

Modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique

Yousfi Asma
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences,
Université de Badji Mokhtar, Annaba
U. B. M. A.

Table des matières

Remerciements	iii
Liste des abréviations	iv
Résumé en arabe	v
Résumé	vi
Abstract	vii
Introduction	viii
1 Théorie asymptotique de LeCam	1
1.1 Introduction	1
1.2 Normalité asymptotique locale (LAN)	1
1.2.1 Contiguïté	4
1.2.2 1 ^{ier} lemme de LeCam	5
1.2.3 3 ^{ème} lemme de LeCam	5
1.2.4 Justification du LAN	6
1.3 Concepts d'optimalité asymptotique locale	7
1.3.1 Test le plus stringent	7
1.4 Adaptativité	9

2	Modèle EXPAR(p) restreint périodique et propriété LAN	12
2.1	Introduction	12
2.2	Caractéristiques physiques de systèmes non linéaires et modèle EXPAR(p) .	13
2.2.1	Modèles Autorégressifs Exponentiels $EXPAR(p)$	13
2.2.2	Modèle EXPAR(p) restreint périodique	15
2.3	Normalité Asymptotique Locale du modèle PEXPAR(p) restreint	18
2.3.1	Définitions et notations principales	18
2.3.2	Hypothèses de régularités techniques	20
2.3.3	Suite de Rapports de Vraisemblance	21
2.3.4	Normalité Asymptotique Locale	22
3	Test de la périodicité dans un modèle EXPAR(p) restreint	30
3.1	Test asymptotique local : le plus stringent	30
3.2	Test Adaptatif	37
4	Conclusion et perspectives	41

Remerciements

Je remercie en premier lieu ALLAH de m'avoir donné la force et la patience pour réaliser ce travail.

Je remercie très très très chaleureusement mon encadreur Dr M. Merzougui qui a été à côté de moi tout au long de cette étude et qui m'a fait bénéficier de son savoir.

Je remercie Pr N. Seddik Ameer pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

Je remercie également le professeur Brahimi ainsi que le docteur Ezzebssa pour l'honneur qu'ils me font en participant à mon jury de thèse en qualité d'examineurs de mon travail.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à tous les enseignants et personnelles du département de MATHEMATIQUES et faculté de sciences, précisément le chef de département et le doyen.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé à réaliser cette thèse de près ou de loin.

Un très grand merci pour ma famille grand et petit surtout ma mère, mon mari et mes enfants LINA et LOUAI.

Liste des abréviations

AR : Modèle AutoRégressif (AutoRegressive model).

PEXPAR(p) : Modèle AutoRégressif EXPonentiel Periodique d'ordre p (Periodic EXPonential AutoRegressive model of order p).

TAR : Modèle AutoRégressif à seuil (Threshold AutoRegressive model).

ARCH : Modèle d'Hétéroscédasticité Conditionnelle AutoRégressive (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity model).

GARCH : Modèle d'Hétéroscédasticité Conditionnelle AutoRégressive Généralisée (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity model).

ARMA : Modèle Moyenne Mobile AutoRégressif (AutoRegressive Moving Average model).

SETAR : Modèle AutoRégressif à seuil Self Exciting (Self Exciting Threshold AutoRegressive model).

ARFIMA : AutoRegressive Fractionnally Integrated Moving Average.

Résumé en arabe

[REDACTED]
[REDACTED] EXPAR (1) [REDACTED] [REDACTED] EXPAR [REDACTED] p. [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] (LAN) [REDACTED] [REDACTED].

Résumé

Le test localement asymptotiquement le plus stringent pour tester la périodicité dans le modèle autorégressif exponentiel restreint *EXPAR* (1) a été construit par Merzougui et al. Ce test est ici généralisé à l'*EXPAR* restreint d'ordre p . D'autre part, nous construisons un test semi-paramétrique optimal de périodicité lorsque la densité d'innovation est inconnue. Les conditions suffisantes de la propriété de normalité asymptotique locale (*LAN*) sont adaptées au modèle périodique.

Mots clés : model exponentiel autoregressive periodique ; normalité asymptotique locale (*LAN*) ; test asymptotique local le "plus stringent" ; test adaptatif .

Abstract

Locally asymptotically most stringent test for testing the periodicity in the restricted exponential autoregressive model $EXPAR(1)$ has been constructed by Merzougui et al. This test is generalized here to the restricted $EXPAR$ of order p . On the other hand, we construct a semiparametric optimal test of periodicity when the innovation density is unknown. The sufficient conditions of the Local Asymptotic Normality (LAN) property are adapted to the periodic model.

Key words : periodic exponential autoregressive model; local asymptotic normality (LAN); local asymptotic “most stringent” test; adaptive test.

Introduction

Les modèles linéaires des séries chronologiques ont été longtemps considérés comme un outil puissant pour l'analyse générale des séries temporelles avec des procédures d'estimation robustes, une théorie statistique complète ainsi qu'une bonne capacité prédictive. Cependant, ces modèles ne sont pas appropriés en présence des caractéristiques non linéaires, de nombreux processus physiques et naturels sont plus précisément modélisés par un modèle non linéaire que par une représentation linéaire. Vers la fin des années 1970, divers modèles de séries chronologiques non linéaires, à savoir : modèles bilinéaires (Granger et Andersen, 1978), modèles autorégressifs à seuils (*TAR*) (Tong, 1978), modèles autorégressifs exponentiels (*EXPAR*) (Haggan et Ozaki, 1981) et les modèles *ARCH* (Engle, 1982) ont été proposés et appliqués avec un grand succès dans de nombreux problèmes importants de la vie réelle. Priestley (1988), Tong (1990), et Tjøstheim (1994) ont fourni plusieurs fondations de l'analyse des séries chronologiques non linéaires paramétriques.

Les modèles Exponentiel Autorégressives (*EXPAR*) introduits par Ozaki (1980) fournissent une description utile des caractéristiques non linéaires telles que la fréquence dépendante de l'amplitude, les phénomènes de sauts et le comportement des cycles limites. Ces modèles sont autorégressives dans la forme avec des coefficients exponentiels dépendants de l'amplitude. Divers articles ont contribué à l'étude de ces modèles avec des applications réussies voir, parmi plusieurs autres : Haggan et Ozaki (1981), Ozaki (1982, 1985), Chan et Tong (1985), Baragona et al. (2002), Allal et El Melhaoui (2006) et Ghosh et al. (2015). Récemment, Azouagh et El Melhaoui (2019) ont modélisé la série chronologique des nombres de taches solaires avec un modèle *EXPAR* (9) qui donne les plus petites erreurs de prédiction par rapport aux autres modèles linéaires et non linéaires. Dans l'analyse des séries temporelles non linéaires, il est parfois soutenu que les modèles non linéaires qui ont un bruit blanc gaussien homogène, comme les modèles *EXPAR*, ne sont pas appropriés pour l'analyse des

séries temporelles dont la distribution marginale est à queues lourdes, ces séries se trouvent dans les données financières. Pour l'analyse de ces séries, les chercheurs utilisent souvent le modèle *ARCH*, Ozaki (1993) a montré que le modèle *EXPAR* combiné à une transformation de variable instantanée est utile pour la modélisation d'une telle série chronologique hétéroscédastique. En (2014) Katsiampa a combiné les modèles *EXPAR* aux modèles *ARCH* en introduisant une nouvelle classe de séries temporelles non linéaires : *EXPAR – ARCH* et *EXPAR – GARCH*, et qui sont des combinaisons d'un modèle non linéaire en moyenne conditionnelle et un modèle non linéaire en variance conditionnelle et qui ont le potentiel d'expliquer des données observées en finance. Une application sur l'indice de prix du Dow Jones a montré que les nouveaux modèles peuvent expliquer ces données réelles mieux que les modèles *AR – ARCH* et *AR – GARCH*.

Cette classe des séries temporelles non linéaires a trouvé des applications réussies dans nombreux domaines, y compris l'écologie (Haggan et Ozaki ; 1981, Priestley ; 1988), l'hydrologie (Ozaki ; 1985), signale de la parole (Ishizuka et al., 2005), macroéconomie (Terui et Van Dijk ; 1999, Amiri ; 2012) et météorologie (Gurung ; 2013)...

Les modèles de séries temporelles périodiques sont une alternative aux modèles saisonniers pour les données présentant une structure d'autocovariance périodique. Cette notion initialement suggérée par Gladyshev (1961), avait été exploitée pour introduire de nouveaux modèles tels que le *GARCH* périodique (Bollerslev et Ghysels 1996), l'*ARFIMA* périodique (Franses et Ooms 1997), le bilinéaire périodique (Bibi et Gautier 2005), et le modèle *EXPAR* restreint périodique (Merzougui et al. 2016). Dans les modèles périodiques, les paramètres varient avec les saisons, il semble donc très important de tester le besoin de périodicité avant de l'envisager. Ici on construit un test adaptatif de la périodicité pour le modèle *EXPAR(p)* restreint où la densité d'innovation inconnue est symétrique et ne satisfait que quelques conditions de régularité légères. Nous rappelons qu'un test adaptatif est efficace pour un modèle où sa distribution des erreurs n'est spécifiée que partiellement. Donc, le test adaptatif basé sur une estimation non paramétrique de la densité du noyau est aussi efficace, asymptotiquement, comme n'importe quel test optimal. La théorie asymptotique est basée sur la propriété LAN, due à LeCam (1960, 1986) et pour la preuve on utilise la version de Swensen (1985). Un tel test semi-paramétrique de périodicité avait été établi par

Bentarzi et Hallin (1996) dans les modèles AR et généralisé au cas multivarié par Hallin et Lotfi (2004) et dans les processus $SETAR$ et $ARCH$ par Bentarzi et al. (2009) et Bentarzi et Merzougui(2010).

Le résultat clé qui nous permet d'établir le test localement et asymptotiquement optimal est la propriété de Normalité Asymptotique Locale (LAN). L'idée d'approcher une suite d'expériences statistiques par une famille gaussienne remonte aux années quarante; plus précisément, sa première formulation a été établie par Wald (1943). Le développement considérable qu'a connu ce concept est dû à LeCam (1986), qui a introduit le terme LAN - Local Asymptotic Normality -. Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la dérivation de cette propriété pour divers modèles : Roussas (1979) pour les modèles Autorégressifs d'ordre un, Akritas et Johnson (1982) pour le modèle autorégressif général, Swensen (1985), qui en démontrant la propriété LAN pour les modèles AR avec tendance linéaire, a donné un résultat fort et très utilisé, il s'agit du lemme qui permet d'avoir cette propriété en vérifiant des conditions suffisantes, Kreiss (1987) pour le modèle $ARMA$, Linton (1993) pour les modèles $ARCH$, Bengabrit et Hallin (1998) pour les modèles bilinéaires, Bentarzi et Hallin (1996) pour les modèles AR périodiques, Garel et Hallin (1995) pour les modèles $ARMA$ multivariés, Koul et schick (1996, 1997) pour le modèle AR d'ordre un à coefficient aléatoire et pour le modèle $SETAR(2, 1, 1)$, et récemment Amimour et Belaid (2020) ont démontré la propriété LAN en suivant la version de Swensen pour le modèle $ARFIMA$ périodique.

Notre objectif est d'utiliser l'approche de LeCam, connectée au modèle exponentiel Autorégressif d'ordre p , $EXPAR(p)$, restreint pour construire un test paramétrique de périodicité asymptotiquement optimal au sens le plus stringent et donc de généraliser le même test qui a été fait pour le modèle $EXPAR$ d'ordre 1 à l'ordre p et de présenter une extension au travail en construisant le test adaptatif dans un cadre semi paramétrique. Pour accomplir cet objectif nous avons suivi la méthodologie suivante :

Chapitre 1 : Théorie asymptotique de LeCam

Dans ce chapitre, on présente les notions de bases qui ont permis de faire ce travail c'est à dire l'approche asymptotique de LeCam (1960, 1986) : propriété LAN , contiguïté, les lemmes de Lecam, le test le plus stringent qui est le concept d'optimalité asymptotique valable sous

la structure *LAN*, ainsi que le concept d'adaptativité.

Chapitre 2 : Modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique et propriété *LAN*

Dans le deuxième chapitre on commence par rappeler le modèle $EXPAR(p)$ introduit par Ozaki (1980) ainsi que ses propriétés par la suite on explique la nécessité de l'introduction du modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique, dans la dernière section nous vérifions, en utilisant le lemme de Swensen (1985), que le modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique jouit de la propriété *LAN*.

Chapitre 3 : Test de la périodicité dans un modèle $EXPAR(p)$ restreint

Dans ce chapitre, on donne le résultat le plus important de cette thèse, qui est la construction du test paramétrique localement asymptotiquement optimal au sens le plus stringent d'un modèle $EXPAR(p)$ restreint contre un modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique, dans un premier temps et par la suite de construire le test adaptatif de périodicité.

Chapitre 1

Théorie asymptotique de LeCam

1.1 Introduction

Ce chapitre regroupe les notions et outils fondamentaux que nous utiliserons par la suite, une grande partie de la présentation est tirée de Van Der Vaart (1998). En fait, quand la théorie d'optimalité exacte ne donne pas de résultat alors la théorie d'optimalité asymptotique peut aider. Par exemple, pour comparer deux tests on peut comparer l'approximation des fonctions puissances, et pour comparer deux estimateurs on peut comparer leurs variances asymptotiques au lieu des variances exactes. Il s'avère, en effet, que pas seulement les tests statistiques et les estimateurs qui sont asymptotiquement normaux mais souvent aussi toute la suite des modèles statistiques converge vers un modèle à observation normale. Une notion fondamentale sur laquelle repose le test optimal que nous allons construire est la normalité asymptotique locale (LAN) issue de la théorie de LeCam.

1.2 Normalité asymptotique locale (LAN)

Une suite de modèles statistiques est "LAN" si asymptotiquement leurs processus de rapport de vraisemblance sont similaires à ceux d'un paramètre de position Gaussien. Techniquement c'est vérifié si les processus de rapport de vraisemblance admettent un certain développement quadratique. Le LAN implique la convergence des modèles vers un modèle Gaussien après reparamétrisation du paramètre. On observe l'échantillon *i.i.d.*, X_1, \dots, X_n à partir d'une distribution p_θ sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ indexé par $\theta \in \Theta$ de \mathbb{R}^k .

Alors, toutes les observations forment une seule observation du produit : p_θ^n : n copies de p_θ . Le modèle statistique est complètement décrit par la collection des mesures de probabilités $\{p_\theta^n, \theta \in \Theta\}$ sur l'espace d'échantillon $(\mathcal{X}^n, \mathcal{A}^n)$. On parle d'expériences statistiques au lieu de modèles statistiques. On montre que plusieurs expériences statistiques peuvent être approchées par des expériences Gaussiennes après une reparamétrisation adéquate. La reparamétrisation est centrée autour du paramètre fixe θ_0 qui sera considéré comme connu. On définit un paramètre local $h = \sqrt{n}(\theta - \theta_0)$ et on réécrit p_θ^n comme $p_{\theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}h}^n$ et on obtient une expérience avec le paramètre h . On montre que pour n grand les expériences $\left(p_{\theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}h}^n, h \in \mathbb{R}^k\right)$ et $(N(h, I_{\theta_0}^{-1}), h \in \mathbb{R}^k)$ sont similaires en propriétés statistiques quand les expériences originales sont lisses par rapport au paramètre. La seconde expérience consiste à observer une seule observation à partir de la distribution Normale de moyenne h et de matrice de covariance connue égale à l'inverse de la matrice d'information de Fisher qui est une expression simple facile à analyser d'où l'approximation donne beaucoup d'informations sur les propriétés asymptotiques de l'expérience originale.

Développement de la vraisemblance :

Pour faire la convergence l'outil technique est le développement de Taylor de la vraisemblance. Soit f_θ la densité de P_θ par rapport à μ on suppose que θ est de dimension 1 la log-vraisemblance est $l_\theta(x) = \log f_\theta(x)$ est différentiable d'ordre 2 par rapport à $\theta, \forall x$ avec les dérivées $\dot{l}_\theta(x)$ et $\ddot{l}_\theta(x)$, alors $\forall x$ fixe :

$$\log f_{\theta+h}(x) = \log f_\theta(x) + h\dot{l}_\theta(x) + \frac{1}{2}h^2\ddot{l}_\theta(x)$$

Donc

$$\log \frac{f_{\theta+h}}{f_\theta}(x) = h\dot{l}_\theta(x) + \frac{1}{2}h^2\ddot{l}_\theta(x) + o_x(h^2)$$

d'où

$$\log \prod_{i=1}^n \frac{f_{\theta + \frac{h}{\sqrt{n}}}}{f_\theta}(X_i) = \frac{h}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \dot{l}_\theta(X_i) + \frac{1}{2} \frac{h^2}{n} \sum_{i=1}^n \ddot{l}_\theta(X_i) + R_n$$

où

$$*E \left(\dot{l}_\theta(x) \right) = 0 \text{ (la fonction score est de moyenne nulle, on rappelle : } \dot{l}_\theta(x) = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f(x)}{f(x)} \text{)}.$$

$$*E \left(\ddot{l}_\theta(x) \right) = E \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} f(x)}{f(x)} - \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(x)}{f(x)} \right)^2 \right) = 0 - E \left(\dot{l}_\theta^2(x) \right) = -I_\theta.$$

Alors : $\frac{h}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \dot{l}_\theta(X_i) = h\Delta_{n,\theta}$ où $\Delta_{n,\theta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \dot{l}_\theta(X_i) \rightarrow N(0, I_\theta)$ par le théorème centrale limite (Dans le cas des séries temporelles on utilisera un des TCL pour processus dépendants).

$\frac{1}{2} \frac{h^2}{n} \sum_{i=1}^n \ddot{l}_\theta(X_i) \approx -\frac{1}{2} h^2 I_\theta$, par la loi des grands nombres. (Dans le cas dépendant on utilisera l'ergodicité).

Par conséquent, $\forall h$:

$$\log \prod_{i=1}^n \frac{f_{\theta + \frac{h}{\sqrt{n}}}}{f_\theta}(X_i) = h\Delta_{n,\theta} - \frac{1}{2} h^2 I_\theta + o_p(1)$$

On verra que ceci n'est rien d'autre que la log vraisemblance d'une expérience Gaussienne. Puisque ce développement concerne le processus de vraisemblance dans un voisinage de θ , on parle de "Normalité Asymptotique Locale" de la suite des modèles $\{p_\theta^n, \theta \in \Theta\}$.

Le calcul précédent peut être fait sous des conditions de continuité ou de moment sur la dérivée seconde du rapport de vraisemblance, mais il peut être établi sous une seule condition qui implique la première dérivée : la différentiabilité en moyenne quadratique de $\sqrt{f_\theta}$. **On donne, maintenant, la définition générale pour les processus stochastiques.**

Définition 1

Soit $\mathcal{E}^{(n)} = \left(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)}, \mathcal{P}^{(n)} = \left\{ P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k \right\} \right)$ une suite de modèles ou d'expériences statistiques paramétriques et une suite locale de valeurs du paramètre, localisé en θ : $\theta + \frac{1}{\sqrt{n}} \tau^{(n)}$ où $\tau^{(n)}$ est une suite bornée de vecteurs de dim k . La suite $\mathcal{E}^{(n)}$ est LAN si et seulement si : $\forall \theta \in \Theta$, il existe une suite de V.A $\Delta_\theta^{(n)}$ de dimension k , $\mathcal{A}^{(n)}$ -mesurables et une matrice $(k \times k)$: Γ_θ tel que si $n \rightarrow \infty$, on ait sous $P_\theta^{(n)}$:

$$\text{i) } \log \left(\frac{dP_{\theta + \frac{1}{\sqrt{n}}\tau^{(n)}}^{(n)}}{dP_{\theta}^{(n)}} \right) = \tau^{(n)'} \Delta^{(n)}(\theta) - \frac{1}{2} \tau^{(n)'} \Gamma_{\theta} \tau^{(n)} + o_p(1)$$

$$\text{ii) } \Delta^{(n)}(\theta) \xrightarrow{d} N(0, \Gamma_{\theta})$$

Remarques

- $\Delta^{(n)}(\theta)$ est la suite centrale localisée en θ , Γ_{θ} est la matrice d'information.

-(i) est le développement de Taylor à l'ordre 2 en probabilité. Le choix du logarithme du rapport de vraisemblance est motivé par le lemme de Neyman-Pearson pour les tests statistiques.

$$\text{-Si } n \rightarrow \infty, \log \left(\frac{dP_{\theta + \frac{1}{\sqrt{n}}\tau^{(n)}}^{(n)}}{dP_{\theta}^{(n)}} \right) \xrightarrow{d} N\left(-\frac{1}{2} \tau^{(n)'} \Gamma_{\theta} \tau^{(n)}, \tau^{(n)'} \Gamma_{\theta} \tau^{(n)}\right) \text{ sous } P_{\theta}^{(n)}. \text{ (Remarquez$$

que la moyenne est $-\frac{1}{2}$ la variance).

1.2.1 Contiguïté

Les arguments de contiguïté sont une technique pour obtenir la distribution limite d'une suite statistique sous les lois Q_n à partir des distributions limites sous les lois P_n où les lois P_n décrivent la distribution nulle H_0 et les lois Q_n correspondent à l'alternative. La contiguïté est la version asymptotique de la continuité absolue.

Définition 2 : La suite de mesures de probabilités Q_n est contiguë par rapport à P_n si

$$P_n(A_n) = 0 \implies Q_n(A_n) = 0,$$

\forall la suite d'ensembles mesurables A_n . On note : $Q_n \triangleleft P_n$ et si $P_n \triangleleft Q_n$ ils sont mutuellement contiguës.

Ainsi, si on a une convergence en probabilité d'une suite d'événements par rapport à une mesure de probabilité P_n , on en déduit la convergence en probabilité de cette suite d'événements par rapport à toute mesure de probabilité Q_n contiguë à P_n . Vérifier la contiguïté à partir de la définition n'est pas facile mais le premier lemme de Lecam va nous montrer que cette notion est liée à la propriété LAN.

1.2.2 1^{ier} lemme de LeCam

Si $\frac{dQ_n}{dP_n} \xrightarrow{P_n} V$ satisfaisant $EV = 1$, alors P_n et Q_n sont mutuellement contiguës.

Exemple : si $\frac{dP_n}{dQ_n} \xrightarrow{Q_n} \exp(N(\mu, \sigma^2))$ alors P_n et Q_n sont mutuellement contiguës si et seulement si $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$.

On retrouve la moyenne qui est $-\frac{1}{2}$ la variance et donc la contiguïté est une conséquence directe du LAN.

Généralement le calcul de la puissance asymptotique de la statistique d'un test est facile par rapport à P_n , le troisième lemme de Lecam nous permet de déduire le calcul de cette puissance par rapport à Q_n .

1.2.3 3^{ème} lemme de LeCam

Soit X_n une statistique. Soit Λ_n une version de $\log\left(\frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}}\right)$. Supposons que si $n \rightarrow \infty$, on ait, sous $P^{(n)}$,

$$\begin{pmatrix} X_n \\ \log \frac{dQ_n}{dP_n} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_n} N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ -\frac{1}{2}\sigma^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma & \tau \\ \tau' & \sigma^2 \end{pmatrix}\right).$$

Alors :

(i) P_n et Q_n sont mutuellement contiguës;

(ii) si $n \rightarrow \infty$, $X_n \xrightarrow{Q_n} N(\mu + \tau, \Sigma)$ sous $Q^{(n)}$.

Donc, le 1er lemme de LeCam nous donne la convergence en probabilité et le 3ème lemme nous donne la convergence en loi.

Appliquant le 3ème lemme de LeCam pour la famille LAN on obtient :

$$\Delta^{(n)}(\theta) \xrightarrow{d} N(\Gamma_\theta \tau^{(n)}, \Gamma_\theta), \text{ sous } P_{\theta + \frac{1}{\sqrt{n}}\tau^{(n)}}^{(n)} \text{ Si } n \rightarrow \infty$$

Donc si on note Δ l'observation unique de l'expérience gaussienne

$$\mathcal{E}^N = (\mathbb{R}^k, B^k, \{P_\theta = N(\Gamma_\theta \tau^{(n)}, \Gamma_\theta), \tau^{(n)} \in \mathbb{R}^k\})$$

On vient de montrer que

$$\Delta^{(n)}(\theta) \xrightarrow{d} \Delta$$

En fait, la relation est bien plus forte : l'expérience locale $\mathcal{E}_\theta^{(n)}$ converge vers l'expérience locale \mathcal{E}_θ^N .

Conclusions

- Les fonctions de risque “localement et asymptotiquement optimales” pour $\mathcal{E}_\theta^{(n)}$ sont les fonctions de risque exactement optimales pour \mathcal{E}_θ^N .

- Comme $\Delta^{(n)}(\theta) \xrightarrow{d} \Delta$, ces fonctions de risque seront réalisées en traitant la suite centrale $\Delta^{(n)}(\theta)$ comme on le ferait pour Δ dans \mathcal{E}_θ^N .

- Ainsi, dans le cas des tests d'hypothèse, si un test $\phi(\Delta)$ est exactement optimal au niveau α dans \mathcal{E}_θ^N , la suite de tests $\phi(\Delta^{(n)}(\theta))$ sera localement en θ et asymptotiquement optimale au niveau asymptotique α dans la suite d'expériences originales. Il reste à savoir : quels sont les tests optimaux $\phi(\Delta)$ dans l'expérience E_θ^N ?

1.2.4 Justification du LAN

Soit le modèle de position gaussien k varié

$$\mathcal{E}^N = (\mathbb{R}^k, B^k, \{P_{h,\Gamma} = N(\Gamma h, \Gamma), h \in \mathbb{R}^k\})$$

Où Γ est une matrice symétrique et définie positive fixée. Notons Δ l'observation associée, alors

$$\frac{dP_{h,\Gamma}}{dP_{0,\Gamma}} = \frac{f_{h,\Gamma}}{f_{0,\Gamma}}$$

Où

$$f_{h,\Gamma}(\Delta) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\det \Gamma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\Delta - \Gamma h)' \Gamma^{-1} (\Delta - \Gamma h)\right)$$

est la densité de $P_{h,\Gamma}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^k . Un calcul rapide donne

$$\log \frac{dP_{h,\Gamma}}{dP_{0,\Gamma}}(\Delta) = h' \Delta - \frac{1}{2} h' \Gamma h.$$

Par conséquent, la suite d'expériences originale LAN possède des log-vraisemblances (localisées en θ) pouvant être approchées par celles de l'expérience ci-dessus. Donc on peut espérer que les procédures optimales dans l'expérience originale hériteront de certaines propriétés d'optimalité dans \mathcal{E}^N .

Remarque

Dans son théorème (1980 – 1986) Lucien Lecam a donné 4 conditions, qui permettent d'appliquer le TCL de Mcleish pour les martingales et de vérifier la propriété LAN, mais la version la plus pratique en séries chronologiques est celle de Swensen (1985), pour une démonstration détaillée du théorème de LeCam et de la connexion avec le lemme de Swensen, voir Taniguchi et Kakizawa (2000).

1.3 Concepts d'optimalité asymptotique locale

Le Concept d'optimalité en théorie des tests d'hypothèses valable, dans ce travail, est le test "le plus stringent".

Soit H_0 une hypothèse nulle, H_1 sa contre hypothèse et C l'ensemble des tests ϕ vérifiant une condition de niveau α , i.e.

$$C = \{\phi / E_P(\phi) \leq \alpha; \forall P \in H_0\}.$$

1.3.1 Test le plus stringent

La notion de test le plus stringent a été introduite par Wald (1943). Pour tout $P \in H_1$, soit

$$\bar{\beta}(P) = \sup_{\phi \in C} E_P(\phi).$$

$\bar{\beta}(P)$ est donc la meilleure puissance que puissent atteindre, en un élément P fixé de H_1 , les tests de la classe C . On appelle regret d'un test ϕ dans la classe C la quantité

$$\tau(\phi) = \sup_{P \in H_1} [\bar{\beta}(P) - E_P(\phi)].$$

Le regret de ϕ est "le pire déficit de puissance" auquel donne lieu ϕ , si on le compare sur H_1 aux meilleures performances possibles au sein de C . Un test ϕ^* est dit le plus stringent au

niveau α si son regret est minimum parmi les tests de niveau α , c'est à dire si

$$\begin{cases} \phi^* \in C \\ \tau(\phi^*) \leq \tau(\phi); \quad \forall \phi \in C. \end{cases}$$

Le test optimal dans les modèles shift gaussien se réduira à tester

$$h \in M(\Omega) \quad \text{contre l'alternative } h \notin M(\Omega),$$

où $M(\Omega)$ est le sous espace de \mathbb{R}^k engendré par les colonnes Ω (Ω est une matrice de dimension $k \times (k - r)$). On déduit alors, à partir de Lecam (1986) que pour ce type de problèmes le test le plus stringent au niveau α est

$$\phi_\theta^*(\Delta) = I_{[\Delta'(\Gamma_\theta^{-1} - \Omega(\Omega' \Gamma_\theta \Omega)^{-1} \Omega') \Delta > \chi_{r; 1-\alpha}^2]}.$$

Donc le test localement asymptotiquement le plus stringent dans l'expérience originale est

$$\phi_\theta^*(\Delta_\theta^{(n)}) = I_{[\Delta_\theta^{(n)'}(\Gamma_\theta^{-1} - \Omega(\Omega' \Gamma_\theta \Omega)^{-1} \Omega') \Delta_\theta^{(n)} > \chi_{r; 1-\alpha}^2]}.$$

Remarque

Une difficulté surgit dans la construction du test le plus stringent : la valeur de θ , sous l'hypothèse nulle, reste non spécifiée. Bien entendu, la solution consiste à remplacer θ par un estimateur $\widehat{\theta}^{(n)}$ qui est \sqrt{n} -consistant et discret. Notons $\widehat{\theta}^{(n)}$ une suite d'estimateurs de θ :

(i) $\widehat{\theta}^{(n)}$ est \sqrt{n} -consistant, i.e.

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\theta}^{(n)} - \theta \right) = O(P_\theta) \quad \text{où encore } \exists c > 0, \text{ tel que } \sqrt{n} \left| \widehat{\theta}^{(n)} - \theta \right| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}, \theta \in \Theta;$$

(ii) Pour des raisons techniques, nous utilisons des suites discrètes d'estimateurs $\{\bar{\theta}_n\}$ telles que, si $\widehat{\theta}^{(n)}$ vérifie (i), $\bar{\theta}_n$ est donnée par un des points de l'ensemble θ :

$\theta = \frac{1}{\sqrt{n}}(i_1, \dots, i_k)$, $i_j \in Z$ le plus proche de $\widehat{\theta}^{(n)}$. Bien sûr, $\{\bar{\theta}_n\}$ satisfait la propriété plus générale de discrétisation.

Définition

Une suite $\{\bar{\theta}_n\}$ d'estimateurs est dite discrète s'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, indépendamment de $n \in \mathbb{N}$, $\bar{\theta}_n$ prend au plus K valeurs différentes dans l'ensemble

$$Q_n = \{\theta \in \mathbb{R}^k : \sqrt{n} |\theta - \theta_0| \leq c\}, c > 0.$$

La condition de discrétisation est due à Lecam (1960), elle permet d'éviter certains comportements pathologiques. Cette condition est cependant sans aucune conséquence pratique : à n fixé, elle n'a pas de réelle signification.

Enfin, signalons que dans le dernier chapitre, nous allons utiliser une technique qui consiste à remplacer, dans des équations stochastiques, une suite de nombres réels par une suite de variables aléatoires. Cette technique est basée sur le lemme 4.4 de Kreiss (1987) que nous rappelons ici.

Lemme (Kreiss (1987))

Supposons que $\{T^{(n)}(\theta), n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de variables aléatoires dépendant de $\theta \in \Theta$.

Si pour toute suite de réels $\{\theta^{(n)}\}$ vérifiant

$$\sqrt{n} (\theta^{(n)} - \theta) \text{ est bornée par une constante } c > 0,$$

on a $T^{(n)}(\theta^{(n)}) = o_{P_\theta}(1)$, alors aussi $T^{(n)}(\widehat{\theta}^{(n)}) = o_{P_\theta}(1)$ est vérifiée pour toute suite d'estimateurs $\widehat{\theta}^{(n)}$ discrète et \sqrt{n} -convergente.

1.4 Adaptativité

Cette partie est principalement tirée de Steigerwald (2006). Un test adaptatif est un test optimal pour un modèle qui est spécifié partiellement. Par exemple, soit le problème de test d'un paramètre qui décrit un échantillon d'observations tiré d'une distribution F . La question naturelle que l'on pourrait se poser est : est-il possible de construire un test sans la connaissance de F qui soit, asymptotiquement, aussi optimal qu'un test qui s'appuie sur la connaissance de F ? Et bien pour certains problèmes la réponse est oui et quand c'est le cas on l'appelle test adaptatif. Dans un modèle de régression la suite des résidus noté ε_t est une

suite de variables aléatoires i.i.d de distribution F , et c'est plutôt le vecteur des paramètres β qui est d'intérêt que la distribution F . Si on suppose que F soit décrit par un vecteur de paramètre α alors le modèle est paramétrique et si on suppose seulement que F appartient à une famille de distributions alors le modèle est *semi* paramétrique. En 1956, Stein a proposé une solution au problème de l'adaptativité. Soit \mathcal{F}_α l'ensemble des distributions paramétrisé par α . Malgré que l'intérêt soit porté sur β , l'ensemble complet des paramètres inclut α . La matrice d'information évaluée aux paramètres est

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

Où I_{11} correspond aux éléments de β . Si le score de β est orthogonale au score de α alors $I_{12} = 0$ et $I^{11} = I_{11}^{-1}$ est la composante supérieur gauche de I^{-1} . Puisque I_{11} correspond seulement au paramètre β , un test asymptotiquement optimal pourra être construit sans la connaissance de α . Donc si $I_{12} = 0$ pour tous les ensembles \mathcal{F}_α alors on peut construire le test adaptatif. Bien que la condition de Stein présente un aspect intuitif, il n'est pas simple de savoir comment l'utiliser pour définir des tests adaptatifs. Bickel (1982) a présenté une condition plus simple qui donne un lien direct à la construction de tests adaptatifs. La condition de Bickel est simplement que le score doit avoir une espérance zéro sur toute la famille \mathcal{F} . Les deux conditions sont liées : Si \mathcal{F} est une famille convexe, alors la condition de Stein est impliquée par la condition de Bickel. Pour les modèles de régression linéaires, un test adaptatif de β existe pour la famille \mathcal{F} qui se compose de toutes les distributions qui sont **symétriques** par rapport à l'origine. La condition du score de Bickel mène naturellement aux tests qui contiennent des estimateurs non paramétriques de la distribution, \hat{F} . Par conséquent, l'estimateur non paramétrique du score doit converger en moyenne quadratique vers le score de la population. L'estimation non paramétrique de F entraîne l'estimation non paramétrique de la densité f . Comme dans Kreiss on utilisera l'estimateur du noyau. Ainsi, un test est dit adaptatif s'il a, quand f est inconnue, la même puissance asymptotique que le test optimal dans le modèle où cette densité d'innovation est spécifiée. Généralement l'étude des modèles semi paramétriques se fait par deux approches :

- ◆ L'utilisation des principes statistiques appropriés pour contourner la méconnaissance de f , par exemple le principe de l'invariance ;
- ◆ L'estimation adéquate de la densité f ou d'une fonctionnelle de f .

Chapitre 2

Modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique et propriété LAN

2.1 Introduction

Le modèle Autorégressif exponentiel ($EXPAR$), appartient à la classe des modèles Autorégressif non linéaires. Il a été introduit par Ozaki (1980) et Haggan et Ozaki (1981) pour construire des modèles de séries temporelles qui reproduisent quelques caractéristiques de la théorie des vibrations aléatoires non linéaires comme : la fréquence dépendante de l'amplitude, les phénomènes de saut et les comportements de cycle limite. Il possède aussi plusieurs caractéristiques encourageantes, en effet, Ozaki en (1993) a montré qu'un modèle $EXPAR$ peut capturer les caractéristiques non gaussiennes de la série, dans le même ouvrage une relation étroite entre les modèles $EXPAR$ et la famille exponentielle est soulignée, Ozaki a montré que pour une distribution donnée de la famille exponentielle on peut introduire un modèle $EXPAR$ dont la distribution marginale est très proche de la distribution donnée. Prendre en compte ces phénomènes non linéaires en plus de la périodicité que peut exhiber une série temporelle nous mène à l'introduction du modèle $EXPAR$ périodique.

2.2 Caractéristiques physiques de systèmes non linéaires

et modèle EXPAR(p)

Les vibrations aléatoires non linéaires sont typiquement décrites par les équations différentielles d'ordre 2 de forme

$$\ddot{x}(t) + f(\dot{x}(t)) + g(x(t)) = y(t)$$

Où f : la force d'amortissement et g : la force de rappel, sont des fonctions non linéaires et $y(t)$ est l'entrée stochastique appelé force agissante, comme exemple il y a les équations de Duffing et de Van der Pol. Si f et g sont des fonctions linéaires l'équation du système prend la forme

$$\ddot{x}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) + \alpha_2 x(t) = y(t).$$

Si on pose $y(t) = \varepsilon(t)$ un bruit blanc, alors $x(t)$ devient un processus $AR(2)$ à temps continu. Les systèmes non linéaires exhibent certaines caractéristiques qui ne se produisent pas dans le cas linéaire. Ces caractéristiques non linéaires se résument en trois points :

1-Dépendance de la réponse en fréquence du système non linéaire à l'amplitude de l'entrée, appelé : Fréquence dépendante de l'amplitude.

2-Phénomène de saut : discontinuité de la réponse en fréquence.

3-Les cycles limites : exécution d'oscillations auto-entretenuës qui asymptotiquement deviennent périodiques. Dans ce cas la force d'amortissement devient négative pour $|\dot{x}|$ petit c.à.d que le système absorbe l'énergie et l'amplitude augmente, mais pour $|\dot{x}|$ grand le système dissipe l'énergie et l'amplitude décroît. Ces phénomènes apparaissent dans la théorie du circuit électrique.

2.2.1 Modèles Autorégressifs Exponentiels $EXPAR(p)$

Pour construire des modèles de séries temporelles à temps discret qui reproduisent les phénomènes non linéaires précitées, Ozaki (1980) a commencé par prendre un modèle $AR(2)$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.2.1)$$

et par la suite de permettre aux coefficients a_1 et a_2 de dépendre de X_{t-1} , précisément, il proposa que les coefficients soit des fonctions exponentielles de X_{t-1}^2

$$a_1 = \varphi_1 + \pi_1 \exp(-\gamma X_{t-1}^2); \quad a_2 = \varphi_2 + \pi_2 \exp(-\gamma X_{t-1}^2)$$

avec ces valeurs de a_1 et a_2 le modèle (2.2.1) est appelé processus Autorégressif Exponentiel d'ordre 2 ($EXPAR(2)$). On note que pour $|X_{t-1}|$ grand

$$a_1 \sim \varphi_1, \quad a_2 \sim \varphi_2$$

et pour $|X_{t-1}|$ petit

$$a_1 \sim \varphi_1 + \pi_1, \quad a_2 \sim \varphi_2 + \pi_2.$$

Ainsi le modèle $EXPAR$ se comporte comme un modèle autorégressif à seuils où les coefficients changent de manière lisse entre les deux valeurs extrêmes. Ce modèle d'ordre 2 peut être étendu à un modèle d'ordre générale, ainsi un modèle $EXPAR$ d'ordre p est donné par

$$X_t = \sum_{j=1}^p (\varphi_j + \pi_j \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.2)$$

Ozaki (1980) a montré que le modèle $EXPAR$ exhibe un comportement de cycle limite sous les conditions suivantes :

i) Toutes les racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^p - \varphi_1 \lambda^{p-1} - \dots - \varphi_p = 0$$

sont à l'intérieur du cercle unité. Par conséquent X_t commence à diminuer (amortir) quand $|X_{t-1}|$ est trop grand.

ii) Quelques racines de l'équation :

$$\lambda^p - (\varphi_1 + \pi_1) \lambda^{p-1} - \dots - (\varphi_p + \pi_p) = 0$$

sont à l'extérieur du cercle unité. Par conséquent X_t commence à osciller et diverger pour les petites valeurs de $|X_{t-1}|$.

Le résultat de ces deux effets produit une oscillation auto-entretenu. Les deux conditions précédentes sont nécessaires pour l'existence du cycle limite mais pas suffisantes. La condition suffisante est :

iii)

$$\left(1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j\right) / \sum_{j=1}^p \pi_j > 1 \text{ ou } \left(1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j\right) / \sum_{j=1}^p \pi_j < 0.$$

Cette condition est exigée pour prévenir de l'occurrence d'un point singulier stable.

La condition suffisante de la stationnarité stricte de ce modèle est toutes les solutions de l'équation caractéristique $z^p - C_1 z^{p-1} - \dots - C_p = 0$ sont en module inférieures à 1 où $C_j = \max(|\varphi_j|, |\varphi_j + \pi_j|)$; $j = 1, \dots, p$.

Plusieurs méthodes d'estimations ont été utilisé pour l'estimation des paramètres de l' $EXPAR(p)$: moindres carrés, quasi maximum de vraisemblance, méthode bayésienne, filtre de Kalman, algorithme génétique,...etc. Haggan et Ozaki (1981) ont analysé la célèbre série de lynx Canadien par un $EXPAR(11)$.

2.2.2 Modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique

En pratique, quand on a des séries temporelles saisonnières qui exhibent des caractéristiques non linéaires comme citées auparavant avec la moyenne et la structure de covariance périodique, on pourra analyser la série avec un modèle $EXPAR(p)$ périodique qui représente une fusion entre la présence de non linéarité et de comportement périodique. Nous nous intéressons principalement au cas où le paramètre non linéaire est restreint, d'où la définition suivante :

Définition 3

Le processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle Autorégressif Exponentiel Restreint Périodique $PEXPAR_S(p_t)$, de période S , s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire périodique stochastique de la forme :

$$X_t = \sum_{j=1}^{p_t} (\varphi_{t,j} + \pi_{t,j} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

où $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus périodique i.i.d. de moyenne 0 et de variance finie σ_t^2 . Les paramètres Autorégressifs $\varphi_{t,j}, \pi_{t,j} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$ et $j = 1, \dots, p_t$, l'ordre p_t et la variance des innovations σ_t^2 sont périodiques, dans le temps, de période S , i.e.,

$$\varphi_{t+kS,j} = \varphi_{t,j}, \pi_{t+kS,j} = \pi_{t,j}, p_{t+kS} = p_t \text{ et } \sigma_{t+kS}^2 = \sigma_t^2, \forall k, t \in \mathbb{Z} \text{ et } j = 1, \dots, p_t.$$

Le paramètre non linéaire, $\gamma > 0$, est connu.

En mettant $t = i + S\tau, i = 1, 2, \dots, S$ et $\tau \in \mathbb{Z}$ et en prenant $p = \max_{i \in \{1, 2, \dots, S\}} p_i$ où $\varphi_{i,j} = 0,$

$\pi_{i,j} = 0$, pour chaque $j > p_i$, on peut mettre la périodicité en valeur et réécrire l'équation (2.2.3) sous la forme équivalente :

$$X_{i+S\tau} = \sum_{j=1}^p (\varphi_{i,j} + \pi_{i,j} \exp(-\gamma X_{i+S\tau-1}^2)) X_{i+S\tau-j} + \varepsilon_{i+S\tau}, \quad i = 1, \dots, S, \quad \tau \in \mathbb{Z} \quad (2.2.4)$$

La non linéarité du processus vient de la forme exponentielle. Cette fonction rend la dynamique de la série localement linéaire, mais globalement non-linéaire. Les coefficients autorégressifs sont dépendants de l'amplitude, ils dépendent de X_{t-1} . Ils changent de $\{\varphi_{i,j} + \pi_{i,j}\}$ à $\{\varphi_{i,j}\}$ quand $|X_{t-1}|$ change de zéro à $+\infty$. C'est à dire quand $|X_{t-1}|$ devient grand les coefficients $(\varphi_{i,j} + \pi_{i,j} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) \rightarrow \varphi_{i,j}$. Quand $|X_{t-1}|$ devient petit, les coefficients $(\varphi_{i,j} + \pi_{i,j} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) \rightarrow \varphi_{i,j} + \pi_{i,j}$ pour $i = 1, \dots, S$, et $j = 1, \dots, p$. Le coefficient non linéaire γ agit comme un facteur d'échelle qui modifie l'effet de X_{t-1} dans le terme $\exp(-\gamma X_{t-1}^2)$. La figure 1 montre une série simulée à partir du modèle $PEXP\text{AR}_2(2)$ restreint avec $\underline{\varphi} = (0.5, -2, 0.3, 1; -0.5, 1, -0.4, 1.8)'$, $\gamma = 1$ et $n = 500$ qui vérifie la condition suffisante de la stricte stationnarité. Dans la figure 2 nous avons le graphe saisonnier (un monthplot) de la série où on voit que la moyenne dépend de la saison. La figure 3 donne les nuages de points qui indiquent clairement un comportement non linéaire et la figure 4 donne les corrélogrammes simple et partiel des séries. Le seule article, à notre connaissance, qui a traité ce modèle est Merzougui et Becila (2019) qui ont étudié l'estimation des paramètres avec la méthode des moindres carrés.

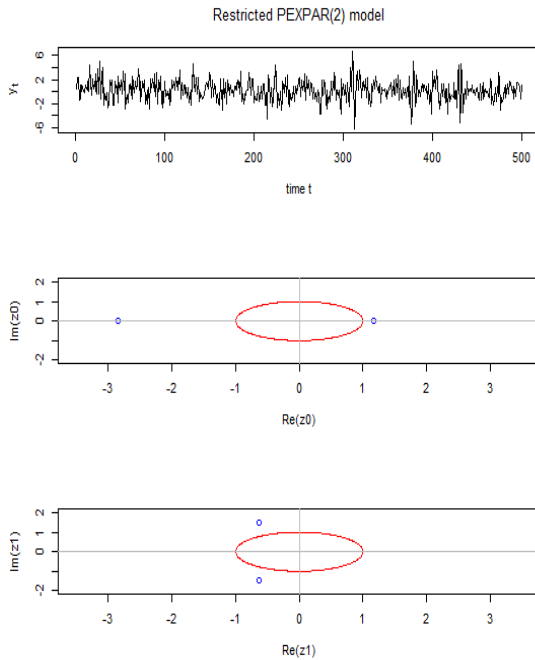


Figure 1 : Simulation of the Restricted PEXPAR₂(2) and inverse roots of the characteristic equation

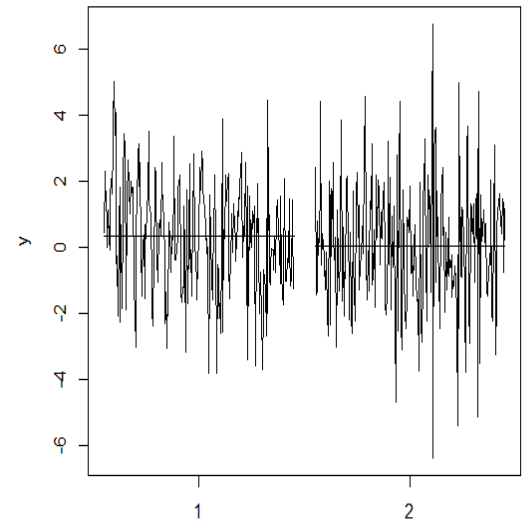


Figure 2 : Monthplot of the time series

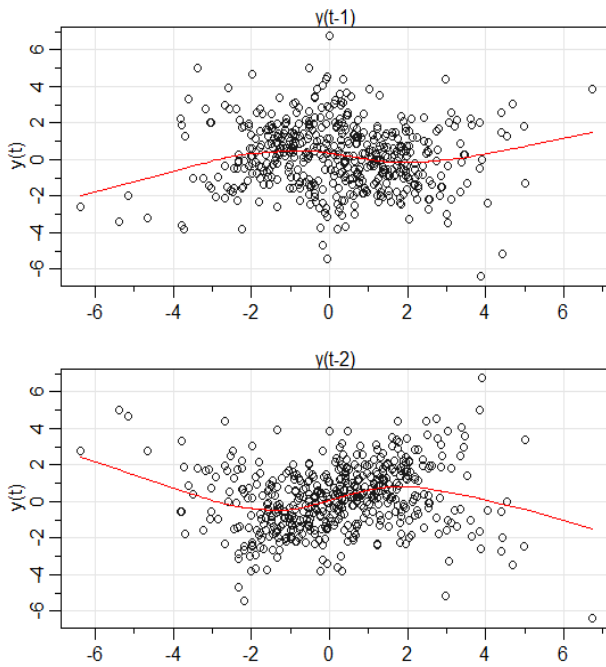


Figure 3 : Lagplot of the time series

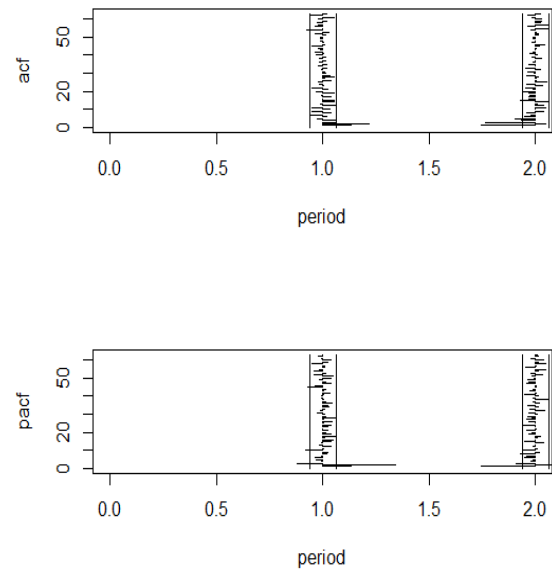


Figure 4 : Periodic ACF and PACF of the time series

2.3 Normalité Asymptotique Locale du modèle $PEXPAR(p)$ restreint

Il est clair que le modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique contient plus de paramètres que l' $EXPAR(p)$ restreint non périodique, donc avant de le proposer il faut être sûr de sa nécessité, et cela peut se faire à partir des tests. Ici, on propose un test optimal au sens de Lecam et pour cela on commence par vérifier que ce modèle est LAN.

2.3.1 Définitions et notations principales

Le processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle $EXPAR(p)$ restreint, s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique de la forme :

$$X_t = \sum_{j=1}^p (\varphi_j + \pi_j \exp(-\gamma X_{t-1}^2)) X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.1)$$

où φ_j et π_j sont les paramètres autorégressifs, $\gamma > 0$ est connu et $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance σ^2 , avec une densité de probabilité $f_\sigma(\cdot)$, pas nécessairement gaussienne.

Le processus $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$ est dit suivre le modèle Autorégressif exponentiel Périodique restreint d'ordre "p" $PEXPAR(p)$, de période S ($S \geq 2$), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique périodique de la forme :

$$X_t = \sum_{j=1}^p [\varphi_{t,j} + \pi_{t,j} \exp(-\gamma X_{t-1}^2)] X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.3.2)$$

où $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\} \sim BB(0, \sigma_t^2)$, avec une densité de probabilité $f_{\sigma_t}(\cdot)$, pas nécessairement gaussienne. Les paramètres Autorégressifs $\varphi_{t,j}$ et $\pi_{t,j}$, et la variance des innovations σ_t^2 sont périodiques.

Dans ce travail, la variance des innovations est considérée comme un paramètre invariant

dans le temps, i.e., $\sigma_t^2 = \sigma^2$.

Notons $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ une suite d'hypothèses nulles sous laquelle $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait le modèle non périodique (2.3.1), où $\underline{\beta} = (\beta'_1, \dots, \beta'_p)'$ avec $\beta_j = (\varphi_j, \pi_j)'$ et $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$ la suite d'hypothèses alternatives sous laquelle $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$ satisfait le modèle périodique (2.3.2), où

$$\underline{\beta}^{(n)} = \left(\underline{\beta}_1^{(n)'} , \dots , \underline{\beta}_S^{(n)'} \right)' , \quad \underline{\beta}_s^{(n)} = \left(\beta_{s,1}^{(n)} , \dots , \beta_{s,p}^{(n)} \right)' \text{ et } \beta_{s,j}^{(n)} = \left(\varphi_{s,j}^{(n)} , \pi_{s,j}^{(n)} \right)' , s = 1, \dots, S, j = 1, \dots, p$$

et où

$$\varphi_{s,j}^{(n)} = \varphi_j + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)} \right) \text{ et } \pi_{s,j}^{(n)} = \pi_j + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)} \right) , s = 1, \dots, S, j = 1, \dots, p.$$

tel que $\sup_n \left(\left(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)} \right)^2 + \left(\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)} \right)^2 \right) < \infty ; \forall j$.

Les $\underline{h}_j^{(n)} = \left(h_{1,j}^{(n)} , h_{2,j}^{(n)} , \dots , h_{S,j}^{(n)} \right)'$ et $\underline{l}_j^{(n)} = \left(l_{1,j}^{(n)} , l_{2,j}^{(n)} , \dots , l_{S,j}^{(n)} \right)'$ peuvent être interpréter comme des perturbations périodiques locales des paramètres non périodiques φ_j et π_j , respectivement, tel que $\sum_{s=1}^S h_{s,j}^{(n)} = 0$, et $\sum_{s=1}^S l_{s,j}^{(n)} = 0$ pour $j = 1, 2, \dots, p$.

En considérant les notations :

$$\begin{aligned} \underline{\beta} &= (\beta', \beta', \dots, \beta')' \in \mathbb{R}^{2Sp} \text{ où } \beta = (\varphi_1, \pi_1; \dots; \varphi_p, \pi_p)' , \\ \underline{\tau}^{(n)} &= \left(\underline{\lambda}^{(n)'} , \underline{h}^{(n)'} \right)' = \\ &\left(\lambda_1^{(n)} , \eta_1^{(n)} , \dots , \lambda_p^{(n)} , \eta_p^{(n)} ; h_{1,1}^{(n)} , l_{1,1}^{(n)} , \dots , h_{1,p}^{(n)} , l_{1,p}^{(n)} ; \dots ; h_{S-1,1}^{(n)} , l_{S-1,1}^{(n)} , \dots , h_{S-1,p}^{(n)} , l_{S-1,p}^{(n)} \right)' . \end{aligned}$$

et soit $\underline{\nu}^{(n)}$ la matrice de dimension $2Sp \times 2Sp$ donnée par $\underline{\nu}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} K$, où la matrice K

est définie comme suit :

$$K = \begin{pmatrix} I_{2p \times 2p} & & & & & \\ \vdots & & I_{2p(S-1) \times 2p(S-1)} & & & \\ I_{2p \times 2p} & & & & & \\ I_{2p \times 2p} & -I_{2p \times 2p} & \dots & & & -I_{2p \times 2p} \end{pmatrix} ,$$

On peut aisément réécrire les hypothèses alternatives sous la forme $H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$.

2.3.2 Hypothèses de régularités techniques

A travers ce chapitre nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (H1) : Les paramètres autorégressifs exponentiels φ_j, π_j satisfont la condition suffisante de la stationnarité stricte.

Hypothèse (H2) : La densité des innovations $f_\sigma(\cdot)$ est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a) $f_\sigma(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R},$

(b) $f_\sigma(\cdot)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue μ : il existe une

fonction $\dot{f}_\sigma(\cdot)$ tel que, pour $-\infty < a < b < \infty$, nous avons $f_\sigma(b) - f_\sigma(a) = \int_a^b \dot{f}_\sigma(x) d\mu(x),$

(c) L'information de Fisher $I(f_\sigma) = \int (\phi_f(x))^2 f_\sigma(x) dx$ est finie, où

$$\phi_f(\cdot) = -\frac{\dot{f}_\sigma(\cdot)}{f_\sigma(\cdot)},$$

(d) $\int x f_\sigma(x) dx = 0$ et la variance est finie, i.e., $\sigma^2 = \int x^2 f_\sigma(x) < \infty.$

Hypothèse (H3) : La densité $f(\cdot)$ est fortement unimodale (c.à.d $-\log f(x)$ est une fonction convexe sur l'intervalle $]a, b[$ et donc ϕ_f est monotone croissante).

Plusieurs densités vérifient la dernière condition : la loi normale, double exponentiel, uniforme,...etc, voir Hájek et Šidák (1967) p.15.

On note que les deux conditions (b) et (c) impliquent la différentiabilité en moyenne quadratique de la fonction $f(\cdot)^{\frac{1}{2}}$. i.e, on aura :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2} \int \left(f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x + \lambda) - f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x) - \lambda \frac{\dot{f}_\sigma(x)}{f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x)} \right)^2 dx = 0.$$

(Voir, Lemme 3, page 191, Hájek (1972) ou Hájek et Šidák (1967)).

2.3.3 Suite de Rapports de Vraisemblance

Notons $\underline{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$ une réalisation de taille finie n d'un processus $\{X_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$ satisfaisant le modèle $EXPAR(p)$ restreint (2.3.1) et soit $X_0^{(n)}$ la valeur initiale dont les densités sont $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\beta}, \sigma)$ et $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\beta}^{(n)}, \sigma)$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$, respectivement. En plus, on suppose que $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\beta}^{(n)}, \sigma) - g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\beta}, \sigma)$ converge en probabilité vers 0, quand $\underline{\beta}^{(n)} \rightarrow \underline{\beta}$ avec $n \rightarrow \infty$. Supposons, pour simplifier les notations, que la taille de la série temporelle observée n est un multiple de S , i.e., $n = mS$, $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $t = s + rS$, $s = 1, \dots, S$ et $r = 0, 1, \dots, m - 1$. On note par $Z_t^{(n)}(\underline{\beta})$ et $Z_t^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$, $t \in \mathbb{Z}$, les résidus calculés sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$, respectivement. Alors, nous avons :

$$Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) = X_{s+rS}^{(n)} - \left[\sum_{j=1}^p \left(\varphi_j + \pi_j \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right) X_{s+rS-j}^{(n)} \right],$$

et

$$\begin{aligned} Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) &= \\ X_{s+rS}^{(n)} - \sum_{j=1}^p \left[\left(\varphi_j + \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) \right) + \left(\pi_j + \frac{1}{\sqrt{n}} (\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)}) \right) \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right] X_{s+rS-j}^{(n)} \\ &= Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \sum_{j=1}^p \frac{1}{\sqrt{n}} \left[(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) + (\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)}) \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right] X_{s+rS-j}^{(n)} \\ &= Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{T}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \\ &= Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \gamma_{s,r}^{(n)}, \end{aligned}$$

où

$$\underline{T}_s^{*(n)} = \left(\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}, \eta_1^{(n)} + l_{s,1}^{(n)}; \dots; \lambda_p^{(n)} + h_{s,p}^{(n)}, \eta_p^{(n)} + l_{s,p}^{(n)} \right)',$$

$$\begin{aligned} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} &= \left(X_{s+rS-1}^{(n)}, X_{s+rS-1}^{(n)} \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}); \dots; X_{s+rS-p}^{(n)}, X_{s+rS-p}^{(n)} \exp(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}) \right)' \text{ et} \\ \gamma_{s,r}^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{T}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)}, \quad s = 1, \dots, S. \end{aligned}$$

La variance empirique correspondante est donnée par $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n \left(Z_t^{(n)}(\underline{\beta}) \right)^2$.

Alors, le logarithme du rapport de vraisemblance, $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{T}^{(n)})$ pour $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ contre $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$, est alors donné, pour $n = mS$, par :

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{T}^{(n)}) = \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \log \frac{f_\sigma(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}))}{f_\sigma(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}))} + \log \frac{g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\beta}^{(n)}, \sigma)}{g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\beta}, \sigma)},$$

par conséquent, nous avons, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$, l'approximation asymptotique locale :

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{T}^{(n)}) &= \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \log \frac{f_\sigma(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}))}{f_\sigma(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}))} + 0_P(1) \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left[\log \left(f_\sigma(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \gamma_{s,r}^{(n)}) \right) - \log \left(f_\sigma(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})) \right) \right] + 0_P(1). \end{aligned}$$

où le terme $0_P(1)$ correspond à l'influence de la valeur initiale $X_0^{(n)}$.

2.3.4 Normalité Asymptotique Locale

Afin d'adapter les conditions de Swensen pour traiter le modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique, nous avons besoin des variables aléatoires suivantes :

$$\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) = f_\sigma^{-1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})) f_\sigma^{1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \gamma_{s,r}^{(n)}) - 1,$$

$$\begin{aligned} \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) &= \frac{1}{2} \phi_f(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})) \gamma_{s,r}^{(n)} \\ &= \frac{1}{2} \delta_{s,,r}^{(n)'} \underline{T}_s^{*(n)} \end{aligned}$$

$$\text{où } \underline{\delta}_{s,,r}^{(n)} = \left(\delta_{s,1,r}^{(n)}, \delta_{s,2,r}^{(n)}, \dots, \delta_{s,p,r}^{(n)} \right)' \in \mathbb{R}^{2p}$$

$$\text{avec } \delta_{s,j,r}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_f(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})) \left(X_{s+rS-j}^{(n)}, X_{s+rS-j}^{(n)} \exp\left(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}\right) \right)',$$

et soit le vecteur aléatoire :

$$\underline{\delta}^{(n)}(\underline{\beta}) = (\delta_{1,\cdot}^{(n)'}, \delta_{2,\cdot}^{(n)'}, \dots, \delta_{S,\cdot}^{(n)'})' \in \mathbb{R}^{2Sp}$$

$$\text{où } \delta_{s,\cdot}^{(n)} = \left(\delta_{s,1}^{(n)'}, \delta_{s,2}^{(n)'}, \dots, \delta_{s,p}^{(n)'} \right)' \in \mathbb{R}^{2p}$$

$$\text{et } \delta_{s,j}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \phi_f(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})) \left(X_{s+rS-j}^{(n)}, X_{s+rS-j}^{(n)} \exp\left(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}\right) \right)', \quad s = 1, \dots, S, j = 1, \dots, p.$$

(2.3.3)

Considérons la matrice bloc diagonale de dimension $2Sp \times 2Sp$:

$$\underline{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \Gamma(\underline{\beta}, \sigma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma(\underline{\beta}, \sigma) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \Gamma(\underline{\beta}, \sigma) \end{pmatrix} = I_{S \times S} \otimes \left(\frac{1}{\sigma^2} \Gamma(\underline{\beta}, \sigma) \right), \quad (2.3.4)$$

où $\Gamma(\underline{\beta}, \sigma)$ est la matrice de variance du vecteur $\underline{X}_{s+rS-1}^{(n)}$,

$$\Gamma(\underline{\beta}, \sigma) = \begin{pmatrix} E(X_0^2) & E(X_0^2 e^{-\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_0 X_{1-p}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) \\ E(X_0^2 e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_0^2 e^{-2\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-2\gamma X_0^2}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ E(X_0 X_{1-p}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_{1-p}^2) & E(X_{1-p}^2 e^{-\gamma X_0^2}) \\ E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-2\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_{1-p}^2 e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_{1-p}^2 e^{-2\gamma X_0^2}) \end{pmatrix}$$

En utilisant les définitions et les notations précédentes, on peut formuler les conditions de Swensen adaptées, qui impliquent la propriété LAN.

Proposition 1 (2.3.1) (*Conditions de Swensen Adaptées (1985)*)

La preuve est reliée au premier lemme de Swensen (1985), la plupart des conditions suffisantes suivent directement par des arguments standards à partir de la forme des vraisemblances locales, la première condition est le point essentiel. Les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses (H1) et (H3), satisfaites :

$$(1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) - \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)^2 = 0,$$

$$(2) \quad \sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\beta}) \right) < \infty,$$

$$(3) \quad \max_s \max_r \left| \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) \right| = 0_p(1),$$

$$(4) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\beta}) \right) - \frac{1}{4S} I(f_1) \underline{\Gamma}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) \underline{\Gamma}^{*(n)} = 0_p(1),$$

$$(5) \quad \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} E \left[\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\beta}) I_{\left[\left| \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) \right| > \frac{1}{2} \right]} / \mathcal{B}_{n,s+rS-1} \right] = 0_p(1),$$

$\mathcal{B}_{n,s+rS-1}$ est la σ -algèbre générée par le passé du processus jusqu'au temps $s+rS-1$,

$$(6) \quad E \left(\zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) / \mathcal{B}_{n,s+rS-1} \right) = 0_p(1),$$

Démonstration. Condition (1) : En remplaçant $\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta})$ et $\zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta})$ par leurs valeurs respectives dans l'expression de l'espérance donnée en (2.3.3), on obtient

$$\begin{aligned} E \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\xi_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) - \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)^2 &= \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} E \left(f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_\sigma \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)}{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)} \right)^2 f_\sigma^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \Bigg), \\ &= \sum_{s=1}^S (B_{1,s,m} + B_{2,s,m}), \end{aligned}$$

où

$$B_{1,s,m} = \sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ I_{\left[\left| X_{s+rS-j} \right| < K \right]} \left(f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_\sigma \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)}{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)} \right)^2 f_\sigma^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \right\} \quad \forall j \text{ et } s \text{ fixé.}$$

et

$$B_{2,s,m} = \sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ I_{\left[\left| X_{s+rS-j} \right| \geq K \right]} \left(f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \gamma_{s,r}^{(n)} \right) - f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} \left(-\gamma_{s,r}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_\sigma \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)}{f_\sigma^{1/2} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right)} \right)^2 f_\sigma^{-1} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \right\} \quad \forall j \text{ et } s \text{ fixé.}$$

Il suffit de montrer que $B_{1,s,m}$ et $B_{2,s,m}$ convergent vers 0, pour tout s fixé, $s = 1, \dots, S$ et pour un nombre réel quelconque K .

$$B_{1,s,m} = \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s+rS-j}| < K} \gamma_{s,r}^{(n)2} \int_{|X_{s+rS-j}| < K} \left\{ \frac{f_\sigma^{1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) - \gamma_{s,r}^{(n)}) - f_\sigma^{1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}))}{-\gamma_{s,r}^{(n)}} - \frac{1}{2} \frac{\dot{f}_\sigma(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}))}{f_\sigma^{1/2}(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}))} \right\}^2 dZ_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) dG_X, \quad \forall j = 1, \dots, p$$

où : G_X est la distribution des variables aléatoires X_{s+rS-j} . Pour utiliser le lemme 2 de Swensen (1985), soit $u = -\underline{T}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)}$ et $y = Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})$, on a

$$\begin{aligned} B_{1,s,m} &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{\mathbb{R}} \gamma_{s,r}^{(n)2} \int_{|X_{s+rS-j}| < K} \left(\frac{\sqrt{f_\sigma(y + \frac{u}{\sqrt{n}})} - \sqrt{f_\sigma(y)}}{\frac{u}{\sqrt{n}}} - \frac{\dot{f}_\sigma(y)}{2\sqrt{f_\sigma(y)}} \right)^2 dy dG_X \\ &\leq C_m(K) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2, \quad \forall j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

où :

$$C_m(K) = \int_{|u| < b(K)} \left(\frac{\sqrt{f_\sigma(y + \frac{u}{\sqrt{n}})} - \sqrt{f_\sigma(y)}}{\frac{u}{\sqrt{n}}} - \frac{\dot{f}_\sigma(y)}{2\sqrt{f_\sigma(y)}} \right)^2 dy,$$

$$\text{et } b(K) = K \sum_{j=1}^p \left| \left(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)} \right) + \left(\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)} \right) \right|.$$

Puisque $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée (prouvée dans la condition 2 ci-dessous) et

$\lim_{m \rightarrow \infty} C_m(K) = 0$ (lemme 2 de Swensen (1985)), alors $B_{1,s,m}$ converge vers 0 quand $m \rightarrow \infty$.

Pour $B_{2,s,m}$ on utilise la seconde partie du lemme 2 de Swensen (1985), on aura :

$$\begin{aligned} B_{2,s,m} &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s+rS-j}| \geq K} \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{f_\sigma(y - \gamma_{s,r}^{(n)})} - \sqrt{f_\sigma(y)} - \frac{1}{2} \gamma_{s,r}^{(n)} \phi_f(y) \sqrt{f_\sigma(y)} \right)^2 dy dG_X \\ &\leq \sum_{r=0}^{m-1} \int_{|X_{s+rS-j}| \geq K} \gamma_{s,r}^{(n)2} I(f_\sigma) dG_X \\ &= I(f_\sigma) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(I_{[|X_{s+rS-j}| \geq K]} \gamma_{s,r}^{(n)2} \right). \text{ Pour } j \text{ et } s \text{ fixés.} \end{aligned}$$

puisque le processus $\{X_{s+rS-j}, r \in \mathbb{Z}\}$ est stationnaire, en choisissant K assez grand $B_{2,s,m}$ peut être petit uniformément en m .

Condition (2) : Il suffit de montrer que, pour s fixé, $\sup_m E \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\beta}) \right) < \infty$. En

utilisant la définition de $\zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta})$, on obtient :

$$E \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\beta}) \right) = \frac{I(f)}{4} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2, \text{ pour } s \text{ fixé.}$$

Il faut montrer, pour s fixé que la somme $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ \sum_{j=1}^p \left[\left((\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) + (\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)}) \exp \left(-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2} \right) \right) X_{s+rS-j}^{(n)} \right] \right\} \right)^2 \\ &\leq \frac{p}{n} \left(\sup_m \left(\sum_{j=1}^p \left(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)} \right)^2 \right) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(X_{s+rS-j}^{(n)2} \right) + \sup_m \left(\sum_{j=1}^p \left(\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)} \right)^2 \right) \sum_{r=0}^{m-1} E \left(e^{-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}} X_{s+rS-j}^{(n)} \right) \right)^2 \\ &= \frac{p}{S} \left(\sup_m \left(\sum_{j=1}^p \left(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)} \right)^2 \right) E \left(X_0^{(n)2} \right) + \sup_m \left(\sum_{j=1}^p \left(\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)} \right)^2 \right) E \left(e^{-2\gamma X_0^{(n)2}} X_0^{(n)2} \right) \right). \end{aligned}$$

puisque $\sup_m \left[\left(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)} \right)^2 + \left(\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)} \right)^2 \right] < \infty$; $\forall j$ et le processus X_{s+rS-j} est station-

naire, Il résulte de ce fait que $\sum_{r=0}^{m-1} E \left(\gamma_{s,r}^{(n)} \right)^2$ est uniformément bornée en m .

Condition (3).

On montre que $\max_r \left| \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) \right| = \max_r \left| \frac{1}{2} \phi_f \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \tau_s^{*(n)'} X_{s+rS-1}^{(n)} \right) \right| = 0_p(1)$,

pour s quelconque. Ainsi, on doit prouver que

$$\max_r \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_f \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p \left(\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)} \right) X_{s+rS-j}^{(n)} \right) \right| = 0_p(1), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\beta})$$

et

$$\max_r \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_f \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p \left(\eta_j^{(n)} + l_{s,j}^{(n)} \right) e^{-\gamma X_{s+rS-1}^{(n)2}} X_{s+rS-j}^{(n)} \right) \right| = 0_p(1), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\beta})$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & P \left(\max_r \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_f \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p (\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) X_{s+rS-j}^{(n)} \right) \right| > \varepsilon \right) \\
 & \leq \sum_{r=0}^{m-1} P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi_f \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p (\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) X_{s+rS-j}^{(n)} \right) \right| > \varepsilon \right), \\
 & \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \sum_{r=0}^{m-1} E \left\{ \phi_f^2 \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p (\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) X_{s+rS-j}^{(n)} \right)^2 I_{\left[\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_f \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p (\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) X_{s+rS-j}^{(n)} \right) \right| > \varepsilon \right]} \right\} \\
 & \leq \frac{1}{S\varepsilon^2} E \left(\phi_f^2 \left(Z_{s,0}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p (\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) X_{s-j}^{(n)} \right)^2 I_{\left[\left| \phi_f \left(Z_{s,0}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \left(\sum_{j=1}^p (\lambda_j^{(n)} + h_{s,j}^{(n)}) X_{s-j}^{(n)} \right) \right| > \sqrt{n}\varepsilon \right]} \right), \text{ pour } s
 \end{aligned}$$

– ainsi le côté droit converge vers 0, quand $n \rightarrow \infty$. De la même manière, on peut montrer que la seconde expression converge aussi vers 0.

Condition (4) : Nous avons :

$$\sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\beta}) \right) = \frac{1}{4n} \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \phi_f^2 \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \underline{T}_s^{*(n)'} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)'} \underline{T}_s^{*(n)},$$

en utilisant le fait que le processus est ergodique, nous aurons :

$$\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \phi_f^2 \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}) \right) \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)'} \rightarrow E(\phi_f^2) E \left(\underline{X}_0^{(n)} \underline{X}_0^{(n)'} \right),$$

Où $E(\phi_f^2) = I(f_\sigma)$ avec $I(f_\sigma) = \frac{1}{\sigma^2} I(f_1)$.

$$E \left(\underline{X}_0^{(n)} \underline{X}_0^{(n)'} \right) = \Gamma(\underline{\beta}, \sigma) =$$

$$\begin{pmatrix}
 E(X_0^2) & E(X_0^2 e^{-\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_0 X_{1-p}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) \\
 E(X_0^2 e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_0^2 e^{-2\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-2\gamma X_0^2}) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 E(X_0 X_{1-p}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_{1-p}^2) & E(X_{1-p}^2 e^{-\gamma X_0^2}) \\
 E(X_0 X_{1-p} e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_0 X_{1-p} e^{-2\gamma X_0^2}) & \dots & E(X_{1-p}^2 e^{-\gamma X_0^2}) & E(X_{1-p}^2 e^{-2\gamma X_0^2})
 \end{pmatrix},$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \left(\zeta_{s+rS}^{(n)2}(\underline{\beta}) \right) &= \frac{1}{4S} \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_s^{*(n)'} I(f_1) \left(\frac{1}{\sigma^2} \Gamma(\underline{\beta}, \sigma) \right) \underline{\tau}_s^{*(n)} + 0_p(1), \\ &= \frac{I(f_1)}{4S} \underline{\tau}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) \underline{\tau}^{*(n)} + 0_p(1). \end{aligned}$$

Condition (6).

Puisque $Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})$ est indépendant des variables de $\mathcal{B}_{n,s+rS-1}$ et $E\left(\phi_f\left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta})\right)\right) = 0$ (hypothèse H2), alors nous avons $E\left(\zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) / \mathcal{B}_{n,s+rS-1}\right) = 0$.

La preuve de la condition (5) est similaire à celle de Swensen (1985), alors elle est omise.

■

Proposition 2 (2.3.2)

Supposons que les hypothèses H1 et H3 sont satisfaites, alors nous avons, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$, quand $n \rightarrow \infty$ les deux résultats suivants:

(i) *QUADRATIQUE ASYMTOTIQUE LOCALE (LAQ)* :

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) - \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1),$$

où la matrice carrée $\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) = \frac{I(f_1)}{S} K' \underline{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) K$ et la suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) &= K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\beta}), \\ \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) &= \left(\sum_{s=1}^S \delta_{s,1}^{(n)}, \sum_{s=1}^S \delta_{s,2}^{(n)}, \dots, \sum_{s=1}^S \delta_{s,p}^{(n)}; \delta_{1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}, \dots; \right. \\ &\quad \left. \delta_{1,p}^{(n)} - \delta_{S,p}^{(n)}; \dots; \delta_{S-1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{S-1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}; \dots; \delta_{S-1,p}^{(n)} - \delta_{S,p}^{(n)} \right)' \end{aligned}$$

(ii) $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) \rightarrow N_{2Sp}\left(\underline{0}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}, \sigma)\right)$.

Preuve.

Puisque les conditions suffisantes de Swensen sont vérifiées, alors en tenant compte du fait que $2 \sum_{s=1}^S \sum_{r=0}^{m-1} \zeta_{s+rS}^{(n)}(\underline{\beta}) = \underline{\tau}^{(n)'} K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\beta}) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta})$, la quadratique asymptotique

locale (LAQ) et la normalité asymptotique locale (LAN) découlent immédiatement du Théorème 1 (Le Cam) (cf., Swensen (1985)). ■

Le corollaire suivant établit les distributions asymptotiques de la suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta})$ et du logarithme du rapport de vraisemblance $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)})$ sous l'hypothèse alternative $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$:

Corollaire 3 (2.3.1) *Supposons que les hypothèses H1 et H3 sont satisfaites, alors nous avons,*

- i) $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$ sont contiguës.
- ii) $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) \implies N\left(\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}, \sigma)\underline{\tau}^{(n)}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}, \sigma)\right)$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$,
- iii) $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) \implies N\left(\frac{1}{2}\underline{\tau}^{(n)'}\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}, \sigma)\underline{\tau}^{(n)}, \underline{\tau}^{(n)'}\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}, \sigma)\underline{\tau}^{(n)}\right)$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$.

Ces résultats sont des conséquences directes de la propriété LAN.

Chapitre 3

Test de la périodicité dans un modèle $EXPAR(p)$ restreint

Ce chapitre est consacré au test d'un modèle $EXPAR(p)$ restreint classique contre un modèle $EXPAR(p)$ restreint périodique. La démarche est basée sur la théorie asymptotique des expériences statistiques de LeCam (1960, 1986). Nous exploitons la propriété LAN, démontrée dans le chapitre précédent, et ces conséquences : la convergence faible des expériences statistiques, la contiguïté et la linéarité asymptotique locale pour construire un test optimal au sens "most stringent".

3.1 Test asymptotique local : le plus stringent

L'une des conséquences essentielles de la propriété LAN est que la suite des expériences locales :

$$\xi_f^{(n)}(\underline{\beta}) = \left\{ P_{\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}}; \underline{\tau}^{(n)} \in \mathbb{R}^{2Sp} / \sup_n \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\tau}^{(n)} < \infty, \underline{\tau}^{(n)} \rightarrow \underline{\tau} \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\},$$

converge faiblement vers l'expérience de position Gaussienne de dimension $2Sp$.

$$E_f = \{ N(\Gamma^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) \underline{\tau}, \Gamma^\Delta(\underline{\beta}, \sigma)), \quad \underline{\tau} \in \mathbb{R}^{2Sp} \}.$$

Ainsi, dans le cas des tests d'hypothèse, si un test $\phi(\Delta)$ est exactement optimal au niveau α dans E_f , alors, la suite de tests $\phi(\Delta^{(n)}(\underline{\beta}))$ sera localement et asymptotiquement optimale

au niveau asymptotique α dans la suite d'expériences originales $\xi_f^{(n)}(\underline{\beta})$.

Considérons la décomposition suivante de la suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) = \left(\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)'} \quad \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'} \right)'$ où les vecteurs colonnes $\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)}$ et $\underline{\Delta}_{II,f}^{(n)}$ de dimensions $2p$ et $2p(S-1)$, respectivement, sont donnés par :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{I,f}^{(n)} &= \left(\sum_{s=1}^S \delta_{s,1}^{(n)}, \sum_{s=1}^S \delta_{s,2}^{(n)}, \dots, \sum_{s=1}^S \delta_{s,p}^{(n)} \right)', \\ \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)} &= \left(\delta_{1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}, \dots, \delta_{1,p}^{(n)} - \delta_{S,p}^{(n)}, \dots, \delta_{S-1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{S-1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}, \dots, \delta_{S-1,p}^{(n)} - \delta_{S,p}^{(n)} \right)', \end{aligned}$$

Et soit la partition en bloc correspondante de la matrice de variance :

$$\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) \end{pmatrix},$$

où la matrice, de dimension $2p \times 2p$, $\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) = I(f) \mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma)$ et la matrice, de dimension $2p(S-1) \times 2p(S-1)$,

$$\mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) = \frac{I(f)}{S} \begin{pmatrix} 2\mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) & \mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) & \dots & \mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) \\ & 2\mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) & \dots & \mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) & \mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) & \dots & 2\mathbf{\Gamma}(\underline{\beta}, \sigma) \end{pmatrix}.$$

Posons $\eta = \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{h} \end{pmatrix}$, où $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \eta_1, \dots, \lambda_p, \eta_p)'$ et

$$\underline{h} = (h_{1,1}, l_{1,1}, \dots, h_{1,p}, l_{1,p}; \dots; h_{S-1,1}, l_{S-1,1}, \dots, h_{S-1,p}, l_{S-1,p})'$$

Alors tester un modèle $EXPAR(p)$ restreint à temps-invariant, donné par (2.3.1), contre, un modèle $EXPAR(p)$ restreint localement S -périodique, donné par (2.3.2), revient, tout simplement, au problème de test lié à l'expérience de position Gaussienne. Plus précisément : tester l'hypothèse nulle

$$H_{0,f} : \underline{\Delta}(\underline{\beta}) \sim N(\eta_0, \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma)), \quad \left(\eta_0 = \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \right),$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_{1,f} : \underline{\Delta}(\underline{\beta}) \sim N(\eta, \Gamma^\Delta(\underline{\beta}, \sigma)), \quad \left(\eta = \Gamma^\Delta(\underline{\beta}, \sigma) \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{h} \end{pmatrix}, \underline{h} \neq \underline{0} \right).$$

La construction du test a besoin de l'existence d'estimateurs préliminaires de $\underline{\beta}$ donc on suppose qu'il existe une suite d'estimateurs initiale $\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}$, $\underline{\nu}^{(n)}$ -consistents.

Hypothèse (H4) : une suite d'estimateurs $\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}$ existe, telle que

$$(i) (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} (\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} - \underline{\beta}) = O_P(1), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\beta}).$$

(ii) $\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}$ est localement asymptotiquement discrète ; car, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que indépendamment de $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}$ prend au maximum K différentes valeurs dans l'ensemble

$$Q_n = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{2Sp} : (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} |\theta - \underline{\beta}| \leq c \right\}, c > 0$$

Nous devons également établir la linéarité asymptotique de $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta})$.

Lemme 3.1.1

La suite centrale $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta})$ satisfait la linéarité asymptotique locale suivante :

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) = -\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1),$$

Où $\underline{\beta}^{(n)} = \underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}$, quand $n \rightarrow \infty$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ donc aussi sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$.

Preuve

Ici on utilise la même preuve de Bentarzi et Merzougui (2010). soit $V^{(n)}$ une suite de vecteurs de dimension $2Sp$ tel que $\sup_n V^{(n)'} V^{(n)} < \infty$ et $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} V^{(n)}; \underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$ soit le logarithme du rapport de vraisemblance de $H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} V^{(n)})$ contre $H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$, puis :

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}(V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) &= \\ & \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}(V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\beta}) - \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}; \underline{\beta}), \end{aligned}$$

En utilisant l'expression LAQ, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)})$, puis par contiguïté, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$, on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}(V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) &= \Lambda_f^{(n)}((\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}V^{(n)}) + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}; \underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) \\ &= \underline{V}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) - \frac{1}{2} \underline{V}^{(n)'} \Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) \underline{V}^{(n)} + 0_p(1), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

D'autre part, on utilise encore une fois l'expression LAQ, on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}(V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) &= \\ & \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}(V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\beta}) - \Lambda_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}; \underline{\beta}), \\ &= \left\{ \left(\underline{V}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right)' \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) - \frac{1}{2} \left(\underline{V}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right)' \Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) \left(\underline{V}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right) + 0_p(1) \right\} \\ & \quad - \left\{ \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) - \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1) \right\}, \\ &= \underline{V}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) - \frac{1}{2} \underline{V}^{(n)'} \Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) \underline{V}^{(n)} - \underline{V}^{(n)'} \Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

A partir de (3.1.1) et (3.1.2) et en tenant compte de la continuité de $\Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta})$ et de la convergence de $\underline{\tau}^{(n)}$, on obtient

$$\underline{V}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}) - \underline{V}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) = -\underline{V}^{(n)'} \Gamma_f^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1).$$

Finalement, on doit estimer la matrice $\mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\underline{\beta})$. Soit

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{22}^{\Delta}(\underline{\beta}) = \frac{I(f)}{S} \begin{pmatrix} 2\widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) & \widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) & .. & \widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) \\ & 2\widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) & .. & \widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) & \widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) & .. & 2\widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) \end{pmatrix}.$$

avec $\widehat{\Gamma}(\underline{\beta}) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)'}$. La proposition suivante établit le test localement

asymptotiquement optimal de la périodicité pour tester $H_{0,f}$ contre $H_{1,f}$:

Proposition 3.1.1

Sous les conditions $H1$ – $H4$, le test qui rejette l'hypothèse nulle $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ si :

$$\widehat{Q}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) = \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) \left(\widehat{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) \right)^{-1} \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) > \chi_{p(S-1), 1-\alpha}^2,$$

i) est de niveau asymptotique α (sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$),

ii) est de puissance asymptotique :

$$1 - \mathcal{F}\left(\chi_{1-\alpha}^2; p(S-1), \underline{h}' \Gamma_{22}^{\Delta}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) \underline{h}\right), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{1}),$$

où $\mathcal{F}(\chi_{1-\alpha}^2; r, \nu)$ désigne la fonction de distribution chi-deux non centrale avec r degré de liberté et ν paramètre de non centralité.

iii) est le test localement asymptotiquement plus stringent contre $H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{1})$.

Preuve :

Soit $\begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \Omega \underline{\lambda}$ où $\Omega = \begin{pmatrix} I_{(2p) \times (2p)} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension $(2p)S \times (2p)$ et $M(\Omega)$ le sous espace de $\mathbb{R}^{(2p)S}$ généré par Ω donc le problème du test réduit à tester : $\eta \in M(\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}) \Omega)$ contre $\eta \notin M(\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}) \Omega)$. Suivant LeCam, le test le plus stringent est $\varphi(\Delta)$ de taille α qui rejette $\eta \in M(\Gamma^{\Delta}(\underline{\theta}) \Omega)$ si

$$\begin{aligned} Q_f^{(n)}(\underline{\beta}) &= \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\beta}) \left[\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta})^{-1} - \Omega (\Omega' \Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}) \Omega)^{-1} \Omega' \right] \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}), \\ &= \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\beta}) \left((\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}))^{-1} - \begin{pmatrix} (\Gamma_{11}^{\Delta}(\underline{\beta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) \\ &= \left((\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) \right)' \left\{ I - (\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\Gamma_{11}^{\Delta}(\underline{\beta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}))^{1/2} \right\} \\ &\quad (\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta}))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) > \chi_{2p(S-1), 1-\alpha}^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de la décomposition $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) = \left(\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)'}, \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'} \right)'$ de la suite centrale et de la décomposition correspondante de $\Gamma^{\Delta}(\underline{\beta})$, et après quelques calculs matriciels on peut

réécrire la dernière forme quadratique comme suit

$$Q_f^{(n)}(\underline{\beta}) = \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'}(\underline{\beta}) \left(\underline{\Gamma}_{22}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\beta}) \right)^{-1} \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)}(\underline{\beta}),$$

La distribution de la forme quadratique $Q_f^{(n)}(\underline{\beta})$ augmente directement du fait que le vecteur colonne $(\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta})$ est asymptotiquement normalement distribué avec moyenne 0 et matrice de variance I et que la matrice $I - (\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\underline{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\beta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}))^{1/2}$ est idempotente. En effet, la distribution asymptotique de $Q_f^{(n)}(\underline{\beta})$ est alors, comme c'est bien connu, une $\chi^2(2p(S-1))$ sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ et une chi-deux non centrale avec $2p(S-1)$ degrés de liberté et paramètre de non centralité ν , $\chi^2(2p(S-1); \nu)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$ où

$$\begin{aligned} \nu &= (\underline{\lambda}', \underline{h}') \left\{ \underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}) - \underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}) \begin{pmatrix} (\underline{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\beta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}) \right\} \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{h} \end{pmatrix} \\ &= \underline{h}' \underline{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\beta}) \underline{h}. \end{aligned}$$

Bien sûr, ces résultats sont obtenus pour les valeurs de paramètres inconnus $\underline{\beta}$. Cependant, nous montrons qu'ils restent vrais quand ces paramètres sont estimés. Soit $\underline{\tau}^{(n)} = (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} (\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} - \underline{\beta})$ pour un estimateur $\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}$ quelconque $\underline{\nu}^{(n)}$ -consistant du paramètre inconnu $\underline{\beta}$, et à partir de l'expression de la linéarité asymptotique et le lemme 4.4 de Kreiss (1987), on obtient

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) = -\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}) (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} (\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} - \underline{\beta}) + o_p(1),$$

Par conséquent nous avons

$$(\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}))^{-1/2} \left(\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) \right) = -(\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}))^{1/2} (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} (\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} - \underline{\beta}) + o_p(1),$$

multiplions le côté gauche par la matrice $I - (\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\underline{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\beta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\underline{\Gamma}^\Delta(\underline{\beta}))^{1/2}$

et tenons compte de la continuité de $\Gamma^\Delta(\underline{\beta})$, on obtient, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ par conséquent sous

$$H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$$

$$\left\{ I - \left(\Gamma^\Delta(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left(\Gamma_{11}^\Delta(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\Gamma^\Delta(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) \right)^{1/2} \right\} \times \\ \left(\Gamma^\Delta(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) \right)^{-1/2} \left(\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) \right) = 0_p(1).$$

De cela et par stationnarité du modèle

$$\widehat{\Gamma}_f^{\Delta(n)}(\underline{\beta}, \underline{\sigma}) = \Gamma_f^{\Delta(n)}(\underline{\beta}, \underline{\sigma}) + 0_p(1) \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\beta}) \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

nous avons $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)}) = Q_f^{(n)}(\underline{\beta}) + 0_p(1)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ par conséquent sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$.

Donc le test statistique $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)})$ suit la loi $\chi^2(2p(S-1))$ et la loi $\chi^2(2p(S-1); \underline{h}' \Gamma_{22}^\Delta(\underline{\beta}^{(n)}) \underline{h})$

sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$, respectivement. Par conséquent, la preuve de *ii*) suit directement.

3.2 Test Adaptatif

Le test décrit dans la proposition précédente est valide et optimal quand la densité des innovations f , qui intervient dans la statistique du test à travers la fonction $\phi_f(\cdot) = -\frac{\dot{f}_\sigma(\cdot)}{f_\sigma(\cdot)}$, est spécifiée. Cependant, en pratique cette densité est fréquemment inconnue, par conséquent, elle est considérée comme un paramètre de nuisance. Ainsi, dans cette section, on considère le modèle semi-paramétrique dont le vecteur des paramètres est $(\underline{\beta}, f)$ où $\underline{\beta}$ est le paramètre d'intérêt et f est le paramètre de nuisance qui est supposé appartenir à la classe des densités symétriques \mathcal{F}^+ d'où on ajoute l'hypothèse suivante.

Hypothèse (H5). La fonction de densité d'innovation f est symétrique avec des moments d'ordres quatre finis.

Brièvement, un test est dit adaptatif s'il a, quand f est inconnue, la même puissance asymptotique que le test optimal dans le modèle où cette densité d'innovation est spécifiée. Au départ, on estime la fonction score et l'information de Fisher alors nous montrons que le test est localement asymptotiquement le plus stringent, la preuve dépend essentiellement de la symétrie de la densité f , d'où l'hypothèse (H5) ci-dessus

En suivant les étapes de Kreiss(1987), lorsqu'il a appliqué la méthode de la fonction du noyau, l'estimation de la densité d'innovation f est établit. Pour atteindre cette tâche on a besoin des notations et définitions suivantes :

$$(i) \quad g(x; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right), x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y; \eta)f(y)dy,$$

$$(iii) \quad \hat{f}_{\eta,r}(x, \underline{\beta}) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{\substack{r_0=0 \\ r_0 \neq r}}^{m-1} \{g(x+z_{s,r_0}, \eta) + g(x-z_{s,r_0}, \eta)\}; r = 0, \dots, m-1,$$

et soit $\hat{q}_{n,r}(x, \underline{\beta})$, pour un $\underline{\beta}$ donné, l'estimateur de $\phi_f(\cdot)$ donné par :

$$\hat{q}_{n,r}(x, \underline{\beta}) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\hat{f}_{\eta(n),r}(x, \underline{\beta})}{\hat{f}_{\eta(n),r}(x, \underline{\beta})} & \text{si } \begin{cases} \hat{f}_{\eta(n),r}(x, \underline{\beta}) \geq d_n, |x| \leq g_n, \\ |\hat{f}_{\eta(n),r}(x, \underline{\beta})| \leq c_n \hat{f}_{\eta(n),r}(x, \underline{\beta}) \end{cases} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0$.

On définit $\tilde{\Delta}_s(\underline{\beta}_s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=0}^{m-1} \hat{q}_{n,r}(x, \underline{\beta}) \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)}$ et l'estimateur $\tilde{\Delta}^{(n)}(\underline{\beta})$ de $\Delta^{(n)}(\underline{\beta})$ par

$\tilde{\Delta}^{(n)}(\underline{\beta}) = \left(\tilde{\Delta}_1(\underline{\beta}_1), \tilde{\Delta}_2(\underline{\beta}_2), \dots, \tilde{\Delta}_S(\underline{\beta}_S) \right)'$ et l'estimateur sans biais

$$\hat{I}_n(\underline{\beta}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \left[\hat{q}_{n,r}^2 \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}_s), \underline{\beta}_s \right) \right]^2 \right)$$

de $I(f)$.

Lemme 3.2.1

Soit $(\bar{\beta}_n)$ une suite discrète d'estimateurs \sqrt{n} -consistents pour $\underline{\beta}$ et soit $\tilde{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\beta}) = K' \tilde{\delta}^{(n)}$.

Alors, on a, sous les hypothèses (H1) – (H5) :

$$\tilde{\Delta}_f^{(n)}(\bar{\beta}_n) - \Delta_f^{(n)}(\bar{\beta}_n) = o_p(1),$$

pour $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0, \eta(n) c_n \rightarrow 0, g_n \eta(n)^{-4} / n \rightarrow 0$ et $n \eta(n)^9$ reste borné.

Preuve

A partir du Lemme 4.4 de Kreiss (1987), il suffit de vérifier que $\tilde{\Delta}^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) - \Delta^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$ converge en moyenne quadratique vers 0 pour $\underline{\beta}^{(n)} = \underline{\beta} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}$.

Pour s fixé, on a

$$\begin{aligned} & E \left\| \tilde{\delta}_s^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) - \delta_s^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left(\hat{q}_{n,r} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) \right) - \phi_{\sigma_s} \left(Z_{s,r}^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)}) \right) \right)^2 \left\| \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left\| \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \right\|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\hat{q}_{n,r}(x) - \phi_{\sigma_s}(x) \right)^2 f_{\sigma_s}(x) dx \right), \end{aligned}$$

avec $x = Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\beta}_s^{(n)} \right)$.

Comme dans Bickel (1982) p.667, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)}{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)} - \frac{f_{\sigma}'(x)}{f_{\sigma}(x)} \right)^2 f_{\sigma}(x) dx \\
 & \leq 3 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)}{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)} - \frac{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)}{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)} \left(\frac{f_{\eta(n)}(x)}{f_{\sigma}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 f_{\sigma} dx \\
 & + 3 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)}{\widehat{f}_{\eta(n),r} \left(x, \underline{\beta}_s^{(n)} \right)} \left(\frac{f_{\eta(n)}(x)}{f_{\sigma}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{f_{\eta(n)}'(x)}{f_{\eta(n)}(x)} \left(\frac{f_{\eta(n)}(x)}{f_{\sigma}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 f_{\sigma} dx \\
 & + 3 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f_{\eta(n)}'(x)}{f_{\eta(n)}(x)} \left(\frac{f_{\eta(n)}(x)}{f_{\sigma}(x)} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{f_{\sigma}'(x)}{f_{\sigma}(x)} \right)^2 f_{\sigma} dx.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 & E \left\| \widetilde{\delta}_s^{(n)} \left(\underline{\beta}_s^{(n)} \right) - \delta_s^{(n)} \left(\underline{\beta}_s^{(n)} \right) \right\|^2 \\
 & \leq \frac{3}{n} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left\| \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \right\|^2 \int_{\mathbb{R}} \widehat{q}_{n,r}^2 \left(\sqrt{f_{\eta(n)}} - \sqrt{f_{\sigma}} \right)^2 dx \right) \\
 & + \frac{3}{n} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left\| \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \right\|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\widehat{q}_{n,r} + \frac{f_{\eta(n)}'}{f_{\eta(n)}} \right)^2 f_{\eta(n)} dx \right) \\
 & + \frac{3}{n} \sum_{r=0}^{m-1} E \left(\left\| \underline{X}_{s+rS-1}^{(n)} \right\|^2 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f_{\eta(n)}'}{\sqrt{f_{\eta(n)}}} - \frac{f_{\sigma}'}{\sqrt{f_{\sigma}}} \right)^2 dx \right).
 \end{aligned}$$

Pour la preuve restante on peut utiliser les Lemmes 6.5-6.9 de Kreiss (1987) qui assurent que chaque terme du côté droit converge vers zéro quand $n \rightarrow \infty$.

Lemme 3.2.2 (*Estimation de l'information de Fisher*).

$$\widehat{I}_n(\underline{\beta}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \widehat{q}_{n,r}^2 \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\beta}_s \right), \underline{\beta}_s \right) \right)$$

est un estimateur consistant de l'information de Fisher $I(f_1)$, i.e., $\widehat{I}_n(\underline{\beta}) = I(f_1) + o_p(1)$.

Preuve : A partir de la WLLN, on a pour chaque $\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} = \underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau}^{(n)}$,

$$\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left(\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} \phi_{f_1}^2 \left(Z_{s,r}^{(n)} \left(\underline{\beta}_s \right) \right) \right) \rightarrow I(f_1), \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ sous } H_f^{(n)} \left(\underline{\beta}^{(n)} \right).$$

L'assertion découle du Lemme 4.1 de Bickel (1982), la contiguïté de $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ et $H_f^{(n)}(\underline{\beta}^{(n)})$ et à partir du Lemme 4.4 de Kreiss (1987).

La proposition suivante établit le test adaptatif du modèle $EXPAR(p)$ classique contre un autre périodique.

Proposition 3.2.1

Sous les conditions (H1) – (H5), on a, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$, le test statistique

$$\widetilde{Q}_f^{(n)} \left(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} \right) = \widetilde{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)'} \left(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} \right) \left(\widetilde{\underline{\Gamma}}_{22}^{\Delta} \left(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} \right) \right)^{-1} \widetilde{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)} \left(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} \right) > \chi_{p(S-1), 1-\alpha}^2,$$

est telle que :

- i) le niveau asymptotique est α sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$,
- ii) est un test adaptatif local de $H_f^{(n)}(\underline{\beta})$ contre $H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau})$, i.e., pour tester $\underline{h} = \underline{0}$ contre $\underline{h} \neq \underline{0}$, avec un niveau asymptotique α et $f \in F^+$,
- iii) La puissance asymptotique de ce test est $1 - \mathcal{F} \left(\chi_{1-\alpha}^2; p(S-1), \underline{h}' \underline{\Gamma}_{22}^{\Delta} \left(\widehat{\underline{\beta}}^{(n)} \right) \underline{h} \right)$, sous $H_f^{(n)}(\underline{\beta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\tau})$.

Preuve :

Il découle des deux Lemmes, 3.2.1 et 3.2.2, que la statistique donnée par la Proposition 3.1.1 est équivalente, en probabilité, à celle donnée par la Proposition 3.2.1.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

L'étude réalisée dans cette thèse, porte essentiellement sur un problème de l'inférence statistique lié au paramètre du modèle Autorégressif exponentiel *EXPAR* restreint. En particulier, nous nous sommes intéressées à la construction du test localement et asymptotiquement optimal au sens "most stringent" pour tester la présence, éventuelle, de la périodicité dans un modèle *EXPAR* (p) restreint. En fait, nous avons généralisé le test le plus stringent de périodicité du modèle *EXPAR* d'ordre 1 au modèle *EXPAR* d'ordre p et nous avons étendu l'étude en construisant un test adaptatif en estimant la densité par la méthode du noyau.

D'autres procédures de tests localement et asymptotiquement optimaux pouvaient être utilisés tels que les tests de rangs et le test maximin.

Dans ce travail nous avons considéré une condition suffisante de stationnarité cycle par cycle mais une condition générale sera moins forte comme c'est le cas pour le modèle *ARMA* périodique.

Pour les modèles de séries temporelles périodiques : *GARCH* périodique, Treshold Périodique et Bilinéaire Périodique, il y a une abondance de travaux par plusieurs chercheurs, alors que pour les modèles *EXPAR* périodiques il reste beaucoup de théorie à faire : estimation par différentes méthodes, tests de nullité des coefficients, prévision et applications dans des domaines variés.

Bibliographie

- [1] Akritas, M. G. et Johnson, R. A. (1982). Efficiencies of tests and estimators for p-order autoregressive processes when the error is non normal. *Ann. Inst. Statist. Math.* 34, 579-589.
- [2] Allal, J. and El Melhaoui, S.(2006).Optimal Detection Of Exponential Component. *Journal Of Time Series Analysis* Vol. 27, No. 6, 793-810.
- [3] Amimour, A and Belaid, K (2020) . Local asymptotic normality for a periodically time varying long memory parameter. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. DOI :10.1080/03610926.2020.1784435.
- [4] Amiri, E., (2012). Forecasting GDP Growth rate with Nonlinear Models. *1st International Conference on Econometrics Methods and Applications*. ICEKU2012 ; 25-27.
- [5] Azouagh, N. and El Melhaoui, S. (2019). An Exponential Autoregressive model for the forecasting of annual sunspots number. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 7(3), 17-23.
- [6] Baragona, R., Battaglia, F. and Cuccina, D. (2002) : A note on estimating autoregressive exponential models. *Quaderni di Statistica*, Vol.4, .
- [7] Bengabrit, Y. and Hallin, M.(1998). Locally asymptotically optimal tests for $AR(p)$ against diagonal bilinear dependence. *Journal of Statistical Planning Inference*, 68, 47-63.

- [8] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1996). Locally optimal tests against periodic autoregression. *Econometric Theory*, 12, 88-112.
- [9] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2009). Adaptive Test for Periodicity in Self-Exciting Threshold Autoregressive Models. *Comm. Simulation Comput.* 38, 1723-1741.
- [10] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2010). Adaptive Test for Periodicity in Autoregressive Conditional Heteroskedastic Processes. *Comm. Simulation Comput.* 39, 1735-1753.
- [11] Bibi, A and Gautier, A. (2005). Stationnarité et inférence asymptotique de modèles bilinéaires périodiques, Comptes rendus de l'Académie des Sciences - Mathématique 341, 679-682.
- [12] Bickel, P. J, (1982). On adaptive Estimation. *Ann.Statist.*10; 647-671.
- [13] Bollerslev, T. and Ghysels, E. (1996). Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 139-152.
- [14] Chan, K. S. and Tong, H. (1985). On the use of the deterministic Lyapunov function for the ergodicity of stochastic difference equations. *Advances in applied probability*, 17(3). 666-678.
- [15] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- [16] Franses, P.H. and Ooms, M., (1997) . A Periodic Long Memory Model for Quarterly UK Inflation. *International Journal of Forecasting*, 13, 119–128.
- [17] Garel, B. and Hallin, M. (1995). Local asymptotic normality of multivariate ARMA processes with a linear trend. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 47, 551-579.

- [18] Ghosh, H., Gurung, B. and Gupta, P. (2015). Fitting EXPAR Models Through the Extended Kalman Filter. *Sankhya : The Indian Journal of Statistics*. Volume 77, Part 1, 27-44.
- [19] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet. Math.*, 2, 385-88.
- [20] Granger, C. and Andersen, A.(1978). *An Introduction to Bilinear Time Series Models*. Vandenhoeck und Ruprecht, Gottingen.
- [21] Gurung, B. (2013) . An Application of Exponential Autoregressive (EXPAR) Nonlinear Time-series Model. *International Journal of Information and Computation Technology*. ISSN 0974-2239, 3(4), 261-266.
- [22] Haggan, V. and Ozaki, T. (1981), Modeling nonlinear random vibrations using an amplitude-dependent autoregressive time series model. *Biometrik* Vol.68, No.1, (96-189).
- [23] Hájek, J. (1972). Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation. *Proc.Sixth Berkeley Symp.Math.Stat.Proba.1* 175-194. *Univ. California Press*.
- [24] Hájek and Šidák (1967). *Theory of Rank Tests*, Academic Press, New York.
- [25] Hallin, M. and Lotfi, S. (2004). Optimal Detection of Periodicities in Vector Autoregressive Models. *Statistical modeling and analysis for complex data problems*, 49-75.
- [26] Ishizuka, K., Kato, H. and Nakatani, T. (2005). Speech signal analysis with exponential autoregressive model, *Proc. the 30th International Conference of Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1, 225-228.
- [27] Katsiampa, P. (2014). A new approach to modelling nonlinear time series : Introducing the ExpAR-ARCH and ExpAR-GARCH models and applications. 4th Student Conference on Operational Research. 34-51.

- [28] Koul, H. L. and Schick, A. (1996). Adaptive estimation in a Random Coefficient Autoregressive Model. *The Annals of Statistics*, 24, 1025-1052.
- [29] Koul, H. L. and Schick, A. (1997). Efficient estimation in nonlinear autoregressive time series models. *Bernoulli*, 3, 247-277.
- [30] Kreiss, J. P. (1987) On Adaptive Estimation in Stationary ARMA Processes. *The Annals of Statistics*. Vol 15, N°1, 112-133.
- [31] LeCam, L. (1960) Locally Asymptotically Normal Families of Distributions. *Univ California Publ. Statist.* 3 37-98.
- [32] LeCam, L. (1986). *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [33] Linton, O. (1993). Adaptive Estimation in ARCH Models. *Econometric Theory* 9, 539–569.
- [34] Merzougui, M., Dridi, H. and Chadli, A. (2016). Test for Periodicity in restrictive EXPAR Models. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 45 :9, 2770-2783.
- [35] Merzougui, M. and Becila, S. (2019). Least squares estimation in Periodic restricted EXPAR(p) Models. *International Journal of Statistics : Advances in Theory and Applications*. Vol. 1, Issue 2, 275-291.
- [36] Ozaki, T. (1980). Non-linear time series models for non-linear random vibrations, *Journal of Applied Probability* 17, 84–93.
- [37] Ozaki, T. (1982). The statistical analysis of Perturbed Limit Cycle Processes Using Nonlinear Time Series Models, *Journal of Time Series Analysis*, Vol.3, No.1, 29-41.
- [38] Ozaki, T. (1985). Non linear Time Series Models and Dynamical System. *Handbook of statistics*, 5. 25-83.

- [39] Ozaki, T. (1993). *Non-Gaussian characteristics of exponential autoregressive processes*. In *Developments in time-series analysis, Festschrift in honour of prof. Maurice Priestley, T. Subba Rao (ED.)*, Chapman and Hall. 257-273.
- [40] Priestley, M. B. (1988). *Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis*, Academic Press, New York.
- [41] Steigerwald, D. G. (2006) . *A Note on Adaptive Estimation*. UC Santa Barbara, Departmental Working Papers. <https://escholarship.org/uc/item/94v9g27p>.
- [42] Stein, C. (1956). Efficient nonparametric estimation and testing. In J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1. 187-195. Berkeley : University of California Press.
- [43] Swensen, A. R.(1985). The Asymptotic Distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend. *Journal of Multivariate Analysis*. 16, 54-70.
- [44] Taniguchi, M and Kakizawa, Y. (2000) . *Asymptotic theory of Statistical Inference for Time Series*. Springer-Verlag New York, Inc.
- [45] Terui, N. and Van Dijk, H. K. (1999). Combined Forecasts from Linear and Nonlinear Time Series Models. *Econometric Institute Report EI-9949/A*.
- [46] Tjøstheim, D. (1986). Estimation in Nonlinear Time Series Models. *Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland. Stochastic Processes and their Applications 21 (1986), 251-273*.
- [47] Tong, H (1978). On threshold models. In *Pattern Recognition and Signal Processing*, (ed. C. H. Chen). Amsterdam : Sijhoff & Noordhoff.
- [48] Tong, H. (1990). *Nonlinear Time Series : a Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford.

- [49] Van Der Vaart ; A. W (1998). Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. *Cambridge University Press*. United Kingdom. .
- [50] Wald, A. (1943). Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.* 54, 426-482.
- [51] Yousfi, A. and Merzougui, M. (2020). Adaptive test for periodicity in restrictive EXPAR(p) models. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, DOI : 10.1080/03610926.2020.1852433 .