وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار

-عنابة-

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2020/2021

DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA SOLUTION D'UNE G-ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT À LA CONDITION INITIALE

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option

Modélisation mathématique-Probabilités et Statistique

Par

BOUGHERRA Rania

DIRECTEUR DE THÈSE : BOUTABIA Hacène Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	REMITA Md Riad	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	BENCHETTAH Azzedine	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	AISSAOUI Md Zine	Prof.	UNIV. DE GUELMA
EXAMINATEUR :	MERZOUGUI Mouna	M.C.A.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	ARRAR Nawel Khadija	M.C.A.	U.B.M. ANNABA

Table des matières

Remerciements

Emporté par le déluge de symboles et d'entités abstraites qu'est une thèse de mathématiques, le lecteur profane se figure parfois que le cerveau d'un doctorant doit être bien exceptionnel pour s'atteler à de si étranges productions, et que seuls des esprits singuliers peuvent maîtriser les secrets de cette discipline et jouir de sa froide beauté. Avant d'être un mémoire affublé d'un titre aux accents exotiques, une thèse est pourtant le résultat d'un effort collectif et des conseils savamment distillés.

Louange à mon ***Dieu****, le tout Puissant, le Miséricordieux, qui m'a donné la force, la volonté et la patience pour pouvoir aboutir ce modeste travail.*

Le travail de thèse s'achevant, il vient le moment de remerciements. Beaucoup de personnes ont contribué peu ou prou au succès de cette thèse, et je tiens à saisir cette occasion unique pour les remercier. Mille excuses à ceux où celles que je vais oublier, mais je vais quand même tâcher de faire de mon mieux !

En écrivant ces lignes, mes premières pensées ne sauraient être destinées à nulles autres qu'à mon directeur de thèse Monsieur Hacène Boutabia, Professeur à l'université Badji Mokhtar d'Annaba, l'instigateur de cette étude. Je voudrais tout d'abord le remercier pour la confiance, dont j'espère avoir été digne, qu'il m'a accordé. Cette confiance m'a permis de mettre le pied à l'étrier de la recherche, il m'a suivie et soutenue dès mon master de recherche avec une grande gentillesse et disponibilité, malgré ses nombreuses et lourdes obligations et responsabilités. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude, pour ses encouragements et ses conseils avisés, ses qualités tant humaines que scientifiques furent pour moi d'un apport inestimable. Je le remercie également pour m'avoir montré l'exemple dans la préparation et la rédaction de mes papiers et travaux.

Je souhaiterais exprimer tous mes respectueux remerciements à l'ensemble des membres de mon jury : Mesdames et Messieurs.

Monsieur Md. Riad Remita, Professeur à l'université Badji Mokhtar d'Annaba, me fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je tiens à lui adresser ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier également Monsieur Azzedine Benchettah, Professeur à l'université Badji Mokhtar d'Annaba, Monsieur Md. Zine Aissaoui, Professeur à l'université de Guelma, Madame Mouna Merzougui et Madame Arrar Nawel, Maîtres de conférences classe A à l'université Badji Mokhtar d'Annaba, de bien vouloir accepter de juger ce travail en qualité de rapporteurs et d'examinateurs. Je suis convaincue que leurs connaissances et leurs regards respectifs vont beaucoup m'apporter.

Mes remerciements sont également adressés à tous les membres du département de mathématiques de l'université Badji Mokhtar Annaba aussi que les membres du laboratoire de probabilités et statistique LaPS dont je fais partie. Je suis reconnaissante au personnel administratif qui m'a énormément aidé dans les tâches administratives.

Les plus grandes leçons ne sont pas tirées d'un livre, mais d'une enseignante telle que Madame Redjil Amel, Docteur en mathématiques à l'université Badji Mokhtar d'Annaba. Je tiens à lui remercier pour son enseignement, sa réactivité, sa générosité ainsi que pour ses conseils et ses commentaires toujours très pertinents qui ont pu faire avancer mes travaux lors de ma thèse. C'est toujours un plaisir d'échanger avec elle au détour d'un couloir.

Je ne serai pas sincère si je n'adresse pas tous mes sentiments de respect et tous mes remerciements à tous mes professeurs et enseignants depuis que j'ai pris le stylo dans la main.

À titre plus amical, à ma chère amie Manel Belksier. Merci pour toutes ces belles années d'amitiés. Je me suis senti soutenue par toutes tes petites attentions, tes appels, tes messages. Ce qui est très important à mes yeux. Je suis très heureuse de ce lien que le nous continuons à renforcer au fil de tous ces merveilleux moments partagés.

Je réserve un immense remerciement et une reconnaissance particulière à mes parants pour la confiance qui me l'ont apporté dont j'avais besoin, pour leur soutien inconditionnel, tant pratique qu'affectif, leur patience inépuisable et leurs prières pour moi « vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle *de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fière».*

Ces remerciements ne peuvent s'achever sans remercier mes frères, mes amies ainsi que toute ma famille, qui trouveront ici toute ma reconnaissance pour leurs aides et leurs encouragements pour la réalisation de cette thèse.

Résumé(en arabe)

تركز هذه الأطروحة على دراسة قابلية التفاضل لحل G- معادلة تفاضلية ستوكستكية ذات البعد d نسبة للشرط الأولي.

أولا، نبرهن على وجود وتفرد حل نظام موصوف من G- معادلتين تفاضليتين ستوكستكيتين ذواتا البعد d.

ثانيا، نقدم الG-معادلة تفاضلية ستوكستكية مصفوفية للمشتق.

في النهاية، يتم إثبات النتيجة الوسيطة التي تشير إلى أن المشتق قابل للعكس وأن عكسه يحقق - G معادلة تفاضلية ستوكستكية مصفوفية معينة.

هذا يوسع النتائج التي حصل عليها لين في عام 2013، في الحالة أحادية البعد.

الكلمات المفتاحية :

G-حركة براونية، **G**-توقعات، **G**-معادلات تفاضلية ستوكستكية، **G**-تكاملات، مصفوفات ستوكستكية.

Abstract

This thesis is focused on the study of the differentiability of the solution of $d-$dimensional $G-$stochastic differential equation with respect to the initial condition.

First, we prove the existence and uniqueness of the solution of an system of two $d-$dimensional $G-$stochastic differential equations.

Second, we give the matricial $G-$stochastic differential equation of the derivative.

Finally, an intermediate result which indicates that the derivative is invertible and its inverse satisfies an matricial $G-$stochastic differential equation is also proven.

This extends the Lin's results, obtaine in 2013, in the one$-$dimensional case.

Key-words :

$G-$Brownian motion, $G-$expectation, $G-$stochastic integrals, $G-$stochastic differential equations,

random matrices.

Résumé

Cette thèse est axée sur l'étude de la différentiabilité de la solution d'une $G-$équation différentielle stochastique $d-$dimensionnelle par rapport à la condition initiale.

En premier lieu, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution d'un système de deux $G-$équations différentielles stochastiques-

$d-$dimensionnelles.

En deuxième lieu, nous donnons l'équation différentielle stochastique matricielle de la dérivée.

Finalement, un résultat intermédiaire qui indique que la dérivée est inversible et son inverse satisfait une certaine $G-$équation différentielle stochastique matricielle est également prouvé.

Ceci étend les résultats de Lin, obtenus en 2013, dans le cas unidimensionnel.

Mots-clès :

$G-$mouvement Brownien, $G-$espérance, $G-$integrales Stochastiques , $G-$équations différentielles stochastiques, matrices aléatoires.

Notations générales

Dans cette partie, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations utilisées tout au long de cette thèse. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux passages correspondants dans le texte.

- $\mathbb{S}_d$, (resp.$\mathbb{S}_+(d)$) : Ensemble des matrices (resp. définies positives) carrés, symétriques d'ordre d.
- $\Omega = C_0^d(\mathbb{R}^+)$: Espace de toutes les fonctions $(\omega)_{t\in\mathbb{R}^+}$ continues à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ nulles en 0, muni de la distance :

$$\rho\left(\omega^1,\omega^2\right)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\left[\left(\max_{t\in[0,i]}\left|\omega_t^1-\omega_t^2\right|\right)\wedge 1\right].$$

- $\mathcal{H}$: Espace linéaire de fonctions à valeurs réelles définies sur Ω.
- $L^\infty(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions bornées Borel-mesurables.
- $C_{unif}(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions bornées et uniformément continues.
- $Lip(\mathbb{R}^n)$: Espace des fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$.
- $C_{b\cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$: Espace de fonctions continues, Lipschitziennes et bornées.
- $C_{l\cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$: Espace linéaire de fonctions localement Lipschtiziennes φ satisfaisant :

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq C(1+|x|^m+|y|^m)|x-y|,\forall x,y\in\mathbb{R}^n,C>0,m\in\mathbb{N}.$$

Introduction

Au cours des années quarante, le mathématicien japonais Itô à établi la théorie des équations différentielles stochastiques (EDS en abrégé), dans le but de construire les diffusions (i.e. processus continus et fortement markoviens dont les générateurs sont des opérateurs différentiels du second ordre). C'est d'ailleurs dans ce but qu'il avait introduit le calcul stochastique [14, 35]. Depuis, la littérature sur les EDS ne cesse de s'accroître. Ceci est essentiellement dû aux nombreuses applications que les chercheurs ont pu apporter dans divers domaines des sciences et de l'industrie, telles que la biologie, l'économie, la finance, la chimie, la physique, etc.... (Pour plus de détails, on peut se référer à [30, 32, 37, 53]). Il nous est impossible de citer toutes ces références. Parmi ces applications, signalons la différentiabilité des solutions de EDS qui a été étudiée en particulier par Buckdahn et al. [8] en 2014 et en 2015 par Banõs [3]. Cependant, cette théorie a été construite dans un cadre linéaire, où une telle supposition n'est pas faisable dans beaucoup domaines d'application.

En effet, en 1952, lorsque le paradoxe d'Allais a été mis en évidence, les économistes découvrent que la théorie de «l'utilité espérée» à base d'une espérance mathématique linéaire est contestable. L'intérêt pour une notion d'espérance mathématique non-linéaire se développe alors considérablement (voir $[1, 11-13, 16, 17, 20, 27]$). Se pose alors une question : pouvons-nous trouver une nouvelle notion qui peut être une généralisation naturelle de l'espérance linéaire ? Notamment en préservant, autant que possible, ses propriétés. Comme réponse à cette question, Peng propose dans [36] une espérance non-linéaire dite $g-$espérance. En 2006, une nouvelle notion d'espérance sous-linéaire appelée $G-$espérance a été introduite par Peng [39] à l'aide d'un point de vue d'analyse fonctionnelle. Il l'a défini comme étant le suprémum des espérances linéaires classiques pris sur une famille de mesures de probabilités relativement compacte, en vertu de laquelle le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $G-$mouvement Brownien, où $G(.)$ représente la fonction génératrice d'une équation non-linéaire appelée $G-$equation de la chaleur. De plus, parallèlement aux concepts du cadre classique, Peng [40] a établi les notions de distributions et d'indépendance dans ce nouveau contexte. Les intégrales stochastiques du type d'Itô associées ainsi que les équations différentielles stochastiques ($G-$EDS en abrégé) ont été également introduites [27.28, 39, 48]. Une propriété essentielle du $G-$mouvement Brownien est que son processus de variation quadratique $(\langle B_t \rangle)_{t\geq 0}$ est un processus non déterministe en général et qu'il comporte des incréments indépendants et stationnaires identiquement distribués. Dans ce contexte, de nombreux mathématiciens ont contribué et contribuent toujours à la théorie des $G-$EDS (voir [2, 4, 5, 7, 9, 10, 18, 19, 23, 33, 34, 49]). Parmi les resultats importants, nous citons les travaux de Gao [21] et Peng [44], relatifs à l'existence et l'unicité des solutions des $G-$EDS sous les conditions de lipschitz. En outre, en 2013, Lin [26] a étudié la différentiabilité des solutions des $G-$EDS par rapport à la condition initiale dans un cadre réel (unidimensionnel). Pour un compte rendu récent sur le développement de cette théorie, nous renvoyons le lecteur à $[36 - 48]$.

En s'inspirant des travaux cités ci–dessus, nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'étude de la différentiabilité de la solution d'une $G-$EDS par rapport à la condition initiale dans un cadre vectoriel ($d-$dimensionnel). Nous démontrons, dans un premier temps, l'existence et l'unicité de la solution d'un système de deux $G-$EDS (S) , en utilisant le théorème du point fixe et les approximations de Picard. Dans un second temps, nous démontrons la différentiabilité de la solution de la première $G-$EDS de (S) par rapport à la condition initiale ainsi que l'inversibilité de sa dérivée en donnant la $G-$EDS satisfaite par celle ci. Plus précisément, nous considérons la $G-$EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = A_0\left(X_t\right)dt + \sum\limits_{k=1}^{d} A_k\left(X_t\right)dB_t^k + \sum\limits_{i,j=1}^{d} A_{i,j}\left(X_t\right)d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_t, \\ \qquad\qquad X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $A_k, A_{i,j}; k \in \overline{0,d}$ et $i,j \in \overline{1,d}$ sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$, $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $G-$mouvement Brownien $d-$dimensionnel et $(\langle B^i, B^j\rangle_t)_{t\geq 0}$ son processus de covariation quadratique. Notre approche, qui diffère de celle de Lin [26], consiste à introduire des normes équivalentes dépendent d'un paramètre positif λ, qui sera choisi suffisamment grand pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du système (S), en appliquant le principe de contraction de banach. La clé de notre travail est de prouver que la dérivée de la $m^{ième}$ approximation de Picard de X_t est la $(m-1)^{ième}$ approximation d'une autre approximation du processus Y_t, qui sera la dérivée de la solution X_t.

Structure de la thèse

La thèse s'articule autour de trois chapitres organisés de la manière suivante :

Il nous a semblé utile d'entamer cette thèse par un chapitre consacré aux rappels sur la théorie de la $G-$espérance, qui est plutôt un glossaire qui regroupe quelques notions de base introductives et nécessaires à la bonne compréhension de l'ensemble de ce travail. Ces rappels sont en grande partie basés sur les références $[36-48]$.

Le deuxième chapitre, est un exposé succinct du résultat obtenu par Lin [26] relatif à la différentiabilité des solutions des $G-$équations différentielles stochastiques unidimensionnelles. Ce rappel, nous a motivé pour envisager cette étude.

Le troisième et dernier chapitre, qui contient l'essentiel de ce travail, est constitué de deux parties : la première partie, consiste à introduire des normes équivalentes qui dépendent d'un paramètre λ, qui sera choisi suffisamment grand pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de (S), en appliquant le principe de contraction de Banach. Quant à la la deuxième partie, nous nous intéressons à l'étude de la différentiabilité de la solution d'une $G-$équation différentielle stochastique $d-$dimensionnelle par rapport à la condition initiale. Un résultat intermédiaire qui indique que la dérivée est inversible et son inverse satisfait une certaine $G-$équation différentielle stochastique sera également prouvé.

À la fin de la thèse, nous donnons une conclusion générale et quelques perspectives envisagées.

Publications internationales

Cette contribution a été couronnée par une publication scientifique dans une revue internationale :

- Bougherra R., Boutabia H. & Belksier M., *Differentiability of Stochastic Differential Equation Driven by $d-$dimensional $G-$Brownian Motion with Respect to the Initial Data*, Bull. Iran. Math. Soc. (2020). https ://doi.org/10.1007/s41980-020-00490-7.

Communications internationales

1. Bougherra Rania, Boutabia Hacène and Belksier Manel, *Differentiability of stochastic differential equations driven by* $d-$*dimensional Brownian motion whith respect to the initial data*, International Seminar in Industrial Engineering and Applied Mathematics (ISIEAM'18, 23-24 October 2018, à Skikda).
2. Belksier Manel, Boutabia Hacène and Bougherra Rania, $d-$*dimensional fractional Brownian motion in the* $G-$*expectation space*, International Seminar in Industrial Engineering and Applied Mathematics (ISIEAM'18, 23-24 October 2018, à Skikda).
3. Bougherra Rania and Boutabia Hacène, *On the Picard approximation and fixed point schema for SDEs driven by* $G-$*Brownian motion*, the first International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science ICRAMCS 2019 ($29-30$ mars 2019, à Casablanca).
4. Rania Bougherra and Hacène Boutabia, *Existence and uniqueness of stochastic differential equations driven by* $G-$*Brownian motion*, International conference on Financial Mathematics : Tools and Applications MFOA'2019($28-29$ October 2019, University of Bejaia).

Communications nationales

1. Rania Bougherra et Hacène Boutabia, *Differentiability of stochastic differential equations driven by* $d-$*dimensional Brownian motion*, Journées Jeunes Chercheurs (JJC'2018, $17-18$ décembre 2018, à Annaba).
2. Rania Bougherra, Hacène Boutabia et Belksier Manel, *L'inverse de la dérivée de la solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par un* $G-$*mouvement Brownien*, Journée de Mathématiques appliquées «JMA2019» (28 avril 2019, à Mila).

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et les résultats de base de la théorie de la $G-$espérance, nécéssaires pour notre étude. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer à $[33-45,52]$.

1.1 Espérance sous-linéaire

L'espérance sous-linéaire, appelée également espérance supérieure, est une notion utilisée dans les situations où les modèles probabilistes décrivent des phénomènes présentant des incertitudes (voir [44]). Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de base de l'espérance sous-linéaire ainsi que les espaces d'espérance sous-linéaire correspondants. Nous donnons également les notions de distributions, d'indépendance ainsi que celle de la distributon $G-$normale.

1.1.1 Espérance sous-linéaire

Soit Ω un ensemble donné et soit $\mathcal{H}$ un espace linéaire de fonctions à valeurs réelles définies sur Ω, tel que $c \in \mathcal{H}$ pour chaque constante c et $|X| \in \mathcal{H}$ si $X \in \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ est considéré comme l'espace des variables aléatoires.

Définition 1.1 *Une espérance sous-linéaire sur $\mathcal{H}$ est une fonction $\mathbb{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés suivantes : Pour tout $X, Y \in \mathcal{H}$, nous avons :*

(1) *Monotonicité :* $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ *si* $X \geq Y$.

(2) *Préservation des constantes :* $\mathbb{E}[c] = c, \forall\ c \in \mathbb{R}$.

(3) *Sous-additivité :* $\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X - Y]$.

(4) *Homogénéité positive :* $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda\mathbb{E}[X], \forall\lambda \geq 0.$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ est appelé espace d'espérance sous-linéaire. Si seulement (1) *et* (2) sont satisfaites, $\mathbb{E}$ est appelée espérance non-linéaire. De plus, si l'inégalité (3) est une égalité alors E n'est autre que l'espérance linéaire classique.

Remarque 1.1 *En fait,* (3) *et* (4) *impliquent la propriété de convexité suivante :*

$$\mathbb{E}[\alpha X + (1-\alpha) Y] \leq \alpha\mathbb{E}[X] + (1-\alpha)\mathbb{E}[Y], \text{ pour tout } \alpha \in [0,1].$$

Notons que la propriété (4) *est équivalente à la propriété suivante :*

$$\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda^{+}\mathbb{E}[X] + \lambda^{-}\mathbb{E}[-X], \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R},$$

où $\lambda^{+} = \max(\lambda, 0)$ *et* $\lambda^{-} = \max(-\lambda, 0)$.

Dans ce qui suit, nous considérons le type d'espace d'espérance sous-linéaire $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ satisfaisant la propriété suivante : si $X_1, ..., X_n \in \mathcal{H}$ alors $\varphi(X_1, ..., X_n) \in \mathcal{H}$, pour tout $\varphi \in C_{l\cdot Lip}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}^{+}$.

Dans ce contexte, $X = (X_1, ..., X_n) \in \mathcal{H}^n$ est appelé un vecteur aléatoire à $n-$dimension.

Remarque 1.2 *Il est clair que si* $X \in \mathcal{H}$ *alors* $|X|, X^m \in \mathcal{H}$*. Plus généralement,* $\varphi(X)\psi(Y) \in \mathcal{H}$*, pour tout* $X, Y \in \mathcal{H}$ *et pour tout* $\varphi, \psi \in C_{l\cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$*. En particulier, si* $X \in \mathcal{H}$ *alors* $\widehat{\mathbb{E}}[|X^n|] < \infty$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}$.

Ici, nous utilisons $C_{l\cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$ seulement pour la commodité des techniques. En fait, l'exigence essentielle est que $\mathcal{H}$ contient toutes les constantes et satisfait $|X| \in \mathcal{H}$ pour tout $X \in \mathcal{H}$. En général, $C_{l\cdot Lip}(\mathbb{R}^n)$ peut être remplacé par l'un des espaces de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ suivants : $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,
$C_{unif}(\mathbb{R}^n), C_{b\cdot Lip}(\mathbb{R}^n), Lip(\mathbb{R}^n)$.

1.1.2 Distributions et indépendance

Parallèlement aux concepts du cadre classique, Peng [45, 46] a établi les notions de distributions et d'indépendance pour les variables aléatoires dans ce nouveau contexte. Néanmoins, ces notions sont moins probabilistes mais plutôt fonctionnelles, et s'expriment à l'aide des familles de fonctions tests de l'espace $C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n), n \in \mathbb{N}^{+}$.

Définition 1.2 *Soit* $X = (X_1, ..., X_n)$ *un vecteur aléatoire, où* $X_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, ..., n$. *La distribution de* X *est donnée par la fonctionnelle* $\mathbb{F}_X[.]$ *suivante :* $\mathbb{F}_X[\varphi] := \mathbb{E}[\varphi(X)]$, *pour tout* $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$.

Le triplet $(\mathbb{R}^n, C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n), \mathbb{F}_X)$ forme un espace d'espérance sous-linéaire.

Remarque 1.3 $\mathbb{F}_X[\varphi]$ *caractérise l'incertitude de la distribution de* X, *au sens que si* $\mathbb{F}_X$ *n'est pas une espérance linéaire, alors* X *a une distribution incertaine représentée par les quatre paramètres typiques suivants :*

$$\overline{\mu} = \mathbb{E}[X], \ \underline{\mu} = -\mathbb{E}[-X], \ \overline{\sigma}^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] \ \text{et} \ \underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}\left[-X^2\right].$$

Les intervalles $\left[\overline{\mu}, \underline{\mu}\right]$ *et* $[\overline{\sigma}^2, \underline{\sigma}^2]$ *caractérisent la* ***moyenne incertaine*** *et la* ***variance incertaine*** *de* X *respectivement.*

Proposition 1.1 *Soient* $X, Y \in \mathcal{H}$ *telles que* $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y]$ *(i.e.* Y *n'a pas une moyenne incertaine). Alors, nous avons*

$$\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y].$$

En particulier, si $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y] = 0$, *alors* $\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X]$.

Preuve. Nous avons, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\alpha Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] + \alpha^- \mathbb{E}[-Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] - \alpha^- \mathbb{E}[Y] = \alpha \mathbb{E}[Y].$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[X + \alpha Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\alpha Y] = \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[-\alpha Y] \leq \mathbb{E}[X + \alpha Y].$$

■

Proposition 1.2 (*Voir* [22]). *Soient* $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^{m+n})$ *et* $(X, Y) \in \mathcal{H}^m \times \mathcal{H}^n$ *un couple de vecteurs aléatoires définis sur un espace d'espérance sous-linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. *Alors nous avons :*

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^m$, *l'application* $\varphi(x, .) \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$.
2. *L'application* $\mathbb{E}[\varphi(., Y)] \in C_{l,lip}(\mathbb{R}^m)$.

Preuve.

1. En effet, pour chaque $(x,y),(u,z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned} |\varphi(x,y) - \varphi(u,z)| &\leq C\,|(x,y)-(u,z)| \left(1 + |(x,y)|^k + |(u,z)|^k\right), \\ C &> 0, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

et ainsi, par une simple application de l'inégalité $(a+b)^p \leq 2^p(a^p+b^p)$ pour $a,b>0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\varphi(x,y) - \varphi(x,z)| &\leq C\,|y-z| \left(1 + |(x,y)|^k + |(x,z)|^k\right) \\ &\leq C\,|y-z| \left(1 + \left(|x|^2+|y|^2\right)^{\frac{k}{2}} + \left(|x|^2+|z|^2\right)^{\frac{k}{2}}\right) \\ &\leq C\,|y-z| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+|y|^k\right) + 2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+|z|^k\right)\right) \\ &\leq C'\,|y-z| \left(1 + \left(|x|^k+|z|^k\right)\right), \end{aligned}$$

où $C' = C \max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1}|x|^k\right)$. Par conséquent, $\varphi(x,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R}^n)$.

2. De même, nous avons

$$|\varphi(x,Y) - \varphi(u,Y)| \leq C\,|x-u| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+|Y|^k\right) + 2^{\frac{k}{2}}\left(|u|^k+|Y|^k\right)\right),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\varphi(x,Y)] - \mathbb{E}[\varphi(u,Y)]| &\leq \mathbb{E}\,|\varphi(x,Y) - \varphi(u,Y)| \\ &\leq C\,|x-u| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k + \mathbb{E}\left(|Y|^k\right)\right)\right. \\ &\qquad \left. + 2^{\frac{k}{2}}\,|u|^k + \mathbb{E}\left(|Y|^k\right)\right) \\ &\leq C''\,|x-u| \left(1 + |x|^k + |u|^k\right), \end{aligned}$$

où $C'' = C \max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1}\mathbb{E}\left(|Y|^k\right)\right)$, ce qui signifie que $\mathbb{E}[\varphi(.,Y)]$ $\in C_{l,lip}(\mathbb{R}^m)$.

■

Définition 1.3 *Dans un espace d'espérance sous-linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, *un vecteur aléatoire* $Y \in \mathcal{H}^n$ *est dit indépendant d'un autre vecteur aléatoire* $X \in \mathcal{H}^m$ *si pour toute fonction test* $\varphi \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^{m+n})$, *nous avons*

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varphi(x,Y)]_{x=X}\right].$$

Définition 1.4 *Soient X_1 et X_2 deux vecteurs aléatoires à $n-$dimension définis respectivement sur deux espaces d'espérance sous-linéaire $(\Omega_1, \mathcal{H}_1, \mathbb{E}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{H}_2, \mathbb{E}_2)$. Nous disons que X_1 et X_2 sont identiquement distribués et nous noterons $X_1 \overset{d}{=} X_2$, si*

$$\mathbb{E}_1\left[\varphi\left(X_1\right)\right] = \mathbb{E}_2\left[\varphi\left(X_2\right)\right], \forall \varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Si $\overline{X}$ est indépendant de X et $\overline{X} \overset{d}{=} X$, alors nous disons que $\overline{X}$ est une copie de X.

Remarque 1.4 *Dans un espace d'espérance sous-linéaire, la relation d'indépendance n'est pas symétrique i.e. la condition "Y est indépendant de X" ne signifie pas automatiquement que "X est indépendant de Y" (voir* [39, 41]*).*

1.1.3 Distribution $G-$normale

Après la définition de base ci-dessus nous introduisons maintenant la notion fondamentale de la distribution $G-$normale.

Définition 1.5 *Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire à $d-$dimension défini sur $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. La fonction $G : \mathbb{S}_d \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$G(A) := \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\langle AX, X\rangle\right],$$

où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^d$, s'appelle la fonction génératrice de X.

D'après Peng [44, 45], il existe un sous ensemble borné, convexe et fermé Γ de $\mathbb{R}^{d\times d}$, telle que

$$G(A) := \frac{1}{2}\sup_{\gamma\in\Gamma}\left\{tr\left[\gamma\gamma^T A\right]\right\}, \text{ pour tout } A \in S_d.$$

Définition 1.6 *Nous disons que $X = (X_1, ..., X_d)$ est $G-$normalement distribué si et seulement si, pour tout $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$, la fonction*

$$u(t,x) := \mathbb{E}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right], (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$

est l'unique solution de viscosité de l'équation parabolique aux dérivées partielles, appelée $G-$équation de la chaleur, suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = G(Du(t,x)), (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

où $Du(t,x)$ est la matrice hessienne de $u(t,x)$, i.e $Du(t,x) = \left(\partial^2_{x_i x_j} u(t,x)\right)_{i,j=1}^d$.

La loi $G-$normale est alors notée par $X \sim N(0,\Sigma)$, où $\Sigma := \left\{\gamma\gamma^T : \gamma \in \Gamma\right\}$. En fait, cet ensemble Σ caractérise le fait que la variance de X est incertaine, et nous savons que si l'espérance $\mathbb{E}[\cdot]$ est linéaire, cet ensemble n'est composé que d'une seule matrice qui est la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire classique de loi normale.

Remarque 1.5 *Le cas réel $(d=1)$ correspond à $\Sigma = [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2]$ et $G = G_{\overline{\sigma},\underline{\sigma}}$ étant la fonction sous-linéaire paramétrée par $\underline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$:*

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2\alpha^+ - \underline{\sigma}^2\alpha^-\right), \alpha \in \mathbb{R},$$

où $\overline{\sigma}^2 = \mathbb{E}[X^2]$ et $\underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}[-X^2]$. Dans ce cas, on écrit $X \sim \mathcal{N}(0, [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$.

Corollaire 1.1 *Dans le cas où $\underline{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2 > 0, \mathcal{N}(0, [\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2])$ est juste la distribution normale classique $\mathcal{N}(0, \overline{\sigma}^2)$.*

En effet, la fonction génératrice correspondante est dans ce cas $G(\alpha) = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}$ et l'équation parabolique aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = G(Du(t,x)), (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases}$$

devient l'équation de la chaleur classique :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\partial^2_{xx} u(t,x), \\ u\,|_{t=0} = \varphi, \end{cases}$$

qui admet comme unique solution la fonction

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\overline{\sigma}^2 t}\right) dy.$$

Ainsi, pour chaque φ,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right] = u\left(1,0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(y\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) dy.$$

Dans les deux situations suivantes, le calcul de $\mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right]$ est facile.

– Pour tout φ convexe, nous avons

$$u\left(t,x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(y\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) dy.$$

En effet, pour tout $t \geq 0$ fixé, remarquons que la fonction $u\left(t,x\right) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right]$ est convexe, puisque

$$\begin{aligned} u\left(t,\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right) &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y+\sqrt{t}X\right)\right] \\ &\leq \alpha\mathbb{E}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right]+\left(1-\alpha\right)\mathbb{E}\left[\varphi\left(y+\sqrt{t}X\right)\right] \\ &= \alpha u\left(t,x\right)+\left(1-\alpha\right)u\left(t,y\right). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\left(\partial^2_{xx}u\right)^- = 0$ et par conséquent, la $G-$équation de la chaleur (1.1) devient :

$$\begin{cases} \partial_t u = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\partial^2_{xx}u, \\ u\left.\right|_{t=0} = \varphi. \end{cases}$$

– Pour tout φ concave, nous avons

$$u\left(t,x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(y\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\underline{\sigma}^2}\right) dy,$$

en particulier,

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[-X\right] = 0, \mathbb{E}\left[X^2\right] = \overline{\sigma}^2, -\mathbb{E}\left[-X^2\right] = \underline{\sigma}^2$$

et

$$\mathbb{E}\left[X^4\right] = 6\overline{\sigma}^4, -\mathbb{E}\left[-X^4\right] = 6\underline{\sigma}^4.$$

Jusque-là, l'espérance sous-linéaire introduite est encore statique. Dans la suite, nous introduisons une formulation d'une espérance non-linéaire dynamique et cohérente.

1.2 $G-$mouvement Brownien et $G-$espérance

En 2007, Peng a construit le $G-$mouvement Brownien sur l'espace de fonctions continues sous une espérance sous-linéaire appelée $G-$espérance. L'objetif de cette partie est de rappeler les définitions du $G-$mouvement Brownien (unidimensionnel et $d-$dimensionnel) et de la sous-espérance correspondante ($G-$espérance).

1.2.1 $G-$mouvement Brownien

Définition 1.7 *Soit* $(\Omega, \mathcal{H}, \widehat{\mathbb{E}})$ *un espace d'espérance non-linéaire.* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est appelé processus stochastique à* $d-$*dimension si pour tout* $t \geq 0$, X_t *est un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathcal{H}^d$.

Définition 1.8 *Dans un espace d'espérance sous-linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$, *un processus* $(B_t)_{t\geq 0}$ *de dimension* d *est appelé* $G-$*mouvement Brownien* $d-$*dimensionnel (réel dans le cas où* $d = 1$*) si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $B_0 = 0$,

(ii)Pour tout $t, s \geq 0$, *l'accroissement* $B_{t+s} - B_t$ *est* $\mathcal{N}(0, t\Sigma) -$*distribué et est indépendant de* $(B_{t_1}, ..., B_{t_m})$, *pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et pour toute suite* $t_1, t_2, ..., t_m \in [0, t]$.

Remarque 1.6 *La lettre* G *indique que le processus* B *est caractérisé par sa fonction génératrice "*G*" définie auparavant.*

Notons que $G : \mathbb{S}_d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone et sous-linéaire au sens que pour tout $A, \overline{A} \in \mathbb{S}_d$, nous avons :

$$\begin{cases} G\left(A + \overline{A}\right) \leq G(A) + G\left(\overline{A}\right), \\ G(\lambda A) = \lambda G(A), \forall \lambda \geq 0, \\ G(A) \geq G\left(\overline{A}\right), \ si \ A \geq \overline{A}. \end{cases}$$

Notation 1.1 *Dans toute la suite, on pose pour tout* $a = (a_1, ..., a_d)^T \in \mathbb{R}^d$,

$$B_t^a := \langle a, B_t \rangle \ \text{ et } B_t^i := B_t^{e_i},$$

où e_i *est le* $i^{\text{ième}}$ *vecteur de la base caninique de* $\mathbb{R}^d$. *Ainsi,* B_t^i *est la* $i^{\text{ième}}$ *composante de* B_t.

Selon la définition ci-dessus, nous avons la proposition suivante qui est importante dans les développements ultérieurs.

Proposition 1.3 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $G-$*mouvement Brownien à* $d-$*dimension défini sur un espace d'espérance sous-linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. *Alors,* $(B_t^a)_{t\geq 0}$ *est un* G_a-*mouvement Brownien réel de fonction génératrice*

$$G_a(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^+ - \underline{\sigma}^2_{aa^T}\alpha^-\right),$$

où $\overline{\sigma}^2_{aa^T} = \mathbb{E}\left[\langle a, B_1\rangle^2\right]$ *et* $\underline{\sigma}^2_{aa^T} = -\mathbb{E}\left[-\langle a, B_1\rangle^2\right]$. *En particulier, pour tout* $t, s \geq 0, B^a_{t+s} - B^a_t \sim \mathcal{N}\left(0, \left[s\underline{\sigma}^2_{aa^T}; s\overline{\sigma}^2_{aa^T}\right]\right)$.

Il résulte de cette proposition que toutes les composantes $(B_t^i)_{t\geq 0}$ de $(B_t)_{t\geq 0}$ sont également des $G-$mouvements Browniens. La fonction génératrice de $(B_t^i)_{t\geq 0}$ est dans ce cas définie par :

$$G_i(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2_i\alpha^+ - \underline{\sigma}^2_i\alpha^-\right),$$

où $\overline{\sigma}^2_i = \mathbb{E}\left[\left(B_1^i\right)^2\right]$ et $\underline{\sigma}^2_i = -\mathbb{E}\left[-\left(B_1^i\right)^2\right]$ pour tout $i \in \overline{1, d}$.

Notons que dans ce cas, nous avons :

– Pour toute fonction convexe φ,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(B^i_{t+s} - B^i\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\overline{\sigma}^2_i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2s\overline{\sigma}^2_i}\right)dy.$$

– Pour toute fonction concave φ et $\underline{\sigma}^2_i > 0$,

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(B^i_{t+s} - B^i_t\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s\underline{\sigma}^2_i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2s\underline{\sigma}^2_i}\right)dy.$$

En particulier, d'après Peng [27, 39, 41], nous avons :

$$\mathbb{E}\left[\left(B^i_t - B^i_s\right)^2\right] = \overline{\sigma}^2_i(t-s), \mathbb{E}\left[\left(B^i_t - B^i_s\right)^4\right] = 3\overline{\sigma}^4_{aa^T}(t-s)^2$$

et

$$\mathbb{E}\left[-\left(B^i_t - B^i_s\right)^2\right] = -\underline{\sigma}^2_i(t-s) \text{ et } \mathbb{E}\left[-\left(B^i_t - B^i_s\right)^4\right] = -3\underline{\sigma}^4_i(t-s)^2.$$

1.2.2 Existence du $G-$mouvement Brownien sous la $G-$espérance

Dans ce qui suit, nous notons par $\Omega = C_0^n(\mathbb{R}_+)$ l'espace de toutes les fonctions $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ continues nulles en 0, muni de la distance :

$$\rho\left(\omega^1, \omega^2\right) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\left[\left(\max_{t\in[0,i]}\left|\omega_t^1 - \omega_t^2\right|\right) \wedge 1\right].$$

Pour tout $T \geq 0$ fixé, nous notons $\Omega_T = \{\omega_{.\wedge T} : \omega \in \Omega\}$ et nous considérons le processus canonique $B_t(\omega) = \omega_t, t \in [0, +\infty)$ si $\omega \in \Omega$.

Soit l'espace des variables aléatoires suivant :

$$Lip(\Omega_T) = \{\varphi(B_{t_1\wedge T}, \cdots, B_{t_n\wedge T}) : t_1, \cdots, t_n \in [0, \infty), \varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Il est clair que $Lip(\Omega_t) \subset Lip(\Omega_T)$, pour tout $t \leq T$. Nous posons aussi

$$Lip(\Omega) := \bigcup_{n=1}^{\infty} Lip(\Omega_n).$$

Remarque 1.7 *Il est clair que $C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n), Lip(\Omega_T)$ et $Lip(\Omega)$ sont des espaces vectoriels. En outre, notons que $\varphi, \psi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ implique que le produit $\varphi.\psi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi si $X, Y \in Lip(\Omega_T)$ alors $X.Y \in Lip(\Omega_T)$. En particulier, pour tout $t \in [0, \infty)$, $B_t \in Lip(\Omega)$.*

Peng [39] a construit une espérance sous-linéaire sur $(\Omega, Lip(\Omega))$ de telle sorte que le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ soit un $G-$mouvement Brownien de la manière suivante : soit $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de vecteurs aléatoires à $d-$dimension sur un espace d'espérance sous-linéaire $\left(\Omega, \widetilde{\mathcal{H}}, \mathbb{E}\right)$ telle que ξ_i est $G-$normalement distribuée et ξ_{i+1} est indépendante de $(\xi_1, ..., \xi_i)$ pour tout $i = 1, 2, ...$

Ensuite, il a introduit une espérance sous-linéaire $\widehat{\mathbb{E}}$ définie sur $Lip(\Omega)$, via la procédure suivante : Pour tout $X \in Lip(\Omega)$ s'écrivant sous la forme

$$X = \varphi\left(B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right),$$

pour $\varphi \in C_{l.Lip}(\mathbb{R}^n)$ et pour $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$, nous posons :

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\sqrt{t_1 - t_0}\xi_1, ..., \sqrt{t_n - t_{n-1}}\xi_n\right)\right].$$

Définition 1.9 *L'espérance sous-linéaire $\widehat{\mathbb{E}} : L_{ip}(\Omega) \to \mathbb{R}$ introduite par la procédure précédante est appelée $G-$espérance. Le processus canonique associé B est dit $G-$mouvement Brownien sous la $G-$espérance.*

Comme $Lip(\Omega_T) \subseteq Lip(\Omega)$, alors $\widehat{\mathbb{E}}$ est également une espérance sous-linéaire sur $Lip(\Omega_T)$.

1.2.3 Représentation de la $G-$espérance

Dans la suite, nous aurons besoin des espaces de Banach $L_G^p(\Omega)$ (resp. $L_G^p(\Omega_T)$), $1 \leq p < \infty$, définis comme suit :

$$\begin{aligned} L_G^p(\Omega) \quad &: \quad = \left\{ X \in Lip(\Omega) : \widehat{\mathbb{E}}(|X|^p) < \infty \right\}, \\ (resp.\ L_G^p(\Omega_T)) \quad &: \quad = \left\{ X \in Lip(\Omega_T) : \widehat{\mathbb{E}}(|X|^p) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

munis de la norme

$$\|X\|_p := \left(\widehat{\mathbb{E}}(|X|^p) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notons pour tout $1 \leq p \leq q < \infty$, nous avons

$$L_G^q(\Omega) \subset L_G^p(\Omega) \text{ et } L_G^q(\Omega_T) \subset L_G^p(\Omega_T).$$

Selon Denis et al [15], nous avons le théorème de représentation de l'espérance sous-linéaire sur $L_G^1(\Omega)$, qui stipule que celle-ci peut s'exprimer comme étant le supremum des epérances linéaires classiques

Théorème 1.1 *Soit $\widehat{\mathbb{E}}$ une espérance sous-linéaire définie sur un espace linéaire $\mathcal{H}$. Alors il existe une famille de mesures de probabilités $\mathcal{P}$ relativement compacte définie sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, telle que pour tout $X \in L_G^1(\Omega)$,*

$$\widehat{\mathbb{E}}[X] = \sup_{P \in \mathcal{P}} E^P[X],$$

où $\mathcal{B}(\Omega)$ désigne la tribu borélienne sur Ω.

Remarque 1.8 *Si $\mathcal{P}$ est un singleton alors $\widehat{\mathbb{E}}$ n'est autre que l'epérance linéaire classique.*

Naturellement, nous pouvons définir une capacité de Choquet sur $\mathcal{H}$ par :

$$c(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A), \ A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Par rapport à cette capacité $c(A)$, une notion de "quasi-sure" a été introduite [22, 39, 41].

Définition 1.10 *Nous disons qu'un ensemble $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ est polaire si et seulement si $c(A) = 0$, et qu'une propriété a lieu quasi-sûrement (q.s. en abrégé) si elle a lieu en dehors d'un ensemble polaire.*

Remarque 1.9 *Une propriété est vraie q.s. si elle est vraie presque sûrement pour chaque $P \in \mathcal{P}$.*

Grâce à la représentation de l'espérance sous-linéaire et à la notion « quasi-sûre» introduite, la théorie des processus stochastiques en temps continu dans le cadre de l'espérance sous-linéaire s'est développée, en particulier la formule d'Itô, certaines inégalités stochastiques ainsi que les équations différentielles stochastiques gouvernées par un $G-$mouvement brownien ($G-$EDS) qui peuvent être établies dans le sens « quasi-sûre » (voir [27, 28]).

1.3 $G-$intégrales stochastiques

Dans [46], Peng a également introduit les intégrales stochastiques de type d'Itô, par rapport au $G-$mouvement Brownien $(B_t^i)_{t\geq 0}$, comme dans le cas classique (pour plus de détails, voir [41, 44]).

1.3.1 $G-$intégrale de Bochner

Dans toute la suite, $T \in \mathbb{R}^+$ sera fixé. Soit $\pi_T = \{t_0, t_1, ..., t_N\}$ une subdivision de $[0, T]$ et soit $p \in [1, \infty[$ fixé. Nous considérons les processus simples à valeurs dans $\mathbb{R}^{m\times n}, m, n \in \mathbb{N}^*$, de la forme :

$$\eta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega)\, \mathbf{I}_{[t_k, t_{k+1})}(t),$$

où

$$\xi_k \in L_G^P(\Omega_{t_k}), k = 0, 1, 2, ..., N-1.$$

L'ensemble de ces processus est noté par $M_G^{P,m\times n}([0, T])$.

Définition 1.11 *Pour tout $\eta \in M_G^{P,m\times n}([0, T])$, avec*

$$\eta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega)\, I_{[t_{K+1}-t_K)}(t),$$

l'intégrale de Bochner associée est définie par :

$$\int_0^T \eta_t(\omega)\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega)(t_{k+1}-t_k).$$

Définition 1.12 *Pour tout $p \geq 1$, nous notons par $\overline{M}_G^{P,m\times n}([0,T])$ l'adhérence de $M_G^{P,m\times n}([0,T])$ sous la norme :*

$$\|\eta\|_{p,T} = \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T |\eta_t|^p\,dt\right)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que $\overline{M}_G^{P,m\times n}([0,T])$ est un espace de Banach. Dans toute la suite, nous posons

$$\overline{M}_G^{P,m}([0,T]) := \overline{M}_G^{P,m\times m}([0,T]).$$

1.3.2 $G-$intégrale d'Itô

Nous donnons maintenant la définition de l'intégrale d'Itô par rapport au $G-$mouvement Brownien (B_t^i).

Définition 1.13 *Pour tout $\eta \in M^{2,1}([0,T])$ de la forme :*

$$\eta_t(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(\omega)\, I_{[t_k,t_{k+1})}(t),$$

la $G-$intégrale d'Itô est définie par :

$$I(\eta) = \int_0^T \eta_t dB_t^i = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k\left(B_{t_{k+1}}^i - B_{t_k}^i\right), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Lemme 1.1 *Pour tout $\eta \in M_G^{2,1}([0,T])$, nous avons*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T \eta_t dB_t^i\right) = 0 \tag{1.2}$$

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t^i\right)^2\right] \leq \overline{\sigma}_i^2 \left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\eta_t^2\right] dt\right) \tag{1.3}$$

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 1.2 *L'applicaton linéaire $I : M_G^{2,1}(0,T) \longrightarrow L_G^2(\Omega_T)$ est continue et peut donc se prolonger par continuité à $\overline{M}_G^{2,1}(0,T)$.*

Définition 1.14 *Nous définissons, pour $\alpha \in \overline{M}_G^{2,1}(0,T)$ fixé, l'intégrale stochastique :*

$$I(\alpha) = \int_0^T \alpha_t dB_t^i.$$

Il est clair que (1.2) *et* (1.3) *restent vraies pour $\eta \in \overline{M}_G^{2,1}(0,T)$.*

Nous présentons quelques propriétés principales de l'intégrale d'Itô par rapport au $G-$mouvement Brownien (B_t^i), qui découlent directement de la définition de l'intégrale stochastique.

Proposition 1.4 *Soient $\eta, \theta \in \overline{M}_G^{2,1}(0,T)$ et $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. Alors, nous avons :*

(i) $\int_s^t \eta_u dB_u^i = \int_s^r \eta_u dB_u^i + \int_r^t \eta_u dB_u^i,$

(ii) $\int_s^t (\alpha\eta_u + \theta_u) dB_u^i = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u^i + \int_s^t \theta_u dB_u^i,$ *si α est bornée et dans $L_G^1(\Omega_s)$.*

1.3.3 $G-$processus de variation quadratique

Le processus de variation quadratique du $G-$mouvement Brownien est un processus trés intéressant. Nous avons vu que le $G-$mouvement Brownien est un processus de variance incertaine mais de moyenne certaine. Cette incertitude est concentrée dans sa variation quadratique $\langle B^i \rangle$.

Soit $\left\{\pi_t^N, N \geq 1\right\}$ une suite de subdivision de $[0,t]$ dont le pas $\mu\left(\pi_t^N\right) := \max_{0 \leq k \leq N-1} \left|t_{k+1}^N - t_k^N\right|$ tend vert 0 lorsque N tend vers l'infni. Nous considérons :

$$\begin{aligned}
\left(B_t^i\right)^2 &= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\left(B^i_{t^N_{k+1}}\right)^2-\left(B^i_{t^N_k}\right)^2\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N-1} 2B^i_{t^N_k}\left(B^i_{t^N_{k+1}}-B^i_{t^N_k}\right)+\sum_{k=0}^{N-1}\left(B^i_{t^N_{k+1}}-B^i_{t^N_k}\right)^2.
\end{aligned}$$

Comme le premier terme du membre droit de cette égalité tend vers $2\int_0^t B_s^i dB_s^i$ dans $L_G^2(\Omega)$. Le second terme doit converger vers une limite. Nous noterons cette limite par $\langle B^i\rangle_t$, i.e.

$$\left\langle B^i\right\rangle_t = \lim_{\mu\left(\pi_t^N\right)\to 0}\sum_{k=0}^{N-1}\left(B^i_{t^N_{k+1}}-B^i_{t^N_k}\right)^2 = \left(B_t^i\right)^2 - 2\int_0^t B_s^i dB_s^i \tag{1.4}$$

Par la construction ci-dessus $(\langle B^i\rangle_t)_{t\geq 0}$ est un processus croissant avec $\langle B^i\rangle_0 = 0$. Nous l'appellerons **le processus de variation quadratique** du $G-$mouvement Brownien $(B_t^i)_{t\geq 0}$. Il est important de rappeler que $\langle B^i\rangle_t$ n'est pas un processus déterministe, sauf dans le cas où $\overline{\sigma}_i^2 = \underline{\sigma}_i^2$, *i.e.* quand $(B_t^i)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien classique.

Nous donnons maintenant la défintion de l'intégrale d'un processus $\eta \in \overline{M}_G^{2,1}(0,T)$ par rapport à $\langle B\rangle_t$.

On définit d'abord l'application $Q_{0,T}(\eta) : M_G^{2,1}(0,T) \longrightarrow L_G^1(\Omega_T)$

$$Q_{0,T}(\eta) = \int_0^T \eta_t d\left\langle B^i \right\rangle_t = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t_{k+1}} - \left\langle B^i \right\rangle_{t_k} \right).$$

Corollaire 1.2 *(Voir [22]) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, nous avons*

$$\underline{\sigma}_i^2 t \leq \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t+s} - \left\langle B^i \right\rangle_s \right) \leq \overline{\sigma}_i^2 t,$$

où $\overline{\sigma}_i^2 = \widehat{\mathbb{E}}\left((B_1^i)^2 \right)$ et $\underline{\sigma}_i^2 = -\widehat{\mathbb{E}}\left(-(B_1^i)^2 \right)$.

Proposition 1.5 *Pour tout $\eta \in M_G^{2,1}(0,T)$ fixé, nous avons*

$$\underline{\sigma}_i^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt \right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t \, dB_t^i \right)^2 \right] \leq \overline{\sigma}_i^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt \right] \tag{1.5}$$

Preuve. Tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t^i \right)^2 \right] &= \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^i + \xi_{N-1} \left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i \right) \right)^2 \right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t \, dB_t^i \right)^2 + \eta_{N-1}^2 \left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i \right)^2 \right. \\
&\quad \left. +2 \left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t \, dB_t^i \right) \eta_{N-1} \left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i \right) \right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^i \right)^2 + \xi_{N-1}^2 \left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i \right)^2 \right) \right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2 \left(B_{t_{i+1}}^i - B_{t_i}^i \right)^2 \right] \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i \right\rangle_{t_i} \right) \right].
\end{aligned}$$

D'après le corollaire 1.2, nous avons

$$\underline{\sigma}_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) \leq \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i \right\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right),$$

et en multipliant membre à membre par (η_i^2), nous obtenons

$$\underline{\sigma}_i^2 \eta_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) \leq \eta_i^2 \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i \right\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}_i^2 \eta_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right),$$

d'où en sommant par rapport à i et en appliquant $\widehat{\mathbb{E}}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \underline{\sigma}_i^2 \eta_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right)\right] &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i \right\rangle_{t_i}\right)\right] \\ &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\sigma}_i^2 \eta_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right)\right]. \end{aligned}$$

De plus, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée de la manière suivante :

$$\underline{\sigma}_i^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \eta_t \, dB_t^i\right)^2\right] \leq \overline{\sigma}_i^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt\right],$$

ce qui implique que l'inégalité 1.5 est bien vérifiée. ■

Lemme 1.3 *Pour tout* $\eta \in \overline{M}_G^{1,1}(0,T)$,

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Q_{0,T}(\eta)\right|\right] \leq \overline{\sigma}_i^2 \widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T |\eta_t| \, dt\right] \tag{1.6}$$

Ainsi, $Q_{0,T}(\eta) : M_G^{1,1}(0,T) \longrightarrow L_G^1(\Omega_T)$ est une application linéaire continue. Par conséquent, $Q_{0,T}$ se prolonge par continuité à $\overline{M}_G^{1,1}(0,T)$. Nous noterons encore cette application par $Q_{0,T}(\eta)$, *i.e.*

$$Q_{0,T}(\eta) = \int_0^T \eta_t d\left\langle B^i \right\rangle_t, \ \forall \eta \in \overline{M}_G^{1,1}(0,T).$$

Notons que l'inégalité (1.6) reste valable pour $\eta \in \overline{M}_G^{1,1}(0,T)$.

Définition 1.15 *(Processus de co-variation quadratique du $G-$mouvement Brownien). Pour tout $i,j\in\overline{1,d,}$ le processus de co-variation quadratique de B^i et B^j est défini par :*

$$\left\langle B^i,B^j\right\rangle=\frac{1}{4}\left[\left\langle B^i+B^j\right\rangle-\left\langle B^i-B^j\right\rangle\right].$$

Notons que les processus $(B^i+B^j)_{t\geq 0}$ et $\langle B^i-B^j\rangle_{t\geq 0}$ sont des $G-$mouvements Browniens (voir [44]).

Remarque 1.10 *Puisque $\langle B^{i-j}\rangle=\langle B^{j-i}\rangle=\langle -B^{i-j}\rangle$, alors $\langle B^i,B^j\rangle_t=\langle B^j,B^i\rangle_t$. En particulier, nous avons $\langle B^i,B^i\rangle=\langle B^i\rangle$.*

1.3.4 $G-$inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

Compte tenu de la double formulation de la $G-$espérance ainsi que des propriétés du processus de variation quadratique $\langle B^i\rangle$, Gao [21] a obtenu les inégalités de Burkholder$-$Davis$-$Gundy suivantes (BDG, en abrégé). Dans ce qui suit, nous supposons que les intégrales $\int_0^t\eta_\nu dB^i_\nu$ et $\int_0^t\eta_\nu d\left\langle B^i,B^j\right\rangle_\nu,\eta\in\overline{M}_G^{p,1}(0,T)$ sont continues en t.

Lemme 1.4 *Soient $p\geq 2$ et $\eta\in\overline{M}_G^{p,1}(0,T)$. Alors, pour tout $0\leq s\leq t\leq T$, nous avons*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{s\leq u\leq t}\left|\int_s^u\eta_\nu dB^i_\nu\right|^p\right]\leq K_1\left|t-s\right|^{\frac{p}{2}-1}\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_s^t\left|\eta_\nu\right|^p d\nu\right],$$

où K_1 est une constante positive indépendante de η. En particulier,

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{0\leq u\leq t}\left|\int_0^u\eta_\nu dB^i_\nu\right|^p\right]\leq C_1\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^t\left|\eta_\nu\right|^p d\nu\right],$$

où $C_1:=K_1T^{\frac{p}{2}-1}$.

Lemme 1.5 *Soient $p\geq 1,i,j\in\overline{1,d}$ et $\eta\in\overline{M}_G^{p,1}(0,T)$. Alors, pour tout $0\leq s\leq t\leq T$,*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{s\leq u\leq t}\left|\int_s^u\eta_\nu d\left\langle B^i,B^j\right\rangle_\nu\right|^p\right]\leq K_2\left|t-s\right|^{p-1}\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_s^t\left|\eta_\nu\right|^p d\nu\right],$$

où K_2 est une constante positive indépendante de η. En particulier,

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{0\leq u\leq t}\left|\int_0^u \eta_\nu d\left\langle B^i,B^j\right\rangle_\nu\right|^p\right]\leq C_2\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^t \left|\eta_\nu\right|^p d\nu\right],$$

où $C_2 := K_2 T^{p-1}$.

1.3.5 $G-$formule d'Itô

À la fin de cette section, nous donnons la $G-$formule d'Itô dans un cadre vectoriel (voir [22, 44, 54]). Dans la suite, nous adoptons souvent la convention de notation d'Einstein.

Définition 1.16 *On appelle $G-$processus d'Itô unidimensionnel, tout processus de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dB_s^i + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s d\langle B^i, B_j\rangle_s, t\in[0,T],$$

où $X_0\in L_G^2(\Omega_T), \alpha\in \overline{M}_G^{2,1}(0,T)$ et $\beta,\gamma\in\overline{M}_G^{1,1}(0,T)$.

On donne maintenant la $G-$formule d'Itô dans un cadre général.

Théorème 1.2 *Soit $X_t=(X_t^1,...,X_t^n)$ un $G-$vecteur processus d'Itô au sens que*

$$X_t^\nu = X_0^\nu + \int_0^t \alpha_s^{\nu j} dB_s^j + \int_0^t \beta_s^\nu ds + \int_0^t \gamma_s^{\nu ij} d\langle B^i, B^j\rangle_s, t\in[0,T], \nu=1,2,...,n,$$

où $\gamma^{\nu ij},\beta^\nu\in\overline{M}_G^{1,1}([0,T])$ et $\alpha^{\nu j}\in\overline{M}_G^{2,1}([0,T]), \nu=\overline{1,n}, i,j\in\overline{1,d}$ sont des processus bornés. Soit $\varphi\in C^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ de telle sorte que $\left\{\partial^2_{x^\mu x^\nu}\varphi\right\}_{\mu,\nu=1}^n$ sont uniformément Lipschtiziennes. Alors, pour tout $t\geq 0$, nous avons dans $L_G^2(\Omega_t)$:

$$\begin{aligned}\varphi(X_t) &= \varphi(X_0) + \int_0^t \partial_{x^\nu}\varphi(X_s)\alpha_s^{\nu j}dB_s^j + \int_0^t \partial_{x^\nu}\varphi(X_s)\beta_s^\nu ds\\ &\quad + \int_0^t\left[\partial_{x^\nu}\varphi(X_s)\gamma_s^{\nu ij} + \frac{1}{2}\partial^2_{x^\mu x^\nu}\varphi(X_s)\alpha_s^{\mu i}\alpha_s^{\nu j}\right]d\langle B^i,B^j\rangle_s.\end{aligned}$$

Remarque 1.11 *La $G-$formule d'Itô peut être s'écrit en notation différentielle suivante :*

$$d\varphi\left(X_t\right) = \partial_{x^\nu}\varphi\left(X_t\right) dX_t^\nu + \frac{1}{2}\partial^2_{x^\mu x^\nu}\varphi\left(X_s\right) dX_t^\mu dX_t^\nu.$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.2, qui nous sera très utile dans tous les développements ultérieurs.

Corollaire 1.3 *Soient $(X_t), (Y_t)$ des $G-$processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times m}$ et $\mathbb{R}^{m\times k}$ respectivement, dont les entrées sont des processus d'Itô unidimensionnels. Alors, nous avons la $G-$formule d'intégration par parties, à savoir :*

$$d\left(X_t.Y_t\right) = X_t.dY_t + dX_t.Y_t + dX_t.dY_t.$$

Notons que le produit des matrices n'est pas commutatif.

Preuve. Lorsque $n = m = k = 1$, la $G-$formule d'intégration par parties découle de la $G-$formule d'Itô appliquée au processus bidimensionnel (X_t, Y_t) avec $\varphi\left(x, y\right) = xy$.

Il résulte que, pour tout $i \in \overline{1, n}$ et pour tout $i \in \overline{1, k}$,

$$\begin{aligned}
d\left(X_t.Y_t\right)_{ij} &= d\left(\sum_{l=1}^{m}\left(X_t\right)_{il}\left(Y_t\right)_{lj}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{m}\left(X_t\right)_{il} d\left(Y_t\right)_{lj} + d\left(X_t\right)_{il}\left(Y_t\right)_{lj} + d\left(X_t\right)_{il} d\left(Y_t\right)_{lj} \\
&= \left(X_t.dY_t + dX_t.Y_t + dX_t.dY_t\right)_{jj},
\end{aligned}$$

d'où

$$d\left(X_t.Y_t\right) = X_t.dY_t + dX_t.Y_t + dX_t.dY_t.$$

■

Chapitre 2

Dérivabilité de la solution d'une $G-$EDS unidimensionnelle

L'objectif de ce chapitre est de passer en revue les principaux résultats de Lin [26] relatifs à la différentiabilité des solutions des $G-$EDS par rapport à la condition initiale dans un cadre réel (unidimensionnel). Pour cela, nous considérons la $G-$EDS suivante :

$$\begin{aligned} X_t^x &= x + \int_0^t b\left(s, X_t^x\right) ds + \int_0^t \delta\left(s, X_t^x\right) dB_s + \int_0^t h\left(s, X_t^x\right) d\left\langle B\right\rangle_s, t \in [0,T], \\ x &\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $b(.,.), \delta(.,.), h(.,.) : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(B)_{t\geq 0}$est un $G-$mouvement Brownien unidimensionnel et $(\langle B\rangle_t)_{t\geq 0}$ est le processus des variations quadratiques.

Pour simplifier, nous considérons le cas où $\underline{\sigma} = \sigma$ et $\overline{\sigma} = 1$ et supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :

(H) Il existe une constante positive L telle que, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [0,T]$,

$$|b(t,x) - b(s,x')| + |\delta(s,x) - \delta(s,x')| + |h(s,x) - h(s,x')| \leq L\,|x - x'|.$$

2.0.6 Dérivée première de la solution d'une $G-$EDS

Lemme 2.1 *Sous l'hypothèse* (H), *la* $G-$*EDS* (2.1) *admet une solution unique* $X \in \overline{M}_G^{2,1}\left[(0,T)\right]$.

Le lemme suivant exprime les inégalités de BDG, pour les deux dernières inégalités, en dimension 1, en tenant compte du fait que $\overline{\sigma}=1$. La première inégalité étant une conséquence directe de l'inégalité de Hölder.

Lemme 2.2 *Pour tout $p\geq 2$, il existe une constante positive D_p telle que, pour tout $n\in \overline{M}_G^{p,1}\left[(0,T)\right]$,*

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \eta_s ds\right|^p\right] &\leq T^{p-1}\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[|\eta_s|^p\right]ds,\\
\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \eta_s d\left\langle B\right\rangle_s\right|^p\right] &\leq T^{p-1}\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[|\eta_s|^p\right]ds,\\
\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \eta_s dB_s\right|^p\right] &\leq D_pT^{\frac{p}{2}-1}\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[|\eta_s|^p\right]ds,
\end{aligned}$$

où D_p est une constante positive qui ne dépend que de p.

Nous donnons d'abord une définition de la continuité et de la différentiabilité comme suit :

Définition 2.1 *Un processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est dit continu dans $L_G^2(\Omega)$ si*

$$\lim_{h\to 0}\widehat{\mathbb{E}}\left[|Y_t-Y_{t+h}|^2\right]=0.$$

Définition 2.2 *Soient $g(x)=g(x_1,...,x_n)$ et $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ des fonctions aléatoires. Nous disons que $f(x_1,...,x_n)$ est la dérivée partielle de $g(x_1,...,x_n)$ par rapport à x_i, $,1\leq i\leq n$,si*

$$\lim_{h\to 0}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\frac{g(x_1,...,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},...,x_n)-g(x_1,...,x_n)}{h}-f(x_1,...,x_n)\right|^2\right]=0.$$

Nous écrivons $\frac{\partial g(x_1,...,x_n)}{\partial x_i}=g_{x_i}(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)$.

Maintenant, nous donnons les propositions suivantes qui seront utiles dans la suite de ce chapitre.

Proposition 2.1 *Sous l'hypothèse* (H), *nous avons l'estimation suivante pour la solution* X *de la* $G-$*EDS* (2.1) *: pour tout* $r \in [0,T]$ *et pour tout* $p \geq 0$, *nous avons*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]} |X_t^x|^p\right] \leq D,$$

où la constante D *ne dépend que de* p, x, r *et* L.

Preuve. La preuve se fait en trois étapes.

Étape 1 : Pour tout $p \geq 2$, nous avons d'après la $G-$EDS (2.1) et l'inégalité suivante :

$$|a+b+c+d|^p \leq 4^{p-1}\left(|a|^p + |b|^p + |c|^p + |d|^p\right),$$

$$\begin{aligned} |X_t^x|^p \;\; &\leq \;\; 4^{p-1}\left(|x|^p + \left|\int_0^t b\left(s, X_s^x\right) ds\right|^p + \left|\int_0^t \delta\left(s, X_s^x\right) dB_s\right|^p\right. \\ &\quad \left. + \left|\int_0^t h\left(s, X_s^x\right) d\left\langle B\right\rangle_s\right|^p\right). \end{aligned}$$

De la sous-additivité de la $G-$espérance, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]} |X_t^x|^p\right] \;\; &\leq \;\; 4^{p-1}\left(|x|^p + \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|\int_0^t b\left(s, X_s^x\right) ds\right|^p\right]\right. \\ &\quad + \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|\int_0^t \delta\left(s, X_s^x\right) dB_s\right|^p\right] \\ &\quad \left. + \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|\int_0^t h\left(s, X_s^x\right) d\left\langle B\right\rangle_s\right|^p\right]\right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'hypothèse (H) et le lemme 2.2, en posant

$$M := max\left(\sup_{s\in[0,r]}|b\left(s,0\right)|, \sup_{s\in[0,r]}|\delta\left(s,0\right)|, \sup_{s\in[0,r]}|h\left(s,0\right)|\right),$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|\int_0^t b\left(s,X_s^x\right)ds\right|^p\right] &\leq r^{p-1}\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^r \left|b\left(s,X_s^x\right)\right|^p ds\right] \\
&\leq (2r)^{p-1}\int_0^r \left(\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|b\left(s,0\right)\right|^p\right]+L\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X_s^x\right|^p\right]\right)ds \\
&\leq (2r)^{p-1}\left(rM^p+L\int_0^r \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X_s^x\right|^p\right]ds\right),
\end{aligned}$$

et de façon similaire, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|\int_0^t \delta\left(s,X_s^x\right)dB_s\right|^p\right] \leq 2^{p-1}r^{\frac{p}{2}-1}\left(rM^p+L\int_0^r \left(\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X_s^x\right|^p\right]\right)ds\right)$$

et

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|\int_0^t h\left(s,X_s^x\right)d\left\langle B\right\rangle_s\right|^p\right] \leq (2r)^{p-1}D_p\left(rM^p+L\int_0^r \left(\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X_s^x\right|^p\right]\right)ds\right).$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|X_t^x\right|^p\right] &\leq 4^{p-1}\Bigg[\left|x\right|^p+2^{p-1}\left(2r^p+r^{\frac{p}{2}}\right)M^p \\
&\qquad \left(2r^{p-1}+r^{\frac{p}{2}-1}\right)L\int_0^r \left(\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X_s^x\right|^p\right]\right)ds\Bigg] \\
&\leq A\left(1+\int_0^r \widehat{\mathbb{E}}\left(\sup_{s'\in[0,s]}\left|X_{s'}^x\right|^p\right)ds\right),
\end{aligned}$$

où

$$A=4^{p-1}\max\left(\left|x\right|^p+2^{p-1}\left(2r^p+r^{\frac{p}{2}}\right)M^p,\left(2r^{p-1}+r^{\frac{p}{2}-1}\right)L\right),$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Gronwall, nous obtenons

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}\left|X_t^x\right|^p\right]\leq B,$$

où $B=Ae^{Ar}$.

Étape 2 : Pour tout $1 \leq p < 2$, en utilisant l'inégalité de Hölder par rapport à $\widehat{\mathbb{E}}$ et le résultat de l'étape 1, nous trouvons

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}|X_t^x|^p\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}|X_t^x|^{2p}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{B}.$$

Étape 3 : Pour tout $0 < p < 1$, puisque

$$|X_t^x|^p \leq |X_t^x|^p \, 1_{\{|X_t^x|^p \leq 1\}} + |X_t^x|^p \, 1_{\{|X_t^x|^p \geq 1\}} \leq 1 + |X_t^x|^{1+p},$$

alors, d'après le résultat de l'étape 2, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,r]}|X_t^x|^p\right] \leq \widehat{\mathbb{E}}\left[1 + \sup_{t\in[0,r]}|X_t^x|^{1+p}\right] \leq 1 + \sqrt{B},$$

ce qui achève la démonstration.

■

En utilisant les mêmes techniques utilisées dans la preuve de la proposition 2.1, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Supposons que l'hypothèse (H) est satisfaite. Alors, pour tout $p \geq 2$, il existe une constante positive $\widetilde{D}$ telle que*

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[|X_t^x - X_t^y|^p\right] \leq \widetilde{D}\,|x-y|^p\,, \text{ pour tout } t \in [0,T]\,,$$

où $\widetilde{D}$ ne dépend que de p, T et L.

Maintenant, nous avons le théorème de la différentiabilité par rapport à la condition initiale.

Théorème 2.1 *On suppose que pour tout $t \in [0,T]$, $b_x(t,.), \delta_x(t,.), h_x(t,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R})$ et bornées. Alors X_t^x est différentiable dans $L_G^2(\Omega)$ par rapport à x. De plus, $Y_t^x := \frac{\partial X_t^x}{\partial x}$ satisfait la $G-$EDS suivante :*

$$\begin{aligned} Y_t^x &= 1 + \int_0^t b_x(s, X_s^x)\, Y_s^x ds + \int_0^t \delta_x(s, X_s^x)\, Y_s^x dB_s + \int_0^t h(s, X_s^x)\, Y_s^x d\langle B\rangle_s \qquad (2.2) \\ t &\in [0,T] \end{aligned}$$

Preuve. Soit $h \neq 0$ petit. Pour plus de simplicité, nous posons

$$X_t := X_t^x, Y_t = Y_t^x, \widetilde{X}_t := X_t^{x+h} \text{ et } Z_t^h := \frac{\widetilde{X}_t - X_t}{h}.$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} Z_t^h &= 1 + \frac{1}{h}\int_0^t \left[b\left(s, \widetilde{X}_s\right) - b\left(s, X_s\right)\right] ds \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^t \left[\delta\left(s, \widetilde{X}_s\right) - \delta\left(s, X_s\right)\right] dB_s \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^t \left[h\left(s, \widetilde{X}_s\right) - h\left(s, X_s\right)\right] d\left\langle B\right\rangle_s \end{aligned} \tag{2.3}$$

Puisque $b_x(t,.), \delta_x(t,.), h_x(t,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R})$, alors en utilisant le théorème des accroissement finis, nous avons

$$\begin{aligned} Z_t^h &= 1 + \int_0^t \left(\int_0^1 b_x\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta\right) Z_s^h ds \\ &+ \int_0^t \left(\int_0^1 \delta_x\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta\right) Z_s^h dB_s \\ &+ \int_0^t \left(\int_0^1 h_x\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta\right) Z_s^h d\left\langle B\right\rangle_s \\ &= 1 + I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Par conséquent, pour un certain $k \in \mathbb{N}$ qui provient du fait que $b_x\left(s,.\right) \in C_{l.lip}\left(\mathbb{R}\right)$ et en notant par D_1 toutes les constantes qui apparaissent dans toute la démonstration et qui ne dépendent pas de ε, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
& \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_1-\int_0^t b_x\left(s,X_s\right)Y_s ds\right|^2\right] \\
\leq\ & 2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\left(\left|\int_0^1 b_x\left(s,X_s+\theta\left(\widetilde{X}_s-X_s\right)\right)\right|d\theta\right)\left|Z_s^h-Y_s\right|ds\right)^2\right] \\
& +2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\int_0^1\left|b_x\left(s,X_s+\theta\left(\widetilde{X}_s-X_s\right)\right)-b_x\left(s,X_s\right)\right|d\theta\left|Y_s\right|ds\right)^2\right] \\
\leq\ & D\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T\left|Z_s^h-Y_s\right|^2ds\right]+D\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\left(\left|\widetilde{X}_s-X_s\right|+\left|\widetilde{X}_s-X_s\right|^{k+1}\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left.+\left|X_s\right|^k\left|\widetilde{X}_s-X_s\right|\right)\left|Y_s\right|ds\right)^2\right].
\end{aligned}
$$

Pour tout $\varepsilon>0$, de l'inégalité $2ab\leq\frac{1}{\epsilon}a^2+\varepsilon b^2, a,b\geq 0$, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
& \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_1-\int_0^t b_x\left(s,X_s\right)Y_s ds\right|^2\right] \\
\leq\ & D_1\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Z_r^h-Y_r\right|^2\right]ds+D_1\varepsilon\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_s\right|^4\right]ds \\
& +\frac{D_1}{\varepsilon}\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\widetilde{X}_s-X_s\right|^4+\left|\widetilde{X}_s-X_s\right|^{4k+4}+\left|X_s\right|^{4k}\left|\widetilde{X}_s-X_s\right|^4\right]ds.
\end{aligned}
$$

En vertu des propositions 2.1 et 2.2, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
& \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_1-\int_0^t b_x\left(s,X_s\right)Y_s ds\right|^2\right] \\
\leq\ & D_1\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Z_r^h-Y_r\right|^2\right]ds+D_1\varepsilon+\frac{D_1}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4k+4}\right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

En procédant à des arguments analogues, nous obtenons que pour un certain $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_2-\int_0^t \delta_x(s,X_s)\,Y_s dB_s\right|^2\right] \\ \leq\ & D_1\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Z_r^h-Y_r\right|^2\right]ds+D_1\varepsilon+\frac{D_1}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4m+4}\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

et pour un certain $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_3-\int_0^t h_x(s,X_s)\,Y_s d\langle B\rangle_s\right|^2\right] \\ \leq\ & D_1\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Z_r^h-Y_r\right|^2\right]ds+D_1\varepsilon+\frac{D_1}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4n+4}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

En combinant les formules (2.2) et (2.4) $-$ (2.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_t^h-Y_t\right|^2\right] \\ \leq\ & D_1\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Z_r^h-Y_r\right|^2\right]ds+D_1\varepsilon+\frac{D_1}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4k+4}+h^{4m+4}+h^{4n+4}\right), \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme de Gronwall, nous trouvons

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_t^h-Y_t\right|^2\right] \\ \leq\ & D_1\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4k+4}+h^{4m+4}+h^{4n+4}\right)\right)e^{TD_1}. \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre h vers 0, nous obtenons

$$\lim_{h\to 0}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_t^h-Y_t\right|^2\right]\leq D_1\varepsilon e^{TD_1}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_t^h - Y_t\right|^2\right] = 0 \tag{2.8}$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

Remarque 2.1 *Par le même procédé, nous pouvons démontrer que*

$$\lim_{h\to 0}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_t^h - Y_t\right|^4\right] = 0,$$

qui nous sera utile pour la suite.

Théorème 2.2 *Sous les conditions du théorème* 2.1, $\frac{\partial X_t^x}{\partial x}$ *est continue par rapport à* t *dans* $L_G^2(\Omega)$.

Preuve. Nous utilisons des notations similaires que à celles de la démonstration du théorème 2.1. Pour tout $t \in [0,T]$, d'après l'hypothèse de b, δ, h et la proposition 2.2, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Z_t^h\right|^2\right] &\leq 4+\frac{4}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_0^t \left[b\left(s,\widetilde{X}_s\right)-b\left(s,X_s\right)\right]ds\right|^2\right] \\
&\quad +\frac{4}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_0^t \left[\delta\left(s,\widetilde{X}_s\right)-\delta\left(s,X_s\right)\right]dB_s\right|^2\right] \\
&\quad +\frac{4}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_0^t \left[h\left(s,\widetilde{X}_s\right)-h\left(s,X_s\right)\right]d\left\langle B\right\rangle_s\right|^2\right] \\
&\leq 4+\frac{4t}{h^2}\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|b\left(s,\widetilde{X}_s\right)-b\left(s,X_s\right)\right|^2\right]ds \\
&\quad +\frac{4}{h^2}\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\delta\left(s,\widetilde{X}_s\right)-\delta\left(s,X_s\right)\right|^2\right]ds \\
&\quad +\frac{4t}{h^2}\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|h\left(s,\widetilde{X}_s\right)-h\left(s,X_s\right)\right|^2\right]ds \\
&\leq 4+\frac{D_2}{h^2}\int_0^t \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\widetilde{X}_s-X_s\right|^2\right]ds \\
&\leq D_3,
\end{aligned}$$

où D_3 est une constante depend de T et de L. Il résulte alors, de la formule (2.8) que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_t\right|^2\right] \leq 2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_t-Z_t^h\right|^2\right]+2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Z_t^h\right|^2\right] \leq K.$$

Nous déduisons de (2.3) que pour tout $0 \leq r \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Z_t^h - Z_r^h\right|^2\right] &\leq \frac{3}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_r^t \left[b\left(s,\widetilde{X}_s\right) - b\left(s,X_s\right)\right] ds\right|^2\right] \\
&\quad + \frac{3}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_r^t \left[\delta\left(s,\widetilde{X}_s\right) - \delta\left(s,X_s\right)\right] dB_s\right|^2\right] \\
&\quad + \frac{3}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_r^t \left[h\left(s,\widetilde{X}_s\right) - h\left(s,X_s\right)\right] d\left\langle B\right\rangle_s\right|^2\right],
\end{aligned}$$

et en vertu de la condition de Lipschitz de b et de la proposition 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_r^t \left[b\left(s,\widetilde{X}_s\right) - b\left(s,X_s\right)\right] ds\right|^2\right] \\
&\leq \frac{t-r}{h^2}\int_r^t \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|b\left(s,\widetilde{X}_s\right) - b\left(s,X_s\right)\right|^2\right] ds \\
&\leq \frac{L\left(t-r\right)}{h^2}\int_r^t \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^2\right] ds \\
&\leq LD_3\left(t-r\right)^2.
\end{aligned}$$

En utilisant des arguments similaires, nous obtenons

$$\frac{1}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_r^t \left[\delta\left(s,\widetilde{X}_s\right) - \delta\left(s,X_s\right)\right] dB_s\right|^2\right] \leq LD_3\left(t-r\right)$$

et

$$\frac{1}{h^2}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\int_r^t \left[h\left(s,\widetilde{X}_s\right) - h\left(s,X_s\right)\right] d\left\langle B\right\rangle_s\right|^2\right] \leq LD_3(t-r)^2.$$

Ainsi, d'après les inégalités ci-dessus, nous avons

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Z_t^h - Z_r^h\right|^2\right] \leq D_4(t-r) \tag{2.9}$$

Par conséquent, de (2.8) et (2.9) nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[|Y_t - Y_s|^2\right] &\leq 3\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_t - Z_t^h\right|^2\right] + 3\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Z_t^h - Z_s^h\right|^2\right] + 3\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Z_s^h - Y_s\right|^2\right] \\ &\leq 3\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_t - Z_t^h\right|^2\right] + 3D_4\left(t-s\right) + 3\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Z_s^h - Y_s\right|^2\right].\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0 et t vers s, nous obtenons le résultat désiré. ■

2.0.7 Dérivée seconde de la solution d'une $G-$EDS

Le théorème suivant explicite la dérivée seconde de la solution d'une $G-$EDS par rapport à la condition initiale. Pour cela, nous supposons que l'hypothèse suivante est satisfaite :

$\left(\widetilde{H}\right)$ Pour tout $t \in [0,T]$, les fonctions $b_{xx}(t,.), \delta_{xx}(t,.), h_{xx}(t,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R})$ et bornées.

Théorème 2.3 *Sous les conditions du théorème* 2.1 *et l'hypothèse* $\left(\widetilde{H}\right)$, $\frac{\partial X_t^x}{\partial x}$ *est continument dérivable dans* $L_G^2(\Omega)$ *par rapport à* x. *De plus,* $P_t^x := \frac{\partial^2 X_t^x}{\partial x^2}$ *satisfait la* $G-$*EDS suivante :*

$$\begin{aligned}P_t^x &= \int_0^t b_{xx}\left(s, X_s^x\right)\left(Y_s^x\right)^2 ds + \int_0^t \delta_{xx}\left(s, X_s^x\right)\left(Y_s^x\right)^2 dB_s + \int_0^t h_{xx}\left(s, X_s^x\right)\left(Y_s^x\right)^2 d\left\langle B\right\rangle_s \\ &+\int_0^t b_x\left(s, X_s^x\right) P_s^x ds + \int_0^t \delta_x\left(s, X_s^x\right) P_s^x dB_s + \int_0^t h_x\left(s, X_s^x\right) P_s^x d\left\langle B\right\rangle_s, t \in [0,T],\end{aligned}$$

où Y_t^x *est défnie dans le théorème* 2.1.

Preuve. Soit $h \neq 0$ petit. Nous utilisons les mêmes notations que celles de la démonstration du théorème 2.1. Pour plus de simplicité, nous posons

$$P_t := P_t^x, \widetilde{Y}_t := Y_t^{x+h}, Q_t^h := \frac{\widetilde{Y}_t - Y_t}{h}.$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned}Q_t^h &= \frac{1}{h}\int_0^t \left[b_x\left(s, \widetilde{X}_s\right)\widetilde{Y}_s - b_x\left(s, X_s\right)Y_s\right] ds \\ &+\frac{1}{h}\int_0^t \left[\delta_x\left(s, \widetilde{X}_s\right)\widetilde{Y}_s - \delta_x\left(s, X_s\right)Y_s\right] dB_s \\ &+\frac{1}{h}\int_0^t \left[h_x\left(s, \widetilde{X}_s\right)\widetilde{Y}_s - h_x\left(s, X_s\right)Y_s\right] d\left\langle B\right\rangle_s.\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, la constante D change d'une ligne à une autre bien qu'elle ne soit pas la même. Comme $b_{xx}(t,.), \delta_{xx}(t,.), h_{xx}(t,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R})$, pour tout $t \in [0,T]$, alors

$$Q_t^h = I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.10}$$

où

$$I_1 = \int_0^t b_x\left(s, \widetilde{X}_s\right) Q_s^h ds + \int_0^t \int_0^1 b_{xx}\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta Z_s^h Y_s ds,$$

$$I_2 = \int_0^t \delta_x\left(s, \widetilde{X}_s\right) Q_s^h dB_s + \int_0^t \int_0^1 \delta_{xx}\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta Z_s^h Y_s dB_s$$

et

$$I_3 = \int_0^t h_x\left(s, \widetilde{X}_s\right) Q_s^h d\left\langle B\right\rangle_s + \int_0^t \int_0^1 h_{xx}\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta Z_s^h Y_s d\left\langle B\right\rangle_s.$$

Puisque $b_x(t,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R}),\ t \in [0,T]$, et bornée, nous avons, pour un certain $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b_x\left(s, \widetilde{X}_s\right) Q_s^h ds + \int_0^t b_x\left(s, X_s\right) P_s ds\right|^2\right] \\
\leq\ & 2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \left|b_x\left(s, \widetilde{X}_s\right)\right| \left|Q_s^h - P_s\right| ds\right)^2\right] \\
&+2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \left|b_x\left(s, \widetilde{X}_s\right) - b_x\left(s, X_s\right)\right| \left|P_s\right| ds\right)^2\right] \\
\leq\ & D\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \left|Q_s^h - P_s\right|^2 ds\right] + D\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \left(\left|\widetilde{X}_s - X_s\right| + \left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^{k+1}\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + \left|X_s\right|^k \left|\widetilde{X}_s - X_s\right|\right) \left|P_s\right| ds\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. De l'inégalité $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$, pour tout $a, b \geq 0$, nous déduisons que

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b_x\left(s,\widetilde{X}_s\right)Q_s^h ds + \int_0^t b_x\left(s,X_s\right)P_s ds\right|^2\right] \\
\leq\ & D\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \left|Q_s^h - P_s\right|^2 ds\right] + D\varepsilon\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|P_s\right|^4\right] ds \\
&+\frac{D}{\varepsilon}\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^4 + \left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^{4k+4} + \left|X_s\right|^{4k}\left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^4\right] ds.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant les propositions 2.1 et 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b_x\left(s,\widetilde{X}_s\right)Q_s^h ds + \int_0^t b_x\left(s,X_s\right)P_s ds\right|^2\right] \\
\leq\ & D\left[\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Q_s^h - P_r\right|^2\right] ds\right] + D\varepsilon + \frac{D}{\varepsilon}\left(h^4 + h^{4k+4}\right)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Puisque $b_{xx}(t,.) \in C_{l,lip}(\mathbb{R}), t \in [0,T]$, et bornée, nous trouvons, pour un certain $l \in N$,

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\int_0^1 b_{xx}\left(s,X_s+\theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right)d\theta Z_s^h Y_s ds - \int_0^t b_{xx}\left(s,X_s\right)Y_s^2 ds\right|^2\right] \\
\leq\ & 2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\int_0^1 \left|b_{xx}\left(s,X_s+\theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right)\right|d\theta\left|Z_s^h Y_s - Y_s^2\right| ds\right)^2\right] \\
&+2\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\int_0^1 \left|b_{xx}\left(s,X_s+\theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) - b_{xx}\left(s,X_s\right)\right|d\theta Y_s^2 ds\right)^2\right] \\
\leq\ & D\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T \left|Z_s^h Y_s - Y_s^2\right| ds\right)^2\right] + D\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(\int_0^T\left(\left|\widetilde{X}_s - X_s\right| + \left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^{l+1}\right.\right.\right. \\
&+\left.\left.\left.\left|X_s\right|^l\left|\widetilde{X}_s - X_s\right|\right)Y_s^2 ds\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, de $2ab \leq \frac{1}{\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2, a, b \geq 0$, it résulte que

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\int_0^1 b_{xx}\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta Z_s^h Y_s ds - \int_0^t b_{xx}\left(s, X_s\right) Y_s^2 ds\right|^2\right] \\
\leq\; & \frac{D}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_s^h - Y_s\right|^4\right] + D\varepsilon\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_s\right|^4\right] ds + \frac{D}{\varepsilon}\left(\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^4\right.\right. \\
& \left.\left. + \left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^{4l+4} + \left|X_s\right|^{4l}\left|\widetilde{X}_s - X_s\right|^4\right] ds\right).
\end{aligned}
$$

En utilisant les propositions 2.1 et 2.2, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t\int_0^1 b_{xx}\left(s, X_s + \theta\left(\widetilde{X}_s - X_s\right)\right) d\theta Z_s^h Y_s ds - \int_0^t b_{xx}\left(s, X_s\right) Y_s^2 ds\right|^2\right] \\
\leq\; & \frac{D}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_s^h - Y_s\right|^4\right] + C\varepsilon + \frac{D}{\varepsilon}\left(h^4 + h^{4l+4}\right) \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

et en combinant les inégalités (2.11) et (2.12), nous trouvons

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_1 - \int_0^t b_x\left(s, X_s\right) P_s ds + \int_0^t b_{xx}\left(s, X_s\right) Y_s^2 ds\right|^2\right] \\
\leq\; & D\int_0^T \widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Q_r^h - P_r\right|^2\right] ds + D\varepsilon + \frac{D}{\varepsilon}\left(h^4 + h^{4k+4} + h^{4l+4}\right) \\
& + \frac{D}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_s^h - Y_s\right|^4\right].
\end{aligned}
$$

En utilisant des arguments analogues, nous avons pour certains $m,n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_2-\int_0^t\delta_x(s,X_s)P_sdB_s+\int_0^t\delta_{xx}(s,X_s)Y_s^2dB_s\right|^2\right]\\ \leq\ & D\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Q_r^h-P_r\right|^2\right]ds+D\varepsilon+\frac{D}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4m+4}+h^{4n+4}\right)\\ &+\frac{D}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_s^h-Y_s\right|^4\right],\end{aligned}$$

et pour certains $p,q\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|I_3-\int_0^th_x(s,X_s)P_sd\langle B\rangle_s+\int_0^th_{xx}(s,X_s)Y_s^2d\langle B\rangle_s\right|^2\right]\\ \leq\ & D\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Q_r^h-P_r\right|^2\right]ds+D\varepsilon+\frac{D}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4p+4}+h^{4q+4}\right)\\ &+\frac{D}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_s^h-Y_s\right|^4\right].\end{aligned}$$

Alors, les inégalités ci-dessus donnent

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Q_t^h-P_t\right|^2\right]\ \leq\ & D\int_0^T\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{r\in[0,s]}\left|Q_r^h-P_r\right|^2\right]ds+\frac{D}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_s^h-Y_s\right|^4\right]\\ &+D\varepsilon+\frac{D}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4k+4}+h^{4l+4}+h^{4m+4}+h^{4n+4}\right.\\ &\left.+h^{4p+4}+h^{4q+4}\right),\end{aligned}$$

et l'inégalité de Gronwall donne

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Q_t^h-P_t\right|^2\right]\ \leq\ & D\varepsilon+\frac{D}{\varepsilon}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Z_s^h-Y_s\right|^4\right]+\frac{D}{\varepsilon}\left(h^4+h^{4k+4}+h^{4l+4}\right.\\ &\left.+h^{4m+4}+h^{4n+4}+h^{4p+4}+h^{4q+4}\right),\end{aligned}$$

Il résulte de la remarque 2.1, que

$$\lim_{h\to0}\widehat{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Q_t^h-P_t\right|^2\right]\leq D\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\lim_{h \to 0} \widehat{\mathbb{E}} \left[\sup_{t \in [0,T]} \left| Q_t^h - P_t \right|^2 \right] = 0 \tag{2.13}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Chapitre 3

Différentiabilité de la solution d'une $G-$EDS $d-$dimensionnelle

Ce chapitre constitue l'essentiel de cette thèse. Nous démontrons, dans un premier temps, l'existence et l'unicité de la solution d'un système de deux EDS gouvernées par un $G-$mouvemant Brownien de dimension d (S). Dans un second temps, nous démontrons la différentiabilité de la solution de la première $G-$EDS de (S) par rapport à la condition initiale. Un résultat intermédiaire sur l'inversibilité de la dérivée et sa $G-$EDS matricielle sera démontré.

3.1 Existence et unicité de la solution des $G-$EDS vectorielles et matricielles

Cette partie est consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un système de deux $G-$EDS dont une est vectorielle et l'autre matricielle.

3.1.1 Inégalités Techniques

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques lemmes techniques qui seront nécessaires pour le principe de contraction de Banach (théorème du point fixe) que nous allons utiliser pour prouver notre résultat.

Soit $H_T^{p,d}$ (resp. $H_T^{p,d\times d}$) l'ensemble de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{R}^{d\times d}$) de $[0,T]$ dans $L_G^p(0,T)$.

Dans ce qui suit, $\mathcal{H}_T^{p,d}$ (resp. $\mathcal{H}_T^{p,d\times d}$) $(1<p<\infty)$ est équipé des normes suivante :

$$N_{p,\lambda}(X) := \sup_{0\leq t\leq T}\left\{e^{-\lambda t}\left\|X_t\right\|_p\right\}, \lambda \geq 0.$$

Comme

$$e^{-\lambda T}N_{p,0}(X) \leq N_{p,\lambda}(X) \leq N_{p,0}(X),$$

alors, les normes $N_{p,\lambda}$ sont équivalentes. Notons que $\mathcal{H}_T^{p,d}$ et $\mathcal{H}_T^{p,d\times d}$ sont des espaces de Banach.

Lemme 3.1 *Soit* $X_t = \int_0^t \alpha_s dB_s^i$, *avec* $\alpha \in \overline{M}_G^{2,1}(0,T)$. *Alors, pour tout* $p > \frac{1}{2}$,

$$N_{2p,\lambda}(X) \leq C_3\lambda^{\frac{(1-2p)}{4p^2}}N_{2p,\lambda}(\alpha),$$

où C_3 *est une constante positive indépendante de* λ.

Preuve. En appliquant la $G-$formule d'Itô, nous obtenons

$$X_t^2 = 2\int_0^t X_s\alpha_s dB_s + \int_0^t \alpha_s^2 d\langle B\rangle_s,$$

ensuite, en tenant compte du fait que $(x+y)^p \leq 2^p(x^p+y^p)$ pour tout $x,y\geq 0$, nous avons

$$|X_t|^{2p} \leq 2^p\left(2^p\left|\int_0^t X_s\alpha_s dB_s\right|^p + \left|\int_0^t \alpha_s^2 d\langle B\rangle_s\right|^p\right).$$

Il découle des lemmes 1.4 et 1.5 que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(|X_t|^{2p}\right) \leq 2^p\left(2^pC_1\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^t |X_s|^p|\alpha_s|^p ds\right) + C_2\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^t |\alpha_s|^{2p} ds\right)\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} e^{-2\lambda pt}\widehat{\mathbb{E}}\left(|X_t|^{2p}\right) \leq\ & 2^p\left(2^pC_1\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^t e^{-2\lambda ps}|X_s|^p|\alpha_s|^p ds\right)\right. \\ & \left.+C_2\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^t e^{-2\lambda ps}|\alpha_s|^{2p} ds\right)\right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder classique, nous trouvons

$$\int_0^t e^{-2\lambda ps} |X_s|^p |\alpha_s|^p \, ds \le \left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |X_s|^{\frac{2p^2}{2p-1}} |\alpha_s|^{\frac{2p(p-1)}{2p-1}} \, ds \right)^{1-\frac{1}{2p}} \times \left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p} \, ds \right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Il résulte de l'inégalité de Hölder par rapport à $\widehat{\mathbb{E}}$ (pour plus de détails voir la proposition 16 de [15]) que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^t e^{-2\lambda ps} |X_s|^p |\alpha_s|^p \, ds \right) \le \left(\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T |X_s|^{\frac{2p^2}{2p-1}} |\alpha_s|^{\frac{2p(p-1)}{2p-1}} \, ds \right) \right)^{1-\frac{1}{2p}} \times \left(\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p} \, ds \right) \right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Par conséquent, en combinant les trois dernières inégalités et le fait que

$$\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^t e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p} \, ds \right) \le \left(\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T |\alpha_s|^{2p} \, ds \right) \right)^{1-\frac{1}{2p}} \left(\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p} \, ds \right) \right)^{\frac{1}{2p}},$$

nous obtenons

$$e^{-2\lambda pt} \widehat{\mathbb{E}} \left(|X_t|^{2p} \right) \le a_T \left(\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p} \, ds \right) \right)^{\frac{1}{2p}} \tag{3.1}$$

où

$$a_T := 2^p \left\{ 2^p C_1 \left(\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T |X_s|^{\frac{2p^2}{2p-1}} |\alpha_s|^{\frac{2p(p-1)}{2p-1}} \, ds \right) \right)^{1-\frac{1}{2p}} + C_2 \left(\widehat{\mathbb{E}} \left(\int_0^T |\alpha_s|^{2p} \, ds \right) \right)^{1-\frac{1}{2p}} \right\}.$$

- Si $\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T |\alpha_s|^{2p}\, ds\right) = 0$, alors $\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right) = 0$. Nous déduisons de l'équation (3.1) que $N_{2p,\lambda}(X) = 0$, ce qui signifie que le lemme est vrai pour toute constante positive C_3.

- Si $\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T |\alpha_s|^{2p}\, ds\right) \neq 0$, alors

$$\left(\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right)\right)^{\frac{1}{2p}} = \left(\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right)\right)^{\frac{1}{2p}-1} \times \widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right).$$

Par suite, la formule (3.1) devient

$$e^{-2\lambda pt}\widehat{\mathbb{E}}\left(|X_t|^{2p}\right) \leq a_T \left(\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right)\right)^{\frac{1}{2p}-1} \widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right) \tag{3.2}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Markov, nous trouvons

$$P\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E^P\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right),$$

pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $P \in \mathcal{P}$. Il s'ensuit que

$$\lambda c\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds \geq \lambda\right) \leq \widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right),$$

où c est la capacité de Choquet définie dans le premier chapitre, d'où

$$\left(\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right)\right)^{\frac{1}{2p}-1} \leq \lambda^{\frac{1}{2p}-1}\left(c\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds \geq \lambda\right)\right)^{\frac{1}{2p}-1}.$$

Ainsi

$$\left(\widehat{\mathbb{E}}\left(\int_0^T e^{-2\lambda ps} |\alpha_s|^{2p}\, ds\right)\right)^{\frac{1}{2p}-1} \leq b_T \lambda^{\frac{1}{2p}-1} \tag{3.3}$$

où $b_T := \left(\inf\limits_{\mu>0} c \left(\int\limits_0^T e^{-2\mu ps} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \mu \right) \right)^{\frac{1}{2p}-1}$.

Nous affirmons que $b_T < \infty$. En effet, si $b_T = \infty$, alors

$$\inf_{\mu>0} c \left(\int\limits_0^T e^{-2\mu ps} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \mu \right) = 0.$$

Cela implique que $\inf\limits_{\mu>0} P \left(\int\limits_0^T e^{-2\mu ps} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \mu \right) = 0$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. Il est facile de voir que l'application $f(\mu) := P \left(\int\limits_0^T e^{-2\mu ps} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \mu \right)$ est décroissante, et ainsi

$$\inf_{\mu>0} P \left(\int\limits_0^T e^{-2\mu ps} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \mu \right) = \lim_{\mu\downarrow 0} P \left(\int\limits_0^T e^{-2\mu ps} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \mu \right) = 0,$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to\infty} P \left(\int\limits_0^T e^{-\frac{2p}{n}s} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \frac{1}{n} \right) = 0$. Il s'ensuit, par le fait que la suite d'ensembles $\left(\int\limits_0^t e^{-\frac{2p}{n}s} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \frac{1}{n} \right)_{n\geq 1}$ est croissante, que

$$P \left(\bigcup_{n\geq 1} \left\{ \int\limits_0^T e^{-\frac{2p}{n}s} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \frac{1}{n} \right\} \right) = \lim_{n\to\infty} P \left(\int\limits_0^T e^{-\frac{2p}{n}s} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \geq \frac{1}{n} \right) = 0,$$

d'où

$$P \left(\bigcap_{n\geq 1} \left\{ \int\limits_0^T e^{-\frac{2p}{n}s} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds < \frac{1}{n} \right\} \right) = 1, \forall P \in \mathcal{P}.$$

Nous en déduisons que $\int\limits_0^T e^{-\frac{2p}{n}s} \left|\alpha_s\right|^{2p} ds < \frac{1}{n}$ $q.s.$ pour tout $n \geq 1$. Il en résulte que $\int\limits_0^T \left|\alpha_s\right|^{2p} ds = 0$ $q.s.$ lorsque $n \to \infty$, ce qui est une contradiction avec le fait que $\widehat{\mathbb{E}} \left(\int\limits_0^T \left|\alpha_s\right|^{2p} ds \right) \neq 0$.

Par combinaison des formules (3.2) et (3.3), nous obtenons

$$e^{-2\lambda pt} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left|X_t\right|^{2p} \right) \leq a_T b_T \lambda^{\left(\frac{1}{2p}-1\right)} \int\limits_0^T e^{-2\lambda ps} \widehat{\mathbb{E}} \left(\left|\alpha_s\right|^{2p} \right) ds.$$

Par conséquent,

$$N_{2p,\lambda}^{2p}(X) \leq Ta_T b_T \lambda^{\left(\frac{1}{2p}-1\right)} N_{2p,\lambda}^{2p}(\alpha),$$

et ainsi,

$$N_{2p,\lambda}(X) \leq C_3 \lambda^{\frac{1-2p}{4p^2}} N_{2p,\lambda}(\alpha),$$

où $C_3^{2p} = Ta_T b_T$. ■

Proposition 3.1 *Soit* $X_t = \int_0^t \alpha_s dB_s$ *avec* $\alpha \in \overline{M}_G^{2,d\times d}(0,T)$ *(resp.* $\overline{M}_G^{2,d\times 1}(0,T)$*). Alors, pour tout* $p > \frac{1}{2}$,

$$N_{2p,\lambda}(X) \leq \widetilde{C}_3 \lambda^{\frac{1-2p}{4p^2}} N_{2p,\lambda}(\alpha),$$

où $\widetilde{C}_3$ *est une constante positive indépendante de* λ.

Preuve. Remarquons que $\left|\alpha_t^{i,j}\right| \leq |\alpha_t|$, pour chaque $i,j = 1,...,d$, ce qui entraîne que

$$\widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\alpha_t^{i,j}\right|^{2p}\right) \leq \widehat{\mathbb{E}}\left(|\alpha_t|^{2p}\right),$$

et en appliquant l'inégalité $\left(\sum_{i=1}^d a_i\right)^k \leq d^k \sum_{i=1}^d a_i^k$, pour tout $a_1,...,a_d \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}\left(|X_t|^{2p}\right) &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left(\sum_{i=1}^d \left(X_t^i\right)^2\right)^p \leq d^p \widehat{\mathbb{E}}\left(\sum_{i=1}^d \left|X_t^i\right|^{2p}\right) \\
&\leq d^p \sum_{i=1}^d \widehat{\mathbb{E}}\left(\sum_{j=1}^d \int_0^t \alpha_s^{i,j} dB_s^j\right)^{2p} \\
&\leq d^p \sum_{i=1}^d d^{2p} \sum_{j=1}^d \widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\int_0^t \alpha_s^{i,j} dB_s^j\right|^{2p}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le lemme précédant, nous trouvons

$$\begin{aligned}
N_{2p,\lambda}^{2p}(X) &\leq d^{3p} \sum_{i,j=1}^d N_{2p,\lambda}^{2p}\left(\int_0^t \alpha_s^{i,j} dB_s^j\right) \\
&\leq d^{3p} d^2 C_3^{2p} \lambda^{2p\left(\frac{1-2p}{4p^2}\right)} N_{2p,\lambda}^{2p}(\alpha),
\end{aligned}$$

d'où

$$N_{2p,\lambda}(X) \leq \widetilde{C}_3 \lambda^{\frac{1-2p}{4p^2}} N_{2p,\lambda}(\alpha),$$

où $\widetilde{C}_3 = d^{\frac{3p+2}{2p}} C_3$. Puisqu'un vecteur est une matrice colonne, alors le cas $\alpha \in \overline{M}_G^{2,d\times 1}(0,T)$ se traite exactement de la même manière. ■

Lemme 3.2 *Soit* $Y_t = \int_0^t \beta_s ds$ *avec* $\beta \in \overline{M}_G^{1,d}(0,T)$ *(resp.* $\overline{M}_G^{1,d\times d}(0,T)$*). Alors, pour tout* $p > \frac{1}{2}$,

$$N_{2p,\lambda}(Y) \leq \frac{C_4}{\lambda^{\frac{2p-1}{2p}}} N_{2p,\lambda}(\beta),$$

où $C_4 = \begin{cases} dT^{\frac{1}{2p}} \ si \ \beta \in \overline{M}_G^{1,d}(0,T), \\ d^2 T^{\frac{1}{2p}} \ si \ \beta \in \overline{M}_G^{1,d\times d}(0,T). \end{cases}$

Preuve. Observons d'abord que si $\delta \in \overline{M}_G^{1,m\times n}(0,T)$ alors, en utilisant l'inégalité suivante :

$$\left(\sum_{k,l} a_i\right)^{\frac{1}{2}} \leq (mn)^{\frac{1}{2}} \sum_{k,l} a_i^{\frac{1}{2}},$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t \delta_s ds\right| &= \left(\sum_{k,l}\left|\int_0^t \delta_s^{k,l} ds\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (mn)^{\frac{1}{2}} \sum_{k,l}\left|\int_0^t \delta_s^{k,l} ds\right| \\ &\leq (mn)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \sum_{k,l}\left|\delta_s^{k,l}\right| ds \\ &\leq mn \int_0^t |\delta_s|\, ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t |\delta_s|\, ds\right| &\leq \left(\int_0^t e^{\frac{2p}{2p-1}\lambda s} ds\right)^{\frac{2p-1}{2p}} \left(\int_0^t e^{-2p\lambda s} |\delta_s|^{2p}\, ds\right)^{\frac{1}{2p}} \\
&\leq \left(\frac{2p-1}{2\lambda p}\right)^{\frac{2p-1}{2p}} \left(e^{\frac{2p}{2p-1}\lambda t} - 1\right)^{\frac{2p-1}{2p}} \left(\int_0^t e^{-2p\lambda s} |\delta_s|^{2p}\, ds\right)^{\frac{1}{2p}} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^{2p-1}} \left(e^{\frac{2p}{2p-1}\lambda t} - 1\right)^{\frac{2p-1}{2p}} \left(\int_0^t e^{-2p\lambda s} |\delta_s|^{2p}\, ds\right)^{\frac{1}{2p}}.
\end{aligned}$$

Il résulte que

$$\left|\int_0^t \delta_s ds\right|^{2p} \leq \frac{(mn)^{2p}}{\lambda^{2p-1}} \left(e^{\frac{2p}{2p-1}\lambda t} - 1\right)^{2p-1} \left(\int_0^t e^{-2p\lambda s} |\delta_s|^{2p}\, ds\right),$$

d'où, en appliquant $\widehat{\mathbb{E}}$ et en multipliant par $e^{-2p\lambda t}$ les deux membres de l'inégalité ci-dessus,

$$\begin{aligned}
e^{-2p\lambda t}\widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\int_0^t \delta_s ds\right|^{2p}\right) &\leq \frac{(mn)^{2p}}{\lambda^{2p-1}} \left(1 - e^{-\frac{2p}{2p-1}\lambda t}\right)^{2p-1} \left(\int_0^t e^{-2p\lambda s}\widehat{\mathbb{E}}\left(|\delta_s|^{2p}\right) ds\right) \\
&\leq \frac{(mn)^{2p}\, T}{\lambda^{2p-1}} N_{2p,\lambda}^{2p}(\delta).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\beta = \delta \in \overline{M}_G^{1,d\times d}(0,T)$, qui correspond à $m = n = d$, nous obtenons

$$N_{2p,\lambda}(Y) \leq \frac{d^2 T^{\frac{1}{2p}}}{\lambda^{\frac{2p-1}{2p}}} N_{2p,\lambda}(\beta),$$

et si $\beta = \delta \in \overline{M}_G^{1,d}(0,T)$, qui correspond à $m = d$ et $n = 1$, nous avons

$$N_{2p,\lambda}(Y) \leq \frac{d T^{\frac{1}{2p}}}{\lambda^{\frac{2p-1}{2p}}} N_{2p,\lambda}(\beta),$$

ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 3.3 *Soit* $Z_t = \int_0^t \gamma_s d\langle B^i, B^j\rangle_s$ *avec* $\gamma \in \overline{M}_G^{1,d}(0,T)$ *(resp.*$\overline{M}_G^{1,d\times d}(0,T)$*). Alors, pour tout* $p > \frac{1}{2}$,

$$N_{2p,\lambda}(Z) \leq \frac{C_5}{\lambda^{\frac{1}{2p}}} N_{2p,\lambda}(\gamma),$$

où $C_5 = \begin{cases} d^{\frac{p+1}{2p}} \left(\frac{C_2}{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} & si\ \gamma \in \overline{M}_G^{1,d}(0,T), \\ d^{\frac{p+1}{P}} \left(\frac{C_2}{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} & si\ \gamma \in \overline{M}_G^{1,d\times d}(0,T). \end{cases}$

Preuve. Soit $\zeta \in \overline{M}_G^{1,m\times n}(0,T)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t \zeta_s d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_s\right|^{2p} &= \left(\sum_{k,l}\left|\int_0^t \zeta_s^{k,l} d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_s\right|^2\right)^p \\ &\leq (mn)^p \sum_{k,l}\left|\int_0^t \zeta_s^{k,l} d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_s\right|^{2p}, \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de BDG, nous obtenons

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\int_0^t \zeta_s d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_s\right|^{2p}\right) &\leq (mn)^p C_2 \sum_{k,l} \int_0^t \widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\zeta_s^{kl}\right|^{2p}\right) ds \\ &\leq (mn)^{p+1} C_2 \int_0^t \widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\zeta_s\right|^{2p}\right) ds \\ &\leq (mn)^{p+1} C_2 \int_0^t e^{2\lambda ps} e^{-2\lambda ps} \widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\zeta_s\right|^{2p}\right) ds \\ &\leq (mn)^{p+1} C_2 N_{2p,\lambda}^{2p}(\zeta) \int_0^t e^{2\lambda ps} ds \\ &\leq (mn)^{p+1} C_2 \frac{\left(e^{2\lambda pt} - 1\right)}{2\lambda p} N_{2p,\lambda}^{2p}(\zeta), \end{aligned}$$

et par suite, en multpliant par $e^{-2\lambda pt}$, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
e^{-2\lambda pt}\widehat{\mathbb{E}}\left(\left|\int_0^t \zeta_s d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_s\right|^{2p}\right) &\leq (mn)^{p+1} C_2 \frac{\left(1-e^{-2\lambda pt}\right)}{2\lambda p} N_{2p,\lambda}(\zeta) \\
&\leq \frac{(mn)^{p+1} C_2}{2\lambda p} N_{2p,\lambda}(\zeta).
\end{aligned}
$$

On en déduit que si $\gamma = \zeta \in \overline{M}_G^{1,d\times d}(0,T)$, ce qui correspond à $m = n = d$, alors

$$
N_{2p,\lambda}(Z) \leq \frac{d^{\frac{P+1}{P}}}{\lambda^{\frac{1}{2p}}} \left(\frac{C_2}{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} N_{2p,\lambda}(\gamma),
$$

et si $\gamma = \zeta \in \overline{M}_G^{1,d}(0,T)$, ce qui correspond à $m = d$ et $n = 1$, alors

$$
N_{2p,\lambda}(Z) \leq \frac{d^{\frac{P+1}{2P}}}{\lambda^{\frac{1}{2p}}} \left(\frac{C_2}{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} N_{2p,\lambda}(\gamma).
$$

■

3.1.2 Théorème d'existence et unicité

Dans tout ce qui suit, nous noterons par $A'(x)$ la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial A^i(x)}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ pour tout champ vectoriel $A = (A^1, A^2, ..., A^n)$ dérivable. Considérons le système de deux $G-$EDS suivant :

$$
\begin{cases}
dX_t = \sum\limits_{k=0}^{d} A_k(X_t)\, dB_t^k + \sum\limits_{i,j=1}^{d} A_{i,j}(X_t)\, d\langle B^i, B^j\rangle_t, \ X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \\
dY_t = \sum\limits_{k=0}^{d} A_k'(X_t)\, Y_t dB_t^k + \sum\limits_{i,j=1}^{d} A_{i,j}'(X_t)\, Y_t d\langle B^i, B^j\rangle_t, Y_0 = I
\end{cases} \tag{(S)}
$$

où I est la matrice d'identité, $B_t^0 = t$ et $A_k, A_{i,j}; k \in \overline{0,d}, i,j \in \overline{1,d}$ sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H1) Condition de régularité : $A_k, A_{i,j}$ sont dérivables avec des dérivées bornées par C_6.

(H2) Condition de croissance linéaire : il existe une constante positive M_1 telle que :

$$
|A_k(x)| + |A_{i,j}(x)| \leq M_1(1+|x|), \ x \in \mathbb{R}^d \tag{3.4}
$$

Remarque 3.1 *L'hypothèse* (**H1**) *entraine que les champs de vecteurs sont Lipschtiziens :*

$$\left|\left(A_k'(x_1)-A_k'(x_2)\right)Y\right|+\left|\left(A_{i,j}'(x_1)-A_{i,j}'(x_2)\right)Y\right|\leq M_2\left|x_1-x_2\right|\left|Y\right| \tag{3.5}$$

pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ *et* $Y \in \mathbb{R}^{d\times d}$, *où* M_2 *est une constante positive.*

Remarque 3.2 *L'hypothèse* (**H2**) *implique que si* $X \in \mathcal{H}_T^{p,d}$ *alors il en est de même pour* $A_k(X), A_{i,j}(X)$.

Nous donnons maintenant le théorème d'existence et d'unicité de la solution de (S).

Théorème 3.1 *Pour tout* $p > \frac{1}{2}$, *le système* (S) *admet une solution unique* (X,Y), *dans* $\mathcal{H}_T^{2p,d} \times \mathcal{H}_T^{2p,d\times d}$. *De plus,*

$$(X,Y) \in \bigcap_{p>\frac{1}{2}} \mathcal{H}_T^{2p,d} \times \mathcal{H}_T^{2p,d\times d}.$$

Preuve. L'idée de cette preuve est de montrer que X et$Y$ sont des points fixes de deux contractions sur $\mathcal{H}_T^{2p,d}$ et $\mathcal{H}_T^{2p,d\times d}$ respectivement. Considérons à cet effet l'application $\theta : \mathcal{H}_T^{2p,d} \to \mathcal{H}_T^{2p,d}$, définie par :

$$\theta(X)_t = x+\sum_{k=0}^{d}\int_0^t A_k(X_s)\,dB_s^k+\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t A_{i,j}(X_s)\,d\left\langle B^i,B^j\right\rangle_s, t\geq 0 \text{ et } x\in\mathbb{R}^d,$$

et posons $k(\lambda) = \max_{\lambda>0}\left(\lambda^{\frac{(1-2p)}{4p^2}}, \lambda^{\frac{(1-2p)}{2p}}, \lambda^{-\frac{1}{2p}}\right)$. Soient $X^1, X^2 \in \mathcal{H}_T^{2p,d}$,

$$U_t^k := \int_0^t \left(A_k\left(X_s^1\right)-A_k\left(X_s^2\right)\right)dB_s^k$$

et

$$U_t^{i,j} := \int_0^t \left(A_{i,j}\left(X_s^1\right)-A_{i,j}\left(X_s^2\right)\right)d\left\langle B^i,B^j\right\rangle_s.$$

Il est clair que

$$\theta\left(X^1\right)-\theta\left(X^2\right)=\sum_{k=0}^{d}U^k+\sum_{i,j=1}^{d}U^{i,j},$$

d'où

$$N_{2p,\lambda}\left(\theta\left(X^1\right)-\theta\left(X^2\right)\right)\leq\sum_{k=0}^{d}N_{2p,\lambda}\left(U^k\right)+\sum_{i,j=1}^{d}N_{2p,\lambda}\left(U^{i,j}\right),$$

et en utilisant l'hypothèse (**H1**), la proposition 3.1 puis les lemmes 3.2 et 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}N_{2p,\lambda}\left(\theta\left(X^1\right)-\theta\left(X^2\right)\right) &\leq k(\lambda)\Big\{C_4N_{2p,\lambda}\left(A_0\left(X^1\right)-A_0\left(X^2\right)\right)\\ &\quad+\widetilde{C}_3\sum_{k=1}^{d}N_{2p,\lambda}\left(A_k\left(X^1\right)-A_k\left(X^2\right)\right)\\ &\quad+C_5\sum_{i,j=1}^{d}N_{2p,\lambda}\left(A_{i,j}\left(X^1\right)-A_{i,j}\left(X^2\right)\right)\Big\}\\ &\leq C_7k(\lambda)N_{2p,\lambda}\left(X^1-X^2\right),\end{aligned}$$

où $C_7=C_6\left(C_4+d\widetilde{C}_3+d^2C_5\right)$. Puisque $\lim\limits_{\lambda\to\infty}k(\lambda)=0$, alors en choisissant λ suffisamment grand de sorte que $C_7k(\lambda)<\frac{1}{2}$, nous obtenons que θ est une contraction.

Soit X le point fixe de θ (l'unique solution de la première équation de (S)). Notons que $X\in\mathcal{H}_T^{2p,d}$ pour chaque $p>\frac{1}{2}$, ce qui signifie que $X\in\bigcap\limits_{p>\frac{1}{2}}\mathcal{H}_T^{2p,d}$.

Soit maintenant l'application $\hat{\theta}:\mathcal{H}_T^{2p,d\times d}\to\mathcal{H}_T^{2p,d\times d}$ définie par :

$$\hat{\theta}(Y)_t=I+\sum_{k=0}^{d}\int_0^t A_s^{'}(X_s)Y_sdB_s^k+\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t A_{i,j}^{'}(X_s)Y_sd\left\langle B^i,B^j\right\rangle_s.$$

En procédant par des arguments analogues, nous trouvons

$$N_{2p,\lambda}\left(\widehat{\theta}\left(Y^1\right)-\widehat{\theta}\left(Y^2\right)\right)\leq C_7k(\lambda)N_{2p,\lambda}\left(Y^1-Y^2\right),$$

et donc en choisissant λ tel que $C_7k(\lambda)<\frac{1}{2}$, nous voyons que $\hat{\theta}$ est une contraction, ce qui prouve que la deuxième $G-$EDS de (S) possède une solution unique $Y\in\bigcap\limits_{p>\frac{1}{2}}\mathcal{H}_T^{2p,d\times d}$. La preuve est ainsi achevée. ■

Remarque 3.3 *Comme* $Y\in\bigcap\limits_{p>\frac{1}{2}}\mathcal{H}_T^{2p,d\times d}$, *alors* $N_{2p,\lambda}(Y)<\infty$, *et par conséquent, pour tout* $p>\frac{1}{2}$,

$$\sup_{0\leq t\leq T}\hat{E}\left[\|Y_t\|^{2p}\right]<\infty.$$

3.2 Differentiabilité de la solution d'une $G-$EDS

Après avoir assurer l'existence et l'unicité de la solution de (S), nous abordons dans cette partie l'étude de la propriété de la différentiabilité de la solution de la première $G-$EDS de (S) par rapport à la condition initiale ainsi que l'inversibilité de sa dérivée. Nous donnons également la $G-$EDS satisfaite par celle ci.

Pour prouver que Y est la dérivée de X, nous introduisons les approximations $(X^m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(Y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de X et Y respectivement définies comme suit :

Soit $(X^m)_{m\in\mathbb{N}}$ l'approximation de Picard de X correspondante à la contraction θ définie auparavant, *i.e.*

$$\begin{cases} X^m = \theta\left(X^{m-1}\right), \; m \geq 1, \\ X^0 = 0. \end{cases}$$

Il est bien connu que X^m converge vers X dans $\mathcal{H}_T^{2p,d}$ (Picard).

Lemme 3.4 *Soient Y^m, Y les solutions respectives des $G-$EDS linéaires suivantes :*

$$\begin{cases} dY_t^m = \sum\limits_{k=0}^{d} A'_k\left(X_t^{m-1}\right) Y_t^m dB_t^k + \sum\limits_{i,j=1}^{d} A'_{i,j}\left(X_t^{m-1}\right) Y_t^m d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_t, m \geq 1 \\ Y_0^m = I \end{cases} \tag{E'^m}$$

$$\begin{cases} dY_t = \sum\limits_{k=0}^{d} A'_k\left(X_t\right) Y_t dB_t^k + \sum\limits_{i,j=1}^{d} A'_{i,j}\left(X_t\right) Y_t d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_t \\ Y_0 = I \end{cases} \tag{E'}$$

Alors Y^m converge vers Y dans $\mathcal{H}_T^{2p,d\times d}$, pour tout $p > \frac{1}{2}$.

Preuve. En posant

$$\begin{aligned} \alpha^{k,m} &: = A'_k\left(X^{m-1}\right), \; \beta^{i,j,m} := A'_{i,j}\left(X^{m-1}\right), \\ \alpha^k &: = A'_k\left(X\right) \text{ et } \beta^{i,j} := A'_{i,j}\left(X\right), \end{aligned}$$

nous avons

$$Y_t^m - Y_t = \sum_{k=0}^{d} \int_0^t \left(\alpha_s^{k,m} Y_s^m - \alpha_s^k Y_s\right) dB_s^k + \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \left(\beta_s^{i,j,m} Y_s^m - \beta_s^{i,j} Y_s\right) d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_s.$$

En utilisant la proposition 3.1 et les lemmes 3.2 et 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} N_{2p,\lambda}\left(Y^m - Y\right) \;\leq\; & C_8 k\left(\lambda\right)\left(\sum_{k=0}^{d} N_{2p,\lambda}\left(\alpha^{k,m}Y^m - \alpha^k Y\right)\right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1}^{d} N_{2p,\lambda}\left(\beta^{i,j,m}Y^m - \beta^{i,j}Y\right)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $C_8 = \max\left(\widetilde{C}_3, C_4, C_5\right)$. En tenant compte du fait que

$$\left|A'_k\left(x\right)\right|, \left|A'_{i,j}\left(x\right)\right| \leq C_6,$$

nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left|\alpha_s^{k,m}Y_s^m - \alpha_s^k Y_s\right| \;\leq\; & \left|\alpha_s^{k,m}\left(Y_s^m - Y_s\right)\right| + \left|\left(\alpha_s^{k,m} - \alpha_s^k\right)Y_s\right| \\ \leq\; & C_6\left|Y_s^m - Y_s\right| + \left|\left(\alpha_s^{k,m} - \alpha_s^k\right)Y_s\right|, \end{aligned}$$

pour $0 \leq s \leq t \leq T$. Par conséquent,

$$N_{2p,\lambda}\left(\alpha^{k,m}Y^m - \alpha^k Y\right) \leq C_6 N_{2p,\lambda}\left(Y^m - Y\right) + N_{2p,\lambda}\left(\left(\alpha^{k,m} - \alpha^k\right)Y\right).$$

En utilisant des arguments similaires, nous trouvons

$$N_{2p,\lambda}\left(\beta^{i,j,m}Y^m - \beta^{i,j}Y\right) \leq C_6 N_{2p,\lambda}\left(Y^m - Y\right) + N_{2p,\lambda}\left(\left(\beta^{i,j,m} - \beta^{i,j}\right)Y\right),$$

et ainsi, l'inégalité (3.6) devient

$$N_{2p,\lambda}\left(Y^m - Y\right) \leq C_9 k\left(\lambda\right) N_{2p,\lambda}\left(Y^m - Y\right) + \varepsilon_m\left(\lambda\right) \tag{3.7}$$

où $C_9 = \left(d^2 + d + 1\right) C_8 C_6$ et

$$\varepsilon_m\left(\lambda\right) = C_8 k\left(\lambda\right)\left(\sum_{k=0}^{d} N_{2p,\lambda}\left(\left(\alpha^{k,m} - \alpha^k\right)Y\right) + \sum_{i,j=1}^{d} N_{2p,\lambda}\left(\left(\beta^{i,j,m} - \beta^{i,j}\right)Y\right)\right).$$

En choisissant λ suffisamment grand de tel sorte que $C_9 k\left(\lambda\right) < \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$N_{2p,\lambda}\left(Y^m - Y\right) \leq 2\varepsilon_m\left(\lambda\right).$$

Il suffit alors de montrer que $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m\left(\lambda\right) = 0$, ce qui revient à montrer que pour tout $k \in \overline{0, d}$ et pour tout $i, j \in \overline{1, d}$,

$$\lim_{m\to\infty} N_{2p,\lambda}\left(\left(\alpha^{k,m} - \alpha^k\right)Y\right) = \lim_{m\to\infty} N_{2p,\lambda}\left(\left(\beta^{i,j,m} - \beta^{i,j}\right)Y\right) = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder par rapport à $\widehat{\mathbb{E}}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\left(\alpha_s^{k,m}-\alpha_s^k\right)Y_s\right|^{2p}\right] &\leq \widehat{\mathbb{E}}\left[\left|\alpha_s^{k,m}-\alpha_s^k\right|^{4p}\right]^{\frac{1}{2}}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_s\right|^{4p}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M_2^{4p}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|X_s^{m-1}-X_s\right|^{4p}\right]^{\frac{1}{4p}}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left|Y_s\right|^{4p}\right]^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

d'où

$$N_{2p,\lambda}\left(\left(\alpha^{k,m}-\alpha^k\right)Y\right)\leq M_2^2\sup_{0\leq s\leq T}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left\|Y_s\right\|^{4p}\right]^{\frac{1}{4p}}N_{4p,\lambda}\left(X^{m-1}-X\right).$$

Par suite,

$$\lim_{m\to\infty}N_{2p,\lambda}\left(\left(\alpha^{k,m}-\alpha^k\right)Y\right)=0.$$

La démonstration de

$$\lim_{m\to\infty}N_{2p,\lambda}\left(\left(\beta^{i,j,m}-\beta^{i,j}\right)Y\right)=0$$

se conduit exactement de la même manière. ■

Nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 3.1 *Soient $U:\Omega\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ et $Q:\Omega\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d\times d}$ deux fonctions aléatoires. Nous disons que U est différentiable par rapport à $x\in\mathbb{R}^d$ et admet Q comme dérivée, si*

$$U(x+h)-U(x)=Q(x)h+|h|\varepsilon(h),$$

pour tout $h\in\mathbb{R}^d$, où $\varepsilon:\Omega\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ est une fonction aléatoire telle que $\lim_{|h|\to0}\varepsilon(h)=0$ q.s..

Notation 3.1 *Nous écrivons dans ce cas,*

$$U'(x)=Q(x)\ \ q.s..$$

Remarque 3.4 1) *Cette définition est équivalente à la propriété suivante :*

$$\lim_{|h|\to0}\frac{U(x+h)-U(x)-Q(x)h}{|h|}=0\ q.s..$$

2) *Paralellement au calcul differentiel classique, il est facile d'établir que si $U,V:\Omega\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ sont deux fonctions aléatoires differentiables, alors il en est de même pour $U+V,U\circ V,\alpha U(\alpha\in\mathbb{R}^d)$. De plus,*

$$\begin{aligned}(U+V)'(x) &= U'(x)+V'(x) \ \ q.s.,\\ (\alpha U)'(x) &= \alpha U'(x) \ \ q.s.,\\ (U\circ V)'(x) &= U'(V(x))\,V'(x) \ \ q.s..\end{aligned}$$

Théorème 3.2 *Soient (X,Y) la solution du système (S). Alors,*

$$X'_t(x)=Y_t(x) \ \ q.s.,$$

pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et pour tout $0\leq t\leq T$.

Preuve. La preuve se fait en deux étapes. Soit l'approximation $\{Y^m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset \mathcal{H}_T^{2,d\times d}$ la suite definie par la $G-$EDS (E'^m).

Étape 1 : Nous prouvons par récurrence que X^m est différentiable dans $\mathcal{H}_T^{2,d}$ sous la norme $N_{2,\lambda}$ et $(X^m)'(x)=Y^{m-1}(x)$.

Il est clair que $X^1(x)=x$, d'où $(X^1)'(x)=I=Y^0(x)$.

Supposons maintenant que $(X^{m-1})'(x)=Y^{m-2}(x)$. Il résulte alors que

$$\left[A_k\left(X^{m-1}(x)\right)\right]'=A'_k\left(X^{m-1}(x)\right)Y^{m-2}(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}N_{2,\lambda}\left[A_k\left(X^{m-1}(x+h)\right)-A_k\left(X^{m-1}(x)\right)-A'_k\left(X^{m-1}\right)Y^{m-2}(x)\,h\right]\\ =&\ 0\end{aligned} \tag{3.8}$$

de même

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}N_{2,\lambda}\left[A_{i,j}\left(X^{m-1}(x+h)\right)-A_{i,j}\left(X^{m-1}(x)\right)-A'_{i,j}\left(X^{m-1}\right)Y^{m-2}(x)\,h\right]\\ =&\ 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nous avons

$$N_{2,\lambda}\left(X^m(x+h)-X^m(x)-Y^{m-1}(x)\,h\right)\leq\sum_{k=0}^{d}N_{2,\lambda}\left(V^k\right)+\sum_{i,j=1}^{d}N_{2,\lambda}\left(V^{i,j}\right),$$

où

$$\begin{aligned}V_t^k \ =\ &\int_0^t\left[A_k\left(X_s^{m-1}(x+h)\right)-A_k\left(X_s^{m-1}(x)\right)\right.\\ &\left.-A'_k\left(X_s^{m-1}\right)Y_s^{m-2}(x)\,h\right]dB_s^k\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_t^{i,j} &= \int_0^t \Big[A_{i,j}\left(X_s^{m-1}(x+h)\right) - A_{i,j}\left(X_s^{m-1}(x)\right) \\ &\quad - A_{i,j}^{'}\left(X_s^{m-1}\right) Y^{m-2}(x)\, h \Big] \, d\left\langle B^i, B^j \right\rangle_s . \end{aligned}$$

Ensuite, en procédant à des arguments similaire à ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} & N_{2,\lambda}\left(X^m(x+h) - X^m(x) - Y^{m-1}(x)\, h\right) \\ \leq\; & k(\lambda)\Big(C_4 N_{2,\lambda}\Big[A_0\left(X^{m-1}(x+h)\right) - A_0\left(X^{m-1}(x)\right) \\ & - A_0^{'}\left(X^{m-1}\right) Y^{m-2}(x)\, h\Big] \\ & + \widetilde{C}_3 \sum_{k=1}^{d} N_{2,\lambda}\Big[A_k\left(X^{m-1}(x+h)\right) - A_k\left(X^{m-1}(x)\right) \\ & - A_k^{'}\left(X^{m-1}\right) Y^{m-2}(x)\, h\Big] \\ & + C_5 \sum_{i,j=1}^{d} N_{2,\lambda}\Big[A_{i,j}\left(X^{m-1}(x+h)\right) - A_{i,j}\left(X^{m-1}(x)\right) \\ & - A_{i,j}^{'}\left(X^{m-1}\right) Y^{m-2}(x)\, h\Big] . \end{aligned}$$

Il découle de (3.9) et (3.10) que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|h|} N_{2,\lambda}\left(X^m(x+h) - X^m(x) - Y^{m-1}(x)\, h\right) = 0,$$

d'où

$$\left(X^m\right)'(x) = Y^{m-1}(x) .$$

Étape 2 : Il reste à démontrer que $(X)' = Y$. Pour cela, observons d'abord qu'en vertu de la continuité de $N_{2,\lambda}$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|h|} N_{2,\lambda}\left(X(x+h) - X(x) - Y(x)\, h\right) \\ =\; & \frac{1}{|h|} N_{2,\lambda}\left(\lim_{m\to\infty}\left(X^m(x+h) - X^m(x) - Y^{m-1}(x)\, h\right)\right) \\ =\; & \lim_{m\to\infty} \frac{1}{|h|} N_{2,\lambda}\left(X^m(x+h) - X^m(x) - Y^{m-1}(x)\, h\right), \end{aligned}$$

d'où d'aprés l'étape 1,

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{1}{|h|}N_{2,\lambda}\left(X\left(x+h\right)-X\left(x\right)-Y\left(x\right)h\right).$$

Comme

$$\begin{aligned} & e^{-\lambda T}\sup_{0\leq t\leq T}\left\{\left\|X\left(x+h\right)-X\left(x\right)-Y\left(x\right)h\right\|_2\right\} \\ \leq\ & N_{2,\lambda}\left(X\left(x+h\right)-X\left(x\right)-Y\left(x\right)h\right), \end{aligned}$$

alors

$$\left\|X_t\left(x+h\right)-X_t\left(x\right)-Y_t\left(x\right)h\right\|_2\leq e^{\lambda T}N_{2,\lambda}\left(X\left(x+h\right)-X\left(x\right)-Y\left(x\right)h\right),$$

pour tout $0\leq t\leq T$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, d'où

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{1}{|h|}\left\|X_t\left(x+h\right)-X_t\left(x\right)-Y_t\left(x\right)h\right\|_2=0.$$

Par suite,

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{1}{|h|}\left(X_t\left(x+h\right)-X_t\left(x\right)-Y_t\left(x\right)h\right)=0\ q.s.,$$

pour tout $0\leq t\leq T$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, ce qui achève la démonstration.

■

Notation 3.2 *Pour le théorème suivant , nous posons*

$$d\Sigma_t:=\sum_{k=0}^{d}A_k'\left(X_t\right)dB_t^k+\sum_{i,j=1}^{d}A_{i,j}'\left(X_t\right)d\left\langle B^i,B^j\right\rangle_t,$$

nous avons alors

$$d\Sigma_t d\Sigma_t=\sum_{k,l=1}^{d}A_k'\left(X_t\right)A_l'\left(X_t\right)d\left\langle B^k,B^l\right\rangle_t.$$

Maintenant, nous présentons le théorème de l'inversibilité de la dérivée Y.

Théorème 3.3 *Soit* (X, Y) *la solution unique de* (S)*. Alors, la dérivée* Y *est inversible et son inverse* Z *satisfait la* G*−EDS matricielle suivante :*

$$\begin{cases} dZ_t = -Z_t\left(d\Sigma_t - d\Sigma_t d\Sigma_t\right) \\ Z_0 = I \end{cases} \qquad \left((E')^{-1}\right)$$

Preuve. Soit $S_t = Y_t Z_t$. En appliquant la formule d'intégration par parties matricielle, nous trouvons

$$\begin{aligned} dS_t &= Y_t dZ_t + dY_t Z_t + dY_t dZ_t \\ &= Y_t\left[-Z_t\left(d\Sigma_t - d\Sigma_t d\Sigma_t\right)\right] + d\Sigma_t Y_t Z_t + d\Sigma_t Y_t\left[-Z_t\left(d\Sigma_t - d\Sigma_t d\Sigma_t\right)\right], \end{aligned}$$

d'où

$$dS_t = -S_t\left(d\Sigma_t - d\Sigma_t d\Sigma_t\right) + d\Sigma_t S_t - d\Sigma_t S_t d\Sigma_t \qquad (3.10)$$

De plus, en procédant à des mêmes arguments utilisés précédemment, nous prouvons que la G−EDS (3.10) admet une solution unique et comme $S_t = I$ est une solution triviale, alors $(Y_t)^{-1} = Z_t$. ■

Conclusion et perspectives

Nous avons généralisé dans cette thèse, le résultat obtenu par Lin en 2013, qui porte sur l'étude de la différentiabilité par rapport à la condition initiale la solution d'une $G-$équation différentielle stochastique unidimensionnelle, au cas $d-$dimensionnel. Notre approche qui diffère de celle de Lin, est essentiellement basée sur le principe du point fixe de Picard.

Dans un premier temps, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un système de deux $G-$équations différentielles stochastiques (S), l'une $d-$dimensionnelle et l'autre matricielle, en s'appuyant sur le principe du point fixe de Picard. En effet, nous avons introduit des normes équivalentes dépendant d'un paramètre positif λ, qui a été choisi suffisamment grand pour obtenir l'argument de la contraction qui nous a garantit l'existence et l'unicité de la solution (X_t, Y_t) de (S).

Dans un second temps, nous avons démontré la différentiabilité de la solution d'une $G-$équation différentielle stochastique $d-$dimensionnelle par rapport à la condition initiale. La clé de cette étude a été de prouver que la dérivée de la $m^{ième}$ approximation de Picard X_t^m de X_t est la $(m-1)^{ème}$ approximation Y_t^{m-1} d'une autre approximation du processus Y_t, ce qui nous a permis de montrer que Y_t est la dérivée de la solution X_t. À la fin, un résultat intermédiaire qui indique que la dérivée est inversible et son inverse satisfait une certaine $G-$équation différentielle stochastique a été également prouvé.

Comme perspectives nous envisageons d'aborder les questions suivantes :

- Étudier les $G-$EDS des valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice dérivée Y_t.
- Étudier la différentiabilité de la solution d'une $G-$EDS dont la condition initiale dépend d'un paramètre.
- Étendre les résultats de cette thèse à l'étude des $G-$EDS de type mean-field.

Bibliographie

[1] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber and D. Heath, Coherent measures of risk. Mathematical Finance 9(3) : 203-228, 1999.

[2] X. Bai, Y.Lin, On the existence and uniqueness of solutions to stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion with Integral-Lipschitz coefficients, arXiv :1002.1046v3 [math.PR] (2010).

[3] D. Banõs, The Bismut-El Worthy-Li formula for mean-field stochastic differential equation. Potential Anal. 34, 2 (2011).

[4] M. Belksier, H. Boutabia and R. Bougherra, Stochastic Differential Equations for Orthogonal Eigenvectors of $(G, \varepsilon)-$Wishart Process Related to Multivariate $G-$fractional Brownian Motion, Bol. Soc. Paran. Mat. c SPM –ISSN-2175-1188 on line, https ://doi.org/10.5269/bspm.51618.

[5] M. Belksier, H. Boutabia and R. Bougherra, Les équations différentielles stochastiques des vecteurs propres de $(G, \varepsilon)-$Processus de Wishart Relié à $G-$mouvement Brownian multivarié, Thése de Doctorat de l'université Badji Mokhtar de Annaba, Algérie (2021).

[6] R. Bougherra, H. Boutabia & M. Belksier. Differentiability of Stochastic Differential Equation Driven by $d-$Dimensional $G-$Brownian Motion with Respect to the Initial Data. Bull. Iran. Math. Soc. 2020. https ://doi.org/10.1007/s41980-020-00490-7.

[7] H. Boutabia, I. Grabsia, Chaotic expansion in the $G-$exprctation space. Opuscula Math, 33,no,4 (2013), 647-666.

[8] R. Buckdahn, J. Li, S. Peng, C. Rainer, Mean-field stochastic differential equations and associated PDEs. Ann. Probab. 45, 20 (2017).

[9] E-H Chalabi and H. Boutabia, On the exsitence and uniqueness of solution of stochastic differential system driven by $G-$Brownian motion, Advanced Studies in Contemporary Mathematics 29 (2019), No. 4, pp. 477 - 488. https ://doi.org/10.17777/ascm2019.29.4.477.

[10] E-H Chalabi and H. Boutabia, Les $G-$Fonctionnelles Exponentielles et Les $G-$Equations Différentielles Stochastiques, Thése de Doctorat de l'université Badji Mokhtar de Annaba, Algérie (2018).

[11] Z. Chen and L. G. Epstein, Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time. Econometrica 70(4) : 1403-1443, 2002.

[12] G. Choquet, (1953) Theory of capacities, Annales de Institut Fourier, 5, 131–295.

[13] F. Coquet, Y. Hu, J. Mémin and S. Peng, Filtration-consistent nonlinear expectations and related $G-$expectations. Probab. Theory Relat. Fields 123(1) : 1-27, 2002.

[14] C. Dellacherie, (1972) Capacités et Processus Stochastiques. Springer Verlag.

[15] L. Denis, M. Hu and S. Peng, Function spaces and capacity related to a sublinearexpectation :application to $G-$Brownian motion paths. Potential Anal. 34(2) : 139-161, 2011.

[16] L.G. Epstein and S. Ji, Ambiguous volatility, possibility and utility in continuous time.arXiv :1103.1652.

[17] L.G. Epstein and S. Ji, Ambiguous volatility and asset pricing in continuous time. arXiv :1301.4614

[18] F. Faizullah and D.Piao, Existence of solutions for $G-$SDEs with upper and lower solutions in the reverse order, Int. J. Phy. Sci, vol 3, no. 7 (2012), 432–439.

[19] F. Faizullah and D. Piao, A note on the existence of solutions for backward stochastic differential equations under $G-$Brownian motion, World App. Sci. J.

[20] H. Föllmer, A. Schied, (2002) Convex measures of risk and trading constraints. Finance and Stochastics 6 (4), 429-447.

[21] F. Gao, Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion, Stochastic Processes and Their Applications, vol 119, no. 10 (2009), 3356–3382.

[22] X. Guo, C. Pan and S. Peng, A note on $G-$optimal stopping problems. arXiv :1211.0598v1.M. Hu and X. Li, Independence under the G-expectation framework, Journal of Theoretical Probability 27(3) (2014), 1011–1020.

[23] I. Grabsia, H. Boutabia, Chaotic expansion in the $G-$expectation space, Thése de Doctorat de l'université Badji Mokhtar Annaba, Algérie (2014).

[24] X. Li, and S. Peng, Stopping times and related Itô's calculus with $G-$Brownian motion, Stochastic Processes and their Applications 121 (2011) 1492–1508.

[25] Q. Lin, Some properties of stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion, Acta Mathematica Sinica, English Series 29 (2013), 923–942.

[26] Q. Lin, Differentiability of stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion. Sci. China Math. 56, 20 (2013)

[27] Y. Lin, Equations différentielles stochastiques sous les espérances mathématiques non-linéaire et applications, These de Doctorat. Université de Rennes 1, 2013.

[28] Y. Lin, Stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion with reflecting boundary conditions, Electronic Journal of Probability 18 (2013), 1–23.

[29] J. Ma and S. Yao, On quadratic $g-$evaluations/expectations and related analysis.Stoch. Anal. Appl. 28(4) : 711-734, 2010.

[30] X. Mao, Approximate solutions for a class of stochastic evolution equations with variable delays, Numer. Funct. Anal. Optimiz., vol. 12, no. 5,6, pp. 525-533, 1991.

[31] X. Mao, Approximate solutions for stochastic differentail equations with pathwise uniqueness, Stochastic Analysis and Applications, vol. 3, no. 12, pp. 355-367, 1994.

[32] X. Mao, Stochastic Differentail Equations and their Applications, Horwood Publishing Chichester, 1997.

[33] S. Meradji, H. Boutabia, S. Stihi, Stochastic differential equations for eigenvalues and eigenvectors of a $G-$Wishart process with drift, Ukr. Mat. Zh. 71 : 4 (2019) , 502-515.

[34] S. Meradji, H. Boutabia, Analyse stochastique des valeurs propres des matrices aléatoires à valeurs $G-$browniennes, Thése de Doctorat de l'université Badji Mokhtar de Annaba, Algérie (2017).

[35] B. K. Oksendal, Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications,4th ed., Springer, 1995.

[36] S. Peng, Backward SDE and related $g-$expectation. Backward stochastic differential equations (Paris, 1995-1996), 141-159. Pitman Res. Notes Math. Ser. 364, Harlow : Longman, 1997.

[37] S. Peng, Monotonic limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type. Probab. Theory Relat. Fields 113(4) : 473-499, 1999.

[38] S. Peng, Filtration consistent nonliear expectations and evaluations of contingent claims. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series 20(2), 1–24 (2004).

[39] S. Peng, $G-$expectation,$G-$Brownian motion and related stochastic calculus of Itô's type, The Abel Symposium 2005, Abel Symposia 2, Edit. Benth et al., Springer-Verlag, 541–567.

[40] S. Peng, Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains, Chin. Ann. Math. 2005, 26B(2), 159-184.

[41] S. Peng, $G-$Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty.arXiv : [math.PR] 0711.2834v1 (2007).

[42] S. Peng, Law of Large Numbers and Central Limit Theorem under Nonlinear Expectations, in arXiv : math. PR/0702358vl, 2007.

[43] S. Peng, A New Central Limit Theorem under Sublinear Expectations. arXiv, 0803.2656 (2008).

[44] S. Peng, Multi-dimensional $G-$Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation, Stoch. Proc. Appl. 118 (2008), 2223–2253.

[45] S. Peng, Survey on normal distributions, central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations, Science in China Series A : Mathematics 52(7) (2009).

[46] S. Peng, Nonlinear expectation and stochastic calculus under uncertainty with robust central limit theorem and G-Brownian motion, arXiv :1002.4546v1[math.PR], (2010).

[47] S. Peng, Y. Song, J. Zhang, A complete representation theorem for $G-$martingales. arXiv :1201.2629 (2012).

[48] L. Peng and W.Falei, Stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion and ordinary differential equations, arXiv :1309.5232v2 [math.PR] (2014).

[49] L. Peng and W.Falei, Viability for Stochastic Differential Equations Driven by $G-$Brownian Motion, Springer Science+Business Media, LLC (2017).

[50] E. Picard, Traité d'Analyse, Gauthier-Villars, Paris, 1891.

[51] Y. Ren, J. Wang and L. Hu, Multi-valued stochastic differential equation driven by $G-$Brownian motion and related stochastic control problems, International Journal of Control (2016), 1–23.

[52] Y. Ren and L. Hu, A note on the stochastic differential equations driven by $G-$Brownian motion, Statistics and Probability Letters, vol. 81, pp. 580-585, 2011.E. Rosazza, Risk measure via g-expectation. Insurance Math. Econom. 39(1) : 19-34, 2004.

[53] H. Sussmann, An interpretation of stochastic differential equations as ordinary differential equations which depend on the sample point., Bulletin AMS 83 (1977), 296–298.

[54] B. Zhang, J. Xu and D. Kannan, Extension and application of Itô's formula under $G-$framework.Stoch. Anal. Appl. 28(2) : 322-349, 2010.

[55] H. Zhang, A complex version of $G-$expectation and its application to conformal martingale, arxiv : 1502 :02787v1 [math.PR] (2015 2016).