés.

Méthodologie

Dans ce travail, pour montrer les résultats de stabilité, on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ équivalente à l'énergie $E(t)$ associée au système. On désigne par $\mathcal{L} \sim E$ l'équivalence

$$\gamma_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \gamma_2 E(t), \quad t > 0,$$

pour deux constantes positives γ_1 et γ_2 . Il suffit d'établir une telle inégalité

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c \mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0, \quad c > 0,$$

pour déduire la stabilité exponentielle. Pour établir la stabilité de type générale, la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$ doit vérifier l'inégalité

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c \zeta(t) \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq t_0 > 0, \quad c > 0,$$

où $\zeta(t)$ est une fonction vérifiant certaines conditions.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions, inégalités et théorèmes fondamentaux (espace de Sobolev, théorème de Hille-Yosida,...) utiles pour aborder la suite.

1.1 Topologies faibles, compacités faibles

1.1.1 Topologie faible, topologie faible *

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, E' son dual (topologique) et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet dans la dualité entre E' et E .

Définition 1.1.1. *La topologie faible, notée $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant toutes les applications continues ϕ_f , pour tout $f \in E'$, où $\phi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$.*

Définition 1.1.2. *La topologie faible *, notée $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant toutes les applications continues ϕ_x , pour tout $x \in E$, où $\phi_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$ et $\phi_x(f) = \langle f, x \rangle$.*

Définition 1.1.3. *(Convergence faible)*

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E . On dit que x_n converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in E'.$$

Définition 1.1.4. *(Convergence faible étoile)*

Soit $f \in E'$ et soit $\{f_n\} \subset E'$. On dit que f_n converge faiblement * vers $f \in E'$, et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si

$$\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall x \in E.$$

Notation. Dans la suite, on utilise les notations suivantes :

$x_n \rightarrow x$ pour la convergence forte.

$x_n \rightharpoonup x$ pour la convergence faible.

$x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$ pour la convergence faible étoile.

Proposition 1.1.1. *Soit (x_n) une suite de E , on a*

(i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(E, E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E']$.

(ii) *Si $x_n \rightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*

(iii) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*

(iv) *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \rightarrow f$ fortement dans E' , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.*

Proposition 1.1.2. *Soit (f_n) une suite de E' , on a*

(i) $[f_n \xrightarrow{*} f \text{ pour } \sigma(E', E)] \Leftrightarrow [\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall x \in E]$.

(ii) *Si $f_n \rightarrow f$ fortement, alors $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$.*

(iii) *Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E'')$, alors $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$.*

(iv) *Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$, alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*

(v) *Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.*

1.1.2 Compacité faible, compacité faible *

Les résultats de compacité faible et faible * sont largement utilisés "pour passer à la limite" dans la plupart des méthodes constructives de résolution des problèmes aux limites.

Théorème 1.1.1. *La boule unité fermée d'un espace de Banach réflexif E est faiblement compacte.*

Remarque 1.1.1. *Ce théorème est parfois formulé comme suit :*

Toute suite bornée dans un espace de Banach réflexif E , admet une sous-suite faiblement convergente dans E .

Proposition 1.1.3. *Si E est un espace normé séparable, alors toute suite bornée dans E' admet une sous-suite faiblement * convergente dans E' .*

1.2 Espaces fonctionnels

1.2.1 Les espaces L^p

Définition 1.2.1. [15] Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert de \mathbb{R}^n (pas forcément borné), et $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \psi \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |\psi(x)|^p dx < +\infty; \text{ si } 1 \leq p < +\infty \\ \text{et } \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \psi \text{ est mesurable et il existe une constante } c \\ \text{telle que } |\psi| < c \text{ p.p sur } \Omega; \text{ si } p = +\infty \end{array} \right\}.$$

Théorème 1.2.1. Les espaces $L^p(\Omega)$ munis des normes suivantes

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |\psi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} &= \inf \left\{ c \in \mathbb{R}^+ \text{ telle que } |\psi| < c \text{ p.p sur } \Omega \right\}, \end{aligned}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.2.1. Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(\psi, \phi) = \int_{\Omega} \psi \phi dx, \quad \psi, \phi \in L^2(\Omega),$$

et

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} = (\psi, \psi)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2.2. (Inégalité de Hölder) [15] Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour $\psi \in L^p(\Omega)$ et $\phi \in L^q(\Omega)$ on a $\psi \phi \in L^1(\Omega)$ et

$$\|\psi \phi\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_{L^p(\Omega)} \|\phi\|_{L^q(\Omega)}.$$

Remarque 1.2.2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas où $p = q = 2$.

1.2.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Les espaces $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2.2. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions s'identifie à une fonction de $L^p(\Omega)$.*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \psi \in L^p(\Omega), \exists \phi \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \psi \phi' dx = - \int_{\Omega} \phi \psi dx, \forall \phi \in C_c^1(\Omega) \right\}.$$

Proposition 1.2.1. [1] *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\psi\|_{L^p(\Omega)} + \|\psi'\|_{L^p(\Omega)},$$

est un espace de Banach.

De plus, pour $p = 2$, l'espace de Banach $W^{1,2}(\Omega)$ devient un espace de Hilbert que l'on note $H^1(\Omega)$, avec le produit scalaire

$$(\psi, \phi)_{H^1(\Omega)} = (\psi, \phi)_{L^2(\Omega)} + (\psi', \phi')_{L^2(\Omega)}.$$

Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq +\infty$ un réel, et soit l'entier $m \geq 2$, on définit par récurrence l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \psi \in W^{m-1,p}(\Omega), \psi' \in W^{m-1,p}(\Omega) \right\}.$$

En particulier, si $p = 2$ on a

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

l'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(\psi, \phi)_{H^m(\Omega)} = (\psi, \phi)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^m (\psi^{(i)}, \phi^{(i)})_{L^2(\Omega)}.$$

est un espace de Hilbert.

Les espaces $W_0^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2.3. *Soit l'entier m et le réel $1 \leq p \leq +\infty$, on désigne par $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^m(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.*

Théorème 1.2.3. [15] *Soit $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ (le bord de Ω).*

Proposition 1.2.2. (Inégalité de Poincaré) [15] On suppose que Ω est borné. Alors il existe une constante strictement positive c vérifiant

$$\forall \psi \in W_0^{1,p}(\Omega) : \quad \|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \|\psi'\|_{L^p(\Omega)}.$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\psi'\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 1.2.3. On a la caractérisation suivante de $H_0^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ \psi \in H^m(\Omega) : \psi = \psi' = \dots = \psi^{(m-1)} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

Il convient de bien distinguer

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \psi \in H^2(\Omega) : \psi = \psi' = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

et

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \left\{ \psi \in H^2(\Omega) : \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

1.3 Rappel sur la théorie des semi groupes

1.3.1 Quelques définitions

Définition 1.3.1. [52] Soit H un espace de Hilbert muni de produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\|\cdot\|$ et soit $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non borné. On dit que A est dissipatif si

$$(Ax, x) \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Définition 1.3.2. [52] Une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus sur H est dite semi groupe fortement continu (C_0 -semi groupe) si :

- i) $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0,$
- ii) $S(0) = Id,$
- iii) pour chaque $x \in H, S(t)x$ est continue sur $[0, +\infty),$ i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_H = 0.$$

On utilise parfois la notation $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$ pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Définition 1.3.3. [52] On appelle un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe $\{e^{At}\}_{t \geq 0},$ tout opérateur A défini sur

$$D(A) = \left\{ x \in H, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

par

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Définition 1.3.4. Un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur H est dit de contractions si $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1, \forall t \geq 0$.

Définition 1.3.5. Supposons que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu de contractions $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur H . On dit que le C_0 -semi groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est :

- fortement stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)u\|_H = 0, \quad \forall u \in H.$$

- Uniformément stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(H)} = 0.$$

- Exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives α_1 et α_2 tel que

$$\|S(t)u\|_H \leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t} \|u\|_H, \quad \forall t > 0, \quad \forall u \in H.$$

- Polynomialement stable s'il existe deux constantes positives C et α tel que

$$\|S(t)u\|_H \leq C t^{-\alpha} \|u\|_H, \quad \forall t > 0, \quad \forall u \in H.$$

1.3.2 Théorèmes fondamentaux

Supposons que l'opérateur linéaire A génère un C_0 -semi groupe $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert H . Alors, nous avons :

Théorème 1.3.1. (Hille-Yosida) [52, 77] Un opérateur linéaire (non borné) $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contractions $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si et seulement si

(i) A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = H$.

(ii) L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient \mathbb{R}^+ et pour tout $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.3.2. (Lumer-Phillips) [52, 77] Soit $A : D(A) \subseteq H \rightarrow H$ un opérateur linéaire et le domaine $D(A)$ dense dans H . Alors, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi groupe de contractions sur H si et seulement si

(i) A est dissipatif.

(ii) il existe $\lambda > 0$ tel que $Im(\lambda I - A) = H$ (A est maximal).

Avant d'énoncer le théorème de Lax-Milgram qui est un outil efficace et simple pour la résolution d'équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles linéaires, nous devons énoncer cette définition

Définition 1.3.6. [15] On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est (i) *continue* s'il existe une constante C telle que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H,$$

(ii) *coercive* s'il existe une constante α telle que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2, \quad \forall v \in H.$$

Théorème 1.3.3. (Lax-Milgram) [15] Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$ (le dual de H) il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \text{Min}_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

1.4 Méthode de Faedo-Galerkin

Nous considérons le problème de Cauchy abstrait pour une équation d'évolution du second ordre dans l'espace de Hilbert séparable avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.

$$\begin{cases} u''(t) + A(t)u(t) = f(t), & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

où u est une fonction inconnue, f est une fonction donnée. En transformant l'intervalle fermé $[0, T] \subset \mathbb{R}$ en un espace de Hilbert séparable H . $A(t)$ ($0 \leq t \leq T$) est un opérateur linéaire borné dans H .

Supposons que $\langle A(t)u(t), v(t) \rangle = a(t; u(t), v(t))$, pour tout $u, v \in V$ (V est l'espace d'énergie $V \subset H$), où $a(t; \cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue dans V .

Le problème (1.1) peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver la solution } u(t) \text{ tel que} \\ u \in C([0, T], V); \quad u' \in C([0, T], H), \\ \langle u''(t), v \rangle + a(t; u(t), v(t)) = \langle f, v \rangle, & t \in D'([0, T]), \\ u_0(x) \in V, \quad u_1(x) \in H. \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce problème peut être résolu par le processus d'approximation de Faedo-Galerkin.

1.4.1 Problème approché

Soit V_m un sous espace de V de dimension finie, et soit ω_i une base de V_m .
On cherche donc la fonction

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) \omega_i,$$

solution du problème approché

$$\begin{cases} u_m \in C([0, T], V_m); & u'_m \in C([0, T], V_m); & u_m \in L^2(0, T; V_m), \\ \langle u''_m(t), \omega_j \rangle + a(t; u_m(t), \omega_j) = \langle f, \omega_j \rangle, & 1 \leq j \leq m, \\ u_m(0) = \sum_{i=1}^m \xi_{im}(t) \omega_i, & u'_m(0) = \sum_{i=1}^m \eta_{im}(t) \omega_i, \end{cases} \quad (1.3)$$

où

$$\begin{aligned} u_m(0) = u_{0m} &= \sum_{i=1}^m \xi_{im}(t) \omega_i \rightarrow u_0 \in V \text{ lorsque } m \rightarrow \infty, \\ u'_m(0) = u_{1m} &= \sum_{i=1}^m \eta_{im}(t) \omega_i \rightarrow u_1 \in H \text{ lorsque } m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.4)$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution du problème (1.3) dans un intervalle $[0, t_m)$, avec $t_m < T$. Dans l'étape suivante, nous obtenons des estimations a priori pour la solution, de sorte qu'on peut étendre cette solution à l'extérieur de $[0; t_m[$ pour obtenir une solution définie pour $t > 0$.

1.4.2 Estimation à priori et convergence

En utilisant l'estimation suivante :

$$\|u_m\|^2 + \|u'_m\|^2 \leq C \left\{ \|u_m(0)\|^2 + \|u'_m(0)\|^2 + \int_0^T \|f(s)\|^2 ds \right\}; \quad 0 \leq t < T, \quad (1.5)$$

et le Lemme de Gronwall, on déduit que la solution u_m du problème approché (1.3) converge vers la solution u du problème initial (1.1). L'unicité prouve que u est la solution.

1.5 Produit de convolution

Définition 1.5.1. *Le produit de convolution de deux fonctions réelles ou complexes f et g est une fonction, que l'on note généralement $(f * g)$ et qui est défini par :*

$$(f * g) = \int_0^t f(t-s) g(s) ds = \int_0^t f(s) g(t-s) ds.$$

Définition 1.5.2. Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes. On définit les opérateurs binaires \diamond et \circ respectivement par :

$$(f \diamond g) = \int_0^t f(t-s)(g(t) - g(s)) ds,$$

et

$$(f \circ g) = \int_0^t f(t-s)(g(t) - g(s))^2 ds.$$

Lemme 1.5.1. Soit f une fonction de $C^1[0, L]$, alors il existe une constante positive c_0 tel que

$$\int_0^L (f \diamond g)^2 dx \leq c_0 \int_0^L (f \circ g_x) dx, \quad g \in L^2(0, L).$$

Démonstration. En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré, on a

$$\begin{aligned} \int_0^L (f \diamond g)^2 dx &= \int_0^L \left(\int_0^t f(t-s)(g(t) - g(s)) ds \right)^2 dx \\ &= \int_0^L \left(\int_0^t f^{\frac{1}{2}}(t-s) f^{\frac{1}{2}}(t-s)(g(t) - g(s)) ds \right)^2 dx \\ &\leq \int_0^L \left(\int_0^t f(s) ds \right) \left(\int_0^t f(t-s)(g(t) - g(s))^2 ds \right) dx \\ &\leq \left(\int_0^t f(s) ds \right) \int_0^L \int_0^t f(t-s)(g(t) - g(s))^2 ds dx \\ &\leq \left(\int_0^t f(s) ds \right) \int_0^t f(t-s) \left(\int_0^L (g(t) - g(s))^2 dx \right) ds \\ &\leq \left(\int_0^t f(s) ds \right) \int_0^t f(t-s) \left(C \int_0^L (g_x(t) - g_x(s))^2 dx \right) ds \\ &\leq c_0 \int_0^L \int_0^t f(t-s)(g_x(t) - g_x(s))^2 ds dx = c_0 \int_0^L (f \circ g_x) dx. \end{aligned}$$

□

Remarque 1.5.1. De même, nous avons

$$\int_0^L (f \diamond g_x)^2 dx \leq c_0 \int_0^L (f \circ g_x) dx, \quad g \in L^2(0, L).$$

D'autre part, en utilisant le Lemme 1.5.1 et l'inégalité de Poincaré, avec $-f'$ au lieu de f , nous obtenons

$$\int_0^L \left(\int_0^t -f(t-s)(g(t) - g(s)) ds \right)^2 dx \leq -C \int_0^L (f' \circ g_x) dx.$$

Lemme 1.5.2. *Pour $f, g \in C^1([0, \infty); \mathbb{R})$, on a*

$$\begin{aligned} \int_0^L g_t (f * g_{xx}) dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\left(\int_0^t f(s) ds \right) |g_x(t)|^2 - (f \circ g_x) \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (f' \circ g_x) dx - \frac{1}{2} f(t) \int_0^L |g_x(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la formule d'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \int_0^L g_t (f * g_{xx}) dx &= \int_0^L g_t(t) \int_0^t f(t-s) g_{xx}(s) ds dx = - \int_0^L \int_0^t f(t-s) g_{tx}(t) g_x(s) ds dx \\ &= - \int_0^L \int_0^t f(t-s) g_{tx}(t) [g_x(s) - g_x(t)] ds dx - \int_0^L \int_0^t f(t-s) g_{tx}(t) g_x(t) ds dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^t [f(t-s) [g_x(s) - g_x(t)]^2 ds] dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^t f'(t-s) [g_x(s) - g_x(t)]^2 ds dx - \frac{1}{2} \left(\int_0^t f(s) ds \right) \frac{d}{dt} \int_0^L |g_x(t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\left(\int_0^t f(s) ds \right) |g_x(t)|^2 - (f \circ g_x) \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L (f' \circ g_x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} f(t) \int_0^L |g_x(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

□

Lemme 1.5.3. *Soit f une fonction de $C^1[0, L]$, alors il existe une constante positive c_0 tel que*

$$\int_0^L \phi (f * g_x) dx \leq \varepsilon \int_0^L \phi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L g_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L (f \circ g_x) dx.$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $\phi \in L^2(0, L)$ et $g \in H^1(0, L)$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Young, pour $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \phi(f * g_x) dx &= \int_0^L \phi \left(\int_0^t f(t-s) g_x(s) ds \right) dx \\
 &\leq \varepsilon \int_0^L \phi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L \left(\int_0^t f(t-s) g_x(s) ds \right)^2 dx \\
 &\leq \varepsilon \int_0^L \phi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L \left(\int_0^t f(t-s) (g_x(s) - g_x(t) + g_x(t)) ds \right)^2 dx \\
 &\leq \varepsilon \int_0^L \phi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L g_x^2(t) \left(\int_0^t f(t-s) ds \right)^2 dx \\
 &\quad + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L \left(\int_0^t f(t-s) (g_x(s) - g_x(t)) ds \right)^2 dx \\
 &\leq \varepsilon \int_0^L \phi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L g_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon} \int_0^L (f \circ g_x) dx.
 \end{aligned}$$

□

1.6 Inégalités algébriques

Lemme 1.6.1. *Si $1 \leq p < +\infty$, $a, b > 0$ alors*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1} (a^p + b^p).$$

Lemme 1.6.2. *(Inégalité de Young)*

Si $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \geq 0.$$

Lemme 1.6.3. *(Inégalité de Young avec ε)*

Si $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q, \quad a, b \geq 0, \quad \varepsilon > 0,$$

où $c(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{1}{p}} q^{-1}$.

Lemme 1.6.4. *(Inégalité de Poincaré)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, il existe une constante $c_p > 0$ vérifiant :

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \quad \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c_p \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.6)$$

où $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Décroissance générale de l'énergie des solutions d'un système élastique poreux avec dissipation thermo-viscoélastique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le système poreux thermoélastique suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ J\varphi_{tt} = \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - m\theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ c\theta_{tt} = l\theta_{xx} - \int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(s)ds - m\varphi_{tt}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

où u, φ, θ désignent le déplacement d'un matériau élastique solide, la fraction volumique et la différence de température respectivement, sachant que le flux de chaleur utilisé ici est donné par les théories de Green et Naghdi [39, 40, 41]. Les coefficients $\rho, J, c, \mu, \xi, b, \delta, m, l$ sont des constantes positives et b satisfait $b^2 < \mu\xi$. Concernant la fonction de relaxation g , nous supposons :

(H1) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction dérivable qui vérifie la condition suivante :

$$g(0) > 0, \quad \lambda = l - \int_0^\infty g(s)ds > 0.$$

(H2) Il existe une fonction dérivable décroissante $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

$$g'(t) \leq -\zeta(t)g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 2.1.1. *Il existe plusieurs fonctions qui satisfont (H1) et (H2). Nous présentons deux exemples de ces fonctions avec les conditions suivantes : $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et $\alpha_1 < \lambda\alpha_2$.*

(1) Si $g(t) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}$, alors $g'(t) = -\zeta(t)g(t)$, où $\zeta(t) = \alpha_2$.

(2) Si $g(t) = \frac{\alpha_1}{(1+t)^{\alpha_2+1}}$, alors $g'(t) = -\zeta(t)g(t)$, où $\zeta(t) = \frac{\alpha_2+1}{1+t}$.

L'analyse de la décroissance temporelle du système poreux-élastique unidimensionnel de la forme :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + \beta \varphi_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ J \varphi_{tt} = \delta \varphi_{xx} - \beta u_x - \tau \varphi_t - \xi \varphi, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.2)$$

a été abordée pour la première fois par Quintanilla [33], et a prouvé que la dissipation poreuse $-\tau \varphi_t$ n'est pas assez forte pour stabiliser le système (2.2) exponentiellement. Plus tard, Apalara [10] a utilisé la méthode de l'énergie pour prouver que la dissipation poreuse $-\tau \varphi_t$ est suffisante pour conduire le système (2.2) à l'état d'équilibre de manière exponentielle à condition que les vitesses des ondes soient égales, i.e.

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\delta}{J}. \quad (2.3)$$

Les systèmes de thermoélasticité de type III liés au système (2.1) ont été étudiés par plusieurs auteurs. Dans le cas où $\mu = \xi = b$, le système (2.1) se réduit au système de Timoshenko et a été traité dans [28, 29] par Djebabla et Tatar. Le système étudié est de la forme :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu (u_x + \varphi)_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ J \varphi_{tt} = \delta \varphi_{xx} - \mu (u_x + \varphi) - m \theta_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ c \theta_{tt} = l \theta_{xx} - \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds - m \varphi_{tt}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.4)$$

ils ont prouvé que le système est exponentiellement stable à condition que

$$\frac{\delta \rho}{\mu} - J = l - \frac{\mu c}{\rho} = m.$$

Récemment, Lacheheb et al. [49] ont analysé un système élastique poreux unidimensionnel avec thermoélasticité de type III. Plus précisément, ils ont examiné le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b \varphi_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ J \varphi_{tt} = \delta \varphi_{xx} - b u_x - \xi \varphi - m \theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ c \theta_{tt} = l \theta_{xx} + k \theta_{txx} - m \varphi_{tt}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.5)$$

les auteurs ont prouvé un résultat de stabilité exponentielle du système (2.5) si et seulement si (2.3) est vérifiée. Par contre, si (2.3) n'est pas satisfaite, ils ont établi un résultat de stabilité polynomiale.

Notons que le terme $k \theta_{txx}$ du côté droit de (2.5)₃ est un amortissement fort qui est remplacé par un amortissement plus faible et est donné dans le système (2.1).

Afin de montrer la nature dissipative du système (2.1), nous faisons le changement suivant : $\chi = u_t$ et $\eta = \varphi_t$, alors le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} \rho \chi_{tt} = \mu \chi_{xx} + b \eta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ J \eta_{tt} = \delta \eta_{xx} - b \chi_x - \xi \eta - m \theta_{tx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ c \theta_{tt} = l \theta_{xx} - \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(s) ds - m \eta_{tx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty). \end{cases} \quad (2.6)$$

Complété par les conditions aux limites et initiales

$$\begin{aligned} \chi(0, t) = \chi(1, t) = \eta_x(0, t) = \eta_x(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, & \quad t > 0, \\ \chi(x, 0) = \chi_0(x), \quad \eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), & \quad x \in (0, 1), \\ \chi_t(x, 0) = \chi_1(x), \quad \eta_t(x, 0) = \eta_1(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), & \quad x \in (0, 1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Notre objectif dans ce chapitre est de prouver que la seule dissipation thermo-viscoélastique est assez forte pour stabiliser le système (2.6)-(2.7) exponentiellement si et seulement si

$$K = \left(\frac{c\mu}{\rho} - l \right) \left(J - \frac{\delta\rho}{\mu} \right) - m^2 = 0. \quad (2.8)$$

D'abord, nous devons justifier l'application de l'inégalité de Poincaré pour η , d'après l'équation (2.6)₂ et les conditions aux limites (2.7), il en résulte que

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 \eta(x, t) dx + \frac{\xi}{J} \int_0^1 \eta(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.9)$$

en résolvant (2.9), on arrive à

$$\int_0^1 \eta(x, t) dx = \left(\int_0^1 \eta_0(x) dx \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\xi}{J}} t \right) + \sqrt{\frac{J}{\xi}} \left(\int_0^1 \eta_1(x) dx \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\xi}{J}} t \right).$$

Par conséquent, si nous mettons

$$\bar{\eta}(x, t) = \eta(x, t) - \left(\int_0^1 \eta_0(x) dx \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\xi}{J}} t \right) - \sqrt{\frac{J}{\xi}} \left(\int_0^1 \eta_1(x) dx \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\xi}{J}} t \right),$$

nous obtenons

$$\int_0^1 \bar{\eta}(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Clairement, l'utilisation de l'inégalité de Poincaré pour $\bar{\eta}$ est justifiée. De plus, $(\chi, \bar{\eta}, \theta)$ satisfait le système (2.6) avec des conditions initiales pour $\bar{\eta}$ données par :

$$\bar{\eta}_0(x) = \eta_0(x) - \int_0^1 \eta_0(x) dx, \quad \text{et} \quad \bar{\eta}_1(x) = \eta_1(x) - \int_0^1 \eta_1(x) dx.$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons $\bar{\eta}$ au lieu de η mais nous écrivons η pour simplifier les notations.

Remarque 2.1.2. *Le résultat d'existence et unicité de la solution du système (2.6)-(2.7) s'obtient et se démontre par la méthode de Galerkin de la même manière que dans la section 4.2.*

2.2 Décroissance générale

Dans cette section, on considère le système (2.6)-(2.7) et on montre la stabilité exponentielle de l'énergie associée au système (2.6)-(2.7), en utilisant la technique des multiplicateurs.

Remarque 2.2.1. *Puisque g est une fonction positive, continue et $g(0) > 0$, alors on a*

$$\int_0^t g(s) ds \geq \int_0^{t_0} g(s) ds = g_0 > 0, \quad \forall t \geq t_0 > 0. \quad (2.10)$$

L'énergie classique associée au système (2.6)-(2.7) est donnée par :

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 & \left[\rho \chi_t^2 + \mu \chi_x^2 + J \eta_t^2 + \delta \eta_x^2 + \xi \eta^2 + c \theta_t^2 \right. \\ & \left. + \left(l - \int_0^t g(s) ds \right) \theta_x^2 + 2b \chi_x \eta + (g \circ \theta_x) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans toute la suite, c_1 désignera une constante positive générique.

Notre résultat principal dans cette section est d'établir une estimation qui assure la décroissance générale de l'énergie associée au système (2.6)-(2.7).

Théorème 2.2.1. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) sur g sont satisfaites, et que (2.8) soit vérifiée. Alors il existe deux constantes strictement positives β_1 et β_2 telles que la fonction d'énergie définie par (2.11) vérifie*

$$E(t) \leq \beta_1 e^{-\beta_2 \int_{t_0}^t \zeta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0 > 0. \quad (2.12)$$

Pour atteindre notre objectif, nous commençons par prouver quelques Lemmes.

Lemme 2.2.1. *La fonctionnelle d'énergie définie par (2.11) satisfait*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{1}{2} g(t) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.13)$$

Démonstration. En multipliant (2.6)₁ par χ_t , (2.6)₂ par η_t et (2.6)₃ par θ_t , d'après la formule d'intégration par partie sur $(0, 1)$ et les conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 & \left[\rho \chi_t^2 + \mu \chi_x^2 + J \eta_t^2 + \delta \eta_x^2 + \xi \eta^2 + c \theta_t^2 \right. \\ & \left. + l \theta_x^2 + 2b \chi_x \eta \right] dx - \int_0^1 \theta_{tx} (g * \theta_x) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

et

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 \theta_{tx} (g * \theta_x) dx &= \int_0^1 \theta_{tx} (g \diamond \theta_x) dx - \int_0^t g(s) ds \int_0^1 \theta_{tx} \theta_x dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^t g(s) ds \int_0^1 \theta_x^2 dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx + \frac{1}{2} g(t) \int_0^1 \theta_x^2 dx.
 \end{aligned}$$

En remplaçant l'égalité ci-dessus dans (2.14), on trouve (2.13). \square

Lemme 2.2.2. *La fonctionnelle*

$$I_1(t) = -\rho \int_0^1 \chi_t \chi dx, \quad (2.15)$$

vérifie, l'estimation suivante :

$$\frac{d}{dt} I_1(t) \leq -\rho \int_0^1 \chi_t^2 dx + \frac{3\mu}{2} \int_0^1 \chi_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \eta_x^2 dx. \quad (2.16)$$

Démonstration. Nous dérivons I_1 par rapport à t , utilisons la première équation de (2.6), intégrons par parties et les conditions aux bords, on arrive à

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} I_1(t) &= -\rho \int_0^1 \chi_t^2 dx - \rho \int_0^1 \chi_{tt} \chi dx \\
 &= -\rho \int_0^1 \chi_t^2 dx + \mu \int_0^1 \chi_x^2 dx + b \int_0^1 \chi_x \eta dx.
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'après les inégalités de Young et Poincaré, on a

$$b \int_0^1 \chi_x \eta dx \leq \frac{\mu}{2} \int_0^1 \chi_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \eta_x^2 dx. \quad (2.18)$$

L'insertion de (2.18) dans (2.17) nous donne (2.16). \square

Lemme 2.2.3. *Sous les hypothèses (H1)-(H2), la fonctionnelle*

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= J \int_0^1 \eta_t \chi_x dx + \frac{\rho\delta}{\mu} \int_0^1 \chi_t \eta_x dx + \left(m - \frac{c\mu}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \right) \int_0^1 \chi_x \theta_x dx \\
 &\quad - \frac{c}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \int_0^1 \chi_t \theta_t dx + \frac{1}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \int_0^1 (g * \theta_x) \chi_x dx,
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

satisfait pour $K = 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} I_2(t) &\leq -\frac{b}{2} \int_0^1 \chi_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \eta_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx \\
 &\quad + c_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx - c_1 \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx.
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Démonstration. La dérivée de I_2 nous donne

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_2(t) &= J \int_0^1 \eta_{tt} \chi_x dx + \frac{\rho\delta}{\mu} \int_0^1 \chi_{tt} \eta_x dx - \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_t \eta_{tx} dx \\
 &+ \left(m - \frac{c\mu}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right)\right) \int_0^1 \chi_{tx} \theta_x dx - \frac{c}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_{tt} \theta_t dx \\
 &+ \left(m - \frac{c\mu}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right)\right) \int_0^1 \chi_x \theta_{tx} dx - \frac{c}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_t \theta_{tt} dx \quad (2.21) \\
 &+ \frac{1}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 (g * \theta_x)_t \chi_x dx \\
 &+ \frac{1}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 (g * \theta_x) \chi_{tx} dx.
 \end{aligned}$$

En utilisant les trois équations du système (2.6), intégrant par partie et utilisant les conditions aux bords, nous obtenons d'après la deuxième équation

$$\begin{aligned}
 J_1 = J \int_0^1 \eta_{tt} \chi_x dx &= -\delta \int_0^1 \eta_x \chi_{xx} dx - b \int_0^1 \chi_x^2 dx \\
 &- \xi \int_0^1 \eta \chi_x dx - m \int_0^1 \theta_{tx} \chi_x dx. \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

A partir de la première équation de (2.6), nous avons

$$J_2 = \frac{\rho\delta}{\mu} \int_0^1 \chi_{tt} \eta_x dx = \delta \int_0^1 \eta_x \chi_{xx} dx + \frac{b\delta}{\mu} \int_0^1 \eta_x^2 dx, \quad (2.23)$$

et

$$\begin{aligned}
 J_3 = -\frac{c}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_{tt} \theta_t dx &= \frac{c\mu}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_x \theta_{tx} dx \\
 &- \frac{cb}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \eta_x \theta_t dx. \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

De la troisième équation, on a

$$\begin{aligned}
 J_4 = -\frac{c}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_t \theta_{tt} dx &= \frac{l}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_{tx} \theta_x dx \\
 &- \frac{1}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 (g * \theta_x) \chi_{tx} dx + \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \chi_t \eta_{tx} dx. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

En remplaçant (2.22)-(2.25) dans (2.21), on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_2(t) &= -b \int_0^1 \chi_x^2 dx - \xi \int_0^1 \eta \chi_x dx + \frac{b\delta}{\mu} \int_0^1 \eta_x^2 dx - \frac{K}{m} \int_0^1 \theta_x \chi_{tx} dx \\
 &- \frac{cb}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 \eta_x \theta_t dx + \frac{1}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu}\right) \int_0^1 (g * \theta_x)_t \chi_x dx. \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Maintenant dans le membre droit de (2.26), en utilisant les inégalités de Young et Poincaré, nous trouvons

$$-\xi \int_0^1 \eta \chi_x dx \leq \frac{b}{4} \int_0^1 \chi_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \eta_x^2 dx, \quad (2.27)$$

$$-\frac{cb}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \int_0^1 \eta_x \theta_t dx \leq c_1 \int_0^1 \left(\eta_x^2 + \theta_t^2 \right) dx, \quad (2.28)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \int_0^1 (g * \theta_x)_t \chi_x dx \\ &= \frac{g(t)}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \int_0^1 \chi_x \theta_x dx - \frac{1}{m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \int_0^1 \chi_x (g' \diamond \theta_x) dx \\ &\leq \frac{b}{4} \int_0^1 \chi_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx - c_1 \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

La relation (2.20) est obtenue, en remplaçant (2.27)-(2.29) dans (2.26) et en tenant compte de $K = 0$. \square

Lemme 2.2.4. *Sous les hypothèses (H1)-(H2), la fonctionnelle*

$$I_3(t) = -\frac{cJ}{m} \int_0^1 \theta_t \left(\int_0^x \eta_t(y, t) dy \right) dx, \quad (2.30)$$

vérifie pour tout $\varepsilon_1 > 0$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) &\leq -\frac{J}{2} \int_0^1 \eta_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \chi_x^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \eta_x^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \eta^2 dx \\ &\quad + c_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx + c_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 \theta_t^2 dx + c_1 \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Démonstration. En dérivant I_3 , utilisant (2.6)₂, (2.6)₃, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) &= -\frac{cJ}{m} \int_0^1 \theta_{tt} \left(\int_0^x \eta_t(y, t) dy \right) dx - \frac{cJ}{m} \int_0^1 \theta_t \left(\int_0^x \eta_{tt}(y, t) dy \right) dx \\ &= -\frac{J}{m} \int_0^1 \left[l \theta_{xx} - (g * \theta_{xx}) - m \eta_{tx} \right] \left(\int_0^x \eta_t(y, t) dy \right) dx \\ &\quad - \frac{c}{m} \int_0^1 \left[\delta \eta_x - b \chi - \xi \int_0^x \eta(y, t) dy - m \theta_t \right] \theta_t dx, \end{aligned}$$

et par simple intégration par parties, en utilisant $\int_0^1 \eta(x) dx = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_3(t) &= -\frac{lJ}{m} \int_0^1 \theta_x \eta_t dx - \frac{J}{m} \int_0^1 (g * \theta_x) \eta_t dx - J \int_0^1 \eta_t^2 dx \\ &\quad - \frac{c\delta}{m} \int_0^1 \theta_t \eta_x dx - \frac{cb}{m} \int_0^1 \theta_t \chi dx + c \int_0^1 \theta_t^2 dx \\ &\quad + \frac{c\xi}{m} \int_0^1 \theta_t \int_0^x \eta(y, t) dy dx, \end{aligned} \quad (2.32)$$

nous utilisons les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy-Schwarz pour $\varepsilon_1 > 0$, nous trouvons

$$-\frac{lJ}{m} \int_0^1 \theta_x \eta_t dx \leq \frac{J}{4} \int_0^1 \eta_t^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} -\frac{J}{m} \int_0^1 (g * \theta_x) \eta_t dx &= -\frac{J}{m} \int_0^t g(s) ds \int_0^1 \eta_t \theta_x dx + \frac{J}{m} \int_0^1 \eta_t (g \diamond \theta_x) dx \\ &\leq \frac{J}{4} \int_0^1 \eta_t^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx + c_1 \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$-\frac{c\delta}{m} \int_0^1 \theta_t \eta_x dx \leq \varepsilon_1 \int_0^1 \eta_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx, \quad (2.35)$$

$$-\frac{cb}{m} \int_0^1 \theta_t \chi dx \leq \varepsilon_1 \int_0^1 \chi_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{c\xi}{m} \int_0^1 \theta_t \int_0^x \eta(y, t) dy dx &\leq \varepsilon_1 \int_0^1 \left(\int_0^x \eta(y, t) dy \right)^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx \\ &\leq \varepsilon_1 \int_0^1 \eta^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx. \end{aligned} \quad (2.37)$$

L'insertion de (2.33)-(2.37) dans (2.32) nous donne le résultat cherché (2.31). \square

Lemme 2.2.5. *Soit la fonctionnelle*

$$I_4(t) = J \int_0^1 \eta_t \eta dx - \frac{\rho b}{\mu} \int_0^1 \chi_t \left(\int_0^x \eta(y, t) dy \right) dx, \quad (2.38)$$

alors pour tout $\varepsilon_2 > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_4(t) &\leq -\frac{\delta}{2} \int_0^1 \eta_x^2 dx - \xi_1 \int_0^1 \eta^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 \chi_t^2 dx \\ &\quad + c_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 \eta_t^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx, \end{aligned} \quad (2.39)$$

où $\xi_1 = \xi - \frac{b^2}{\mu} > 0$.

Démonstration. En dérivant la fonctionnelle I_4 par rapport à t , en utilisant la première et la deuxième équations de (2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_4(t) &= J \int_0^1 \eta_t^2 dx + J \int_0^1 \eta_{tt} \eta dx - \frac{\rho b}{\mu} \int_0^1 \chi_{tt} \left(\int_0^x \eta(y) dy \right) dx \\
 &\quad - \frac{\rho b}{\mu} \int_0^1 \chi_t \left(\int_0^x \eta_t(y) dy \right) dx \\
 &= J \int_0^1 \eta_t^2 dx + \int_0^1 \left[\delta \eta_{xx} - b \chi_x - \xi \eta - m \theta_{tx} \right] \eta dx \\
 &\quad - \int_0^1 \left(b \chi_{xx} + \frac{b^2}{\mu} \eta_x \right) \int_0^x \eta(y) dy dx - \frac{\rho b}{\mu} \int_0^1 \chi_t \int_0^x \eta_t(y) dy dx. \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule d'intégration par parties et $\int_0^1 \eta(x) dx = 0$, on arrive à

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_4(t) &= J \int_0^1 \eta_t^2 dx - \delta \int_0^1 \eta_x^2 dx - \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right) \int_0^1 \eta^2 dx \\
 &\quad + m \int_0^1 \theta_t \eta_x dx - \frac{\rho b}{\mu} \int_0^1 \chi_t \int_0^x \eta_t(y) dy dx. \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

Donc, nous estimons les deux derniers termes de (2.41), pour $\varepsilon_2 > 0$, en vertu des inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}
 m \int_0^1 \theta_t \eta_x dx &\leq \frac{\delta}{2} \int_0^1 \eta_x^2 dx + c_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx, \\
 - \frac{\rho b}{\mu} \int_0^1 \chi_t \int_0^x \eta_t(y) dy dx &\leq \varepsilon_2 \int_0^1 \chi_t^2 dx + c_1 \int_0^1 \eta_t^2 dx.
 \end{aligned}$$

Alors, (2.39) est établie. \square

Lemme 2.2.6. *Sous les hypothèses (H1)-(H2), la fonctionnelle I_5 définie par :*

$$\begin{aligned}
 I_5(t) &= -c \int_0^1 \theta_t (g \diamond \theta) dx \\
 &= -c \int_0^1 \theta_t \left(\int_0^t g(t-s) (\theta(t) - \theta(s)) ds \right) dx, \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

vérifie pour $\varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_5(t) &\leq -\frac{cg_0}{2} \int_0^1 \theta_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \eta_t^2 dx \\
 &\quad + c_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx - c_1 \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx, \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

où g_0 est défini dans (2.10).

Démonstration. En dérivant I_5 , utilisant (2.6)₃, puis en intégrant par parties, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_5(t) &= -c \int_0^1 \theta_{tt} (g \diamond \theta) dx - c \int_0^1 \theta_t (g \diamond \theta)_t dx \\
 &= - \int_0^1 \left[l \theta_{xx} - (g * \theta_{xx}) - m \eta_{tx} \right] (g \diamond \theta) dx - c \int_0^1 \theta_t (g \diamond \theta)_t dx \\
 &= l \int_0^1 \theta_x (g \diamond \theta_x) dx - \int_0^1 (g * \theta_x) (g \diamond \theta_x) dx - m \int_0^1 \eta_t (g \diamond \theta_x) dx \\
 &\quad - c \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_0^1 \theta_t^2 dx - c \int_0^1 \theta_t (g' \diamond \theta) dx.
 \end{aligned}$$

Ensuite, en vertu de l'inégalité de Young et de l'inégalité de Poincaré pour tout $\delta_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$

$$l \int_0^1 \theta_x (g \diamond \theta_x) dx \leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{c_1}{\varepsilon_3} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 (g * \theta_x) (g \diamond \theta_x) dx &= \int_0^1 (g \diamond \theta_x)^2 dx - \int_0^t g(s) ds \int_0^1 \theta_x (g \diamond \theta_x) dx \\
 &\leq \int_0^1 (g \diamond \theta_x)^2 dx + \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2\varepsilon_3} \left(\int_0^t g(s) ds \right)^2 \int_0^1 (g \diamond \theta_x)^2 dx \\
 &\leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{c_1}{\varepsilon_3} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

$$-m \int_0^1 \eta_t (g \diamond \theta_x) dx \leq \varepsilon_4 \int_0^1 \eta_t^2 dx + \frac{c_1}{\varepsilon_4} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
 -c \int_0^1 \theta_t (g' \diamond \theta) dx &\leq c \delta_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx + \frac{c}{4\delta_1} \int_0^1 \left(\int_0^t -g'(s) ds \right) (-g' \circ \theta_x) dx \\
 &\leq c \delta_1 \int_0^1 \theta_t^2 dx - \frac{c_1}{\delta_1} \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx. \quad (2.47)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on arrive à

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}I_5(t) &\leq -c \left(\int_0^t g(s) ds - \delta_1 \right) \int_0^1 \theta_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \eta_t^2 dx \\
 &\quad + c_1 \left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx - \frac{c_1}{\delta_1} \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx,
 \end{aligned}$$

en utilisant (2.10) et choisissant $\delta_1 = \frac{g_0}{2}$, on obtient le résultat désiré (2.43). \square

Lemme 2.2.7. *Sous les hypothèses (H1)-(H2), la fonctionnelle*

$$I_6(t) = c \int_0^1 \theta_t \theta dx + m \int_0^1 \eta_x \theta dx, \quad (2.48)$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_5 > 0$, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_6(t) &\leq -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 \eta_x^2 dx + c_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5}\right) \int_0^1 \theta_t^2 dx \\ &\quad + c_1 \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Démonstration. Nous dérivons I_6 , utilisons la troisième équation de (2.6) et intégrons par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_6(t) &= c \int_0^1 \theta_{tt} \theta dx + c \int_0^1 \theta_t^2 dx + m \int_0^1 \eta_{tx} \theta dx + m \int_0^1 \eta_x \theta_t dx \\ &= -l \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 \theta_t^2 dx + \int_0^1 \theta_x (g * \theta_x) dx + m \int_0^1 \eta_x \theta_t dx. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ensuite, nous estimons les deux derniers termes de (2.50) pour $\delta_2, \varepsilon_5 > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta_x (g * \theta_x) dx &= \int_0^t g(s) ds \int_0^1 \theta_x^2 dx - \int_0^1 \theta_x (g \circ \theta_x) dx \\ &\leq \int_0^t g(s) ds \int_0^1 \theta_x^2 dx + \delta_2 \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{c_1}{\delta_2} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx \\ &= \left(\int_0^t g(s) ds + \delta_2 \right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{c_1}{\delta_2} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$m \int_0^1 \eta_x \theta_t dx \leq \varepsilon_5 \int_0^1 \eta_x^2 dx + \frac{c_1}{\varepsilon_5} \int_0^1 \theta_t^2 dx. \quad (2.52)$$

En remplaçant (2.51)-(2.52) dans (2.50), on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_6(t) &\leq -\left(l - \int_0^t g(s) ds - \delta_2\right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^1 \eta_x^2 dx \\ &\quad + c_1 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_5}\right) \int_0^1 \theta_t^2 dx + \frac{c_1}{\delta_2} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Et puisque $\lambda \leq l - \int_0^t g(s) ds$, on choisit $\delta_2 = \frac{\lambda}{2}$. Alors, l'inégalité (2.49) est obtenue. \square

Preuve du théorème 2.2.1

Soit N, N_1, N_2, N_3, N_4 des constantes positives à déterminer plus tard. Nous définissons notre fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} par :

$$\mathcal{L}(t) = N E(t) + I_1(t) + \frac{4\mu}{b} I_2(t) + N_1 I_3(t) + N_2 I_4(t) + N_3 I_5(t) + N_4 I_6(t). \quad (2.54)$$

En dérivant (3.60), et en tenant compte de (2.13), (2.16), (2.20), (2.31), (2.39), (2.43) et (2.49), nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -\left(\rho - \varepsilon_2 N_2\right) \int_0^1 \chi_t^2 dx - \left[\frac{J}{2} N_1 - \varepsilon_4 N_3 - c_1 N_2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\right] \int_0^1 \eta_t^2 dx \\ & - \left(\frac{\delta}{2} N_2 - \varepsilon_1 N_1 - \varepsilon_5 N_4 - c_1\right) \int_0^1 \eta_x^2 dx - \left(\xi_1 N_2 - \varepsilon_1 N_1\right) \int_0^1 \eta^2 dx \\ & - \left(\frac{\mu}{2} - \varepsilon_1 N_1\right) \int_0^1 \chi_x^2 dx - \left[\frac{\lambda}{2} N_4 - \varepsilon_3 N_3 - c_1 N_1 - c_1\right] \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ & - \left[\frac{c g_0}{2} N_3 - c_1 \left(\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) N_1 + N_2 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) N_4\right)\right] \int_0^1 \theta_t^2 dx \\ & + \left[\frac{N}{2} - c_1 N_3 - c_1\right] \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx \\ & + c_1 \left[N_1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) N_3 + N_4\right] \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \end{aligned}$$

et on fixe

$$\varepsilon_2 = \frac{\rho}{2N_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\lambda N_4}{4N_3}, \quad \varepsilon_4 = \frac{JN_1}{4N_3}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\delta N_2}{4N_4},$$

par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -\frac{\rho}{2} \int_0^1 \chi_t^2 dx - \left[\frac{J}{4} N_1 - c_1 N_2 (1 + N_2)\right] \int_0^1 \eta_t^2 dx \\ & - \left(\frac{\delta}{4} N_2 - \varepsilon_1 N_1 - c_1\right) \int_0^1 \eta_x^2 dx - \left(\xi_1 N_2 - \varepsilon_1 N_1\right) \int_0^1 \eta^2 dx \\ & - \left(\frac{\mu}{2} - \varepsilon_1 N_1\right) \int_0^1 \chi_x^2 dx - \left[\frac{\lambda}{4} N_4 - c_1 N_1 - c_1\right] \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ & - \left[\frac{c g_0}{2} N_3 - c_1 \left(\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) N_1 + N_2 + \left(1 + \frac{N_3}{N_1}\right) N_4\right)\right] \int_0^1 \theta_t^2 dx \\ & + \left[\frac{N}{2} - c_1 N_3 - c_1\right] \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx \\ & + c_1 \left[N_1 + \left(\frac{N_3}{N_4} + \frac{N_3}{N_1}\right) N_3 + N_4\right] \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Maintenant, nous choisissons nos constantes d'une manière appropriée. Nous choisissons N_2 assez grand pour que

$$\gamma_0 = \frac{\delta}{4}N_2 - c_1 > 0,$$

et nous sélectionnons ε_1 assez petit tel que

$$\varepsilon_1 < \min \left(\frac{\gamma_0}{N_1}, \frac{\mu}{2N_1}, \frac{\xi_1 N_2}{N_1} \right).$$

Ensuite, nous prenons N_1 assez grand pour que

$$\frac{J}{4}N_1 - c_1 N_2 (1 + N_2) > 0.$$

En plus, en choisissant N_4 assez grand tel que

$$\frac{\lambda}{4}N_4 - c_1 N_1 - c_1 > 0.$$

En prenant N_3 assez grand pour que

$$\frac{c g_0}{2}N_3 - c_1 \left(\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) N_1 + N_2 + \left(1 + \frac{N_3}{N_1}\right) N_4 \right) > 0.$$

Finalement, en choisissant N suffisamment grand pour que

$$\frac{N}{2} - c_1 N_3 - c_1 > 0.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\gamma_1 E(t) + \gamma_2 \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.56)$$

pour deux constantes positives γ_1 et γ_2 . D'autre part, on va montrer que la fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} et l'énergie E sont équivalentes, d'après (3.60), on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(t) - NE(t)| &\leq \rho \int_0^1 |\chi_t \chi| dx + \frac{4J}{|b|} \int_0^1 |\eta_t \chi_x| dx + \frac{4\rho\delta}{|b|} \int_0^1 |\chi_t \eta_x| dx \\ &\quad + \frac{4\mu}{|b|} \left| m - \frac{c\mu}{\rho m} \left(J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right) \right| \int_0^1 |\chi_x \theta_x| dx \\ &\quad + \frac{4\mu c}{m|b|} \left| J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right| \int_0^1 |\chi_t \theta_t| dx + \frac{4\mu}{m|b|} \left| J - \frac{\rho\delta}{\mu} \right| \int_0^1 |(g * \theta_x) \chi_x| dx \\ &\quad + \frac{cJ}{m} N_1 \int_0^1 \left| \theta_t \left(\int_0^x \eta_t(y, t) dy \right) \right| dx + J N_2 \int_0^1 |\eta_t \eta| dx \\ &\quad + \frac{\rho|b|}{\mu} N_2 \int_0^1 \left| \chi_t \left(\int_0^x \eta(y, t) dy \right) \right| dx + c N_3 \int_0^1 |\theta_t (g \diamond \theta)| dx \\ &\quad + c N_4 \int_0^1 |\theta_t \theta| dx + m N_4 \int_0^1 |\eta_x \theta| dx, \end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy-Schwarz, on arrive à

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq c_1 \int_0^1 [\chi_t^2 + \chi_x^2 + \eta_t^2 + \eta_x^2 + \eta^2 + \theta_t^2 + \theta_x^2 + (g \circ \theta_x)] dx,$$

on déduit d'après (2.11) que

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq c_1 E(t),$$

qui peut s'écrire comme

$$(N - c_1) E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c_1) E(t).$$

Donc, on choisit N assez grand, on obtient pour deux constantes positives γ_3, γ_4

$$\gamma_3 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \gamma_4 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.57)$$

Maintenant, en utilisant l'hypothèse **(H2)**, la relation (2.13), et en multipliant (2.56) par $\zeta(t)$, on arrive à

$$\begin{aligned} \zeta(t) \mathcal{L}'(t) &\leq -\gamma_1 \zeta(t) E(t) - \gamma_2 \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx \\ &\leq -\gamma_1 \zeta(t) E(t) - 2\gamma_2 E'(t), \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\left[\zeta(t) \mathcal{L}(t) + 2\gamma_2 E(t) \right]' - \zeta'(t) \mathcal{L}(t) \leq -\gamma_1 \zeta(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0,$$

ensuite, en utilisant le fait que $\zeta'(t) \leq 0$, on conclut que

$$\left[\zeta(t) \mathcal{L}(t) + 2\gamma_2 E(t) \right]' \leq -\gamma_1 \zeta(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Aussi, par (2.57), en notant que

$$\mathcal{R}(t) = \eta(t) \mathcal{L}(t) + 2\gamma_2 E(t) \sim E(t). \quad (2.58)$$

Par conséquent, nous obtenons pour $\gamma_5 > 0$

$$\mathcal{R}'(t) \leq -\gamma_5 \zeta(t) \mathcal{R}(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.59)$$

D'après une simple intégration de (2.59) sur (t_0, t) , on trouve

$$\mathcal{R}(t) \leq \mathcal{R}(t_0) e^{-\gamma_5 \int_{t_0}^t \zeta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.60)$$

Finalement, la combinaison de (2.58) et (2.60) termine la démonstration.

Remarque 2.2.2. Nous donnons quelques exemples pour illustrer les taux de décroissance de l'énergie obtenus par le Théorème 2.2.1. Nous considérons les deux exemples de la Remarque 2.1.1 avec les mêmes conditions sur α_1 et α_2 comme indiqué précédemment.

(1) Si $g(t) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}$, alors

$$E(t) \leq C_1 e^{-\alpha_2 C_2 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

(2) Si $g(t) = \frac{\alpha_1}{(1+t)^{\alpha_2+1}}$, alors

$$E(t) \leq \frac{C_1}{(1+t)^{(\alpha_2+1)C_2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Stabilité exponentielle d'un système thermoélastique de Timoshenko avec la loi de Cattaneo

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on considère un système thermoélastique de Timoshenko, où le flux de chaleur est donné par la loi de Cattaneo et agissant sur la force de cisaillement et le moment de flexion, plus précisément, nous nous intéressons à

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta + \delta \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \gamma(\varphi_x + \psi)_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \tau q_t + q + \kappa_1 \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_4 \vartheta_t + p_x + \delta \psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varsigma p_t + p + \kappa_2 \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.1)$$

où φ est le déplacement transversal de la poutre, ψ est l'angle de rotation du filament de la poutre, θ et ϑ sont les différences de température, q et p sont les flux de chaleur donnés par la loi de Cattaneo. Les coefficients $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \tau, \varsigma, k, b, \gamma, \delta, \kappa_1$ et κ_2 sont des constantes strictement positives. Le système (3.1) modélise la déformation d'une poutre épaisse viscoélastique, en prenant en compte le transfert de chaleur au cours du processus.

Ainsi, nous complétons le système (3.1) avec des conditions initiales

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x); \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x); \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x); \quad q(x, 0) = q_0(x); \quad \vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x); \quad p(x, 0) = p_0(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

et des conditions aux bords

$$\begin{aligned} \varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, & \quad t > 0, \\ \theta(0, t) = \theta(L, t) = p(0, t) = p(L, t) = 0, & \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour la stabilisation des systèmes de Timoshenko utilisant l'effet de température, nous mentionnons trois cas :

Cas 1 : Le couplage d'un système de Timoshenko avec des effets thermiques agissant sur la force de cisaillement et le moment de flexion, où le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier ($\tau = \varsigma = 0$). Donc, le système (3.1) prend la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta + \delta \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t - c_0 \theta_{xx} + \gamma(\varphi_x + \psi)_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_4 \vartheta_t - c_1 \vartheta_{xx} + \delta \psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.4)$$

le problème (3.4) a été analysé par Alves et al. [4], ils ont prouvé que les deux dissipations de températures conduisent le système à une stabilité uniforme pour n'importe quelles valeurs du paramètres du système ou le type des conditions aux limites.

Cas 2 : Le couplage d'un système de Timoshenko avec des effets thermiques agissant sur la force de cisaillement, c'est à dire que les effets de ϑ sont négligés ($\tau = 0$), donc le système (3.1) se réduit à

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t - \delta \theta_{xx} + \gamma(\varphi_x + \psi)_t = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.5)$$

Almeida Júnior et al. [3] ont étudié le système (3.5) avec des conditions aux bords de la forme :

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad (3.6a)$$

ou

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \quad (3.6b)$$

ils ont montré que le système (3.5) avec les conditions aux bords (3.6b) est exponentiellement stable si et seulement si les vitesses de propagation d'onde sont égales, i.e.

$$\chi = \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} = 0, \quad (3.7)$$

dans le cas contraire (si (3.7) n'est pas satisfaite), ils ont établi un taux de décroissance polynomial de type $\frac{1}{\sqrt{t}}$ pour le système (3.5)-(3.6b). De plus, ils ont obtenu un

taux de décroissance polynomial de type $\frac{1}{4\sqrt{t}}$ pour le système (3.5)-(3.6a).

Récemment, Apalara [11] a amélioré ce résultat, il a ajouté un amortissement viscoélastique de la forme $\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(s)ds$ à la deuxième équation, il a prouvé un résultat de stabilité général dépendant de la fonction de relaxation g , voir aussi [62, 63] pour d'autres résultats.

Cas 3 : Le couplage d'un système de Timoshenko avec des effets thermiques agissant sur le moment de flexion, c'est à dire que les effets de θ sont négligés, on mentionne deux cas.

Cas 3.a Pour $\varsigma = 0$, alors le système (3.1) prend la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \vartheta_t - \kappa \vartheta_{xx} + \delta \psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.8)$$

Dans [69], Munoz Rivera et Racke ont analysé (3.8) avec les conditions aux limites

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \vartheta_x(0, t) = \vartheta_x(L, t) = 0, \quad (3.9a)$$

ou

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \vartheta(0, t) = \vartheta(L, t) = 0, \quad (3.9b)$$

et ont prouvé que le système (3.8) avec les conditions aux bords (3.9a) ou bien (3.9b) est exponentiellement stable si et seulement si (3.7) est vérifiée. Le même résultat a été obtenu par Fernandez Sare et Racke [36] quand ils ont considéré des conditions aux bords de la forme

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \vartheta_x(0, t) = \vartheta_x(L, t) = 0.$$

Cas 3.b Pour $\varsigma > 0$, Fernandez Sare et Racke [36] ont considéré le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \delta \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \vartheta_t + p_x + \delta \psi_{xt} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \varsigma p_t + \beta p + \vartheta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.10)$$

avec des conditions aux limites

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \vartheta(0, t) = \vartheta(L, t) = 0, \quad (3.11)$$

les auteurs ont montré que le système (3.10)-(3.11) n'est pas exponentiellement stable même si (3.7) satisfait. Pour d'autres résultats connexes, nous renvoyons le lecteur

à [5, 9, 11, 27, 59] et aux références qui y sont mentionnées.

Notre objectif dans ce chapitre est de prouver que les effets thermiques sont assez forts pour stabiliser le système (3.1)-(3.3) exponentiellement sans aucune condition sur les coefficients du système. D'abord, nous devons justifier l'application de l'inégalité de Poincaré pour φ , q et ϑ . D'après la première, la quatrième et la cinquième équations du système (3.1), et les conditions aux bords (3.3), nous trouvons

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \varphi(x, t) dx = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^L q(x, t) dx + \frac{1}{\tau} \int_0^L q(x, t) dx = 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \vartheta(x, t) dx = 0, \quad (3.14)$$

utilisant les conditions initiales de φ et résolvant (3.12), on a

$$\int_0^L \varphi(x, t) dx = t \int_0^L \varphi_1(x) dx + \int_0^L \varphi_0(x) dx,$$

donc, si on met

$$\bar{\varphi}(x, t) = \varphi(x, t) - \frac{t}{L} \int_0^L \varphi_1(x) dx - \frac{1}{L} \int_0^L \varphi_0(x) dx,$$

on obtient,

$$\int_0^L \bar{\varphi}(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

De même, si on met

$$\begin{aligned} \bar{q}(x, t) &= q(x, t) - \frac{1}{L} \left(\int_0^L q_0(x) dx \right) e^{-\frac{1}{\tau}t}, \\ \bar{\vartheta}(x, t) &= \vartheta(x, t) - \frac{1}{L} \int_0^L \vartheta_0(x) dx, \end{aligned}$$

on trouve,

$$\int_0^L \bar{q}(x, t) dx = \int_0^L \bar{\vartheta}(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, l'inégalité de Poincaré peut être appliquée pour $\bar{\varphi}$, \bar{q} et $\bar{\vartheta}$, et on vérifie facilement que $(\bar{\varphi}, \psi, \theta, \bar{q}, \bar{\vartheta}, p)$ vérifie les équations du système (3.1) et les conditions aux limites (3.3). Dans la suite, on écrit φ , q et ϑ au lieu de $\bar{\varphi}$, \bar{q} et $\bar{\vartheta}$ pour simplifier

les notations.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 3.2 nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du système (3.1)-(3.3) en utilisant la théorie du semi groupe. Dans la section 3.3, nous prouvons la stabilité exponentielle de l'énergie du système (3.1)-(3.3) par la méthode de multiplicateurs.

3.2 Existence et unicité

Dans cette section, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.1)-(3.3) en utilisant la théorie du semi groupe. En posant $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q, \vartheta, p)^T$, où $\Phi = \varphi_t$ et $\Psi = \psi_t$, le système (3.1)-(3.3) est équivalent à :

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}U(t), \\ U(0) = U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0, \vartheta_0, p_0)^T, \end{cases} \quad (3.15)$$

où \mathcal{A} est un opérateur linéaire défini par :

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1} \left(k(\varphi_x + \psi)_x - \gamma\theta_x \right) \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2} \left(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta - \delta\vartheta_x \right) \\ -\frac{1}{\rho_3} \left(q_x + \gamma(\Phi_x + \Psi) \right) \\ -\frac{1}{\tau} \left(q + \kappa_1\theta_x \right) \\ -\frac{1}{\rho_4} \left(p_x + \delta\Psi_x \right) \\ -\frac{1}{\varsigma} \left(p + \kappa_2\vartheta_x \right) \end{pmatrix}.$$

Nous considérons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} L_\star^2(0, L) &= \left\{ u \in L^2(0, L) : \int_0^L u(x) dx = 0 \right\}, \\ H_\star^1(0, L) &= H^1(0, L) \cap L_\star^2(0, L), \\ H_\star^2(0, L) &= \left\{ u \in H^2(0, L) : u_x(0) = u_x(L) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H} = H_\star^1(0, L) \times L_\star^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L_\star^2(0, L) \times L_\star^2(0, L) \times L^2(0, L),$$

muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
 (U, \tilde{U})_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int_0^L \Phi \tilde{\Phi} dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \tilde{\Psi} dx \\
 &\quad + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \rho_3 \int_0^L \theta \tilde{\theta} dx + \frac{\tau}{\kappa_1} \int_0^L q \tilde{q} dx \\
 &\quad + \rho_4 \int_0^L \vartheta \tilde{\vartheta} dx + \frac{\varsigma}{\kappa_2} \int_0^L p \tilde{p} dx,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

pour $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q, \vartheta, p)^T \in \mathcal{H}$ et $\tilde{U} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\theta}, \tilde{q}, \tilde{\vartheta}, \tilde{p})^T \in \mathcal{H}$.

Le domaine de l'opérateur \mathcal{A} est donné par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} \mid \begin{array}{l} \varphi \in H_*^2(0, L) \cap H_*^1(0, L); \Phi \in H_*^1(0, L); \psi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L); \\ \Psi \in H_0^1(0, L); \theta \in H_0^1(0, L); q \in H_*^1(0, L); \vartheta \in H_*^1(0, L); p \in H_0^1(0, L) \end{array} \right\}.$$

Maintenant, on montre que \mathcal{A} est un opérateur maximal dissipatif. Pour cela, on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. *L'opérateur \mathcal{A} est dissipatif et satisfait, pour tout $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$,*

$$(\mathcal{A}U, \tilde{U})_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{\kappa_1} \int_0^L q^2 dx - \frac{1}{\kappa_2} \int_0^L p^2 dx \leq 0. \tag{3.17}$$

Démonstration. Pour tout $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, en utilisant le produit scalaire (3.16), on a

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}U, \tilde{U})_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int_0^L \left[\frac{k}{\rho_1} (\varphi_x + \psi)_x - \frac{\gamma}{\rho_1} \theta_x \right] \Phi dx + k \int_0^L (\Phi_x + \Psi) (\varphi_x + \psi) dx \\
 &\quad + \rho_2 \int_0^L \left[\frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} (\varphi_x + \psi) + \frac{\gamma}{\rho_2} \theta - \frac{\delta}{\rho_2} \vartheta_x \right] \Psi dx \\
 &\quad + b \int_0^L \Psi_x \psi_x dx + \rho_3 \int_0^L \left[-\frac{1}{\rho_3} q_x - \frac{\gamma}{\rho_3} \Phi_x - \frac{\gamma}{\rho_3} \Psi \right] \theta dx \\
 &\quad + \frac{\tau}{\kappa_1} \int_0^L \left[-\frac{1}{\tau} q - \frac{\kappa_1}{\tau} \theta_x \right] q dx + \rho_4 \int_0^L \left[-\frac{1}{\rho_4} p_x - \frac{\delta}{\rho_4} \Psi_x \right] \vartheta dx \\
 &\quad + \frac{\varsigma}{\kappa_2} \int_0^L \left[-\frac{1}{\sigma} p - \frac{\kappa_2}{\sigma} \vartheta_x \right] p dx.
 \end{aligned}$$

D'où, on conclut (3.17) par simplification et grâce à l'intégration par partie. \square

Lemme 3.2.2. *L'opérateur $I - \mathcal{A}$ est surjectif.*

Démonstration. Soit $G = (g^1, g^2, g^3, g^4, g^5, g^6, g^7, g^8)^T \in \mathcal{H}$, nous prouvons qu'il existe $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q, \vartheta, p)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ vérifiant

$$(I - \mathcal{A})U = G. \tag{3.18}$$

L'équation (3.18) est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} \varphi - \Phi = g^1, \\ \rho_1 \Phi - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = \rho_1 g^2, \\ \psi - \Psi = g^3, \\ \rho_2 \Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta + \delta \vartheta_x = \rho_2 g^4, \\ \rho_3 \theta + q_x + \gamma \Phi_x + \gamma \Psi = \rho_3 g^5, \\ (\tau + 1)q + \kappa_1 \theta_x = \tau g^6, \\ \rho_4 \vartheta + p_x + \delta \Psi_x = \rho_4 g^7, \\ (\varsigma + 1)p + \kappa_2 \vartheta_x = \varsigma g^8. \end{cases} \quad (3.19)$$

A partir de (3.19)₁, (3.19)₃, (3.19)₆ et (3.19)₈, on a

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi - g^1 \in H_\star^1(0, L), \\ \Psi &= \psi - g^3 \in H_0^1(0, L), \\ q &= -\frac{\kappa_1}{\tau + 1} \theta_x + \frac{\tau}{\tau + 1} g^6 \in L_\star^2(0, L), \\ p &= -\frac{\kappa_2}{\varsigma + 1} \vartheta_x + \frac{\varsigma}{\varsigma + 1} g^8 \in L^2(0, L). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Remplaçons (3.20) dans (3.19)₂, (3.19)₄, (3.19)₅ et (3.19)₇, on trouve

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi - k(\varphi_x + \psi)_x + \gamma \theta_x = \rho_1 (g^1 + g^2), \\ \rho_2 \psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) - \gamma \theta + \delta \vartheta_x = \rho_2 (g^3 + g^4), \\ \rho_3 \theta - \frac{\kappa_1}{\tau + 1} \theta_{xx} + \gamma \varphi_x + \gamma \psi = \gamma g_x^1 + \gamma g^3 + \rho_3 g^5 - \frac{\tau}{\tau + 1} g_x^6, \\ \rho_4 \vartheta - \frac{\kappa_2}{\varsigma + 1} \vartheta_{xx} + \delta \psi_x = \delta g_x^3 + \rho_4 g^7 - \frac{\varsigma}{\varsigma + 1} g_x^8. \end{cases} \quad (3.21)$$

La formulation variationnelle associée à (3.21) est donnée par :

$$B\left((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})\right) = L\left(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}\right), \quad (3.22)$$

où $B : \left[H_\star^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_\star^1(0, L)\right]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire définie par :

$$\begin{aligned} B\left((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})\right) &= \\ &\rho_1 \int_0^L \varphi \tilde{\varphi} dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L \psi \tilde{\psi} dx + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \gamma \int_0^L (\theta_x \tilde{\varphi} + \varphi_x \tilde{\theta}) dx \\ &+ \rho_3 \int_0^L \theta \tilde{\theta} dx + \frac{\kappa_1}{\tau + 1} \int_0^L \theta_x \tilde{\theta}_x dx + \gamma \int_0^L (\psi \tilde{\theta} - \theta \tilde{\psi}) dx \\ &+ \rho_4 \int_0^L \vartheta \tilde{\vartheta} dx + \frac{\kappa_2}{\varsigma + 1} \int_0^L \vartheta_x \tilde{\vartheta}_x dx + \delta \int_0^L (\vartheta_x \tilde{\psi} + \psi_x \tilde{\vartheta}) dx, \end{aligned}$$

et $L : \left[H_\star^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_\star^1(0, L) \right] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} L(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) &= \rho_1 \int_0^L (g^1 + g^2) \tilde{\varphi} dx + \rho_2 \int_0^L (g^3 + g^4) \tilde{\psi} dx - \gamma \int_0^L g^1 \tilde{\theta}_x dx \\ &\quad + \gamma \int_0^L g^3 \tilde{\theta} dx + \rho_3 \int_0^L g^5 \tilde{\theta} dx + \frac{\tau}{\tau + 1} \int_0^L g^6 \tilde{\theta}_x dx \\ &\quad - \delta \int_0^L g^3 \tilde{\vartheta}_x dx + \rho_4 \int_0^L g^7 \tilde{\vartheta} dx + \frac{\varsigma}{\varsigma + 1} \int_0^L g^8 \tilde{\vartheta}_x dx. \end{aligned}$$

On pose l'espace de Hilbert $\mathcal{W} = H_\star^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_\star^1(0, L)$ muni de la norme :

$$\begin{aligned} \left\| (\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \right\|_{\mathcal{W}}^2 &= \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi_x + \psi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 \\ &\quad + \|\theta\|_2^2 + \|\theta_x\|_2^2 + \|\vartheta\|_2^2 + \|\vartheta_x\|_2^2. \end{aligned}$$

Alors, pour certain $C_1 > 0$, on peut facilement montrer que

$$B\left((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})\right) \geq C_1 \left\| (\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \right\|_{\mathcal{W}}^2,$$

ceci implique que B est coercive. D'autre part, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit que

$$\left| B\left((\varphi, \psi, \theta, \vartheta), (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta})\right) \right| \leq C_2 \left\| (\varphi, \psi, \theta, \vartheta) \right\|_{\mathcal{W}} \left\| (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \right\|_{\mathcal{W}}, \quad C_2 > 0,$$

et

$$\left| L(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \right| \leq C_3 \left\| (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) \right\|_{\mathcal{W}}, \quad C_3 > 0.$$

Donc, B et L sont continues. Par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, le système (3.22) admet une solution unique

$$\varphi \in H_\star^1(0, L), \quad \psi \in H_0^1(0, L), \quad \theta \in H_0^1(0, L), \quad \vartheta \in H_\star^1(0, L).$$

En outre, si on prend $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) = (\tilde{\varphi}, 0, 0, 0)$ dans (3.22), on obtient pour tout $\tilde{\varphi} \in H_\star^1(0, L)$

$$\rho_1 \int_0^L \varphi \tilde{\varphi} dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \tilde{\varphi}_x dx + \gamma \int_0^L \theta_x \tilde{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L (g^1 + g^2) \tilde{\varphi} dx,$$

alors,

$$k \int_0^L \varphi_x \tilde{\varphi}_x dx = \int_0^L \left[\rho_1 (g^1 + g^2) - \rho_1 \varphi - \gamma \theta_x + k \psi_x \right] \tilde{\varphi} dx, \quad (3.23)$$

ceci implique que $\varphi \in H^2(0, L)$ et on a

$$-k\varphi_{xx} = \rho_1 (g^1 + g^2) - \rho_1\varphi - \gamma\theta_x + k\psi_x. \quad (3.24)$$

Par ailleurs, (3.23) est également vraie pour tout $\omega \in C^1([0, L])$ vérifiant $\omega(0) = \omega(L) = 0$. Intégrons par partie, tenons en compte (3.24) on trouve

$$k \left[\varphi_x(L)\omega(L) - \varphi_x(0)\omega(0) \right] = \int_0^L \left[k\varphi_{xx} + \rho_1 (g^1 + g^2) - \rho_1\varphi - \gamma\theta_x + k\psi_x \right] \omega dx = 0,$$

et puisque $\omega \in C^1([0, L])$ vérifie $\omega(0) = \omega(L) = 0$, donc

$$\varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0.$$

D'où,

$$\varphi \in H_*^2(0, L).$$

De même, si $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{\vartheta}) = (0, \tilde{\psi}, 0, 0)$, alors

$$\psi \in H^2(0, L).$$

D'autre part,

$$\Phi \in H_*^1(0, L), \quad \Psi \in H_0^1(0, L), \quad q \in H_*^1(0, L), \quad p \in H_0^1(0, L).$$

Par conséquent, l'existence d'une unique $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que (3.19) est satisfaite, est garantie par la théorie de la régularité des équations linéaires elliptique. Alors, l'opérateur \mathcal{A} est maximal. \square

Enfin par le Lemme 3.2.1 et le Lemme 3.2.2, on conclut que \mathcal{A} est un opérateur maximal-dissipatif. Ainsi, par le théorème de Lumer Phillips (voir [52, 77]), Il en découle le résultat d'existence et unicité suivant :

Théorème 3.2.1. *Soit $U_0 \in \mathcal{H}$. Alors, le problème (3.1)-(3.3) admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$. De plus, si $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors la solution U satisfait $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.*

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous montrons la stabilité exponentielle de l'énergie du système (3.1)-(3.3). A cet effet, nous commençons par introduire la fonctionnelle d'énergie $E(t)$ associée à (3.1)-(3.3) par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_3 \theta^2 + \frac{\tau}{\kappa_1} q^2 + \rho_4 \vartheta^2 + \frac{\varsigma}{\kappa_2} p^2 + b \psi_x^2 + k (\varphi_x + \psi)^2 \right] dx. \quad (3.25)$$

Le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.3.1. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, \vartheta, p)$ une solution du problème (3.1)-(3.3). Alors, le problème (3.1)-(3.3) est exponentiellement stable, c'est à dire qu'il existe deux constantes strictement positives η_1, η_2 tel que

$$E(t) \leq \eta_1 e^{-\eta_2 t}; \quad \forall t \geq 0. \quad (3.26)$$

Pour prouver le théorème 3.3.1, on a besoin d'énoncer et prouver quelques lemmes.

Lemme 3.3.1. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, \vartheta, p)$ une solution du problème (3.1)-(3.3), alors la fonctionnelle d'énergie définie par (3.25) vérifie :

$$E'(t) = -\frac{1}{\kappa_1} \int_0^L q^2 dx - \frac{1}{\kappa_2} \int_0^L p^2 dx \leq 0. \quad (3.27)$$

Démonstration. La multiplication de la première équation du système (3.1) par φ_t , la seconde par ψ_t , la troisième par θ , la quatrième par $\frac{1}{\kappa_1} q$, la cinquième par ϑ et la sixième par $\frac{1}{\kappa_2} p$, puis l'utilisation de l'intégration par partie sur $(0, L)$ ainsi que les conditions aux bords (3.3), nous donne (3.27). \square

Lemme 3.3.2. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, \vartheta, p)$ solution du système (3.1)-(3.3), alors la fonctionnelle

$$F_1(t) = \rho_1 \int_0^L \varphi_t \varphi dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx, \quad (3.28)$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} F_1'(t) \leq & -\frac{b}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^L \varphi_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ & + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\delta^2}{b} \int_0^L \vartheta^2 dx + C_1(\varepsilon) \int_0^L \theta^2 dx, \end{aligned} \quad (3.29)$$

où $C_1(\varepsilon) = \gamma^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{4\varepsilon_1} \right)$.

Démonstration. En dérivant la fonctionnelle $F_1(t)$, on obtient

$$F_1'(t) = \rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

En utilisant les deux premières équations du système (3.1), donc on a

$$\begin{aligned} F_1(t) = & \int_0^L \left[k(\varphi_x + \psi)_x - \gamma\theta_x \right] \varphi dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ & + \rho_2 \int_0^L \left[b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta - \delta\vartheta_x \right] \psi dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx, \end{aligned}$$

d'après la formule d'intégration par partie et les conditions aux limites (3.3), on trouve

$$\begin{aligned}
 F_1'(t) = & \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\
 & + \gamma \int_0^L \theta \psi dx + \delta \int_0^L \vartheta \psi_x dx + \gamma \int_0^L \theta \varphi_x dx,
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

en appliquant les inégalités de Young et Poincaré pour estimer les trois derniers termes de l'égalité précédente, donc pour tout $\varepsilon_1 > 0$, on obtient

$$\gamma \int_0^L \theta \psi dx \leq \frac{b}{4} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{b} \int_0^L \theta^2 dx, \tag{3.31}$$

$$\delta \int_0^L \vartheta \psi_x dx \leq \frac{b}{4} \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{\delta^2}{b} \int_0^L \vartheta^2 dx, \tag{3.32}$$

$$\gamma \int_0^L \theta \varphi_x dx \leq \varepsilon_1 \int_0^L \varphi_x^2 dx + \frac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} \int_0^L \theta^2 dx. \tag{3.33}$$

En remplaçant (3.31)-(3.33) dans (3.30), d'où le résultat désiré. \square

Lemme 3.3.3. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, \vartheta, p)$ solution du système (3.1)-(3.3), alors F_2 définie par :

$$F_2(t) = \rho_3 \tau \int_0^L \theta \int_0^x q(y, t) dy dx, \tag{3.34}$$

satisfait pour $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$, l'estimation :

$$F_2'(t) \leq -\frac{\kappa_1 \rho_3}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L \psi_t^2 dx + C_2(\varepsilon) \int_0^L q^2 dx, \tag{3.35}$$

où $C_2(\varepsilon) = \tau + \frac{\rho_3}{2\kappa_1} + \frac{\gamma^2 \tau^2}{4\varepsilon_2} + \frac{\gamma^2 \tau^2}{4\varepsilon_3}$.

Démonstration. En dérivant F_2 par rapport à t , en utilisant (3.1)₃, (3.1)₄, on obtient

$$\begin{aligned}
 F_2'(t) = & \rho_3 \tau \int_0^L \theta_t \int_0^x q(y, t) dy dx + \rho_3 \tau \int_0^L \theta \int_0^x q_t(y, t) dy dx, \\
 = & \tau \int_0^L \left[-q_x - \gamma(\varphi_x + \psi)_t \right] \int_0^x q(y, t) dy dx + \rho_3 \int_0^L \theta \int_0^x (q - \kappa_1 \theta_y) dy dx.
 \end{aligned}$$

D'après la formule d'intégration par parties et les conditions aux bords, nous utilisons $\int_0^L q(x, t) dx = 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
 F_2'(t) = & -\kappa_1 \rho_3 \int_0^L \theta^2 dx + \tau \int_0^L q^2 dx - \rho_3 \int_0^L \theta \int_0^x q(y, t) dy dx \\
 & + \gamma \tau \int_0^L q \varphi_t dx - \gamma \tau \int_0^L \psi_t \int_0^x q(y, t) dy dx.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Par conséquent, d'après les inégalités de Young et Cauchy-Schwarz, pour $\varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$, on a

$$\begin{aligned} -\rho_3 \int_0^L \theta \int_0^x q(y, t) dy dx &\leq \frac{\kappa_1 \rho_3}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\rho_3}{2\kappa_1} \int_0^L \left(\int_0^x q(y, t) dy \right)^2 dx \\ &\leq \frac{\kappa_1 \rho_3}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\rho_3}{2\kappa_1} \left(\int_0^L q(x, t) dx \right)^2 \\ &\leq \frac{\kappa_1 \rho_3}{2} \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\rho_3}{2\kappa_1} \int_0^L q^2 dx, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\gamma\tau \int_0^L q \varphi_t dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L \varphi_t^2 dx + \frac{\gamma^2 \tau^2}{4\varepsilon_2} \int_0^L q^2 dx, \quad (3.38)$$

$$-\gamma\tau \int_0^L \psi_t \int_0^x q(y, t) dy dx \leq \varepsilon_3 \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\gamma^2 \tau^2}{4\varepsilon_3} \int_0^L q^2 dx, \quad (3.39)$$

La substitution des inégalités ci-dessus dans (3.36) donne (3.35). \square

Lemme 3.3.4. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, \vartheta, p)$ une solution du système (3.1)-(3.3). Alors, la fonctionnelle

$$F_3(t) = -\rho_4 \varsigma \int_0^L p \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx, \quad (3.40)$$

satisfait pour tout $\varepsilon_3 > 0$, l'estimation :

$$F_3'(t) \leq -\frac{\kappa_2 \rho_4}{2} \int_0^L \vartheta^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L \psi_t^2 dx + C_3(\varepsilon) \int_0^L p^2 dx, \quad (3.41)$$

où $C_3(\varepsilon) = \varsigma + \frac{\rho_4}{2\kappa_2} + \frac{\delta^2 \varsigma^2}{4\varepsilon_3}$.

Démonstration. En Dérivant la fonction $F_3(t)$, en utilisant (3.1)₅, (3.1)₆, on a

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -\rho_4 \varsigma \int_0^L p_t \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx - \rho_4 \varsigma \int_0^L p \int_0^x \vartheta_t(y, t) dy dx \\ &= \rho_4 \int_0^L [p + \kappa_2 \vartheta_x] \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx + \varsigma \int_0^L p \int_0^x [p_y + \delta \psi_{yt}(y, t)] dy dx, \end{aligned}$$

nous intégrons par parties sur $(0, L)$, les conditions aux bords, on arrive à

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -\kappa_2 \rho_4 \int_0^L \vartheta^2 dx + \varsigma \int_0^L p^2 dx + \delta \varsigma \int_0^L \psi_t p dx \\ &\quad + \rho_4 \int_0^L p \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx, \end{aligned} \quad (3.42)$$

nous appliquons les inégalités de Young, Cauchy-Schwarz pour $\varepsilon_3 > 0$,

$$\delta \varsigma \int_0^L \psi_t p \, dx \leq \varepsilon_3 \int_0^L \psi_t^2 \, dx + \frac{\delta^2 \varsigma^2}{4\varepsilon_3} \int_0^L p^2 \, dx, \quad (3.43)$$

$$\rho_4 \int_0^L p \int_0^x \vartheta(y, t) \, dy \, dx \leq \frac{\kappa_2 \rho_4}{2} \int_0^L \vartheta^2 \, dx + \frac{\rho_4}{2\kappa_2} \int_0^L p^2 \, dx. \quad (3.44)$$

D'où, le résultat souhaité (3.41). \square

Lemme 3.3.5. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, \vartheta, p)$ une solution du problème (3.1)-(3.3). Alors, la fonction

$$F_4(t) = -\rho_1 \rho_3 \int_0^L \left(\int_0^x \varphi_t(y, t) \, dy \right) \theta \, dx, \quad (3.45)$$

satisfait pour $\varepsilon_4 > 0$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} F_4'(t) &\leq -\frac{\gamma \rho_1}{2} \int_0^L \varphi_t^2 \, dx + \varepsilon_4 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 \, dx + \gamma \rho_1 \int_0^L \psi_t^2 \, dx \\ &\quad + \frac{\rho_1}{\gamma} \int_0^L q^2 \, dx + C_4(\varepsilon) \int_0^L \theta^2 \, dx, \end{aligned} \quad (3.46)$$

où $C_4(\varepsilon) = \gamma \rho_3 + \frac{\rho_3^2 k^2}{4\varepsilon_4}$.

Démonstration. Par une dérivation directe, on utilise (3.1)₁ et (3.1)₃, on trouve

$$\begin{aligned} F_4'(t) &= -\rho_1 \rho_3 \int_0^L \left(\int_0^x \varphi_{tt}(y, t) \, dy \right) \theta \, dx - \rho_1 \rho_3 \int_0^L \left(\int_0^x \varphi_t(y, t) \, dy \right) \theta_t \, dx \\ &= \rho_3 \int_0^L \theta \int_0^x \left[-k(\varphi_y + \psi)_y + \gamma \theta_y \right] \, dy \, dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^L \left(\int_0^x \varphi_t(y, t) \, dy \right) \left[q_x + \gamma(\varphi_x + \psi)_t \right] \, dx, \end{aligned}$$

d'après les conditions aux bords, et la formule d'intégration par partie et $\int_0^L \varphi(x, t) \, dx = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} F_4'(t) &= -\gamma \rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 \, dx - \rho_1 \int_0^L q \varphi_t \, dx - \rho_3 k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \theta \, dx \\ &\quad + \gamma \rho_1 \int_0^L \psi_t \int_0^x \varphi_t(y, t) \, dy \, dx + \gamma \rho_3 \int_0^L \theta^2 \, dx. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ensuite, en appliquant les inégalités de Young et Cauchy-Schwarz pour $\varepsilon_4 > 0$, nous obtenons

$$-\rho_1 \int_0^L q \varphi_t \, dx \leq \frac{\gamma \rho_1}{4} \int_0^L \varphi_t^2 \, dx + \frac{\rho_1}{\gamma} \int_0^L q^2 \, dx, \quad (3.48)$$

$$-\rho_3 k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \theta dx \leq \varepsilon_4 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{\rho_3^2 k^2}{4\varepsilon_4} \int_0^L \theta^2 dx, \quad (3.49)$$

$$\gamma \rho_1 \int_0^L \psi_t \int_0^x \varphi_t(y, t) dy dx \leq \frac{\gamma \rho_1}{4} \int_0^L \varphi_t^2 dx + \gamma \rho_1 \int_0^L \psi_t^2 dx. \quad (3.50)$$

Par conséquent, la relation (3.46) est obtenue. \square

Lemme 3.3.6. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q, \vartheta, p)$ solution du système (3.1)-(3.3). Alors, la fonctionnelle

$$F_5(t) = \rho_2 \rho_4 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^x \vartheta(y, t) dy \right) dx, \quad (3.51)$$

satisfait, pour $\varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned} F_5'(t) \leq & -\frac{\delta \rho_2}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^L \psi_x^2 dx \\ & + \varepsilon_5 \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\rho_2}{2\delta} \int_0^L p^2 dx + C_5(\varepsilon) \int_0^L \vartheta^2 dx, \end{aligned} \quad (3.52)$$

où $C_5(\varepsilon) = \frac{\rho_4^2}{4\varepsilon_4} (b^2 + k^2) + \frac{\rho_4^2 \gamma^2}{4\varepsilon_5} + \delta \rho_4$.

Démonstration. La dérivation de (3.51) entraîne

$$F_5'(t) = \rho_2 \rho_4 \int_0^L \psi_{tt} \left(\int_0^x \vartheta(y, t) dy \right) dx + \rho_2 \rho_4 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^x \vartheta_t(y, t) dy \right) dx,$$

d'après (3.1)₂ et (3.1)₅, nous avons

$$\begin{aligned} F_5'(t) = & \rho_4 \int_0^L \left[b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta - \delta\vartheta_x \right] \left(\int_0^x \vartheta(y, t) dy \right) dx \\ & + \rho_2 \int_0^L \psi_t \int_0^x \left[-p_y - \delta\psi_{yt} \right] dy dx, \end{aligned}$$

intégrons par partie sur $(0, L)$ et utilisons $\int_0^L \vartheta(x, t) dx = 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned} F_5'(t) = & -\delta \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \psi_t p dx + \delta \rho_4 \int_0^L \vartheta^2 dx - b \rho_4 \int_0^L \psi_x \vartheta dx \\ & - k \rho_4 \int_0^L (\varphi_x + \psi) \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx + \gamma \rho_4 \int_0^L \theta \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx, \end{aligned} \quad (3.53)$$

nous appliquons les inégalités de Young et Cauchy-Schwarz pour $\varepsilon_4, \varepsilon_5 > 0$,

$$-\rho_2 \int_0^L \psi_t p dx \leq \frac{\delta \rho_2}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{\rho_2}{2\delta} \int_0^L p^2 dx, \quad (3.54)$$

$$-b\rho_4 \int_0^L \psi_x \vartheta dx \leq \varepsilon_4 \int_0^L \psi_x^2 dx + \frac{b^2 \rho_4^2}{4\varepsilon_4} \int_0^L \vartheta^2 dx, \quad (3.55)$$

$$-k\rho_4 \int_0^L (\varphi_x + \psi) \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx \leq \varepsilon_4 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + \frac{k^2 \rho_4^2}{4\varepsilon_4} \int_0^L \vartheta^2 dx, \quad (3.56)$$

$$\gamma\rho_4 \int_0^L \theta \int_0^x \vartheta(y, t) dy dx \leq \varepsilon_5 \int_0^L \theta^2 dx + \frac{\gamma^2 \rho_4^2}{4\varepsilon_5} \int_0^L \vartheta^2 dx. \quad (3.57)$$

Par conséquent, nous obtenons (3.52). \square

Maintenant, on introduit notre fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} et on prouve qu'elle est équivalente à la fonctionnelle d'énergie E .

Lemme 3.3.7. *Pour N assez grand, la fonctionnelle*

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + F_1(t) + N_1 F_2(t) + N_2 F_3(t) + N_3 F_4(t) + N_4 F_5(t), \quad (3.58)$$

où N, N_1, N_2, N_3 et N_4 sont des constantes strictement positives à déterminer attentivement, satisfait

$$\omega_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \omega_2 E(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.59)$$

pour deux réels positifs ω_1 et ω_2 .

Démonstration. Soit $L(t) = F_1(t) + N_1 F_2(t) + N_2 F_3(t) + N_3 F_4(t) + N_4 F_5(t)$, on a

$$\begin{aligned} |L(t)| &\leq \rho_1 \int_0^L |\varphi_t \varphi| dx + \rho_2 \int_0^L |\psi_t \psi| dx + \rho_3 \tau N_1 \int_0^L \left| \theta \int_0^x q(y, t) dy \right| dx \\ &\quad + \rho_4 \varsigma N_2 \int_0^L \left| p \int_0^x \vartheta(y, t) dy \right| dx + \rho_1 \rho_3 N_3 \int_0^L \left| \left(\int_0^x \varphi_t(y, t) dy \right) \theta \right| dx \\ &\quad + \rho_2 \rho_4 N_4 \int_0^L \left| \psi_t \left(\int_0^x \vartheta(y, t) dy \right) \right| dx. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy-Schwarz et (3.25), on arrive à

$$|L(t)| \leq \tilde{c}_1 \int_0^L [\varphi_t^2 + \psi_t^2 + \theta^2 + q^2 + \vartheta^2 + p^2 + \psi_x^2 + (\varphi_x + \psi)^2] dx \leq \tilde{c}_1 E(t).$$

C'est à dire,

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \tilde{c}_1 E(t).$$

Par conséquent,

$$(N - \tilde{c}_1)E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + \tilde{c}_1)E(t).$$

En choisissant N assez grand, on trouve (3.59). \square

Preuve du théorème 3.3.1.

D'abord, nous observons que

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \int_0^L \varphi_x^2 dx &= \varepsilon_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi - \psi)^2 dx \leq 2\varepsilon_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2\varepsilon_1 \int_0^L \psi^2 dx \\ &\leq 2\varepsilon_1 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx + 2\varepsilon_1 \int_0^L \psi_x^2 dx. \end{aligned}$$

Ensuite, en tenant compte (3.27), (3.29), (3.35), (3.41), (3.46), (3.52), et en fixant

$$\varepsilon_2 = \frac{\gamma\rho_1 N_3}{4N_1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\delta\rho_2 N_4}{4(N_1 + N_2)}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\kappa_1\rho_3 N_1}{4N_4},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -\left(\frac{\gamma\rho_1}{4}N_3 - \rho_1\right) \int_0^L \varphi_t^2 dx - \left(\frac{\delta\rho_2}{4}N_4 - \gamma\rho_1 N_3 - \rho_2\right) \int_0^L \psi_t^2 dx \\ &\quad - \left(\frac{b}{2} - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_4 N_4\right) \int_0^L \psi_x^2 dx - \left[k - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_4(N_3 + N_4)\right] \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx \\ &\quad - \left[\frac{\rho_4\kappa_2}{2}N_2 - C_5(\varepsilon)N_4 - \frac{\delta^2}{b}\right] \int_0^L \vartheta^2 dx - \left[\frac{\rho_3\kappa_1}{4}N_1 - C_4(\varepsilon)N_3 - C_1(\varepsilon)\right] \int_0^L \theta^2 dx \\ &\quad - \left[\frac{N}{\kappa_1} - C_2(\varepsilon)N_1 - \frac{\rho_1}{\gamma}N_3\right] \int_0^L q^2 dx - \left[\frac{N}{\kappa_2} - C_3(\varepsilon)N_2 - \frac{\rho_2}{2\delta}N_4\right] \int_0^L p^2 dx. \end{aligned}$$

A cette étape, nous devons choisir nos coefficients d'une manière appropriée. Tout d'abord, on choisit ε_1 assez petit tel que

$$\lambda_1 = \frac{b}{2} - 2\varepsilon_1 > 0, \quad \text{et} \quad \lambda_2 = k - 2\varepsilon_1 > 0,$$

et on prend

$$\varepsilon_4 < \min\left(\frac{\lambda_1}{N_4}; \frac{\lambda_2}{N_3 + N_4}\right),$$

ce qui donne

$$\lambda_3 = \lambda_1 - \varepsilon_4 N_4 > 0, \quad \text{et} \quad \lambda_4 = \lambda_2 - \varepsilon_4(N_3 + N_4) > 0.$$

Ensuite, on choisit N_3 assez grand tel que

$$\lambda_5 = \frac{\gamma\rho_1}{4}N_3 - \rho_1 > 0.$$

Puis, on prend N_4 assez grand pour que

$$\lambda_6 = \frac{\delta\rho_2}{4}N_4 - \gamma\rho_1 N_3 - \rho_2 > 0.$$

En plus, nous choisissons N_1 assez grand pour que

$$\lambda_7 = \frac{\rho_3 \kappa_1}{4} N_1 - C_4(\varepsilon) N_3 - C_1(\varepsilon) > 0,$$

puis, on choisit N_2 assez grand tel que

$$\lambda_8 = \frac{\rho_4 \kappa_2}{2} N_2 - C_5(\varepsilon) N_4 - \frac{\delta^2}{b} > 0.$$

Finalement, on choisit N assez grand pour que

$$\begin{aligned} \lambda_9 &= \frac{N}{\kappa_1} - C_2(\varepsilon) N_1 - \frac{\rho_1}{\gamma} N_3 > 0, \\ \lambda_{10} &= \frac{N}{\kappa_2} - C_3(\varepsilon) N_2 - \frac{\rho_2}{2\delta} N_4 > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on arrive à

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -\lambda_3 \int_0^L \psi_x^2 dx - \lambda_4 \int_0^L (\varphi_x + \psi)^2 dx - \lambda_5 \int_0^L \varphi_t^2 dx - \lambda_6 \int_0^L \psi_t^2 dx \\ &\quad - \lambda_7 \int_0^L \theta^2 dx - \lambda_8 \int_0^L \vartheta^2 dx - \lambda_9 \int_0^L q^2 dx - \lambda_{10} \int_0^L p^2 dx, \\ &\leq -\tilde{\eta} E(t), \quad \forall t > 0, \end{aligned} \tag{3.60}$$

pour un certain $\tilde{\eta} > 0$. La combinaison de (3.59) avec (3.60) nous donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\tilde{\eta}_1 \mathcal{L}(t), \quad \forall t > 0, \tag{3.61}$$

où $\tilde{\eta}_1 = \frac{\tilde{\eta}}{\omega_2}$. Ensuite, par une simple intégration de (3.61) mène à

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) e^{-\tilde{\eta}_1 t}, \quad \forall t > 0. \tag{3.62}$$

Enfin, Une utilisation de l'autre côté de (3.59) garantit (5.7).

Décroissance générale d'un système de Timoshenko avec thermoélasticité de type III

4.1 Introduction

Au cours des dernières années, la stabilité des systèmes de Timoshenko sous l'effet thermique a été excessivement étudiée par les auteurs. Les résultats les plus intéressants dans cette direction ont été obtenus dans [3, 28, 29, 37, 46, 69].

Beaucoup d'articles ont été publiés pour les systèmes de Timoshenko où la conduction de la chaleur est régie par la loi de Fourier. La première contribution dans cette direction a été obtenu en 2002 par Rivera et Racke [69], où ils ont étudié le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - \delta (\varphi_x, \psi)_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k (\varphi_x + \psi) + \gamma \theta_x = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t - \kappa \theta_{xx} + \gamma \psi_{tx} = 0, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4.1)$$

où θ est la différence de température, les coefficients $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, \gamma, \kappa$ sont des constantes positives, et δ doit satisfaire des hypothèses appropriées. Les auteurs ont prouvé un résultat de décroissance exponentielle pour le système de Timoshenko linéarisé sous la condition "vitesses d'onde égales" $\left(\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}\right)$. Dans le cas contraire, ils ont montré l'absence de stabilité exponentielle du système.

Récemment, Almeida et al. [3] ont considéré le nouveau couplage thermoélastique-Timoshenko sur la force de cisaillement, plus précisément, le système considéré est donné par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k (\varphi_x + \psi)_x - \delta \theta_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} = b \psi_{xx} - k (\varphi_x + \psi) + \delta \theta, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t = \gamma \theta_{xx} - \delta (\varphi_x + \psi)_t, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4.2)$$

et ils ont prouvé que le système (4.2) est exponentiellement stable si et seulement si "les vitesses de propagation d'onde sont égales", également un résultat de décroissance polynomiale a été établi pour le cas de "vitesses de propagation d'onde différentes". En effet, Apalara [11] a étudié le système (4.2) et a ajouté un amortissement viscoélastique de la forme $\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(\cdot, s) ds$ dans la deuxième équation. Dans lequel, il a prouvé un résultat de stabilité générale indépendamment des vitesses de propagation d'onde.

Des résultats de stabilité pour le système de Timoshenko où la conduction de la chaleur est modélisée par la théorie de thermoélasticité de type III, ont été traités dans [28, 29, 37, 46]. Dans [28, 29], Djebabla et Tatar ont analysé le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \gamma\theta_x, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_{tt} = l\theta_{xx} + \beta \int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(\cdot, s) ds + \gamma\psi_{ttx}, & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (4.3)$$

et ont montré que le système (4.3) est exponentiellement stable si et seulement si

$$\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 = l - \frac{k\rho_3}{\rho_1} = \gamma.$$

Notons que dans (4.3) la conduction thermique agit sur le moment de flexion. D'autres résultats similaires ont été établis par Messaoudi et ses co-auteurs [46, 56, 58, 64].

Ghennam et Djebabla [37] ont examiné un système de Timoshenko avec thermoélasticité de type III agissant sur la force de cisaillement, en présence d'un amortissement viscoélastique dans la deuxième équation, plus précisément, le système considéré est de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x - \gamma\theta_x, \\ \rho_2 \psi_{tt} = b_1\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) + \gamma\theta - \int_0^t g_1(t-s)\psi_{xx}(\cdot, s) ds, \\ \rho_3 \theta_{tt} = b_2\theta_{xx} - \gamma\varphi_{ttx} - \gamma\psi_{tt} - \int_0^t g_2(t-s)\theta_{xx}(\cdot, s) ds, \end{cases} \quad (4.4)$$

avec $(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$, où g_1 et g_2 sont des fonctions positives décroissantes, les auteurs ont montré un résultat de décroissance générale (les taux de décroissance exponentielle et polynomiale habituels sont des cas particuliers) de (4.4) à condition que

$$k_1 = \gamma + \frac{b_1\rho_1}{k} - \rho_2 = 0, \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\rho_3 b_1}{\rho_2} + \frac{b_1\gamma}{k} - b_2 = 0.$$

Dans ce travail, nous nous intéressons au système (4.4) mais sans aucun amortis-

sement dans les deux premières équations. Donc, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k (\varphi_x + \psi)_x + m \theta_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k (\varphi_x + \psi) - m \theta = 0, \\ \rho_3 \theta_{tt} - l \theta_{xx} + \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(\cdot, s) ds + m \varphi_{tx} + m \psi_{tx} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour obtenir la nature dissipative du système (4.5), on introduit les nouvelles variables $\chi = \varphi_t$ and $\xi = \psi_t$. Alors, le système (4.5) est équivalent à

$$\begin{cases} \rho_1 \chi_{tt} - k (\chi_x + \xi)_x + m \theta_{tx} = 0, \\ \rho_2 \xi_{tt} - b \xi_{xx} + k (\chi_x + \xi) - m \theta_t = 0, \\ \rho_3 \theta_{tt} - l \theta_{xx} + \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(\cdot, s) ds + m \chi_{tx} + m \xi_t = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

$(x, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$. Ainsi, nous complétons le système (4.6) avec des conditions aux limites et initiales

$$\begin{aligned} \chi_x(0, t) = \chi_x(L, t) = \xi(0, t) = \xi(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) &= 0, & t > 0, \\ \chi(x, 0) = \chi_0(x), \quad \xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), & x \in (0, L), & (4.7) \\ \chi_t(x, 0) = \chi_1(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi_1(x), \quad \theta_t(x, 0) = \theta_1(x), & x \in (0, L). \end{aligned}$$

Notre objectif dans ce chapitre est de compléter le travail effectué dans [37], en montrant que l'amortissement unique donné par le terme de mémoire est suffisamment fort pour stabiliser le système (4.6)-(4.7) exponentiellement si et seulement si les coefficients du système satisfont

$$\zeta_0 = \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \left(\frac{\rho_3 b}{\rho_2} - l \right) - \frac{m^2}{k} = 0. \quad (4.8)$$

D'abord nous devons justifier l'application de l'inégalité de Poincaré pour χ , à partir de (4.6)₁ et les conditions aux bords, on a

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^L \chi(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.9)$$

utilisons les conditions initiales de χ et résolvons (4.9), on obtient

$$\int_0^L \chi(x, t) dx = t \int_0^L \chi_1(x) dx + \int_0^L \chi_0(x) dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, si nous définissons

$$\bar{\chi}(x, t) = \chi(x, t) - \frac{t}{L} \int_0^L \chi_1(x) dx - \frac{1}{L} \int_0^L \chi_0(x) dx,$$

nous trouvons

$$\int_0^L \bar{\chi}(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Clairement, l'inégalité de Poincaré peut être appliquée pour $\bar{\chi}$. De plus, $(\bar{\chi}, \xi, \theta)$ satisfait (4.6)-(4.7). Dans la suite, nous allons travailler avec $\bar{\chi}$, mais pour plus de simplicité, on écrit χ au lieu de $\bar{\chi}$.

Le reste de notre chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions du système (4.6)-(4.7) en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Dans la section 4.3, nous utilisons la méthode de l'énergie pour établir un résultat de décroissance générale pour (4.6)-(4.7). Dans ce qui suit, \tilde{C} est utilisé pour désigner une constante positive générique.

4.2 Existence et unicité

Dans cette section, nous prouvons un résultat d'existence globale en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin (voir [51]). Mais d'abord, Nous considérons les conditions suivantes sur la fonction de relaxation g

(A1) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction dérivable qui vérifie la condition suivante :

$$g(0) > 0, \quad \lambda = l - \int_0^\infty g(s) ds > 0.$$

(A2) Il existe une fonction différentiable et décroissante $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

$$g'(t) \leq -\eta(t) g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

On introduit les espaces suivants :

$$\begin{aligned} L_\star^2(0, L) &= \left\{ \varphi \in L^2(0, L) : \int_0^L \varphi(x) dx = 0 \right\}, \\ H_\star^1(0, L) &= H^1(0, L) \cap L_\star^2(0, L), \\ H_\star^2(0, L) &= \left\{ \varphi \in H^2(0, L) : \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Définition 4.2.1. On dit que (χ, ξ, θ) est une solution faible du système (4.6)-(4.7)

si

$$\begin{aligned} \chi &\in C\left([0, T]; H_{\star}^1(0, L)\right) \cap C^1\left([0, T]; L_{\star}^2(0, L)\right), \\ \xi, \theta &\in C\left([0, T]; H_0^1(0, L)\right) \cap C^1\left([0, T]; L^2(0, L)\right), \\ (\chi(\cdot, 0), \xi(\cdot, 0), \theta(\cdot, 0)) &= (\chi_0, \xi_0, \theta_0) \in H_{\star}^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L), \\ (\chi_t(\cdot, 0), \xi_t(\cdot, 0), \theta_t(\cdot, 0)) &= (\chi_1, \xi_1, \theta_1) \in L_{\star}^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L), \end{aligned}$$

et satisfait

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \chi_t u \, dx - \rho_1 \int_0^L \chi_1 u \, dx + k \int_0^t \int_0^L (\chi_x + \xi) u' \, dx d\tau \\ - m \int_0^L \theta u' \, dx + m \int_0^L \theta_0 u' \, dx = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L \xi_t v \, dx - \rho_2 \int_0^L \xi_1 v \, dx + b \int_0^t \int_0^L \xi_x v' \, dx d\tau + k \int_0^t \int_0^L (\chi_x + \xi) v \, dx d\tau \\ - m \int_0^L \theta v \, dx + m \int_0^L \theta_0 v \, dx = 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \rho_3 \int_0^L \theta_t w \, dx - \rho_3 \int_0^L \theta_1 w \, dx + l \int_0^t \int_0^L \theta_x w' \, dx d\tau \\ - \int_0^t \int_0^L \int_0^{\tau} g(t-s) \theta_x(\cdot, s) w' \, ds \, dx \, d\tau - m \int_0^L \chi w' \, dx \\ + m \int_0^L \chi_0 w' \, dx + m \int_0^L \xi w \, dx - m \int_0^L \xi_0 w \, dx = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $(u, v, w) \in H_{\star}^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. Ici, la prime désigne la dérivée par rapport à x .

De plus, si (χ, ξ, θ) satisfait

$$\begin{aligned} \chi &\in C\left([0, T]; H_{\star}^2(0, L) \cap H_{\star}^1(0, L)\right) \cap C^1\left([0, T]; H_{\star}^1(0, L)\right) \cap C^2\left([0, T]; L_{\star}^2(0, L)\right), \\ \xi, \theta &\in C\left([0, T]; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)\right) \cap C^1\left([0, T]; H_0^1(0, L)\right) \cap C^2\left([0, T]; L^2(0, L)\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (\chi_0, \chi_1) &\in \left(H_{\star}^2(0, L) \cap H_{\star}^1(0, L) \times H_{\star}^1(0, L)\right), \\ ((\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) &\in \left(H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)\right)^2, \end{aligned}$$

alors, (χ, ξ, θ) est une solution forte de [\(4.6\)](#)-[\(4.7\)](#).

Théorème 4.2.1. *Supposons que g vérifie les hypothèses (A1)-(A2), et soit $(\chi_0, \chi_1) \in \left(H_\star^1(0, L) \times L_\star^2(0, L)\right)$ et $((\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) \in \left(H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)\right)^2$. Alors, le problème (4.6)-(4.7) admet une unique solution*

$$\begin{aligned} \chi &\in C\left(\mathbb{R}_+; H_\star^1(0, L)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+; L_\star^2(0, L)\right), \\ (\xi, \theta) &\in \left(C\left(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, L)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+; L^2(0, L)\right)\right)^2. \end{aligned}$$

De plus, si

$$\begin{aligned} (\chi_0, \chi_1) &\in \left(H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L) \times H_\star^1(0, L)\right), \\ ((\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) &\in \left(H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)\right)^2. \end{aligned}$$

Donc, la solution du problème (4.6)-(4.7) satisfait

$$\begin{aligned} \chi &\in C\left(\mathbb{R}_+; H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+; H_\star^1(0, L)\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}_+; L_\star^2(0, L)\right), \\ (\xi, \theta) &\in \left(C\left(\mathbb{R}_+; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+; H_0^1(0, L)\right) \cap C^2\left(\mathbb{R}_+; L^2(0, L)\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $(\chi_0, \chi_1) \in \left(H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L)\right) \times H_\star^1(0, L)$ et $(\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1) \in \left(H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)\right) \times H_0^1(0, L)$. On note par $\{y_j, j \in \mathbb{N}\}$ une base de $H_\star^1(0, L)$ et $H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L)$, $\{z_j, j \in \mathbb{N}\}$ est une base de $H_0^1(0, L)$ et $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$. On prend $\chi^m(x, t) \in Y_m$ et $\xi^m(x, t), \theta^m(x, t) \in Z_m$, où Y_m et Z_m sont engendrés par y_1, y_2, \dots, y_m et z_1, z_2, \dots, z_m respectivement.

On cherche alors

$$\chi^m(x, t) = \sum_{j=1}^m a_{j,m}(t)y_j(x), \quad \xi^m(x, t) = \sum_{j=1}^m b_{j,m}(t)z_j(x), \quad \theta^m(x, t) = \sum_{j=1}^m c_{j,m}(t)z_j(x),$$

tel que, pour tout $u \in Y_m$ et $v, w \in Z_m$, $(\chi^m, \xi^m, \theta^m)$ satisfait le système approché

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \int_0^L \chi_{tt}^m u \, dx + k \int_0^L (\chi_x^m + \xi^m) u' \, dx - m \int_0^L \theta_t^m u' \, dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^L \xi_{tt}^m v \, dx + b \int_0^L \xi_x^m v' \, dx + k \int_0^L (\chi_x^m + \xi^m) v \, dx \\ \quad - m \int_0^L \theta_t^m v \, dx = 0, \\ \rho_3 \int_0^L \theta_{tt}^m w \, dx + l \int_0^L \theta_x^m w' \, dx - \int_0^L \int_0^t g(t-s) \theta_x^m(\cdot, s) w' \, ds \, dx \\ \quad - m \int_0^L \chi_t^m w' \, dx + m \int_0^L \xi_t^m w \, dx = 0, \\ \chi^m(\cdot, 0) = \chi_0^m, \quad \xi^m(\cdot, 0) = \xi_0^m, \quad \theta^m(\cdot, 0) = \theta_0^m, \\ \chi_t^m(\cdot, 0) = \chi_1^m, \quad \xi_t^m(\cdot, 0) = \xi_1^m, \quad \theta_t^m(\cdot, 0) = \theta_1^m, \end{array} \right. \quad (4.13)$$

pour $j = 1, \dots, m$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_0^m = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^L \chi_0 y_j \, dx \right\} y_j \longrightarrow \chi_0 \text{ dans } H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L), \\ \chi_1^m = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^L \chi_1 y_j \, dx \right\} y_j \longrightarrow \chi_1 \text{ dans } H_\star^1(0, L), \\ \xi_0^m = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^L \xi_0 z_j \, dx \right\} z_j \longrightarrow \xi_0 \text{ dans } H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ \xi_1^m = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^L \xi_1 z_j \, dx \right\} z_j \longrightarrow \xi_1 \text{ dans } H_0^1(0, L), \\ \theta_0^m = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^L \theta_0 z_j \, dx \right\} z_j \longrightarrow \theta_0 \text{ dans } H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ \theta_1^m = \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^L \theta_1 z_j \, dx \right\} z_j \longrightarrow \theta_1 \text{ dans } H_0^1(0, L). \end{array} \right. \quad (4.14)$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution $(\chi^m, \xi^m, \theta^m)$ dans un intervalle $[0, t_m)$, avec $t_m < T$. Les estimations a priori qui suivent montreront que $t_m = T$.

Estimation a priori I. En prenant $u = \chi_t^m$ dans $(4.13)_1$, $v = \xi_t^m$ dans $(4.13)_2$

et $w = \theta_t^m$ dans (4.13)₃, utilisant le Lemme 1.5.2 et en faisant la somme, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \left\| \chi_t^m(t) \right\|_2^2 + k \left\| \chi_x^m(t) + \xi^m(t) \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| \xi_t^m(t) \right\|_2^2 + b \left\| \xi_x^m(t) \right\|_2^2 \right. \\ & \quad \left. + \rho_3 \left\| \theta_t^m(t) \right\|_2^2 + \left(l - \int_0^t g(s) ds \right) \left\| \theta_x^m(t) \right\|_2^2 + \int_0^L (g \circ \theta_x^m)(t) dx \right] \\ & = \frac{1}{2} \int_0^L (g' \circ \theta_x^m)(t) dx - \frac{1}{2} g(t) \left\| \theta_x^m(t) \right\|_2^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

En intégrant sur $[0, t]$, $t < t_m$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\rho_1 \left\| \chi_t^m(t) \right\|_2^2 + k \left\| \chi_x^m(t) + \xi^m(t) \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| \xi_t^m(t) \right\|_2^2 + b \left\| \xi_x^m(t) \right\|_2^2 \right. \\ & \quad \left. + \rho_3 \left\| \theta_t^m(t) \right\|_2^2 + \left(l - \int_0^t g(s) ds \right) \left\| \theta_x^m(t) \right\|_2^2 + \int_0^L (g \circ \theta_x^m)(t) dx \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\rho_1 \left\| \chi_1^m \right\|_2^2 + k \left\| (\chi_0^m)' + \xi_0^m \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| \xi_1^m \right\|_2^2 + b \left\| (\xi_0^m)' \right\|_2^2 + \rho_3 \left\| \theta_1^m \right\|_2^2 + l \left\| (\theta_0^m)' \right\|_2^2 \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\rho_1 \left\| \chi_1 \right\|_2^2 + k \left\| \chi_0' + \xi_0 \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| \xi_1 \right\|_2^2 + b \left\| \xi_0' \right\|_2^2 + \rho_3 \left\| \theta_1 \right\|_2^2 + l \left\| \theta_0' \right\|_2^2 \right] \\ & \leq L_1, \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $L_1 > 0$ est une constante indépendante de m et t .

Estimation a priori II. En remplaçant u par χ_{xxt}^m dans (4.13)₁, v par ξ_{xxt}^m dans (4.13)₂ et w par θ_{xxt}^m dans (4.13)₃, en utilisant le Lemme 1.5.2 et en faisant la somme, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \left\| \chi_{tx}^m(t) \right\|_2^2 + k \left\| (\chi_x^m + \xi^m)_x(t) \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| \xi_{tx}^m(t) \right\|_2^2 + b \left\| \xi_{xx}^m(t) \right\|_2^2 \right. \\ & \quad \left. + \rho_3 \left\| \theta_{tx}^m(t) \right\|_2^2 + \left(l - \int_0^t g(s) ds \right) \left\| \theta_{xx}^m(t) \right\|_2^2 + \int_0^L (g \circ \theta_{xx}^m)(t) dx \right] \\ & = \frac{1}{2} \int_0^L (g' \circ \theta_{xx}^m)(t) dx - \frac{1}{2} g(t) \left\| \theta_{xx}^m(t) \right\|_2^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

On intègre sur $[0, t]$, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left[\rho_1 \left\| \chi_{tx}^m(t) \right\|_2^2 + k \left\| (\chi_x^m + \xi^m)_x(t) \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| \xi_{tx}^m(t) \right\|_2^2 + b \left\| \xi_{xx}^m(t) \right\|_2^2 \right. \\
 & \quad \left. + \rho_3 \left\| \theta_{tx}^m(t) \right\|_2^2 + \left(l - \int_0^t g(s) ds \right) \left\| \theta_{xx}^m(t) \right\|_2^2 + \int_0^L (g \circ \theta_{xx}^m)(t) dx \right] \\
 & \leq \frac{1}{2} \left[\rho_1 \left\| (\chi_1^m)' \right\|_2^2 + k \left\| (\chi_0^m)'' + (\xi_0^m)' \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| (\xi_1^m)' \right\|_2^2 + b \left\| (\xi_0^m)'' \right\|_2^2 \right. \\
 & \quad \left. + \rho_3 \left\| (\theta_1^m)' \right\|_2^2 + l \left\| (\theta_0^m)'' \right\|_2^2 \right] \\
 & \leq \frac{1}{2} \left[\rho_1 \left\| \chi_1' \right\|_2^2 + k \left\| \chi_0'' + \xi_0' \right\|_2^2 + \rho_2 \left\| \xi_1' \right\|_2^2 + b \left\| \xi_0'' \right\|_2^2 + \rho_3 \left\| \theta_1' \right\|_2^2 + l \left\| \theta_0'' \right\|_2^2 \right] \\
 & \leq L_2, \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

où $L_2 > 0$ est une constante indépendante de m et t .

Estimation a priori III. En considérant $u = \chi_{tt}^m$ dans (4.13)₁, $v = \xi_{tt}^m$ dans (4.13)₂ et $w = \theta_{tt}^m$ dans (4.13)₃, en appliquant l'inégalité de Young, à l'aide de (4.15) et (4.16), pour tout $t \geq 0$ et $L_3 > 0$ une constante positive indépendante de m et de t , on trouve

$$\left\| \chi_{tt}^m(t) \right\|_2^2 + \left\| \xi_{tt}^m(t) \right\|_2^2 + \left\| \theta_{tt}^m(t) \right\|_2^2 \leq L_3, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.17}$$

On déduit que $t_m = T$ et (4.15)-(4.17) s'expriment alors :

$$\begin{array}{ll}
 (\chi^m) & \text{demeure dans un ens. borné de } L^\infty \left((0, \infty); H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L) \right), \\
 (\xi^m) \text{ and } (\theta^m) & \text{dans un borné de } L^\infty \left((0, \infty); H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \right), \\
 (\chi_t^m) & \text{dans un borné de } L^\infty \left((0, \infty); H_\star^1(0, L) \right), \\
 (\xi_t^m) \text{ and } (\theta_t^m) & \text{dans un borné de } L^\infty \left((0, \infty); H_0^1(0, L) \right), \\
 (\chi_{tt}^m) & \text{dans un borné de } L^\infty \left((0, \infty); L_\star^2(0, L) \right), \\
 (\xi_{tt}^m) \text{ and } (\theta_{tt}^m) & \text{dans un borné de } L^\infty \left((0, \infty); L^2(0, L) \right).
 \end{array} \tag{4.18}$$

Par conséquent, on peut extraire une suite $(\chi^\mu, \xi^\mu, \theta^\mu)$ de $(\chi^m, \xi^m, \theta^m)$, telle que

$$\begin{aligned}
 \chi^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \chi && \text{dans } L^\infty\left((0, \infty); H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L)\right) \text{ faible étoile,} \\
 \xi^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \xi, \theta^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \theta && \text{dans } L^\infty\left((0, \infty); H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)\right) \text{ faible étoile,} \\
 \chi_t^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \chi_t && \text{dans } L^\infty\left((0, \infty); H_\star^1(0, L)\right) \text{ faible étoile,} \\
 \xi_t^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \xi_t, \theta_t^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \theta_t && \text{dans } L^\infty\left((0, \infty); H_0^1(0, L)\right) \text{ faible étoile,} \\
 \chi_{tt}^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \chi_{tt} && \text{dans } L^\infty\left((0, \infty); L_\star^2(0, L)\right) \text{ faible étoile,} \\
 \xi_{tt}^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \xi_{tt}, \theta_{tt}^\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} \theta_{tt} && \text{dans } L^\infty\left((0, \infty); L^2(0, L)\right) \text{ faible étoile.}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Par ailleurs, il résulte en particulier pour tout fixé T que

$$\begin{aligned}
 \chi^\mu &\rightharpoonup \chi && \text{dans } L^2\left((0, T); H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L)\right) \text{ faible,} \\
 \xi^\mu &\rightharpoonup \xi, \theta^\mu &\rightharpoonup \theta && \text{dans } L^2\left((0, T); H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)\right) \text{ faible,} \\
 \chi_t^\mu &\rightharpoonup \chi_t && \text{dans } L^2\left((0, T); H_\star^1(0, L)\right) \text{ faible,} \\
 \xi_t^\mu &\rightharpoonup \xi_t, \theta_t^\mu &\rightharpoonup \theta_t && \text{dans } L^2\left((0, T); H_0^1(0, L)\right) \text{ faible,} \\
 \chi_{tt}^\mu &\rightharpoonup \chi_{tt} && \text{dans } L^2\left((0, T); L_\star^2(0, L)\right) \text{ faible,} \\
 \xi_{tt}^\mu &\rightharpoonup \xi_{tt}, \theta_{tt}^\mu &\rightharpoonup \theta_{tt} && \text{dans } L^2\left((0, T); L^2(0, L)\right) \text{ faible.}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

En remplaçant m par μ dans [\(4.13\)](#)₁, [\(4.13\)](#)₂ et [\(4.13\)](#)₃, intégrant sur $[0, t]$ avec $t < T$, pour tout $1 \leq j \leq \mu$ on a

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \int_0^L \chi_t^\mu y_j dx - \rho_1 \int_0^L \chi_1^\mu y_j dx + k \int_0^t \int_0^L (\chi_x^\mu + \xi^\mu) y_j' dx d\tau \\
 - m \int_0^L \theta^\mu y_j' dx + m \int_0^L \theta_0^\mu y_j' dx = 0, \\
 \rho_2 \int_0^L \xi_t^\mu z_j dx - \rho_2 \int_0^L \xi_1^\mu z_j dx + b \int_0^t \int_0^L \xi_x^\mu z_j' dx d\tau + k \int_0^t \int_0^L (\chi_x^\mu + \xi^\mu) z_j dx d\tau \\
 - m \int_0^L \theta^\mu z_j dx + m \int_0^L \theta_0^\mu z_j dx = 0, \\
 \rho_3 \int_0^L \theta_t^\mu z_j dx - \rho_3 \int_0^L \theta_1^\mu z_j dx + l \int_0^t \int_0^L \theta_x^\mu z_j' dx d\tau \\
 - \int_0^t \int_0^L \int_0^\tau g(t-s) \theta_x^\mu(\cdot, s) z_j' ds dx d\tau - m \int_0^L \chi^\mu z_j' dx \\
 + m \int_0^L \chi_0^\mu z_j' dx + m \int_0^L \xi^\mu z_j dx - m \int_0^L \xi_0^\mu z_j dx = 0,
 \end{aligned}$$

faisant $\mu \rightarrow \infty$, alors pour $j \geq 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \int_0^L \chi_t y_j dx - \rho_1 \int_0^L \chi_1 y_j dx + k \int_0^t \int_0^L (\chi_x + \xi) y_j' dx d\tau \\
 & \quad - m \int_0^L \theta y_j' dx + m \int_0^L \theta_0 y_j' dx = 0, \\
 & \rho_2 \int_0^L \xi_t z_j dx - \rho_2 \int_0^L \xi_1 z_j dx + b \int_0^t \int_0^L \xi_x z_j' dx d\tau + k \int_0^t \int_0^L (\chi_x + \xi) z_j dx d\tau \\
 & \quad - m \int_0^L \theta z_j dx + m \int_0^L \theta_0 z_j dx = 0, \\
 & \rho_3 \int_0^L \theta_t z_j dx - \rho_3 \int_0^L \theta_1 z_j dx + l \int_0^t \int_0^L \theta_x z_j' dx d\tau \\
 & \quad - \int_0^t \int_0^L \int_0^\tau g(t-s) \theta_x(\cdot, s) z_j' ds dx d\tau - m \int_0^L \chi z_j' dx \\
 & \quad + m \int_0^L \chi_0 z_j' dx + m \int_0^L \xi z_j dx - m \int_0^L \xi_0 z_j dx = 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $(u, v, w) \in H_\star^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$, on a (4.10)-(4.12).

Ensuite, on dérive les trois équations précédentes par rapport à t et on intègre par partie par rapport à x , on obtient

$$\begin{aligned}
 \rho_1 \chi_{tt} - k (\chi_x + \xi)_x + m \theta_{tx} &= 0, & \text{dans } L^2\left((0, T); L^2(0, L)\right), \\
 \rho_2 \xi_{tt} - b \xi_{xx} + k (\chi_x + \xi) - m \theta_t &= 0, & \text{dans } L^2\left((0, T); L^2(0, L)\right), \\
 \rho_3 \theta_{tt} - l \theta_{xx} + \int_0^t g(t-s) \theta_{xx}(\cdot, s) ds + m \chi_{tx} + m \xi_t &= 0, & \text{dans } L^2\left((0, T); L^2(0, L)\right).
 \end{aligned}$$

Maintenant, d'après le lemme d'Aubin Lions et (4.19), on déduit que

$$\begin{aligned}
 \chi^\mu &\longrightarrow \chi & \text{dans } C\left([0, T]; H_\star^1(0, L)\right), \\
 \xi^\mu &\longrightarrow \xi \text{ et } \theta^\mu &\longrightarrow \theta & \text{dans } C\left([0, T]; H_0^1(0, L)\right), \\
 \chi_t^\mu &\longrightarrow \chi_t & \text{dans } C\left([0, T]; L_\star^2(0, L)\right), \\
 \xi_t^\mu &\longrightarrow \xi_t \text{ et } \theta_t^\mu &\longrightarrow \theta_t & \text{dans } C\left([0, T]; L^2(0, L)\right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\chi^\mu(\cdot, 0), \xi^\mu(\cdot, 0), \theta^\mu(\cdot, 0), \chi_t^\mu(\cdot, 0), \xi_t^\mu(\cdot, 0), \theta_t^\mu(\cdot, 0)$ ont un sens et

$$\begin{aligned} \chi^\mu(\cdot, 0) &\longrightarrow \chi(\cdot, 0) && \text{dans } H_*^1(0, L), \\ \xi^\mu(\cdot, 0) &\longrightarrow \xi(\cdot, 0) \text{ et } \theta^\mu(\cdot, 0) \longrightarrow \theta(\cdot, 0) && \text{dans } H_0^1(0, L), \\ \chi_t^\mu(\cdot, 0) &\longrightarrow \chi_t(\cdot, 0) && \text{dans } L_*^2(0, L), \\ \xi_t^\mu(\cdot, 0) &\longrightarrow \xi_t(\cdot, 0) \text{ et } \theta_t^\mu(\cdot, 0) \longrightarrow \theta_t(\cdot, 0) && \text{dans } L^2(0, L). \end{aligned} \quad (4.21)$$

En combinant (4.21) et (4.14), on a

$$\chi(\cdot, 0) = \chi_0, \quad \chi_t(\cdot, 0) = \chi_1, \quad \xi(\cdot, 0) = \xi_0, \quad \xi_t(\cdot, 0) = \xi_1, \quad \theta(\cdot, 0) = \theta_0, \quad \theta_t(\cdot, 0) = \theta_1.$$

Par conséquent, (χ, ξ, θ) est une solution forte de (4.6)-(4.7).

Unicité. Soient $(\chi^1, \xi^1, \theta^1)$ et $(\chi^2, \xi^2, \theta^2)$ deux solutions fortes de (4.6)-(4.7) avec les mêmes conditions initiales, on met $(\chi, \xi, \theta) = (\chi^1 - \chi^2, \xi^1 - \xi^2, \theta^1 - \theta^2)$. Alors, on trouve

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L \chi_{tt} u \, dx + k \int_0^L (\chi_x + \xi) u' \, dx - m \int_0^L \theta_t u' \, dx &= 0, \\ \rho_2 \int_0^L \xi_{tt} v \, dx + b \int_0^L \xi_x v' \, dx + k \int_0^L (\chi_x + \xi) v \, dx - m \int_0^L \theta_t v \, dx &= 0, \\ \rho_3 \int_0^L \theta_{tt} w \, dx + l \int_0^L \theta_x w' \, dx - \int_0^L \int_0^t g(t-s) \theta_x(\cdot, s) w' \, ds \, dx \\ &\quad - m \int_0^L \chi_t w' \, dx + m \int_0^L \xi_t w \, dx = 0, \\ \chi(\cdot, 0) = \xi(\cdot, 0) = \theta(\cdot, 0) = \chi_t(\cdot, 0) = \xi_t(\cdot, 0) = \theta_t(\cdot, 0) &= 0, \end{aligned}$$

pour $(u, v, w) \in H_*^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$. En considérant $(u, v, w) = (\chi_t, \xi_t, \theta_t)$, en faisant la somme et en utilisant le Lemme 1.5.2, on obtient donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\rho_1 \|\chi_t\|_2^2 + k \|\chi_x + \xi\|_2^2 + \rho_2 \|\xi_t\|_2^2 + b \|\xi_x\|_2^2 + \rho_3 \|\theta_t\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(l - \int_0^t g(s) \, ds \right) \|\theta_x\|_2^2 + \int_0^L (g \circ \theta_x)(t) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (g' \circ \theta_x)(t) \, dx - \frac{1}{2} g(t) \|\theta_x\|_2^2 \, dx \leq 0, \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Une intégration simple sur $(0, t)$ conduit à

$$\begin{aligned} &\rho_1 \|\chi_t\|_2^2 + k \|\chi_x + \xi\|_2^2 + \rho_2 \|\xi_t\|_2^2 + b \|\xi_x\|_2^2 + \rho_3 \|\theta_t\|_2^2 \\ &\quad + \left(l - \int_0^t g(s) \, ds \right) \|\theta_x\|_2^2 + \int_0^L (g \circ \theta_x)(t) \, dx \leq 0, \quad \forall t > 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que,

$$(\chi, \xi, \theta) = (\chi^1 - \chi^2, \xi^1 - \xi^2, \theta^1 - \theta^2) = (0, 0, 0).$$

Alors, le problème (4.6)-(4.7) admet une unique solution forte.

Maintenant, si $(\chi_0, \chi_1) \in H_\star^1(0, L) \times L_\star^2(0, L)$, et $(\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$, il résulte de la densité de $(H_\star^2(0, L) \cap H_\star^1(0, L)) \times H_\star^1(0, L)$ dans $H_\star^1(0, L) \times L_\star^2(0, L)$ et $(H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times H_0^1(0, L)$ dans $H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ que le problème (4.6)-(4.7) admet une unique solution faible. \square

4.3 Décroissance générale

Le résultat principal de ce chapitre est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Supposons que g vérifie les hypothèses (A1)-(A2), les coefficients du système vérifient la condition (4.8), et soit*

$$\left((\chi_0, \chi_1), ((\xi_0, \xi_1), (\theta_0, \theta_1)) \right) \in \left(H_\star^1(0, L) \times L_\star^2(0, L) \times (H_0^1(0, L) \times L^2(0, L))^2 \right).$$

Alors, il existe deux constantes strictement positives \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 telle que

$$E(t) \leq \tilde{C}_1 e^{-\tilde{C}_2 \int_{t_0}^t \eta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.22)$$

La démonstration du Théorème (4.3.1) est basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov qui est équivalente à $E(t)$. Pour cela, on utilise la technique de multiplicateurs afin de montrer les lemmes suivants :

Lemme 4.3.1. *Soit (χ, ξ, θ) une solution de (4.6)-(4.7). Alors, la fonction d'énergie définie par :*

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 \chi_t^2 + k (\chi_x + \xi)^2 + \rho_2 \xi_t^2 + b \xi_x^2 + \rho_3 \theta_t^2 \right. \\ & \left. + \left(l - \int_0^t g(s) ds \right) \theta_x^2 + (g \circ \theta_x) \right] dx, \end{aligned} \quad (4.23)$$

vérifie,

$$E'(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (g' \circ \theta_x) dx - \frac{1}{2} g(t) \int_0^L \theta_x^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.24)$$

Démonstration. En multipliant les équations du système (4.6) par χ_t, ξ_t et θ_t , respectivement, en intégrant par partie sur $(0, L)$ et utilisant les conditions aux bords, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\rho_1 \chi_t^2 + k (\chi_x + \xi)^2 + \rho_2 \xi_t^2 + b \xi_x^2 + \rho_3 \theta_t^2 + l \theta_x^2 \right] dx \\ - \int_0^L \theta_{tx} (g * \theta_x) dx = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

l'utilisation du Lemme 1.5.2 termine la preuve. \square

Lemme 4.3.2. *Soit (χ, ξ, θ) une solution de (4.6)-(4.7). Alors, la fonctionnelle*

$$F_1(t) = -\rho_1 \int_0^L \chi_t \chi dx, \quad (4.26)$$

satisfait, pour $\varepsilon_1 > 0$ l'estimation suivante :

$$F_1'(t) \leq -\rho_1 \int_0^L \chi_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^L \chi_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx. \quad (4.27)$$

Démonstration. En dérivant F_1 , en utilisant la première équation de (4.6) et intégrant par partie, on trouve

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= -\rho_1 \int_0^L \chi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^L \chi_{tt} \chi dx \\ &= -\rho_1 \int_0^L \chi_t^2 dx + k \int_0^L (\chi_x + \xi) \chi_x dx - m \int_0^L \theta_t \chi_x dx, \end{aligned} \quad (4.28)$$

d'après l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} k \int_0^L (\chi_x + \xi) \chi_x dx &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^L \chi_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx, \\ -m \int_0^L \theta_t \chi_x dx &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^L \chi_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_1} \int_0^L \theta_t^2 dx. \end{aligned}$$

D'où, on a (4.27). \square

Lemme 4.3.3. *Sous les hypothèses (A1) et (A2), la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} F_2(t) &= -\rho_3 \int_0^L \theta_t (g \diamond \theta) dx \\ &= -\rho_3 \int_0^1 \theta_t \left(\int_0^t g(t-s) (\theta(t) - \theta(s)) ds \right) dx, \end{aligned} \quad (4.29)$$

satisfait, pour tout $\varepsilon_2 > 0$ l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -\frac{\rho_3 g_0}{2} \int_0^L \theta_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \chi_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \xi_t^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_2 \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx - \tilde{C} \int_0^L (g' \circ \theta_x) dx, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $g_0 = \int_0^{t_0} g(\tau) d\tau$.

Démonstration. En utilisant l'équation (4.6)₃, puis en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= -\rho_3 \int_0^L \theta_t (g \diamond \theta)_t dx - \int_0^L [l \theta_{xx} - (g * \theta_{xx}) - m \chi_{tx} - m \xi_t] (g \diamond \theta) dx \\ &= -\left(\rho_3 \int_0^t g(\tau) d\tau\right) \int_0^L \theta_t^2 dx - \rho_3 \int_0^L \theta_t (g' \diamond \theta) dx \\ &\quad + l \int_0^L \theta_x (g \diamond \theta_x) dx - \int_0^L (g * \theta_x) (g \diamond \theta_x) dx \\ &\quad - m \int_0^L \chi_t (g \diamond \theta_x) dx + m \int_0^L \xi_t (g \diamond \theta) dx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

En appliquant alors l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré, pour $\delta_1, \varepsilon_2 > 0$, on a

$$\begin{aligned} -\rho_3 \int_0^L \theta_t (g' \diamond \theta) dx &\leq \rho_3 \delta_1 \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\rho_3}{4\delta_1} \int_0^L \left(\int_0^t -g'(s) ds\right) (-g' \circ \theta_x) dx \\ &\leq \rho_3 \delta_1 \int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{\tilde{C}}{\delta_1} \int_0^L (g' \circ \theta_x) dx, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$l \int_0^L \theta_x (g \diamond \theta_x) dx \leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} -\int_0^L (g * \theta_x) (g \diamond \theta_x) dx &= -\int_0^t g(s) ds \int_0^L \theta_x (g \diamond \theta_x) dx + \int_0^L (g \diamond \theta_x)^2 dx \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon_2} \left(\int_0^t g(s) ds\right)^2 \int_0^L (g \diamond \theta_x)^2 dx \\ &\quad + \int_0^L (g \diamond \theta_x)^2 dx \\ &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$-m \int_0^L \chi_t (g \diamond \theta_x) dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L \chi_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx, \quad (4.35)$$

$$m \int_0^L \xi_t (g \diamond \theta) dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L \xi_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx. \quad (4.36)$$

Puisque g est une fonction positive, continue et que $g(0) > 0$, nous avons

$$\int_0^t g(\tau) d\tau \geq \int_0^{t_0} g(\tau) d\tau = g_0, \quad \forall t \geq t_0 > 0. \quad (4.37)$$

En remplaçant (4.32)-(4.36) dans (4.31), en tenant compte de (4.37), on déduit que

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -\rho_3 (g_0 - \delta_1) \int_0^L \theta_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \chi_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \xi_t^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_2 \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx - \frac{\tilde{C}}{\delta_1} \int_0^L (g' \circ \theta_x) dx, \end{aligned}$$

on choisit $\delta_1 = \frac{g_0}{2}$. Donc, on a le résultat souhaité (4.30). \square

Lemme 4.3.4. Soit (χ, ξ, θ) une solution de (4.6)-(4.7). Donc, la fonctionnelle

$$F_3(t) = -\rho_1 \int_0^L \left(\int_0^x \chi_t(y, t) dy \right) \left((\chi_x + \xi) + \frac{\rho_3}{m} \theta_t \right) dx, \quad (4.38)$$

satisfait, pour $\varepsilon_3 > 0$ l'estimation :

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -\frac{k}{2} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L \chi_t^2 dx + \tilde{C} \int_0^L \theta_t^2 dx \\ &\quad + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_3} \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_3} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Démonstration. On dérive F_3 par rapport à t , on a

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -\rho_1 \int_0^L \left(\int_0^x \chi_{tt}(y, t) dy \right) \left((\chi_x + \xi) + \frac{\rho_3}{m} \theta_t \right) dx \\ &\quad - \rho_1 \int_0^L \left(\int_0^x \chi_t(y, t) dy \right) \left((\chi_x + \xi)_t + \frac{\rho_3}{m} \theta_{tt} \right) dx, \end{aligned}$$

on utilise (4.6)₁, (4.6)₃, on peut trouver

$$\begin{aligned} F_3'(t) &= -\rho_1 \int_0^L \left(\int_0^x \chi_t(y) dy \right) (\chi_x + \xi)_t dx - k \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx \\ &\quad + m \int_0^L \theta_t (\chi_x + \xi) dx + \frac{\rho_3}{m} \int_0^L \left[-k (\chi_x + \xi) + m \theta_t \right] \theta_t dx \\ &\quad + \frac{\rho_1}{m} \int_0^L \left[-l \theta_{xx} + (g * \theta_{xx}) + m (\chi_x + \xi)_t \right] \int_0^x \chi_t(y) dy dx. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A l'aide de la formule d'intégration par partie et en utilisant le fait que $\int_0^L \chi(x) dx = 0$, on a

$$\begin{aligned} F'_3(t) = & -k \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + \rho_3 \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\rho_1 l}{m} \int_0^L \chi_t \theta_x dx \\ & + \left(m - \frac{\rho_3 k}{m}\right) \int_0^L \theta_t (\chi_x + \xi) dx - \frac{\rho_1}{m} \int_0^L \chi_t (g * \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (4.41)$$

En vertu de l'inégalité de Young, nous trouvons

$$\frac{\rho_1 l}{m} \int_0^L \chi_t \theta_x dx \leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^L \chi_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_3} \int_0^L \theta_x^2 dx, \quad (4.42)$$

$$\left(m - \frac{\rho_3 k}{m}\right) \int_0^L \theta_t (\chi_x + \xi) dx \leq \frac{k}{2} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + \tilde{C} \int_0^L \theta_t^2 dx, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_1}{m} \int_0^L \chi_t (g * \theta_x) dx &= \frac{\rho_1}{m} \int_0^L \chi_t \left(\int_0^t g(t-s) (\theta_x(t) - \theta_x(s) - \theta_x(t)) ds \right) dx \\ &= \frac{\rho_1}{m} \int_0^L \chi_t (g \diamond \theta_x) dx - \frac{\rho_1}{m} \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^L \chi_t \theta_x dx \\ &\leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^L \chi_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_3} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_3} \int_0^L \theta_x^2 dx. \end{aligned} \quad (4.44)$$

En remplaçant les estimations précédentes (4.42)-(4.44) dans (4.41), on obtient le résultat désiré (4.39). \square

Lemme 4.3.5. *La fonctionnelle F_4 définie par :*

$$F_4(t) = \rho_3 \int_0^L \theta_t \theta dx + m \int_0^L (\chi_x + \xi) \theta dx, \quad (4.45)$$

satisfait, pour $\varepsilon_4 > 0$ l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} F'_4(t) \leq & -\frac{\lambda}{2} \int_0^L \theta_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx \\ & + \tilde{C} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \int_0^L \theta_t^2 dx + \tilde{C} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Démonstration. En dérivant F_4 , puis en intégrant par partie sur $(0, L)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 F_4'(t) &= \rho_3 \int_0^L \theta_t^2 dx + \rho_3 \int_0^L \theta_{tt} \theta dx \\
 &\quad + m \int_0^L (\chi_x + \xi)_t \theta dx + m \int_0^L (\chi_x + \xi) \theta_t dx \\
 &= \rho_3 \int_0^L \theta_t^2 dx - l \int_0^L \theta_x^2 dx + \int_0^L \theta_x (g * \theta_x) dx \\
 &\quad + m \int_0^L (\chi_x + \xi) \theta_t dx. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

Les deux derniers termes du membre droit de (4.47) sont estimés comme suit, pour $\delta_2, \varepsilon_4 > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \theta_x (g * \theta_x) dx &= \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^L \theta_x^2 dx - \int_0^L \theta_x (g \diamond \theta_x) dx \\
 &\leq \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^L \theta_x^2 dx + \delta_2 \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\delta_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx \\
 &= \left(\int_0^t g(\tau) d\tau + \delta_2 \right) \int_0^L \theta_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\delta_2} \int_0^L (g \circ \theta_x) dx, \tag{4.48}
 \end{aligned}$$

$$m \int_0^L (\chi_x + \xi) \theta_t dx \leq \varepsilon_4 \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_4} \int_0^L \theta_t^2 dx. \tag{4.49}$$

En utilisant le fait que $l - \int_0^t g(s) ds > \lambda$, choisissant $\delta_2 = \frac{\lambda}{2}$ et remplaçant (4.48)-(4.49) dans (4.47). Nous arrivons à (4.46). \square

Lemme 4.3.6. *Supposons que les coefficients du systèmes satisfont (4.8). Alors la fonctionnelle F_5 définie par :*

$$\begin{aligned}
 F_5(t) = & -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \chi_t \xi_x dx - \frac{\rho_2}{b} \int_0^L \xi_t (\chi_x + \xi) dx \\
 & + \frac{\rho_3}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_t \xi_t dx + \frac{b}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_x \xi_x dx \\
 & - \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_x (g * \theta_x) dx,
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

vérifie, pour tout $\varepsilon_5 > 0$,

$$\begin{aligned}
 F_5'(t) \leq & -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \xi_t^2 dx + \varepsilon_5 \int_0^L \xi_x^2 dx + \tilde{C} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx \\
 & + \tilde{C} \int_0^L \theta_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_5} \int_0^L \theta_x^2 dx - \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_5} \int_0^L (g' \circ \theta_x) dx.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Démonstration. Une dérivation simple de F_5 donne

$$\begin{aligned}
 F_5'(t) = & -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \chi_{tt} \xi_x dx - \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \chi_t \xi_{tx} dx \\
 & - \frac{\rho_2}{b} \int_0^L \xi_{tt} (\chi_x + \xi) dx - \frac{\rho_2}{b} \int_0^L \xi_t^2 dx \\
 & + \frac{\rho_3}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_t \xi_{tt} dx + \frac{\rho_3}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_{tt} \xi_t dx \\
 & + \frac{l}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_{tx} \xi_x dx + \frac{l}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_x \xi_{tx} dx \\
 & - \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_{tx} (g * \theta_x) dx \\
 & - \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_x (g * \theta_x)_t dx.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

En utilisant les trois équations du système (4.6), puis en intégrant par parties, nous avons

$$J_1 = -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \chi_{tt} \xi_x dx = -\int_0^L (\chi_x + \xi)_x \xi_x dx + \frac{m}{k} \int_0^L \theta_{tx} \xi_x dx, \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 = & -\frac{\rho_2}{b} \int_0^L \xi_{tt} (\chi_x + \xi) dx \\
 = & \int_0^L (\chi_x + \xi)_x \xi_x dx + \frac{k}{b} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx - \frac{m}{b} \int_0^L (\chi_x + \xi) \theta_t dx,
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \frac{\rho_3}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_t \xi_{tt} dx = -\frac{b\rho_3}{m\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_x \theta_{tx} dx \\
 &\quad - \frac{k\rho_3}{m\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L (\chi_x + \xi) \theta_t dx + \frac{\rho_3}{\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_t^2 dx, \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_4 &= \frac{\rho_3}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_{tt} \xi_t dx \\
 &= -\frac{l}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_x \xi_{tx} dx + \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_{tx} (g * \theta_x) dx \\
 &\quad + \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \chi_t \xi_{tx} dx - \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_t^2 dx, \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_5 &= -\frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_x (g * \theta_x)_t dx \\
 &= -\frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) g(t) \int_0^L \xi_x \theta_x dx + \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_x (g' \diamond \theta_x) dx. \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

En substituant (4.53)-(4.57) dans (4.52), on arrive à

$$\begin{aligned}
 F'_5(t) &= -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \xi_t^2 dx + \frac{k}{b} \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx - \frac{\zeta_0}{m} \int_0^L \theta_{tx} \xi_x dx \\
 &\quad - \left[\frac{k\rho_3}{m\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) + \frac{m}{b} \right] \int_0^L \theta_t (\chi_x + \xi) dx \\
 &\quad + \frac{\rho_3}{\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \theta_t^2 dx - \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) g(t) \int_0^L \xi_x \theta_x dx \\
 &\quad + \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_x (g' \diamond \theta_x) dx. \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Young, pour $\varepsilon_5 > 0$

$$\begin{aligned}
 -\left[\frac{k\rho_3}{m\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) + \frac{m}{b} \right] \int_0^L \theta_t (\chi_x + \xi) dx &\leq \tilde{C} \int_0^L \left[\theta_t^2 + (\chi_x + \xi)^2 \right] dx, \\
 -\frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) g(t) \int_0^L \xi_x \theta_x dx &\leq \varepsilon_5 \int_0^L \xi_x^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_5} \int_0^L \theta_x^2 dx, \\
 \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \int_0^L \xi_x (g' \diamond \theta_x) dx &\leq \varepsilon_5 \int_0^L \xi_x^2 dx - \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_5} \int_0^L (g' \diamond \theta_x) dx,
 \end{aligned}$$

en remplaçant les inégalités précédentes dans (4.58), et utilisant la condition (4.8) pour obtenir l'estimation (4.51). \square

Lemme 4.3.7. *La fonctionnelle*

$$F_6(t) = -\rho_1 \int_0^L \chi_t \left(\int_0^x \xi(y, t) dy \right) dx + \rho_2 \int_0^L \xi_t \xi dx, \quad (4.59)$$

vérifie, pour toute solution du problème (4.6)-(4.7), l'estimation :

$$F_6'(t) \leq -b \int_0^L \xi_x^2 dx + \varepsilon_6 \int_0^L \chi_t^2 dx + \tilde{C} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_6} \right) \int_0^L \xi_t^2 dx. \quad (4.60)$$

Démonstration. En dérivant F_6 , en utilisant les deux premières équations du système (4.6), puis en intégrant par parties et utilisant les conditions aux bords, nous obtenons

$$\begin{aligned} F_6'(t) &= -\rho_1 \int_0^L \chi_{tt} \left(\int_0^x \xi(y, t) dy \right) dx - \rho_1 \int_0^L \chi_t \left(\int_0^x \xi_t(y, t) dy \right) dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L \xi_{tt} \xi dx + \rho_2 \int_0^L \xi_t^2 dx \\ &= \int_0^L \left[-k(\chi_x + \xi)_x + m\theta_{tx} \right] \left(\int_0^x \xi(y, t) dy \right) dx - \rho_1 \int_0^L \chi_t \left(\int_0^x \xi_t(y, t) dy \right) dx \\ &\quad + \int_0^L \left[b\xi_{xx} - k(\chi_x + \xi) + m\theta_t \right] \xi dx + \rho_2 \int_0^L \xi_t^2 dx \\ &= -b \int_0^L \xi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^L \xi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^L \chi_t \left(\int_0^x \xi_t(y, t) dy \right) dx. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Nous estimons le dernier terme par l'utilisation de l'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour $\varepsilon_6 > 0$

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^L \chi_t \left(\int_0^x \xi_t(y, t) dy \right) dx &\leq \varepsilon_6 \int_0^L \chi_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_6} \int_0^L \left(\int_0^x \xi_t(y, t) dy \right)^2 dx \\ &\leq \varepsilon_6 \int_0^L \chi_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_6} \left(\int_0^L \xi_t(x, t) dx \right)^2 \\ &\leq \varepsilon_6 \int_0^L \chi_t^2 dx + \frac{\tilde{C}}{\varepsilon_6} \int_0^L \xi_t^2 dx, \end{aligned} \quad (4.62)$$

l'insertion de (4.62) dans (4.61) nous donne (4.60). \square

Maintenant, on est prêt à prouver notre résultat de stabilité.

4.3.1 Preuve du Théorème 4.3.1

Pour certaines constantes positives $N, N_i (i = 1 : 4)$ qui vont être choisis de manière appropriée, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} par :

$$\mathcal{L}(t) = N E(t) + F_1(t) + N_1 F_2(t) + N_2 F_3(t) + N_3 F_4(t) + N_4 F_5(t) + F_6(t). \quad (4.63)$$

Nous commençons par montrer que la fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} et l'énergie E sont équivalentes, d'après (4.63), on a

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t) - NE(t)| &\leq \rho_1 \int_0^L |\chi_t \chi| dx + \rho_3 N_1 \int_0^L |\theta_t (g \diamond \theta)| dx \\
 &\quad + \rho_1 N_2 \int_0^L \left| \int_0^x \chi_t(y, t) dy \left((\chi_x + \xi) + \frac{\rho_3}{m} \theta_t \right) \right| dx + \rho_3 N_3 \int_0^L |\theta_t \theta| dx \\
 &\quad + m N_3 \int_0^L |(\chi_x + \xi) \theta| dx + \frac{\rho_1}{k} N_4 \int_0^L |\chi_t \xi_x| dx \\
 &\quad + \frac{\rho_2}{b} N_4 \int_0^L |\xi_t (\chi_x + \xi)| dx + \left| \frac{\rho_3}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \right| N_4 \int_0^L |\theta_t \xi_t| dx \\
 &\quad + \left| \frac{b}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \right| N_4 \int_0^L |\theta_x \xi_x| dx + \rho_1 \int_0^L \left| \chi_t \int_0^x \xi(y, t) dy \right| dx \\
 &\quad + \left| \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) \right| N_4 \int_0^L |\xi_x (g * \theta_x)| dx + \rho_2 \int_0^L |\xi_t \xi| dx,
 \end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Young, Poincaré et Cauchy-Schwarz, on arrive à

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \tilde{C} \int_0^L \left[\chi_t^2 + (\chi_x + \xi)^2 + \xi_t^2 + \xi_x^2 + \theta_t^2 + \theta_x^2 + (g \circ \theta_x) \right] dx,$$

on conclut d'après (4.23) que

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \tilde{C} E(t),$$

d'où,

$$(N - \tilde{C}) E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + \tilde{C}) E(t).$$

Donc, on choisit N assez grand, on obtient

$$\gamma_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \gamma_2 E(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.64)$$

pour deux constantes positives γ_1 et γ_2 . D'autre part, en dérivant (4.63) et en combinant (4.24), (4.27), (4.30), (4.39), (4.46), (4.51), (4.60), et la relation

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 \int_0^L \chi_x^2 dx &= \varepsilon_1 \int_0^L (\chi_x + \xi - \xi)^2 dx \leq 2\varepsilon_1 \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + 2\varepsilon_1 \int_0^L \xi^2 dx \\
 &\leq 2\varepsilon_1 \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx + 2\varepsilon_1 \int_0^L \xi_x^2 dx,
 \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_1 = \frac{b}{4}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\rho_1}{4N_2}, \quad \varepsilon_4 = \frac{kN_2}{4N_3}, \quad \varepsilon_5 = \frac{b}{4N_4}, \quad \varepsilon_6 = \frac{\rho_1}{2}.$$

On arrive à

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) \leq & - \left(\frac{\rho_1}{4} - \varepsilon_2 N_1 \right) \int_0^L \chi_t^2 dx - \left(\frac{k}{4} N_2 - \tilde{C} N_4 - \tilde{C} \right) \int_0^L (\chi_x + \xi)^2 dx \\
 & - \frac{b}{4} \int_0^L \xi_x^2 dx - \left(\frac{\rho_1}{k} N_4 - \varepsilon_2 N_1 - \tilde{C} \right) \int_0^L \xi_t^2 dx \\
 & - \left[\frac{\lambda}{2} N_3 - \varepsilon_2 N_1 - \tilde{C} (N_2^2 + N_4^2) \right] \int_0^L \theta_x^2 dx \\
 & - \left[\frac{\rho_3 g_0}{2} N_1 - \tilde{C} N_2 - \tilde{C} N_3 \left(1 + \frac{N_3}{N_2} \right) - \tilde{C} N_4 - \tilde{C} \right] \int_0^L \theta_t^2 dx \\
 & + \left[\frac{N}{2} - \tilde{C} (N_1 + N_4^2) \right] \int_0^L (g' \circ \theta_x) dx \\
 & + \tilde{C} \left(\frac{N_1}{\varepsilon_2} + N_2^2 + N_3 \right) \int_0^L (g \circ \theta_x) dx.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Maintenant, on choisit N_4 assez grand pour que

$$\omega_1 = \frac{\rho_1}{k} N_4 - \tilde{C} > 0.$$

Après cela, on prend N_2 assez grand tel que

$$\frac{k}{4} N_2 - \tilde{C} N_4 - \tilde{C} > 0.$$

Ensuite, on choisit N_3 assez grand tel que

$$\omega_2 = \frac{\lambda}{2} N_3 - \tilde{C} (N_2^2 + N_4^2) > 0.$$

En plus, on prend N_1 assez grand pour que

$$\frac{\rho_3 g_0}{2} N_1 - \tilde{C} N_2 - \tilde{C} N_3 \left(1 + \frac{N_3}{N_2} \right) - \tilde{C} N_4 - \tilde{C} > 0,$$

et en choisissant ε_2 assez petit tel que

$$\varepsilon_2 < \min \left(\frac{\omega_1}{N_1}, \frac{\rho_1}{4N_1}, \frac{\omega_2}{N_1} \right).$$

Enfin, on choisit N suffisamment grand tel que

$$\frac{N}{2} - \tilde{C} (N_1 + N_4^2) > 0.$$

Tous ces choix conduisent à

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\tilde{C}_3 E(t) + \tilde{C}_4 \int_0^L (g \circ \theta_x) dx, \quad \forall t \geq t_0, \tag{4.66}$$

pour $\tilde{C}_3, \tilde{C}_4 > 0$. Puis, en multipliant (4.66) par $\eta(t)$ et en utilisant l'hypothèse (A2) et (4.24), on obtient

$$\begin{aligned} \eta(t) \mathcal{L}'(t) &\leq -\tilde{C}_3 \eta(t) E(t) - \tilde{C}_4 \int_0^L (g' \circ \theta_x) dx \\ &\leq -\tilde{C}_3 \eta(t) E(t) - 2\tilde{C}_4 E'(t), \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left[\eta(t) \mathcal{L}(t) + 2\tilde{C}_4 E(t) \right]' - \eta'(t) \mathcal{L}(t) \leq -\tilde{C}_3 \eta(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

En utilisant le fait que $\eta'(t) \leq 0$, on aura

$$\left[\eta(t) \mathcal{L}(t) + 2\tilde{C}_4 E(t) \right]' \leq -\tilde{C}_3 \eta(t) E(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

Encore une fois, d'après (4.64), il est facile de prouver que

$$\mathcal{R}(t) = \eta(t) \mathcal{L}(t) + 2\tilde{C}_4 E(t) \sim E(t). \quad (4.67)$$

Donc, on obtient pour une constante positive \tilde{C}_2 ,

$$\mathcal{R}'(t) \leq -\tilde{C}_2 \eta(t) \mathcal{R}(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.68)$$

Une intégration simple de (4.68) sur (t_0, t) conduit à

$$\mathcal{R}(t) \leq \mathcal{R}(t_0) e^{-\tilde{C}_2 \int_{t_0}^t \eta(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.69)$$

Finalement, L'affirmation du théorème (4.22) est obtenue en combinant (4.67) et (4.69).

Etude théorique et numérique du problème de Timoshenko avec la loi de Cattaneo

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats numériques concernant l'existence et la décroissance de l'énergie d'un problème de Timoshenko avec la loi de Cattaneo. Le système est de la forme :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} = k(\varphi_x + \psi)_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} = b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta\theta_x - \psi_t, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \rho_3 \theta_t = -q_x - \delta\psi_{tx}, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \\ \tau q_t = -\beta q - \theta_x, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty), \end{cases} \quad (5.1)$$

avec des conditions initiales

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x); \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x); \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x); \\ \varphi_t(x, 0) &= \varphi_1(x); \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); \quad q(x, 0) = q_0(x); \end{aligned} \quad (5.2)$$

et des conditions aux bords

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(1, t) = \psi(0, t) = \psi(1, t) = q(0, t) = q(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.3)$$

Le système (5.1) a été étudié théoriquement par plusieurs chercheurs et beaucoup de résultats concernant la stabilité du système ont été obtenus. Par exemple, Fernandez Sare et al. [36] ont étudié (5.1) en absence de la dissipation de frottement dans la seconde équation ($-\psi_t$). Ils ont montré que le couplage par la loi de Cattaneo n'est pas suffisant pour stabiliser le système exponentiellement.

Par contre, Santos et al. [85] ont étudié le même système de Fernandez Sare et al. [36] et ils ont prouvé que le système est exponentiellement stable si et seulement si le nombre de stabilité

$$\chi = \left(\tau - \frac{\rho_1}{k\rho_3} \right) \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k} \right) - \frac{\tau\delta^2\rho_1}{bk\rho_3}, \quad (5.4)$$

est nul. Le même nombre de stabilité a été obtenu par Ayadi et al. [14], où ils ont considéré une dissipation non linéaire $(-\alpha(t)h(\psi_t))$ au lieu de $-\psi_t$.

Notons que notre travail est un cas particulier de [14], où nous avons choisi $\alpha(t) = 1$ et $h(\psi_t) = \psi_t$.

5.2 Existence, unicité et décroissance exponentielle

Soit $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T$, où $\Phi = \varphi_t$ et $\Psi = \psi_t$, le système (5.1)-(5.3) est équivalent à :

$$\begin{cases} U'(t) = \mathcal{A}U(t), \\ U(0) = U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)^T, \end{cases} \quad (5.5)$$

où \mathcal{A} est un opérateur linéaire défini par :

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi)_x \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2}(b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) - \delta\theta_x - \Psi) \\ -\frac{1}{\rho_3}(q_x + \delta\Psi_x) \\ -\frac{1}{\tau}(\beta q + \theta_x) \end{pmatrix}.$$

Nous considérons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} L^2_\star(0, L) &= \left\{ u \in L^2(0, L) : \int_0^L u(x) dx = 0 \right\}, \\ H^1_\star(0, L) &= H^1(0, L) \cap L^2_\star(0, L), \\ H^2_\star(0, L) &= \{ u \in H^2(0, L) : u_x(0) = u_x(L) = 0 \}, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H} = H^1_\star(0, 1) \times L^2_\star(0, 1) \times H^1_0(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2_\star(0, 1) \times L^2(0, 1),$$

muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (U, \tilde{U})_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int_0^L \Phi \tilde{\Phi} dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi) (\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \tilde{\Psi} dx \\ &\quad + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \rho_3 \int_0^L \theta \tilde{\theta} dx + \tau \int_0^L q \tilde{q} dx, \end{aligned}$$

pour $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, \theta, q)^T \in \mathcal{H}$ et $\tilde{U} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\Phi}, \tilde{\psi}, \tilde{\Psi}, \tilde{\theta}, \tilde{q})^T \in \mathcal{H}$.

Le domaine de l'opérateur \mathcal{A} est donné par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} \mid \begin{array}{l} \varphi \in H^2_\star(0, 1) \cap H^1_\star(0, 1); \psi \in H^2(0, 1) \cap H^1_0(0, 1); \\ \phi_t \in H^1_\star(0, 1); \psi_t \in H^1_0(0, 1); \theta \in H^1_\star(0, 1); q \in H^1_0(0, 1) \end{array} \right\}.$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité de la solution du système (5.1)-(5.3) (voir [14]) :

Théorème 5.2.1. *Soit $U_0 \in \mathcal{H}$. Alors le problème (5.1)-(5.3) admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$. De plus, si $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.*

De plus, l'énergie classique du système (5.1)-(5.3) est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\rho_1 \varphi_t^2 + k (\varphi_x + \psi)^2 + \rho_2 \psi_t^2 + b \psi_x^2 + \rho_3 \theta^2 + \tau q^2 \right] dx, \quad (5.6)$$

et par la méthode de multiplicateur (voir [14]), nous aboutissons au résultat de stabilité suivant :

Théorème 5.2.2. *Soit $(\varphi, \psi, \theta, q)$ une solution du problème (5.1)-(5.3) et supposons que le numéro de stabilité donné par (5.4) est nul. Alors, le problème (5.1)-(5.3) est exponentiellement stable, c'est à dire qu'il existe deux constantes strictement positives K_1, K_2 tel que*

$$E(t) \leq K_1 e^{-K_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.7)$$

5.3 Discrétisation du modèle

On considère une discrétisation basée sur la méthode de différences finies, plus précisément, on va utiliser une approximation par la méthode de différences finies classique pour les dérivés temporelles, et un schéma implicite d'ordre quatre pour les dérivés spatiales (voir [67]).

On considère le domaine discret Ω_h de $\Omega = (0, 1)$ avec grille uniforme $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, \dots, I$ ($I \geq 1$); $\Delta x = \frac{1}{I}$. La discrétisation du temps de l'intervalle $T_n = (0, T)$ est donnée par $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$ ($N \geq 1$); $\Delta t = c\Delta x$, où c est une constante positive et I et N sont deux entiers positifs. On désigne par $f(x_i, t_n) = f_i^n$ la valeur de la fonction f au point x_i à l'instant t_n .

Le schéma numérique consiste à trouver $\varphi_i^{n+1}, \psi_i^{n+1}, \theta_i^{n+1}$ et q_i^{n+1} tel que

$$\begin{cases} \rho_1 (\varphi_{tt})_i^n = k (\varphi_{xx})_i^n + k (\psi_x)_i^n, \\ \rho_2 (\psi_{tt})_i^n = b (\psi_{xx})_i^n - k (\varphi_x)_i^n - k \psi_i^n - \delta (\theta_x)_i^n - (\psi_t)_i^n, \\ \rho_3 (\theta_t)_i^n = - (q_x)_i^n - \delta (\psi_{tx})_i^n, \\ \tau (q_t)_i^n = -\beta q_i^n - (\theta_x)_i^n, \end{cases} \quad (5.8)$$

pour $i = 1, 2, \dots, I - 1$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$, avec les approximations suivantes des

dérivées d'une fonction f :

$$(f_t)_i^n \simeq \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (f_{tt})_i^n \simeq \frac{f_i^{n+1} - 2f_i^n + f_i^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (5.9)$$

$$(f_x)_i^n \simeq \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}, \quad (f_{xx})_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \delta_x^2 f_i^n, \quad (5.10)$$

avec

$$\delta_x^2 f_i^n \simeq f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n, \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right) f_i^n \simeq \frac{1}{12}f_{i+1}^n + \frac{5}{6}f_i^n + \frac{1}{12}f_{i-1}^n. \quad (5.11)$$

Notons que l'introduction de l'opérateur discret $(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)$ est liée à la méthode de Noumerov [73, 74]. En fait, il a été prouvé dans de nombreux articles que la précision est améliorée au cours du traitement ; ceci justifie en quelque sorte l'appel à cette méthode dans plusieurs travaux de la littérature, voir par exemple [45, 93, 95]. En plus du résultat de cette approximation, qui donne plus de précision au schéma, elle peut également être considérée comme une correction des termes de la dérivée seconde dans les équations originales.

En utilisant (5.9)-(5.10), on trouve la formulation discrète du système (5.1) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{\Delta t^2} (\varphi_i^{n+1} - 2\varphi_i^n + \varphi_i^{n-1}) = \frac{k}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \delta_x^2 \varphi_i^n + \frac{k}{2\Delta x} (\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n), \\ \frac{\rho_2}{\Delta t^2} (\psi_i^{n+1} - 2\psi_i^n + \psi_i^{n-1}) = \frac{b}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \delta_x^2 \psi_i^n - \frac{k}{2\Delta x} (\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n) \\ \quad - k\psi_i^n - \frac{\delta}{2\Delta x} (\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n) - \frac{1}{2\Delta t} (\psi_i^{n+1} - \psi_i^{n-1}), \\ \frac{\rho_3}{2\Delta t} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^{n-1}) = -\frac{1}{2\Delta x} (q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) - \frac{\delta}{4\Delta x \Delta t} (\psi_{i+1}^{n+1} - \psi_{i-1}^{n+1}) \\ \quad + \frac{\delta}{4\Delta x \Delta t} (\psi_{i+1}^{n-1} - \psi_{i-1}^{n-1}), \\ \frac{\tau}{2\Delta t} (q_i^{n+1} - q_i^{n-1}) = -\beta q_i^n - \frac{1}{2\Delta x} (\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n), \end{array} \right. \quad (5.12)$$

et pour éliminer le terme $(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)^{-1}$, on va multiplier (5.12)₁ et (5.12)₂ par $\Delta t^2 (1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)$. Donc, pour la première équation de (5.12), on trouve

$$\rho_1 \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right) (\varphi_i^{n+1} - 2\varphi_i^n + \varphi_i^{n-1}) = \frac{k\Delta t^2}{\Delta x^2} \delta_x^2 \varphi_i^n + \frac{k\Delta t^2}{2\Delta x} \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right) (\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n). \quad (5.13)$$

On utilise (5.11), on a

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) (\varphi_i^{n+1} - 2\varphi_i^n + \varphi_i^{n-1}) \\
 &= \rho_1 \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) \varphi_i^{n+1} - 2\rho_1 \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) \varphi_i^n + \rho_1 \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) \varphi_i^{n-1} \\
 &= \frac{\rho_1}{12} \varphi_{i+1}^{n+1} + \frac{5\rho_1}{6} \varphi_i^{n+1} + \frac{\rho_1}{12} \varphi_{i-1}^{n+1} \\
 &\quad - \frac{\rho_1}{6} \varphi_{i+1}^n - \frac{5\rho_1}{3} \varphi_i^n - \frac{\rho_1}{6} \varphi_{i-1}^n \\
 &\quad + \frac{\rho_1}{12} \varphi_{i+1}^{n-1} + \frac{5\rho_1}{6} \varphi_i^{n-1} + \frac{\rho_1}{12} \varphi_{i-1}^{n-1}. \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\frac{k\Delta t^2}{\Delta x^2} \delta_x^2 \varphi_i^n = \frac{k\Delta t^2}{\Delta x^2} \varphi_{i+1}^n - 2\frac{k\Delta t^2}{\Delta x^2} \varphi_i^n + \frac{k\Delta t^2}{\Delta x^2} \varphi_{i-1}^n, \tag{5.15}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \frac{k\Delta t^2}{2\Delta x} \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) (\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n) \\
 &= \frac{k\Delta t^2}{2\Delta x} \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) \psi_{i+1}^n - \frac{k\Delta t^2}{2\Delta x} \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right) \psi_{i-1}^n \\
 &= \frac{k\Delta t^2}{12 \times 2\Delta x} \psi_{i+2}^n + \frac{5 \times k\Delta t^2}{6 \times 2\Delta x} \psi_{i+1}^n + \frac{k\Delta t^2}{12 \times 2\Delta x} \psi_i^n \\
 &\quad - \frac{k\Delta t^2}{12 \times 2\Delta x} \psi_i^n - \frac{5 \times k\Delta t^2}{6 \times 2\Delta x} \psi_{i-1}^n - \frac{k\Delta t^2}{12 \times 2\Delta x} \psi_{i-2}^n \\
 &= \frac{k\Delta t^2}{12 \times 2\Delta x} \psi_{i+2}^n + \frac{5 \times k\Delta t^2}{6 \times 2\Delta x} \psi_{i+1}^n - \frac{5 \times k\Delta t^2}{6 \times 2\Delta x} \psi_{i-1}^n - \frac{k\Delta t^2}{12 \times 2\Delta x} \psi_{i-2}^n. \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

En remplaçant (5.14)-(5.16) dans (5.13), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \rho_1 \left(\frac{1}{12} \varphi_{i+1}^{n+1} + \frac{5}{6} \varphi_i^{n+1} + \frac{1}{12} \varphi_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\frac{\rho_1}{6} + \alpha_1 \right) \varphi_{i+1}^n - \left(\frac{5\rho_1}{3} - 2\alpha_1 \right) \varphi_i^n - \left(\frac{\rho_1}{6} + \alpha_1 \right) \varphi_{i-1}^n \\
 &\quad + \rho_1 \left(\frac{1}{12} \varphi_{i+1}^{n-1} + \frac{5}{6} \varphi_i^{n-1} + \frac{1}{12} \varphi_{i-1}^{n-1} \right) - \alpha_2 \left(\psi_{i+2}^n + \frac{5}{6} \psi_{i+1}^n - \frac{5}{6} \psi_{i-1}^n - \frac{1}{12} \psi_{i-2}^n \right) = 0,
 \end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \frac{k\Delta t^2}{\Delta x^2}$, $\alpha_2 = \frac{k\Delta t^2}{2\Delta x}$, et on applique le même procédé à la deuxième équation de

(5.12), on arrive à

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \left(\frac{1}{12} \varphi_{i+1}^{n+1} + \frac{5}{6} \varphi_i^{n+1} + \frac{1}{12} \varphi_{i-1}^{n+1} \right) - \left(\frac{\rho_1}{6} + \alpha_1 \right) \varphi_{i+1}^n - \left(\frac{5\rho_1}{3} - 2\alpha_1 \right) \varphi_i^n - \left(\frac{\rho_1}{6} + \alpha_1 \right) \varphi_{i-1}^n \\ + \rho_1 \left(\frac{1}{12} \varphi_{i+1}^{n-1} + \frac{5}{6} \varphi_i^{n-1} + \frac{1}{12} \varphi_{i-1}^{n-1} \right) - \alpha_2 \left(\psi_{i+2}^n + \frac{5}{6} \psi_{i+1}^n - \frac{5}{6} \psi_{i-1}^n - \frac{1}{12} \psi_{i-2}^n \right) = 0, \\ \\ (\rho_2 + \beta_3) \left(\frac{1}{12} \psi_{i+1}^{n+1} + \frac{5}{6} \psi_i^{n+1} + \frac{1}{12} \psi_{i-1}^{n+1} \right) - \frac{1}{12} (2\rho_2 + 12\beta_1 - \beta_0) \psi_{i+1}^n \\ - \frac{1}{12} (2\rho_2 + 12\beta_1 - \beta_0) \psi_{i-1}^n + \beta_2 \left(\varphi_{i+2}^n + \frac{5}{6} \varphi_{i+1}^n - \frac{5}{6} \varphi_{i-1}^n - \frac{1}{12} \varphi_{i-2}^n \right) - \frac{1}{6} (10\rho_2 - 12\beta_1 - 5\beta_0) \psi_i^n \\ + \beta_4 \left(\theta_{i+2}^n + \frac{5}{6} \theta_{i+1}^n - \frac{5}{6} \theta_{i-1}^n - \frac{1}{12} \theta_{i-2}^n \right) - (-\rho_2 + \beta_3) \left(\frac{1}{12} \psi_{i+1}^{n-1} + \frac{5}{6} \psi_i^{n-1} + \frac{1}{12} \psi_{i-1}^{n-1} \right) = 0, \\ \\ \frac{\rho_3}{2\Delta t} (\theta_i^{n+1} - \theta_i^{n-1}) + \frac{1}{2\Delta x} (q_{i+1}^n - q_{i-1}^n) + \frac{\delta}{4\Delta x \Delta t} (\psi_{i+1}^{n+1} - \psi_{i-1}^{n+1}) \\ - \frac{\delta}{4\Delta x \Delta t} (\psi_{i+1}^{n-1} - \psi_{i-1}^{n-1}) = 0, \\ \\ \frac{\tau}{2\Delta t} (q_i^{n+1} - q_i^{n-1}) + \beta q_i^n + \frac{1}{2\Delta x} (\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n) = 0, \end{array} \right.$$

où les coefficients $\beta_m (m = 0 : 4)$ sont donnés par :

$$\beta_0 = k\Delta t^2, \quad \beta_1 = \frac{b\Delta t^2}{\Delta x^2}, \quad \beta_2 = \alpha_2 = \frac{k\Delta t^2}{2\Delta x}, \quad \beta_3 = \frac{\Delta t}{2}, \quad \beta_4 = \frac{\delta\Delta t^2}{2\Delta x}.$$

La formulation discrète des conditions initiales (5.2) se traduit par :

$$\begin{aligned} \varphi(x_i, 0) &= \varphi_i^0 = (\varphi_0)_i, & \varphi_t(x_i, 0) &= (\varphi_t)_i^0 = (\varphi_1)_i, & \forall x_i \in \Omega_h, \\ \psi(x_i, 0) &= \psi_i^0 = (\psi_0)_i, & \psi_t(x_i, 0) &= (\psi_t)_i^0 = (\psi_1)_i, & \forall x_i \in \Omega_h, \\ \theta(x_i, 0) &= \theta_i^0 = (\theta_0)_i, & q(x_i, 0) &= q_i^0 = (q_0)_i, & \forall x_i \in \Omega_h, \end{aligned} \quad (5.17)$$

et les conditions aux bords discrètes correspondant à (5.3) sont données par :

$$(\varphi_x)_0^n = (\varphi_x)_I^n = \psi_0^n = \psi_I^n = q_0^n = q_I^n. \quad (5.18)$$

En outre, on suppose que $\varphi_{-1}^n = \varphi_0^n = \varphi_1^n$, $\varphi_{I-1}^n = \varphi_I^n = \varphi_{I+1}^n$, $\theta_{-1}^n = \theta_0^n = \theta_1^n$, $\theta_{I-1}^n = \theta_I^n = \theta_{I+1}^n$. Alors, on obtient le système algébrique linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 \Phi^{n+1} = L_1 \Phi^n + P_1 \Psi^n + G_1 \Phi^{n-1}, \\ K_2 \Psi^{n+1} = L_2 \Psi^n + P_2 \Phi^n + G_2 \Psi^{n-1} + F_2 \Theta^n, \\ K_3 \Theta^{n+1} + F_3 \Psi^{n+1} = L_3 \Theta^{n-1} - P_3 Q^n + G_3 \Psi^{n-1}, \\ K_4 Q^{n+1} = L_4 Q^{n-1} - P_4 Q^n - G_4 \Theta^n, \end{array} \right. \quad (5.19)$$

avec

$$\Phi^n = \begin{pmatrix} \varphi_1^n \\ \varphi_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{I-1}^n \end{pmatrix}, \quad \Psi^n = \begin{pmatrix} \psi_1^n \\ \psi_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_{I-1}^n \end{pmatrix}, \quad \Theta^n = \begin{pmatrix} \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{I-1}^n \end{pmatrix}, \quad Q^n = \begin{pmatrix} q_1^n \\ q_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{I-1}^n \end{pmatrix},$$

pour tout $n \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, et les matrices $K_m, L_m, P_m, G_m, F_2, F_3$, ($m = 1 : 4$), sont des matrices carrées de taille $I-1$ définies par :

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{11\rho_1}{12} & \frac{\rho_1}{12} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{\rho_1}{12} & \frac{5\rho_1}{6} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{5\rho_1}{6} & \frac{\rho_1}{12} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\rho_1}{12} & \frac{11\rho_1}{12} \end{pmatrix} = -G_1,$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} \gamma_3 & \gamma_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \gamma_1 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5\alpha_2}{6} & -\frac{\alpha_2}{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{5\alpha_2}{6} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -\frac{\alpha_2}{12} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha_2}{12} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{5\alpha_2}{6} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{\alpha_2}{12} & -\frac{5\alpha_2}{6} & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$\gamma_1 = \frac{\rho_1}{6} + \alpha_1, \quad \gamma_2 = \frac{5\rho_1}{3} - 2\alpha_1, \quad \gamma_3 = \frac{11\rho_1}{6} - \alpha_1,$$

on introduit aussi les paramètres suivants :

$$\omega_1 = \frac{\tau}{2\Delta t}, \quad \omega_2 = \beta, \quad \omega_3 = \frac{1}{2\Delta x}, \quad \lambda_1 = \frac{\rho_3}{2\Delta t}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2\Delta x}, \quad \lambda_3 = \frac{\delta}{4\Delta t\Delta x},$$

et les matrices A_2, B_2, C_2, D_2 et F_2 sont définies par :

$$K_2 = \text{tridiag} \left(\frac{1}{12} (\rho_2 + \beta_3), \frac{5}{6} (\rho_2 + \beta_3), \frac{1}{12} (\rho_2 + \beta_3) \right),$$

$$L_2 = \text{tridiag} \left(\frac{1}{12} (2\rho_2 + 12\beta_1 - \beta_0), \frac{1}{6} (10\rho_2 - 12\beta_1 - 5\beta_0), \frac{1}{12} (2\rho_2 + 12\beta_1 - \beta_0) \right),$$

$$G_2 = \text{tridiag} \left(\frac{1}{12} (-\rho_2 + \beta_3), \frac{5}{6} (-\rho_2 + \beta_3), \frac{1}{12} (-\rho_2 + \beta_3) \right),$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{11\beta_2}{12} & -\frac{5\beta_2}{6} & -\frac{\beta_2}{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{11\beta_2}{12} & 0 & -\frac{5\beta_2}{6} & -\frac{\beta_2}{12} & \ddots & & \vdots \\ \frac{\beta_2}{12} & \frac{5\beta_2}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\beta_2}{12} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -\frac{11\beta_2}{12} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\beta_2}{12} & \frac{5\beta_2}{6} & -\frac{11\beta_2}{12} \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} \frac{11\beta_4}{12} & -\frac{5\beta_4}{6} & -\frac{\beta_4}{12} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{11\beta_4}{12} & 0 & -\frac{5\beta_4}{6} & -\frac{\beta_4}{12} & \ddots & & \vdots \\ \frac{\beta_4}{12} & \frac{5\beta_4}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{5\beta_4}{6} & -\frac{\beta_4}{12} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & -\frac{11\beta_4}{12} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{\beta_4}{12} & \frac{5\beta_4}{6} & -\frac{11\beta_4}{12} \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$K_3 = L_3 = \lambda_1 I_d, \quad (I_d : \text{matrice identité de taille } I - 1)$$

$$P_3 = \text{tridiag}(-\lambda_2, 0, \lambda_2),$$

$$G_3 = \text{tridiag}(-\lambda_3, 0, \lambda_3) = F_3,$$

$$K_4 = L_4 = \omega_1 I_d,$$

$$P_4 = \omega_2 I_d,$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} -\omega_3 & \omega_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\omega_3 & 0 & \gamma_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \omega_3 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\omega_3 & \omega_3 \end{pmatrix}.$$

On désigne par $U = (\Phi, \Psi, \Theta, Q)^t$ alors le système (5.19) est équivalent à :

$$KU^{n+1} = LU^n + PU^{n-1}, \quad (5.20)$$

où, les matrices K , L et P sont des matrices par bloc de taille $4(I-1)$ définies par :

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & F_3 & K_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_4 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & P_1 & 0 & 0 \\ P_2 & L_2 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_3 \\ 0 & 0 & -G_4 & -P_4 \end{pmatrix},$$

et

$$P = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 \end{pmatrix}.$$

5.4 Convergence

Dans cette section, nous devons montrer que la solution approchée de du système (5.8) converge vers la solution exacte de (5.1). En effet, nous prouvons que le schéma (5.8) est consistant et stable, et donc qu'il est convergent.

Nous commençons par prouver la consistance du schéma proposé. Ainsi, pour tout

$1 \leq i \leq I - 1$, nous définissons l'erreur $(\varepsilon_i^n)_j$ avec $j = 1, \dots, 4$, par

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon_i^n)_1 = \frac{\rho_1}{\Delta t^2} (\varphi(x_i, t_{n+1}) - 2\varphi(x_i, t_n) + \varphi(x_i, t_{n-1})) - \frac{k}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \delta_x^2 \varphi(x_i, t_n) \\ \quad - \frac{k}{2\Delta x} (\psi(x_{i+1}, t_n) - \psi(x_{i-1}, t_n)), \\ (\varepsilon_i^n)_2 = \frac{\rho_2}{\Delta t^2} \psi(x_i, t_{n+1}) - 2\psi(x_i, t_n) + \psi(x_i, t_{n-1}) - \frac{b}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \delta_x^2 \psi(x_i, t_n) \\ \quad + \frac{k}{2\Delta x} (\varphi(x_{i+1}, t_n) - \varphi(x_{i-1}, t_n)) + k\psi(x_i, t_n) + \frac{\delta}{2\Delta x} (\theta(x_{i+1}, t_n) - \theta(x_{i-1}, t_n)) \\ \quad + \frac{1}{2\Delta t} (\psi(x_i, t_{n+1}) - \psi(x_i, t_{n-1})), \\ (\varepsilon_i^n)_3 = \frac{\rho_3}{2\Delta t} (\theta(x_i, t_{n+1}) - \theta(x_i, t_{n-1})) + \frac{1}{2\Delta x} (q(x_{i+1}, t_n) - q(x_{i-1}, t_n)) \\ \quad + \frac{\delta}{4\Delta x \Delta t} (\psi(x_{i+1}, t_{n+1}) - \psi(x_{i-1}, t_{n+1})) - \frac{\delta}{4\Delta x \Delta t} (\psi(x_{i+1}, t_{n-1}) - \psi(x_{i-1}, t_{n-1})), \\ (\varepsilon_i^n)_4 = \frac{\tau}{2\Delta t} (q(x_i, t_{n+1}) - q(x_i, t_{n-1})) + \beta q(x_i, t_n) + \frac{1}{2\Delta x} (\theta(x_{i+1}, t_n) - \theta(x_{i-1}, t_n)), \end{array} \right.$$

Lemme 5.4.1. Soit $(\varphi, \psi, \theta, q)$ une solution de (5.1) et $(\varphi^n, \psi^n, \theta^n, q^n)$ solution de (5.8). On définit l'erreur

$$\mathcal{E}_j^n = \max_{1 \leq i \leq I-1} |(\varepsilon_i^n)_j| \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N \quad \text{et } j = 1, \dots, 4.$$

Alors, pour tout $T > 0$, il existe une constante positive C , qui dépend de T et de $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, q_0)$, telle que

$$\max \mathcal{E}_j^n \leq C(T, U_0) (\Delta t^2 + \Delta x^2), \quad \forall t_n \leq T.$$

Démonstration. D'abord, grâce à la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x_i, t_{n+1}) - f(x_i, t_{n-1})}{2\Delta t} &= \frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(x_i, t_n + \Delta t \sigma_1^j) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(x_i, t_n - \Delta t \sigma_0^j), \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_i, t_{n+1}) - 2f(x_i, t_n) + f(x_i, t_{n-1}))}{\Delta t^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}(x_i, t_n + \Delta t \sigma_2^j) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}(x_i, t_n - \Delta t \sigma_3^j), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{i+1}, t_n) - f(x_{i-1}, t_n)}{2\Delta x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ensuite, pour évaluer le terme $(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)^{-1} \delta_x^2 f(x_i, t_n)$, on utilise les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_n) &= \frac{1}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i+1}, t_n) + \frac{5}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i-1}, t_n) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x_i, t_n) + \frac{1}{12 \times 4!} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i + \sigma_{10}^j, t_n) \\ &\quad + \frac{1}{12 \times 4!} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i - \sigma_{11}^j, t_n), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} \delta_x^2 f(x_i, t_n) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x_i, t_n) + \frac{\Delta x^4}{6!} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i + \sigma_8^j, t_n) \\ &\quad + \frac{\Delta x^4}{6!} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i - \sigma_9^j, t_n); \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \delta_x^2 f(x_i, t_n) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t_n) + \left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1} \left(\frac{-\Delta x^4}{720} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i + \Delta x \sigma_8^j, t_n) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta x^4}{720} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i - \Delta x \sigma_9^j, t_n) + \frac{\Delta x^4}{288} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i + \Delta x \sigma_{10}^j, t_n) + \frac{\Delta x^4}{288} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(x_i - \Delta x \sigma_{11}^j, t_n) \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

En utilisant (5.21)-(5.23), on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_{i+1}, t_{n+1}) - f(x_{i-1}, t_{n+1}) - f(x_{i+1}, t_{n-1}) + f(x_{i-1}, t_{n-1})}{4\Delta t \Delta x} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(x_i, t_n) + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial x}(x_i + \Delta x \sigma_{6,1}, t_n + \Delta t \sigma_1^j) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial x}(x_i - \Delta x \sigma_{7,1}, t_n + \Delta t \sigma_1^j) + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial x}(x_i + \Delta x \sigma_{6,2}, t_n - \Delta t \sigma_0^j) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial t^3 \partial x}(x_i - \Delta x \sigma_{7,2}, t_n - \Delta t \sigma_0^j) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n), \end{aligned} \quad (5.25)$$

avec $0 < \sigma_p^j < 1$.

En utilisant (5.21)-(5.25) dans $\varepsilon_i^n = (\varepsilon_i^n)_1 + (\varepsilon_i^n)_2 + (\varepsilon_i^n)_3 + (\varepsilon_i^n)_4$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i^n &= \frac{\rho_1 \Delta t^2}{24} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}(x_i, t_n + \Delta t \sigma_2^j) + \frac{\rho_1 \Delta t^2}{24} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}(x_i, t_n - \Delta t \sigma_3^j) \\
 &+ k \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2\right)^{-1} \left(\frac{-\Delta x^4}{720} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6}(x_i + \Delta x \sigma_8^j, t_n) - \frac{\Delta x^4}{720} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6}(x_i - \Delta x \sigma_9^j, t_n) \right. \\
 &+ \left. \frac{\Delta x^4}{288} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6}(x_i + \Delta x \sigma_{10}^j, t_n) + \frac{\Delta x^4}{288} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6}(x_i - \Delta x \sigma_{11}^j, t_n) \right) \\
 &- \frac{k \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) - \frac{k \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n) + \frac{\rho_2 \Delta t^2}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4}(x_i, t_n + \Delta t \sigma_2^j) \\
 &+ b \left(1 + \frac{1}{12} \delta_x^2\right)^{-1} \left(\frac{-\Delta x^4}{720} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6}(x_i + \Delta x \sigma_8^j, t_n) - \frac{\Delta x^4}{720} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6}(x_i - \Delta x \sigma_9^j, t_n) \right. \\
 &+ \left. \frac{\Delta x^4}{288} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6}(x_i + \Delta x \sigma_{10}^j, t_n) + \frac{\Delta x^4}{288} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6}(x_i - \Delta x \sigma_{11}^j, t_n) \right) \\
 &+ \frac{\rho_2 \Delta t^2}{24} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4}(x_i, t_n - \Delta t \sigma_3^j) + \frac{k \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) + \frac{k \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n) \\
 &+ \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}(x_i, t_n + \Delta t \sigma_1^j) + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}(x_i, t_n - \Delta t \sigma_0^j) \\
 &+ \frac{\delta \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) + \frac{\delta \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n) \\
 &+ \frac{\rho_3 \Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}(x_i, t_n + \Delta t \sigma_1^j) + \frac{\rho_3 \Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}(x_i, t_n - \Delta t \sigma_0^j) \\
 &+ \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n) \\
 &+ \frac{\delta \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^3 \partial x}(x_i + \Delta x \sigma_{6,1}^j, t_n + \Delta t \sigma_1^j) + \frac{\delta \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^3 \partial x}(x_i - \Delta x \sigma_{7,1}^j, t_n + \Delta t \sigma_1^j) \\
 &+ \frac{\delta \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^3 \partial x}(x_i + \Delta x \sigma_{6,2}^j, t_n - \Delta t \sigma_0^j) + \frac{\delta \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^3 \partial x}(x_i - \Delta x \sigma_{7,2}^j, t_n - \Delta t \sigma_0^j) \\
 &+ \frac{\delta \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) + \frac{\delta \Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n) \\
 &+ \frac{\tau \Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(x_i, t_n + \Delta t \sigma_1^j) + \frac{\tau \Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(x_i, t_n - \Delta t \sigma_0^j) \\
 &+ \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}(x_i + \Delta x \sigma_4^j, t_n) + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}(x_i - \Delta x \sigma_5^j, t_n). \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

On désigne par S_1, S_2 et S_3 les quantités suivantes :

$$S_1 = \max_{x,t} \left[\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3}(x,t) + \frac{\rho_3}{6} \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}(x,t) + \frac{\delta}{3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^3 \partial x}(x,t) \right. \\ \left. + \frac{\tau}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial t^3}(x,t) + \frac{\rho_1}{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4}(x,t) + \frac{\rho_2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4}(x,t) \right], \quad (5.27)$$

$$S_2 = \max_{x,t} \left[\frac{k}{6} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}(x,t) + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x,t) \right) + \frac{\delta}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial t \partial x^3}(x,t) \right. \\ \left. + \frac{\delta + 1}{6} \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^3}(x,t) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}(x,t) \right], \quad (5.28)$$

$$S_3 = \max_{x,t} \left[\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6}(x,t) + \frac{7b}{720} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6}(x,t) \right]. \quad (5.29)$$

Ensuite, en utilisant (5.21)-(5.23), on déduit que

$$\max_{1 \leq i \leq I-1} \varepsilon_i^n \leq S_1 \Delta t^2 + [S_2 + \Delta x^2 S_3] \Delta x^2. \quad (5.30)$$

□

Maintenant, nous cherchons à prouver la stabilité du schéma (5.8). Pour cela, nous utilisons la formule (5.20), qui est équivalente à (5.19), que nous réécrivons sous la forme suivante :

$$\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{M} \mathcal{V}^n, \quad (5.31)$$

où $\mathcal{V}^n = (U^n, U^{n-1})^t$, et \mathcal{M} est une matrice carrée de taille $(8I - 8)$ donnée par

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} K^{-1}L & K^{-1}P \\ I_d & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

I_d : matrice identité de taille $(4I - 4)$.

Maintenant, nous énonçons et prouvons le théorème suivant qui présente la stabilité de (5.20) et par conséquent du schéma (5.8).

Théorème 5.4.1. *Soient Δt et Δx très petits et supposons que la condition de stabilité CFL (Courant Friedrichs Lewy) est vérifiée,*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = c \leq c_0 \lll 1, \quad c_0 > 0.$$

(Cette condition CFL n'est pas optimale mais elle est suffisante pour rendre le schéma convergent). Alors, le le rayon spectral de la matrice \mathcal{M} vérifie $\rho(\mathcal{M}) \leq 1$.

Démonstration. On suppose que $\rho(\mathcal{M}) > 1$. Alors, il existe $\lambda \neq 0$ et $X = (x_1, \dots, x_{8I-8})^t \neq 0_{\mathbb{R}^{8I-8}}$ tel que

$$\mathcal{M}X = \lambda X, \quad \text{et } |\lambda| > 1. \quad (5.33)$$

Maintenant, on désigne par $X_1 = (x_1, \dots, x_{4I-4})^t$ et $X_2 = (x_{4I-3}, \dots, x_{8I-8})^t$. Par conséquent, on peut écrire l'équation (5.33) comme suit :

$$\begin{cases} K^{-1}LX_1 + K^{-1}PX_2 = \lambda X_1, \\ X_1 = \lambda X_2. \end{cases} \quad (5.34)$$

En combinant (5.34)₁ et (5.34)₂, on obtient

$$\lambda K^{-1}LX_2 + K^{-1}PX_2 = \lambda^2 X_2, \quad (5.35)$$

ou de manière équivalente,

$$\lambda LX_2 + PX_2 = \lambda^2 KX_2. \quad (5.36)$$

Puisque nous avons $\|X_2\| \neq 0$ (grâce à (5.34)₂), $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0_{\mathbb{R}^{8I-8}}$, donc on conclut que

$$|\lambda| \|K\| \leq \|L\| + \frac{1}{|\lambda|} \|P\|, \quad (5.37)$$

où nous avons désigné par

$$\|K\| = \|K\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, 8I-8\}} \sum_{j \in \{1, \dots, 8I-8\}} |K_{i,j}|.$$

Maintenant, calculons les normes des matrices K, L et P , nous obtenons

$$\|K\| = \max(\rho_1, \rho_2 + \beta_3, 2\lambda_3 + \lambda_1, \omega_1) = 2\lambda_3 + \lambda_1,$$

$$\|L\| \leq 3\lambda_2,$$

et

$$\|P\| \leq 2\lambda_3 + \lambda_1.$$

Par conséquent, l'estimation (5.37) donne

$$|\lambda| \leq \frac{\|L\|}{\|K\|} + \frac{1}{|\lambda|} \frac{\|P\|}{\|K\|} \leq \frac{3\lambda_2}{2\lambda_3 + \lambda_1} + \frac{1}{|\lambda|}, \quad (5.38)$$

et nous avons

$$\frac{3\lambda_2}{2\lambda_3 + \lambda_1} = \frac{\frac{3}{2\Delta x}}{\frac{\delta}{4\Delta t \Delta x} + \frac{\rho_3}{2\Delta t}} = \frac{3\Delta t}{\delta + \rho_3 \Delta x} \leq \frac{3\Delta t}{2\delta} \ll 1, \quad (5.39)$$

ce qui est une contradiction. Alors, $\rho(\mathcal{M}) \leq 1$. \square

5.5 Mise en oeuvre numérique

Pour résoudre le système (5.8), nous décrivons l'algorithme suivant.

5.5.1 Algorithme

Pour résoudre le système (5.8), nous adoptons les étapes suivantes :

- 1/ Initialiser T, I, c , les pas et le nombre d'itération.
- 2/ Insérer les paramètres et créer les matrices.
- 3/ Insérer Les conditions aux bords et initiales.
- 4/ Création d'un vecteur $U = (\varphi, \psi, \theta, q)$ solution du problème.
- 5/ Résolution d'un système $U^{n+1} = \mathcal{M}U^n$.
- 6/ Calculer l'énergie.

5.5.2 Résultats numériques et commentaires

Pour vérifier le comportement asymptotique de la solution du système de Timoshenko (5.1), on considère $I = 26, T = 35, c = 0,05$ et pour les conditions initiales suivantes, on considère :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \cos(\pi x); \quad \psi_0(x) = 0; \quad \theta_0(x) = -\left(\frac{2\delta}{\rho_3}\right) \cos(2\pi x); \\ \varphi_t(x, 0) &= 0; \quad \psi_1(x) = \sin(2\pi x); \quad q_0(x) = 0; \end{aligned} \quad (5.40)$$

Pour les compilations numériques suivantes, nous avons choisis les paramètres proprement tel que le nombre de stabilité défini par (5.4) est nul , par exemple :

$$b = \beta = \rho_3 = 1, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad k = \rho_1 = \rho_2 = 2, \quad \tau = 3.$$

Dans les figures 5.1-5.4, nous avons obtenu l'existence des fonctions φ, ψ, θ et q , respectivement, qui convergent vers le zéro.

Dans la figure 5.5 nous avons obtenu numériquement une décroissance exponentielle de l'énergie de la solution de Timoshenko.

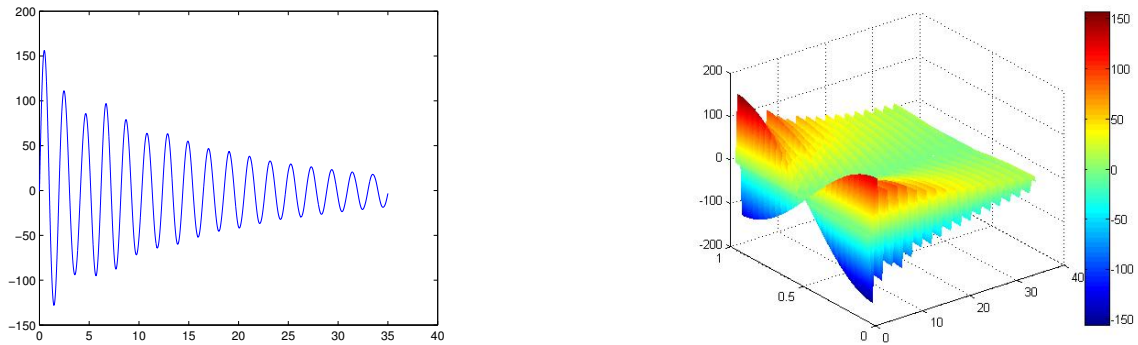


FIGURE 5.1 – Le déplacement φ

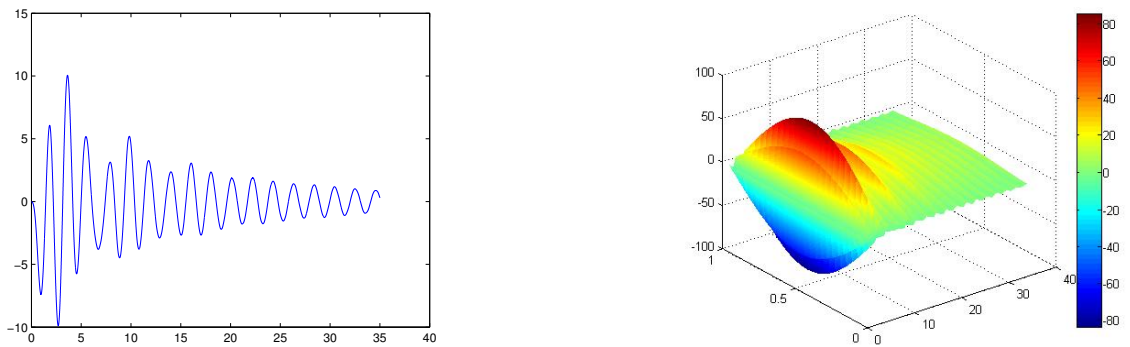


FIGURE 5.2 – L'angle de rotation ψ

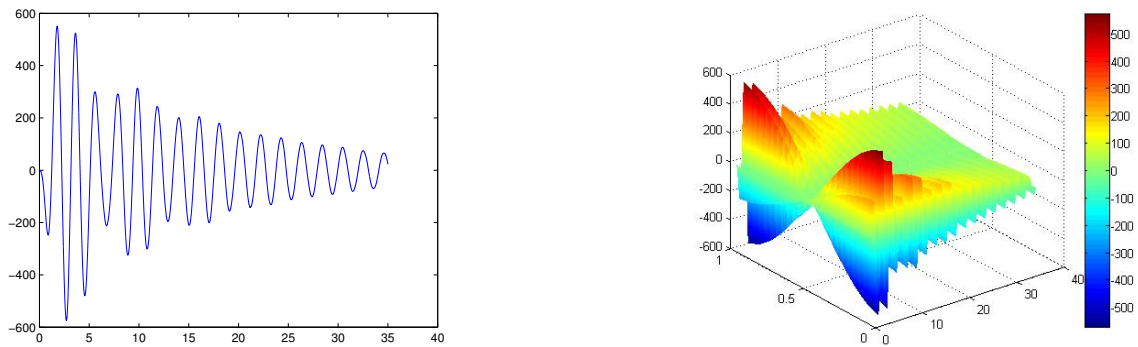


FIGURE 5.3 – La température θ

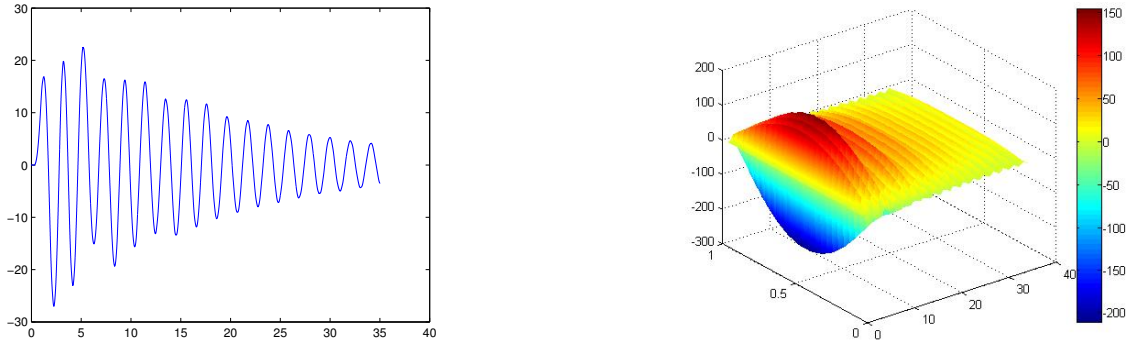


FIGURE 5.4 – Le flux de chaleur q

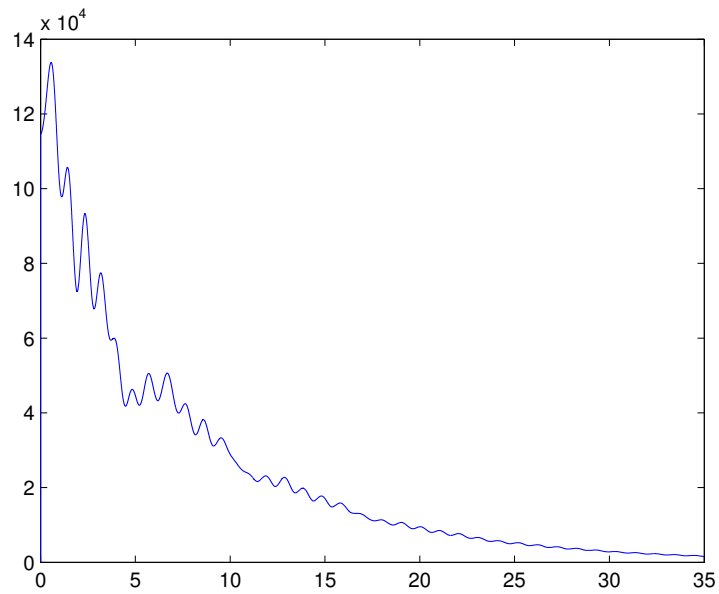


FIGURE 5.5 – L'énergie E

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons établi quelques résultats essentiels, nous avons montré que le système de Timonchenko et le système élastique poreux, perturbés avec un terme thermo-visco-élastique $(\int_0^t g(t-s)\theta_{xx}(\cdot, s)ds)$ sont exponentiellement (resp-polynomialement) stable si g décroît exponentiellement (resp-polynomialement) et pour chaque système la stabilité obtenue dépend d'un nouveau nombre de stabilité. Aussi, nous avons prouvé dans le chapitre 3 que le système de Timoshenko couplé avec deux effets thermiques (où la conduction thermique est donnée par la loi de Cattaneo) est exponentiellement stable indépendamment des valeurs des paramètres du système. Les résultats trouvés dans les chapitres 2, 3 et 4 sont basés sur la construction de trois nouvelles fonctionnelles de Lyapunov, chacune de ces fonctionnelles équivalente à la fonctionnelle énergie associée au système étudié et qui décroît d'une manière exponentielle. Enfin, dans le dernier chapitre nous avons proposé un schéma numérique de type différences finis pour un système de Timoshenko avec dissipation de frottement et des effets thermiques. Nous avons confirmé nos résultats théoriques par des simulations numériques.

Perspectives :

Les résultats obtenus nous encouragent à étendre notre étude à une large classe de mécanismes de dissipation :

En thermoélasticité de type III, nous étudierons les systèmes (2.6), (4.6) du chapitres 2 et 4 avec des hypothèses faibles sur le noyau du type de mémoire g .

Pour le système (3.1) du chapitre 3, nous étudierons le problème (3.1) avec d'autres lois pour le flux de la chaleur, par exemple la loi de Coleman-Gurtin et nous souhaitons d'obtenir des résultats de stabilité similaires à ceux obtenus par la loi de Cattaneo.

Pour l'étude numérique du système (5.1) du chapitre 5, nous examinerons le même système avec une dissipation de type de mémoire au lieu de la dissipation de frottement ψ_t et essaierons de trouver des résultats de décroissance de l'énergie.

Bibliographie

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier ; *Sobolev spaces*. Academic Press (2003).
- [2] D. S. Almeida Júnior, M. L. Santos and J. E. Muñoz Rivera ; *Stability to weakly dissipative Timoshenko systems*. Math. Meth. Appl. Sci., vol.**36**, No.**14**, 1965–1976 (2013).
- [3] D. S. Almeida Júnior, M. L. Santos and J. E. Muñoz Rivera ; *Stability to 1-D thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force*. Z. Angew. Math. Phys., vol.**65**, No.**6**, 1233–1249 (2014).
- [4] M. O. Alves, A. H. Caixeta, M. A. Jorge Silva, J. H. Rodrigues and D. S. Almeida Júnior ; *On a Timoshenko system with thermal coupling on both the bending moment and the shear force*. J. Evol. Equ., vol.**20**, No.**1**, 295–320 (2020).
- [5] M. S. Alves, M. A. Jorge Silva, T. F. Ma and J. E. Muñoz Rivera ; *Invariance of decay rate with respect to boundary conditions in thermoelastic Timoshenko systems*. Z. Angew. Math. Phys., vol.**67**, No.**3**, 70 (2016).
- [6] F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera and R. Racke ; *Energy decay for Timoshenko systems of memory type*. J. Differ. Equ., vol.**194**, No.**1**, 82–115 (2003).
- [7] F. Ammar-Khodja, S. Kerbal and A. Soufyane ; *Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam*. Journal of mathematical analysis and applications, vol.**327**, No.**1**, 525–538 (2007).
- [8] T. A. Apalara, S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa ; *Energy decay in thermoelasticity type III with viscoelastic damping and delay term*. Electron. J. Differ. Equ., vol.**2012**, No.**128**, 1–15 (2012).
- [9] T. A. Apalara, S. A. Messaoudi and A. A. Keddi ; *On the decay rates of Timoshenko system with second sound*. Math. Meth. Appl. Sci., vol.**39**, No.**10**, 2671–2684 (2016).
- [10] T. A. Apalara ; *Exponential decay in one-dimensional porous dissipation elasticity*. Q. J. Mech. Appl. Math., vol.**70**, No.**4**, 363–372 (2017).

-
- [11] T. A. Apalara; *General stability of memory-type thermoelastic Timoshenko beam acting on shear force*. Cont. Mech. Thermo., vol.**30**, No.**2**, 291–300 (2018).
- [12] T. A. Apalara; *On the stability of porous-elastic system with microtemperatures*. J. Thermal Stresses, vol.**42**, No.**2**, 265–278 (2019).
- [13] T. A. Apalara; *On the stabilization of a memory-type porous thermoelastic system*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., vol.**43**, No.**2**, 1433–1448 (2020).
- [14] M. A. Ayadi, A. Bchatnia, M. Hamouda and S. Messaoudi; *General decay in a Timoshenko type system with thermoelasticity with second sound*. Adv. Nonlinear Anal., vol.**4**, 263–284 (2015).
- [15] H. Brezis; *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Masson, Paris (1983).
- [16] P. S. Casas and R. Quintanilla; *Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures*. International Journal of Engineering Science, vol.**32**, No.**6**, 652–658 (2005).
- [17] P. S. Casas and R. Quintanilla; *Exponential decay in one-dimensional porous-thermo-elasticity*. Mech. Res. Commun., vol.**43**, No.**1-2**, 33–47 (2005).
- [18] C. Cattaneo; *Sulla conduzione del calore*. Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena., vol.**3**, 83–101 (1948).
- [19] D. S. Chandrasekharaiah; *A note on the uniqueness of solution in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipation*. Journal of Elasticity, vol.**43**, No.**3**, 279–283 (1996).
- [20] D. S. Chandrasekharaiah; *Complete solutions in the theory of thermoelasticity without energy dissipation*. Mechanics Research Communications, vol.**24**, No.**6**, 625–630 (1997).
- [21] D. S. Chandrasekharaiah; *Hyperbolic thermoelasticity : a review of recent literature*. Appl. Rech. Rev., vol.**51**, 705-729 (1998).
- [22] S. D. Cicco and M. Diaco; *A theory of thermoelastic materials with voids without energy dissipation*. Journal of Thermal Stresses, vol.**25**, No.**5**, 493–503 (2002).
- [23] B. D. Coleman, M. Fabrizio and D. R. Owen; *On the thermodynamics of second sound in dielectric crystals*. Archive for Rational Mechanics and Analysis., vol.**80**, No.**2**, 135–158 (1982).
- [24] S. C. Cowin and J. W. Nunziato; *Linear elastic materials with voids*. Journal of Elasticity, vol.**13**, No.**2**, 125–147 (1983).
- [25] S. C. Cowin; *The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids*. Journal of Elasticity, vol.**15**, No.**2**, 185–191 (1985).

-
- [26] P. R. De Lima and H. D. Fernández Sare ; *General condition for exponential stability of thermoelastic Bresse systems with Cattaneo's law*. Commun. Pure Appl. Anal., vol.**19**, No.**7**, 3575–3596 (2020).
- [27] F. Dell'Oro and V. Pata ; *On the stability of Timoshenko systems with Gurtin–Pipkin thermal law*. J. Differential Equations, vol.**257**, No.**2**, 523–548 (2014).
- [28] A. Djebabla and N. Tatar ; *Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermo-viscoelastic damping*. J. Dyn. Control Syst., vol.**16**, No.**2**, 189–210 (2010).
- [29] A. Djebabla and N. Tatar ; *Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermal effect with an oscillating kernel*. Math. Comput. Modell., vol.**54**, No.**1-2**, 301–314 (2011).
- [30] A. Djebabla and N. Tatar ; *Exponential stabilization of the full von Kármán beam by a thermal effect and a frictional damping*. Georgian Mathematical Journal, vol.**20**, No.**3**, 427–438 (2013).
- [31] F. Djellali, S. Labidi and F. Taallah ; *General decay of porous elastic system with thermo-viscoelastic damping*. Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. vol.**9**, No.**1**, 31–43 (2021). <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2021-9-1-31-43>
- [32] F. Djellali, S. Labidi and F. Taallah ; *Exponential stability of thermoelastic Timoshenko system with Cattaneo's law*. Annali Dell'Universita Di Ferrara. vol.**67**, 43–57 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11565-021-00360-y>
- [33] F. Djellali, S. Labidi and F. Taallah ; *General decay for a viscoelastic-type Timoshenko system with thermoelasticity of type III*. Applicable Analysis (2021). <https://doi.org/10.1080/00036811.2021.1967329>
- [34] A. Fareh and S. A. Messaoudi ; *Energy decay for a porous thermoelastic system with thermoelasticity of second sound and with a non-necessary positive definite energy*. Appl. Math. Comput., vol.**293**, 493–507 (2017).
- [35] L. H. Fatori, J. E. Muñoz Rivera ; *Energy decay for hyperbolic thermoelastic systems of memory type*. Quart. Appl. Math., vol.**59**, No.**3**, 441–458 (2001).
- [36] H. D. Fernández Sare and R. Racke ; *On the stability of damped Timoshenko systems : Cattaneo versus Fourier law*. Arch. Rational Mech. Anal., vol.**194**, No.**1**, 221–251 (2009).
- [37] K. Ghennam and A. Djebabla ; *Energy decay result in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with weak damping*. Math. Methods Appl. Sci., vol.**41**, No.**10**, 3868–3884 (2018).
- [38] M. A. Goodman and S. C. Cowin ; *A continuum theory for granular materials*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol.**44**, No.**4**, 249–266 (1972).
- [39] A. E. Green and P. M. Naghdi ; *A re-examination of the basic postulates of thermomechanics*. Proc. Royal. Society London A, vol.**432**, No.**1885**, 171–194 (1991).

-
- [40] A. E. Green and P. M. Naghdi; *On undamped heat waves in an elastic solid*. J. Thermal Stresses, vol.**15**, No.**2**, 253–264 (1992).
- [41] A. E. Green and P. M. Naghdi; *Thermoelasticity without energy dissipation*. J. Elast., vol.**31**, No.**3**, 189–208 (1993).
- [42] A. Guesmia and S. A. Messaoudi; *On the control of a viscoelastic damped Timoshenko-type system*. Appl. Math. Comput., vol.**206**, No.**2**, 589–597 (2008).
- [43] A. Guesmia and S. A. Messaoudi; *General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping*. Math. Meth. Appl. Sci., vol.**32**, No.**16**, 2102–2122 (2009).
- [44] D. Ieşan and R. Quintanilla; *On thermoelastic bodies with inner structure and microtemperatures*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.**354**, No.**1**, 12–23 (2009).
- [45] M. S. Ismail and F. Mosally; *A fourth order finite difference method for the good Boussinesq equation*. Abstract and Appl. Anal., vol.**2014**, (2014).
- [46] M. Kafini, S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa; *Energy decay rates for a Timoshenko type system of thermoelasticity of type III with constant delay*. Appl. Anal., vol.**93**, No.**6**, 1201–1216 (2014).
- [47] M. Kafini, S. A. Messaoudi, M. I. Mustafa and T. A. Apalara; *Well-posedness and stability results in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with delay*. Z. Angew. Math. Phys., vol.**66**, No.**4**, 1499–1517 (2015).
- [48] J. U. Kim and Y. Renardy; *Boundary control of the Timoshenko beam*. SIAM J. Control Optim., vol.**25**, No.**6**, 1417–1429 (1987).
- [49] I. Lacheheb, S. A. Messaoudi and M. Zahri; *Asymptotic stability of porous-elastic system with thermoelasticity of type III*. Arab. J. Math., 1–19 (2021).
- [50] M. C. Leseduarte, A. Magana and R. Quintanilla; *On the time decay of solutions in porous-thermo-elasticity of type II*. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B., vol.**13**, No.**2**, 375–391 (2010).
- [51] J. L. Lions; *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris (1969).
- [52] Z. Liu and S. Zheng; *Semigroups associated with dissipative systems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (1999).
- [53] A. Magaña and R. Quintanilla; *On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials*. Int. J. solids struct., vol.**43**, No.**11-12**, 3414–3427 (2006).
- [54] S. A. Messaoudi and A. Soufyane; *Boundary stabilization of solutions of a nonlinear system of Timoshenko type*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, vol.**67**, No.**7**, 2107–2121 (2007).

-
- [55] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa; *On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams*. Nonlinear Differential Equations and Applications, vol.**15**, No.**6**, 655–671 (2008).
- [56] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari; *Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III*. J. Math. Anal. Appl., vol.**348**, No.**1**, 298–307 (2008).
- [57] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari; *Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history*. Journal of mathematical analysis and applications, vol.**360**, No.**2**, 459–475 (2009).
- [58] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari; *Energy decay in a Timoshenko-type system with history in thermoelasticity of type III*. Adv. Differ. Equ., vol.**14**, No.**3/4**, 375–400 (2009).
- [59] S. A. Messaoudi, M. Pokojovy and B. Said-Houari; *Nonlinear damped Timoshenko systems with second sound-global existence and exponential stability*. Math. Meth. Appl. Sci., vol.**32**, No.**5**, 505–534 (2009).
- [60] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa; *A stability result in a memory-type Timoshenko system*. Dyn. Syst. Appl., vol.**18**, No.**3**, 457 (2009).
- [61] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa; *On the stabilization of the Timoshenko system by a weak nonlinear dissipation*. Math. Meth. Appl. Sci., vol.**32**, No.**4**, 454–469 (2009).
- [62] S. A. Messaoudi and A. Fareh; *General decay for a porous thermoelastic system with memory : the case of equal speeds*. Nonlinear Anal. : Theo. Meth. Appl., vol.**74**, No.**18**, 6895–6906 (2011).
- [63] S. A. Messaoudi and A. Fareh; *General decay for a porous-thermoelastic system with memory : the case of nonequal speeds*. Acta Math. Sci., vol.**33**, No.**1**, 23–40 (2013).
- [64] S. A. Messaoudi and A. Fareh; *Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with different wave-propagation speeds*. Arab. J. Math., vol.**2**, No.**2**, 199–207 (2013).
- [65] S. A. Messaoudi and T. A. Apalara; *General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III*. Arab. J. Math. Sci., vol.**20**, No.**2**, 213–232 (2014).
- [66] S. A. Messaoudi and T. A. Apalara; *Asymptotic stability of thermoelasticity type III with delay term and infinite memory*. IMA J. Math. Control Inf., vol.**32**, No.**1**, 75–95 (2015).
- [67] A. R. Mitchell and D. F. Griffiths; *The finite difference method in partial differential equations*. Wiley, New York, USA (1980).
- [68] A. Mounir and A. Soufyane; *General decay for a porous thermoelastic system with a memory*. Appl. Anal., vol.**98**, No.**3**, 638–650 (2019).

-
- [69] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke; *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability*. J. Math. Anal. Appl., vol.**276**, No.**1**, 248–278 (2002).
- [70] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke; *Global stability for damped Timoshenko systems*. Discrete Cont. Dyn. Syst A., vol.**9**, No.**6**, 1625–1639 (2002).
- [71] J. E. Muñoz Rivera and R. Racke; *Timoshenko systems with indefinite damping*. J. Math. Anal. Appl., vol.**341**, No.**2**, 1068–1083 (2008).
- [72] J. E. Muñoz Rivera and H. D. Fernández Sare; *Stability of Timoshenko systems with past history*. J. Math. Anal. Appl., vol.**339**, No.**1**, 482–502 (2008).
- [73] B. V. Noumerov; *A method of extrapolation of perturbations*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society., vol.**84**, 592–601 (1924).
- [74] B. V. Noumerov; *Note on the numerical integration of $d^2x/dt^2 = f(x,t)$* . Astronomische Nachrichten., vol.**230**, 359–364 (1927).
- [75] J. W. Nunziato and S. C. Cowin; *A nonlinear theory of elastic materials with voids*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol.**72**, No.**2**, 175–201 (1979).
- [76] P. X. Pamplona, J. E. Muñoz and R. Quintanilla; *Stabilization in elastic solids with voids*. J. Math. Anal. Appl., vol.**350**, No.**1**, 37–49 (2009).
- [77] A. Pazy; *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York (1983).
- [78] R. Quintanilla; *Instability and non-existence in the nonlinear theory of thermoelasticity without energy dissipation*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, vol.**13**, No.**2**, 121–129 (2001).
- [79] R. Quintanilla; *Structural stability and continuous dependence of solutions of thermoelasticity of type III*. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B, vol.**1**, No.**4**, 463–470 (2001).
- [80] R. Quintanilla; *Existence in thermoelasticity without energy dissipation*. Journal of thermal stresses, vol.**25**, No.**2**, 195–202 (2002).
- [81] R. Quintanilla; *Thermoelasticity without energy dissipation of materials with microstructure*. Applied Mathematical Modelling, vol.**26**, No.**12**, 1125–1137 (2002).
- [82] R. Quintanilla and R. Racke; *Stability in thermoelasticity of type III*. Discrete and Continuous Dynamical Systems-B, vol.**3**, No.**3**, 383–400 (2003).
- [83] R. Quintanilla; *Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity*. Appl. Math. Lett., vol.**16**, No.**4**, 487–491 (2003).
- [84] C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos and N. N. O. Castro; *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*. Appl. Math. Lett., vol.**18**, No.**5**, 535–541 (2005).

-
- [85] M. L. Santos, D. S. Almeida Júnior, J. E. Muñoz Rivera; *The stability number of the Timoshenko system with second sound*. J. Differ. Equ., vol.**253**, No.**9**, 2715–2733 (2012).
- [86] M. L. Santos; *Bresse system in thermoelasticity of type III acting on shear force*. Journal of Elasticity, vol.**125**, No.**2**, 185–216 (2016).
- [87] A. Soufyane; *Stabilisation de la poutre de Timoshenko*. C. R. Acad. Sci. Sér. 1 Math., vol.**328**, No.**8**, 731–734 (1999).
- [88] A. Soufyane and A. Whebe; *Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping*. Electron. J. Differ. Equ., vol.**2003**, No.**29**, 1–14 (2003).
- [89] A. Soufyane; *Energy decay for porous-thermo-elasticity systems of memory type*. Applicable Analysis, vol.**87**, No.**4**, 451–464 (2008).
- [90] A. Soufyane, A. Mounir and M. Chacha; *Boundary stabilization of memory type for the porous-thermo-elasticity system*. Abstract and Applied Analysis, vol.**2009**, 1–17 (2009).
- [91] A. Soufyane, A. Mounir, T. Aouam and M. Chacha; *General decay of solutions of a linear one-dimensional porous-thermoelasticity system with a boundary control of memory type*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, vol.**72**, No.**11**, 3903–3910 (2010).
- [92] S. P. Timoshenko; *LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Phil. Mag., vol.**41**, No.**245**, 744–746 (1921).
- [93] B. Wang, T. Sun and D. Liang; *The conservative and fourth-order compact finite difference schemes for regularized long wave equation*. J. Comput. Appl. Math., vol.**356**, 98–117 (2019).
- [94] L. Wenjun and C. Miaomiao; *Well-posedness and exponential decay for a porous thermoelastic system with second sound and a time-varying delay term in the internal feedback*. Continuum Mech. Therm., vol.**29**, No.**3**, 731–746 (2017).
- [95] G. Zhen and X. Shusen; *Fourth-order alternating direction implicit compact finite difference schemes for two-dimensional Schrödinger equations*. Appl. Numerical Math., vol.**61**, No.**4**, 593–614 (2011).