

Badji Mokhtar-Annaba University



Faculty of Science
Department of Mathematics

جامعة باجي مختار -
عنابة -
كلية العلوم - قسم الرياضيات



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat

Option : Mathématique appliqué- Actuariat

Sur les séries chronologiques spatio-temporelles multivariées

Par:

Amrani Madjda

Sous la direction de

ZEGHDOUDI Halim

Prof. U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT : Merzougui Mouna

MCA. U.B.M. Annaba

EXAMINATEUR : Ezzebsa Abdelali

MCA. U. Guelma

EXAMINATEUR : Goual Hafida

MCA. U.B.M. Annaba

Année : 2021

TABLE DES MATIÈRES

Liste des abréviations et notations	v
Résumé en Arabe	viii
Abstract	x
Résumé en Français	xi
Remerciements	xii
Dédicaces	xiii
Introduction générale	xv
1 Sur les processus multivariés et les modèles ARCH/GARCH	
univariés	1
1.1 Notions de base	2
1.1.1 Processus aléatoire	2
1.1.2 Les opérateurs	2
1.1.3 Notions de stationnarité	2

Table des matières

1.1.4	Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation	4
1.1.5	Le bruit blanc	4
1.1.6	La volatilité	4
1.1.7	Séries financières	5
1.1.8	Hétéroscédasticité	5
1.2	Les modèles des séries chronologiques univariés	6
1.2.1	Le modèle <i>AR</i>	6
1.2.2	Le modèle <i>MA</i>	7
1.2.3	Le modèle <i>ARMA</i>	7
1.2.4	Le modèle <i>ARIMA</i>	8
1.2.5	Le modèle <i>SARIMA</i>	8
1.2.6	Le modèle <i>ARCH</i>	9
1.2.7	Les modèles <i>GARCH</i>	10
1.3	Les tests	14
1.3.1	Tests d'effets <i>ARCH/GARCH</i>	14
1.3.2	Tests d'autocorrélation sur les carrés ε_t^2	15
1.3.3	Tests <i>LM</i> d'absence d'auto-corrélation sur ε_t^2	15
2	Modèles des séries chronologiques multivariées	17
2.1	Modèles <i>GARCH</i> multivariés	18
2.2	Modèle <i>VAR(p)</i>	20
2.2.1	Analyse du processus <i>VAR(1)</i>	21
2.2.2	La fonction d'autocovariance d'un processus <i>VAR(p)</i>	23
2.2.3	Modèle <i>GARCH</i> vectoriel	24
2.2.4	Modèle Diagonal	25
2.2.5	Modèle <i>BEKK</i>	26
2.2.6	Modèle <i>DCC-GARCH</i>	28
2.3	Estimation	32

2.4 Application	33
2.4.1 Avantages et nouveauté des travaux actuels	33
2.4.2 Analyse de données réelles	34
3 Modèles de séries chronologiques spatio-temporelles multi-	
variées	45
3.1 Concepts généraux sur les modèles spatiaux	46
3.2 Les matrices de poids spatial	48
3.2.1 Poids basés sur la distance	49
3.2.2 Pondérations basées sur les limites	51
3.2.3 Poids combinés distance-frontière	52
3.2.4 Normalisations des poids spatiaux	52
3.3 Présentation des modèles des séries chronologiques spatio-temporelles	
multivariées	54
3.3.1 Modèle STARMA	54
3.3.2 Modèle STAR	55
3.3.3 Modèle GSTAR	56
3.4 Notions de causalité	57
3.4.1 Causalité au sens de Granger	58
3.5 Notion de cointégration	59
3.5.1 Principe de la cointégration	60
3.5.2 Test de cointégration	61
3.6 Détermination de la structure causale avec un modèle GSTAR	62
3.6.1 Détermination de la structure causale avec un modèle	
GSTAR	62
3.7 Résultats et discussions	66
Conclusion et Perspectives	77

Annexe : Théorie de de probabilité et Estimation	79
.1 Processus Indépendants	80
.2 Estimation	80
.2.1 Estimateurs du <i>MV</i> sous l'hypothèse de normalité et	
Estimateurs du <i>PMV</i>	80
.2.2 Maximum et Pseudo Maximum de Vraisemblance ap-	
pliqués aux modèle <i>ARCH/GARCH</i>	81
.2.3 Estimation des paramètres du modèle ARCH par la	
méthode de <i>MV</i>	81
.2.4 Estimation des paramètres du modèle GARCH par la	
méthode de <i>MV</i>	82
Bibliographie	84

└────────────────── Liste des abréviations et notations

bb : Bruit blanc

AR : Modèle AutoRégressif (AutoRegressive model).

MA : Moyenne Mobile.

VAR : Vecteurs Autorégressif.

VAR(p) : Processus stationnaire autorégressif de dimension \mathbb{N} et d'ordre p .

ARIMA : ARMA Intégré.

ARCH : Modèle d'Hétéroscédasticité Conditionnelle AutoRégressive (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity model).

GARCH : Modèle d'Hétéroscédasticité Conditionnelle AutoRégressive Généralisée (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity model).

ARMA : Modèle Moyenne Mobile AutoRégressif (AutoRegressive Moving Average model).

SARIMA : Modèle Moyenne Mobile Intégrée Saisonnière AutoRégressive (Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average model).

IGARCH : GARCH Intégré.

EGARCH : GARCH Exponentiel.

- BEKK** : Baba, Engle, Kroner et Kraft.
- CCC-GARCH** : Corrélations Conditionnelles Constantes.
- DCC-GARCH** : Corrélations Conditionnelles Dynamiques.
- STARMA** : Autorégressif Moyenne Mobile.
- STAR** : Autorégressives spatio-temporelles.
- STMA** : Moyennes mobiles spatio-temporelles.
- GSTAR** : Autorégressives spatio-temporelles.
- MC** : Moindres Carrés conditionnels (**LS** : conditional Least Squares).
- MCL** : Moindres Carrés Linéaires (**LLS** : Linear Least Squares).
- AIC** : Critère d'Information d'Akaike (Akaike Informarion Criterion).
- MV** : Maximum de Vraisemblance (**ML** : Maximum Likelihood).
- V.A** : Variable Aléatoire (**R.V** Random Variable).
- I.I.D** : Indépendants Identiquement Distribués (Independent Identically Distributed).
- ST** : Série Temporelle (**TS** : Time Series).
- \sum : La somme (The sum).
- \prod : Le produit (The product).
- \int : L'intégrale (The integral).
- ! : Factorielle (factorial).
- $\|\cdot\|$: La norme Euclidienne (The Euclidean norm).
- $|\cdot|$: La valeur absolue (The absolute value).
- $\lfloor \mathbf{x} \rfloor$: La partie entière de \mathbf{x} (The integer part of \mathbf{x}).
- $\{\mathbf{X}_n\}$: Suite de variables aléatoires (Sequence of random variables).
- E(.)** : L'Espérance (The Expectation).
- V(.)** : La Variance (The Variance).
- Cov(.,.)** : La Covariance (The Covariance).
- E(. | .)** : L'Espérance conditionnelle (The conditional Expectation).

Liste des abréviations et notations

$\mathbf{N}(\cdot, \cdot)$: La loi Normale (The Normal law).

$\bar{\mathbf{X}}$: La moyenne empirique (The empirical mean).

$\hat{\cdot}$: Estimateur (Estimator).

$\tilde{\cdot}$: Approximation (Approximation).

■ : Fin de la preuve (End of a proof).

Résumé en Arabe

total

الملخص

تركز هذه الأطروحة على السلاسل الزمنية (ARCH-GARCH) والنماذج المكانية والزمانية. على وجه الخصوص ، ندرس فئة معينة من النماذج ، نماذج الانحدار الذاتي الزمانية المكانية المعممة ، أو GSTAR مع مصفوفات نقطية مختلفة. الهدف من هذه الرسالة هو توضيح تطور اختبار السببية بمعنى Granger على نماذج GSTAR . في البداية ، طبقنا اختبار السببية بمعنى Granger على نموذج VAR بعد نماذج GSTAR. من هذه النتيجة ، تم الحصول على شروط جديدة في اختبار السببية بالنسبة لمصفوفة النقاط. المنهجية موضحة ببيانات فعلية من 23-01-2020 إلى 29-08-2020 من 4 دول (كندا والولايات المتحدة والمكسيك وجرينلاند). تم استخدام حالات الإصابة بفيروس COVID-19 يومياً في دراساتها.

الكلمات الدالة : السلاسل الزمنية ، القوس ، GARCH ، السببية بمعنى جرانجر ، متعدد المتغيرات المكانية الزمانية ، GSTAR ، STAR.

1.png

This thesis focuses on time series (ARCH-GARCH) and spatio-temporal models. In particular, we study a certain class of models, generalized spatio-temporal autoregressive models, or GSTAR with different dot matrices.

The aim of this thesis is to illustrate the development of the causality test in the sense of Granger on GSTAR models. Initially, we applied the causality test in the sense of Granger on the VAR model after the GSTAR models. From this result, new conditions were obtained on the causality test relative to the point matrix. The methodology is illustrated with actual data from 2020-01-23 to 2020-08-29 from 4 countries (Canada, United States, Mexico and Greenland). Confirmed cases of COVID-19 per day have been used in our studies.

Key words : time series, ARCH, GARCH, Causality in the sense of granger, multivariate spatio-temporal, STAR, GSTAR.

Résumé en Français

Cette thèse porte sur les séries chronologiques multivariées (ARCH-GARCH) et les modèles spatio-temporels. Plus particulièrement, nous étudions une certaine classe de modèles, les modèles autorégressifs spatio-temporels généralisés, ou GSTAR avec différentes matrices de point.

Le but de cette thèse est d'illustrer le développement du test de causalité au sens de Gagner sur des modèles GSTAR. Dans un premier temps on a appliqué le teste de causalité au sens de Gagner sur le modèle VAR après les modelés GSTAR .De ce résultat, on a obtenu des nouvelles conditions sur le tester de causalité rapport à la matrice de point. La méthodologie est illustrée avec des données réelles sont du 2020-01-23 aux 2020-08-29 de 4 pays (Canada, États-Unis, Mexique et Greenland). Des cas confirmés de COVID-19 par jour ont été utilisés dans nos études.

Mots clés : séries temporelles, ARCH, GARCH, La causality au sens de granger, spatio-temporelles multivariées, STAR, GSTAR.

Remerciements

Qu'il me soit permis de remercier Monsieur le président, Mesdames et Messieurs les membres du jury qui ont eu l'amabilité d'acceptée de lire mon travail et d'avoir émis des observations et des remarques pertinentes qui me seront utiles pour l'amélioration de la qualité de mon mémoire

Ma reconnaissance va également à mon directeur de recherche, Le professeur ZEGHEDOUDI Halim, pour son soutien moral et particulièrement ses précieux conseils tout au long de la rédaction de cette thèse. Sa patience et sa disponibilité m'ont aidé à élaborer de façon efficace toutes les étapes malgré les circonstances difficiles de ces derniers temps, Je saisis l'occasion pour remercier le professeur BOUEZMARNI Taoufik pour toute la période de stage où il a mis à ma disposition le lien de test de causalité et les séries chronologiques qui ont été d'une très grande importance dans l'avancement de mes travaux. J'exprime mon entière reconnaissance envers tous les professeurs du Département de mathématiques de l'université de BADJI Mokhtar Annaba, en particulier le professeur REMITA Mohamed Riad et le professeur BOUTABIA Hacene pour leurs constants encouragements.

Si la réalisation d'un doctorat est une chose importante, l'amitié est aussi importante, et Dieu sait que ce que j'ai passé pendant ces quatre belles années. À commencer par, Chaabane, Khaled et particulièrement l'adorable SARA, je vous remercie pour les conseils scientifiques, le soutien moral et pour l'amitié qui n'ont jamais cessé de manifester à mon égard.

Je dédie ce mémoire à Mama et Papa, je vous dis merci, parce que ce diplôme, c'est le vôtre. Merci d'avoir enduré mes trop-pleins et mes impatiences, de m'avoir préparé du café (Mama lazziza) pendant les nuits blanches jusqu'aux petites heures du matin en réalisant que j'aimer ce que je faisais.

Surtout, merci d'avoir été là pour moi pendant toutes les étapes de ma vie, quand la pression montait, quand je me suis retrouvé face à un mur, quand j'ai vécu les premières contrariétés de ma vie, quand j'ai perdu des personnes précieuses, j'ai pleuré de fébrilité, j'ai trouvé votre présence pour me reconforter

Vous avez écopé de mes pires moments et vous m'aimez encore quand même. Ça n'a pas de prix. Alors, merci papa, Mama, pour l'ensemble des sacrifices que vous avez faits, aussi je suis reconnaissante pour l'éducation, la confiance et l'indépendance, vous m'avez permis de réaliser mon rêve c'est

le plus beau cadeau que vous pouviez me faire. C'est plus que je ne pourrai jamais vous offrir, alors au moins. Merci ! Je vous aime très fort, et je fière d'avoir hérité l'exigence de Mama et l'amour du travail de papa.

Je veux rendre hommage particulier à mon grand-père Rabi yarhamou, car j'ai hérité de lui la bonté la détermination. Je me souviens de chaque minute passée à son chevet où ont échangé des points de vue Chaque matin où je me lève à cinq heures du matin, pour mes révisions je me souviens qu'il m'a toujours appelé docteur, j'étais en première année universitaire, Dieu merci, après 8 ans je suis devenu Docteur et j'aurais aimé qu'il soit là pour voir que je suis devenu ce qu'il a toujours espéré que je sois.

Enfin un grand merci à ma petite sœur (DOUAA) de m'avoir conseillé de trouver un marie et d'apprendre à faire la cuisine. Maintenant je peux lui répondre, que je suis prête pour la cuisine, avec mon doctorat en actuariat pour bien mesurer les quantités, pour faire des économies, pour éviter tout risque d'être brûlé ou de rater les repas.

Introduction générale

La science des statistiques est un art interdisciplinaire de la quantification sous incertitudes utilisé par les physiciens, les économistes, les ingénieurs, les biologistes, les actuaires, les médecins etc. C'est aujourd'hui c'est un pilier des mathématiques dont l'objectif est de décrire ce qui s'est produit et de faire des projections quant à ce qu'il peut advenir dans le futur. Parfois, la situation peut être simplement décrite par quelques représentations graphiques d'analyse élémentaire des données et faire une modélisation en utilisant la théorie des séries chronologiques.

D'autre part, la modélisation de la volatilité est un enjeu important de la recherche sur les marchés financiers et de l'énergie. Cependant, il n'y a pas de réponse pour le choix des meilleurs modèles et les mesures de la volatilité des prix sont dues à la complexité de la remise des prix de l'énergie où ce problème a motivé plusieurs chercheurs après *la crise financière de 2008*. Les relations entre les marchés boursiers et pétroliers ont été attiré une attention particulière de la part des praticiens et des universitaires.

Les preuves empiriques sur la relation entre les prix boursiers et pétroliers ont été documentées par de nombreuses études. Plusieurs travaux traitent l'impact du prix du pétrole sur les indices boursiers. Cependant, un nombre

réduit de recherches aborde l'effet du marché de l'énergie sur rendement des actifs et l'effet de sa volatilité sur les prix des indices.

En 1996, Jones et Kaul (1996), ont été utilisé des données trimestrielles pour vérifier si la réaction des marchés boursiers internationaux aux variations du prix du pétrole peut être justifiée par le changement des rendements attendus dans les pays tels que les USA, le Japon, et le Canada. Ils trouvent une relation stable et négative entre l'évolution du prix du pétrole et les rendements des indices boursiers. Cette relation est plus pertinente dans le cas du Japon que celui du Canada. Egalement, ces auteurs montrent que les prix actuels et les prix du pétrole décalés affectent négativement le rendement boursier. De plus, El-Sharif I, Brown D, Burton B, Nixon B, Russell A (2005) ont été utilisé des données quotidiennes et mensuelles pour examiner la relation entre les prix du pétrole et les rendements des stocks pour les États-Unis et le Royaume-Uni. Plus récemment, Arouri, M. E. H., & Nguyen, D. K (2010) ; Arouri et Rault (2011); aussi Ji et Fan (2012) ont été utilisé une approche *VAR – GARCH* récemment développée pour analyser les débordements de la volatilité entre les marchés pétrolier et boursier en Europe.

Ainsi, Huang, R.D, Masulis, R. W, Stoll, H.R (1996), ont été utilisé un modèle *VAR* pour examiner la relation existante entre les rendements du cours de pétrole et le rendement journalier de l'indice S&P 500.

Sadorsky, P (1999), est le premier à s'intéresser à la question de l'asymétrie dans la relation entre le prix du pétrole et les rendements boursiers. Il montre que volatilité des cours de pétrole, jouent un rôle plus important que celui joué par le taux d'intérêt dans l'explication du comportement des indices boursiers des États-Unis. En effet, la fonction de réponse impulsionnelle au choc du *VAR* estimé, montre que les chocs positifs matérialisés par

une hausse du prix de pétrole, avaient un impact plus important sur l'indice, et qu'un choc négatif illustré par une baisse du prix de pétrole, n'entraîne pas le même effet sur la variation de l'indice S&P_500.

PARK, J. W. and Ratti, R. A (2008), analysent les impacts respectifs des prix du pétrole et de leur volatilité sur les rendements des actifs boursiers aux États-Unis et dans 13 pays industrialisés d'Europe.

Zeghdoudi, Lallouche, Remita (2014), ont été traité la tarification des swaps de variance et de volatilité selon le modèle de Heston (1993), en utilisant le modèle GARCH (1,1) et l'Index boursier français CAC 40.

Récemment, Guerouah, Zeghdoudi et Bouseba (2017), ont été présenté une application portée sur les corrélations dynamiques entre les prix du pétrole et les marchés boursiers (d'Amérique (SP 500), français (CAC 40) et Japon (NIKKEI 225)) en utilisant les modèles multivariés BEKK et DCC GARCH.

Les modèles multivariés ont l'inconvénient d'être constitués d'un grand nombre de paramètres. La conséquence est : une procédure d'estimation plus lente engendrant d'éventuels problèmes statistiques liés au nombre de paramètres. La procédure d'estimation la plus répandue dans l'estimation des paramètres pour les modèles GARCH est celle du quasi-maximum de vraisemblance. D'autres procédures d'estimations ont été développées récemment et tendent à améliorer les capacités de l'estimation par le quasi-maximum de vraisemblance

malgré la pertinence des modèles GARCH dans le domaine d'économétrie, ces modèles ne sont pas adaptés pour les données géographique. pour cela, on fait l'appel à des modèles multivariés spatio GSTAR.

D'un autre côté, depuis les années soixante-dix, les chercheurs analysent la prise en compte dans les modèles économétriques des données géographiques,

c'est-à-dire des observations d'une ou plusieurs variables mesurées dans le temps pour des localisations particulières réparties dans l'espace. Ainsi, cette prise en considération du temps et de l'espace a nécessité dans ce domaine le développement de certains concepts dont l'autocorrélation spatiale, qui se réfère à la mesure potentielle de dépendance entre des observations géographiques observées dans l'espace. En fait, Le Gallo (2000) présente le contexte historique qui a mené aux développements en statistique et en économétrie spatiales. Elle présente également les outils statistiques pertinents dans ce contexte.

Cliff et Ord (1973) ont présenté les premières analyses en statistique et en économétrie spatiales. Depuis, plusieurs auteurs se sont intéressés à ces modèles. D'un point de vue strictement théorique, les modèles multivariés courants, tels les modèles vectoriels autorégressifs (*VAR*) ou encore les modèles autorégressifs moyennes mobiles multivariés (*VARMA*) peuvent être utilisés dans le contexte de données spatio-temporelles. Afin de modéliser de telles données, il importe d'avoir des modèles avec une structure tenant compte de la composante temporelle et spatiale. Pfeifer et Deutsch (1980) ont présenté la théorie de l'estimation et des tests d'hypothèses pour les modèles multivariés spatiaux. Plus particulièrement, la classe des modèles autorégressifs moyennes mobiles spatio-temporels (*STARMA*) a été étudiée. Di Giacinto (2006) et Terzi (1997) ont généralisé le modèle présenté par ces derniers et ont étudié les conditions de stationnarité tout en montrant que le modèle généralisé peut s'écrire sous la forme d'un modèle multivarié *VARMA*. Borovkova et al. (2008) ont étudié le comportement des estimateurs des moindres carrés dans le cadre de certains modèles spatiaux généralisés. Leurs travaux sont particulièrement généraux, permettant un terme d'erreur pas forcément constitué de vecteurs aléatoires indépendants, mais satisfaisant une condition

du type différence de martingales.

Pour cela, on a deux objectifs principaux de cette thèse à savoir :

- Analyser et étudier le comportement de la dynamique du taux de change des prix (gaz, pétrole, électricité), en appliquant la méthode de Value at Risk. Ainsi, on propose dans ce travail une méthode qui permet de modéliser la volatilité à l'aide d'un processus GARCH univarié et multivariés appliquées aux données sur des prix du pétrole, du gaz et d'électricité. De plus, on cherche à examiner la performance hors échantillon des modèles GARCH multivariés.

- Étudier une classe particulière de modèles spatiaux appelée modèles autorégressifs spatio-temporels généralisés (Generalized Space-Time Autoregressive model (GSTAR)), en utilisant des données du Covid-19.

La thèse comporte trois chapitres, une introduction et une conclusion. Ainsi, le premier chapitre contient quelques définitions et notions de base sur les processus univariés ainsi un panorama des modèles clés de la classe ARCH /GARCH univarié.

Le chapitre 2 se focalise sur les modèles GARCH multivariés et une application portée sur les corrélations dynamiques entre les prix de l'électricité, du pétrole et du gaz, en utilisant les modèles multivariés BEKK et DCC GARCH sur la période du 2018-2020, 36 observations.

Enfin, le dernier chapitre, qui est l'essentiel de cette thèse, on a illustrer le développement de modèles GSTAR spécifiques aux patients en utilisant des données de séries chronologiques spatio-temporelles du nombre de cas confirmés de covid-19 dans quatre pays pour tester la causalité spatiale entre eux.

CHAPITRE 1

Sur les processus multivariés et les modèles

ARCH/GARCH univariés

Sommaire

1.1 Notions de base	2
1.2 Les modèles des séries chronologiques univariate	6
1.3 Les tests	14

Dans ce chapitre, nous considérons les modèles ARCH, GARCH Univariés et les notions de base, i.e. processus aléatoire et processus multivariés, fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation, modèle $VAR(p)$, causalité au sens de Granger et test de cointégration et les différents modèles des séries chronologiques univariate (**AR**, **MA**, **ARIMA**, **ARCH**, **GARCH**, **ARMA**, **SARIMA**, **IGARCH**, **EGARCH**, **GJR-GARCH**, **APARCH** et **VS-GARCH**). Une bonne partie de la présentation est prise de Shumway et Stoffer (2006), Guerouah A (2018), Wei (1994), Reinsel (2005) et François-

Éric Racicot et Raymond Théoret (2001).

1.1 Notions de base

1.1.1 Processus aléatoire

Définition 1.1.1 Un processus aléatoire (stochastique), noté $(X_t)_{t \geq 0}$ est une famille de variables aléatoires indexées par un paramètre t (le temps) définies sur le même espace.

1.1.2 Les opérateurs

Opérateur de retard

Définition 1.1.2 l'opérateur L est dit opérateur de retard s'il décale le processus d'une unité de temps vers le passé tel que :

$$LX_t = X_{t-1}$$

Opérateur de différence d'ordre d

Définition 1.1.3 On définit l'opérateur Δ_d de différence d'ordre d comme l'opérateur linéaire tel que :

$$\Delta_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d) X_t$$

1.1.3 Notions de stationnarité

La stationnarité implique que l'état d'une série temporelle ne dépend pas du temps. En particulier, la stabilité d'une série $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est vérifiée si elle ne comporte pas de tendance saisonnière, ni de tendance à la hausse ou à la

baisse. Formellement, on envisage deux types de stationnarité (stationnarité stricte et stationnarité au second ordre).

Définition 1.1.4 (Stationnarité stricte) *Le processus (X_t) est dit strictement stationnaire si $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n$ et quelque soit $h \in \mathbb{Z}$, les vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})^T$ ont la même loi de probabilité.*

Définition 1.1.5 (Stationnarité au second ordre) *Le processus $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ est stationnaire au second ordre (stationnaire au sens faible) si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i). $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t^2) < \infty,$
- (ii). $\forall t \in \mathbb{Z}, E(X_t) = m,$ indépendant de $t,$
- (iii). $\forall t, h \in \mathbb{Z}, cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_{t+h} - m)(X_t - m)] = \gamma(h),$ indépendant de $t.$

La fonction $\gamma(\cdot)$ (resp. $\rho(\cdot) := \gamma(\cdot)/\gamma(0)$) est appelée fonction d'autocovariance (resp. d'autocorrélation) de (X_t) .

- La condition (i) signifie l'existence des moments d'ordre deux.
- La condition (ii) implique que les variables aléatoires (X_t) ayant la même espérance quelle que soit la date t , i.e $E(X_t)$ ne dépend pas du temps.
- La condition (iii) signifie que les moments sont indépendants de la date considérée et ne dépendent que uniquement de l'ordre des retards, c'est-à-dire la fonction d'autocovariance de (X_t) doit être indépendante du temps. Donc on peut conclure qu'un processus faiblement stationnaire si ses moments ne dépend pas du temps. Par conséquent, au cours du temps si la variance de (X_t) est constante alors le processus (X_t) est stationnaire sans passer aux test d'hypothèse sur la stationnarité.

1.1.4 Fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation

Définition 1.1.6 Soit (X_t) une série stationnaire,

- La fonction d'autocovariance de (X_t) est définie par :

$$\gamma_X(h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h}), \forall t, h \in \mathbb{Z}.$$

- La fonction d'autocorrélation de (X_t) est définie par :

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \text{cor}(X_t, X_{t+h}), \forall t, h \in \mathbb{Z}.$$

1.1.5 Le bruit blanc

Bruit blanc faible

Définition 1.1.7 Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stochastique, le processus (ε_t) est appelé bruit blanc faible si les trois propriétés suivantes soient vérifiées, pour une constante positive σ^2 :

(i). $E(\varepsilon_t) = 0, \forall t \in \mathbb{Z},$

(ii). $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, \forall t \in \mathbb{Z},$

(iii). $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = 0, \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0.$ On note $(\varepsilon_t) \sim \text{bb}(0, \sigma^2).$

Remarque 1.1.1 Si les éléments de la séquence sont non-corrélé et indépendants alors on dit que le bruit blanc est fort.

1.1.6 La volatilité

Définition 1.1.8 L'instabilité du cours d'un actif financier est mesurée par la volatilité, cette dernière mesure l'amplitude d'un produit dérivé et des variations d'une action. Il s'agit d'un paramètre de quantification du risque de rendement et de prix. Les séries monétaires et financières sont caractérisées par le clustering de volatilité, à savoir les périodes de forte volatilité

alternent avec les périodes de faible volatilité. Ce phénomène, que nous appelons aussi l'hétéroscédasticité conditionnelle, est particulièrement fréquent dans les données boursières, les taux de changes ou d'autres prix déterminés sur les marchés financiers.

1.1.7 Séries financières

La modélisation des séries financières est très difficile. Cette difficulté due pour les raisons suivantes :

-L'existence de régularités statistique qui est la même dans les différentes séries financières.

-La disponibilité d'échantillons de très grandes tailles.

-L'importance de la fréquence d'observation.

-La variété des séries financières.

Les propriétés concernent les régularités empiriques des séries financières qui sont mises en 1963 par *Mandelbrot*, vérifiées et complétées par nombreux auteurs, ses propriétés qu'on va présenter ci-dessous valent surtout pour les séries quotidiennes de prix d'action.

Soit S_t le cours d'un actif à la date t et soit $\epsilon_t = \log(S_t/S_{t-1})$ présente le rendement. Ainsi que (ϵ_t) décrit les variations relatives des prix $r_t = \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$. Si on pose $\epsilon_t = \log(1 + r_t)$, dans ce cas, ces deux séries présentent sur celle des prix l'avantage d'être sans unité, cela ne permet de comparer facilement entre différents titres.

1.1.8 Hétéroscédasticité

Définition 1.1.9 *En statistique, lorsque les variances des variables étudiées sont différentes, dans ce cas on parle sur l'hétéroscédasticité. Par contre, si*

la variance de l'erreur des variables est constante, on parle ici sur l'homoscedasticité i.e $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 \forall i$, nous avons désormais $Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2$, où $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ si $i \neq j$.

1.2 Les modèles des séries chronologiques univariées

1.2.1 Le modèle AR

Définition 1.2.1 Le processus $(X_t, t \in \mathbb{N} \text{ (ou } \mathbb{Z}))$ satisfait l'équation générale d'un processus AR(p) :

$$X_t = \delta + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1.1)$$

où

δ le coefficient d'accroissement

α_i les coefficients d'autorégressifs

ε_t un bb indépendant.

Définition 1.2.2 Un processus est dit inversible s'il existe une suite $\{b_k\}$ réelle telle que $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| < \infty$ et

$$\varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X_{t-k}$$

Une autre façon de dire qu'un processus est inversible est de dire qu'il possède une représentation AR(∞).

Remarque 1.2.1 Avec cette définition, tout processus AR(p) est inversible.

1.2.2 Le modèle MA

Définition 1.2.3 Le processus (X_t) satisfait l'équation générale d'un processus $MA(q)$:

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1.2)$$

où

β_i les coefficients de moyenne mobile

ε_{t-i} bb.

Remarque 1.2.2 Si $\{X_t\} \rightsquigarrow MA(q)$, alors

- (i) X_t est stationnaire ;
- (ii) $\rho(h) = 0$ pour tout $h > q$.

Définition 1.2.4 Un processus est dit causal s'il existe une suite $\{a_k\}$ réelle telle que $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$ et que :

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{t-k}$$

Parfois, lorsque l'on parle d'un processus causal, on dit que celui-ci a une représentation $MA(\infty)$.

Remarque 1.2.3 Tout processus $MA(q)$ est causal.

1.2.3 Le modèle $ARMA$

Définition 1.2.5 Le processus (X_t) admet l'équation générale suivante qui définit un modèle $ARMA(p, q)$

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} - \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i} \quad (1.3)$$

Proposition 1.1 - Si $p = q = 0$, devient $X_t = \varepsilon_t$ et donc un processus $ARMA(0,0)$ est un bruit blanc faible.

- Si $p = 0$ et $q > 0$, les processus $ARMA(0, q)$, notés $MA(q)$.
- Si $p > 0$ et $q = 0$, les processus $ARMA(p, 0)$, notés simplement $AR(p)$.

Remarque 1.2.4 Les processus suivants ce sont des généralisation des processus $ARMA$ aux cas non stationnaires, avec tendance polynômiale ($ARIMA$) ou avec une saisonnalité ($SARIMA$).

1.2.4 Le modèle $ARIMA$

Définition 1.2.6 On intéresse aux processus (X_t) satisfaisant admet l'équation générale suivante qui définit un modèle $ARIMA(p, d, q)$:

$$\varphi(L) \Delta^d X_t = \Theta(L) \varepsilon_t \quad (1.4)$$

où : les racines de φ et Θ sont de module supérieur à 1, (ε_t) est un bb.

La relation (1) s'écrit aussi sous la forme :

$$\Phi(L) X_t = \Theta(L) \varepsilon_t \quad (1.5)$$

avec $\Phi(L) = \varphi(L) (1 - L)^d$

La relation (2) est analogue à la définition d'un $ARMA(p + d, q)$ à la différence importante près que le polynôme Φ admet 1 comme racine d'ordre d .

1.2.5 Le modèle $SARIMA$

Si l'on veut en même temps traiter les saisonnalités de période s (sans supposer une répétition exacte, déterministe, des données), on est amené à définir les processus $SARIMA$.

Définition 1.2.7 $\{X_t\}$ est appelé processus $SARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ avec période s , si :

$$Y_t = \Delta^d \Delta_s^D X_t = (1 - L)^d (1 - L^s)^D X_t \quad (1.6)$$

est un processus $ARMA$ stationnaire de la forme :

$$A(L) F(L^s) Y_t = \Theta(L) G(L^s) \varepsilon_t$$

où $A(z)$ est le polynôme générateur d'un $AR(p)$,

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^p a_k z^k$$

$\Theta(z)$ est le polynôme générateur d'un $MA(q)$,

$$\Theta(z) = 1 + \sum_{k=1}^q \theta_k z^k$$

et où, pour la saisonnalité $Y_t - Y_{t-s}$,

$F(z)$ est le polynôme générateur d'un $AR(P)$

$$F(z) = 1 - \sum_{k=1}^P \varphi_k z^k$$

et $G(z)$ est le polynôme générateur d'un $MA(Q)$

1.2.6 Le modèle ARCH

Définition 1.2.8 On dit que le processus (X_t) suit un processus $ARCH(p)$ s'il est défini par une équation de la forme :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \quad (1.7)$$

où

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 \quad (1.8)$$

et

$$\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$$

1.2.7 Les modèles *GARCH*

Ces modèles ont été introduits par Bollerslev en 1986, inspirés de la démarche de Box et Jenkins, avec une dynamique autorégressive,

$$X_t = \varepsilon_t h_t \quad (1.9)$$

où

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2 \quad (1.10)$$

et

$$\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$$

On peut noter tout d'abord que, sous cette forme, les coefficients p et q ne sont pas analogues à ceux des modèles *ARMA* : en particulier, q correspond au caractère autorégressif du processus (h_t^2). On a alors :

$$E[X_t | X_{t-1}] = 0$$

et

$$E[X_t^2 | X_{t-1}] = h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}^2$$

Propriété : Si le processus *GARCH*(p, q) est stationnaire au second ordre, alors nécessairement :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

et dans ce cas, la variance de X_t est :

$$V(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j}$$

Le modèle *IGARCH*

Dans le cas où l'inégalité suivante est saturée, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1 \quad (1.11)$$

on dira alors que le processus *GARCH* est intégré, et on parlera de processus *IGARCH*.

Le modèle *EGARCH*

Modèle *EGARCH* proposé par Nelson (1991), le processus *EGARCH*(p, q) donne la variance conditionnelle la définition suivante :

Définition 1.2.9 Un processus (X_t) satisfait une représentation *EGARCH*(p, q) si et seulement si :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$$

où

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}) \quad (1.12)$$

et ε_t est un bb faible et la fonction $g(\cdot)$ vérifie :

$$g(\varepsilon_{t-i}) = \theta \varepsilon_{t-i} + \gamma (|\varepsilon_{t-i}| - E|\varepsilon_{t-i}|)$$

Si l'on pose $a_i = \theta \alpha_i$ et $b_i = \alpha_i \gamma$ la variance conditionnelle de X_t peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \log(h_t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^q b_i (|\varepsilon_{t-i}| - E[|\varepsilon_{t-i}|]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(h_{t-i}) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un processus *EGARCH*(1, 1), nous avons donc :

$$\begin{aligned} \log(h_t) &= \alpha_0 + a_1 \varepsilon_{t-1} + b_1 (|\varepsilon_{t-1}| - E[|\varepsilon_{t-1}|]) \\ &\quad + \beta_1 \log(h_{t-1}) \end{aligned}$$

Modèle *TGARCH*

Les modèles *TARCH* (Zakoian, 1991) et *TGARCH* (Zakoian, 1994) sont l'un des modèles asymétries ; sont définis de la façon suivante

Définition 1.2.10 Un processus X_t satisfait une représentation *TGARCH* si et seulement si :

$$X_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t^2 = \alpha_0 = \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{\varepsilon_{t-i} < 0} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 I_{\varepsilon_{t-i} > 0} \quad (1.13)$$

où le résidu normalisé ε_t est un bb faible et $I_{\varepsilon_{t-i} < 0}$ désigne la fonction indicatrice.

Modèle *GJR – GARCH*

Définition 1.2.11 Un processus X_t satisfait une représentation *GJR–GARCH*(p, q) si et seulement si :

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

$$h_t = \alpha_0 = \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \gamma_i I_{\varepsilon_{t-i} < 0} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} \quad (1.14)$$

Définition 1.2.12 où le résidu normalisé ε_t est un bb faible et $I_{\varepsilon_{t-i} < 0}$ désigne la fonction indicatrice telle que :

$$I_{\varepsilon_{t-i} < 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Généralisations *APARCH* et *VS – GARCH*

Un processus X_t satisfait une représentation *APARCH*(p, q) si et seulement si :

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^\delta \quad (1.15)$$

où $\sigma_t = \sqrt{h_t}$ est l'écart-type conditionnel de X_t et ε_t est un bruit blanc faible. La positivité σ_t est assurée par les conditions $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ et $-1 < \gamma_i < 1$, $i = 1, \dots, q$, $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, $\delta > 0$. La stationnarité au second ordre d'un processus *APARCH* nécessite :

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i E \left[(|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta \right] + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^\delta < 1$$

Dans le cas d'un processus *APARCH*(1, 1) on a :

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_1 (|\varepsilon_{t-1}| - \gamma_1 \varepsilon_{t-1})^\delta + \beta_1 \sigma_{t-1}^\delta$$

On remarque en particulier que :

- Un processus *APARCH*(1, 1) correspond à une processus *ARCH* lorsque :

$$\delta = 2, \gamma_1 = 0, \beta_1 = 0$$

- Un processus *APARCH*(1, 1) correspond à une processus *GARCH* lorsque :

$$\delta = 2, \gamma_1 = 0$$

- Un processus *APARCH*(1, 1) correspond à une processus *GJR-GARCH* lorsque :

$$\delta = 2$$

Définition 1.2.13 Un processus X_t satisfait une représentation *VS-GARCH*(1, 1) si et seulement si :

$$X_t = \varepsilon_t h_t$$

$$\begin{aligned} h_t = & (\omega_{pos} + \alpha_{pos} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{pos} h_{t-1}) (1 - I_{\varepsilon_{t-1} < 0}) \\ & + (\omega_{neg} + \alpha_{neg} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{neg} h_{t-1}) I_{\varepsilon_{t-1} < 0} \end{aligned} \quad (1.16)$$

La variance non conditionnelle de ε_t est donnée par :

$$\sigma_X^2 = E[X_t^2] = \frac{(\omega_{pos} + \omega_{neg})/2}{1 - (\alpha_{pos} + \alpha_{neg})/2 - (\beta_{pos} + \beta_{neg})/2} \quad (1.17)$$

1.3 Les tests

1.3.1 Tests d'effets ARCH/GARCH

La statistique LM_j du test du multiplicateur de Lagrange associée au test unidirectionnel :

$$H_0 : \beta = a, \text{ où } a \in R^K$$

contre :

$$H_1 : \beta^k \neq a$$

admet la loi suivante sous H_0

$$LM_j = \left(\frac{\partial \log L(y, \beta)}{\partial \beta'} \Big|_{\beta = \hat{\beta}^c} \right)' I^{-1} \left(\frac{\partial \log L(y, \beta)}{\partial \beta'} \Big|_{\beta = \hat{\beta}^c} \right) \xrightarrow{L_{N \rightarrow \infty}} \chi^2(K)$$

où β_j et $\hat{\beta}_j^c$ désignent respectivement les estimateurs non contraint et contraint de β_j .

L'estimateur \hat{I} de la matrice d'information de Fischer peut être obtenu par :

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \log L(y_i, \beta)}{\partial \beta'} \Big|_{\beta = \hat{\beta}^c} \right) \left(\frac{\partial \log L(y_i, \beta)}{\partial \beta'} \Big|_{\beta = \hat{\beta}^c} \right)'$$

et où

$$\frac{\partial \log L(y, \beta)}{\partial \beta'} \Big|_{\beta = \hat{\beta}^c} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \log L(y_i, \beta)}{\partial \beta'} \Big|_{\beta = \hat{\beta}^c} \right)$$

Comment tester la présence des effets ARCH dans la série Y_t ou dans le résidu du modèle linéaire auto-régressif? Deux principaux tests existent :

1.3.2 Tests d'autocorrélation sur les carrés ε_t^2

Il existe un grand nombre de tests d'autocorrélation, le plus connu est : test Ljung-Box (1978). On rappelle que si l'on note r_k l'autocorrélation d'ordre k d'un processus $\{\varepsilon_t^2, t \in \mathbb{Z}\}$. Pour un ordre K , le test de Ljung-Box est le test de l'hypothèse :

$$H_0 : r_1 = \dots = r_K = 0$$

contre :

$$H_1 : \exists j \in [1, K] \text{ tel que } r_j \neq 0$$

C'est donc un test de nullité des K premières autocorrélations du processus considéré. la statistique est :

$$Q(K) = T(T+2) \sum_{k=1}^K \frac{r_k^2}{T-k} \xrightarrow{L_{T \rightarrow \infty}} \chi^2(K-p-q)$$

L'hypothèse H_0 est rejetée au seuil de 5% si $Q(K)$ est supérieur au quantile 0.95 de la loi du χ^2 correspondant ; donc les (ε_t^2) peuvent être corrélés, (ε_t) peut suivre un *ARCH*.

1.3.3 Tests *LM* d'absence d'auto-corrélation sur ε_t^2

Ce test est connue sous le nom de test de Engle, est un test de Lagrange Multiplicateur, il s'agit tout simplement de la statistique associée au test de l'hypothèse :

$$H_0 : \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$$

contre l'hypothèse alternative où il existe i tel que :

$$\alpha_i \neq 0$$

i dans le modèle

$$\widehat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K \alpha_k^2 \widehat{\varepsilon}_{t-k}^2 + \mu_t$$

où $\widehat{\varepsilon}_t^2$ désigne le résidu estimé au carré d'un modèle d'espérance conditionnelle. La statistique est $LM = nR^2$ où n est le nombre d'observations utilisées lors de la régression, et R^2 le coefficient de la régression. Si $LM > \chi^2(K)$, on rejette H_0 l'erreur est alors modélisée par un processus $ARCH(p)$.

Le résultat des tests LM et de la stat Q concluent ici clairement au rejet de l'hypothèse nulle d'absence deffets $ARCH$ et cela quelque soit l'ordre K considéré. Il existe une dépendance temporelle des résidus au carré.

CHAPITRE 2

Modèles des séries chronologiques multivariées

Sommaire

2.1 Modèles GARCH multivariés	18
2.2 Modèle $VAR(p)$	20
2.3 Estimation	32
2.4 Application	33

Les modèles univariés ne permettent que d'analyser une série financière à la fois. Mais dans la pratique, le fait d'analyser qu'une série à la fois n'est pas très utile. En effet, les volatilités financières évoluent plus ou moins étroitement au fil du temps entre les actifs et marchés. Reconnaître cette caractéristique à travers un modèle multivarié devrait conduire à des modèles empiriques que de travailler avec des modèles univariés séparés. Dans les applications financières, le passage de la modélisation univariée à la modélisation multivariée s'ouvre la porte à de meilleurs outils de décision dans

divers domaines tels que les modèles d'évaluation des actifs, la sélection de portefeuille, la couverture et les prévisions de valeur à risque.

L'intérêt pour un tel modèle est de pouvoir examiner et analyser les diverses relations qu'ont les différentes séries entre elles. Afin de pouvoir estimer plusieurs séries financières pour analyser leurs corrélations et les transferts de volatilité, il faut utiliser les modèles GARCH multivariés (MVGARCH). Ce modèle multivarié est souvent utilisé afin de tester les transferts de volatilité ainsi que les effets de débordement dans les études portant sur la contagion (voir Silvennoinen et Teräsvirta (2008)). Ce modèle multivarié permet non seulement d'analyser les volatilités, mais aussi les corrélations de différents marchés. Il existe plusieurs spécifications au modèle GARCH multivarié ; les modèles linéaires, non linéaires, asymétriques, modèles à sauts, modèles à corrélations conditionnelles et plusieurs autres.

2.1 Modèles GARCH multivariés

Cette section pose les bases de la modélisation probabiliste des séries temporelles, on considère des séries temporelles à valeur dans \mathbb{R}^d .

- Si $d = 1$, on parle de série univariée.
- Si $d > 1$, on parle de série multivariée.

On désignera dans la suite par série temporelle une série temporelle univariée à temps discret. On considère en Statistique que l'observation X est la réalisation d'une variable aléatoire X . De manière analogue, une série temporelle $(X_t) t \in T$ est considérée comme la réalisation d'un processus stochastique (d'une suite de variables aléatoires) $(X_t) t \in T$.

Bien que dans le cas univarié le modèle *GARCH* ait été l'objet de nombreuses études, le cas multivarié reste encore peu étudié. Dans le cas multi-

varié, on considère un vecteur $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{n,t})'$ et la matrice de covariance conditionnelle H_t du processus $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ à la date t de terme général $h_{ij,t}$:

$$H_t = E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t')$$

Dans les modèles *GARCH* multivariés, on exprime cette matrice de covariance conditionnelle en fonction du passé du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ et des propres valeurs passées de H_t . Une première approche consiste à considérer un processus *GARCH* multivarié $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ ayant pour composantes des processus *GARCH* univariés indépendants entre eux. Mais cette façon de traiter le problème est restrictive. En effet, l'étude des séries financières a mis en évidence une corrélation non nulle entre les composantes des processus *GARCH* multivariés. Ainsi, différentes formulations tenant compte des corrélations entre les composantes d'un processus *GARCH* multivarié (ou *MVGARCH*) ont été introduites. De la même manière que dans le cas univarié, on dit que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est un processus *MVGARCH*(p, q) si :

$$X_t = H_t^{1/2} \varepsilon_t$$

$$g(H_t) = f(H_{t-1}, \dots, H_{t-p, t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q})$$

avec $H_t^{1/2}$ une matrice telle que $H_t^{1/2} H_t^{1/2} = H_t$. Le processus $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ est un bb. Notons enfin que f est une transformation I_{t-1} mesurable et g une transformation I_t mesurable. On voit que la notion de *GARCH* fort n'a de sens que si $H_t^{1/2}$ existe et donc que H_t est définie positive. Ainsi f est une transformation qui doit assurer la définie positivité de la matrice H_t . Le but de ce mémoire est de présenter les différents modèles *GARCH*-multivariés. A travers ces approches pour représenter l'hétéroscédasticité conditionnelle des séries financières, nous étudierons les restrictions intrinsèques à ces modèles, et les restrictions motivées par l'identifiabilité de ces modèles et la définie

positivité de la matrice H_t .

2.2 Modèle $VAR(p)$

Définition 2.2.1 Un processus stationnaire $\{Z_t\}$ autorégressif de dimension \mathbb{N} et d'ordre p , noté $VAR(p)$, est défini par :

$$\Phi(B)Z_t = \mu + \varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $\Phi(B) = I_N - \sum_{i=1}^p \Phi_i B^i$ est l'opérateur matriciel de dimension $N \times N$, qui est l'opérateur autorégressif multivarié tel que $\Phi_p \neq 0$, μ est un vecteur constant de dimension $N \times 1$ et $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc tel que $VAR(\varepsilon_t) = \Sigma_\varepsilon$.

Remarque 2.2.1 Nous disons que $VAR(p)$ fort si le terme d'erreur $\{\varepsilon_t\}$ est un bruit blanc fort.

On note qu'un $VAR(p)$ avec un terme d'erreur gaussien sera forcément un $VAR(p)$ fort. Sinon, il s'agira d'un $VAR(p)$ faible. Dans la littérature portant sur les processus multivariés, des notions comme la causalité et l'inversibilité jouent un rôle crucial. Dans la littérature économétrique, la notion de stationnarité causale est appelée la stabilité d'un processus. Cette notion est intuitivement raisonnable, car une observation au temps t est alors expliquée par le passé de cette variable (voir Shumway et Stoffer (2006, pp.88 – 89)), dans le cas d'un processus autorégressif univarié explosif. La notion de stabilité joue un rôle important dans les applications économétriques, plus particulièrement dans l'étude de méthodes qui trouveraient des applications dans l'élaboration d'un système de prévision. Voir par exemple Lütkepohl (2005). Le théorème suivant donne les conditions pour qu'un processus soit stable.

Théorème 2.2.1 *Le processus $VAR(p)$ représenté par l'équation précédente est stable si :*

$\det \{\Phi(z)\} \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

Dans ce cas, le processus $VAR(p)$ admet la représentation linéaire suivante :

$$Z_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \varepsilon_{t-i} = \Psi(B) \varepsilon_t.$$

où les matrices Ψ_i sont déterminées par :

$$\Psi(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i B^i = \Phi^{-1}(B)$$

et les coefficients $\{\Psi_i\}$ sont absolument sommables, c'est-à-dire que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|\Psi_i\| < \infty,$$

avec $\|\cdot\|$ correspondant à la norme euclidienne d'une matrice.

2.2.1 Analyse du processus VAR(1)

Examinons le cas où le processus $\{Z_t\}$ est un $VAR(1)$ admettant une écriture de la forme :

$$Z_t = \mu + \Phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.1}$$

En procédant à des remplacements successifs, il est possible d'obtenir une expression pour $\{Z_t\}$ en fonction des erreurs $\{\varepsilon_t\}$. Ainsi, pour $t = 1$, on a l'expression suivante :

$$Z_1 = \mu + \Phi_1 Z_0 + \varepsilon_1$$

Un premier remplacement donne :

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= \mu + \Phi_1 Z_1 + \varepsilon_2 \\
 &= \mu + \Phi_1 (\nu + \Phi_1 Z_0 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \\
 &= (I_N + \Phi_1) \mu + \Phi_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \Phi_1^2 Z_0
 \end{aligned}$$

En continuant les récursions, $\{Z_t\}$ s'écrit sous cette nouvelle forme :

$$Z_t = (I_N + \Phi_1 + \dots + \Phi_1^{t-1}) \mu + \Phi_1^t Z_0 + \varepsilon_2 + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi_1^i \varepsilon_{t-i} \quad (2.2)$$

À la limite, il est raisonnable de penser que le processus $\{Z_t\}$ écrit en (1.4). admet l'écriture suivante, sous certaines conditions :

$$Z_t = \mu + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_1^i \varepsilon_{t-i},$$

où $\mu = (I_N - \Phi_1)^{-1}$ représente l'espérance du processus $\{Z_t\}$. En fait, il peut être montré que $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_1^i \varepsilon_{t-i}$ existe en moyenne quadratique. Cette représentation comme somme infinie d'un bruit blanc est a limite de l'équation (1.4) et cette écriture est valide sous la condition de stabilité donnée dans le Théorème 1.1.

La condition de stabilité dans le Théorème 1.1 est valide pour les processus $VAR(p)$. Dans le cas $p = 1$, il est particulièrement simple de donner la condition de stabilité en fonction des valeurs propres de 1. Ceci fait l'objet de la propositionsuivante.

Proposition 2.1 *Un processus $VAR(1)$ est stable si les valeurs propres de Φ_1 sont toutes inférieures à un en module .Afin de montrer la proposition précédente, notons que selon le théorème 1.1 nous devons avoir :*

$$\det(I_N - \Phi_1 z) \neq 0, \text{ pour } |z| \leq 1,$$

Proposition 2.2 *Un processus $VAR(p)$ est stable si toutes les valeurs propres de Φ^* sont inférieures à un en module ou de façon équivalente si :*

$$\det(I_N - \Phi^* z) \neq 0, \text{ pour } |z| \leq 1,$$

2.2.2 La fonction d'autocovariance d'un processus $VAR(p)$

La fonction d'autocovariance d'un processus $VAR(p)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$Z_t^* = \mu + \phi_1^* Z_{t-1}^* + \varepsilon_t^*$$

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= E \left\{ (Z_t - \mu) (Z_{t-h} - \mu)^T \right\}, \\ &= E \left\{ \left(\sum_{i=0}^{h-1} \phi_i^* \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{h+i}^* \varepsilon_{t-h-i} \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^* \varepsilon_{t-h-i} \right)^T \right\}, \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{h+i}^* \Sigma_{\varepsilon} \phi_i^{*T}. \end{aligned}$$

La condition de stabilité assure que la fonction d'autocovariance existe et ainsi que la somme infinie devient sommable. La fonction d'autocovariance $\{\Gamma(h), h \in \mathbb{Z}\}$ d'un $VAR(p)$ peut également s'écrire sous la forme récursive suivante :

$$\Gamma(h) = \sum_{i=0}^p \Phi_i \Gamma(h-i) \tag{2.3}$$

ou sous la forme du système de type Yule-Walker :

$$\begin{cases} \Gamma(0) = \sum_{i=1}^p \Phi_i \Gamma^T(i) + \Sigma_{\varepsilon} & h = 0 \\ \Gamma(h) = \sum_{i=1}^p \Phi_i \Gamma^T(h-i) & h > 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

2.2.3 Modèle GARCH vectoriel

Le modèle vectoriel a été introduit par Engle et Kroner (1995), ce modèle est le plus simple pour représenter H_t par rapport à son passé. En effet, cette représentation présente une expression de H_t similaire à l'expression de la volatilité dans le cas univarié :

$$H_t = C_0 + \sum_{i=1}^q A_i e_{t-1} + \sum_{j=1}^p B_j h_{t-j}$$

où $e_t = \text{vec}(\varepsilon_t \varepsilon_t')$, $h_t = \text{vec}(H_t)$, A_i, B_i matrices de dimension $n \times n$, et C_0 vecteur de dimension n . L'opérateur vec appliqué a une matrice consiste à mettre en une seule colonne les colonnes d'une matrice. Cependant la matrice H_t étant clairement symétrique certaines équations du modèle précédent sont redondantes, il est donc préférable d'utiliser l'opérateur $\text{vech}(\cdot)$ dans (2.1) qui met en seule colonne la partie triangulaire supérieure d'une matrice. Ainsi les dimensions des matrices A_i et B_i , sont de dimension $(n(n+1))/2 \times (n(n+1))/2$, et C_0 est un vecteur de dimension $(n(n+1))/2$, le nombre de paramètres est ainsi considérablement réduit. On peut écrire le modèle en regroupant le vecteur C_0 et les matrices de paramètres dans une même matrice :

$$h_t = F z_t = (z_t' \otimes I) \text{vec}(F) = Z_t \alpha$$

Avec $z_t' = (1, \varepsilon_{t-1}', \dots, \varepsilon_{t-q}', h_{t-1}', \dots, h_{t-p}')$, $\alpha = \text{vec}(F)$,

$F = (C_0 \ A_1 \dots A_q \ B_1 \dots B_p)$ et $Z_t = (z_t' \otimes I)$.

Pour illustrer le modèle vectoriel considérons le modèle $GARCH(1, 1)$ avec deux équations ($n = 2$) en utilisant l'opérateur $\text{vech}(\cdot)$:

$$H_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}$$

2.2.4 Modèle Diagonal

Dans certaines séries financières, on peut supposer que les volatilités et les covariances ne dépendent que de leurs valeurs passées dans le modèle précédent. Ainsi, $h_{rs,t}$ ne dépend que des valeurs passées de $\varepsilon_{r,t}\varepsilon_{s,t}$. Dans ce modèle les matrices A_i et B_j sont des matrices diagonales ce qui réduit le nombre de paramètres. Dans le cas de l'exemple précédent on obtient :

$$h_t = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}$$

On peut cependant remarquer que le modèle diagonal ne correspond pas au modèle où il n'existe pas de corrélation entre les composantes du processus *GARCH* multivarié car H_t n'est pas diagonale.

Remarque 2.2.2 La représentation vectorielle (et donc à priori le modèle diagonal) telle qu'elle est définie dans la partie précédente ne tient pas compte de la définie positivité nécessaire de H_t . Les hypothèses établissant la définie positivité pour H_t à chaque date t pour le modèle vectoriel ne sont pas claires. Ainsi, il est difficile de considérer un *GARCH* fort pour les processus multivariés dans le cadre de ce modèle.

Généralité du modèle vectoriel

Définition 2.2.2 Un modèle est général quand tous les termes $\varepsilon_{r,t-i}\varepsilon_{s,t-i}$ et $h_{rs,t-i}$ peuvent apparaître dans l'expression de chaque terme de la matrice de covariance H_t , de plus, aucune combinaison de valeurs entre les coefficients

de chaque terme ne doit être écartée par l'expression de ce modèle. D'après la définition précédente le modèle vectoriel est général. En effet chaque élément de la matrice H_t est une fonction linéaire des valeurs passées de $\varepsilon_{r,t-i}\varepsilon_{s,t-i}$ et de $h_{rs,t-i}$ dans le modèle vectoriel. Ainsi, grâce à sa linéarité la notion de généralité est facilement vérifiable pour le modèle vectoriel.

2.2.5 Modèle BEKK

Le modèle *BEKK* suivant a été introduit par Engle et Kroner (1995) pour imposer la restriction de définie positivité à la matrice H_t sous des conditions très faibles.

L'expression de la matrice H_t à chaque instant t dans le modèle *BEKK* nous est donnée par la relation suivante :

$$H_t = C' C + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q A'_{ik} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' A_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p B'_{jk} H_{t-j} B_{jk}$$

où $A_{ik}, B_{jk}, k \in \{1, \dots, K\}$ sont des matrices de dimension $n \times n$ et C est une matrice constante de dimension $n \times n$.

L'introduction de la somme sur l'entier k est motivée par un problème de généralité du modèle que nous aborderons plus loin.

Considérons le modèle *BEKK - GARCH(1, 1)* avec $K = 1$. L'expression du modèle est la suivante :

$$H_t = C' C + A' \varepsilon'_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A + B' H_{t-1} B$$

Dans le cas où $n = 2$, la relation précédente devient :

$$H_t = C' C + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

On remarque que ce modèle nécessite moins de paramètres que le modèle $GARCH(1, 1)$ proposé en exemple pour le modèle vectoriel. Cependant, le nombre de paramètres croît quadratiquement avec n . Ainsi, il est préférable de réduire ce nombre, tout en imposant des restrictions nous assurant l'identifiabilité et la généralité du modèle.

Proposition 2.3 *Si $H_0, H_{-1}, \dots, H_{-p+1}$ sont définies positives, alors H_t est définie positive dans le modèle BEKK si :*

$$\ker\{C\} \bigcap_{j=1}^p \bigcap_{k=1}^K \ker\{B_{jk}\} = \{0\}$$

On voit que les conditions pour obtenir une matrice H_t définie positive quelque soit $t \in N$ sont faibles : la condition portant sur les noyaux des matrices C et B_{jk} $j \in \{1, \dots, n\}$ est vérifiée si la matrice C ou l'une des matrices B_{jk} est de plein rang. De plus on remarque dans cette proposition que les conditions portent sur les termes $GARCH$ et la partie constante seulement de l'expression de la représentation $BEKK$. En effet la quantité $A'_{ik}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}A_{ik}$ est semi-définie positive car $\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}$ est semi-définie positive. Ainsi, pour assurer la définie positivité de H_t il suffit que :

$$C' C + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p B'_{jk} H_{t-j} B_{jk}$$

soit définie positive.

Une conséquence de cette proposition est que pour le modèle *MARCH* la condition nécessaire à la définie positivité de H_t , $t \in N$, devient $\ker\{C\} = \{0\}$, c'est à dire que C soit de plein rang.

Stationnarité

A partir des équations (5.4) et (5.5) on peut écrire le modèle à corrélation constante de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} h_{11,t} \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{nn,t} \end{pmatrix} = C + \sum_{i=0}^s (A_i(\eta_t^2) B_i) \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{nn,t-1} \end{pmatrix}$$

où $s = \sup(p, q)$, $A_i(\eta_t^2) = 0$ pour $i > q$ et $B_j = 0$ pour $j > p$. La proposition suivante nous donne la condition de stationnarité du modèle à corrélation constante.

2.2.6 Modèle DCC-GARCH

Engle (2002) introduit le modèle à corrélations conditionnelles dynamiques, le *DCC - GARCH*, en permettant à la matrice de corrélations conditionnelles de varier dans le temps. Ce modèle est une généralisation du modèle *CCC - GARCH* :

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} \epsilon_t$$

$$H_t = D_t R_t D_t$$

où

r_t : vecteur $n \times 1$ de rendements de n actifs au temps t ,

μ_t : vecteur $n \times 1$ de rendements espérés de n actifs au temps t ,

ε_t : vecteur $n \times 1$ d'erreurs i.i.d avec $E[\varepsilon_t] = 0$ et $Cov[\varepsilon_t] = H_t$,

H_t : matrice $n \times n$ des variances conditionnelles de ε_t temps t ,

D_t : matrice diagonale $n \times n$ des écart-types conditionnels de ε_t temps t ,

R_t : matrice $n \times n$ des corrélations conditionnels de ε_t temps t ,

ε_t : vecteur $n \times 1$ erreurs i.i.d. avec $E[\varepsilon_t] = 0$ et $E[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = I_n$.

C'est un modèle d'estimation en deux étapes. La première étape consiste à estimer la variance conditionnelle avec un GARCH univarié pour chacune des séries. Dans la deuxième étape, on utilise ensuite les résidus standardisés obtenus dans la première étape pour estimer les paramètres de la matrice des corrélations dynamiques. Ce modèle comporte des conditions permettant à la matrice de covariances d'être positive définie en tout temps ainsi qu'à la covariance d'être stationnaire. Analogiquement au modèle CCC-GARCH, la matrice H_t est divisée en deux matrices, D_t et R_t . Les éléments de la matrice D_t proviennent des GARCH univarié estimés pour chacune des séries :

$$D_t = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{1,t}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{2,t}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{h_{3,t}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{h_{N,t}} \end{pmatrix}$$

où

$$h_{it} = \alpha_{0,i} + \sum_{q=1}^{Q_i} \alpha_{iq} \varepsilon_{i,t-q}^2 + \sum_{p=1}^{p_i} \beta_{ip} \varepsilon_{i,t-p}^2$$

Dans (2.20), les GARCH univariés peuvent être d'ordre différents, ce qui permet d'analyser des séries avec différents nombres de retards. Les conditions habituelles pour la positivité et la stationnarité du GARCH s'appliquent

également ici. Cependant le GARCH utilisé dans cette recherche est celui présenté dans la section sur le modèle GARCH multivarié.

La matrice R_t est celle des corrélations conditionnelles des résidus standardisés E_t , elle est maintenant dynamique :

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12,t} & \rho_{13,t} & \cdots & \rho_{1n,t} \\ \rho_{21,t} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n,t} \\ \rho_{31,t} & \rho_{32,t} & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \rho_{n-1\ n,t} \\ \rho_{n1,t} & \rho_{n2,t} & \cdots & \rho_{n\ n-1,t} & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice H_t doit être positive définie, car c'est une matrice de variances-covariances. Afin d'assurer que H_t soit positive définie, il faut que aussi que R_t soit positive définie, car $H_t = D_t R_t D_t$. La matrice D_t est toujours positive, car :

$D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1,t}}, \dots, \sqrt{h_{N,t}})$, donc ses éléments sont toujours positifs. Il faut aussi s'assurer que les éléments de R_t soient plus petits ou égaux à 1, car ce sont des corrélations. Afin de s'assurer de la positivité de R_t , ce dernier est décomposé en deux matrices :

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1}$$

et

$$Q_t = (1 - \alpha_{DCC} - \beta_{CCC})\bar{Q} + \alpha_{DCC}\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + \beta_{DCC}Q_{t-1}$$

où

$$Q_t^* = \begin{bmatrix} \sqrt{q_{11,t}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{22,t}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q_{33,t}} & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{q_{NN,t}} \end{bmatrix}$$

$$Q_t = \begin{bmatrix} q_{11,t} & \sqrt{q_{11,t} q_{22,t}} & \cdots & \sqrt{q_{11,t} q_{NN,t}} \\ \sqrt{q_{11,t} q_{22,t}} & q_{22,t} & \cdots & \sqrt{q_{22,t} q_{NN,t}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \sqrt{q_{11,t} q_{NN,t}} & \sqrt{q_{22,t} q_{NN,t}} & 0 & q_{NN,t} \end{bmatrix}$$

La matrice Q_t doit être positive définie afin que R_t le soit aussi. Dans (2.22), $Q = cov[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = E[\varepsilon_t \varepsilon_t']$ soit la covariance non conditionnelle des résidus standardisés obtenue par les GARCH univariés. Notons que dans l'équation (2.22), et α_{Dcc} et β_{Dcc} sont des scalaires. Les conditions suivantes doivent être respectées afin d'assurer que H_t soit positive définie :

$$\begin{aligned} \alpha_{Dcc} &\geq 1 \\ \beta_{Dcc} &\geq 1 \\ (\alpha_{Dcc} + \beta_{Dcc}) &\leq 0 \end{aligned}$$

La structure générale de corrélation dynamique $DCC(p, q)$ est la suivante :

$$Q_t = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_{DCC,i} - \sum_{j=1}^q \beta_{DCC,j}\right) \bar{Q} + \sum_{i=1}^p \alpha_{DCC,i} (\varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-1}') + \sum_{j=1}^q \beta_{DCC,j} \bar{Q}_{t-j}$$

Cependant, dans cette recherche nous utiliserons un $DCC-GARCH(1, 1)$

2.3 Estimation

Nous supposons que les résidus standardisés ε_t ont une distribution gaussienne, la méthode d'estimation sera donc le maximum de vraisemblance. La fonction de vraisemblance pour $r_t = \sqrt{H_t}\varepsilon_t$ est :

$$L(x) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(\sqrt{(2\Pi)^2 |H_t|})} \exp\left(-\frac{1}{2} r_t^T H_t r_t\right)$$

Les paramètres de H_t , soit θ , se divisent en deux groupes : $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k, \delta) = (\phi, \psi)$. Les éléments ϕ_i correspondent aux paramètres du *GARCH* univarié de la i ème série, soit $\phi_i = (\alpha_0, \alpha_{1i}, \dots, \alpha_{p_i i}, \beta_{1i}, \dots, \beta_{q_i i})$ et les éléments ψ à ceux des paramètres de la structure de corrélation dynamique $(\alpha_{DCC}, \beta_{DCC})$. La matrice R_t dans le log de vraisemblance est remplacée par une matrice identité I_k ce qui donne le log de quasi-vraisemblance de la première étape.

Le log de vraisemblance se dérive comme suit :

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (n \log(2\pi) + \log |H_t| + r_t' H_t^{-1} r_t) \\ L &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (n \log(2\pi) + \log |D_t R_t D_t| + r_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t r_t) \\ L &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (n \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \log(R_t) + r_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} r_t) \end{aligned}$$

Selon Engle (2002), le log-vraisemblance est la somme d'un terme de volatilité et un terme de corrélation, les paramètres dans D_t sont alors notés par θ et les paramètres dans R_t sont notés par ϕ :

$$L(\theta, \phi) = L_v(\theta) + L_C(\theta, \phi)$$

où la partie de la volatilité est :

$$L_v(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (n \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + r_t' D_t^{-1} D_t^{-1} r_t)$$

et la partie de corrélation est :

$$L_C(\theta, \phi) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T (\log |R_t| + \varepsilon_t' R_t' \varepsilon_t - \varepsilon_t' \varepsilon_t)$$

Dans la première étape, on estime θ en maximisant :

$$\theta^* = \arg \max L_V(\theta)$$

Dans la seconde étape, on estime ϕ en maximisant :

$$\phi^* = \arg \max L_C(\theta, \phi)$$

2.4 Application

2.4.1 Avantages et nouveauté des travaux actuels

Cette section démontre les avantages, la nouveauté des travaux en cours et la comparaison de nos résultats avec des articles récents qui discutent des utilisations des modèles GARCH sur les marchés de l'énergie mentionnés dans la section précédente.

Il y a trois objets de recherche : les prix de l'électricité, du pétrole et du gaz. Ils sont observés pour 2018-2020. Il y a 36 points de données (à court terme). En étudiant les statistiques descriptives, la stationnarité de la série, la qualité de l'ajustement et la prévision pour les modèles univariés (GARCH, ARCH, ARMA et MA). **Pour les modèles GARCH multivariés**, une étude comparative (qualité de l'ajustement) entre *vec-GARCH*, *BEKK-GARCH*, *CCC-GARCH*, *BEKK-GARCH* et *DCC-GARCH* est fournie. En recherchant la relation entre les trois variables (électricité, gaz, pétrole). Ensuite, nous étudions la qualité des prévisions des modèles suggérés sur le sous-ensemble de test en utilisant l'erreur moyenne de volatilité (MAE_v) et l'erreur moyenne de corrélation (MAE_C).

2.4.2 Analyse de données réelles

Nous présentons une application pratique sur des données réelles des prix de l'électricité, du gaz et du pétrole. Et puis, on peut appliquer les modèle GARCH multivarié sur des données de prix mensuelles, pour le cas biva-rié et multivarié, de 36 observations, du 1er janvier 2018 au 31 décembre 2020 à l'aide du logiciel RATS (Regression Analysis of Time Series) (Editeur estima.com).

	Électricité	Gaz	Petrole
Observation	1080	1080	1080
Moyenne	4.064173	0.345854	90.18472
Mediane	4.074471	0.342051	89.18000
Maximum	4.117984	0.390691	113.9300
Minimum	3.819157	0.323479	71.92000
Écart type	0.054307	0.018800	10.60613
Skewness	-3.207610	0.859345	0.177592
Kurtosis	1407985	2.680307	2.289710
Jarque-bera	245.8772	4.584149	0.946000
probabilite	0.000000	0.101057	0.623130

tableau 1 : Statistiques descriptives pour chaque série

Figure 1 : Evolution du prix de gaz, pétrole et électricité.

La première étape de cette application est d'étudier la stationnaire de la série. À cette fin, nous avons utilisé le test de racine unitaire de Dickey-Fuller (ADF).

Électricité		t-Statistic
Augmented Dickey-Fuller test statistic	α	-5.814064
Test critical values :	1%	-3.62271
	5%	-2.94461
	10%	-2.61050

Gaz		t-Statistic
Augmented Dickey-Fuller test statistic	α	2.80474
Test critical values :	1%	-3.62271
	5%	-2.94461
	10%	-2.61050

Pétrole		t-Statistic
Augmented Dickey-Fuller test statistic	α	-2.50732
Test critical values :	1%	-3.62271
	5%	-2.94461
	10%	-2.61050

tableau 2 : Le test de racine unitaire de Dickey-Fuller (ADF)

Discussion

On remarque à partir de tableau 2 que la série d'électricité est stationnaire car $t_{obs} < t_{tab}$ pour $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$ et la série de Gaz et Pétrole non stationnaire car $t_{obs} > t_{tab}$

pour $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$.

En fonction des résultats, nous choisissons la série stationnaire (Electricité) pour l'étude :

test (ADF)	Résultat
Gaz	0.03892
Dgaz	-0.24750
Loggaz	-0.33007
Dloggaz	-3.81963 * *
Pétrole	0.17559
Dpétrole	-2.74878 * *
Logpétrole	0.42830
Dlogpétrole	-1.00468

Tableau 3 : Test de stationnarite

Avec test de racine unitaire :

1%(**)	-2.62799
5%(*)	-1.95036
10%	-1.62063

Donc les séries stationnaires sont Dloggaz et Dpétrole.

	Moyenne	Écart type	skewness	kurtosis	jarque-bera
Électricité	4.064173	0.054307	-3.207610	14.07985	245.8772
Dloggaz	0.013541	0.006358	-5.399298	31.206018	1635.637885
Dpétrole	2.024722	286.991934	-4.460951	23.605170	955.206556

Tableau 4 : Statistiques descriptives pour chaque série stationnaire

D'après le tableau 4, nous constatons que :

- Le coefficient d'aplatissement (14.07985) est élevé. Elle est supérieure à la valeur de skurtosis de la loi normale (3). La valeur de ce coefficient trouvé indique que la courbe de la série de prix de l'électricité est plus plate que la courbe de loi normale. Cette valeur du coefficient indique la forte probabilité d'occurrence de points extrêmes.

- Le coefficient d'asymétrie (-3.207610) est différent de zéro (la valeur théorique du coefficient d'asymétrie pour la distribution normale). Ce coefficient montre la présence de l'asymétrie de la courbe de la série du prix de l'électricité. Le coefficient de cette asymétrie est négatif. Cela nous permet de dire que la distribution est étalée vers la gauche. Ce signe négatif, nous indique, par ailleurs, que les prix de l'électricité réagissent plus à un choc négatif qu'à un choc positif. Cette asymétrie peut être un indicateur de non-linéarité.

- Le test de Jarque - Bera rejette l'hypothèse nulle de normalité de la distribution des prix de l'électricité ($JB = 245.8772 > \chi_{0.05}^2(2) = 5.99$).

Les prévisions

Il existe plusieurs méthodes pour choisir les meilleurs modèles de prévision comme la méthode de la moyenne, la méthode naïve, la méthode naïve saisonnière, la méthode de la dérive, le test de Ljung-Box, le graphique des erreurs, la fonction d'autocorrélation de l'échantillon, le test du point de retournement, le test du signe de différence, QQ plot, test multivarié Baringhaus-Franz, backtesting de VaR ; Test de Kupiec et test de Markov de Christoffersen, test de Kupiec,

modeles	Adju R^2	SEE	BIC	$RMSE$	MAE	$MAPE$
MA(20)	0.3486	0.0023	-6.1255	0.0027	0.0018	1.2732
ARMA(9,20)	0.3477	0.0021	-6.0345	0.0026	0.0015	1.5625
ARCH(3)	0.8877	4.83e-13	-52.6945	4.95e-13	3.62e-13	2.42e-11
GARCH(2,1)	0.9835	1.32e-15	-63.8563	1.43e-15	9.24e-15	5.48e-13
GARCH(1,1)	0.9952	1.08e-15	-65.3022	1.28e-15	9.11e-15	2.30e-14

Tableau 5 : Comparaison de plusieurs modèles- $D \log \text{gaz}$

models	Adju R^2	SEE	BIC	RMSE	MAE	MAPE
MA(20)	0.4575	3.44e-5	-28.3641	4.88e-5	2.24e-5	3.15e-5
ARMA(9,20)	0.5875	2.55e-6	-28.8344	3.25e-6	2.43e-6	3.46e-6
ARCH(3)	0.9995	3.54e-16	-70.5812	4.78e-16	3.35e-16	2.32e-15
GARCH(2,1)	1.0000	1.23e-18	-83.6451	1.45e-18	6.07e-18	1.15e-18
GARCH(1,1)	1.0000	1.85e-20	-85.7562	1.86e-20	5.33e-21	4.22e-20

Tableau 6 : Comparaison de plusieurs modèles- $D \text{pétrole}$

models	Adjust R^2	SEE	BIC	$RMSE$	MAE	$MAPE$
MA(20)	0.4455	0.00323	-8.2264	0.0038	0.0026	7.1673
ARMA(9,20)	0.4845	0.00314	-8.1112	0.0035	0.0023	8.0467
ARCH(3)	0.9205	4.83e-13	-52.6945	4.95e-13	3.62e-13	2.42e-11
GARCH(2,1)	0.9951	1.32e-15	-63.8563	1.43e-15	9.24e-15	5.48e-13
GARCH(1,1)	0.9995	1.08e-15	-65.3022	1.28e-15	9.11e-15	2.30e-14

Tableau 7 : Comparaison de plusieurs modèles- $\acute{E}lectricit\acute{e}$

ou,

- Erreur absolue moyenne (*MAE*) : $MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i|$.
- Erreur absolue moyenne en pourcentage (*MAPE*) : $MAPE = \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$.
- Erreur quadratique moyenne racine (*RMSE*) : $RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$.
- *R-carré ajusté* (*adjust R²*).
- Erreur somme de régression (*SEE*).
- Critère de Schwartz (*BIC*) : est mesuré par $n \ln(SEE) + k \ln(n)$.

Discussion

Selon le tableau fournit des statistiques descriptives des prix on peut conclure :

-Les prix moyens sont positifs.

-Skewness d'électricité, Dlogaz et Dpétrole sont les suivants $-3, 348790, 5, 399298$ et $-4, 460951$ les trois sont différents à 0, ces coefficients montrent la présence de l'asymétrie des courbes.

-les kurtosis d'électricité, Dlogaz et Dpétrole sont les suivants $12.975406, 31.206018$ et 23.605170 Respectivement supérieurs à 3 donc (queues épaisses), la distribution est plutôt nette (distribution leptokurtique).

-jarque-Bera d'électricité, Dlogaz et Dpétrole sont les suivants $319.828116, 1635.637885$ et 955.206556 donc on rejette l'hypothèse de normalité H_0 .

GARCH(1,1) sont clairement les modèles les plus performants car ils reçoivent le score le plus bas sur les métriques d'ajustement tout en représentant le *MAE*, *RMSE*, *MAPE*, *SEE* et *BIC* les plus bas parmi tous les modèles. Ils sont suivis de près par *GARCH(2,1)* qui est placé confortablement plus bas que les deux *ARCH(1)*, *ARCH(3)*, *ARMA(9,20)* et *MA(20)*. Cependant, le modèle *GARCH(1,1)* est simple et facile à manipuler. Les résultats montrent également que le modèle *GARCH(1,1)* améliore

les performances de prévision.

Modèles GARCH bivariés

La comparaison entre les modèles $MV - GARCH(1, 1)$:

les modèles	$vec - GARCH$	$BEKK - GARCH$	$CCC - GARCH$	$DCC - GARCH$
LV	-33.9465	95.0773	10.7313	-15.5270

Tableau 8 : Comparaison de plusieurs modèles $MV - GARCH(1, 1)$

À partir des valeurs de vraisemblance logarithmiques des modèles $vec - GARCH$, $BEKK - GARCH$, $CCC - GARCH$ et $DCC - GARCH$, on voit que le modèle $BEKK - GARCH(1, 1)$ est le meilleur modèle parmi un certain nombre d'autres modèles.

Le cas bivariés

Le gaz, le pétrole et l'électricité sont-ils corrélés en termes de prix ?

$GARCH(P=1, Q=1, MV=BEKK)$ / $Dpétrole \#Électricité$.

Log likelihood			-141.5513	
Variable	Coeff	Std Error	T-stat	Signif
Moyenne ($Dpétrole$)	-0.79078632	0.01910421	-41.39331	0.0000000
C	70.85783933	0.22354550	316.97278	0.0000000
A	-1.20640105	0.00236725	-509.62126	0.0000000
B	1.00979145	0.00170634	591.78804	0.0000000
Électricité	-0.50616023	0.00599929	-84.37006	0.0000000

$GARCH(P=1, Q=1, MV=BEKK)$ / $Dpétrole \#Dloggaz$

Log likelihood		-126.1483		
Variable	Coeff	Std Error	T-stat	Signif
Moyenne (Dpétrole)	-1.489371	0.001534	-970.91367	0.0000000
C	62.033878	0.73513	843.84339	0.0000000
A	0.037402	0.000495	75.50172	0.0000000
B	0.045039	0.000452	99.70954	0.0000000
Dloggaz	1235.651114	1.136159	1087.56899	0.0000000

GARCH(P=1,Q=1,MV=BEKK) / Électricité #Dloggaz.

Log likelihood		55.4059		
Variable	Coeff	Std Error	T-stat	Signif
Moyenne (Électricité)	4.072271742	0.015602329	261.00410	0.0000000
C	0.001584320	0.000853274	1.85675	0.06334619
A	0.082305549	0.122935302	1.66950	0.50317469
B	0.404715865	0.293927832	1.37692	0.16853619
Dloggaz	-0.005860860	0.001861090	-3.14915	0.00163744

Selon les résultats suivants :

$$|T_{obs}|_{Dpétrole/Électricité} = 41.39331$$

$$|T_{obs}|_{Dpétrole/Dloggaz} = 970.91367$$

$$|T_{obs}|_{Électricité/Dloggaz} = 261.00410$$

Discussion

Il existe une relation très importante entre l'électricité et le gaz car nous utilisons le gaz pour produire de l'électricité. Mais nous constatons que le pétrole affecte la production d'électricité. Le prix du gaz ne sera plus corrélé avec le prix du pétrole.

Dans tous les cas, gaz, pétrole et électricité sont fortement corrélés en termes de prix : les sous-jacents restent les mêmes.

Le cas Multivarie

Le modèle estimé $BEKK - GARCH(1,1)$ peut être obtenu en substituant les matrices suivantes :

D'après l'équation (2.5), l'expression de la matrice H_t à chaque instant t dans le modèle $BEKK$ est donnée par la relation suivante :

$$H_t = C' C + \sum_{k=1}^K A'_{1k} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{1k} + \sum_{k=1}^K B'_{1k} H_{t-1} B_{1k}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.3628228 & -0.0042407 & -0.0004405 \\ -23.4830243 & 0.3613381 & 0.0378142 \\ 131.6406958 & 0.5409977 & -0.0680014 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.2163124 & 0.0012535 & 0.0002825 \\ 1.6158417 & 0.2866741 & -0.0000243 \\ -148.7025596 & 0.4934415 & 0.1910128 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6.8836290 & 0 & 0 \\ -0.0083230 & 0.0325875 & 0 \\ -0.0255640 & 0.0330037 & 0.0124445 \end{bmatrix}$$

Les prévisions

Dans cette sous-section, nous comparons les modèles $vec-GARCH$, $BEKK - GARCH$, $CCC - GARCH$ et $DCC - GARCH$ en utilisant la méthode de la moyenne. Ici, nous n'utilisons que l'erreur absolue moyenne de volatilité (elle est également appelée erreur moyenne moyenne MAE_v) :

	Erreur moyenne de volatilité (MAE_v)
MAE_v (<i>Dpétrole</i>)	0.0056
MAE_v (<i>D log gaz</i>)	0.0132
MAE_v (<i>Électricité</i>)	0.0306

Tableau 9 : MAE en volatilité du modèle *vec – GARCH*

	Erreur moyenne de volatilité (MAE_v)
MAE_v (<i>Dpétrole</i>)	0.00032
MAE_v (<i>D log gaz</i>)	0.00131
MAE_v (<i>Électricité</i>)	0.0026

Tableau 10 : MAE en volatilité du modèle *BEKK – GARCH*

	Erreur moyenne de volatilité (MAE_v)
MAE_v (<i>Dpétrole</i>)	0.00487
MAE_v (<i>D log gaz</i>)	0.0149
MAE_v (<i>Électricité</i>)	0.0528

Tableau 11 : MAE in volatility of the *CCC – GARCH* model

	Erreur moyenne de volatilité (MAE_v)
MAE_v (<i>Dpétrole</i>)	0.00034
MAE_v (<i>D log gaz</i>)	0.00132
MAE_v (<i>Électricité</i>)	0.0026

Tableau 12 : MAE en volatilité du modèle *DCC – GARCH*

Remarque Dans le cas de MAE en corrélation, nous trouvons que le modèle $BEKK - GARCH$ est le meilleur.

	Erreur moyenne de corrélation(MAE_C)
$MAE_C (Doil/Electricity)$	0.0146
$MAE_C (Doil/D \log gas)$	0.0767
$MAE_C (Electricity/D \log gas)$	0.0608

Tableau 13 : MAE en corrélation de la $BEKK - GARCH$

En comparant la qualité de l'ajustement à l'erreur absolue moyenne, nous constatons que les performances d'ajustement de la forme $BEKK - GARCH$ sont meilleures que les modèles $vec - GARCH$, $BEKK - GARCH$, $CCC - GARCH$ and $DCC - GARCH$ sur le marché de l'énergie. A l'inverse, les modèles $DCC - GARCH$ et $BEKK - GARCH$ ont un avantage sur le modèle $BEKK - GARCH$ dans le domaine de la prévision car le modèle $DCC - GARCH$ est plus parcimonieux que les modèles $vec - GARCH$ et $CCC - GARCH$. Dans cette direction, il est extrêmement important d'équilibrer parcimonie et flexibilité lors de la modélisation de modèles $GARCH$ multivariés.

CHAPITRE 3

Modèles de séries chronologiques spatio-temporelles multivariées

Sommaire

3.1 Concepts généraux sur les modèles spatiaux . . .	46
3.2 Les matrices de poids spatial	48
3.3 Présentation des modèles des séries chrono- giques spatio-temporelles multivariées	54
3.4 Notions de causalité	57
3.5 Notion de cointégration	59
3.6 Détermination de la structure causale avec un modèle GSTAR	62
3.7 Résultats et discussions	66

Ce chapitre, qui est l'essentiel de cette thèse, présente les modèles spatiaux appelée modèles autorégressifs spatio-temporels généralisés (General-

zed Space-Time AutoRegressive model (*GSTAR*)), dont une analyse avec des données réelles portant sur le Covid-19, utilisant le teste de causalite au sens de Granger a été effectuée.

3.1 Concepts généraux sur les modèles spatiaux

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter, dans un premier temps, les concepts généraux sur la statistique spatiale. Ensuite, nous accordons une attention particulière à la classe des modèles *GSTAR* et à la méthode d'estimation de leurs paramètres.

Les processus stochastiques multivariés permettent de décrire plusieurs séries chronologiques. Les mesures de corrélation permettent de décrire plusieurs régions spatiales, leurs liens et les dépendances temporelles. Cependant, un modèle multivarié général entraînera typiquement un grand nombre de paramètres, surtout si le nombre de séries chronologiques est relativement important.

Le concept d'espace : L'espace comme concept géographique, n'est pas une zone, ni un lieu, ni une région du monde, ni un « territoire ». Il se définit par la forme (type et structure des « distances », organisation des espacements, valeur des liens) que prennent les relations entre les lieux, que ce soit pour un individu, pour un groupe, ou pour une entité géographique. En dehors de ce positionnement simple, il existe au moins trois manières de penser l'espace en géographie : l'espace absolu ; l'espace relatif ; l'espace construit (subjectif).

Premièrement, l'espace peut être considéré comme une réalité absolue. Ainsi, les conditions géo-climatiques sont vues comme stables, les régions

existent en tant que telle, il y a un espace défini de la civilisation occidentale et un espace défini de la civilisation musulmane. . . Dans un deuxième temps, la réalité spatiale peut aussi être considérée comme le fruit d'un jeu de forces dans le cadre d'un système, faisant que chaque élément du système se situe spatialement en fonction des autres éléments. Ainsi, l'espace n'est plus absolu, il est relatif et évolutif. Enfin, l'espace peut être considéré comme une réalité fluctuante et libre, faisant que les rapports entre les éléments ne sont jamais réellement prédéterminés. Dans ce cadre, l'espace est une construction entièrement subjective

Définition 3.1.1 Matrice de pondération spatiale

Une matrice de poids est utilisée pour quantifier les relations de voisinage entre les points, c-à-d. pour attribuer un poids à chaque voisin. La structure dépend du concept de quartier choisi. Jusqu'à présent, le choix des poids spatiaux est subjectif, en fonction du chercheur. Il existe plusieurs façons de sélectionner les poids à utiliser : avec un poids uniforme, binaire et non uniforme, basé sur la matrice de distance et l'inférence de corrélation croisée, où l'emplacement la pondération peut être effectuée en normalisant les amplitudes d'intercorrélation entre les emplacements pendant le processus correspondant.

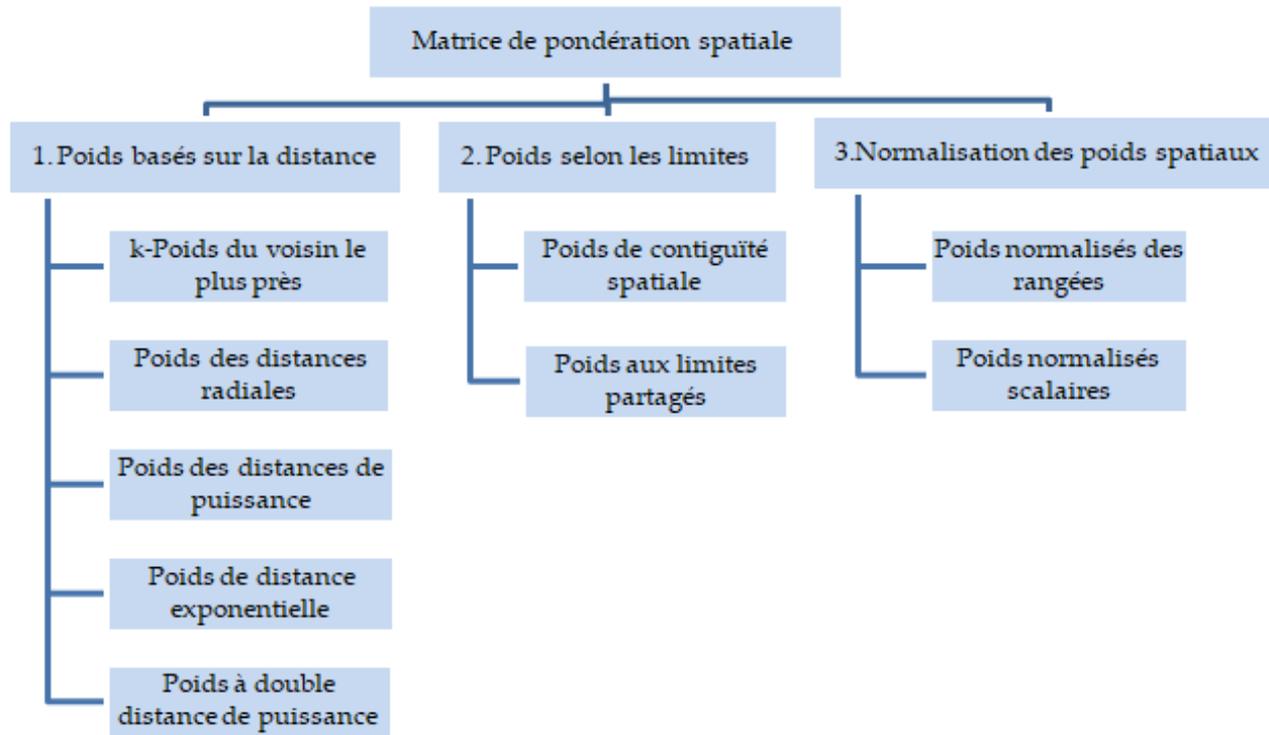


Figure 2 : Diagramme de différentes matrices de pondérations spatiales

3.2 Les matrices de poids spatial

Chaque matrice non négative, $W = (w_{ij} : j, i = 1, \dots, n)$, est un possible matrice de poids spatial résumer les relations spatiales entre n unités spatiales. Ici chacun poids spatial, w_{ij} , reflète généralement «l'influence spatiale» de l'unité j sur l'unité i . Norme suivante convention, nous excluons ici «l'auto-influence» en supposant que $w_{ii} = 0$ pour tous $i = 1, \dots, n$ (pour que W a une diagonale nulle).

3.2.1 Poids basés sur la distance

Les matrices de poids suivantes sont basées sur distances du centre de gravité d_{ij} , entre chaque paire d'unités spatiales i et j .

À l'exception de la matrice basée sur la proportion de frontière commune aux régions, toutes ces matrices sont basées sur le calcul des distances à l'aide de la distance sphérique entre centroïdes géographiques des régions. de manière formelle, la distance sphérique en kilomètres entre les centroïdes de deux régions se définit comme suit (DALLERBA, 2004a) :

$$d_{ij} = 6371. \times \arccos^{-1}[\cos |x_i - x_j| \cos y_i \cos y_j + \sin y_i \sin y_j] \quad (3.1)$$

où x_i et y_i sont respectivement la latitude, la longitude du centroïde de la région i . De même pour x_j et y_j pour la région j .

k-poids des voisins les plus proches

Soit les distances centroïdes de chaque unité spatiale i à tout les unités $j \neq i$ être classées comme suit : $d_{ij(1)} \leq d_{ij(2)} \leq \dots \leq d_{ij(n-1)}$. Alors pour chaque $k = 1, \dots, n-1$, l'ensemble $N_k(i) = \{j(1), j(2), \dots, j(k)\}$ contient les k unités les plus proches de i (où pour simplifier nous ignorons les liens). Pour chaque k donné, la matrice de poids du voisin k le plus proche, a alors poids spatiaux de la forme :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in N_k(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{Forme standard})$$

Alternativement, on peut envisager une version asymétrique dans laquelle des poids positifs sont attribués à tous par paires dont au moins l'un est parmi les k -plus proches voisins de l'autre :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in N_k(i) \text{ ou } i \in N_k(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{Forme symétrique})$$

Poids de distance radiale

Poids à distance radiale. Si la distance elle-même est un critère important d'influence spatiale, et si d désigne une distance seuil (ou bande passante) au-delà de laquelle il n'y a pas d'influence spatiale directe entre les unités spatiales, alors la matrice de poids de distance radiale correspondante a des poids spatiaux de la forme :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & 0 \leq d_{ij} \leq d \\ 0 & d_{ij} > d \end{cases}$$

Poids de distance de puissance

Poids de distance de puissance. Notez que dans les poids de distance radiale, on suppose qu'il n'y a pas d'effet décroissant de la distance jusqu'au seuil d . Si l'on pense qu'il y a des effets décroissants, une approche standard consiste à supposer que les poids sont une fonction de puissance négative de la distance de la forme :

$$w_{ij} = d_{ij}^{-\alpha}$$

Poids des distances exponentielles

Poids des distances exponentielles. Une alternative aux fonctions de puissance négative sont des fonctions exponentielles négatives de la distance de la forme :

$$w_{ij} = \exp(-\alpha d_{ij}), \forall \alpha > 0$$

3.2.2 Pondérations basées sur les limites

L'avantage des poids de distance ci-dessus est que les distances sont facilement calculées. Mais dans de nombreux cas, les frontières partagées entre les unités spatiales jouent un rôle important dans la détermination du degré d «influence spatiale».

Poids de contiguïté spatiale

Le plus simple de ces poids indique simplement si les unités spatiales partagent une frontière ou non. Si l'ensemble des points limites de l'unité i est désigné par $bn d(i)$, alors les poids de contiguïté de reine sont définis par :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & bnd(i) \cap bnd(j) \neq \emptyset \\ 0 & bnd(i) \cap bnd(j) = \emptyset \end{cases}$$

Par convention, une région n'est pas contiguë avec elle-même, donc : $w_{ii} = 0$. Cependant, cela permet la possibilité que les unités spatiales ne partagent qu'un seul point de frontière (comme un point d'angle partagé sur une grille d'unités spatiales). Par conséquent, une condition plus forte est d'exiger qu'une partie positive de leur frontière soit partagée. Si l_{ij} désigne la longueur de la frontière partagée, $bnd(i) \cap bnd(j)$, entre i et j , alors ces poids de contiguïté de tour sont définis par :

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & l_{ij} > 0 \\ 0 & l_{ij} = 0 \end{cases}$$

Poids aux limites partagées

Comme forme de comparaison plus précise, notez que si l_i définit la longueur limite totale de $bnd(i)$ qui est partagée avec d'autres unités spatiales, c'est-à-dire $\sum_{j \neq i} l_{ij}$, alors la fraction de cette longueur partagée avec une unité particulière j est donnée par l_{ij}/l_i . Celles-ci les fractions elles-mêmes donnent un ensemble potentiellement pertinent de poids limites partagés, définis par :

$$w_{ij} = \frac{l_{ij}}{l_i} = \frac{l_{ij}}{\sum_{k \neq i} l_{ik}}$$

3.2.3 Poids combinés distance-frontière

Enfin, il devrait être évident que dans de nombreuses situations, l'influence spatiale peut présenter des aspects à la fois de relations de distance et de frontières. Un exemple classique de ceci est donné dans l'étude originale de l'autocorrélation spatiale de Cliff et Ord (1969). En analysant l'Irlande données sur les groupes sanguins, ils ont constaté que le meilleur schéma de pondération pour capturer les effets d'autocorrélation spatiale était donné par la combinaison suivante de puissance-distance et de part de frontière :

$$w_{ij} = \frac{l_{ij}d_{ik}^{-\alpha}}{\sum_{k \neq i} l_{ik}d_{ik}^{-\alpha}},$$

avec une distance inverse simple $\alpha = 1$

3.2.4 Normalisations des poids spatiaux

Dans la plupart des cas, il est pratique de normaliser les pondérations spatiales pour éliminer la dépendance à des facteurs d'échelle étrangers (tels

que les unités de distance particulières utilisées dans les pondérations exponentielles et puissantes). Ici, il existe deux approches standard.

Poids normalisés des lignes

Rappelons que la $i^{\text{ème}}$ ligne de W contient tous les poids spatiaux influencer l'unité i spatiale, à savoir $(w_{ij} : i \neq j)$ [rappeler que $w_{ii} = 0$]. Donc, si les poids (non négatifs) dans chaque ligne sont normalisés pour avoir une somme unitaire, c'est-à-dire,

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Poids normalisés scalaires

En dépit de sa popularité, la pondération normalisée par ligne présente des inconvénients. En particulier, la normalisation des lignes modifie la structure de pondération interne de W de sorte que les comparaisons entre les lignes deviennent quelque peu problématiques. Par exemple, considérez la pondération de contiguïté spatiale par rapport à l'exemple simple à trois unités illustré à gauche ci-dessous :

1	2	3
---	---	---

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme représenté dans la matrice de poids de contiguïté à droite, l'unité j est influencée à la fois par i et k , tandis que les unités i et k ne sont chacune influencées que par l'unité j unique. On pourrait donc soutenir que j est soumis à plus d'influence spatiale que i ou k . Mais la normalisation de

ligne de la matrice de poids modifie cette relation, comme le montre sa forme normalisée par ligne au dessous de :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Présentation des modèles des séries chronologiques spatio-temporelles multivariées

3.3.1 Modèle STARMA

Une extension du modèle ARMA bien connu pour traiter la dépendance spatio-temporelle est le modèle $STARMA(p_\lambda, q_\delta)$ proposé par Cliff et Ord (1975) et Pfeifer et Deutsch (1980a, b), qui s'exprime comme suit :

$$Z_t = \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^{\lambda_k} \phi_{k,j} W_j Z_{t-k} - \sum_{k=1}^q \sum_{j=0}^{\delta_k} \theta_{k,j} W_j \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

où

- p et q sont respectivement les décalages des composantes autorégressives et moyennes mobiles
- λ_k est le degré de dépendance spatiale au sein de la k ème composante de retard autorégressif.
- δ_k est le degré de dépendance spatiale au sein de la k ème composante de retard de moyenne mobile.
- $\phi_{k,j}$ sont les paramètres des composantes autorégressives.
- $\theta_{k,j}$ sont les paramètres de la composante moyenne mobile.

Deux modèles particuliers sont dérivés de modèle $STARMA(p_\lambda, q_\delta)$

Le modèle $STAR(p_\lambda)$ avec uniquement des composantes autorégressives spatio-temporelles, et le modèle $STMA(q_\delta)$ avec seulement des composantes moyennes mobiles spatio-temporelles.

Le modèle $STARMA(p_\lambda, q_\delta)$ a deux sous-classes spéciales. Lorsque les modèles qui ne contiennent pas de terme autorégressif $p = 0$ sont considérés comme un modèle $STMA(q_\delta)$ à moyenne mobile spatio-temporelle. Lorsque $q = 0$, la classe est considérée comme un modèle $STAR(p_\lambda)$ à régression automatique spatio-temporelle.

3.3.2 Modele STAR

L'autorégression spatio-temporelle (STAR) fait partie de la modélisation spatio-temporelle. Ce modèle comprend la combinaison d'éléments de dépendances de temps et de lieu. le modèle STAR d'ordre autorégressif p et d'ordre spatial $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ $STAR(p_\lambda)$ est défini comme suit :

$$z_t = \sum_{s=1}^p \sum_{k=0}^{\lambda_s} \Phi_{sk} W^{(k)} z_{t-s} + \varepsilon_t \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.3)$$

Par exemple, si un nombre d'emplacement est 3, alors $STAR(1_1)$ s'affiche comme suit :

$$z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x,t} \\ \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{z,t} \end{pmatrix} \\ \Phi_{sk} = \text{diag}(\phi_{sk}^{(1)}, \dots, \phi_{sk}^{(n)})$$

3.3.3 Modèle GSTAR

Le modèle *GSTAR* est une forme spécifique de modèle *VAR* (Vector Autoregressive). Il révèle des dépendances linéaires de l'espace et du temps. La principale différence réside dans la dépendance spatiale, que dans le modèle *GSTAR*, elle est exprimée par une matrice de poids.

Soit $\{Z_t \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ une série chronologique multivariée de N composantes. En notation matricielle, le modèle *GSTAR* d'ordre autorégressif p et d'ordre spatial $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. *GSTAR*($p_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p}$) pourrait s'écrire comme : (voir [9] Borovkova)

$$z_t = \sum_{s=1}^{p_s} \left[\Phi_{s0} + \sum_{k=1}^{\lambda_s} \Phi_{sk} W^{(k)} z_{t-s} \right] + \varepsilon_t \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4)$$

Où

$$\Phi_{s0} = \text{diag}(\phi_{s0}^{(1)}, \dots, \phi_{s0}^{(N)}) \quad \text{et} \quad \Phi_{sk} = \text{diag}(\phi_{sk}^{(1)}, \dots, \phi_{sk}^{(N)}).$$

les poids sont choisis pour satisfaire $w_{ii}^k = 0$ et $\sum_{i \neq j} w_{ij}^k = 1$.

ε_t est un modèle résiduel qui satisfait à l'identique, indépendant, distribué avec moyenne et covariance Σ .

Par exemple, le modèle *GSTAR* avec un ordre temporel et spatial un pour trois emplacements est le suivant : *GSTAR*(1_1) avec $N = 3$

$$z_t = \Phi_{10} z_{t-1} + \Phi_{11} w^{(1)} z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{20} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}$$

Borovkova et Borovkova et al. [9] ont déclaré que plusieurs matrices de poids spatiaux ou sont généralement utilisées dans le modèle *GSTAR*, c-à-d la matrice Poids uniforme, la matrice poids basé sur l'inverse de la distance entre les emplacements, la matrice poids basé sur la normalisation de l'inférence de corrélation croisée et poids basé sur la normalisation de la corrélation croisée partielle inférence. En général, le nombre de paramètres dans *VAR* est plus grand que dans le modèle *GSTAR*.

3.4 Notions de causalité

\mathbb{Z} = Ensemble des entiers

A_t = Ensemble dénombrable de variables aléatoires ayant des variances finies et comprenant X_t, Y_t (ensemble d'information)

$$A_t = \{Z_{kt} : k \in I\}, \quad I \subseteq \mathbb{Z} \quad \{X_t, Y_t\} \subseteq A_t$$

$$\overline{X}_t = \{X_s : s \leq t\}, \quad \overline{Y}_t = \{Y_s : s \leq t\}$$

$$\overline{A}_t = \bigsqcup_{s \leq t} A_s$$

$$X = \{X_t : t \in \mathbb{Z}\} = \{X_t\} \quad Y = \{Y_t : t \in \mathbb{Z}\} = \{Y_t\}$$

$$A = \bigsqcup_{t \in \mathbb{Z}} A_s$$

B sous-ensemble quelconque de A : $B \subseteq A$

$P(Y_t/B)$ = Meilleur prédicteur linéaire sans biais de Y_t basé sur les variables dans B

$$\varepsilon(Y_t/B) = Y_t - P(Y_t/B)$$

$$\sigma^2(Y_t/B) = E[\varepsilon(Y_t/B)^2]$$

Notions de causalité : la loi du processus est la loi du couple (X_t, Y_t) . Cette dernière s'écrit, à la date t , conditionnellement au passé (noté $\underline{x_{t-1}}$ et $\underline{y_{t-1}}$), $\ell(x_t, y_t/\underline{x_{t-1}}, \underline{y_{t-1}})$. Dans le cas où les processus (X_t) et (Y_t) sont indépendants, alors

$$\ell(x_t, y_t/\underline{x_{t-1}}, \underline{y_{t-1}}) = \ell(x_t/\underline{x_{t-1}}) \times \ell(y_t/\underline{y_{t-1}}) \quad (3.5)$$

3.4.1 Causalité au sens de Granger

Soient (X_t) et (Y_t) deux séries temporelles, et notons le passé de (X_t) et (Y_t) , $\underline{X}_t = \{X_t, X_{t-1}, \dots\}$ et $\underline{Y}_t = \{Y_t, Y_{t-1}, \dots\}$. Granger a introduit en 1969 [28] différentes notions de causalité :

i) Y cause X à la date t si et seulement si :

$$E(X_t/\underline{X}_{t-1}, \underline{Y}_{t-1}) \neq E(X_t/\underline{X}_{t-1})$$

ii) Y cause X instantanément à la date t si et seulement si :

$$E(X_t/\underline{X}_{t-1}, \underline{Y}_t) \neq E(X_t/\underline{X}_{t-1}, \underline{Y}_{t-1}).$$

Il y a une équivalence entre 1 et 2 :

- 1) X ne cause pas Y instantanément à la date t
- 2) Y ne cause pas X instantanément à la date t .

Définition 3.4.1 Causalité au sens de Granger

1. Causalité : X cause Y ssi $\sigma^2(Y_{t+1}/A) < \sigma^2(Y_{t+1}/\overline{A_t} \setminus \overline{X_t})$ Pour au moins une valeur de t .

2. Causalité instantanée : X cause Y instantanément ssi :

$$\sigma^2(Y_{t+1}/\bar{A}_t, \bar{X}_{t+1}) < \sigma^2(Y_{t+1}/\bar{A}_t \setminus \bar{X}_t) \text{ Pour au moins une valeur de } t.$$

Définition 3.4.2 *Rétroaction (ou feedback).* Il y a rétroaction entre X et Y ssi X cause Y et Y cause X.

Le test au sens de Granger (1969), utilisé dans les études économétriques de causalité, est construit de manière simple sur l'idée suivante : si un phénomène est la cause d'un autre phénomène, appelé «effet», alors ce dernier ne peut précéder la cause. En d'autres termes, Granger considère qu'il existe une relation causale entre deux variables si la présence du passé d'une variable Z fournit des informations dans l'explication du présent.

$Z_{1,t}$ ne cause pas $Z_{2,t}$ si et seulement si :

$$P(Z_{2,t} \setminus Z_{2,t-1}) = P(Z_{2,t} \setminus Z_{1,t-1}, Z_{2,t-1})$$

Si une autre série ($Z_{3,t-1}$) est observée puis la définition est modifiée :

$Z_{1,t}$ ne cause pas $Z_{2,t}$ si et seulement si :

$$P(Z_{2,t} \setminus Z_{2,t-1}, Z_{3,t-1}) = P(Z_{2,t} \setminus Z_{1,t-1}, Z_{2,t-1}, Z_{3,t-1})$$

3.5 Notion de cointégration

L'analyse de la cointégration permet d'identifier la relation entre plusieurs variables. Cette notion a été introduite dès 1974 par Granger et Newbold, sous le nom de "spurious régressions", ou régressions fallacieuses, puis formalisée par Engle et Granger en 1987, et enfin par Johansen en 1991 et en 1995.

3.5.1 Principe de la cointégration

En scrutant les relations d'équilibre à long terme des variables, l'analyse de la cointégration permet d'identifier l'existence des séries suivant un même sentier d'équilibre à long terme (l'existence d'un éventuel vecteur de cointégration) et d'éliminer son effet le cas échéant.

Une série est intégrée d'ordre d s'il convient de la différencier d fois avant de la stationnariser.

Définition 22 *La série (X_t) sera dite intégrée d'ordre $d(d \geq 1)$ si $\Delta^{d-1}X_t$ n'est pas stationnaire et $\Delta^d X_t$ est stationnaire. Une série stationnaire sera dite intégrée d'ordre 0.*

Remarque 6

Soient (X_t) une série stationnaire et (Y_t) intégrée d'ordre 1, alors $(X_t + Y_t)$ est intégrée d'ordre 1.

Toutefois, si (X_t) et (Y_t) sont intégrées d'ordre d , alors $(X_t + Y_t)$ peut être soit intégrée d'ordre d , soit stationnaire (dans le cas où les tendances s'annulent).

Deux séries (X_t) et (Y_t) sont cointégrées si

(i) (X_t) et (Y_t) sont intégrées d'ordre d

(ii) il existe une combinaison linéaire de ces séries qui soit intégrée d'ordre strictement inférieur à d , noté $d - b$

Dans le cas de l'intégration, on notera $X_t \sim I(d)$, et pour la cointégration $X_t, Y_t \sim CI(d, b)$. Le vecteur (α, β) tel que $\alpha X_t + \beta Y_t \sim I(d - b)$ sera appelé vecteur de cointégration.

On généralisé (à plus de deux séries) comme suit :

Soit Z_t , le vecteur de séries chronologiques, les composantes de Z_t sont dites cointégrées d'ordre (d, b) si :

(i) toutes les composantes de Z_t sont $I(d)$

(ii) il y a au moins un vecteur de coefficients $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ tel que :
 $\beta Z_t \sim I(d - b)$

3.5.2 Test de cointégration

Pour identifier l'existence d'un éventuel vecteur de cointégration, plusieurs méthodes peuvent être utilisées, notamment les approches proposées par : Engel – Granger(1987), Johansen (1991), et Phillips-Ouliaris (1990). Dans cette écriture, nous décrivons l'algorithme à deux pas proposé par Engel et Granger et celui de Johansen appliqué en cas de séries co-intégrées.

Test de Engel et Granger

Ce test est construit par deux étapes :

-Etape1 : tester l'ordre d'intégration des variables : une des conditions nécessaires pour qu'il y ait cointégration étant que les deux séries doivent être intégrées du même ordre. Ces tests reposent sur l'utilisation des tests de Dikey & Fuller.

On cherche alors d tel que $X_t \sim I(d)$ et $Y_t \sim I(d)$.

-Etape2 : Si $X_t \sim I(1)$ et $Y_t \sim I(1)$: estime par les MCO la relation de long terme :

$$Y_t = \alpha X_t + \beta t + \varepsilon_t$$

En réécrivant l'équation précédente comme suit on a :

$$\varrho_t = Y_t - \alpha X_t - \beta \sim I(0) \text{ pour } \alpha \neq 0$$

Ainsi, le test valide la présence de cointégration si le vecteur résiduel issu de cette estimation est stationnaire.

3.6 Détermination de la structure causale avec un modèle GSTAR

Exemple 3.1 Application au cas d'un $VAR(1)$ avec $n = 2$

$$z_t = a + \phi_{11}z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$z_t = \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

La variable $z_{2,t}$ ne cause pas la variable $z_{1,t}$ si et seulement si : $\phi_{12} = 0$

La variable $z_{1,t}$ ne cause pas la variable $z_{2,t}$ si et seulement si : $\phi_{21} = 0$

On est conduit à accepter les deux hypothèses que $z_{1,t}$ cause $z_{2,t}$ et que $z_{2,t}$ cause $z_{1,t}$, on parle d'une boucle de rétroaction "effet de rétroaction"

3.6.1 Détermination de la structure causale avec un modèle GSTAR

Pour une $STAR(1_1)$ avec $n = 2$, la condition de causalité de Granger est immédiate pour obtenir :

$$z_t = \phi_{10}z_{t-1} + \phi_{11}w^{(1)}z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \phi_{10} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)}_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ w_{21} & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{10} & \phi_{11}w_{12} \\ \phi_{11}w_{21} & \phi_{10} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{x,t} \\ \varepsilon_{y,t} \end{bmatrix} \\
 z_{1,t} &= \phi_{10}z_{1,t-1} + \phi_{11}w_{12}z_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t}
 \end{aligned}$$

$$z_{2,t} = \phi_{11}w_{21}z_{1,t-1} + \phi_{10}z_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

La variable $z_{2,t}$ ne cause pas la variable $z_{1,t}$ si et seulement si :

$$\phi_{11}w_{12} = 0 \implies \phi_{11} = 0 \text{ ou } w_{12} = 0.$$

La variable $z_{1,t}$ ne cause pas la variable $z_{2,t}$ si et seulement si :

$$\phi_{11}w_{21} = 0 \implies \phi_{11} = 0 \text{ ou } w_{21} = 0.$$

Dans le cas d'une matrice de poids sympatrique et $w_{ij} = 0$ donc il y a bidirectionnel et non causal $z_{i,t} \leftrightarrow z_{j,t}$ ($z_{i,t} \nrightarrow z_{j,t}$ et $z_{j,t} \nrightarrow z_{i,t}$)

Exemple 3.2 Pour une $STAR(2_2)$ avec $n = 2$, la condition de causalité de Granger est immédiate pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 z_t &= \phi_{10}z_{t-1} + \phi_{11}w^{(1)}z_{t-1} + \phi_{12}w^{(2)}z_{t-2} + \varepsilon_t \\
 \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} \phi_{10} & 0 \\ 0 & \phi_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_{12}^{(1)} \\ w_{21}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{pmatrix} \\
 & + \left[\begin{pmatrix} \phi_{12} & 0 \\ 0 & \phi_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_{12}^{(2)} \\ w_{21}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z_{1,t-2} \\ z_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \\
 \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{10} & \phi_{11}w_{12}^{(1)} \\ \phi_{11}w_{21}^{(1)} & \phi_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi_{12}w_{12}^{(2)} \\ \phi_{12}w_{21}^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-2} \\ z_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix} \\
 z_{1,t} &= \phi_{10}z_{1,t-1} + \phi_{11}w_{12}^{(1)}z_{2,t-1} + \phi_{12}w_{12}^{(2)}z_{2,t-2} + \varepsilon_{1,t} \\
 z_{2,t} &= \phi_{11}w_{21}^{(1)}z_{1,t-1} + \phi_{10}z_{2,t-1} + \phi_{12}w_{21}^{(2)}z_{1,t-2} + \varepsilon_{2,t}
 \end{aligned}$$

La variable $z_{2,t}$ ne cause pas la variable $z_{1,t}$ si et seulement si :

$\phi_{11}w_{12}^{(1)} = 0 \implies \phi_{11} = 0$ ou $w_{12}^{(1)} = 0$ et $\phi_{12}w_{12}^{(2)} = 0 \implies \phi_{12} = 0$ ou $w_{12}^{(2)} = 0$.

La variable $z_{1,t}$ ne cause pas la variable $z_{2,t}$ si et seulement si :

$\phi_{11}^{(2)}w_{21} = 0 \implies \phi_{11}^{(2)} = 0$ ou $w_{21} = 0$ et $\phi_{12}w_{21}^{(2)} = 0 \implies \phi_{12} = 0$ ou $w_{21}^{(2)} = 0$.

Exemple 3.3 Pour un modèle $GSTAR(1_1)$ avec $p = 1$, $\lambda = 1$ et $n = 3$, la condition de causalité de Granger est immédiate à obtenir :

$$\begin{aligned} z_t &= \Phi_{10}z_{t-1} + \Phi_{11}w^{(1)}z_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= (\Phi_{10} + \Phi_{11}W^{(1)})z_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \phi_{10}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{10}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{10}^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{11}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{10}^{(1)} & \phi_{11}^{(1)}w_{12} & \phi_{11}^{(1)}w_{13} \\ \phi_{11}^{(2)}w_{21} & \phi_{10}^{(2)} & \phi_{11}^{(2)}w_{23} \\ \phi_{11}^{(3)}w_{31} & \phi_{11}^{(3)}w_{32} & \phi_{10}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_{1,t-1} &= \phi_{10}^{(1)}z_{1,t-1} + \phi_{11}^{(1)}w_{12}z_{2,t-1} + \phi_{11}^{(1)}w_{13}z_{3,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ z_{2,t-1} &= \phi_{11}^{(2)}w_{21}z_{1,t-1} + \phi_{10}^{(2)}z_{2,t-1} + \phi_{11}^{(2)}w_{23}z_{3,t-1} + \varepsilon_{2,t} \\ z_{3,t-1} &= \phi_{11}^{(3)}w_{31}z_{1,t-1} + \phi_{11}^{(3)}w_{32}z_{2,t-1} + \phi_{10}^{(3)}z_{3,t-1} + \varepsilon_{3,t} \end{aligned}$$

La variable $z_{2,t}$ ne cause pas la variable $z_{1,t}$ si et seulement si :

$$\left(\phi_{11}^{(1)}w_{12} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(3)}w_{32} = 0 \right).$$

La variable $z_{2,t}$ ne cause pas la variable $z_{3,t}$ si et seulement si :

$$\left(\phi_{11}^{(3)}w_{32} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(1)}w_{12} = 0 \right).$$

$\implies z_{2,t}$ ne cause pas $z_{1,t}$ et $z_{3,t}$.

La variable $z_{3,t}$ ne cause pas la variable $z_{1,t}$ si et seulement si :

$$\left(\phi_{11}^{(1)} w_{13} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(2)} w_{23} = 0 \right).$$

La variable $z_{3,t}$ ne cause pas la variable $z_{2,t}$ si et seulement si :

$$\left(\phi_{11}^{(2)} w_{23} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(1)} w_{13} = 0 \right).$$

$\implies z_{3,t}$ ne cause pas $z_{1,t}$ et $z_{2,t}$.

La variable $z_{1,t}$ ne cause pas la variable $z_{2,t}$ si et seulement si :

$$\left(\phi_{11}^{(2)} w_{21} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(3)} w_{31} = 0 \right).$$

La variable $z_{1,t}$ ne cause pas la variable $z_{3,t}$ si et seulement si :

$$\left(\phi_{11}^{(3)} w_{31} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(2)} w_{21} = 0 \right).$$

$\implies z_{1,t}$ ne cause pas $z_{2,t}$ and $z_{3,t}$.

$z_{i,t}$ ne cause pas $z_{j,t}$ ($i \neq j$) si et seulement si : $\phi_{11}^{(i)} = 0$.

Exemple 3.4 Maintenant, nous changeons la matrice de poids, nous prendrons la matrice de poids spatial basée sur la distance.

$$\begin{aligned} z_t &= \Phi_{10} z_{t-1} + \Phi_{11} w^{(1)} z_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= (\Phi_{10} + \Phi_{11} W^{(1)}) z_{t-1} + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} \phi_{10}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{10}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{10}^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{11}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \\ z_{3,t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{10}^{(1)} & \phi_{11}^{(1)} d_{12} & \phi_{11}^{(1)} d_{13} \\ \phi_{11}^{(2)} d_{21} & \phi_{10}^{(2)} & \phi_{11}^{(2)} d_{23} \\ \phi_{11}^{(3)} d_{31} & \phi_{11}^{(3)} d_{32} & \phi_{10}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,t} \\ \varepsilon_{y,t} \\ \varepsilon_{z,t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$z_{1,t} = \phi_{10}^{(1)} z_{1,t-1} + \phi_{11}^{(1)} d_{12} z_{2,t-1} + \phi_{11}^{(1)} d_{13} z_{3,t-1} + \varepsilon_{1,t}$$

$$z_{2,t} = \phi_{11}^{(2)} d_{21} z_{1,t-1} + \phi_{10}^{(2)} z_{2,t-1} + \phi_{11}^{(2)} d_{23} z_{3,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

$$z_{3,t} = \phi_{11}^{(3)} d_{31} z_{1,t-1} + \phi_{11}^{(1)} d_{32} z_{2,t-1} + \phi_{10}^{(3)} z_{3,t-1} + \varepsilon_{3,t}$$

Dans le cas de la matrice de pondération spatiale basée sur la distance, on constate que les conditions des tests de causalité sont les mêmes que la causalité au sens de granger

$$z_{2,t} \text{ ne cause pas } z_{1,t} \text{ si } \left(\phi_{11}^{(1)} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(3)} = 0 \right)$$

$$z_{2,t} \text{ ne cause pas } z_{3,t} \text{ si } \left(\phi_{11}^{(3)} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(1)} = 0 \right)$$

$$z_{2,t} \text{ ne cause pas } z_{1,t} \text{ et } z_{3,t}$$

$$z_{3,t} \text{ ne cause pas } z_{1,t} \text{ si } \left(\phi_{11}^{(1)} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(2)} = 0 \right)$$

$$z_{3,t} \text{ ne cause pas } z_{2,t} \text{ si } \left(\phi_{11}^{(2)} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(1)} = 0 \right)$$

$$z_{3,t} \text{ ne cause pas } z_{1,t} \text{ et } z_{2,t}$$

$$z_{1,t} \text{ ne cause pas } z_{2,t} \text{ si } \left(\phi_{11}^{(2)} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(3)} = 0 \right)$$

$$z_{1,t} \text{ ne cause pas } z_{3,t} \text{ si } \left(\phi_{11}^{(3)} = 0 \right) \text{ et } \left(\phi_{11}^{(2)} = 0 \right)$$

$$z_{1,t} \text{ ne cause pas } z_{2,t} \text{ et } z_{3,t}$$

3.7 Résultats et discussions

Les données ont été recueillies auprès de l'Organisation mondiale de la santé. Les données de nombre cas confirmés de COVID-19 par jour sont du 2020-01-23 au 2020-08-29 de 4 pays (Canada, États-Unis, Mexique et Greenland). Les séries suivantes ont été utilisées dans notre étude :

Z_1 : nombre de cas de virus corona au Canada.

Z_2 : nombre de cas de virus corona aux États-Unis.

Z_3 : nombre de cas de virus corona au Mexique.

Z_4 : nombre de cas de virus corona au Greenland.



Figure 3 : Carte géographique pour les quatres emplacements

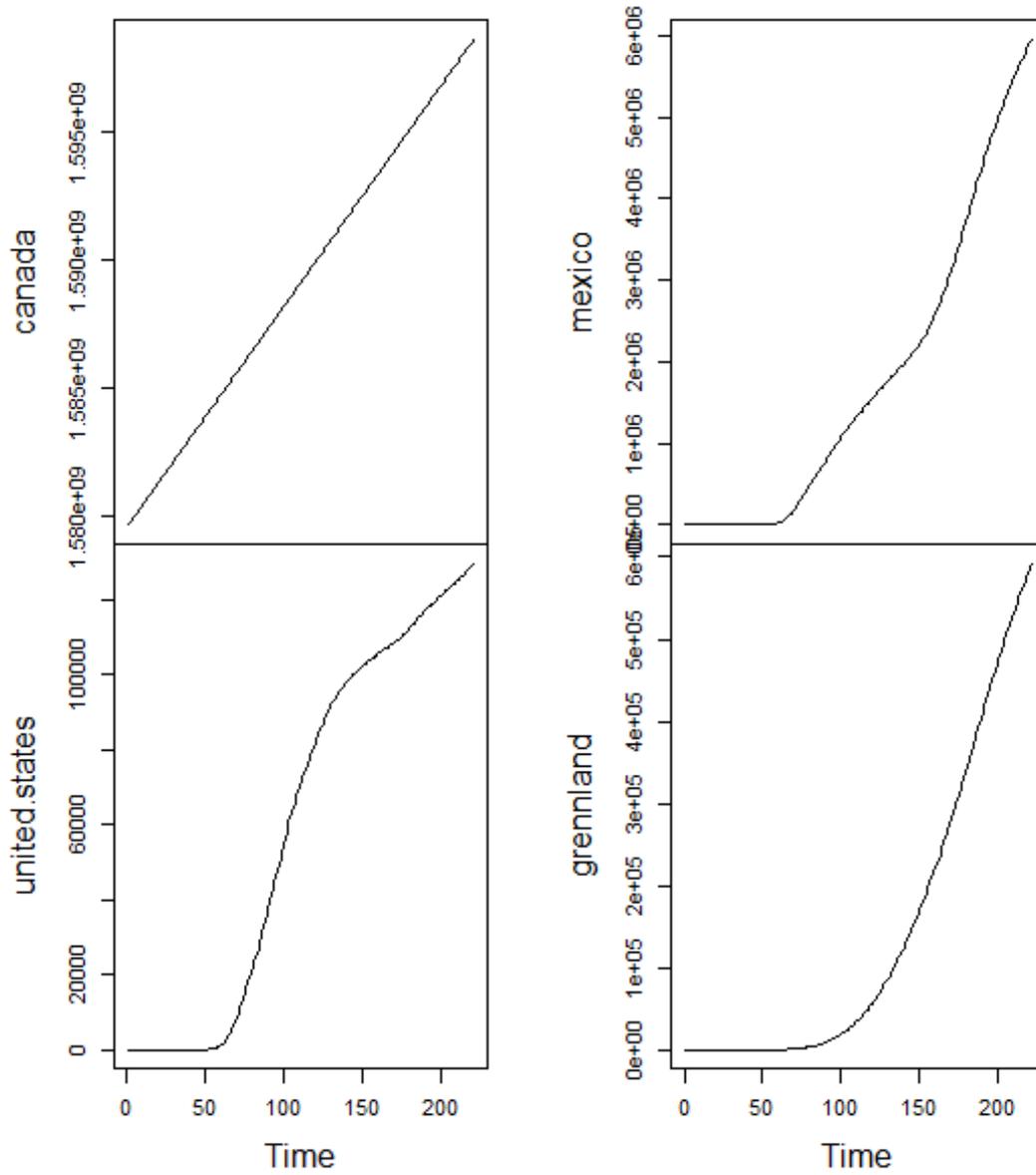


Figure 4 : L'augmentation du nombre de cas de covid-19 dans quatre pays

Chapitre 3. Modèles de séries chronologiques spatio-temporelles multivariées

	Canada	États-Unis	Mexique	Greenland
Min	0	1	0	0
1st Qu	478	6141	93	0
Median	71264	1352962	36327	13
Mean	60732	1794162	142583	9
3rd Qu	107394	2891124	256848	13
Max	129639	5961094	591712	14

Tableau 13 . Statistiques descriptives récapitulatives du nombre de cas confirmés de covid-19

city	Latitude	Longitude
Canada	56,130367	-106,346771
États-Unis	37,09024	-95,712891
Mexique	23,634501	-102,552788
Greenland	71,70694	-42,604301

Tableau 14 : Longitude et latitude des emplacements à l'étude

	Canada	États-Unis	Mexico	Greenland
Canada	0	1	0	0
États-Unis	1/3	1/3	1/3	0
Mexique	0	1	0	0
Greenland	0	0	0	0

Tableau15 : Matrice pondérée normalisée

À l'exception de la matrice basée sur la proportion de frontière commune aux régions, toutes ces matrices sont basées sur le calcul des distances à l'aide de la distance sphérique entre centroïdes géographiques des régions. de manière formelle, la distance sphérique en kilomètres entre les centroïdes de deux régions se définit comme suit (DALLERBA, 2004a) :

$$d_{ij} = 6371 \times \arccos^{-1}[\cos |x_i - x_j| \cos y_i \cos y_j + \sin y_i \sin y_j] \quad (3.6)$$

où x_i et y_i sont respectivement la latitude, la longitude du centroïde de la région i . De même pour x_j et y_j pour la région j .

	Canada	États-Unis	Mexique	Greenland
Canada	0	21.80839	32.71660	65.61808
États-Unis	21.80839	0	15.09441	63.39431
Mexique	32.71660	15.09441	0	76.84257
Greenland	65.61808	63.39431	76.84257	0

Tableau16 : Matrice de poids spatial à distance inverse

	F-Test	P-value	conclusion
Canada \rightarrow États-Unis	25.409	6.822e-07	bidirectional
États-Unis \rightarrow Canada	24.833	9.047e-07	Causality
Canada \rightarrow Mexique	310.43	< 2.2e-16	bidirectional
Mexique \rightarrow Canada	59.775	7.483e-14	Causality
Canada \rightarrow Greenland	5.9955	0.01474	unidirectional
Greenland \rightarrow Canada	730.18	< 2.2e-16	Causality
États-Unis \rightarrow Mexique	89.468	< 2.2e-16	bidirectional
Mexico \rightarrow États-Unis	16.731	5.134e-05	Causality
États-Unis \rightarrow Greenland	1.9097	0.1677	unidirectional
Greenland \rightarrow États-Unis	91.855	< 2.2e-16	Causality
Mexique \rightarrow Greenland	1.1768	0.2786	no
Greenland \rightarrow Mexique	2.3482	0.1254	Causality

Tableau 17 :Test de causalité de Granger

H_0 : non causalité instantanée entre	Chi-squared	p-value	Conclusion
Canada et États-Unis	26.991	2.044e-07	Causalité
Canada et Mexique	27.117	1.915e-07	Causalité
Canada et Greenland	0.23177	0.6302	Pas de causalité
États-Unis et Mexique	37.627	8.565e-10	Causalité
États-Unis et Greenland	2.1049	0.1468	Pas de causalité
Greenland et Mexique	2.3482	0.1254	Pas de causalité

Tableau 18 : Résultats des tests de causalité

Le test de causalité de Granger révèle une causalité bidirectionnelle à partir du nombre confirmé cas de virus corona au Canada au nombre de cas confirmés de virus corona États-Unis, nombre de cas confirmés de virus corona au Canada au nombre de cas confirmés de virus corona au Mexique et nombre de cas confirmés de corona-virus au Mexique au nombre de cas confirmés de corona-virus aux États-Unis.

Canada→États-Unis, Canada→Mexique, Mexique→États-Unis.

Le test de causalité de Granger révèle une causalité unidirectionnelle à partir du nombre confirmé cas de corona-virus au Canada au nombre de cas confirmés de corona-virus au Greenland et nombre de cas confirmés de virus corona à États-Unis au nombre de cas confirmés de virus corona au Greenland.

Canada →Greenland, États-Unis →Greenland.

Le test de causalité de Granger ne révèle aucune causalité à partir du nombre de cas confirmés de corona-virus au Mexique au nombre de cas confirmés de corona-virus au Greenland.

Mexique \nrightarrow Greenland.

$$Z_t = \begin{cases} z_{1,t} = 0.9760z_{1,t-1} + 0.0013z_{2,t-1} - 0.0107z_{3,t-1} + 124.4280z_{4,t-1} \\ \quad + 25.8753 \\ z_{2,t} = 0.0936z_{1,t-1} - 0.9653z_{2,t-1} + 0.3383z_{3,t-1} + 3845.0810z_{4,t-1} \\ \quad + 406.8410e + 02 \\ z_{3,t} = 0.0766z_{1,t-1} - 0.0035z_{2,t-1} + 1.0294z_{3,t-1} + 24.5016z_{4,t-1} \\ \quad + 2.778536914 \\ z_{4,t} = -2.4113e - 06z_{1,t-1} - 2.4448e - 07z_{2,t-1} + 2.2576e - 06z_{3,t-1} \\ \quad + 1.0255z_{4,t-1} + 0.0937 \end{cases}$$

	χ^2 -test	p-value
Test Portmanteau	1792.8	< 2.2e-16
JB-Test	15288	< 2.2e-16
Skewness	1267	< 2.2e-16
Kurtosis	14021	< 2.2e-16

Tableau 19 : Test Residuals $VAR(1)$

À partir du tableau 15, la matrice de poids suivante est obtenue :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant cette matrice de poids, les estimations de paramètres résultantes et les tests du modèle 1 $GSTAR(1_1)$ est présenté dans le tableau 20.

Parameter	Estimation	Erreur type	t-Value	Pr > t
ϕ_{10} (Canada)	1.020e+00	2.866e-01	3.559	0.000395 ***
ϕ_{10} (États-Unis)	1.032e+00	6.829e-02	14.647	< 2e-16 ***
ϕ_{10} (Mexique)	1.000e+00	6829e-02	14.647	< 2e-16 ***
ϕ_{10} (Greenland)	1.011e+00	4.335e+06	0.000	1.000000
ϕ_{11} (Canada)	-4.455e-04	3.167e-04	-1.407	0.159895
ϕ_{11} (États-Unis)	-1.367e-01	1.688e-01	-0.810	0.418444
ϕ_{11} (Mexique)	1.655e-03	4.541e-04	3.645	0.000285
ϕ_{11} (Greenland)	-3.542e-08	9.559e-05	0.000	0.999704
AIC = 15847.22				

Tableau 20 : Estimateur des moindres carrés de modèle 1 : $GSTAR(1_1)$

À partir du tableau 16, la matrice de poids suivante est obtenue :

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 21.80839 & 32.71660 & 65.61808 \\ 21.80839 & 0 & 15.09441 & 63.39431 \\ 32.71660 & 15.09441 & 0 & 76.84257 \\ 65.61808 & 63.39431 & 76.84257 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant cette matrice de poids, les estimations des paramètres résultants et le test significatif du modèle 2 : $GSTAR(1_1)$ sont présentés dans le tableau 21.

Parametre	Estimation	Erreur type	t -Value	Pr > t
ϕ_{10} (Canada)	1.020e+00	2.866e-01	3.559	0.000395 ***
ϕ_{10} (États-Unis)	1.032e+00	2.328e-03	443.116	< 2e-16 ***
ϕ_{10} (Mexique)	1.000e+00	6.829e-02	14.647	< 2e-16 ***
ϕ_{10} (Greenland)	1.011e+00	4.335e+06	0.000	1.000000
ϕ_{11} (Canada)	-1.336e-03	2.850e-03	-0.469	0.639258
ϕ_{11} (États-Unis)	-4.101e-01	1.520e+00	-0.270	0.787347
ϕ_{11} (Mexique)	4.966e-03	4.087e-03	1.215	0.224708
ϕ_{11} (Greenland)	-1.063e-07	8.603e-04	0.000	0.999901
AIC = 15847.22				

Tableau 21 : Estimateur des moindres carrés de modele 2 : $GSTAR(1_1)$

les tableaux 20 et 21, le modèle 1 $GSTAR(1_1)$ et le modèle 2 $GSTAR(1_1)$ sont les suivants :

Le modèle 1 $GSTAR(1_1)$:

$$z_t = \begin{pmatrix} 1.0200 & -0.0006 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.4101 & 1.032 & -0.4101 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0024 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \\ z_{4,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{bmatrix}$$

$$Z_t^{(1)} = \begin{cases} z_{1,t} = 1.0200z_{1,t-1} - 0.000668z_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ z_{2,t} = -0.4101z_{1,t-1} + 1.032000z_{2,t-1} + -0.4101z_{3,t-1} + \varepsilon_{2,t} \\ z_{3,t} = 0.0024z_{2,t-1} + 1.0000z_{3,t-1} + \varepsilon_{3,t} \\ z_{4,t} = 1.011z_{4,t-1} + \varepsilon_{4,t} \end{cases}$$

Le modèle 2 $GSTAR(1_1)$:

$$z_t^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.0200 & -0.0005 & -0.0004 & -0.0003 \\ -0.1604 & 1.0320 & -0.1741 & -0.0754 \\ 0.0018 & 0.0021 & 1.0000 & 0.0009 \\ -0.3620e-07 & -0.3678e-07 & -0.3330e-07 & 1.0110 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t-1} \\ z_{2,t-1} \\ z_{3,t-1} \\ z_{4,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{bmatrix}$$

$$Z_t^{(2)} = \begin{cases} z_{1,t} = 1.0200z_{1,t-1} - 0.0005z_{2,t-1} - 0.0004z_{3,t-1} - 0.0003z_{4,t-1} + \varepsilon_{1,t} \\ z_{2,t} = -0.1604z_{1,t-1} + 1.0320z_{2,t-1} - 0.1741z_{3,t-1} - 0.0754z_{4,t-1} + \varepsilon_{2,t} \\ z_{3,t} = 0.0018z_{1,t-1} + 0.0021z_{2,t-1} + 1.0000z_{3,t-1} + 0.0009z_{4,t-1} + \varepsilon_{3,t} \\ z_{4,t} = -0.3620e - 07z_{1,t-1} - 0.3678e - 07z_{2,t-1} - 0.3330e - 07z_{3,t-1} \\ \quad + 1.0110z_{4,t-1} + \varepsilon_{4,t} \end{cases}$$

Dans les tableaux 20 et 21, on garde le même modèle $GSTAR(1_1)$ mais on a joué sur la matrice de poids Cela ajoutera une confirmation d'efficacité de

notre test de causalité spatio.

	modele 1 $GSTAR(1_1)$		modele 2 $GSTAR(1_1)$	
	MSE	MAPE	MSE	MAPE
Canada	9.377602e+04	Inf	4.060740e+05	Inf
United States	1.266135e+07	Inf	1.107895e+08	Inf
Mexico	4.168708e+05	3.784401	6.886653e+05	6.46025
Greenland	1.086698e-01	Inf	1.179774e-01	Inf

Tableau 22 : Performance du modèle (MAPE) dans l'ensemble de données d'entraînement

À partir du tableau 22, nous pouvons dire que la performance de prévision du modèle $GSTAR$ avec la matrice de distance inverse est meilleure que celle du modèle $GSTAR$ avec des poids normalisés scalaires basés sur les limites de la matrice. Nous utilisons donc le modèle $GSTAR$ la matrice de distance inverse pour prédire le long terme.

Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié, dans cette thèse, deux catégories des séries chronologiques multivariées en utilisant des données réelles à savoir :

- Dans le cas des séries chronologiques multivariées on a étudié la relation entre la volatilité existante sur le marché pétrolier et le marché de l'énergie à partir de la comparaison des modèles multivariés *GARCH* (Hétéroscédasticité Conditionnelle Autorégressive Généralisée). En comparant la qualité de l'ajustement par l'erreur absolue moyenne, on trouve que les performances de montage du formulaire *BEKK – GARCH* sont meilleures que celles des autres modèles dans notre cas. On peut conclure une relation très importante entre le gaz et l'électricité, par contre le prix du gaz ne sera plus corrélé au prix du pétrole. Réellement on utilise le gaz et le pétrole pour produire de l'électricité. En tout cas, le gaz, le pétrole et l'électricité sont très corrélés en termes de prix les sous-jacents restent les mêmes.

- Dans le cas des séries chronologiques multivariées spatio on a présenté la mise en œuvre de test de causalité du modèle *VAR* (Vecteurs Autorégressif) et *GSTAR* (Autorégressives spatio-temporelles Généralisée) avec deux matrices de poids différents, dont on a choisi pour le premier modèle *GSTAR*(1_1) une matrice pondérée standardisée et pour le deuxième modèle

$GSTAR(1_1)$ une matrice de pondération spatiale à distance inverse normalisée par ligne.

Afin de faire l'estimation, une analyse avec des données réelles portant sur le Covid-19[54], utilisant le test de causalité au sens de Granger a été effectué. Cette étude nous a permis de dire que la performance des prévisions du modèle $GSTAR$ avec la matrice de distance inverse est meilleure que celle du modèle $GSTAR$ avec des poids basés sur les limites de la matrice. Après le calcul des erreurs quadratique moyenne des deux modèles, nous pouvons constater que la prévision induite par le modèle $GSTAR$ en utilisant la matrice de distance inverse nous conduit à une meilleure prédiction à long terme.

Ce travail fournit des résultats importants sur l'aspect pratique qui permettent d'ouvrir de nombreuses perspectives. On cite à titre d'exemple l'étude profonde sur la matrice (cas particuliers) de poids dans les modèles multivariés spatio pour la fiabilité de test de causalité et l'implémentation du test de causalité spatio dans un package sous le logiciel R.

Annexe : Théorie de de probabilité et Estimation

Théorèmes centrales limites

Soit $Z_t, t \in \mathbb{N}$ une suite de V.A iid avec $E(Z_t) = \mu$ et $Var(Z_t) = \sigma^2 < \infty$. Soit $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t$ la moyenne empirique, par la LGN forte de Kolmogorov on a : $\bar{Z}_n - E(\bar{Z}_n)$ converge vers 0 *p.s* et par conséquent en probabilité. Ce qui implique que la distribution limite de $\bar{Z}_n - E(\bar{Z}_n)$ est dégénérée en 0 et donc cette distribution limite n'est pas utile pour connaître la forme de la distribution de la moyenne empirique pour n fini. On considéré la même quantité avec un autre taux de convergence :

$$\sqrt{n} (\bar{Z}_n - E(\bar{Z}_n)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (Z_t - \mu), \quad (*)$$

alors la variance de cette expression est $\sigma^2, \forall n$ indiquant que sa distribution limite ne sera pas dégénérée. Les théorèmes qui donnent des résultats concernant les distributions limites des expressions comme (*) sont appelés les théorèmes centrales limites (TCL).

.1 Processus Indépendants

Théorème .1.1 (*TCL de Lindeberg-Lévy*) Soit Z_t une suite de V.A iid avec $E(Z_t) = 0$ et $Var(Z_t) = \sigma^2 < \infty$. Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

Dans le cas de variables indépendantes mais hétérogènes, on utilise le TCL de Lyapounov.

.2 Estimation

Les modèles avec erreurs hétéroscédastiques peuvent être estimés généralement de trois façons :

- Estimateurs de la classe du Maximum de Vraisemblance (*MV*)
- Estimateurs du Pseudo Maximum de Vraisemblance (*PMV*)
- Estimateurs en deux étapes.

L'estimation d'un modèle $ARCH(p)$ peut être réalisée par une procédure en deux étapes l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaire, mais Engle note que la technique du maximum de vraisemblance est plus efficiente.

Or, pour un modèle $GARCH(p, q)$, le maximum de vraisemblance est la seule possibilité puisque le modèle implique une structure $ARMA$.

.2.1 Estimateurs du *MV* sous l'hypothèse de normalité et Estimateurs du *PMV*

Nous présenterons de façon parallèle la méthode d'estimation du *MV* sous l'hypothèse de normalité de la distribution conditionnelle des résidus et la méthode d'estimation du *PMV*. En effet, l'estimateur du *MV* ainsi obtenu

peut tout de même être convergent si la vraie loi des résidus appartient
L'estimateur sera

- (i) asymptotiquement convergent
- (ii) asymptotiquement normal.

Par conséquent la fonction de vraisemblance définissant l'estimateur du MV sous l'hypothèse de normalité et la fonction de pseudo-vraisemblance de l'estimateur du PMV sont les mêmes.

.2.2 Maximum et Pseudo Maximum de Vraisemblance appliqués aux modèle $ARCH/GARCH$

L'estimation des paramètres de modèles $ARCH$ se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. X_t est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée X_t conditionnellement au passé X_{t-1} est donc

$$L(X_t \setminus X_{t-1}, \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

et dépend du vecteur de paramètres $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ travers σ_t défini en (2.17) La fonction de vraisemblance de (x_1, \dots, x_T) conditionnelle $X_0 = 0$; est par conséquent

$$L_T(X_1, \dots, X_T \setminus X_{t-1}, \theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

.2.3 Estimation des paramètres du modèle ARCH par la méthode de MV

L'estimation des paramètres de modèles $ARCH$ se base très souvent sur la maximisation de la fonction de vraisemblance. Nous supposons que le processus (X_t) est conditionnellement gaussien. La vraisemblance associée à

(X_t) conditionnellement au passé $X_{\underline{t-1}}$ est donné par :

$$L(X_t|X_{\underline{t-1}}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

et dépend du vecteur de paramètres $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q)'$ à travers σ_t . La fonction de vraisemblance de $(X_1; \dots; X_T)'$ conditionnelle à $X_0 = 0$, est par conséquent

$$L_T(X_1, X_2, \dots, X_T|X_{\underline{t-1}}; \theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

l'estimateur est alors défini comme le vecteur

$$\hat{\theta}_T = (\hat{\alpha}_{0;T}, \dots, \hat{\alpha}_{q;T})'$$

qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_T = \arg \max_{\theta} \ln L_T(X_1, X_2, \dots, X_T; \theta)$$

Sous diverses conditions de régularité, l'estimateur est convergent (Weiss 1986) [45].

.2.4 Estimation des paramètres du modèle GARCH par la méthode de MV

La vraisemblance associée à (X_t) conditionnellement au passé $X_{\underline{t-1}}$ s'écrit :

$$L(X_t|X_{\underline{t-1}}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

et dépend du vecteur de paramètres $\theta = (\alpha_0, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)'$, La fonction de vraisemblance de $(X_1, \dots, X_T)'$ conditionnelle à $X_0 = 0$, est par conséquent

$$L(X_t|X_{\underline{t-1}}; \theta) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

et la fonction de vraisemblance totale est donnée par :

$$L_T(X_1, X_2, \dots, X_T | X_{\underline{t-1}}; \theta) = \prod_{t=1}^T L(X_t | X_{\underline{t-1}}; \theta)$$

Cette fonction de vraisemblance peut être calculée pour différentes valeurs du vecteur θ_0 et sa maximisation livre l'estimateur de maximum de vraisemblance.

La contribution de l'observation t à la fonction de log-vraisemblance à la forme :

$$l_t(\theta) = \frac{-1}{2} \ln(2\pi\sigma_t^2) - \frac{X_t^2}{2\sigma_t^2}.$$

Pour un échantillon de taille T la fonction de log-vraisemblance est s'écrit par :

$$L_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_t(\theta).$$

l'estimateur est alors défini par le vecteur

$$\hat{\theta}_T = (\hat{\alpha}_{0;T}, \dots, \hat{\alpha}_{q;T}, \hat{\beta}_{0;T}, \dots, \hat{\beta}_{p;T})'$$

qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance :

$$\hat{\theta}_T = \arg \max_{\theta} \ln L_T(X_1, X_2, \dots, X_T; \theta)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adouka, L. Boucheta, Y. Chenini A,E. and Kchirid E, M (2015). GARCH models : Application to the Algerian Exchange Rate. International Journal of Innovation and Applied Studies. ISSN 2028-9324 Vol. 11, pp. 699-715.
- [2] Amrani, M, Zeghdoudi, H (2021). Benefit of GARCH Multivariate Models : Application to the Energy Market. Asian Journal of Probability and Statistics, 13(4) : 1-11, 2021 ; Article no.AJPAS.70005.
- [3] Amrani, M, Zeghdoudi, H (2021).On Mixture GARCH Models : Long, Short Memory and Application in Finance.Journal of Mathematics and Statistics Studies ISSN : 2709-4200.
- [4] Amrani, M, Zeghdoudi, H (2020). On Multivariate Spatio-Temporal Time Series Models and Causality Test Using Covid -19 Data. Advances in Mathematics : Scientific Journal 10(2021), no.2, 1037–1052.
- [5] Arouri, M. E. H., & Nguyen, D. K (2010). Oil prices, stock markets and portfolio investment : Evidence from sector analysis in Europe over the last decade. Energy Policy, 38,4528-4539.

Bibliographie

- [6] Arouri, M. E. H., & Rault, C (2012). Oil prices and stock markets in GCC countries : Empirical evidence from panel analysis. *International Journal of Finance and Economics*. Vol17, Issue3, Pages 242-253.
- [7] Bentes, S. R. (2015). Forecasting volatility in gold returns under the GARCH, IGARCH and FIGARCH frameworks : New evidence. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 438, 355-364
- [8] Berra, A. K., et Higgins, M. L. (1993) "ARCH Models : Properties, Estimation and Testing", *Journal of Economic Surveys*, 7(4), 307-366.
- [9] Boudjellaba, H., 1988, Tests de causalité dans les modèles autorégressifs et moyennes mobiles Multivarie , Un published Ph.D. thèses (Université de Montréal Département d'informatique et de Recherche Opérationnelle, Montréal).
- [10] Boudjellaba, H., J.-M. Dufour, and R. Roy, 1992a, Testing causality between two vectors in multivariate ARMA models, *Journal of the American Statistical Association* 87, 10X2-1090.
- [11] Borovkova.S., Lopuhaa H. P. , and B. N. Ruchjana,(2008), Consistency and Asymptotic Normality of Least Squares Estimators of Generalized STAR models, *Statistica Neerlandica*, 62, nr 4, p. 482-508
- [12] Ruchjana.B. N, (2002), The Generalized SpaceTime Autoregressive Order One Model and Its Application to Oil production Data, Unpublished Dissertation, Department Mathematics, Institut teknologi Bandung, Bandung
- [13] Borovkova, S. A., Lopuhaa, H. P., and Nurani, B. Generalized STAR model with experimental weights. In M Stasinopoulos & G Touloumi (Eds.). *Proceedings of the 17th International Workshop on Statistical Modelling*. 2002. 139-147

Bibliographie

- [14] Box, G.E.P. & Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, Revised Edition, San Francisco : Holden Day.
- [15] Charles, A., & Darné, O. (2019). The accuracy of asymmetric GARCH model estimation. *International Economics* , 179–202.
- [16] Chkili, W., Hammoudeh, S., & Nguyen, D. K. (2014). Volatility forecasting and risk management for commodity markets in the presence of asymmetry and long memory. *Energy Economics*, 41, 1-18
- [17] Cliff, A. D. and J. K. Ord. (1969). "The problem of spatial autocorrelation." In *London papers in Regional Science 1, Studies in Regional Science*, 25–55, edited by A. J. Scott, London : Pion.
- [18] Dufour, J.-M. (1989). Nonlinear Hypotheses, Inequality Restrictions, and Non-Nested Hypotheses : Exact Simultaneous Tests in Linear Regressions. *Econometrica*, 57 :335–355.
- [19] Dufour, J.-M. (1990). Exact Tests and Confidence Sets in Linear Regressions with Autocorrelated Errors. *Econometrica*, 58 :475–494.
- [20] Dufour, J.-M. & Renault, E. (1994). Short-Run and Long-Run Causality in TimeSeries. Working paper, GREMAQ and IDEI, Toulouse, France.
- [21] Dufour, J.-M. & Renault, E. (1998). Short-Run and Long-Run Causality in TimeSeries : Theory. *Econometrica*, 66 :1099–1125.
- [22] Dufour, J.-M. & Tessier, D. (1992). On the Relationship Between Impulse Response Analysis, Innovation Accounting and Granger Causality. *Economics Letters*, 42 :327–333.
- [23] Engle, R.F., 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987–1007.

Bibliographie

- [24] Engle, R.F., Bollerslev, T., (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econ. Rev.* 5 (1), 1–50.
- [25] Engle, R.F., Ng, V.K., (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility. *J. Finance* 48 (5), 1749–1778
- [26] Ergen, I., & Rizvanoghlu, I. (2016). Asymmetric impacts of fundamentals on the natural gas futures volatility : An augmented GARCH approach. *Energy Economics* , 56, 64–74.
- [27] François-Éric Racicot , Raymond Théoret (2001). *Traité d'économétrie financière : Modélisation financière*. Presses l'Université du Québec.
- [28] Ji and Fan (2012). How does oil price volatility effect non-energy markets? *Applied Energy* 89, 273-280.
- [29] Herrera, A. M., Hu, L., & Pastor, D. (2018). Forecasting crude oil price volatility. *International Journal of Forecasting*, 34(4), 622-635
- [30] Hung, N. T., & Thach, N. N. (2018). GARCH models in forecasting the volatility of the world's oil prices. In *International Econometric Conference of Vietnam* (pp. 673-683). Springer, Cham
- [31] García-Martos, C., Rodríguez, J., & Sánchez, M. J. (2013). Modelling and forecasting fossil fuels, CO2 and electricity prices and their volatilities. *Applied Energy*, 101, 363-375
- [32] Guerouah A, Zeghdoudi H, Bouseba F.Z, On Univariate and Multivariate GARCH Models : Oil Price and Stock market returns volatilities. *International Journal of Applied Mathematics and StatisticsTM*. Vol. 57, No. 1 (2017).
- [33] Guerouah A (2018). *Sur les modèles de séries chronologiques multivariées : exemples et application, à l'Université Badji Mokhtar, Annaba (thèse de Doctorat)*

Bibliographie

- [34] Kelejian, H.H. and Prucha, I.R. (2010) “Specification and estimation of spatial autoregressive models with autoregressive and heteroskedastic disturbances”, *Journal of Econometrics*, 157 : 53-67.
- [35] Klein, T., & Walther, T. (2016). Oil price volatility forecast with mixture memory GARCH. *Energy Economics*, 58, 46-58.
- [36] Lai, Y.-S. (2018). Dynamic Hedging with Futures : A Copula-Based GARCH Model with High-Frequency Data. *Review of Derivatives Research* , 21 (3), 307-29.
- [37] Le Gallo, J. (2000), 'Econométrie spatiale, parties 1 et 2'. Document de travail, Université de Bourgogne, France.
- [38] Lin, L., Jiang, Y., Xiao, H., & Zhou, Z. (2020). Crude oil price forecasting based on a novel hybrid long memory GARCH-M and wavelet analysis model. *Physica A* , 543, <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123532>.
- [39] Liu, H., & Shi, J. (2013). Applying ARMA–GARCH approaches to forecasting short-term electricity prices. *Energy Economics* , 37, 152–166.
- [40] Mandelbrot, B (1963). New methods in statistical economics. *Journal of Political Economy*. Vol 71, Number 5, 421-440.
- [41] Nour Wehbe, Bassam Assaf, Salem Darwich. Étude de causalité entre la consommation d'électricité et la croissance économique au Liban. *Lebanese Science Journal*, National Council for Scientific Research in Lebanon, 2018, 19, [ff10.22453/LSJ-019.3.432452](https://doi.org/10.22453/LSJ-019.3.432452). [ffhal-01944291v2f](https://doi.org/10.22453/LSJ-019.3.432452).
- [42] Papaioannou, G. P., Dikaiakos, C., Dagoumas, A. S., Dramountanis, A., & Papaioannou, P. G. (2018). Detecting the impact of fundamentals and regulatory reforms on the Greek wholesale electricity market using a SARMAX/GARCH model. *Energy* , 142, 1083-1103.

Bibliographie

- [43] Pfeifer, P.E., and Deutsch, S.J. (1980). A Comparison of Estimation Procedures for the Parameters of the STAR Model. *Communication in Statistics, simulation and Comput.*, B9(3), 255-270.
- [44] Phillip E. Pfeifer & Stuart Jay Deutsch (1980) Identification and Interpretation of First Order Space-Time ARMA Models, *Technometrics*, 22 :3, 397-408.
- [45] Reinsel, G. C. (2005). *Elements of Multivariate Time Series Analysis*. SpringerVerlag : Berlin.
- [46] Samuel ,A, Christophe,M.(2005) Croissance économique et consommation d'énergie au Congo : une analyse en termes de causalité.Bureau d'application des méthodes statistiques et informatiques. DT
- [47] Shumway, R. H. et Stoffer, D. S. (2006), *Time Series Analysis and Its Applications With R Examples*. Springer : New York.
- [48] Pan, Z., Wang, Y., Wu, C., & Yin, L. (2017). Oil price volatility and macroeconomic fundamentals : A regime switching GARCH-MIDAS model. *Journal of Empirical Finance*, 43, 130-142.
- [49] Silvennoinen A. et Terasvirta .T (2008). « Multivariate GARCH models », Stockholm School of Economics/ The Economic Research Institute (SSE/ EFI) Working Paper- Series in Economics and Finance, No . 669.
- [50] Taamouti,A, (2007). Problèmes d'économétrie en macroéconomie et en finance : mesures de causalité, asymétrie de la volatilité et risque financier.[doctoral thesis] .university of montreal.
- [51] Wei, W. W. (1994), *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods*. Addison-Wesley Company.

Bibliographie

- [52] Zeghdoudi, H. Lallouche, A.Remita, M,R.(2014) On Volatility Swaps for stock market Forecast : Application Example CAC 40 French Index. Journal of Probability and Statistics, Article ID 854578, 6 pages
- [53] Zeghdoudi, H . Bouseba , F,Z .(2015) Use of the GARCH Models to Energy Markets : Oil Price Volatility. Global Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol11, N° 6 pp. 4385-4394.
- [54] Site : [https ://covid19.who.int/region/amro/country/us](https://covid19.who.int/region/amro/country/us)