

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**BADJI MOKHTAR-ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA**



**جامعة باجي مختار  
- عنابة -**

**Faculté des Sciences**

**Année : 2021**

**Département de Mathématiques**

## **THÈSE**

**Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
Doctorat en Sciences**

**STABILISATION ET APPROXIMATION NUMERIQUE  
D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES INVERSES**

**Option  
Mathématiques**

**Par : Meziani Mohamed Sief Eddine**

**DIRECTEUR DE THÈSE : BOUSSETILA Nadjib Prof. UNIV. GUELMA  
CO-DIRECTEUR DE THÈSE : REBBANI Faouzia Prof. E.S.T.I. ANNABA**

**Devant le jury**

<b>PRESIDENT :</b>	<b>DJEBABLA Abdelhak</b>	<b>Prof</b>	<b>U.B.M. ANNABA</b>
<b>EXAMINATEUR :</b>	<b>ZOUYED Fairouz</b>	<b>Prof</b>	<b>U.B.M. ANNABA</b>
<b>EXAMINATEUR :</b>	<b>RAMOUL Hichem</b>	<b>M.C.A</b>	<b>U. KHENCHELA</b>
<b>EXAMINATEUR :</b>	<b>SAHARI Mohamed Lamine</b>	<b>M.C.A</b>	<b>U.B.M. ANNABA</b>

# ملخص

تهدف هذه الأطروحة الى دراسة نموذجين من المسائل معتلة الطرح بمفهوم هادامار. من أجل إعادة بناء معلومات ذات معنى من هاته المسائل نقوم باقتراح طرق تعديلات تمكننا من تغيير طبيعتهم ذات الطرح المعتل والحصول على حلول مستقرة ومقربة للحلول الأصلية لهاته الإشكاليات. النموذج الأول مخصص لدراسة مسألة ذات معادلة زائديه من نوع غورصا بمتغير زمني ثنائي البعد، حيث نقترح لتعديلها اسلوب يعتمد على الطرق التكرارية والاسقاطية مدعومة بتهيئة قبلية. أما النموذج الثاني فهو عبارة عن مسألة عكسية بمجهولين مولدة بمعادلة كسرية ناقصيه اين يعتمد نهج تسويتها على طريقة التعديل التكراري المدعوم بالتحليل الطيفي.

نبين في هذه الدراسة أن حلول المسائل التقريبية لها طابع مستقر وهي متقاربة نحو حلول المسائل الأصلية. علاوة على ذلك، نبرهن نتائج التقارب للطرق المقترحة أعلاه مع إعطاء شروط توقف قبلية وبعديّة لبلوغ دقة مرضية. كل نموذج أرفق بسلسلة من التجارب الرقمية التي توضح دقة وكفاءة الطرق المقترحة.

## الكلمات المفتاحية.

إشكاليات عكسية، إشكالية معتلة الطرح، التسوية، معادلة جزئية معممة، طرق تكرارية، طرق الإسقاط، معادلة ناقصيه كسرية، معادلة غورصا، شروط التوقف.

# Abstract

In the present thesis, we study two classes of ill-posed problems in the sense of Hadamard. To neutralize the instability character, regularization methods are proposed in order to make the models more stable and numerically feasible.

The first model is devoted to the study of a multi-temporal Goursat problem. In this part, we propose two regularization strategies : the first procedure is based on a variant of the preconditioned Kozlov-Mazyra method, and the second uses Krylov's projection techniques.

The second problem is devoted to the study of a fractional inverse problem with two unknowns, generated by a generalized elliptic equation. The proposed regularization approach for this problem is a variant of the alternative iterative method of Kozlov-Mazyra.

In this context, we demonstrate the stability of the solutions as well as their convergences towards the solutions of the original problems. Error estimates are also made between the approximate solutions and the solutions of the original problems under certain assumptions of regularity on the data.

The study is closed by a series of numerical experiments justifying the theoretical framework developed in this thesis.

**Keywords :** *Ill-posed problems, inverse problems, regularization, stabilization, iterative methods, generalized elliptic equation, Goursat equation, fractional problems, spectral truncation method, Krylov projection method.*

# Résumé

Dans la présente thèse, on étudie deux classes de problèmes mal-posés au sens de Hadamard. Pour neutraliser le caractère d'instabilité, des méthodes de régularisation sont proposées afin de rendre les modèles proposés stables et numériquement réalisables.

Le premier modèle est consacré à l'étude d'un problème de Goursat multi-temporelle. Dans ce volet, on propose deux stratégies de régularisation : la première procédure repose sur une variante de la méthode de Kozlov-Mazya préconditionnée, et la seconde emploie les techniques de projection de Krylov.

Le deuxième problème est consacré à l'étude d'un problème inverse de type fractionnaire avec deux inconnus, engendrés par une équation elliptique généralisée. L'approche de régularisation proposée pour ce problème est une variante de la méthode itérative alternative de Kozlov-Mazya.

Dans ce contexte, on démontre la stabilité des solutions ainsi que leurs convergences vers les solutions des problèmes originaux. On établit aussi des estimations d'erreur entre les solutions originales et les solutions approchées sous certaines hypothèses de régularité sur les données. L'étude est clôturée par une série d'expérimentations numériques justifiant le cadre théorique développé dans cette thèse.

**Mots-clés :** *Problèmes mal posés, problèmes inverses, régularisation, stabilisation, méthodes itératives, équation elliptique généralisée, équation de Goursat, problème fractionnaire, méthode de troncature spectrale, méthode de projection de Krylov.*

© **Meziani Mohamed Sief Eddine**

**Doctorat en Sciences : Stabilisation et Approximation Numérique d'une Classe de  
Problèmes Inverses**

Université Badji Mokhtar Annaba

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées (**LMA Annaba**)

Equipe de recherche : **IIPP**

# Remerciements



Avant tout je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.



J'adresse mes vifs remerciements à mes Directeurs de thèse : *Prof. Boussetila Nadjib* (U. Guelma) et *Prof. Rebbani Faouzia* (ESTI Annaba). Je leur suis très reconnaissant de la confiance qu'ils m'ont toujours témoigné au cours de ce doctorat. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance pour leur suivi attentif, leur soutien, leurs conseils et leur disponibilité.

- Je tiens également à remercier *M. Djebabla Abdelhak* (Prof. U. Annaba) qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi que *Mme. Zouyed Fairouz* (Prof.U. Annaba), *M. Ramoul Hichem* (MCA. U. Khenchela) et *M. Sahari Mohamed Lamine* (MCA. U. Annaba) pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.
- Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques (UBMA Annaba) pour toute l'aide qui m'a été accordée.
- Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation, surtout les enseignants de l'école doctorale (Annaba).
- Je remercie également le Professeur *Cristiana Sebu* (Université de Malte) pour son aide, ses conseils précieux, sa disponibilité lors de mes séjours au sein de son laboratoire.
- Je tiens également à remercier *M. Benrabah Abderafik* (MCA. U. Guelma) et *M. Ousmane Samba Coulibaly* (MCB. U. Bamako) qui m'ont aidé beaucoup par leur soutien scientifique.
- Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

# *Dédicace*

*Je dédie cette thèse à ceux qui m'ont appris la volonté et  
qui m'ont appris qu'une raison de succès vaut la raison du  
succès, aux personnes dont je suis sûr qu'elles seront plus  
heureuses et plus honorées que moi par ce travail.*

*À ma très chère mère **Saliha***

*À mon Père **Abderrahmane***

*À ma très chère épouse **Imane** et nos enfants*

*À la mémoire de mes deux grand- pères **Abdessalem** et **Mohamed**.*

**À vous les lecteurs de ces lignes.**

**M.S.E. Meziani**

---

## Publication découlant de cette Thèse

---

**Meziani Mohamed Sief Eddine,**

Boussetila Nadjib,

Rebbani Faouzia,

Benrabah Abderafik,

*Iterative Regularization Method for an Abstract Inverse Goursat Problem*

DOI 10.22034/kjm.2020.237076.1900 (accepted paper)

— Khayyam Journal of Mathematics.

— JSR (Category B).

**Indexation DGRST 2021 : SCOPUS, No. 15538.**

---

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Thématique de la thèse</b>	<b>1</b>
<b>Contenu de la thèse</b>	<b>5</b>
<b>1 Résultats préliminaires et notations</b>	<b>6</b>
1.1 Eléments de théorie spectrale . . . . .	6
1.1.1 Opérateurs linéaires . . . . .	6
1.1.2 Opérateurs bornés . . . . .	7
1.1.3 Opérateurs non-bornés . . . . .	8
1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné . . . . .	10
1.1.5 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts . . . . .	11
1.1.6 Famille spectrale et résolution de l'identité . . . . .	13
1.2 Problèmes inverses et problèmes mal-posés . . . . .	15
1.2.1 Exemples de problèmes mal posés . . . . .	17
1.2.2 Méthodes de régularisation . . . . .	21
1.3 Calcul fractionnaire . . . . .	22
1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	22
1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	24
1.4 Méthodes de projection de Krylov . . . . .	25
1.4.1 Sous-espaces de Krylov . . . . .	27
1.4.2 Les valeurs et les vecteurs de Ritz . . . . .	34
1.4.3 Evaluation de $f(A)b$ . . . . .	36

---

1.4.4	Problèmes mal-posés discrets et méthodes de projection de Krylov . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Problème inverse de Goursat</b>	<b>55</b>
2.1	Position du problème . . . . .	55
2.2	Rappels . . . . .	57
2.3	Analyse du problème . . . . .	62
2.3.1	Problème direct . . . . .	62
2.3.2	Problème inverse . . . . .	64
2.4	Régularisation par troncature spectrale . . . . .	65
2.4.1	Convergence et estimations d'erreur . . . . .	67
2.5	Procédure de Kozlov-Maz'ya préconditionnée . . . . .	72
2.5.1	Convergence et estimations d'erreur . . . . .	74
2.5.2	Procédure itérative préconditionné . . . . .	82
2.6	Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov . . . . .	85
2.6.1	Troncature spectrale projetée . . . . .	91
2.6.2	Procédure de Kozlov-Maz'ya préconditionnée avec projection . . . . .	98
2.7	Exemples numériques . . . . .	100
<b>3</b>	<b>Etude d'un problème inverse engendré par une équation elliptique généralisée</b>	<b>138</b>
3.1	Position du problème . . . . .	139
3.2	Résultats préparatoires . . . . .	141
3.2.1	Fonction de Mittag-Leffler et ses propriétés . . . . .	141
3.3	Analyse du problème . . . . .	143
3.3.1	Caractère bien posé du problème direct . . . . .	143
3.3.2	Caractère mal posé du problème inverse . . . . .	145
3.4	Régularisation par la procédure itérative alternative . . . . .	154
3.4.1	Description de la méthode . . . . .	154
3.4.2	Convergence et estimations d'erreur . . . . .	156
3.5	Tests numériques . . . . .	162
	<b>Conclusion et Perspective</b>	<b>192</b>

---

## Table des figures

1.1	MRII iteration 1 . . . . .	43
1.2	MRII iteration 2 . . . . .	43
1.3	MRII iteration 3 . . . . .	44
1.4	MRII iteration 4 . . . . .	44
1.5	MRII iteration 5 . . . . .	45
1.6	MRII iteration 6 . . . . .	45
1.7	LSQRb iteration 1 . . . . .	46
1.8	LSQRb iteration 2 . . . . .	47
1.9	LSQRb iteration 3 . . . . .	47
1.10	LSQRb iteration 4 . . . . .	48
1.11	LSQRb iteration 5 . . . . .	48
1.12	LSQRb iteration 6 . . . . .	49
1.13	Projected Tikhonov in $\mathcal{K}_1(A, b^\delta)$ . . . . .	50
1.14	Projected Tikhonov in $\mathcal{K}_2(A, b^\delta)$ . . . . .	50
1.15	Projected Tikhonov in $\mathcal{K}_3(A, b^\delta)$ . . . . .	51
1.16	Projected Tikhonov in $\mathcal{K}_4(A, b^\delta)$ . . . . .	51
1.17	Projected Tikhonov in $\mathcal{K}_5(A, b^\delta)$ . . . . .	52
1.18	Projected Tikhonov in $\mathcal{K}_6(A, b^\delta)$ . . . . .	52
2.1	Courbes du filtre spectral $k = 10, 100, 1000$ . . . . .	81
2.2	Courbes du filtre spectral $k = 10, 100, 1000, r = 1$ . . . . .	83
2.3	Courbes du filtre spectral $k = 10, 100, 1000, r = 1.5$ . . . . .	84
2.4	Courbes du filtre spectral $k = 10, 100, 1000, r = 2$ . . . . .	84

---

2.5	Distribution des valeurs de <b>Ritz</b> construites dans $\mathcal{K}_l(A, b)$ par rapport aux valeurs propres. . . . .	90
2.6	Distribution des valeurs de <b>Ritz</b> construites dans $\mathcal{K}_l(A^{-1}, b)$ par rapport aux valeurs propres. . . . .	90
2.7	Donnée exacte $g$ . . . . .	101
2.8	Reconstruction de $p(x)$ par l'inversion directe . . . . .	102
2.9	Courbe de Picard discrète : $i = \overline{1, 15}$ . . . . .	103
2.10	Données bruitées et courbes de Picard discrètes pour $\delta = 10\%$ . . . . .	104
2.10a	$g^\delta$ avec un niveau du bruit 10% . . . . .	104
2.10b	Courbe de Picard discrète : $i = \overline{1, 15}, \delta = 10\%$ . . . . .	104
2.11	Données bruitées et courbes de Picard discrètes pour $\delta = 25\%$ . . . . .	105
2.11a	$g^\delta$ avec un niveau du bruit 25% . . . . .	105
2.11b	Courbe de Picard discrète : $i = \overline{1, 15}, \delta = 25\%$ . . . . .	105
2.12	La solution exacte et la solution approchée, $N = 3, \delta = 10\%$ . . . . .	107
2.13	$Er(N) = \ p_N^\delta - p\ , N = \overline{1, 10}, \delta = 10\%$ . . . . .	107
2.14	$\ P_N g^\delta - g^\delta\ , N = \overline{1, 10}, \delta = 10\%$ . . . . .	108
2.15	Solution exacte et solution approchée, $N = 3, \delta = 25\%$ . . . . .	108
2.16	$Er(N) = \ p_N^\delta - p\ , N = \overline{1, 10}, \delta = 25\%$ . . . . .	109
2.17	$\ P_N g^\delta - g^\delta\ , N = \overline{1, 10}, \delta = 25\%$ . . . . .	109
2.18	Solution par KM $N = 20$ et $N = 200$ . . . . .	111
2.18a	La solution exacte et la solution approchée, $k = 4, \delta = 10\%$ . . . . .	111
2.18b	Solution exacte et solution approchée, $k = 3, \delta = 10\%$ . . . . .	111
2.19	Solution par KM $N = 1000$ et $N = 4000$ . . . . .	112
2.19a	La solution exacte et la solution approchée, $k = 2, \delta = 10\%$ . . . . .	112
2.19b	Solution exacte et solution approchée, $k = 1, \delta = 10\%$ . . . . .	112
2.20	Courbes de filtre spectral pour $\delta = 10\%$ , la méthode KM. . . . .	113
2.20a	$N = 20$ avec un niveau du bruit 10% . . . . .	113
2.20b	$N = 200$ avec un niveau du bruit 10% . . . . .	113
2.20c	$N = 1000$ avec un niveau du bruit 10% . . . . .	113
2.20d	$N = 4000$ avec un niveau du bruit 10% . . . . .	113

2.21 Solution par PKM  $r = 1$  . . . . . 114

    2.21a Solution exacte et solution approchée,  $k = 53, \delta = 10\%$ . . . . . 114

    2.21b La solution exacte et la solution approchée,  $k = 13, \delta = 25\%$ . . . . . 114

2.22 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ . . . . . 115

2.23 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ . . . . . 115

2.24 Solution par PKM  $r = 1.5$  . . . . . 116

    2.24a La solution exacte et la solution approchée,  $k = 205, \delta = 10\%$ . . . . . 116

    2.24b Solution exacte et solution approchée,  $k = 54, \delta = 25\%$ . . . . . 116

2.25 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ . . . . . 117

2.26 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ . . . . . 117

2.27 Solution par PKM  $r = 2$  . . . . . 118

    2.27a Solution exacte et solution approchée,  $k = 761, \delta = 10\%$ . . . . . 118

    2.27b Solution exacte et solution approchée,  $k = 216, \delta = 25\%$ . . . . . 118

2.28 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ . . . . . 119

2.29 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ . . . . . 119

2.30 Reconstruction de  $p(x)$  par l'inversion directe dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, g)$  . . . . . 122

2.31 Héritage de la Condition de Picard Discrète dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, g), i = \overline{1, 15}$  . . . . . 122

2.32  $\mathbf{g}^\delta$  avec un niveau du bruit 10% . . . . . 123

2.33 Héritage de la Condition de Picard Discrète dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, \mathbf{g}^\delta), i = \overline{1, 15}, \delta =$   
 10% . . . . . 123

2.34  $\mathbf{g}^\delta$  avec un niveau du bruit 25% . . . . . 124

2.35 Héritage de la Condition de Picard Discrète dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, \mathbf{g}^\delta), i = \overline{1, 15}, \delta =$   
 25% . . . . . 124

2.36 Solution exacte et solution approchée :  $N = 3, \delta = 10\%$ . . . . . 126

2.37  $Er(N)$  avec un niveau du bruit 10%. . . . . 126

2.38  $\|(I - E_l^m)\mathbf{g}^\delta\|, \delta = 10\%$ . . . . . 127

2.39 Solution exacte et solution approchée :  $N = 3, \delta = 25\%$ . . . . . 127

2.40  $Er(N)$  avec un niveau du bruit 25%. . . . . 128

2.41  $\|(I - E_l^m)\mathbf{g}^\delta\|, \delta = 25\%$ . . . . . 128

2.42 Solution exacte et solution approchée :  $k = 126, \delta = 10\%$ . . . . . 130

2.43 Solution exacte et solution approchée :  $k = 68, \delta = 25\%$ . . . . . 130

2.44 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ . . . . . 131

2.45 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ . . . . . 131

2.46 Projected PKM,  $r = 1, Er(k) = \|p_k^\delta - p\|, k = \overline{1, 1500}$  . . . . . 132

2.47 Solution exacte et solution approchée,  $k = 410, \delta = 10\%$ . . . . . 132

2.48 La solution exacte et la solution approchée :  $k = 229, \delta = 25\%$ . . . . . 133

2.49 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ . . . . . 133

2.50 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ . . . . . 134

2.51 PKM,  $r = 1.5, Er(k) = \|p_k^\delta - p\|, k = \overline{1, 1500}$  . . . . . 134

2.52 Solution exacte et solution approchée :  $k = 1276, \delta = 10\%$ . . . . . 135

2.53 Solution exacte et solution approchée :  $k = 723, \delta = 25\%$ . . . . . 135

2.54 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ . . . . . 136

2.55 Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ . . . . . 136

2.56 PKM,  $r = 2, Er(k) = \|p_k^\delta - p\|, k = \overline{1, 1500}$  . . . . . 137

3.1 Donnée exacte  $\psi_1$  mesurée au point  $Y_1 = 1$ . . . . . 163

3.2 Donnée exacte  $\psi_2$  mesurée au  $Y_2 = 2$ . . . . . 164

3.3 Donnée bruitée  $\psi_1^\delta$ , niveau du bruit = 10%. . . . . 165

3.4 Donnée bruitée  $\psi_2^\delta$ , niveau du bruit = 10%. . . . . 166

3.5 Donnée exacte  $\eta_g$  et donnée bruitée  $\eta_g^\delta$ , niveau du bruit = 10%. . . . . 166

3.6 Donnée exacte  $\eta_f$  et donnée bruitée  $\eta_f^\delta$ , niveau du bruit = 10%. . . . . 167

3.7 Donnée bruitée  $\psi_1^\delta$  niveau du bruit = 25%. . . . . 167

3.8 Donnée bruitée  $\psi_2^\delta$ , niveau du bruit = 25%. . . . . 168

3.9 Donnée exacte  $\eta_g$  et donnée bruitée  $\eta_g^\delta$ , niveau du bruit = 25%. . . . . 168

3.10 Donnée exacte  $\eta_f$  et donnée bruitée  $\eta_f^\delta$ , niveau du bruit = 25%. . . . . 169

3.11  $g_k^\delta$ , itération  $k = 210$  niveau du bruit = 10%. . . . . 171

3.12 Courbe de filtre spectral pour la condition au bord, niveau du bruit = 10%. 172

3.13 Courbe de la convergence  $Er_g(k) = \|g_k^\delta - g\|$ , niveau du bruit = 10%. . . . 172

3.14  $f_k^\delta$ , itération  $k = 210$  niveau du bruit = 10%. . . . . 173

3.15 Courbe de filtre spectral pour la source, niveau du bruit = 10%. . . . . 173

3.16 Courbe de la convergence  $Er_f(k) = \|f_k^\delta - f\|$ , niveau du bruit = 10%. . . . 174

3.17	$g_k^\delta$ , itération $k = 60$ niveau du bruit = 25%. . . . .	174
3.18	Courbe de filtre spectral pour la condition au bord, niveau du bruit = 25%. . . . .	175
3.19	Courbe de la convergence $Er_g(k) = \ g_k^\delta - g\ $ , niveau du bruit = 25%. . . . .	175
3.20	$f_k^\delta$ , itération $k = 60$ niveau du bruit = 25%. . . . .	176
3.21	Courbe de filtre spectral pour la source, niveau du bruit = 25%. . . . .	176
3.22	Courbe de la convergence $Er_f(k) = \ f_k^\delta - f\ $ , niveau du bruit = 25%. . . . .	177
3.23	Condition au bord exacte $g(x, y) = (\pi - x)x(\pi - y)y$ . . . . .	179
3.24	Source exacte $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ . . . . .	179
3.25	Donnée exacte $\psi_1$ à $Z_1 = 1$ . . . . .	180
3.26	Donnée exacte $\psi_2$ à $Z_2 = 1.5$ . . . . .	180
3.27	Donnée exacte $\eta_g = K_\alpha(Z_2)\psi_1 - K_\alpha(Z_1)\psi_2$ . . . . .	181
3.28	Donnée exacte $\eta_f = S_\alpha(Z_2)\psi_1 - S_\alpha(Z_1)\psi_2$ . . . . .	181
3.29	Donnée bruitée $\psi_1^\delta$ niveau du bruit = 1%. . . . .	182
3.30	Donnée bruitée $\psi_2^\delta$ niveau du bruit = 1%. . . . .	182
3.31	Donnée bruitée $\psi_1^\delta$ niveau du bruit = 10%. . . . .	183
3.32	Donnée bruitée $\psi_2^\delta$ niveau du bruit = 10%. . . . .	183
3.33	Donnée bruitée $\psi_1^\delta$ niveau du bruit = 25%. . . . .	184
3.34	Donnée bruitée $\psi_2^\delta$ niveau du bruit = 25%. . . . .	184
3.35	$g_k^\delta$ , itération $k = 300$ , niveau du bruit = 1%. . . . .	185
3.36	$ g_k^\delta - g $ , itération $k = 300$ , niveau du bruit = 1%. . . . .	186
3.37	$f_k^\delta$ , itération $k = 300$ , niveau du bruit = 1%. . . . .	186
3.38	$ f_k^\delta - f $ , itération $k = 300$ , niveau du bruit = 1%. . . . .	187
3.39	$g_k^\delta$ , itération $k = 200$ , niveau du bruit = 10%. . . . .	187
3.40	$ g_k^\delta - g $ , itération $k = 200$ , niveau du bruit = 10%. . . . .	188
3.41	$f_k^\delta$ , itération $k = 200$ , niveau du bruit = 10%. . . . .	188
3.42	$ f_k^\delta - f $ , itération $k = 200$ , niveau du bruit = 10%. . . . .	189
3.43	$g_k^\delta$ , itération $k = 150$ , niveau du bruit = 25%. . . . .	189
3.44	$ g_k^\delta - g $ , itération $k = 150$ , niveau du bruit = 25%. . . . .	190
3.45	$f_k^\delta$ , itération $k = 150$ , niveau du bruit = 25%. . . . .	190
3.46	$ f_k^\delta - f $ , itération $k = 150$ , niveau du bruit = 25%. . . . .	191

---

## Liste des tableaux

2.1	Résultats numériques pour la méthode de troncature . . . . .	106
2.2	Résultats numériques pour les itérations de Kozlov-Maz'ya. . . . .	110
2.3	Résultats numériques pour les itérations de Kozlov-Maz'ya préconditionné. . . . .	113
2.4	Résultats numériques pour la méthode de troncature sur les valeurs de <b>Ritz</b> . . . . .	125
2.5	Résultats numériques des itérations de Kozlov-Maz'ya préconditionné projetées dans $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, g^\delta)$ . . . . .	129
3.1	Résultats numériques pour la méthode itérative. . . . .	171
3.2	Résultats numériques pour la méthode itérative 2-ième exemple. . . . .	185

---

# *Introduction*

## Thématique de la thèse

La problématique abordée dans cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'analyse numérique des problèmes inverses et mal-posés en EDP.

En 1923, le mathématicien français J. Hadamard écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique. Cet ouvrage fût le point de départ au développement du concept de problème bien posé en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, elle est unique et elle dépend continûment des données (stabilité). Dans ce même livre<sup>1</sup> Hadamard laissait entendre (et c'était aussi une opinion partagée avec I.G. Petrovsky<sup>2</sup>) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique.

La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes pratiques est reconnu et manifeste dans une classe de problèmes très larges, dite "Problèmes inverses", et motive de nombreuses recherches en mathématiques [40].

Les problèmes inverses<sup>3</sup> constituent un domaine très vaste pour que nous puissions en donner un exposé exhaustif. Cette thématique a connu un essor considérable ces dernières décennies, parallèlement au développement de techniques numériques et de moyens de calcul permettant leur résolution. On peut les classer en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes

---

1. J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear PDEs, Yale University Press, New Haven (1923).

2. I.G. Petrovsky, Lecture on Partial Differential Equations, New York : International Publishers (1954).

3. Un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

La thématique des problèmes inverses et en particulier leurs méthodes de traitement numérique qui sont d'une grande importance pour les sciences appliquées et la technologie; elles sont cruciales pour le développement des techniques de mesure et de diagnostic pour des systèmes complexes et partiellement accessibles.

L'analyse numérique des problèmes inverses et des problèmes mal-posés est un champ de recherche en plein essor. Même si des grandes avancées ont été effectuées ces dernières années, de nombreuses questions restent encore posées et méritent un effort sérieux pour aboutir à des réponses même partielles [56],[57].

Les questions qui nous intéressent dans cette thèse sont centrées autour de la régularisation de certains problèmes inverses en EDP du type "identification de sources et de complétion de données" et leurs méthodes d'approximation numérique.

Lorsqu'il s'agit d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir des observation (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du problème direct). Cette inversion, qui est souvent mal posée, nécessite un traitement particulier des instabilités, par des techniques dites de régularisation qui consistent à perturber légèrement le problème, ou d'éliminer les hautes fréquences responsables de cette instabilité, de manière à rendre le problème en question bien posé et numériquement réalisable [40].

**Contribution de la thèse :** Dans ce travail, on étudie une classe de problèmes inverses du type " complétion de données et identification de sources"> dans un cadre abstrait. Les modèles physiques sont donnés par deux problèmes de Cauchy : le premier est engendré par une équation de Goursat avec une variable temporelle bidimensionnelle, et le second est du type elliptique généralisé défini sur une bande infinie. Ces problèmes sont qualifiés de mal posés au sens d'Hadamard et de nature instables. Les solutions, lorsqu'elles existent, ne dépendent pas de manière continue des données, de sorte qu'une petite erreur sur ces dernières peut induire des erreurs importantes sur les solutions calculées.

**Problème elliptique généralisé :** Le modèle elliptique généralisé (**diffusion relaxée**) a été étudié récemment par R. Sassane *et all* [122] dont l'objectif est de déterminer une condition au bord inconnue en utilisant une stratégie de régularisation itérative. Notre étude est une extension de ce qui a été développée dans le travail [122] et la thèse [123]. Plus précisément, notre étude consiste à déterminer deux inconnues : le terme source et la condition au bord. On mentionne aussi que dans la littérature mathématique des problèmes mal-posés, il n'y a que trois travaux dans cette direction [122] (problème inverse), [130] (problème inverse) et [132] (problème direct bien posé).

Cette étude nous ramène à la résolution d'un système d'équations à deux inconnus et à la manipulation d'une matrice d'opérateurs, ce qui rend le calcul analytique un peu complexe. De plus, le choix du paramètre de régularisation (*i.e.*, le nombre de l'itération  $k$ ) nécessite une étude minutieuse du comportement du filtre spectral associé à cette méthode, pour bien sectionner le paramètre  $k$  qui réalise la convergence de deux processus itératifs simultanément. Une étude proche à la notre est donnée dans le travail [118] pour un problème de la chaleur fractionnaire. D'où la motivation théorique et numérique de ce volet de recherche.

**Problème de Goursat :** Dans les équations classiques d'évolution, la variable spatiale est multidimensionnelle et la variable temporelle est unidimensionnelle. Mais récemment, une nouvelle idée est apparue : les modèles mathématiques de certains phénomènes naturels peuvent être formulés au moyen d'EDP d'évolution multitemporelle. Le terme "multi-temps" a été introduit en physique par Dirac, Fock et Podolsky en 1932 [32], en considérant les fonctions d'ondes multitemporelles décrites par des EDP d'évolution non classiques. Une formulation mathématique à plusieurs variables temporelles a été aussi étudiée par Friedman et Littman (1962 [44]).

Dans la littérature, ces problèmes sont rencontrés dans divers modèles de la science et de la technologie, en particulier la mécanique, la physique [6, 7], la biomathématique et la cosmologie, voir par exemple les travaux de Baez, Segal et Zhou [4, 63, 64, 134] et dans les modèles de diffusion des polluants dans les rivières [77], les modèles de la dynamique biologique de populations structurées en âge [84, 139], la finance mathématique [43]. Dans ces modèles, l'une des variables temporelles est le temps habituel et les autres peuvent

désigner diverses quantités, la température, l'âge ou la taille des individus de la population biologique.

Cependant, les problèmes non classiques pour les problèmes inverses abstraits de Goursat avec deux variables temporelles ne sont pas largement étudiés. Notre contribution ici est une continuité dans cette direction en s'inspirant des travaux développés par N. Boussetila et F. Rebbani [15] et de E.M. Aksen [2]. Pour plus de détails sur ce sujet ainsi que les difficultés engendrées par ces équations, on renvoie le lecteur aux références [16] et [142]. On note ici que la méthode de régularisations proposée par ces auteurs est basée sur la méthode de quasi-réversibilité et cible uniquement la partie analytique du problème.

Pour ce volet, on présente une technique de réduction matricielle pour calculer les solutions régularisées après la semi-discrétisation du problème par rapport à la variable spatiale. Le problème semi-discrétisé nous ramène à calculer numériquement l'action d'un produit d'une fonction à argument matriciel et un vecteur. Pour réaliser ce calcul, on emploie une méthode de projection de krylov préconditionnée (shift-invert). On doit mentionner ici que cette technique a été introduite par **Lars Eldén & Valeria Simoncini** [38], où ils ont calculé numériquement la solution régularisée par la méthode de troncature spectrale pour un problème inverse elliptique (reconstruction d'une donnée frontière pour un domaine cylindrique) en projetant la solution discrète sur un espace de Krylov rationnel  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, b^\delta)$ . Le critère d'arrêt proposé dans notre investigation est totalement différent de celui utilisé dans [38], en outre, la projection de la solution régularisée par la procédure de **Kozlov-Maz'ya** est nouvelle dans la thématique des problèmes mal posés en EDP. D'où la motivation de ce travail, mais il reste une question très délicate pour évaluer l'erreur entre les solutions exactes et les solutions discrètes projetées, qui mérite d'être abordée. Cette difficulté vient du fait que dans la résolution des problèmes **mal posés**, on est confronté à la manipulation d'une fonction  $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui explicite la solution recherchée. Cette dernière possède généralement des singularités proches du spectre de la matrice  $A$ , de plus elle est croissante, ce qui rend l'estimation d'erreur entre  $\Phi(A)b$  et son approximation dans le sous-espace de **Krylov** très complexe. Pour cette raison, cette question n'est pas encore développée d'une manière globale et les seuls résultats qui existent dans la littérature sont donnés dans la thèse d'Ousmane Samba Coulibaly [30] et dans le travail de

Lars Eldén et Valeria Simoncini [38].

Dans cette thèse, notre effort sera consacré à l'aspect numérique d'une classe de problèmes inverses non classiques. La stratégie numérique emploie trois procédures de régularisation : la méthode *itérative de Kozlov-Mazyra*, la méthode de *troncature spectrale* et les méthodes de *projection de Krylov*. C'est une extension de la série des travaux développés par notre groupe de recherche IIPP (LMA-Annaba) [17],[21],[90], [89], [94] et [141].

## Contenu de la thèse

Cette thèse porte sur l'étude théorique et numérique d'une classe de problèmes inverses en EDP. Elle est composée de trois chapitres.

Dans le **Chapitre 1**, on rappelle quelques résultats préliminaires d'analyse fonctionnelle et de théorie spectrale, ainsi que les notions de base des problèmes mal posés et leurs méthodes de régularisation. On donne aussi quelques résultats connus d'analyse numérique matricielle.

Le **Chapitre 2** est consacré à la régularisation et l'approximation numérique d'un problème inverse de sources engendré par un problème de Goursat à deux variables temporelles. Pour stabiliser le problème en question, on propose deux stratégies de régularisation : la première est une variante de la méthode itérative de Kozlov-Mazyra, et la seconde repose sur la méthode de projection de Krylov. On donne l'analyse théorique (convergence, estimations d'erreur) de ces deux approches de régularisation accompagnée par une série de tests numériques justifiant les résultats théoriques obtenus et les critères d'arrêt a priori et a posteriori.

Quant au **chapitre 3**, on continue dans la même direction en considérant un problème inverse avec deux inconnus (le terme source et la condition au bord), engendré par un problème elliptique généralisé. Dans ce volet, on propose une méthode itérative alternative de type Kozlov-Mazyra pour reconstruire les données manquantes. On donne l'analyse théorique (convergence, estimations d'erreur) de cette approche de régularisation accompagnée par une série de tests numériques justifiant les résultats théoriques obtenus et les critères d'arrêt a priori basé sur le filtre spectral et le niveau du bruit.

---

## Résultats préliminaires et notations

*Je vais me préparer et un jour ma chance viendra.  
- Abraham Lincoln*

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données [22, 23].

On se place dans un cadre hilbertien  $(H_1 \longrightarrow H_2)$ , où  $H_i$  est un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , muni de la norme  $|\cdot|_i$  et le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_i$ , ( $i = 1, 2$ ).

### 1.1 Éléments de théorie spectrale

#### 1.1.1 Opérateurs linéaires

De manière générale, un opérateur linéaire est une application  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$  linéaire, où  $\mathcal{D}(A)$  est le domaine de définition de l'application linéaire  $A$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $H_1$ , que l'on suppose en général dense dans  $H_1$ . L'opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$  est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ |Au|_{H_2}, u \in \mathcal{D}(A), |u|_{H_1} = 1 \}$$

---

est finie. Dans ce cas  $A$  est une application linéaire continue sur  $\mathcal{D}(A)$ , et lorsque  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans  $H_1$ ,  $A$  s'étend de manière unique à un opérateur borné sur  $H_1$ .

- Tout opérateur  $A$  est complètement défini par son graphe  $\mathbf{G}(A)$  qui est un sous-espace vectoriel de  $H_1 \times H_2$  défini par  $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$ .

Pour tout opérateur linéaire  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$ , on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A),$$

$$\mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A).$$

### 1.1.2 Opérateurs bornés

On note  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  (resp.  $\mathcal{L}(H_1)$ ) l'espace vectoriel des *opérateurs linéaires continus* de  $H_1$  dans  $H_2$  (resp. des *endomorphismes continus* de  $H_1$ ) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{|Bu|_2}{|u|_1}.$$

**Définition 1.1.1.** On dit qu'une application linéaire continue  $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est *inversible* ssi il existe une application  $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application  $S'$  si elle existe est unique.

On notera  $S' = S^{-1}$  et  $\mathbf{Inv}(H_1, H_2) := \{S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), S \text{ inversible}\}$ .

**Théorème 1.1.1. [Théorème des isomorphismes de Banach]** Toute bijection linéaire continue  $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est *inversible*.

**Définition 1.1.2.** Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ . On appelle *ensemble résolvant* de  $A$ , l'ensemble

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible (} \iff \text{ bijectif) } \right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de  $A$  et sera noté

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

On appelle *rayon spectral* (noté  $\text{spr}(A)$ ) la borne supérieure du spectre en module, *i.e.*,

$$\text{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

► Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.

Le spectre ponctuel de  $A$  (noté  $\sigma_p(A)$ ) est l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $A_\lambda$  soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff \mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément  $\lambda \in \sigma_p(A)$  est dit valeur propre de  $A$ , il lui correspond un  $h \in H$ ,  $h \neq 0$ , tel que  $Ah = \lambda h$ , que l'on appelle vecteur propre correspondant à  $\lambda$ .

**Définition et Proposition 1.1.1.** Soit  $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Alors il existe un unique opérateur  $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ , appelé adjoint de  $S$ , qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^*h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1, \quad \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\|S\| = \|S^*\|, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si  $S$  est bijectif ( $\implies$  inversible), alors  $S^*$  l'est aussi, et  $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$ .

**Définition 1.1.3.** Soit  $H$  un espace de Hilbert. On dit que  $A \in \mathcal{L}(H)$  est *auto-adjoint* si  $A = A^*$ .

$$A = A^* \iff (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

### 1.1.3 Opérateurs non-bornés

**Définition 1.1.4.** On dit qu'un opérateur  $A$  est fermé si son graphe  $G(A)$  est fermé dans  $H_1 \times H_2$ , *i.e.*, pour toute suite  $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$  telle que  $u_n \longrightarrow u$  dans  $H_1$  et  $Au_n \longrightarrow v$  dans  $H_2$ , alors  $u \in \mathcal{D}(A)$  et  $v = Au$ .

► L'opérateur fermé  $A$  peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition  $\mathcal{D}(A)$  muni de la norme du graphe ( $\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$ ) dans  $H_1$ .

**Théorème 1.1.2.** [Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé  $A$  est défini sur tout l'espace  $H_1$ , alors  $A$  est borné

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = H_1 \implies A \text{ borné}).$$

**Définition et Proposition 1.1.2.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$  un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné  $A^*$  adjoint de l'opérateur  $A$ , comme suit :

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H_2 \longrightarrow H_1$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\|_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \right\}.$$

Dans ce cas la fonctionnelle  $u \longmapsto g(u) = \langle v, Au \rangle$  elle se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire  $f : H_1 \longrightarrow \mathbb{K}$  telle que  $|f(u)| \leq c \|u\|_{H_1}, \quad \forall u \in H_1$ . Par suite  $f \in H_1' \simeq H_1$ . On a par conséquent la relation fondamentale qui lie  $A$  et  $A^*$

$$\langle v, Au \rangle_{H_2} = \langle A^*v, u \rangle_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

► Si  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$  est un opérateur non-borné à domaine dense, alors  $A^*$  est fermé.

**Définition 1.1.5.** On dit qu'un opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A), \quad \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

**Définition 1.1.6.** L'opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  est dit auto-adjoint si  $A = A^*$ , i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ et } \langle v, Au \rangle = \langle Av, u \rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

**Théorème 1.1.3.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  un opérateur fermé symétrique.  $A$  est auto-adjoint si et seulement si  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Théorème 1.1.4.** [Caractérisation des opérateurs à image fermé]

Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$  un opérateur non-borné, fermé, avec  $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $\mathbf{R}(A)$  est fermé, (ii)  $\mathbf{R}(A^*)$  est fermé, (iii)  $\mathbf{R}(A) = \mathbf{N}(A^*)^\perp$ , (iv)  $\mathbf{R}(A^*) = \mathbf{N}(A)^\perp$ .

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

**Théorème 1.1.5.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$  un opérateur non-borné, fermé, avec  $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_2$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a)  $A$  est surjectif, i.e.,  $\mathbf{R}(A) = H_2$ ,  
 (b) il existe une constante  $k > 0$  telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

- (c)  $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$  et  $\mathbf{R}(A^*)$  est fermé.

**Corollaire 1.1.1.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$  un opérateur non-borné, fermé, avec  $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$ .

L'opérateur  $A$  admet un inverse borné  $A^{-1}$  sur  $H_2$  si et seulement s'il existe deux constantes  $m_1$  et  $m_2$  telles que

$$|u| \leq m_1 |Au|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A),$$

$$|v| \leq m_2 |A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

### 1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  un opérateur non borné que l'on suppose fermé<sup>1 2 3</sup> et à domaine dense.

**Définition 1.1.7.** On appelle *ensemble résolvant* de  $A$ , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le *spectre* de  $A$  et sera noté  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ .

- 
1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
  2. Si  $A$  n'est pas fermé, alors  $\rho(A) = \emptyset$ .
  3. Si  $A = A^*$ , alors  $\sigma(A) \neq \emptyset$  et  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

• On note que si  $\lambda \in \rho(A)$ , l'inverse  $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$  est défini sur tout l'espace et est fermé. Par le théorème du graphe fermé, il est borné, i.e.,  $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ . Cet opérateur est appelé la *résolvante* de  $A$ .

• L'ensemble résolvant  $\rho(A)$  est un ouvert du plan complexe et l'application  $\rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda; A)$  est analytique sur chaque composante connexe de  $\rho(A)$ . La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1; A)R(\lambda_2; A).$$

• Le spectre de  $A$  est donc un fermé de  $\mathbb{C}$ , et si de plus l'opérateur  $A$  est borné, alors  $\sigma(A)$  est un compact non vide.

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

• Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Un élément  $\lambda$  de  $\sigma_p(A)$  est dit *valeur propre* de  $A$ , il lui correspond un  $0 \neq \vartheta \in \mathcal{D}(A)$  tel que  $A_\lambda \vartheta = 0$ , que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand  $H$  est un espace de fonctions) correspondant à  $\lambda$ .

• Si  $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$  donc  $A_\lambda$  est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :

- Si  $\mathbf{R}(A_\lambda)$  n'est pas dense, on dit alors que  $\lambda \in \sigma_r(A)$  le spectre *résiduel* de  $A$ .
- Si  $\mathbf{R}(A_\lambda)$  est dense, on dit alors que  $\lambda \in \sigma_c(A)$  le spectre *continu* de  $A$ .

### 1.1.5 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

**Définition 1.1.8.** On dit qu'un opérateur  $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est **compact** si  $K(B_{H_1}(0, 1))$  est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par  $\mathcal{K}(H_1, H_2)$  l'ensemble des opérateurs compacts de  $H_1$  dans  $H_2$  et on pose  $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$ .

► La compacité d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \iff \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightarrow 0 \text{ (faiblement)} \implies Tx_n \rightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

- Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach. Si  $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$  (resp.  $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$  et  $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ ), alors  $S_2 S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$ .
- [Théorème de Schauder] Si  $K$  est compact, alors  $K^*$  est compact. Et réciproquement.

**Théorème 1.1.6.** Soit  $K \in \mathcal{K}(H)$  avec  $\dim(H) = \infty$ . Alors on a :

- (a)  $0 \in \sigma(K)$ ,
- (b)  $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ ,
- (c) l'une des situations suivantes :
- ou bien  $\sigma(K) = \{0\}$ ,
  - ou bien  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  est fini,
  - ou bien  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  est une suite qui tend vers 0.

**Théorème 1.1.7.** On suppose que  $H$  est séparable. Soit  $T \in \mathcal{K}(H)$  un opérateur auto-adjoint compact. Alors  $H$  admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$  :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad Tx = \sum_{k \geq 1} \lambda_k e_k,$$

où  $x_0 \in \mathbf{N}(A)$ .

**Définition 1.1.9.** Soient  $H_1, H_2$  deux espaces de Hilbert séparables et  $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ . On appelle valeur singulière de l'opérateur  $T$ , le réel positif  $s = \sqrt{\lambda}$ , où  $\lambda$  est une valeur propre de l'opérateur  $K = T^*T : H_2 \rightarrow H_2$ .

**Théorème 1.1.8. [Décomposition en valeurs singulières (SVD)]** Soit  $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$  et  $\mathbb{P}_0$  la projection orthogonale sur  $\mathbf{N}(T)$ . Alors il existe une suite de valeurs singulières  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0$  et deux systèmes orthonormés  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$  telles que :

$$T\varphi_k = s_k\psi_k, \quad T^*\psi_k = s_k\varphi_k,$$

$$h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k) \varphi_k + \mathbb{P}_0 h, \quad Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k) \psi_k.$$

Le système  $\{(s_k, \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$  est dit **système singulier** de  $T$ .

### 1.1.6 Famille spectrale et résolution de l'identité

- Version discrète

**Définition 1.1.10.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  un opérateur non borné. Alors  $A$  est dit à *résolvante compacte* si

$$\forall \lambda \in \rho(A), \quad R(\lambda; A) \in \mathcal{K}(H).$$

On a le résultat suivant :

**Théorème 1.1.9.** Un opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  est à résolvante compacte ssi il existe  $\mu \in \rho(A)$  tel que  $R(\mu; A) \in \mathcal{K}(H)$ .

**Théorème 1.1.10.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  un opérateur auto-adjoint. Alors

- (1)  $\sigma_r(A) = \emptyset$ ,
- (2)  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$ ,
- (3)  $A \geq \theta \iff \sigma(A) \subset [\theta, \infty[$ .

**Théorème 1.1.11.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors  $A$  est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans  $H$ ,  $(e_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$ , et une suite de réels  $(\lambda_m)_{m \geq 1}$  telles que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \longrightarrow +\infty, \quad Ae_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

De plus, les valeurs propres  $(\lambda_m)$  admettent la caractérisation (formule de min-max de Courant-Fisher) suivante :

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(\mathcal{D}(A))} \max_{0 \neq u \in V_m} \frac{\langle Au, u \rangle}{|u|^2},$$

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(H)} \min_{0 \neq u \in V_{m-1}^\perp \cap \mathcal{D}(A)} \frac{\langle Au, u \rangle}{|u|^2},$$

où  $\mathcal{V}_m(\mathcal{D}(A)) := \{V \text{ s.e.v. de } \mathcal{D}(A) \text{ tq } \dim(V) = m\}$ ,  $\mathcal{V}_{m-1}(H) := \{V \text{ s.e.v. de } H \text{ tq } \dim(V) = m - 1\}$ .

**Remarque 1.1.1.** Si  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$  est un opérateur auto-adjoint avec  $A \geq \theta > 0 \implies 0 \in \rho(A)$ , et l'injection  $H^1 := (\mathcal{D}(A), |\cdot|_G) \hookrightarrow H$  est compacte, alors  $A$  est à résolvante compacte et donc diagonalisable.

- Version continue

**Définition 1.1.11.** Une famille  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  de projections orthogonales dans  $H$  est appelée *famille spectrale*<sup>4 5</sup> ou encore *résolution de l'identité* si elle satisfait aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E_\lambda E_\mu = E_{\inf(\lambda, \mu)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I, \\ \text{où } E_{-\infty}h = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda h, \quad E_{+\infty}h = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda h, \quad h \in H, \\ (iii) \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda \text{ où } E_{\lambda+0}h = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon}h, \quad h \in H. \end{array} \right.$$

Les limites sont prises au sens de la norme de  $H$ .

**Théorème 1.1.12.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur auto-adjoint dans  $H$ . Alors il existe une famille spectrale  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  telle que

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda x, y), \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x.$$

On note symboliquement  $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ .

**Théorème 1.1.13.** Soit  $\lambda \mapsto f(\lambda)$  une fonction continue à valeurs réelles. Soit  $\mathcal{D} \subset H$  défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ h \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty \right\}.$$

Alors  $\mathcal{D}$  est dense dans  $H$  et on définit un opérateur auto-adjoint  $S$  dans  $H$  par :

$$(Sx, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E_\lambda x, y), \quad x \in \mathcal{D}, y \in H,$$

de domaine  $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}$ .

4. Pour une bonne compréhension de la théorie des opérateurs auto-adjoints, on cite le joli livre de DENISE HUET : Décomposition spectrale et opérateurs, PUF, (1976).

5. Le livre de R. DAUTRAY & J.-L. LIONS, Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].

### Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert  $H$ ,  $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ ,  $\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$ , sa décomposition spectrale.

**Définition 1.1.12.** On définit :

- Les puissances de  $A$ .

$$A^r = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathcal{D}(A^r) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

On note ici, que pour tout  $r \leq 0$ ,  $A^r \in \mathcal{L}(H)$ , et si  $r = 0$ ,  $A^0 = I$ .

Pour tout  $r \geq 0$  et pour tout  $h \in \mathcal{D}(A^r)$ , on a  $(A^r h, h) \geq \lambda_0^r |h|^2$ .

Pour tout  $r \geq 0$ ,  $\mathcal{D}(A^r)$  muni de la norme  $|h|_r^2 = |A^r h|^2$ ,  $h \in \mathcal{D}(A^r)$ , est un espace de Hilbert.

Si  $0 \leq r_1 \leq r_2$ ,  $\mathcal{D}(A^{r_2}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^{r_1})$  et  $\mathcal{D}(A^{r_2})$  est dense dans  $\mathcal{D}(A^{r_1})$ .

- $f(A)$  pour une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(A) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda, \quad h \in \mathcal{D}(f(A)) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

## 1.2 Problèmes inverses et problèmes mal-posés

### □ Problèmes directs en EDP

Etant donné un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , on s'intéresse aux solutions  $u$  :

$\Omega \times [0, \infty[ \ni (x, t) \longrightarrow u(x, t) \in E$  de

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g_i, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

### □ Problèmes inverses en EDP

A partir d'une connaissance partielle de la solution  $u$  de l'EDP (mesures internes, mesures frontières), retrouver :

- $f, g_1, \dots, g_q \longrightarrow$  Identification de sources.
- $u_0 \longrightarrow$  Identification de données initiales.
- $F \longrightarrow$  Identification de coefficients.
- $\Omega \longrightarrow$  Identification géométrique.

► Toute problématique directe génère une famille de problèmes inverses.

On peut classer les problèmes inverses en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de problèmes inverses, l'objectif fixé est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement **mal posé**<sup>6</sup>.

### □ Formulation abstraite

On peut toujours écrire un problème inverse sous une formulation vectorielle abstraite (input-output).

**Définition 1.2.1.** [Hadamard 1923] Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, et  $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$  un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse  $Ax = y$  est **bien posé** au sens de Hadamard si

**Existence** : Pour tout  $y \in Y$  il existe  $x \in X$  tel que  $Ax = y$ .

**Unicité** : Pour tout  $y \in Y$ , il y a au plus une solution  $x \in X$ .

**Stabilité** : La solution  $x$  dépend continûment de la donnée  $y$ .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

6. Alors que les mêmes causes provoquent les mêmes effets, des effets identiques peuvent avoir de multiples causes : les problèmes inverses sont **mal posés**.

Le choix des espaces de départ et d'arrivée  $X$  et  $Y$  est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

**Remarque 1.2.1.** La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

**Définition 1.2.2. [Lavrentiev 1959] (Stabilité conditionnelle)** Soit  $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$  un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème  $Ax = y$  est *conditionnellement stable* (ou *correct* au sens de Tikhonov) sur  $M \subset D(A)$  s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega\left(\|Ax_2 - Ax_1\|\right), \quad \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble  $M$  est appelée ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de  $u$  à  $M$  signifie certaine régularité ou certaine bornitude vérifiée par la solution  $u$ .

### 1.2.1 Exemples de problèmes mal posés

**Exemple 1.2.1. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin(x/\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ . On vérifie aisément que  $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \sin(x/\varepsilon)$  est une solution du problème (1.2.1). On remarque que  $(\varphi_\varepsilon \longrightarrow 0, \varepsilon \longrightarrow 0)$  mais  $(u_\varepsilon(x, y) \longrightarrow \infty, \varepsilon \longrightarrow 0)$  pour tout  $x > 0$  fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.2.1) ne dépendent pas continûment des données initiales.<sup>7 8</sup>

7. Les équations elliptiques avec des conditions manquantes (lorsqu'il y a des zones inaccessible à la mesure) sont des problèmes instables.

8. Pour plus de détails, on cite les travaux :

**Exemple 1.2.2. Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur.** Trouver  $u(x, 0) = u_0(x)$  (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température  $u(x, t)$  vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (BCP)$$

où  $\psi \in L_2(0, \pi)$  une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où  $\psi_n$  est le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $\psi$  :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit  $\varphi(x) = u_0(x, 0)$  la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que  $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$  mais

$$\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty.$$

---

L. BOURGEOIS, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **22** (2006), 413-430.

L. BOURGEOIS, *Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **21** (2005), No. 3, 1087-1104.

On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc **mal posé**. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initial  $u(x, 0) = \varphi(x) \in L_2(0, \pi)$  est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi,  $u$  est solution du problème (BCP) ssi  $\varphi$  satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K}\varphi = \psi, \quad u(x, T) = \int_0^{\pi} K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{où } K(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(n\xi).$$

L'opérateur intégral  $\mathcal{K}$  est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où  $\mathcal{K}^{-1}$  n'est pas borné. Ce qui montre le caractère **mal posé** du problème (BCP).

**Exemple 1.2.3. Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases} \quad (HCP)$$

où  $\varphi, \psi$  sont des fonctions données dans  $H$ , et  $A : \mathcal{D}(A) : H \rightarrow H$  tel que  $A = A^*$  et  $A \geq \delta > 0$ .

Si  $\lambda_k = (k\pi)^2/T^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , ne sont pas des valeurs propres de  $A$ , alors l'opérateur  $\left( \sin(T\sqrt{A}) \right)$  est injectif, et la solution formelle du problème (HCP) est donnée par :

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A}) \left( \sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \psi + \sin(t\sqrt{A}) \left( \sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \varphi.$$

Inversement, si  $\left\{ \lambda_k = (k\pi)^2/T^2, k = 1, 2, \dots \right\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$ , alors la solution du problème (HCP) **n'est pas unique**. Cependant, le problème (HCP) est **mal posé** au sens d'Hadamard dans les deux cas : les valeurs  $\lambda_k = (k\pi/T)^2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , peuvent être

proches des valeurs propres de  $A$  :

$$[\delta, +\infty[ \ni \lambda \mapsto \frac{1}{\sin(T\sqrt{\lambda})} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

► On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

**1 La non unicité.** Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

**2 L'instabilité.** Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. Engel [40]).

Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement **mal posés** ou faiblement **mal posés**.

Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant :

Soient  $H_1, H_2$  deux espaces de Hilbert séparables,  $\mathbb{T} \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ , et soit l'équation :

$$K : H_1 \longrightarrow H_2, \quad u \longrightarrow Ku = v. \quad (E)$$

On dit que le problème  $(E)$  est *faiblement mal posé* (resp. *fortement mal posé*), si les valeurs singulières  $s_n$  de  $K$  sont équivalentes à  $\frac{C}{n^p}$  (resp.  $Ce^{-n^p}$ ), où  $C$  et  $p$  sont des constantes positives.

### 1.2.2 Méthodes de régularisation

Considérons un opérateur inverse  $Kh_1 = h_2$  où  $K : H_1 \rightarrow H_2$  est un opérateur compact injectif.<sup>9</sup> On suppose que  $h_2 \in \mathbf{R}(K)$ , *i.e.*, le problème inverse possède une solution unique.<sup>10</sup>

**Définition 1.2.3.** Une famille d'opérateurs linéaires bornés  $R_\alpha : H_2 \rightarrow H_1$ , ( $\alpha > 0$ ) est dite "*famille régularisante*" pour l'opérateur  $K$  si

$$\forall h_1 \in H_1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K)h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \rightarrow I \text{ simplement.}$$

**Remarque 1.2.2.** Si  $R_\alpha$  est une famille régularisante pour l'opérateur  $K : X \rightarrow Y$ , où  $X$  est de dimension infinie, alors les opérateurs  $R_\alpha$  ne sont pas uniformément bornés, *i.e.*, il existe une suite  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$ .

La donnée initiale  $y \in Y$  n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons  $y_\eta$  la donnée perturbée où le nombre  $\eta > 0$  est le niveau du bruit, *i.e.*,  $|y - y_\eta| \leq \eta$ .

Notons  $x_{\alpha,\eta} = R_\alpha y_\eta$  l'approximation de la solution du problème inverse  $Kx = y$  obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur  $|x - x_{\alpha,\eta}|$  on obtient

$$|x - x_{\alpha,\eta}| = |(x - R_\alpha y) + (R_\alpha y - x_{\alpha,\eta})| \leq \eta \|R_\alpha\| + |(x - R_\alpha y)|. \quad (1.2.2)$$

Le premier terme de droite de l'équation 1.2.2 représente la majoration de l'erreur due au niveau du bruit. Par la Remarque 1.2.2, nous avons vu que  $\|R_\alpha\| \rightarrow +\infty$  quand  $\alpha \rightarrow 0$ . Il ne faut donc pas choisir  $\alpha$  **trop petit** sinon l'erreur peut devenir **très grande**. Par contre le second terme de droite de 1.2.2 tend vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0 par définition de  $R_\alpha$ . Nous allons faire tendre le niveau du bruit  $\eta$  vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution

9. Le fait de choisir  $K$  injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace  $H_1$  au complément orthogonal de  $\mathbf{N}(K)$ , où  $\mathbf{N}$  désigne le noyau.

10. Il faut noter que notre problème  $Kh_1 = h_2$  inverse est toujours **mal posé** à cause de la non continuité de  $K^{-1}$ .

$x$ .

**Définition 1.2.4.** Une stratégie de régularisation  $\eta \mapsto \alpha(\eta)$  est admissible si pour tout  $x \in X$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(\eta) = 0 \text{ et } \lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \sup_{y_\eta \in Y} \left\{ |R_{\alpha(\eta)} y_\eta - x| \text{ tel que } |Kx - y_\eta| \leq \eta \right\} \right) = 0. \quad (1.2.3)$$

Plusieurs exemples de stratégies de régularisation admissibles se trouvent dans le livre [40].

## 1.3 Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est passé de la formulation mathématique pure aux applications et il a été utilisé pour modéliser de nombreux phénomènes physiques dans divers domaines [96, 101, 120].

Les dérivées fractionnaires et les dérivées d'ordre entier sont des opérateurs linéaires. Mais, les dérivées d'ordre entier sont des opérateurs locaux et les dérivées fractionnaires sont des opérateurs non locaux. Ce qui fait est un outil qui peut servir à la description et la modélisation de certains phénomènes de la physique, la chimie, la biologie, l'ingénierie mécanique, le traitement du signal et l'identification des paramètres, l'électrotechnique, la théorie du contrôle, la finance et la dynamique de changement de phases [93, 109].

### 1.3.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

On commence par la formule qui donne les primitives successives d'une fonction continue. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, on sait que la primitive de  $f$  est donnée par :

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Pour une primitive seconde, on aura :

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^x f(t) dt ds = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

Par itération, on obtient :

$$I_a^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre  $\alpha$  réel positif et on remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma, on aura la définition suivante :

**Définition 1.3.1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, on définit l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville de  $f$  comme suit :

$$I_a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

**Remarque 1.3.1.** 1. l'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme suit :

$$I_b^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

2. Pour  $\alpha = 0$ , on a :

$$I_b^0 f(x) = I_a^0 f(x) = f(x).$$

3. La fonction gamma est définie comme suit :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

4. Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ , on a :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z);$$

en particulier, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

5. La fonction Bêta est donnée par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

6. La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \forall z, w : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

**Exemple 1.3.1.** Soit  $f(x) = (x - a)^\beta$  où  $\beta > -1$ . On a

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt, a < x < b.$$

On effectuant le changement de variable suivant :  $t = a + \tau(x - a), 0 \leq \tau \leq 1$  et en utilisant la fonction Bêta, on trouve que :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

**Théorème 1.3.1.** [121] Si  $f \in \mathbb{L}^1([a, b])$  avec  $a$  fini alors  $I_a^\alpha f(x)$  existe pour presque tout  $x \in [a, b]$  et on a  $I_a^\alpha f(x) \in \mathbb{L}^1([a, b])$ .

**Proposition 1.3.1.** [78] L'opérateur  $I_a^\alpha f(x)$  est borné dans  $\mathbb{L}^p([a, b])$  et on a

$$\|I_a^\alpha f(x)\|_p \leq K \|f\|_p,$$

pour toute  $f \in \mathbb{L}^p$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ .

### 1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée de **Caputo** a été introduite pour l'utilisation de conditions initiales physiquement interprétable, c'est pour cette raison on a préféré d'utiliser cette notion pour généraliser l'équation de Laplace classique.

**Définition 1.3.2.** La dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** d'ordre  $\alpha$  est donnée par :

$$D_a^\alpha f(x) = I^{m-\alpha} f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt, \quad \alpha \in ]m-1, m[,$$

avec  $m = [\alpha] + 1$  si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $m = \alpha$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 1.3.2.** La dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** d'une constante est nulle, *i.e.*,  $D_a^\alpha K = 0$ .

**Proposition 1.3.2.** [78] La dérivée fractionnaire au sens de **Caputo** vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour  $f, g \in C([a, b])$  et  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$ , on a

$$D_a^\alpha (\lambda f(x) + \delta g(x)) = \lambda D_a^\alpha f(x) + \delta D_a^\alpha g(x),$$

*i.e.*,  $D_a^\alpha$  est un opérateur linéaire.

2. Pour  $\alpha > 0$ , on a

$$D_a^\alpha [I_a^\alpha f(x)] = f(x).$$

3. Si  $D_a^\alpha f(x) = 0$  alors :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i (x-a)^i.$$

4. Pour  $f \in C^n([a, b])$  et  $\alpha > 0$ , on a

$$I_a^\alpha [D_a^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(x).$$

5. Soit  $f \in C^1([a, b])$ . Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$  et  $0 < \alpha + \beta < 1$ , alors on a

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta f(x) = D_a^\beta \circ D_a^\alpha f(x) = D_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

## 1.4 Méthodes de projection de Krylov

*Mieux vaut une réponse approximative à la bonne question que la réponse exacte à la mauvaise question, qui peut toujours être rendue précise.*

- John Tukey

La modélisation des problèmes que l'on rencontre en ingénierie et dans les domaines appliqués, conduit éventuellement après une étape de discrétisation, à la résolution de systèmes d'équations ou à l'approximation de couple propre en dimension finie. Le traitement numérique de ces systèmes complexes nécessite des méthodes rapides et stables, d'où la nécessité d'utiliser des techniques itératives sophistiquées ou des méthodes de réduction de taille basées sur les projections orthogonales, qui permettent de réduire la taille du système à étudier. Ces méthodes de projection consistent en général à construire une matrice dite projetée, de taille plus petite que celle de la matrice de départ. Parmi les approches de projection qui ont été largement étudiées et exploitées avec succès, il y a les méthodes de type **Krylov** qui sont basées sur des techniques de projection orthogonale sur un sous espace  $\mathcal{K}_m(A, b)$ , appelé «*sous-espace de Krylov*» de taille  $m$ , où  $m$  croît avec les itérations. La convergence des méthodes de **Krylov** est assurée pour  $m = N$  (en arithmétique exacte), mais notre souhait et ce qu'on espère c'est la convergence pour  $m \ll N$  ( $N$  étant la taille de la matrice du problème discret), pour une précision donnée. On note ici que ces méthodes sont connues sous le nom «*méthodes polynômiales*», leur convergence est super-linéaire, de plus elles possèdent un effet régularisant remarquable pour les problèmes **mal posés** et les systèmes linéaires mal conditionnés.

Dans la littérature mathématique, on remarque que ces dernières années, un nombre de travaux a été consacré à ces approches. Cet effort scientifique est un témoignage sur la popularité et l'efficacité de ces outils mathématiques dans le traitement numérique de l'analyse spectrale de grande échelle.

En raison de leur succès retentissant dans les applications, les méthodes du sous-espace de **Krylov** figurent parmi les "10 meilleurs algorithmes" du 20<sup>ème</sup> siècle [28, 33].

### 1.4.1 Sous-espaces de Krylov

*Il n'y a pas d'autre méthode que d'être très intelligent.*

*- Thomas Stearns Eliot*

Dans son article de 1931 [83], **A.Krylov** ne pensait pas à un processus de projection, et il ne s'intéressait pas à la résolution d'un système linéaire. La motivation c'était comment exploiter des calculs algébriques dans l'analyse des oscillations des systèmes mécaniques. Il a construit une méthode de calcul du polynôme minimal d'une matrice ; algébriquement, sa méthode est basée sur le fait important suivant.

Étant donné  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ , ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et un vecteur non nul  $b \in \mathbb{K}^N$ , considérons la suite de **Krylov** générée par  $A$  et  $b$ ,

$$b, Ab, A^2b, \dots$$

Il existe alors un nombre entier défini de manière unique  $d = d(A, b)$ , de sorte que les vecteurs  $b, Ab, \dots, A^{d-1}b$  sont linéairement indépendants, et les vecteurs  $b, Ab, \dots, A^{d-1}b, A^d b$  sont linéairement dépendants. On a toujours  $d \geq 1$  puisque  $b$  est non nul, et  $d \leq N$  puisque les  $N + 1$  vecteurs  $b, Ab, \dots, A^N b$  doivent être linéairement dépendants.

Par construction, il existe des scalaires  $\gamma_0, \dots, \gamma_{d-1}$  avec

$$A^d b = \sum_{j=0}^{d-1} \gamma_j A^j b. \quad (1.4.1)$$

Ici  $A^d b$  est soit le vecteur zéro (et donc  $\gamma_0 = \dots = \gamma_{d-1} = 0$ ), soit  $A^d b$  est une combinaison linéaire non nulle des vecteurs linéairement indépendants  $b, \dots, A^{d-1}b$ .

On peut écrire (1.4.1) comme

$$p(A)b = 0, \quad \text{avec} \quad p(\lambda) \equiv \lambda^d - \sum_{j=0}^{d-1} \gamma_j \lambda^j.$$

Le polynôme  $p(\lambda)$  est appelé le polynôme minimal de  $b$  par rapport à  $A$ . Son degré  $d = d(A, b)$  est appelé le grade de  $b$  par rapport à  $A$ . La terminologie utilisée ici avait déjà été formulée par **Gantmacher** dans son article de 1934 [47] sur l'analyse algébrique de la

méthode de **Krylov**.

L'observation de **Krylov** peut être reformulée de la manière suivante. Pour chaque matrice carrée  $A$  et un vecteur  $b$ , la suite (emboîtée) des sous-espaces de **Krylov** définie par

$$\mathcal{K}_n(A, b) \equiv \text{vect}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.2)$$

cessera finalement de croître et deviendra invariante par rapport à  $A$ . En particulier, si  $d$  est le grade de  $b$  par rapport à  $A$ , alors  $A^d b \in \mathcal{K}_d(A, b)$ , cf. (1.4.1), et donc

$$A\mathcal{K}_d(A, b) \subseteq \mathcal{K}_d(A, b)$$

Pour des raisons techniques, nous définissons  $\mathcal{K}_0(A, b) = \{0\}$ .

On va maintenant montrer que la solution d'un système linéaire  $Ax = b$  a une représentation "naturelle" en tant que membre d'un sous-espace de **Krylov**  $\mathcal{K}_d(A, b)$ . En utilisant le polynôme minimal de  $b$  par rapport à  $A$  pour représenter la solution d'un système linéaire  $Ax = b$  dans le cas où  $A$  est une matrice non singulière.<sup>11</sup> De (1.4.1), on a

$$p(A)b = \sum_{j=0}^d \gamma_j A^j b = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\gamma_0} \sum_{j=0}^{d-1} \gamma_{j+1} A^{j+1} b = b \Rightarrow -\frac{1}{\gamma_0} \sum_{j=0}^{d-1} \gamma_{j+1} A^j b = A^{-1}b.$$

Par conséquent, comme le grade de  $b$  par rapport à  $A$  est le plus petit degré du polynôme minimal, alors la représentation de  $A^{-1}b$  est la plus courte. Cette formule représente  $x = A^{-1}b$  immédiatement comme un élément d'un espace de **Krylov**.

**Théorème 1.4.1.** [71] *Si le polynôme minimal du vecteur  $b$  par rapport à la matrice non singulière  $A$  a le degré  $d$ , alors la solution de  $Ax = b$  est dans l'espace  $\mathcal{K}_d(A, b)$ .*

Les résultats de base sur les sous-espaces de **Krylov** sont donnés par le lemme suivant.

**Lemme 1.4.1.** [92] *Soit  $A$  une matrice carrée, et soit  $b$  un vecteur de grade  $d \geq 1$  par rapport à  $A$ . Alors on a les résultats suivants :*

$$(1) \dim \mathcal{K}_n(A, b) = n \text{ pour } n = 1, \dots, d.$$

11. Dans le cas où  $A$  est une matrice singulière, la méthode des sous-espaces de **Krylov** résout le système linéaire  $Ax = b$  par le pseudo inverse de **Drazin**, pour plus de détails voir [71, Section. 6 et Section. 7]

(2)  $d - 1 \leq \dim AK_d(A, b) \leq d$ , et si  $A$  est non singulière, alors :

$$AK_d(A, b) = \mathcal{K}_d(A, b).$$

(3) Si  $AK_d(A, b) = \mathcal{K}_d(A, b)$ , alors  $b \in \text{Im}(A)$ .

Dans ce qui suit, on va décrire les algorithmes les plus importants pour la génération des bases orthogonales du sous-espace de **Krylov**. Dans cette description, on continue à supposer une arithmétique exacte.

Bien qu'historiquement les choses ont été développées différemment, il convient de considérer d'abord ce que l'on appelle aujourd'hui l'algorithme d'**Arnoldi** [3]. Il peut être considéré comme une variante de la méthode d'orthogonalisation de **Gram-Schmidt** appliquée à la suite de **Krylov** afin de générer une base orthonormée du sous-espace de **Krylov**. L'algorithme (1) est l'implémentation classique de **Gram-Schmidt** de l'algorithme d'**Arnoldi**. En partant d'un vecteur  $v_1 = \frac{b}{\|b\|}$ , l'étape  $n$  de l'algorithme génère un vecteur  $v_{n+1}$  qui résulte de l'orthogonalisation du vecteur  $Av_n$  (plutôt que  $A^n v_1$ ) par rapport aux vecteurs orthonormaux  $v_1, \dots, v_n$  générés précédemment. Si l'algorithme ne s'arrête pas à l'étape  $n$ , on obtient

$$v_{n+1} = \varphi_n(A)v_1, \quad (1.4.3)$$

où  $\varphi_n(\lambda)$  est un polynôme de degré  $n$ , et

$$(v_{n+1}, v_j) = v_1^*(\varphi_{j-1}(A))^* \varphi_n(A)v_1 = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.4.4)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire euclidien. L'algorithme se termine lorsque  $h_{n+1,n} = 0$ , ce qui se produit si et seulement si  $Av_n \in \text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{K}_n(A, b)$ . Par construction, cela signifie que  $n = d$ , où  $d$  est le grade du vecteur initial  $b$  par rapport à  $A$ . Le vecteur  $v_{d+1}$  disparaît, et donc le sous-espace final de **Krylov**  $\mathcal{K}_d(A, b)$  est invariant par rapport à  $A$ .

En raison des instabilités numériques, l'implémentation classique de **Gram-Schmidt** de l'algorithme d'**Arnoldi** est rarement utilisée. L'implémentation la plus courante utilisée dans les calculs pratiques est basée sur l'orthogonalisation de **Gram-Schmidt** modifiée, indiquée dans l'algorithme (2). L'algorithme (1) et (1.4.4) sont mathématiquement équivalents, ce qui

signifie qu'en l'absence d'erreurs d'arrondi, ils donnent des vecteurs identiques,  $v_1, \dots, v_d$ . Dans l'algorithme (2), le  $i^{\text{eme}}$  résultat intermédiaire  $\hat{v}_{n+1,i}$ , de l'orthogonalisation à l'étape  $n$  est le résultat de l'orthogonalisation de  $Av_n$  par rapport aux  $i$  premiers vecteurs précédents,  $v_1, \dots, v_i$ . Comme l'orthogonalisation est effectuée de manière récursive, l'algorithme (2) a beaucoup moins de possibilités d'effectuer des opérations arithmétiques en même temps que l'algorithme (1). Cela peut jouer un rôle sur les architectures informatiques parallèles modernes, où la simultanéité des calculs doit être prise en compte. Des détails sur les algorithmes numériques parallèles peuvent être trouvés dans [34, 53, 108].

---

**Algorithm 1:** Arnoldi algorithm, classical Gram–Schmidt

---

**Data:** matrix  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ , nonzero initial vector  $b \in \mathbb{K}^N$ . Let  $d$  be the grade of  $b$  with respect to  $A$ .

**Result:** orthonormal vectors  $v_1, \dots, v_d$  with  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{K}_n(A, b)$  for

$$n = \{1, \dots, d\}.$$

Initialization :  $v_1 = \frac{b}{\|b\|}$  ;

**for**  $n = 1, 2, \dots$  **do**

$$\begin{aligned} & \widehat{v}_{n+1} = Av_n - \sum_{i=1}^n h_{i,n} v_i, \text{ where } h_{i,n} = (Av_n, v_i), i = 1, \dots, n, ; \\ & h_{n+1,n} = \|\widehat{v}_{n+1}\|, \text{ If } h_{n+1,n} = 0 \text{ Then stop ;} \\ & v_{n+1} = \frac{\widehat{v}_{n+1}}{h_{n+1,n}} ; \end{aligned}$$

**end**

---

**Algorithm 2:** Arnoldi algorithm, modified Gram–Schmidt

---

**Data:** matrix  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ , nonzero initial vector  $b \in \mathbb{K}^N$ . Let  $d$  be the grade of  $b$  with respect to  $A$ .

**Result:** orthonormal vectors  $v_1, \dots, v_d$  with  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{K}_n(A, b)$  for

$$n = \{1, \dots, d\}.$$

Initialization :  $v_1 = \frac{b}{\|b\|}$  ;

**for**  $n = 1, 2, \dots$  **do**

$$\begin{aligned} & \widehat{v}_{n+1,0} = Av_n ; \\ & \text{for } n = 1, 2, \dots, n \text{ do} \\ & \quad \widehat{v}_{n+1,i} = \widehat{v}_{n+1,i-1} - h_{i,n} v_i, \text{ where } h_{i,n} = (\widehat{v}_{n+1,i-1}, v_i); \\ & \text{end} \\ & \widehat{v}_{n+1} = \widehat{v}_{n+1,n}; \\ & h_{n+1,n} = \|\widehat{v}_{n+1}\|, \text{ If } h_{n+1,n} = 0 \text{ Then stop;} \\ & v_{n+1} = \frac{\widehat{v}_{n+1}}{h_{n+1,n}} ; \end{aligned}$$

**end**

---

On écrit maintenant l'algorithme d'**Arnoldi** en termes de matrices. Soit la  $V_n \equiv [v_1, \dots, v_n]$

où ses colonnes sont formées par les vecteurs de base orthonormaux  $v_1, \dots, v_n$ , et

$$H_{n,n} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,n} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix},$$

la matrice de **Hessenberg** supérieure non réduite  $n \times n$  de coefficients de récurrence  $h_{i,j}$  ("non réduite" signifie qu'aucune composante sous-diagonale  $h_{i,i-1}$  ne disparaît pas). Après  $n$  étapes de l'algorithme, on a

$$AV_n = V_n H_{n,n} + h_{n+1,n} v_{n+1} e_n^T, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.5)$$

où  $V_n^* V_n = I_n$ ,  $V_n^* v_{n+1} = 0$ , et  $e_n$  est la  $n^{\text{ème}}$  colonne de  $I_n$ . A l'itération  $d$ , on obtient  $h_{d+1,d} = 0$ , et (1.4.5) devient

$$AV_d = V_d H_{d,d}. \quad (1.4.6)$$

Ici,  $H_{d,d}$  peut-être interprétée comme étant la représentation matricielle de la restriction orthogonale de l'opérateur linéaire  $A$  au sous-espace  $\mathcal{K}_d(A, b)$  invariant par rapport à  $A$  dans la base  $v_1, \dots, v_d$ . En effet,

$$V_d^* (V_d V_d^* A) V_d = V_d^* AV_d = H_{d,d}. \quad (1.4.7)$$

L'algorithme d'**Arnoldi** peut être considéré comme un outil pour la réduction unitaire de  $A$  à la forme supérieure de **Hessenberg** : lorsque l'algorithme s'arrête avec  $h_{d+1,d} = 0$  et  $d < N$ , la réduction peut être poursuivie (si nécessaire) en démarrant un autre algorithme d'**Arnoldi** avec  $A$  et un vecteur initial  $v_{d+1}$  qui est orthogonal à  $v_1, \dots, v_d$ . Cela donne finalement une matrice unitaire  $V$  et une matrice de **Hessenberg** supérieure  $H$  (pas nécessairement non réduite), de sorte que  $AV = VH$ .

Supposons maintenant que  $A$  soit hermitienne. Alors la matrice supérieure du **Hessenberg**  $V_d^* AV_d = H_{d,d}$  doit également être hermitienne, et donc tridiagonale. La récurrence complète pour le vecteur  $v_{n+1}$  dans l'algorithme (1) se réduit alors à la récurrence à trois

termes

$$\widehat{v}_{n+1} = Av_n - h_{n,n}v_n - h_{n-1,n}v_{n-1}.$$

Pour une matrice hermitienne  $A$ , il suffit donc d'orthogonaliser le vecteur  $Av_n$  par rapport aux deux vecteurs orthonormaux les plus récents  $v_n$  et  $v_{n-1}$ , l'orthogonalité par rapport à tous les autres vecteurs  $v_{n-2}, \dots, v_1$  est automatiquement garantie. L'algorithme qui en résulte est appelé l'algorithme de **Lanczos** hermitien. Bien qu'il est attribué à **Lanczos** [85, 86], cet algorithme ne représente rien d'autre que la formulation matricielle de l'algorithme classique de Stieltjes pour le calcul des polynômes orthogonaux [29, 126, 127, 128, 129].

L'algorithme (3) est une implémentation de l'algorithme Hermitien **Lanczos** qui est basé sur deux récurrences couplées à deux termes. En conséquence de l'analyse historique de **Paige** sur les différentes implémentations [102, 103], cet algorithme est devenu l'algorithme de **Lanczos** hermitien.

---

**Algorithm 3:** Hermitian Lanczos algorithm

---

**Data:** Hermitian matrix  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ , nonzero initial vector  $b \in \mathbb{K}^N$ . Let  $d$  be the grade of  $b$  with respect to  $A$ .

**Result:** orthonormal vectors  $v_1, \dots, v_d$  with  $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathcal{K}_n(A, b)$  for

$$n = \{1, \dots, d\}.$$

Initialization :  $v_0 = 0, \delta_1 = 0, v_1 = \frac{b}{\|b\|}$  ;

**for**  $n = 1, 2, \dots$  **do**

$$\left| \begin{array}{l} u_n = Av_n - \delta_n v_{n-1}; \\ \widehat{v}_{n+1} = u_n - \delta_n v_n, \text{ where } \delta_n = (u_n, v_n); \\ \delta_{n+1} = \|\widehat{v}_{n+1}\|, \text{ If } \delta_{n+1} = 0 \text{ Then stop;} \\ v_{n+1} = \frac{\widehat{v}_{n+1}}{\delta_{n+1}}; \end{array} \right.$$

**end**

---

La forme matricielle de l'algorithme Hermitien de **Lanczos** est donné par

$$AV_n = V_n T_n + \delta_{n+1} v_{n+1} e_n^T, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.8)$$

où  $V_n^* V_n = I_n, V_n^* v_{n+1} = 0$  (voir 1.4.5.) Les coefficients de récurrence sont les éléments de

la matrice tridiagonale hermitienne

$$T_n \equiv H_{n,n} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \delta_2 & & & \\ \delta_2 & \gamma_2 & \delta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \delta_2 & \gamma_2 & \delta_3 \\ & & & \delta_n & \gamma_n \end{bmatrix}.$$

On rappelle que  $\delta_{j+1} = v_{j+1} > 0, j = 1, \dots, n-1$ . Ainsi, la matrice  $T_n$  dans (1.4.8) est une matrice tridiagonale symétrique réelle qui comporte des éléments positifs sur sa première sous-diagonale et sa super-diagonale. Si  $A$  est réelle ou complexe, à l'étape d'itération  $d^{me}$ , on obtient  $\delta_{d+1} = 0$ , et (1.4.8) devient

$$AV_d = V_d T_d, \quad (1.4.9)$$

où  $T_d$  peut être interprétée comme étant la représentation matricielle de la restriction orthogonale de l'opérateur linéaire  $A$  au sous-espace  $\mathcal{K}_d(A, b)$  invariant par rapport à  $A$  dans la base  $v_1, \dots, v_d$ .

L'algorithme de **Lanczos** peut être considéré comme une réduction unitaire d'une matrice hermitienne à une forme tridiagonale. Si l'algorithme s'arrête avec  $\delta_{d+1} = 0$  et  $d < N$ , alors, de manière analogue à l'algorithme d'**Arnoldi**, la réduction peut être poursuivie en démarrant un autre algorithme de **Lanczos** avec  $A$  et un vecteur initial  $v_{d+1}$  qui est orthogonal à  $v_1, \dots, v_d$ .

## 1.4.2 Les valeurs et les vecteurs de Ritz

On considère maintenant la question de savoir si un sous-espace de **Krylov** donné  $\mathcal{K}_n(A, b)$  contient de bonnes approximations des vecteurs propres et des valeurs propres de  $A$ . A cet effet, on rappelle la procédure de **Rayleigh-Ritz**.

### Procédure de Rayleigh-Ritz

Soit  $A$  une matrice complexe  $N \times N$  et  $\mathcal{K}$  un sous-espace de dimension  $n$  de  $\mathbb{C}^N$ . Une technique de projection orthogonale cherche un couple propre approximatif  $(\tilde{\theta}, \tilde{u})$ , avec  $\tilde{\theta} \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{u} \in \mathcal{K}$ . Ce couple propre approximatif est obtenu en imposant la condition de **Galerkin** suivante :

$$A\tilde{u} - \tilde{\theta}\tilde{u} \perp \mathcal{K} \Leftrightarrow (A\tilde{u} - \tilde{\theta}\tilde{u}, v) = 0, \forall v \in \mathcal{K}. \quad (1.4.10)$$

Supposons qu'une base orthonormée  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $\mathcal{K}$  existe. Notons  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , et soit  $\tilde{u} = Vy$ . Ensuite, la condition (1.4.10) devient

$$(AVy - \tilde{\theta}Vy, v_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Par conséquent,  $y$  et  $\tilde{\theta}$  doivent satisfaire

$$B_n y = \tilde{\theta} y, \quad (1.4.11)$$

où  $B_n = V^*AV$ . Chaque valeur propre  $\tilde{\theta}_i$  de  $B_n$  est appelée une valeur **Ritz**, et  $Vy_i$  est appelé vecteur **Ritz**, où  $y_i$  est le vecteur propre de  $B_n$  associé à  $\tilde{\theta}_i$ . Cette procédure est connue sous le nom procédure de **Rayleigh-Ritz**.

### Approximation de Krylov

Les algorithmes (**Arnoldi**, **Lanczos**) pour trouver quelques paires propres d'une matrice générale  $A$  combinent les processus donnés par les algorithmes (2) et (3) pour construire un sous-espace de **Krylov** avec la procédure de **Rayleigh-Ritz**, où  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n(A, b)$  et  $B_n = H_{n,n}$  pour le processus d'**Arnoldi** (matrice de **Hessenberg** supérieure) et  $B_n = T_n$  pour le processus de **Lanczos** (matrice tridiagonale symétrique).

**Théorème 1.4.2.** [55, 80] Soient  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $(\lambda_i)_{i=1}^N$  les valeurs propres de  $A$  et  $(\tilde{\theta}_i)_{i=1}^n$  les valeurs propres de  $T_n$  (matrice tridiagonale symétrique à l'itération  $n$  du processus de **Lanczos**).

Alors on a la localisation suivante :

$$\lambda_{\min} \leq \tilde{\theta}_1 \leq \tilde{\theta}_2 \leq \dots \leq \tilde{\theta}_n \leq \lambda_{\max}.$$

Chaque intervalle  $(-\infty, \tilde{\theta}_1], [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2], \dots, [\tilde{\theta}_{n-1}, \tilde{\theta}_n], [\tilde{\theta}_n, +\infty)$  contient au moins une valeurs propres de  $A$ .

Le lemme suivant donne l'estimation d'erreur entre les valeurs de **Ritz** et les valeurs propres et l'angle entre les vecteurs propres de la matrice  $A$  est le sous-espace de **Krylov** construits par le processus de **Lanczos**.

**Lemme 1.4.2.** [107, Thm. 12.4.1 et Thm. 12.4.3] pour chaque paire propre  $(\lambda_j, s_j)$  de la matrice  $A$ , on a

$$\begin{cases} |\tilde{\theta}_i^{(n)} - \lambda_j| = \mathcal{O}(2 \exp(-4n\sqrt{\gamma})), \\ \tan(s_j, \mathcal{K}_n(A, b)) = \mathcal{O}(2 \exp(-2n\sqrt{\gamma})), \end{cases}$$

où  $\gamma$  est lié à l'écart entre les valeurs propres recherchées et le reste du spectre.

### 1.4.3 Evaluation de $f(A)b$

La définition des fonctions de matrices est la fusion de morceaux disparates d'analyse complexe et d'algèbre linéaire. Cette notion est présente dans plusieurs applications variées : les équations différentielles, les mesures de connectivité dans les réseaux et les opérateurs en physique théorique des particules. Quand on veut calculer la fonction matricielle  $f(A)$  elle-même ou la fonction matricielle agissant sur un vecteur  $b$ , *i.e.*,  $f(A)b$ , alors il nous faut plusieurs ingrédients et techniques d'algèbre linéaire numérique, d'analyse complexe et d'approximation de fonctions polynomiales et rationnelles.

Le vrai problème d'évaluation numériquement d'une fonction matricielle se pose lorsque la matrice  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  est de grande taille. Dans ce cas, les méthodes qui existent sont très coûteuses. En effet, le taux de convergence des approximations des valeurs propres et des vecteurs propres est en général beaucoup plus lent que celui du calcul d'un polynôme de matrice multiplier par un vecteur. L'idée est donc de projeter  $f(A)b$  dans un sous-espace de

Krylov. Cette technique commence par création de  $\mathcal{K}_n(A, b)$  par l'un des processus donné par les algorithmes (2),(3) pour avoir une forme réduite donnée par les formules (1.4.5). On distingue deux cas : pour le cas où  $A$  est non hermitienne, on a :

$$AV_n = V_n H_{n,n} + h_{n+1,n} v_{n+1} e_n^\top, \quad n = 1, 2, \dots,$$

et (1.4.8) pour les cas où  $A$  est hermitienne, on a :

$$AV_n = V_n T_n + \delta_{n+1} v_{n+1} e_n^\top, \quad n = 1, 2, \dots$$

D'après **V. Druskin** et **L.A. Knizhnerman**[35], on peut construire une approximation de  $f(A)b$  par projection dans  $\mathcal{K}_n(A, b)$ , *i.e.*, on peut considérer

$$f_n = V_n f(H_{n,n}) e_1 \|b\|, \quad (1.4.12)$$

(resp. )

$$f_n = V_n f(T_n) e_1 \|b\|, \quad (1.4.13)$$

comme étant des approximations de  $f(A)b$  si  $A$  est non hermitienne (resp. si  $A$  est hermitienne).

- Le vecteur  $f_n$  est l'approximation polynomiale  $p(A)b$  de  $f(A)b$ , où le polynôme  $p$  de degré au maximum  $n - 1$  interpole la fonction  $f$  au sens de **Hermite** sur l'ensemble des valeurs propres de  $H_{n,n}$  et  $T_n$ .

**Remarque 1.4.1.** Pour la cas particulier, si la matrice  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  est diagonalisable, par définition  $f(A) = \sum_{i=1}^n v_i f(\lambda_i) v_i^\top$ , où  $(v_i, \lambda_i)_{i=1, \dots, n}$  sont les couples propres de  $A$ . Pour plus de détails sur les définitions de  $f(A)$  et ses propriétés, et son évaluation numérique, on recommande le livre : " N. J. Higham : Functions of matrices : theory and computation, SIAM, 2008".

Cette méthode originale a été introduite par **Van Der Vorst** en 1987 [137] pour résoudre l'équation  $f(A)x = b$ , ensuite elle a été développée par **V. Druskin & L.A. Knizhnerman**

1989 [35], pour calculer le produit  $f(A)b$ , où  $f$  est une fonction polynomiale (resp. exponentielle) ( $f(A)b = \exp(A)b$ , où  $\sigma(A)$  est négatif).

Après le succès obtenu, elle a été généralisée pour certaines classes de fonctions rationnelles, racines carrées, trigonométriques, complètement monotones, et de type Markov.

**Lemme 1.4.3** (Saad). Soit  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  une matrice carrée et soient  $V_n, H_{n,n}$  les résultats de la  $n^{\text{ème}}$  étape du processus de Arnoldi appliqué à  $A$ . Alors, pour tout polynôme  $p_j$  de degré  $j \leq n - 1$ , on a

$$p_j(A) v_1 = V_n p_j(H_{n,n}) e_1.$$

**Théorème 1.4.3.** [119, Saad] Soit  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  une matrice carrée et  $b \in \mathbb{R}^N$  un vecteur et soit  $V_n, H_{n,n}$  (resp.  $V_n, T_n$ ) sont le résultat la  $n^{\text{ème}}$  étape du processus de **Arnoldi** (resp. de **Lanczos**) sur  $A$ . Alors

$$\begin{aligned} f(A)b &= \tilde{p}_{n-1}(A)b = V_n \tilde{p}_{n-1}(H_{n,n}) V_n^\top b = V_n f(H_{n,n}) V_n^\top b, & (1.4.14) \\ &= \|b\| V_n f(H_{n,n}) e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{resp. } f(A)b &= \tilde{p}_{n-1}(A)b = V_n \tilde{p}_{n-1}(T_n) V_n^\top b = V_n f(T_n) V_n^\top b, & (1.4.15) \\ &= \|b\| V_n f(T_n) e_1), \end{aligned}$$

où  $\tilde{p}_{n-1}$  est l'unique polynôme d'interpolation (de degré au plus  $n - 1$ ) de  $f$  sur le spectre de  $H_{n,n}$  (resp.  $T_n$ ).

On peut aussi approcher  $f(A)b$  via la formule intégrale de Cauchy.

$$f(A)b \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\theta) (\theta I - H_{n,n})^{-1} e_1 d\theta, \quad (1.4.16)$$

où  $\Gamma$  est un contour fermé enfermant  $\Lambda(H_{n,n})$  (le spectre de  $H_{n,n}$ ) si  $A$  est non hermitienne et

$$f(A)b \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\theta) (\theta I - T_n)^{-1} e_1 d\theta, \quad (1.4.17)$$

où  $\Gamma$  est un contour fermé qui enferme  $\Lambda(T_n)$  (le spectre de  $T_n$ ) si  $A$  est hermitienne [?].

**Théorème 1.4.4** (Hochbruck & Hochstenbach). *D'après Hochbruck & Hochstenbach dans [67], les trois formules (1.4.12),(1.4.14) et (1.4.16) (resp. (1.4.13) et (1.4.17)) sont équivalentes.*

Pour illustrer la convergence, nous ne présentons qu'un résultat pour les matrices normales. Le maximum n'est pas pris sur un ensemble discret, mais sur un ensemble compact convexe  $\Omega$  contenant les valeurs propres de  $A$ .

**Théorème 1.4.5.** [13] *Supposons que  $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$  est une matrice normale et supposons que  $\Omega \subset \mathbb{C}$  est un ensemble compact convexe tel que  $\Lambda(A) \subset \Omega$ . Soit  $f_n$  l'approximation de **Krylov** de  $f(A)b$  définie par (1.4.12). Alors,*

$$\|f(A)b - f_n\| \leq 2\|b\| \min_{p \in \mathcal{P}_{n-1}} \max_{z \in \Omega} |f(z) - p(z)|.$$

Cette majoration donne plusieurs interprétations qualitatives de l'erreur. Des conditions suffisantes pour une convergence rapide peuvent être facilement identifiées : La méthode fonctionne bien si

- $f(z)$  peut être bien approchée par des polynômes d'ordre inférieur.
- Les valeurs propres  $\Lambda(A)$  sont bien localisées et regroupées dans  $\Omega$  de façon que  $\Omega$  soit géométriquement optimal.

Les majorations min-max repose en générale sur des calculs optimaux et utilisent des choix particuliers de polynômes. Soit  $q_n$  le développement de Taylor tronqué,

$$q_n := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} z^i.$$

Notons  $r_n(z) = f(z) - q_n$  le terme reste du développement de Taylor de  $f$ . Supposons maintenant que  $\Omega$  est un sous-ensemble d'un disque de rayon  $\rho$  centré à l'origine  $\Omega \subset D(\rho, 0)$ . Alors

$$\max_{z \in \Omega} r_n(z) \sim \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!},$$

et  $\|f(A)b - f_n\| = e_n \sim \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Cela montre que la méthode est convergente. La vitesse de convergence est généralement beaucoup plus rapide par rapport à ce qui est prévu par cette méthode simpliste.

### 1.4.4 Problèmes mal-posés discrets et méthodes de projection de Krylov

La relation entre la méthode de projection dans des sous-espaces de **Krylov** et les problèmes **mal posés** remonte aux 1965, où **Golub** et **Kahan** ont introduit une méthode numérique pour calculer le pseudo-inverse d'une matrice rectangulaire de grande taille pour résoudre un système linéaire **mal posés**  $Ax = b$ . La technique utilisée dans cette méthode se base sur la projection dans des sous-espaces de **Krylov** bien construits. Après l'étape de normalisation du système linéaire, i.e., ils ont transformé le problème en question à un problème de moindre carrée et ils ont introduit le sous-espace de **Krylov**  $\mathcal{K}_j(AA^\top, b)$  pour approcher les vecteurs singuliers à gauche de la matrice  $A$  et  $\mathcal{K}_j(A^\top A, A^\top b)$  pour approcher les vecteurs singuliers à droite (pour plus de détails, voir [52]). Cette méthode est connue sous le nom **Golub-Kahan** bidiagonalisation ou la méthode **LSQR**.

Un bon témoignage et justification de l'effet régularisant et la convergence de cette méthode sont bien expliqués dans l'article de **I.Hnetynková**, **M.Plesinger** et **Z.Strakos** [65]. Ces auteurs ont montré que la méthode de **Golub-Kahan** est à double rôle : elle régularise<sup>12</sup>, et elle filtre les données  $b$  bruitées.

Une autre analyse intéressante de cette méthode est donnée par **Zhongxiao Jia** dans [73] où il a interprété l'effet régularisant de la méthode d'un point de vue géométrique<sup>13</sup>.

La méthode de **Golub-Kahan** était à l'origine une technique de filtrage pour les problèmes **mal conditionnés** basée sur une variante de **Krylov** avancée. L'explication de cette idée se résume comme suit :

- 1- **Méthodes de régularisation projetées** : Dans ces méthodes, la projection dans un sous-espace de **Krylov** joue le rôle d'un outil de calcul pour les problèmes matriciels **mal posés** de grande taille. La réduction de la matrice  $A$  permet de calculer le filtre

12. La dimension de sous-espace de **Krylov** joue le rôle d'un paramètre de régularisation.

13. **Zhongxiao Jia** a montré que l'angle entre le sous-espace associé aux valeurs singulières approchées par la méthode **Golub-Kahan** et le sous-espace associé aux premières valeurs singulières est inférieur à une certaine tolérance, ce qui explique bien que la méthode de **Golub-Kahan** est une approximation numérique de troncature sur les valeurs singulières.

spectral de la méthode de troncature en utilisant les valeurs singulières, et pour la méthode de Tikhonov (méthode de Moindres carrés régularisée), les valeurs propres sont remplacées par les valeurs de **Ritz**, ce qui minimise le coût des calculs de la solution régularisée. Pour plus de détails sur ce sujet, on renvoie le lecteur aux références [11, 12, 104, 91, 113, 25, 51, 20, 99, 98, 49].

- 2- Régularisation par projection dans un sous-espace de Krylov** : Cette technique se base sur la projection dans des sous-espaces lisses, comme  $\mathcal{K}_j(A^\top A, A^\top b)$  (voir [59, 136]) ou  $AK_j(A, b)$  (voir [24, 56]). Dans ces méthodes la dimension de l'espace de projection joue le rôle d'un paramètre de régularisation (voir [74]).
- 3- Méthodes hybrides** : Ces méthodes sont des combinaisons d'une régularisation itérative et une procédure de projection dans un sous-espace de **Krylov** lisse, où le but est de diminuer le nombre d'itération et d'optimiser le coût du calcul. [105, 100, 26, 60, 27].

Maintenant on donne un exemple extrait de *Regularization Tools* [58], pour visualiser la relation entre les sous-espaces de **Krylov** et les problèmes **mal posés** discrets :

En utilisant la commande  $[A, b, x] = \text{deriv2}(15000, 1);$ , on obtient un système linéaire  $Ax = b$  donné par la discrétisation d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce. Le noyau est la fonction du Green pour la dérivée seconde, *i.e.*,

$$k(s, t) = \begin{cases} s(t-1) & \text{si } s < t, \\ t(s-1) & \text{si } s \geq t. \end{cases}$$

La solution et le second membre sont donnés, respectivement par

$$f(t) = t, \quad g(s) = \frac{s^3 - s}{6}, \quad s, t \in [0, 1].$$

Pour ce problème particulier, on connaît l'expression analytique des valeurs et des fonctions singulières :

$$\sigma_i = (i\pi)^{-2}, \quad u_i(t) = \pm\sqrt{2} \sin(i\pi t), \quad v_i(s) = \pm\sqrt{2} \sin(i\pi s).$$

Ce problème est moyennement **mal posé**, la matrice qui en résulte est symétrique, voir [31].

Dans cet exemple, on prend  $A \in \mathbb{R}^{15000 \times 15000}$ , on a  $\kappa(A) \approx 2.25 \times 10^8$  où  $\kappa(A)$  est le conditionnement de  $A$ . On ajoute une perturbation aléatoire au vecteur  $b$  pour qu'il soit entaché du bruit avec la commande :

$$\begin{aligned} noise &= randn(size(b)); \\ noise &= norm(b) * noise / norm(noise); \\ b^\delta &= b + 10^{-1} * noise; \end{aligned}$$

On va régulariser ce problème par trois méthodes : la première méthode appartient à la famille des méthodes de régularisation par projection dans un sous-espace de **Krylov**, *i.e.*, on résout le système  $Ax = b^\delta$  par l'algorithme MR-II qui est prédéfini dans *Regularization Tools* [58].

MR-II est une variante de l'algorithme MINRES (minimum residual method) pour les systèmes linéaires symétriques  $Ax = b^\delta$ , avec le vecteur de départ  $Ab^\delta$  (au lieu de  $b^\delta$  comme dans MINRES), *i.e.*, la solution à rechercher appartient à un sous-espace de **Krylov** lisse défini par

$$AK_k(A, b^\delta) = \text{Vect}\{Ab^\delta, A^2b^\delta, \dots, A^k b^\delta\}.$$

La fonction  $[X, rho, eta] = mr2(A, bdelta, k, 0)$ ; renvoie toutes les  $k$ -itérations, stockées sous forme de colonnes de la matrice  $X$ . La norme de la solution et la norme résiduelle sont renvoyées respectivement en  $\eta$  et en  $\rho$ .  $mr2$  est une implementation simple de l'algorithme MR-II décrite dans [56]. Une analyse de la MR-II en tant qu'une méthode de régularisation générale se trouve dans le livre [74].

On prend  $k = 6$ , dans les figures ci-dessous, on dessine la solution exacte  $x$  et la solution approchée  $x_k^\delta$  pour chaque itération de 1 à 6.

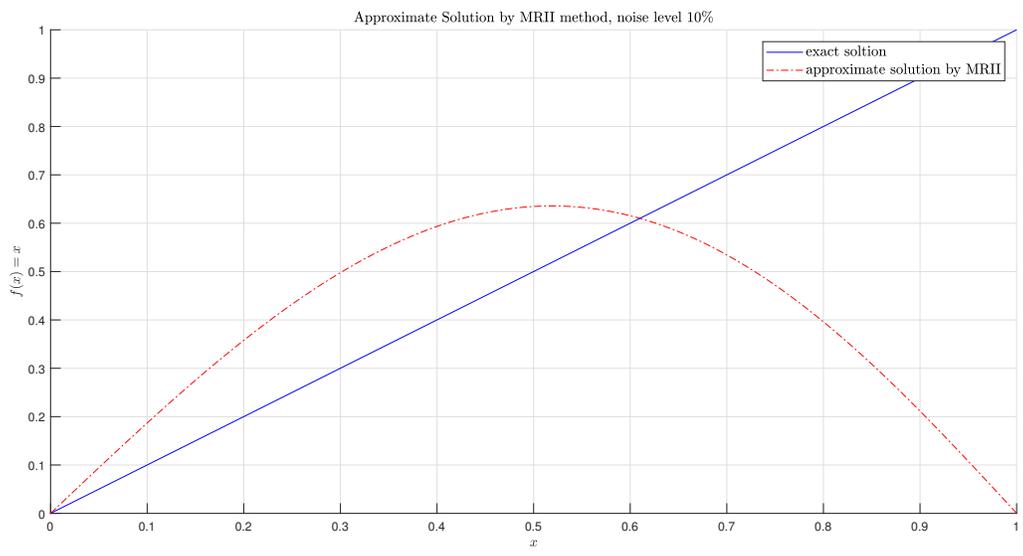


FIGURE 1.1 – MRII iteration 1

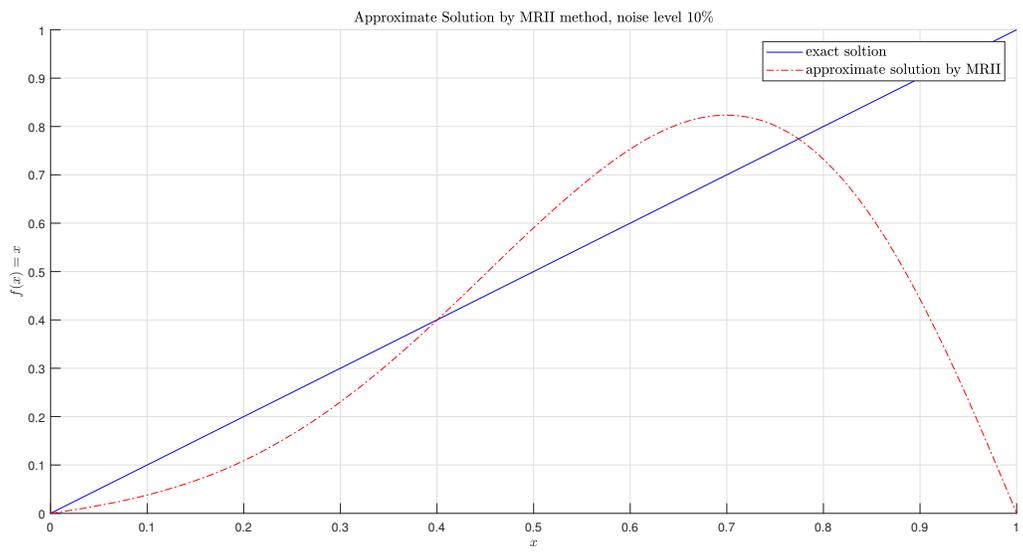


FIGURE 1.2 – MRII iteration 2

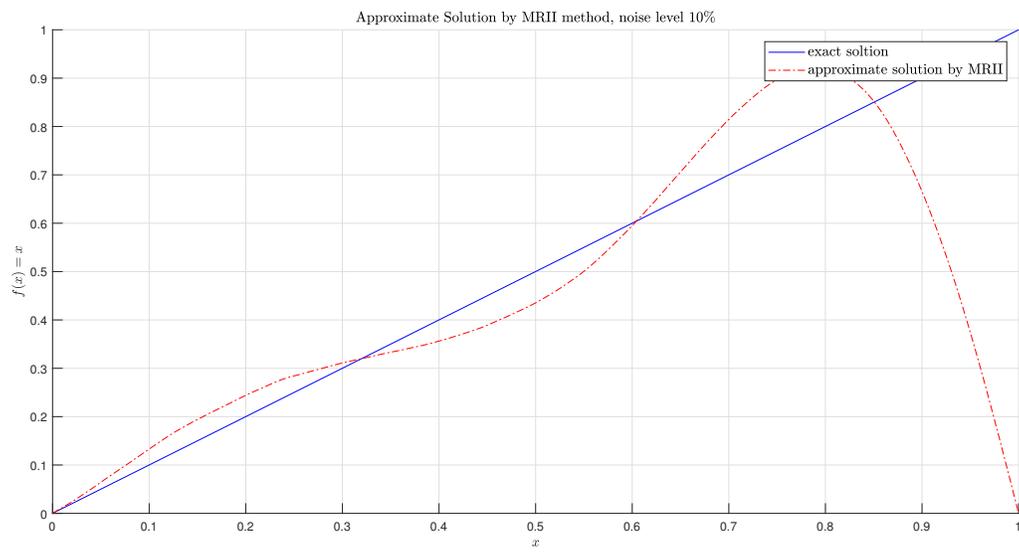


FIGURE 1.3 – MRII iteration 3

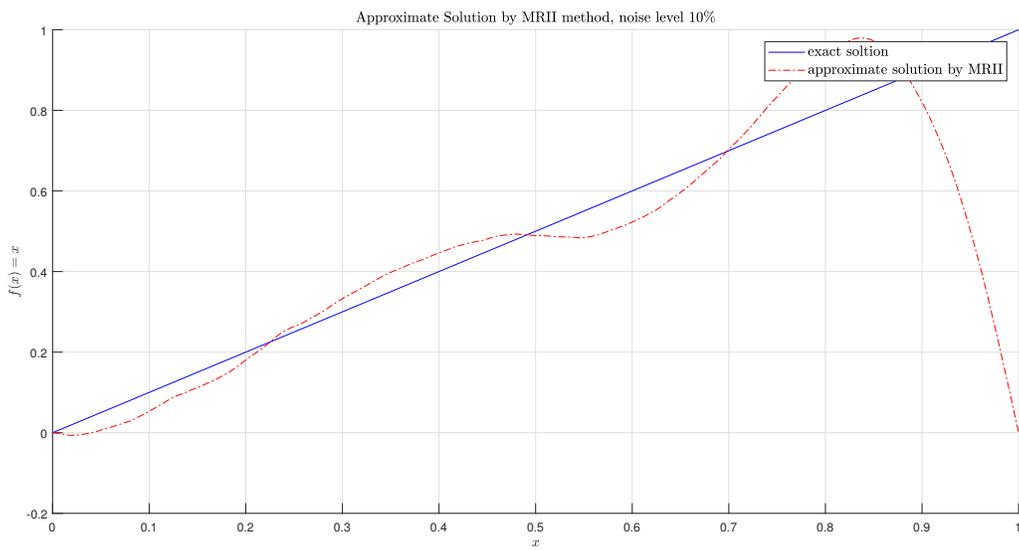


FIGURE 1.4 – MRII iteration 4

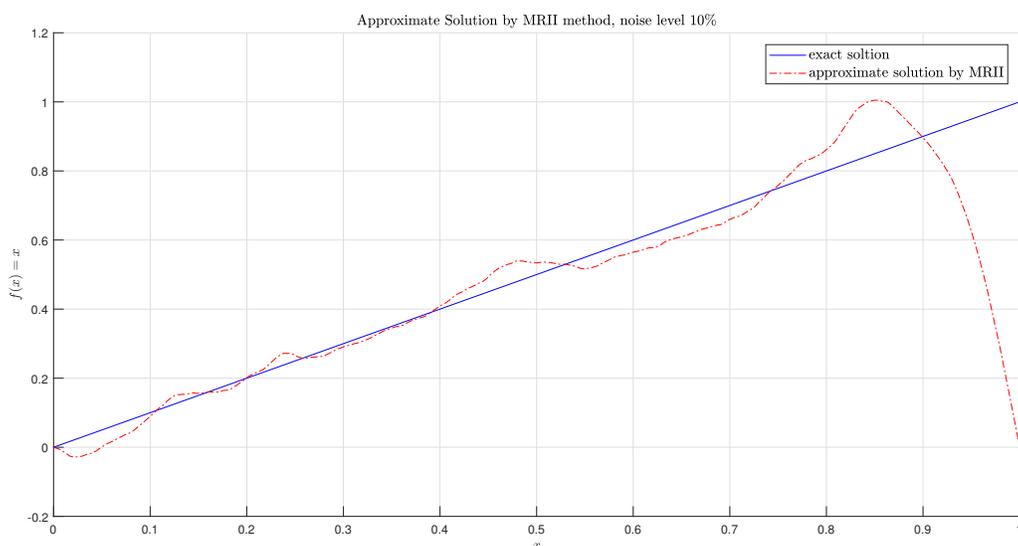


FIGURE 1.5 – MR-II iteration 5

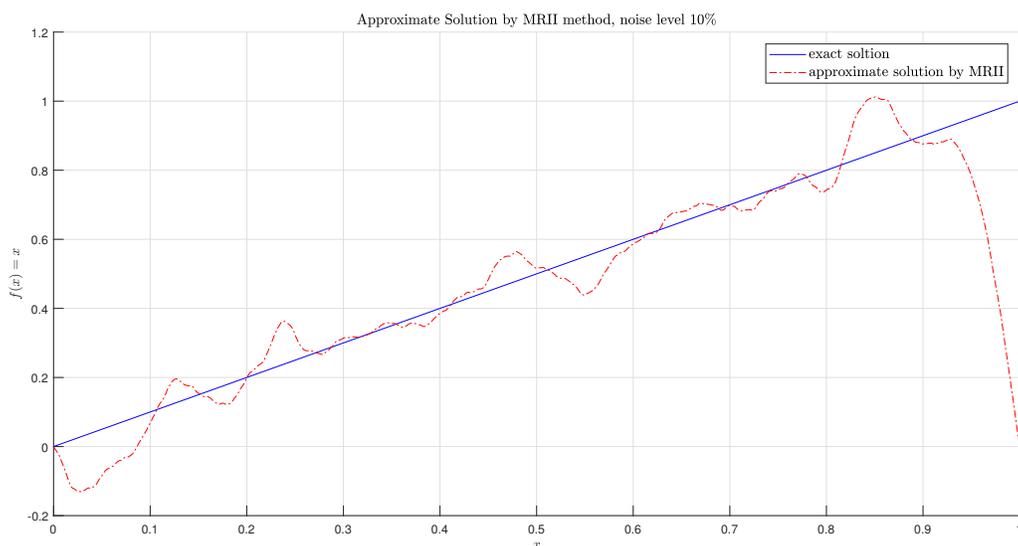


FIGURE 1.6 – MR-II iteration 6

On constate que la méthode donne une solution acceptable dans l’itération 3 et 4, ici le nombre de l’itération (dimension de sous-espace de **Krylov**) joue le rôle du paramètre de régularisation, la méthode MR-II est une approximation de la troncature spectrale sur la forme réduite de la matrice A dans le sous-espace  $\text{Vect}\{Ab^\delta, A^2b^\delta, \dots, A^k b^\delta\}$ , pour plus de

détails voir [72].

La deuxième méthode appartient à la famille des méthodes hybrides, on résout le système  $Ax = b^\delta$  par l'algorithme LSQR-b qui est prédéfini dans *Regularization Tools* [58].

La méthode LSQR-b donne la solution des problèmes de moindres carrés par l'algorithme LSQR basé sur la bidiagonalisation de **Lanczos**.

La fonction  $[X, rho, eta] = lsqr - b(A, bdelta, k, 0)$ ; exécute  $k$  étapes de l'algorithme de bidiagonalisation de Lanczos LSQR (d'après Paige & Saunders) appliqué au système  $\min \|Ax - b^\delta\|_2$ , elle renvoie toutes les  $k$  solutions, stockées sous forme de colonnes de la matrice  $X$ . Les semi-normes des solutions et les normes résiduelles sont renvoyées en  $\eta$  et en  $\rho$ , respectivement, LSQR-b est une implementation simple de l'algorithme décrit dans [105]. L'algorithme original inclut également la possibilité d'ajouter la régularisation de Tikhonov avec un paramètre de régularisation fixé au problème des moindres carrés. On prend  $k = 10$ , dans les figures ci-dessous on dessine la solution exacte  $x$  et la solution approchée  $x_k^\delta$  pour chaque itération de 1 à 6.

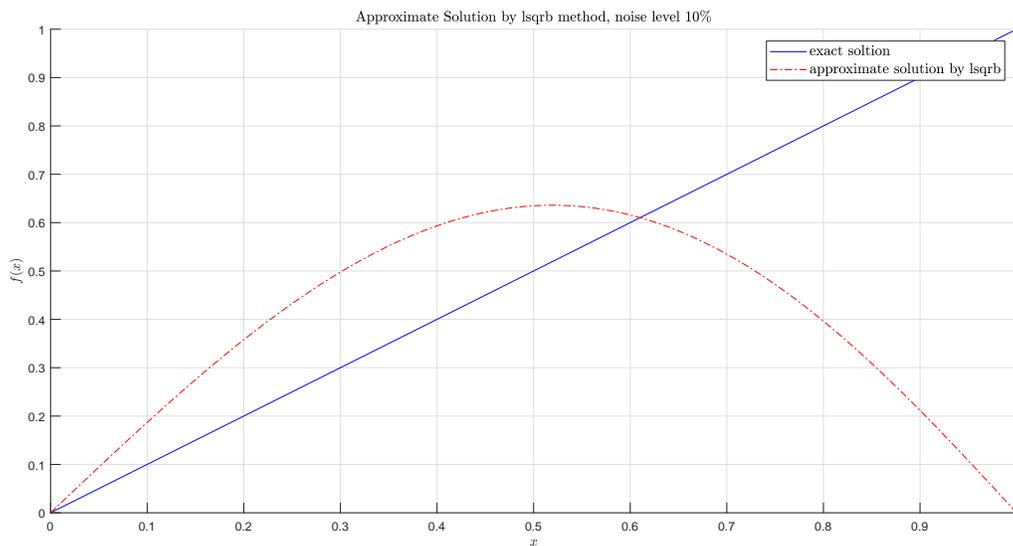


FIGURE 1.7 – LSQRb iteration 1

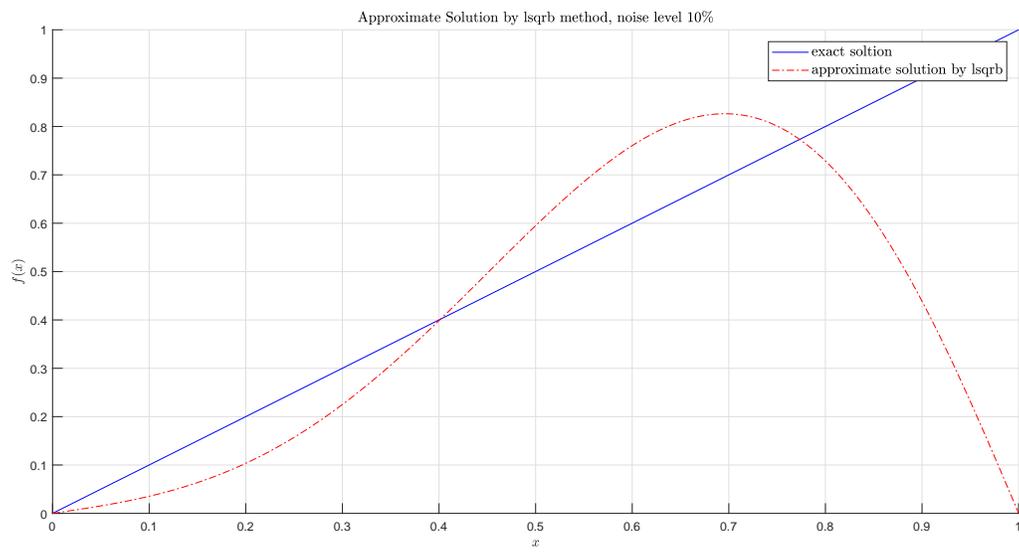


FIGURE 1.8 – LSQRb iteration 2

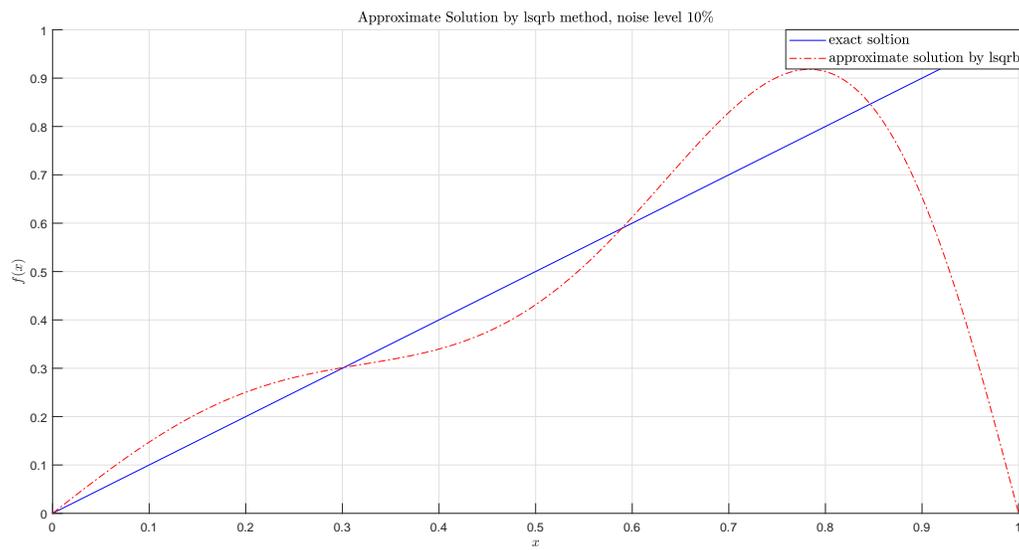


FIGURE 1.9 – LSQRb iteration 3

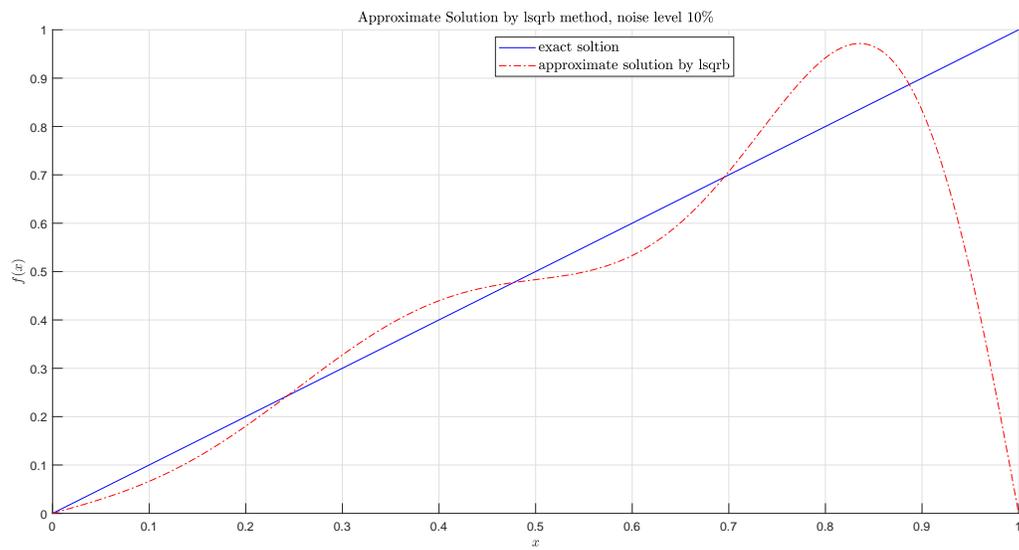


FIGURE 1.10 – LSQRb iteration 4

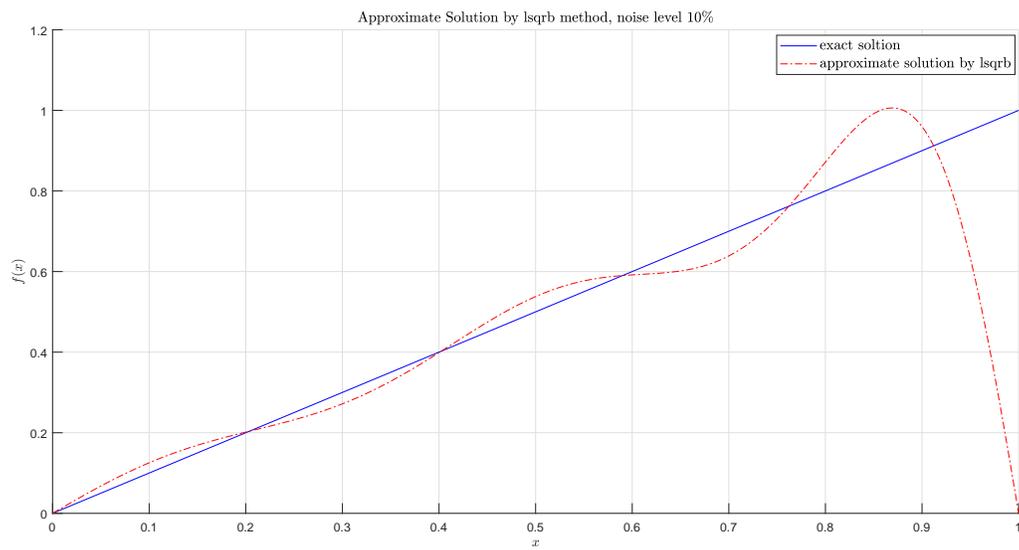


FIGURE 1.11 – LSQRb iteration 5

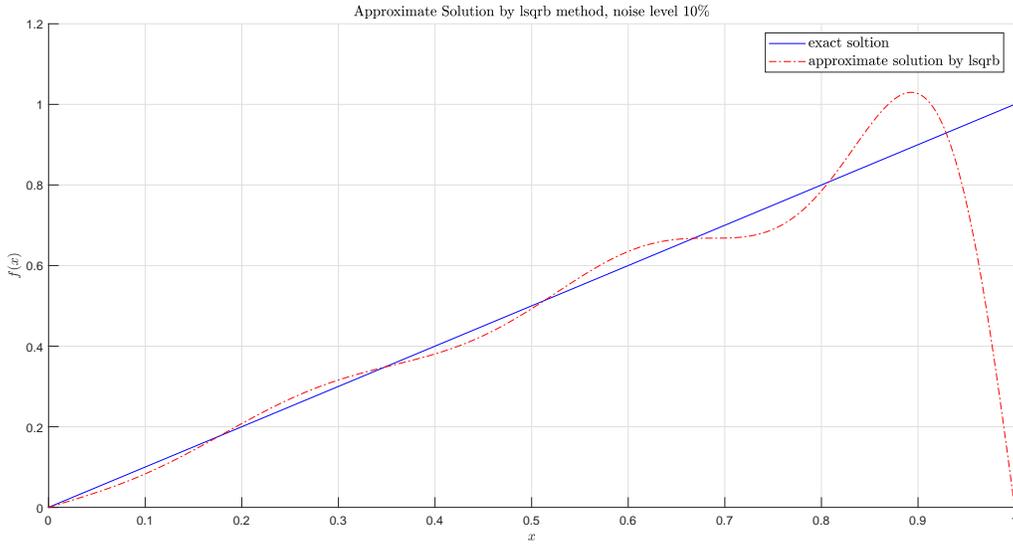


FIGURE 1.12 – LSQRb iteration 6

On remarque que la méthode LSQR-b, améliore la solution dans chaque itération, cela peut être expliqué par le double effet régularisant de la méthode, *i.e.*, le sous-espace de **Krylov** lisse  $\mathcal{K}_k(A^\top A, A^\top b^\delta)$  et le problème de moindre carré régularisé.

La troisième méthode proposée pour régulariser ce problème est la méthode **Tikhonov** projetée dans un sous-espace de **Krylov** (connue aussi sous le nom **Arnoldi-Tikhonov**[51, 49, 91, 100, 99, 113]). Ici comme le système **mal posé**  $Ax = b^\delta$  est symétrique, on va projeter la solution du problème régularisé par la méthode de **Tikhonov**  $(A^\top A + \lambda I)x = A^\top b^\delta$  dans le sous-espace de **Krylov**  $\mathcal{K}^k(A, b^\delta)$  construit par l'algorithme de **Lanczos**(3), ( $\lambda$  est le paramètre de régularisation), la solution est donnée par la formule suivante :

$$x_k^\delta = V \sum_{i=1}^k y_i^{(k)} \frac{\theta_i^{(k)}}{(\theta_i^{(k)})^2 + \lambda} (y_i^{(k)})^\top e_1 \|b^\delta\|.$$

$(y_i^k, \theta_i^k)_{i=1, \dots, k}$  est le couple propre de la matrice tridiagonale  $T_k$  obtenue par (1.4.8). On prend  $\lambda = 4 \times 10^{-5}$ , dans les figures ci-dessous on dessine la solution exacte  $x$  et la solution approchée  $x_{k, \lambda}^\delta$  dans les sous-espaces  $\mathcal{K}_i(A, b^\delta)$ , où  $i$  varié de 1 à 6.

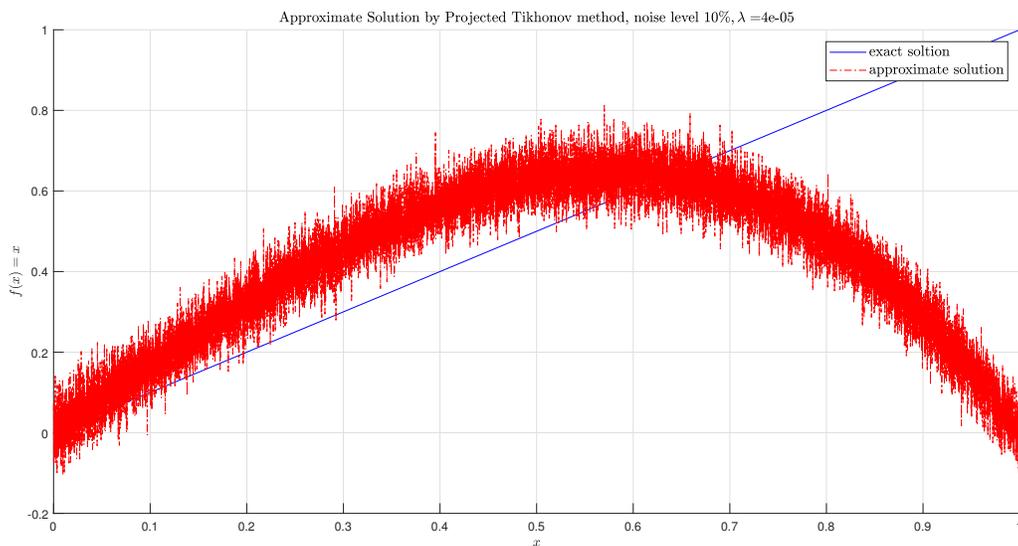


FIGURE 1.13 – Projected Tikhonov in  $\mathcal{K}_1(A, b^\delta)$

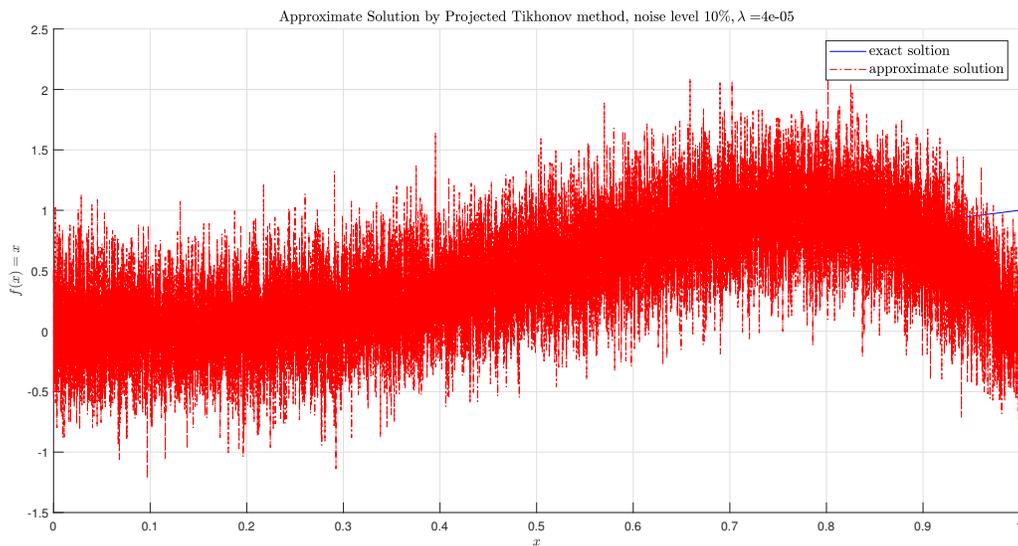


FIGURE 1.14 – Projected Tikhonov in  $\mathcal{K}_2(A, b^\delta)$

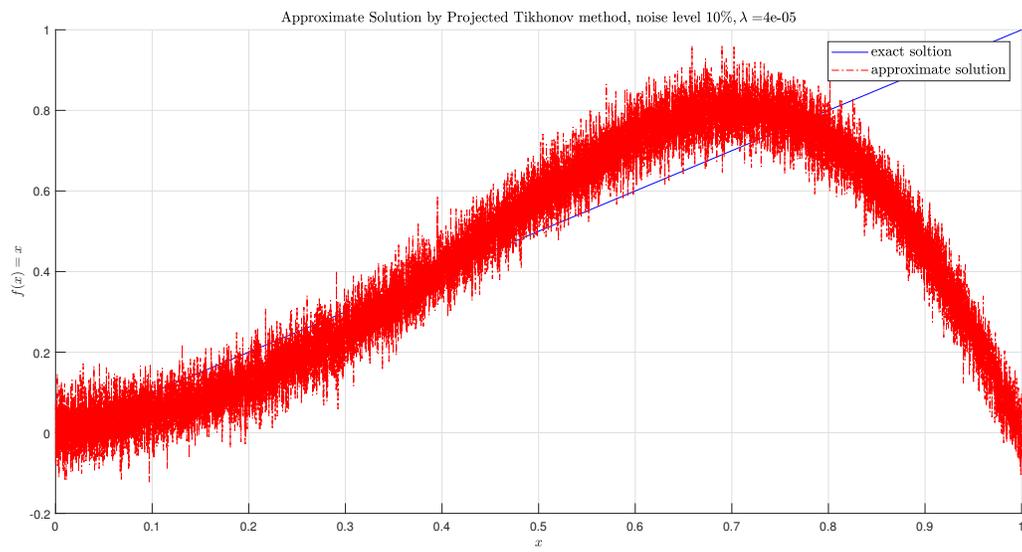


FIGURE 1.15 – Projected Tikhonov in  $\mathcal{K}_3(A, b^\delta)$

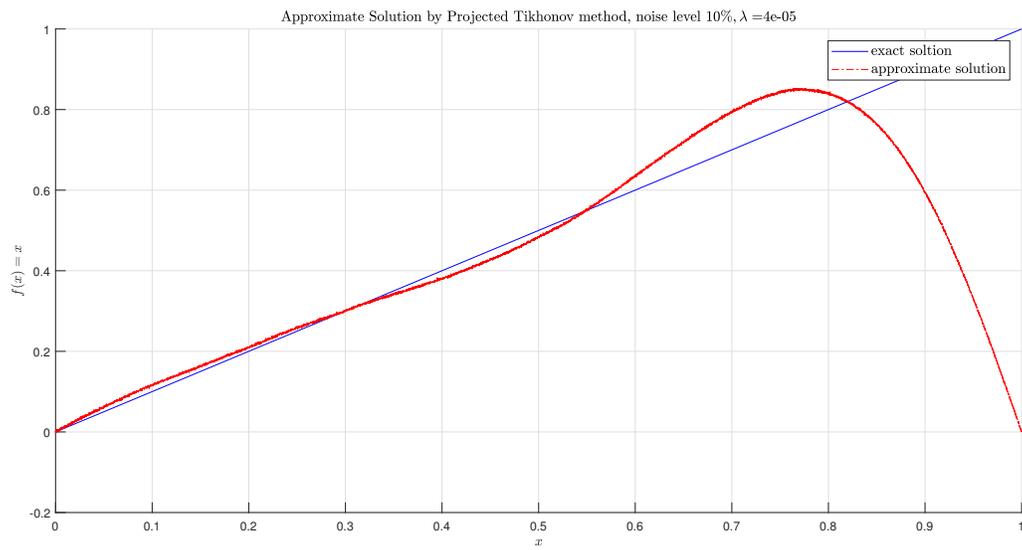


FIGURE 1.16 – Projected Tikhonov in  $\mathcal{K}_4(A, b^\delta)$

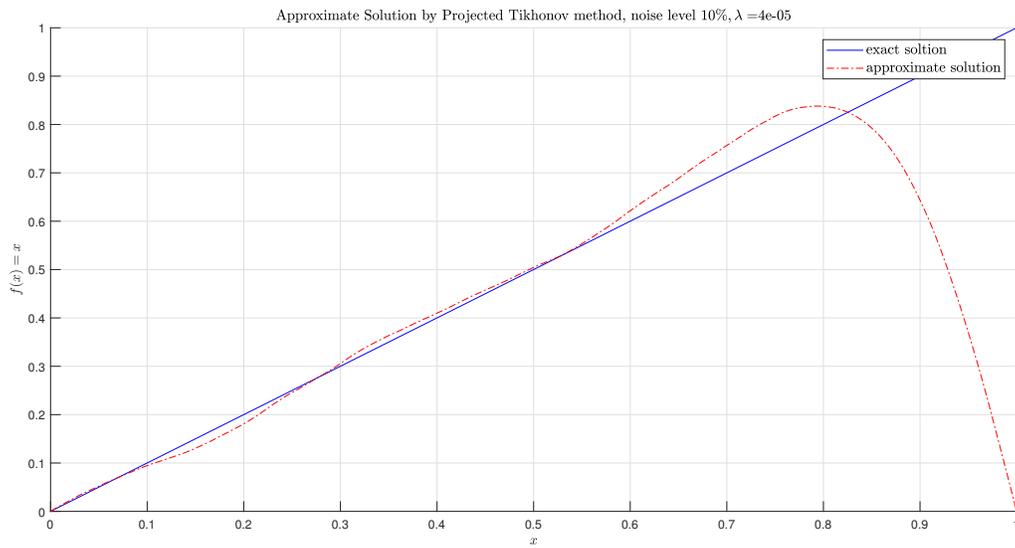


FIGURE 1.17 – Projected Tikhonov in  $\mathcal{K}_5(A, b^\delta)$

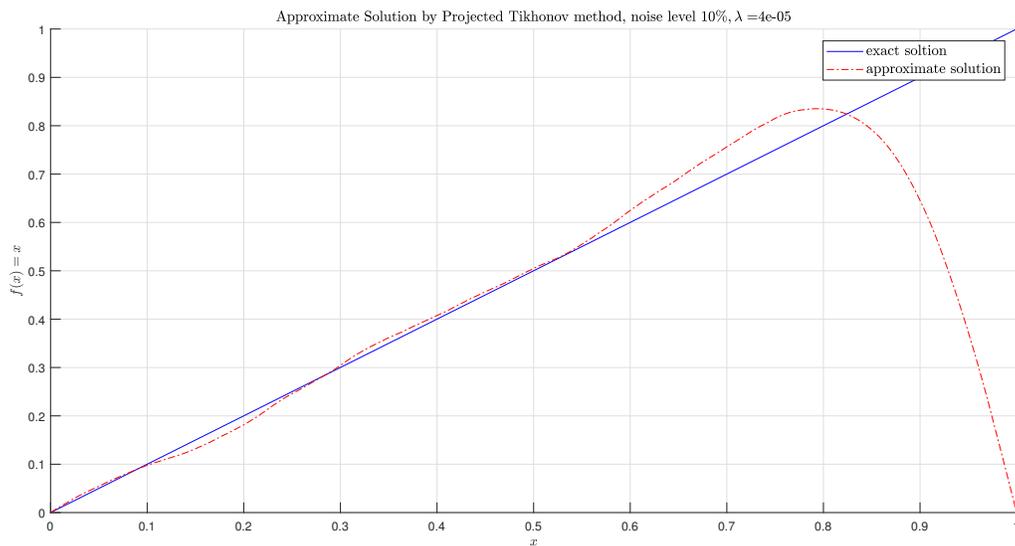


FIGURE 1.18 – Projected Tikhonov in  $\mathcal{K}_6(A, b^\delta)$

À partir de la dimension 5 des sous-espaces de **Krylov**, les valeurs de **Ritz** deviennent suffisantes pour représenter le spectre de  $A$ , ce qui donne une bonne solution régularisée.

**Explication.** À partir d’une certaine dimension du sous-espace  $\mathcal{K}_k(A, b)$  construit par la

méthode de **Lanczos**, les valeurs de **Ritz** sont distribuées d'une manière où elle favorise l'approximation des plus grandes valeurs propres de  $A$ , ce qui explique l'amélioration du filtre de la méthode de **Tikhonov** projetée en fonction de la dimension du sous-espace de **Krylov**.

Pour plus de détails sur le sujet de la distribution des valeurs de **Ritz** approchées par la méthode de **Lanczos** par rapport au spectre de  $A$ , voir les références : N. Parlett, Do we fully understand the symmetric Lanczos algorithms yet?, in Proc. Cornelius Lanczos International Centenary Conference, 1993 (J. D. Brown, M. T. Chu, D. C. Ellison and R. J. Plemmons, eds), SIAM, pp. 93-108.

Il faut mentionner que ces exemples ont été réalisés par un laptop avec un CPU intel(R) core(TM) i5 – 6200u cpu @ 2.30ghz 2 cores et de mémoire RAM 8,00Go, ce qui rend l'inversion de la matrice  $A$  ou le calcul de ces valeurs et vecteurs propres impossible à cause de taux de calcul et la taille de l'espace mémoire nécessaire qui dépasse les capacités de la machine, ce qui suggère la nécessité des processus de projection dans des sous-espaces de **Krylov** lorsqu'on traite des problèmes **mal posés** discrets de grande échelle.

La relation entre les sous-espaces de **Krylov** et les problèmes **mal posés** discrets de grande échelle traite aussi d'autres sujets dans la théorie de régularisation, comme le choix du paramètre de régularisation [114, 87, 61, 79, 9, 14]. Il y a aussi le travail intéressant de **S. Gazzola** et **P. Novati**, où ils ont montré que la condition de Picard discrète introduite par **P. C. Hansen** [57] est héréditaire dans les méthodes des sous-espaces de **Krylov**, pour plus de détail voir [50].

**Remarque 1.4.2.** Les travaux consacrés aux méthodes de projection de **Krylov**, pour calculer une solution régularisée dans les problèmes inverses (**mal posés**) en EDP, comme la reconstruction des conditions frontières, les valeurs initiales, détermination de sources, et l'identification de coefficients, se caractérisent par la rareté des résultats. Le premier pas dans cette direction est donné par **L. Eldén** et **V. Simoncini** dans [38], où ils ont régularisé un problème inverse **mal posé** de Cauchy (reconstruction de la frontière supérieure à partir de la frontière inférieure  $z = 0$ ) pour une EDP elliptique  $u_{zz} - Lu = 0$  dans un domaine de trois dimensions spatiales  $(x, y, z)$ , et cylindrique en  $z$ . Ils ont développé une procé-

ture numérique basée sur la méthode de **Krylov** rationnelle, où la solution du problème semi-discrétisé a été projetée dans un sous-espace généré à l'aide de la matrice  $L^{-1}$ , la solution stabilisée (régularisée) est construite par la troncature sur les valeurs de **Ritz**. La difficulté de cette idée réside dans la justification rigoureuse de l'estimation d'erreur. Une contribution récente dans cette direction est donnée par **O.S. Coulibaly, N. Boussetila** [30], à travers laquelle ils ont donné un détail complet de l'estimation d'erreur de la solution régularisée projetée pour un problème inverse du type identification de sources, engendré par un problème parabolique modélisant la diffusion dans un rectangle. Le reste des travaux existants traitent numériquement ce sujet sans donner l'erreur de convergence [21, 10], [68, 39, 116, 117, 42].

---

## Problème inverse de Goursat

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème inverse d'identification de source engendré par une équation de Goursat. Notre objectif est de reconstruire la source à partir d'une condition supplémentaire (mesure interne).

Ce type de problème est **mal posé** et nécessite des procédures de régularisation. Dans cette partie, nous adoptons deux méthodes pour cette reconstruction : la première stratégie est basée sur la troncature spectrale avec deux type de choix du paramètre de régularisation (fréquence de coupure), la deuxième procédure emploie la méthode de **Kozlov-Maz'ya** préconditionnée. Dans cette investigation, on donne l'analyse théorique et numérique de ces deux approches de régularisation et on montre à travers des exemples concrets l'effet de préconditionnement comme étant une correction du filtre spectral de la procédure de **Kozlov-Maz'ya**.

### 2.1 Position du problème

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme  $\|\cdot\|$ . On note par  $\mathcal{L}(H)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur  $H$ . Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur strictement positif, auto-adjoint et à résolvante compacte. Dans ce

---

cas  $A$  admet une base orthonormée formée de vecteurs propres  $(\phi_n) \subset H$  associés aux valeurs propres réelles  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$ , i.e.,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases},$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, \quad h_n = \langle h, \phi_n \rangle.$$

On considère le problème inverse suivant pour déterminer le terme source inconnu  $p \in H$  et la fonction  $u(t)$  pour  $t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2]$ , à partir de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Au(t) = p, & t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2], \\ u(t_1, 0) = 0, & t_1 \in [0, T_1], \\ u(0, t_2) = 0, & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où  $0 < T_1, T_2 < \infty$  et  $p$  est la fonction source inconnue qu'on veut la déterminer en utilisant la donnée supplémentaire suivante :

$$u(a, b) = g \in H, (a, b) \in [0, T_1] \times [0, T_2]. \quad (2.1.2)$$

**Remarque 2.1.1.** Dans cette étude, on considère le cas homogène pour simplifier les calculs.

Pour le cas non-homogène :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Au(t) = p, & t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2], \\ u(t_1, 0) = \varphi(t_1) & t_1 \in [0, T_1], \\ u(0, t_2) = \psi(t_2), & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \quad (2.1.3)$$

on suppose que  $\varphi$  et  $\psi$  satisfont les hypothèses suivantes :

$$\varphi(t_1) \in \mathcal{D}(A), \quad t_1 \in [0, T_1], \quad (H_1)$$

$$\psi(t_2) \in \mathcal{D}(A), \quad t_2 \in [0, T_2], \quad (H_2)$$

$$\varphi(0) = \psi(0) = \chi \in \mathcal{D}(A). \quad (H_3)$$

Sous ces conditions, on introduit la fonction suivante :

$$v(t_1, t_2) = u(t_1, t_2) - \varphi(t_1) - \psi(t_2) + \chi,$$

on obtient un problème homogène avec une nouvelle source  $\hat{p}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Av(t) = \hat{p} = p + \eta(t_1, t_2), & t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2], \\ v(t_1, 0) = 0, & t_1 \in [0, T_1], \\ v(0, t_2) = 0, & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \quad (2.1.4)$$

avec  $\eta(t_1, t_2) = A(\chi - \varphi(t_1) - \psi(t_2))$ .

Pour déterminer la source inconnue  $p$ , nous appliquons les mêmes procédures de régularisation que dans le cas homogène avec un calcul supplémentaire dans la mise en œuvre numérique.

Dans la pratique, les données  $g$  ne sont jamais connues avec précision. On suppose que les données exactes  $g$  et les données mesurées  $g^\delta$  satisfont  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ , où  $\delta$  est la quantité du bruit et le niveau de bruit est donné par  $\frac{\|g^\delta - g\|}{\|g\|}$ .

## 2.2 Rappels

Dans cette section, on donne quelques définitions et théorèmes qui seront utiles par la suite dans l'étude du problème, ainsi que dans le calcul des résultats de convergence.

**Définition 2.2.1.** Un opérateur linéaire  $M \in \mathcal{L}(H)$  est dit quasi-contractant si

$$\|M\| \leq 1.$$

**Théorème 2.2.1.** [124, Théorème 2.2] Soit  $M \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur auto-adjoint positif avec  $\|M\| \leq 1$ . Posons  $V_0 = N(M)$  et  $V_1 = N(I - M)$ . Alors on a :

$$s - \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \Pi_{V_1}, \quad s - \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M)^n = \Pi_{V_0}$$

i.e.,

$$\forall h \in H, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M^n h = \Pi_{V_1} h, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M)^n h = \Pi_{V_0} h,$$

où la notation  $\Pi_V$  désigne la projection orthogonale sur le sous-espace fermé  $V$ .

Pour plus de détails sur la théorie des opérateurs quasi-contractants, on renvoie le lecteur à Krasnosel'skii *et al* [82, p. 66].

Considérons l'équation opérationnelle

$$S\varphi = (I - M)\varphi = \psi, \tag{2.2.1}$$

où  $M$  est un opérateur quasi-contractant.

**Théorème 2.2.2.** Soit  $M$  un opérateur linéaire auto-adjoint, positif et quasi-contractant sur  $H$ . Soit  $\hat{\psi} \in H$  tel que l'équation (2.2.1) admet une solution  $\hat{\varphi}$ . Si 1 n'est pas une valeur propre de  $M$ , i.e.,  $(I - M)$  est injective ( $V_1 = N(I - M) = \{0\}$ ), alors les approximations successives

$$\varphi_{n+1} = M\varphi_n + \hat{\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

convergent vers  $\hat{\varphi}$  pour toute donnée initiale  $\varphi_0 \in H$ .

*Preuve.* D'après les hypothèses du théorème 2.2.1, nous avons :

$$\forall \varphi_0 \in H, M^n \varphi_0 \longrightarrow \Pi_{V_1} \varphi_0 = \Pi_{\{0\}} \varphi_0 = 0. \tag{2.2.2}$$

Par induction par rapport à  $n$ , il est facile de voir que  $\varphi_n$  a la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_n &= M^n \varphi_0 + \sum_{j=0}^{n-1} M^j \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n)(I - M)^{-1} \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n) \hat{\varphi},\end{aligned}$$

et l'équation (2.2.2) nous permet de conclure que

$$\hat{\varphi} - \varphi_n = M^n(\varphi_0 - \hat{\varphi}) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \quad (2.2.3)$$

□

**Remarque 2.2.1.** Dans de nombreuses situations, certains problèmes inverses peuvent être formulés par des équations de Fredholm de première espèce de la forme  $B\varphi = \psi$ , où  $B$  est un opérateur compact, positif auto-adjoint sur  $H$ . Cette équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\varphi = (I - \omega B)\varphi + \omega\psi = L\varphi + \omega\psi,$$

où  $L = (I - \omega B)$ , et  $\omega$  est un paramètre positif satisfaisant  $\omega < \frac{1}{\|B\|}$ . Il est facile de voir que l'opérateur  $L$  est quasi-contractant et 1 n'est pas une valeur propre de  $L$ . Il résulte du théorème 2.2.2 que la suite  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge et  $(I - \omega B)^n \zeta \longrightarrow 0$ , pour tout  $\zeta \in H$  lorsque  $n \longrightarrow \infty$ .

**Théorème 2.2.3.** (Théorème de Picard généralisé)[Prilepko, [112], p. 502]. Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $S$  un opérateur linéaire non borné, auto-adjoint positif sur  $H$ , et  $\Theta : \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, telle que :

$$\Theta(S) = \int_0^{+\infty} \Theta(\lambda) dE_\lambda \in \mathcal{L}(H),$$

où  $\{E_\lambda, \lambda \geq 0\}$  est la représentation spectrale de l'identité associée à  $S$ .

Soit  $Z(\Theta) = \{\lambda \in \sigma(A) : \Theta(\lambda) = 0\}$  l'ensemble des zéros de la fonction caractéristique  $\Theta(\lambda)$ , qu'on suppose qu'elle est de mesure nulle au sens de Lebesgue (vide ou au plus dénombrable). Alors

l'équation :

$$\Theta(S)u = v,$$

est correctement solvable si et seulement si :

1.  $Z(\Theta) \cap \sigma(A) = \emptyset$  (unicité).
2.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{|\Theta(\lambda)|^2} d\|E_\lambda v\|^2 < +\infty$  (existence).

**Fonctions de Bessel du premier type.** On désigne par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

la fonction de Bessel du premier type. Quelques propriétés de base de cette fonction sont listées dans le Lemme suivant.

**Lemme 2.2.1.** [111] On a les propriétés suivantes :

1.  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), J_n(-x) = J_{-n}(x),$
2.  $J_0(0) = 1, J_n(0) = 0, n \in \mathbb{N}^*,$
3.  $|J_0(x)| \leq 1, |J_n(x)| \leq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} J_0(x) = 0,$
4.  $\frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x),$
5.  $\frac{d}{dx} (x^{-n} J_n(x)) = -x^n J_{n+1}(x),$
6.  $2 \frac{d}{dx} (J_n(x)) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x),$
7.  $\frac{d^2}{dx^2} (J_n(x)) = \frac{1}{4} \{J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)\}.$

Pour  $a \geq 0$  on définit la fonction Riemann [133, p. 148] par la formule suivante

$$R(a; t_1, t_2) = J_0(2\sqrt{a}\sqrt{t_1 t_2}), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+, \quad (2.2.4)$$

où  $J_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Par simple calcul, on obtient les expressions suivantes

$$\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} R(a; t_1 - s_1, t_2 - s_2) ds_1 ds_2 = \frac{1 - R(a; t_1, t_2)}{a}, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \{R(a; t_1 - s_1, t_2 - s_2)\} = -\sqrt{a} \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} J_1(2\sqrt{a}\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}), \quad t_1 > 0, \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \{R(a; t_1 - s_1, t_2 - s_2)\} = -\sqrt{a} \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} J_1(2\sqrt{a}\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}), \quad t_2 > 0, \quad (2.2.7)$$

$$\forall t_2 > 0, \lim_{t_1 \rightarrow 0} \left\{ -\sqrt{a} \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} J_1(2\sqrt{a}\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}) \right\} = -at_2, \quad (2.2.8)$$

$$\forall t_1 > 0, \lim_{t_2 \rightarrow 0} \left\{ -\sqrt{a} \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_2}} J_1(2\sqrt{a}\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}) \right\} = -at_1, \quad (2.2.9)$$

$$\forall t_1 > 0, \forall t_2 > 0, \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial}{\partial t_1} \{R(a; t_1, t_2)\} = 0, \quad (2.2.10)$$

$$\forall t_1 > 0, \forall t_2 > 0, \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial}{\partial t_2} \{R(a; t_1, t_2)\} = 0, \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \{R(a; t_1, t_2)\} = \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} \{R(a; t_2, t_1)\} = -aR(a; t_1, t_2). \quad (2.2.12)$$

Sur la base de  $(\phi_n)$ , on introduit l'échelle de Hilbert  $\{H^s, s \in \mathbb{R}\}$  induite par  $A$  comme suit :

$$H^s = \mathcal{D}(A^s) = \{h \in H : \|h\|_{H^s}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} |\langle h, \phi_n \rangle|^2 \leq E < +\infty\}.$$

Soient  $0 < \theta_1 < \theta_2$  et  $0 < \theta_3 < \theta_4$ , alors on a les inclusions topologiques suivantes :

$$H^{\theta_2} \subset H^{\theta_1} \subset H^0 = H \subset H^{-\theta_3} \subset H^{-\theta_4}.$$

**Remarque 2.2.2.** Pour  $s > 0$ , l'espace de Hilbert  $H^{-s}$  est l'espace dual topologique de  $H^s$ , i.e.,  $H^{-s} = (H^s)'$ .

## 2.3 Analyse du problème

### 2.3.1 Problème direct

Considérons le problème bien posé suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Av(t) = p, & t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2], \\ v(t_1, 0) = 0, & t_1 \in [0, T_1], \\ v(0, t_2) = 0, & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \quad (2.3.1)$$

où  $0 < T_1, T_2 < \infty$  et  $p$  est une fonction donnée de  $H$ . En utilisant le développement en séries de Fourier de la fonction  $p$  :

$$p = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \phi_k, \quad p_k := \langle p, \phi_k \rangle,$$

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \phi_k, \quad v_k(t) := \langle v(t), \phi_k \rangle,$$

on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_k(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + \lambda_k v_k(t) = p_k, & t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2], \\ v_k(t_1, 0) = 0, & t_1 \in [0, T_1], \\ v_k(0, t_2) = 0, & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \quad (2.3.2)$$

En vertu de (2.2.4), (2.2.5) et (2.2.12), on en déduit que la solution exacte de (2.3.2) est donnée par

$$v_k(t) = \lambda_k^{-1} (1 - R(\lambda_k; t_1, t_2)) p_k = \lambda_k^{-1} (1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k} \sqrt{t_1 t_2})) p_k, \quad (2.3.3)$$

où  $R(\lambda; t_1, t_2) = J_0(2\sqrt{\lambda} \sqrt{t_1 t_2})$ ,  $\lambda \geq 0$ .

On définit l'opérateur linéaire borné  $R(A; t_1, t_2)$  par

$$R(A; t_1, t_2)h = \sum_{k=1}^{+\infty} R(\lambda_k; t_1, t_2) \langle h, \phi_k \rangle \phi_k, \quad h = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle h, \phi_k \rangle \phi_k \in H.$$

D'après les propriétés de la fonction de Bessel  $J_0(\cdot)$ , on a

$$\|R(A; t_1, t_2)\| = \sup_{k \geq 1} |R(\lambda_k; t_1, t_2)| \leq 1, \quad (2.3.4)$$

$$\|R(A; t_1 = 0, t_2)\| = \|R(A; t_1, t_2 = 0)\| = \|R(A; t_1 = 0, t_2 = 0)\| = 1, \quad (2.3.5)$$

$$\|R(A; t_1, t_2)\| < 1, \quad \forall t_1 > 0, t_2 > 0. \quad (2.3.6)$$

$$\|I - R(A; t_1, t_2)\| = \sup_{k \geq 1} |1 - R(\lambda_k; t_1, t_2)| \leq 2, \quad (2.3.7)$$

$$\|F(A; t_1, t_2)\| = \|A^{-1}(I - R(A; t_1, t_2))\| = \sup_{k \geq 1} |\lambda_k^{-1}(1 - R(\lambda_k; t_1, t_2))| \leq \frac{2}{\lambda_1}. \quad (2.3.8)$$

Maintenant, on est dans la position pour énoncer nos principaux résultats.

**Théorème 2.3.1.** *Pour tout  $p \in H$  (ou  $H^{-1}$ ), le problème (2.3.1) admet une solution unique donnée par*

$$v(t_1, t_2) = F(A; t_1, t_2) = A^{-1}(I - R(A; t_1, t_2))p = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{-1}(1 - R(\lambda_k; t_1, t_2)) \langle p, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (2.3.9)$$

De plus, on a les estimations de stabilité suivantes

$$\sup_{t=(t_1, t_2) \in \bar{Q}} \|v(t)\| \leq \frac{2}{\lambda_1} \|p\|, \quad (2.3.10)$$

$$\sup_{t=(t_1, t_2) \in \bar{Q}} \|v(t)\| \leq 2 \|p\|_{H^{-1}}, \quad (2.3.11)$$

où  $Q = ]0, T_1[ \times ]0, T_2[$ ,  $\bar{Q} = [0, T_1] \times [0, T_2]$ .

**Remarque 2.3.1.** Grâce aux (2.2.6)-(2.2.12), la fonction  $F(A; t_1, t_2) = A^{-1}(I - R(A; t_1, t_2))$

est fortement continue, et pour tous  $p \in H$ , la fonction  $v(t) = F(A; t_1, t_2)p$  satisfait les propriétés de régularité suivantes

1.  $\forall t \in \overline{Q}, v(t) \in H^1, v(t) \in C(\overline{Q}, H^1);$
2.  $\frac{\partial v(t)}{\partial t_i} \in C(]0, T_1[ \times ]0, T_2[, H^{\frac{1}{2}}) \cap C(\overline{Q}, H), i=1,2;$
3.  $\frac{\partial^2 v(t)}{\partial t_1 \partial t_2} \in C(\overline{Q}, H).$

### 2.3.2 Problème inverse

En utilisant la mesure interne  $u(a, b) = F(A; a, b)p = g$ , on conclut que le problème inverse (2.1.1) est équivalent à l'équation de première espèce :

$$F(A; a, b)p = g. \quad (2.3.12)$$

L'analyse théorique du problème (2.3.12) est essentiellement basée sur les caractéristiques de la fonction  $F(\lambda; a, b)$  et le théorème de Picard généralisé (2.2.3).

On vérifie bien que

$$\forall \lambda \geq \lambda_1, \quad 0 < F(\lambda; a, b) = \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda}\sqrt{ab})}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda_1}, \quad (2.3.13)$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda; a, b) = 0, \quad (2.3.14)$$

ce qui implique que  $F(A; a, b)$  est un opérateur compact injectif, définie positive, auto-adjoint, , et son inverse  $F(A; a, b)^{-1}$  est un opérateur non borné donné par

$$F(A; a, b)^{-1}g = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \langle g, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (2.3.15)$$

Cette série est convergente si et seulement si

$$\|F(A; a, b)^{-1}g\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k^2}{(1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab}))^2} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

**Remarque 2.3.2.** A partir de (2.3.15) on constate que  $u(t)$  est instable. Cette instabilité est provoquée par les hautes fréquences

$$\mu_k = \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty.$$

Par un simple calcul, la fonction  $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})}$  peut être estimée comme suit

$$\frac{\lambda_k}{2} \leq \mu_k \leq \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda^*}\sqrt{ab})}, \quad (2.3.16)$$

où en  $\lambda^*$  la fonction  $J_0(2\sqrt{\lambda}\sqrt{ab})$  atteint sa valeur maximale positive.

A partir de (2.3.16) et grâce au Théorème Picard généralisé, on en déduit que le problème inverse (2.3.12) est correctement résoluble si et seulement si  $g \in H^1$ , i.e.,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 |\langle g, \phi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

**Théorème 2.3.2.** Pour tout  $g \in H^1$ , le problème (2.3.12) admet une solution unique donnée par

$$p = F(A; a, b)^{-1}g = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \langle g, \phi_k \rangle \phi_k \quad (2.3.17)$$

**Théorème 2.3.3.** Pour tout  $g \in H^1$ , le problème (2.1.1) admet une solution unique donnée par

$$u(t) = F(A; t_1, t_2)p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{t_1 t_2})}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \langle g, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (2.3.18)$$

## 2.4 Régularisation par troncature spectrale

La manière standard de stabiliser un problème **mal posé** est d'éliminer les hautes fréquences et de considérer la solution tronquée comme une approximation de la solution instable.

**Définition 2.4.1.** Pour  $N > 0$ , la solution régularisée du problème (2.3.12) (resp. (2.1.1)) est

donnée par

$$p_N = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \langle g, \phi_k \rangle \phi_k, \quad (2.4.1)$$

$$u_N(t) = F(A; t_1, t_2) p_N = \sum_{k=1}^N \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{t_1 t_2})}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \langle g, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (2.4.2)$$

**Remarque 2.4.1.** Si le paramètre  $N$  est grand,  $p_N$  est proche de la solution exacte  $p$ . D'autre part, si le paramètre  $N$  est fixé,  $p_N$  est borné. Par conséquent, l'entier positif  $N$  joue le rôle de paramètre de régularisation.

**Remarque 2.4.2.** En raison de

$$\|u(t) - u_N(t)\| = \|F(A; t_1, t_2)(f - f_N)\| \leq 2\|(p - p_N)\|,$$

il s'ensuit immédiatement

$$\|u - u_N\|_{\infty} = \sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t) - u_N(t)\| \leq 2\|p - p_N\| \longrightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Comme les données  $g$  sont basées sur des observations (physiques) et ne sont pas connues avec une précision absolue, nous supposons que  $g$  et  $g^\delta$  satisfont  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ , où  $g^\delta$  indique les données mesurées et  $\frac{\|g^\delta - g\|}{\|g\|}$  désigne le niveau du bruit.

Soit  $(p_N^\delta, u_N^\delta)$  la solution régularisée du problème (2.3.12) (resp. (2.1.1)) avec des données mesurées entachées du bruit  $g^\delta$  :

$$p_N^\delta = \sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \langle g^\delta, \phi_k \rangle \phi_k, \quad (2.4.3)$$

$$u_N^\delta(t) = \sum_{k=1}^N \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{t_1 t_2})}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \langle g^\delta, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (2.4.4)$$

Pour obtenir le taux de convergence, on suppose que la source du problème (2.3.12) est régulière :

$$\|A^\theta p\|^2 \leq E^2 \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{2\theta} |p_k|^2 \leq E^2 < +\infty. \quad (2.4.5)$$

où  $E > 0$  est une constante donnée.

### 2.4.1 Convergence et estimations d'erreur

Dans cette partie, on donne des estimations d'erreur accompagnées de deux critères du choix du paramètre de régularisation : choix a priori et choix a posteriori.<sup>1</sup>

#### A) Le choix a priori du paramètre de régularisation

**Théorème 2.4.1.** Si  $p \in B(\theta, E) = \{h \in D(A^\theta) : \|A^\theta h\| \leq E\}$ ,  $\theta > 0$ , et si  $\lambda_N \approx \left(\frac{E}{\delta}\right)^{1/(1+\theta)}$ , alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|p - p_N^\delta\| \leq (1 + M) \delta^{\frac{\theta}{\theta+1}} E^{\frac{1}{\theta+1}}, \quad (2.4.6)$$

$$\text{où } M = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda}\sqrt{ab})}.$$

*Preuve.* Posons

$$\omega_k = \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \leq M\lambda_k,$$

$$M = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda}\sqrt{ab})}, \quad g_k = \langle g, \phi_k \rangle, \quad g_k^\delta = \langle g^\delta, \phi_k \rangle.$$

Par des calculs directs, on obtient

$$\|p - p_N^\delta\| = \|p - p_N + p_N - p_N^\delta\| \leq \|p - p_N\| + \|p_N - p_N^\delta\| = \Delta_1 + \Delta_2, \quad (2.4.7)$$

$$(\Delta_1)^2 = \|p - p_N\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle p, \phi_k \rangle \phi_k - \sum_{k=1}^N \langle p, \phi_k \rangle \phi_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \langle p, \phi_k \rangle^2, \quad (2.4.8)$$

$$(\Delta_2)^2 = \|p_N - p_N^\delta\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^N \omega_k g_k \phi_k - \sum_{k=1}^N \omega_k g_k^\delta \phi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2, \quad (2.4.9)$$

1. Le paramètre de régularisation dans la méthode de troncature est l'entier  $N$  lié à la valeur propre  $\lambda_N$  appelée fréquence de coupure.

$$(\Delta_1)^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^{-2\theta} \lambda_k^{2\theta} \langle p, \phi_k \rangle^2 \leq \lambda_N^{-2\theta} \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^{2\theta} \langle p, \phi_k \rangle^2 \leq \lambda_N^{-2\theta} E^2, \quad (2.4.10)$$

$$(\Delta_2)^2 = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_N^2 M^2 \sum_{k=1}^N |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_N^2 M^2 \delta^2. \quad (2.4.11)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 &\leq \lambda_N^{-\theta} E + \lambda_N M \delta \\ &\approx \left( \left( \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} \right)^{-\theta} E + M \delta \left( \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} = (1 + M) E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \end{aligned}$$

□

### B) Choix a posteriori du paramètre de régularisation

On propose de choisir le paramètre de régularisation comme étant le premier entier  $N$  lié à la valeur propre  $\lambda_N$  où  $N$  vérifiant  $\|(I - P_N)g^\delta\| \leq \tau\delta$ , et  $\tau > 1$  est une constante positive. Plus précisément, il satisfait la relation suivante :

$$\|(I - P_N)g^\delta\| \leq \tau\delta \leq \|(I - P_{N-1})g^\delta\|, \quad (2.4.12)$$

où  $P_N : H \rightarrow H_N = \text{vect}\{\phi_n, n \leq N\}$  est l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace fermé  $H_N$  et  $I$  est l'opérateur d'identité.

Soit

$$P_N g^\delta = \sum_{k=1}^N \langle g^\delta, \phi_k \rangle \phi_k, \quad (2.4.13)$$

et

$$\Phi_N = \|(I - P_N)g^\delta\|. \quad (2.4.14)$$

Selon le lemme suivant, il existe une solution unique pour (2.4.12).

**Lemme 2.4.1.** *Pour  $\delta > 0$ , la fonction  $\Phi_N$  possède les propriétés suivantes :*

(a)  $\Phi_N$  est une fonction continue ;

(b)  $\lim_{N \rightarrow 0^+} \Phi_N = \|g^\delta\|$  ;

$$(c) \lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi_N = 0;$$

(d)  $\Phi_N$  est une fonction strictement décroissante sur  $(0, \infty)$ .

**Lemme 2.4.2.** Pour  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$  et  $p$  satisfaisant (2.4.5). Si on prend  $N$  comme solution de (2.4.12), alors on a l'inégalité suivante :

$$\lambda_N \leq \left( \frac{2E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}}. \quad (2.4.15)$$

*Preuve.* En utilisant de  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$  et (2.4.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \|P_{N-1}g - g\| &= \|(P_{N-1} - I)g^\delta - (I - P_{N-1})(g - g^\delta)\| \\ &\geq \|(P_{N-1} - I)g^\delta\| - \|(I - P_{N-1})(g - g^\delta)\| \\ &\geq \tau\delta - \delta = (\tau - 1)\delta. \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|P_{N-1}g - g\|^2 &= \sum_{k=N}^{\infty} |\langle g, \phi_k \rangle|^2 = \sum_{k=N}^{\infty} \left( \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})}{\lambda_k} \right)^2 |\langle p, \phi_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=N}^{\infty} \left( \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})}{\lambda_k} \right)^2 \times \lambda_k^{-2\theta} \times \lambda_k^{2\theta} |\langle p, \phi_k \rangle|^2 \\ &\leq \sup_{k \geq N} \left( \left( \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})}{\lambda_k} \right)^2 \times \lambda_k^{-2\theta} \right) E^2 \leq (2\lambda_N^{-(1+\theta)} E)^2. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

En combinant (2.4.16) avec (2.4.17), on obtient

$$(\tau - 1)\delta \leq \|P_{N-1}g - g\| \leq 2\lambda_N^{-(1+\theta)} E,$$

et donc

$$\lambda_N \leq \left( \frac{2E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}}$$

□

**Théorème 2.4.2.** Si  $p \in B(\theta, E) = \{h \in D(A^\theta) : \|A^\theta h\| \leq E\}$ ,  $\theta > 0$ , et si  $N$  est la solution de

(2.4.12), alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|p - p_N^\delta\| \leq \left( M \left( \frac{2}{\tau - 1} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} + (M(\tau + 1))^{\frac{\theta}{1+\theta}} \right) E^{\frac{1}{\theta+1}} \delta^{\frac{\theta}{\theta+1}}, \quad (2.4.18)$$

$$\text{où } M = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda}\sqrt{ab})}.$$

*Preuve.* De l'inégalité triangulaire, on a

$$\|p - p_N^\delta\| = \|p - p_N + p_N - p_N^\delta\| \leq \|p - p_N\| + \|p_N - p_N^\delta\| = \Delta_1 + \Delta_2, \quad (2.4.19)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_1)^2 &= \|p - p_N\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \langle p, \phi_k \rangle \phi_k - \sum_{k=1}^N \langle p, \phi_k \rangle \phi_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle p, \phi_k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \right)^2 |\langle g, \phi_k \rangle|^2, \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

$$(\Delta_2)^2 = \|p_N - p_N^\delta\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^N \omega_k g_k \phi_k - \sum_{k=1}^N \omega_k g_k^\delta \phi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2, \quad (2.4.21)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_1)^2 &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \right)^2 |\langle g, \phi_k \rangle|^{\frac{2}{1+\theta}} |\langle g, \phi_k \rangle|^{\frac{2\theta}{1+\theta}}, \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \left( \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \right)^{2(1+\theta)} |\langle g, \phi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{1+\theta}} |\langle g, \phi_k \rangle|^{\frac{2\theta}{1+\theta}}, \\ &\leq \left( \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \right)^{2(1+\theta)} |\langle g, \phi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{1+\theta}} \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle g, \phi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{\infty} \langle g, \phi_k \rangle^2 = \|(I - P_N)g\| &\leq \|(I - P_N)g^\delta\| + \|(I - P_N)(g - g^\delta)\| \\ &\leq \tau\delta + \delta = (\tau + 1)\delta. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Ce qui implique que

$$\left( \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle g, \phi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} \leq ((\tau + 1)\delta)^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (2.4.24)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \right)^{2(1+\theta)} |\langle g, \phi_k \rangle|^2 &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_k}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \right)^{2\theta} |\langle p, \phi_k \rangle|^2 \\ &\leq \sup_{k>N} \left( \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k}\sqrt{ab})} \right)^{2\theta} E^2 \leq M^{2\theta} E^2, \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

d'où il vient

$$\Delta_1 \leq (M(\tau + 1))^{\frac{\theta}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (2.4.26)$$

Pour  $\Delta_2$ , on a

$$(\Delta_2)^2 = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_N^2 M^2 \sum_{k=1}^N |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_N^2 M^2 \delta^2. \quad (2.4.27)$$

Comme  $N$  est la solution de (2.4.12),  $\lambda_N \leq \left( \frac{2E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}}$ , ce qui donne

$$\Delta_2 \leq M\delta \left( \frac{2E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} = M \left( \frac{2}{(\tau - 1)} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (2.4.28)$$

En combinant (2.4.26) et (2.4.28), il résulte

$$\begin{aligned}\Delta_1 + \Delta_2 &\leq (M(\tau + 1))^{\frac{\theta}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}} + M \left( \frac{2}{(\tau - 1)} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}} \\ &= \left( M \left( \frac{2}{\tau - 1} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} + (M(\tau + 1))^{\frac{\theta}{1+\theta}} \right) E^{\frac{1}{\theta+1}} \delta^{\frac{\theta}{\theta+1}}.\end{aligned}$$

□

## 2.5 Procédure de Kozlov-Maz'ya préconditionnée

Dans cette partie, on emploie une variante de régularisation itérative de **Kozlov-Maz'ya** sans préconditionnement appliquée à un problème inverse de Goursat. Cette technique est une adaptation de la méthode présentée dans [81] par **Kozlov-Maz'ya** en 1990 pour la régularisation d'un problème d'EDP **mal posé**. Ensuite, on propose de préconditionner la méthode pour accélérer l'élimination des hautes fréquences par le filtre spectral de cette méthode, et on donne des exemples numériques qui confirment réellement que le préconditionnement améliore la qualité de la régularisation.

Par une méthodologie analogue à celle de la section précédente, le choix du paramètre de régularisation est choisi selon la stratégie a priori et a posteriori.<sup>2</sup>

L'algorithme itératif pour résoudre le problème **mal posé** (2.3.12) (resp. (2.1.1)) commence par le choix de l'élément arbitraire  $p_0 \in H$ . La première approximation  $u^0(t)$  est la solution du problème direct (bien-posé) suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^0(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Au^0(t) = p_0, & t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2], \\ u^0(t_1, 0) = 0, & t_1 \in [0, T_1], \\ u^0(0, t_2) = 0, & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Une fois la paire  $(u^k, p_k)$  est construite, on définit

$$(IT)_{k+1} : \quad p_{k+1} = p_k - \omega \left( u^k(a, b) - g \right),$$

<sup>2</sup>. Dans les méthodes de régularisation itératives, le paramètre de régularisation est l'entier  $k$  de la  $k$ -ième itération.

où  $0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|F(A; a, b)\|}$  avec

$$\|F(A; a, b)\| = \sup_{k \geq 1} \frac{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_k} \sqrt{ab})}{\lambda_k} \leq \frac{2}{\lambda_1}. \quad (2.5.2)$$

En fin  $u^{k+1}$  s'obtient en résolvant le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^{k+1}(t)}{\partial t_1 \partial t_2} + Au^{k+1}(t) = p_{k+1}, & t = (t_1, t_2) \in ]0, T_1] \times ]0, T_2], \\ u^{k+1}(t_1, 0) = 0, & t_1 \in [0, T_1], \\ u^{k+1}(0, t_2) = 0, & t_2 \in [0, T_2], \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Posons  $G = I - \omega F(A; a, b)$ . Si on itère l'algorithme  $(IT)_{k+1}$  on obtient :

$$p_k = G^k p_0 + (I - G^k)p,$$

$$p_k - p = G^k(p_0 - p),$$

$$u^k(t) - u(t) = F(A; t_1, t_2)G^k(p_0 - p).$$

**Proposition 2.5.1.** *L'opérateur  $G = I - \omega F(A; a, b)$  est auto-adjoint et quasi-contractant sur  $H$  (1 n'est pas une valeur propre de  $G$ ). De plus, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$\left\| \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|G^i\| \leq k.$$

*Preuve.* — Le caractère auto-adjoint découle de la définition de  $G$ . Comme

$$0 < G(\lambda) < 1, \quad \forall \lambda \geq \lambda_1,$$

alors  $\sigma_p(G) \subset ]0, 1[$ . Par conséquent 1 n'est pas une valeur propre de  $G$ .

— Comme  $\|G\| \leq 1$  il en résulte immédiatement que  $\left\| \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \leq k$ .

□

Le lemme suivant sera utilisé dans la preuve des estimations de convergence.

**Lemme 2.5.1.** [140] Pour  $0 < \mu < 1$ , on définit  $p_k(\mu)$  et  $r_k(\mu)$  par :

$$p_k(\mu) = \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \mu)^i,$$

et

$$r_k(\mu) = 1 - p_k(\mu) = (1 - \mu)^k.$$

On a :

$$\begin{aligned} p_k(\mu)\mu^\theta &\leq k^{1-\theta}, & 0 \leq \theta \leq 1, \\ r_k(\mu)\mu^\theta &\leq \kappa_\theta(k+1)^{-\theta}, \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

où  $\kappa_\theta = 1$  si  $0 \leq \theta \leq 1$  et  $\kappa_\theta = \theta^\theta$  si  $\theta > 1$ .

## 2.5.1 Convergence et estimations d'erreur

### A) Choix a priori du paramètre de régularisation

Tout d'abord, on commence par le résultat de la convergence suivant.

**Théorème 2.5.1.** Soient  $p_0$  un élément quelconque du processus itératif proposé ci-dessus et  $u^k$  la  $k$ -ième solution approchée. On a :

$$\sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t) - u^k(t)\| \longrightarrow 0, k \longrightarrow +\infty. \quad (2.5.5)$$

De plus, si  $(p - p_0) \in H^\theta$ ,  $\theta > 0$ , alors le taux de convergence de la méthode est donné par

$$\sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t) - u^k(t)\| \leq \frac{\tau_\theta}{(1+k)^\theta}, \quad (2.5.6)$$

où  $\tau_\theta = \kappa_\theta \left(\frac{M}{\omega}\right)^\theta E$ .

*Preuve.* (i) Il résulte immédiatement du Théorème 2.2.2 et (2.3.13) que

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^k(t)\| &= \|F(A; t_1, t_2)G^k(p_0 - p)\| \\ &\leq \|F(A; t_1, t_2)\| \|G^k(p_0 - p)\| \\ &\leq \frac{2}{\lambda_1} \|G^k(p_0 - p)\| \longrightarrow 0, k \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

(ii) Pour des raisons de simplicité et de commodité, on note

$$0 < \mu_n = 1 - \omega F(\lambda_n; a, b) < 1, \quad (2.5.8)$$

et

$$M = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda}\sqrt{ab})}. \quad (2.5.9)$$

On a

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^k(t)\|^2 &= \|F(A; t_1, t_2)G^k(p_0 - p)\|^2 \\ &\leq \left(\frac{2}{\lambda_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2k} |(p - p_0)_n|^2 \\ &= \left(\frac{2}{\lambda_1}\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2k} (\omega F(\lambda_n, a, b))^{2\theta} (\omega F(\lambda_n, a, b))^{-2\theta} |(p - p_0)_n|^2. \end{aligned}$$

En utilisant (2.5.4) et (2.5.9), on en déduit les estimations suivantes

$$(1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2k} (\omega F(\lambda_n, a, b))^{2\theta} \leq \left(\kappa_\theta \frac{1}{(k+1)^\theta}\right)^2, \quad (2.5.10)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\omega F(\lambda_n, a, b))^{-2\theta} |(p - p_0)_n|^2 \leq \left(\frac{M}{\omega}\right)^{2\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2\theta} |(p - p_0)_n|^2 \leq \left(\frac{M}{\omega}\right)^{2\theta} E^2. \quad (2.5.11)$$

En combinant (2.5.10) et (2.5.11), on obtient l'estimation souhaitée.  $\square$

**Remarque 2.5.1.** Soient  $u_\delta^k(t)$  la  $k$ -ième solution approximative associée aux données per-

turbées  $g^\delta$  telles que  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ . Alors, on a

$$\|u(t) - u_\delta^k(t)\| \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

où

$$\Delta_1 = \|u(t) - u^k(t)\| \leq \frac{\tau_\theta}{(1+k)^\theta},$$

et

$$\Delta_2 = \|u^k(t) - u_\delta^k(t)\| = \|\omega F(A; t_1, t_2) \sum_{i=0}^{k-1} (g - g^\delta)\| \leq \omega \frac{2}{\lambda_1} k\delta.$$

Pour  $k = k(\delta) = [s]^3$  avec  $s = \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+\theta}}$ , l'estimation de l'erreur totale est donnée par

$$\sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t) - u_\delta^k(t)\| \leq \frac{\tau_\theta}{(1+k)^\theta} + \omega \frac{2}{\lambda_1} k\delta = \left[ \kappa_\theta \left(\frac{M}{\omega}\right)^\theta + \frac{2\omega}{\lambda_1} \right] E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (2.5.12)$$

### B) Choix a posteriori du paramètre de régularisation

Soit  $\tau > 1$  une constante fixe et  $p_0 = 0_H$ . On choisit le paramètre de régularisation comme étant le premier entier  $k = k(\delta, g^\delta) \in \mathbb{N}^*$  vérifiant

$$\|u_\delta^k(a, b) - g^\delta\| \leq \tau\delta < \|u_\delta^{k-1}(a, b) - g^\delta\|, \quad (2.5.13)$$

avec  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ .

**Lemme 2.5.2.** Soit  $\Phi(k) = \|u_\delta^k(a, b) - g^\delta\|$ . Alors on a les résultats suivants :

- (a)  $\Phi(k)$  est une fonction continue,
- (b)  $\lim_{k \rightarrow 0^+} \Phi(k) = \|g^\delta\|$ ,
- (c)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(k) = 0$ ,
- (d)  $\Phi(k)$  est une fonction strictement décroissante sur  $(0, \infty)$ .

Le lemme (2.5.2) montre qu'il existe une solution unique à l'inégalité (2.5.13).

---

3. Le paramètre de régularisation dans les méthodes itérative satisfait  $\frac{1}{k(\delta)} \rightarrow 0$  si  $\delta \rightarrow 0$ .

**Lemme 2.5.3.** Si l'inégalité (2.5.13) est satisfaite, alors le paramètre de régularisation  $k = k(\delta, g^\delta)$  satisfait

$$k \leq (\kappa_{1+\theta})^{\frac{1}{1+\theta}} \frac{(M)^{\frac{\theta}{1+\theta}}}{\omega} \left( \frac{E}{(\tau-1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}}. \quad (2.5.14)$$

*Preuve.* On a

$$\|u^k(a, b) - g\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2k} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \leq \|g\|^2.$$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(1 - \omega F(\lambda_n, a, b)) \leq 1$ , et on a

$$\|u^{k-1}(a, b) - g\| \geq \|u_\delta^{k-1}(a, b) - g^\delta\| - \|(u^{k-1}(a, b) - u_\delta^{k-1}(a, b)) - (g - g^\delta)\|,$$

alors d'après (2.5.13) il vient  $\|u_\delta^{k-1}(a, b) - g^\delta\| \geq \tau\delta$ . Pour le deuxième terme

$$\begin{aligned} \|(u^{k-1}(a, b) - u_\delta^{k-1}(a, b)) - (g - g^\delta)\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2(k-1)} |\langle g - g^\delta, \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq \|g - g^\delta\|^2 \leq \delta^2, \end{aligned}$$

donc

$$\|u^{k-1}(a, b) - g\| \geq \tau\delta - \delta = (\tau - 1)\delta.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|u^{k-1}(a, b) - g\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2(k-1)} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2(k-1)} (\omega F(\lambda_n, a, b))^{2(\theta+1)} (\omega F(\lambda_n, a, b))^{-2(\theta+1)} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2(k-1)} (\omega F(\lambda_n, a, b))^{2(\theta+1)} \left( \frac{\lambda_n^{2\theta}}{\omega^{2\theta+2} (1 - J_0(2\sqrt{\lambda_n \sqrt{ab}}))^{2\theta}} \right) |\langle p, \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq (\kappa_{1+\theta})^2 \left( \frac{1}{\omega} \right)^{2\theta+2} M^{2\theta} \frac{E^2}{k^{2(1+\theta)}}. \end{aligned}$$

Alors  $(\tau - 1)\delta \leq \kappa_{1+\theta} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{1+\theta} M^\theta \frac{E}{k^{(1+\theta)}}$ , ce qui donne

$$k \leq (\kappa_{1+\theta})^{\frac{1}{1+\theta}} \frac{M^{\frac{\theta}{1+\theta}}}{\omega} \left(\frac{E}{(\tau - 1)\delta}\right)^{\frac{1}{1+\theta}}.$$

□

**Lemme 2.5.4.** Soit  $p \in \mathcal{B}(\theta, E) = \{h \in \mathcal{D}(A^\theta) : \|A^\theta h\| \leq E\}$ ,  $\theta > 0$ , alors on a

$$\|p\| \leq M^{\frac{\theta}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \|g\|^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (2.5.15)$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle p, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{ab})} \right)^2 |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{ab})} \right)^2 |\langle g, \phi_n \rangle|^{\frac{2}{1+\theta}} |\langle g, \phi_n \rangle|^{\frac{2\theta}{1+\theta}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \left( \frac{\lambda_n}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{ab})} \right)^{2(1+\theta)} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{1+\theta}} |\langle g, \phi_n \rangle|^{\frac{2\theta}{1+\theta}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_n}{1 - J_0(2\sqrt{\lambda_n}\sqrt{ab})} \right)^{2\theta} |\langle p, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{1+\theta}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{\theta}{1+\theta}} \\ &\leq M^{\frac{2\theta}{1+\theta}} E^{\frac{2}{1+\theta}} \|g\|^{\frac{2\theta}{1+\theta}}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.5.2.** Soit  $u(t)$  la solution donnée par (2.3.18) et  $u_\delta^k(t)$  la  $k$ -ième solution approximative associée aux données perturbées  $g^\delta$  telles que  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ . Si

$$p \in \mathcal{B}(\theta, E) = \{h \in \mathcal{D}(A^\theta) : \|A^\theta h\| \leq E\}, \theta > 0,$$

et le paramètre de régularisation est donné par (2.5.14). Alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\sup_{t \in \overline{Q}} \|u_\delta^k(t) - u(t)\| \leq \left[ \frac{2}{\lambda_1} M^{\frac{\theta}{1+\theta}} \left( \left( \frac{\kappa_{1+\theta}}{\tau - 1} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} + (\tau + 1)^{\frac{\theta}{1+\theta}} \right) \right] E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}} \quad (2.5.16)$$

*Preuve.* On a

$$\|u_\delta^k(t) - u(t)\| \leq \|u_\delta^k(t) - u^k(t)\| + \|u^k(t) - u(t)\|.$$

Pour le premier terme on a

$$\begin{aligned} \|u_\delta^k(t) - u^k(t)\| &= \|\omega F(A, a, b) \sum_{i=1}^{k-1} (g - g^\delta)\| \leq \omega \frac{2}{\lambda} k \delta \\ &\leq \frac{2}{\lambda_1} M^{\frac{\theta}{1+\theta}} \left( \frac{\kappa_{1+\theta}}{\tau - 1} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

De (2.5.14),

$$k \leq (\kappa_{1+\theta})^{\frac{1}{1+\theta}} \frac{(M)^{\frac{\theta}{1+\theta}}}{\omega} \left( \frac{E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}},$$

et de

$$\begin{aligned} F(A, a, b) (p^k - p) &= \sum_{n=1}^{+\infty} - (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^k \langle g, \phi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} - (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^k \langle g - g^\delta, \phi_n \rangle \phi_n + \sum_{n=1}^{+\infty} - (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^k \langle g^\delta, \phi_n \rangle \phi_n \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

et d'après (2.5.13)

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} - (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^k \langle g^\delta, \phi_n \rangle \phi_n \right\| = \|u_\delta^k(a, b) - g^\delta\| \leq \tau \delta,$$

et

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} - (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^k \langle g - g^\delta, \phi_n \rangle \phi_n \right\| \leq \|g - g^\delta\| \leq \delta,$$

alors

$$\|F(A, a, b) (p^k - p)\| \leq \delta + \tau \delta = (\tau + 1)\delta. \quad (2.5.19)$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \|p^k - p\|_{H^\theta}^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega F(\lambda_n, a, b))^{2k} \lambda_n^{2\theta} |\langle p, \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2\theta} |\langle p, \phi_n \rangle|^2 \leq E^2, \end{aligned}$$

et par conséquent en utilisant le lemme (2.5.4), on dérive l'estimation :

$$\begin{aligned} \|p^k - p\| &\leq M^{\frac{\theta}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \|F(A, a, b) (p^k - p)\|^{\frac{\theta}{1+\theta}} \\ &\leq (M(\tau + 1))^{\frac{\theta}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}, \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

d'où

$$\sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t)^k - u(t)\| \leq \frac{2}{\lambda_1} \|p^k - p\| \leq \frac{2}{\lambda_1} (M(\tau + 1))^{\frac{\theta}{1+\theta}} E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (2.5.21)$$

En combinant (2.5.17) et (2.5.21) on obtient (2.5.16).  $\square$

**Remarque 2.5.2.** On a  $p_k^\delta = (I - \omega F(A; a, b))^k p_0 + [I - (I - \omega F(A; a, b))^k] (F(A; a, b))^{-1} g^\delta$ , et pour simplifié les calculs on prend  $p_0 = 0_H$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} p_k^\delta &= \left[ I - (I - \omega F(A; a, b))^k \right] (F(A; a, b))^{-1} g^\delta \\ &= \left[ I - \left( \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j I^{k-j} (\omega F(A; a, b))^j \right) \right] (F(A; a, b))^{-1} g^\delta, \\ &= \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} C_k^j (\omega F(A; a, b))^j \right) (F(A; a, b))^{-1} g^\delta, \\ \text{i.e., } p_k^\delta &= k\omega g^\delta - C_k^2 \omega^2 F(A; a, b) g^\delta + C_k^3 \omega^3 (F(A; a, b))^2 g^\delta + \dots + (-1)^{k-1} \omega^k (F(A; a, b))^{k-1} g^\delta. \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$p_k^\delta \in \mathcal{K}_k \left( F(A; a, b), g^\delta \right) = \text{vect} \left\{ g^\delta, F(A; a, b) g^\delta, (F(A; a, b))^2 g^\delta, \dots, (F(A; a, b))^k g^\delta \right\}.$$

Dans [74] **Hansen et Jensen**, il a été montré que le sous-espace  $\mathcal{K}_k \left( F(A; a, b), g^\delta \right)$  comprend la composante bruitée  $g^\delta$  qui peut entraîner une influence catastrophique et indésirable sur les premières itérations, de plus la déformation du procédé de l'orthonormalisation dans cette base générée par la méthode de **Kozlov-Maz'ya**, amplifie les composantes parasites et produit des erreurs très élevées dans la solution reconstruite par cette procédure dans les premières itérations, i.e., la source reconstruite sera infectée par le bruit.

Cela peut s'expliquer par les courbes du filtre spectral  $[I - (I - \omega F(\lambda; a, b))^k]$ . Si les valeurs

propres  $\sigma_i$  de  $F(A; a, b)$ ) sont de décroissance polynomiale, i.e.,  $\sigma_i = \mathcal{O}(i^{-\alpha})$ ,<sup>4</sup> avec  $\alpha > 0$ , le filtre ne tronque pas l'information  $p_k^\delta$  avant que le bruit ne l'infecte pas. Dans la figure suivante, on présente les courbes du filtre spectral pour  $k = 10, 100, 1000$ .

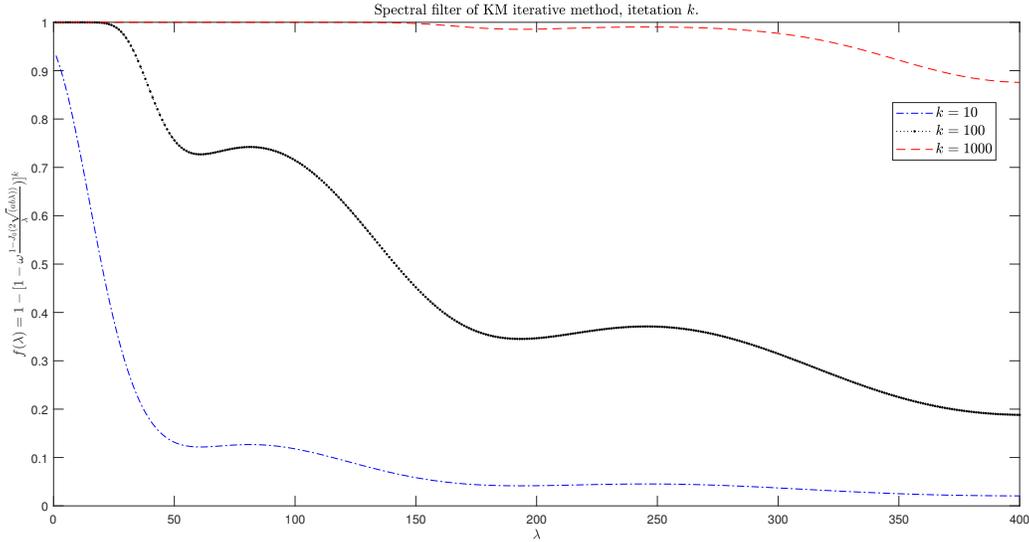


FIGURE 2.1 – Courbes du filtre spectral  $k = 10, 100, 1000$ .

On constate que le filtre n'élimine pas les hautes fréquences de  $(F(A; a, b))^{-1}$ ,<sup>5</sup> cela peut être rectifié par la reconstruction de la source  $p$  dans le sous-espace

$$\mathcal{K}_k \left( F(A^*; a, b)F(A; a, b), F(A^*; a, b)g^\delta \right),$$

<sup>6</sup> par la méthode **Landweber Fridman** ou la méthode du gradient conjugué, où on utilise une technique plus facile, i.e., on preconditionne les itérations de telle sorte que le filtre élimine les hautes fréquences et que la solution souhaitée devienne un élément du sous-espace de **Krylov** plus régulier  $\mathcal{K}_k \left( A^{-r}F(A; a, b), A^{-r}g^\delta \right)$ ,  $r > 0$ .

A notre connaissance, cette technique de correction de la méthode **Kozlov-Maz'ya** n'a pas

4. Dans ce cas le problème est modérément **mal posés** si  $\alpha \geq 1$  et il est légèrement **mal posés** si  $0 < \alpha < 1$

5. Dans les tests numériques on va discuter la relation entre le conditionnement de  $F(A; a, b)$  et la récupération du bruit dans les itérations  $p_k^\delta$ .

6. Dans [74] **Hansen et Jensen** il a été montré que la solution reconstruite dans ce sous-espace est plus régulière par rapport au sous-espace  $\mathcal{K}_k \left( F(A; a, b), g^\delta \right)$ .

été utilisée que dans [36], où les auteurs ont établi des résultats de convergence pour la méthode préconditionnée, mais ils n'ont pas discuté l'effet régularisant engendré par ce préconditionnement. Dans [37], un choix particulier du préconditionneur  $A^{-r}$  a été étudié dans le cadre de la théorie de régularisation dans les échelles de Hilbert.

### 2.5.2 Procédure itérative préconditionnée

La méthode préconditionnée est décrite comme suit :

$$p_{k+1} = p_k - \omega S(u^{k,r}(a, b) - g), \quad (2.5.22)$$

où  $S = A^{-r}$  avec  $r > 0$ . Le paramètre de relaxation  $\omega$  est choisi sous la condition :

$$0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|SF(A; a, b)\|}.$$

Le théorème suivant donne les résultats de la convergence.

**Théorème 2.5.3.** Soient  $p_0$  un élément quelconque du processus itératif préconditionné et  $u^{k,r}$  la  $k$ -ème solution approchée. On a :

$$\sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t) - u^{k,r}(t)\| \longrightarrow 0, k \longrightarrow +\infty. \quad (2.5.23)$$

De plus, si  $(p - p_0) \in H^{\theta(1+r)}$ ,  $\theta > 0$ , alors le taux de convergence de la méthode est donné par

$$\sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t) - u^{k,r}(t)\| \leq \frac{\tau_\theta}{(1+k)^\theta}, \quad (2.5.24)$$

où  $\tau_\theta = \kappa_\theta \left(\frac{M}{\omega}\right)^\theta E$ .

De plus, on a

$$\sup_{t \in \bar{Q}} \|u(t) - u_\delta^{k,r}(t)\| \leq \frac{\tau_\theta}{(1+k)^\theta} + \omega \frac{2}{\lambda_1^{(1+r)}} k \delta. \quad (2.5.25)$$

Pour un choix a priori du paramètre de régularisation, on prend

$$k := k(\delta) = \left[ \left( \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+\theta}} \right],$$

il résulte

$$\sup_{t \in \overline{Q}} \|u(t) - u_{\delta}^{k,r}(t)\| \leq \left[ \kappa_{\theta} \left( \frac{M}{\omega} \right)^{\theta} + \frac{2}{\lambda_1^{(1+r)}} \right] E^{\frac{1}{1+\theta}} \delta^{\frac{\theta}{1+\theta}}. \quad (2.5.26)$$

La  $k$ -ième itération  $p_k^{\delta}$  par la procédure préconditionnée est représentée par la formule suivante :

$$p_k^{\delta} = (I - \omega A^{-r} F(A; a, b))^k p_0 + \left[ I - (I - \omega A^{-r} F(A; a, b))^k \right] (F(A; a, b))^{-1} g^{\delta}. \quad (2.5.27)$$

Les courbes de filtre spectral  $\Phi(\lambda) = \left[ I - (I - \omega \lambda^{-r} F(\lambda; a, b))^k \right]$  présentées dans les figures suivantes permettent de conclure que la méthode tronque les hautes fréquences de  $(F(A; a, b))^{-1}$  avant que les itérations seront infectées par le bruit de  $g^{\delta}$ .

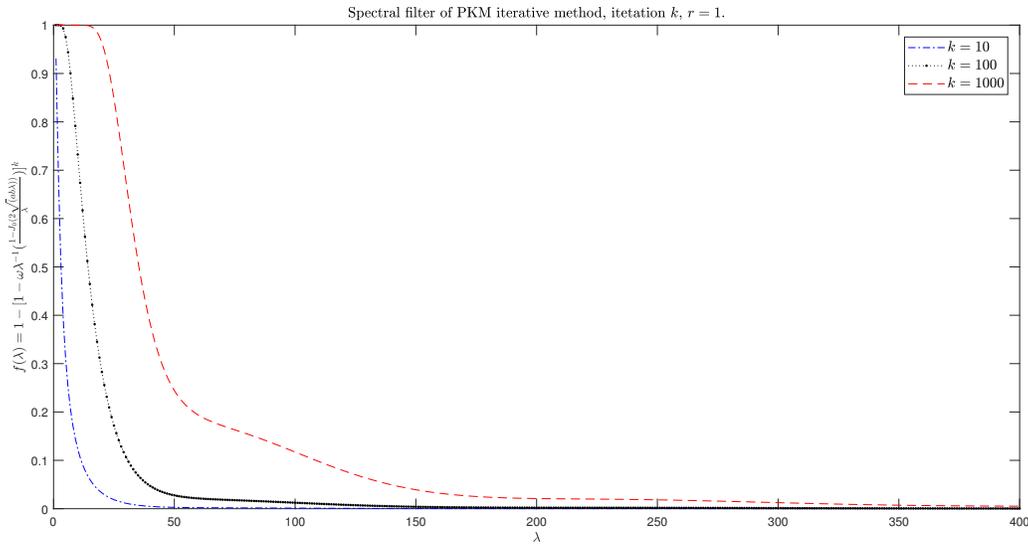
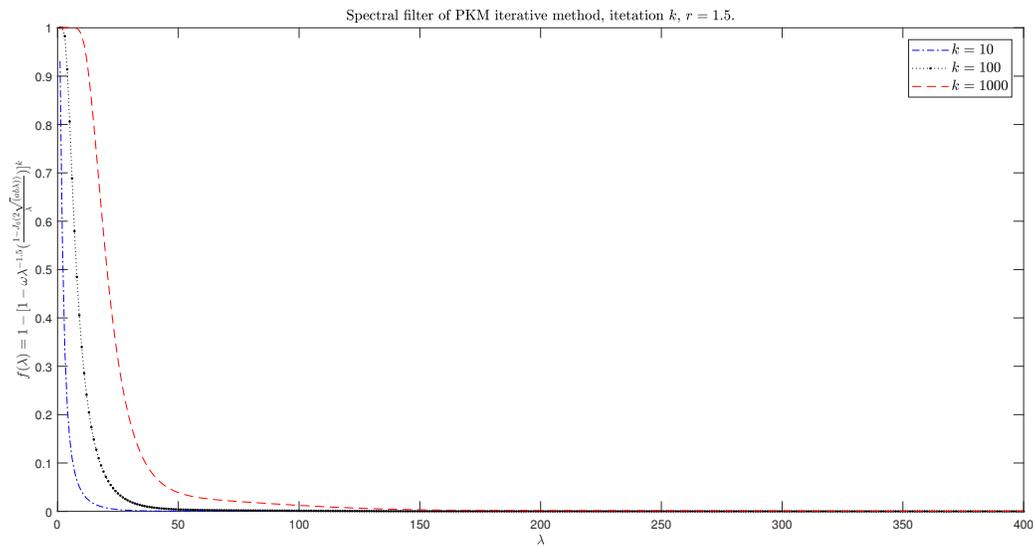
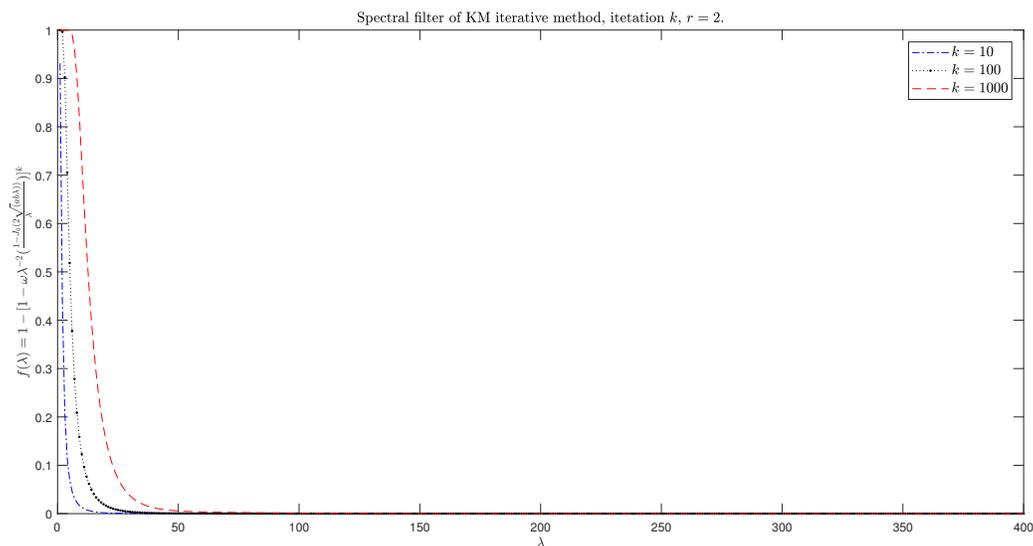


FIGURE 2.2 – Courbes du filtre spectral  $k = 10, 100, 1000, r = 1$ .

FIGURE 2.3 – Courbes du filtre spectral  $k = 10, 100, 1000, r = 1.5$ .FIGURE 2.4 – Courbes du filtre spectral  $k = 10, 100, 1000, r = 2$ .

Les essais numériques réalisés pour plusieurs types de problèmes (problèmes fortement **mal posés** et légèrement **mal posés**), nous poussent à deviner que la méthode sans préconditionnement fonctionne mieux pour le premier type que pour le deuxième type. Ce constat nous amène à poser les questions suivantes :

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>85</sup>

- 1) Quelle est la relation entre la complexité du problème et la fiabilité de la méthode **Kozlov-Maz'ya** ?
- 2) Quelle est la meilleure méthode pour corriger le filtre spectral quand la méthode perd sa fiabilité ?
- 3) Donner la justification mathématique de la relation entre le préconditionnement et la correction du filtre spectral ?

Ce paragraphe est dédié à ces remarques.

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov

Dans cette section, nous supposons que le problème (2.1.1)-(2.1.2) a été discrétisé par rapport aux variables spatiales, et que l'opérateur  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est une matrice symétrique, définie positive. Les détails de la discrétisation sont sans importance pour notre présentation, nous supposons seulement qu'elle est suffisamment précise pour que les erreurs de discrétisation soient faibles par rapport à l'incertitude  $\epsilon$  des données ; cela signifie que  $A$  est une bonne approximation de l'opérateur différentiel, dont le caractère non borné se traduit par la grande norme de  $A$ .

Les solutions régularisées par la méthode de troncature (2.4.3) et la méthode de **Kozlov-Maz'ya** préconditionnée (2.5.27) prennent la forme d'une fonction matricielle appliquée à un vecteur, l'évaluation numérique de ces solutions posera un problème si la taille de la matrice  $A$  est suffisamment grande, car dans ce cas, l'approximation des valeurs et vecteurs propres devient coûteuse et parfois impossible selon les capacités de la machine. Le coût de calcul pour évaluer  $f(A)$  pour  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est :

$$\underbrace{\mathcal{O}(N^3)}_{\text{la décomposition propre } A = V\Lambda V^T} + \underbrace{\mathcal{O}(N)}_{\text{calculer } f(\Lambda)} + \underbrace{\mathcal{O}(N^3)}_{\text{former } Vf(\Lambda)V^T} = \mathcal{O}(N^3)$$

La théorie, il peut être amélioré à  $\mathcal{O}(N^\omega) \approx \mathcal{O}(N^{2,3728639})$ , mais cela reste encore lent

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>86</sup>

pour les problèmes de grande échelle.

La technique proposée pour surmonter ce problème est la projection dans un sous-espace de **Krylov** de dimension  $l$ , ce qui réduit le coût du calcul à :

$$\underbrace{\mathcal{O}(l.mv(A)) + \mathcal{O}(Nl^2)}_{\text{la construction de } T_{ll} = Q_{lN}^\top A Q_{lN}} + \underbrace{\mathcal{O}(l^3)}_{\text{le calcul de } f(T_{ll})}$$

où  $mv(A)$  est le temps nécessaire pour multiplier la matrice  $A$  par un vecteur, en pratique,  $\mathcal{O}(l.mv(A)) + \mathcal{O}(Nl^2) + \mathcal{O}(l^3)$  peut également être réduit à  $\mathcal{O}(l.mv(A) + Nl)$ , pour plus de détails voir [97] et [45].

**Théorème 2.6.1** (Approximation des fonctions matricielles par l'algorithme de **Lanczos** en arithmétique finie [97]). *Étant donné une matrice symétrique réelle  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  et un vecteur  $b \in \mathbb{R}^N$ , et soit  $\eta \leq \|A\|$ ,  $\epsilon \leq 1$  et  $B = \log \left( \frac{N.l\|A\|}{\epsilon\eta} \right)$ . Alors pour toute fonction  $f$  avec  $|f(x)| < C$  pour  $x \in [\lambda_{\min}(A) - \eta, \lambda_{\max}(A) + \eta]$ , l'algorithme de **Lanczos** exécuté sur un ordinateur à virgule flottante avec  $\Omega(B)$  bits de précision pour  $l$  itérations, donne des résultats  $f_l = Q_{lN} f(T_{ll}) e_1 \|b\|$ , avec les précisions suivantes :*

$$\|f(A)b - f_l\| \leq (7l.q_l + \epsilon C) \|b\|, \quad (2.6.1)$$

où

$$q_l \stackrel{\text{def}}{=} \min_{p \in \mathcal{P}_{l-1}} \left( \max_{x \in [\lambda_{\min}(A) - \eta, \lambda_{\max}(A) + \eta]} |f(x) - p(x)| \right),$$

et l'erreur dans l'arithmétique exacte et donnée par :

$$\|f(A)b - f_l\| \leq 2\|b\| \min_{p \in \mathcal{P}_{l-1}} \max_{x \in [\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)]} |f(x) - p(x)|. \quad (2.6.2)$$

Ainsi, pour améliorer la performance de l'approximation de **Lanczos** (2.6.2) après  $l$  itérations, il suffit de prouver l'existence d'un polynôme de degré  $l$  approchant la fonction scalaire  $f$ , même si le polynôme explicite n'est pas connu.

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>87</sup>

La borne de (2.6.1) correspond à (2.6.2) jusqu'à un facteur  $\mathcal{O}(l)$  avec un petit terme d'erreur additif  $\epsilon C$ , qui diminue exponentiellement dans les bits de précision disponibles. Pour les fonctions typiques, le degré du meilleur polynôme d'approximation uniforme dépend logarithmiquement de la précision souhaitée. Ainsi, le facteur  $\mathcal{O}(l)$  équivaut à une augmentation logarithmique du degré du polynôme d'approximation, et donc du nombre d'itérations nécessaires pour une précision donnée. Le théorème exige une approximation uniforme liée à la zone légèrement étendue  $[\lambda_{\min}(A) - \eta, \lambda_{\max}(A) + \eta]$ . Cependant dans les cas typiques, cela n'a aucun effet sur les limites pouvant être obtenues, en plus l'algorithme de l'évaluation  $f(A)b$  par la procédure de **Lanczos** est stable par tout ordinateur mettant en œuvre la norme IEEE 754 pour l'arithmétique en virgule flottante [70], ce qui est très important pour les problèmes **mal posés**.

Le choix de la méthode de projection de **Krylov** pour l'évaluation numérique de (2.4.3) et (2.5.27) n'a pas été adopté uniquement pour réduire le coût de calcul, il y a aussi l'effet régularisant de ces méthodes étudié dans [19] et [48] qui améliore la qualité des solutions régularisées.

Dans ce qui suit, il est supposé que l'erreur entre les solutions exactes  $f(A)b$  et les solutions projetées est négligeable de telle sorte qu'elle n'influence pas les calculs.

### Notation

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes :

- $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est une matrice symétrique définie positive représente l'opérateur  $A$  en dimension finie.
- $\mathbb{E}_N := \mathbb{R}^N, N \geq 1$ .
- $\mathbf{g} \in \mathbb{E}_N :=$  l'analogue discret de  $g$ .
- $\mathbf{g}^\delta \in \mathbb{E}_N :=$  l'analogue discret de  $g^\delta$ .
- $\sigma(\mathbb{A}) = \{\alpha_i\}_{i=1}^N :=$  l'ensemble des valeurs propres de  $\mathbb{A}$  ( $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$ ).
- $\mathbb{A}_m$  est la restriction de  $\mathbb{A}$  sur le sous-espace invariant des valeurs propres inférieures au seuil  $\alpha_m$  et  $E^m$  est le projecteur orthogonal associé aux valeurs propres inférieures au seuil  $\alpha_m$ .
- $\{\zeta_i\}_{i=1}^N :=$  l'ensemble des vecteurs propres normalisés de  $\mathbb{A}$ .

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>88</sup>

- Les analogues discrets de (2.3.17), (2.3.18), (2.4.3), (2.4.4) et (2.5.27) sont notés respectivement par :

$$\mathbf{p} = F(\mathbb{A}; a, b)^{-1} \mathbf{g} = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle \zeta_i, \quad (2.6.3)$$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{t_1 t_2})}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle \zeta_i, \quad (2.6.4)$$

$$\mathbf{p}_m^\delta = F(\mathbb{A}_m; a, b)^{-1} \mathbf{g}^\delta = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \langle \mathbf{g}^\delta, \zeta_i \rangle \zeta_i, \quad (2.6.5)$$

$$\mathbf{u}_m^\delta(t) = \sum_{i=1}^m \frac{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{t_1 t_2})}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \langle \mathbf{g}^\delta, \zeta_i \rangle \zeta_i. \quad (2.6.6)$$

Ici  $m$  est l'ordre de troncature.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{k,r} &= (I - \omega \mathbb{A}^{-r} F(\mathbb{A}; a, b))^k \mathbf{p}_0 + \left[ I - (I - \omega \mathbb{A}^{-r} F(\mathbb{A}; a, b))^k \right] (F(\mathbb{A}; a, b))^{-1} \mathbf{g} \\ &= \sum_{i=1}^N (I - \omega \alpha_i^{-r} F(\alpha_i; a, b))^k \langle \mathbf{p}_0, \zeta_i \rangle \zeta_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left[ I - (I - \omega \alpha_i^{-r} F(\alpha_i; a, b))^k \right] (F(\alpha_i; a, b))^{-1} \langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle \zeta_i. \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{k,r}^\delta &= (I - \omega \mathbb{A}^{-r} F(\mathbb{A}; a, b))^k \mathbf{p}_0 + \left[ I - (I - \omega \mathbb{A}^{-r} F(\mathbb{A}; a, b))^k \right] (F(\mathbb{A}; a, b))^{-1} \mathbf{g}^\delta \\ &= \sum_{i=1}^N (I - \omega \alpha_i^{-r} F(\alpha_i; a, b))^k \langle \mathbf{p}_0, \zeta_i \rangle \zeta_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left[ I - (I - \omega \alpha_i^{-r} F(\alpha_i; a, b))^k \right] (F(\alpha_i; a, b))^{-1} \langle \mathbf{g}^\delta, \zeta_i \rangle \zeta_i, \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

$$\mathbf{u}_{k,r}(t) = F(\mathbb{A}, t_1, t_2) \mathbf{p}_{k,r}, \quad (2.6.9)$$

$$\mathbf{u}_{k,r}^\delta(t) = F(\mathbb{A}, t_1, t_2) \mathbf{p}_{k,r}^\delta. \quad (2.6.10)$$

**Mise en œuvre** "construction du sous-espace de **Krylov**".

Dans notre contexte, les petites valeurs propres de  $\mathbb{A}$  sont les quantités d'intérêt. Ainsi la convergence de l'approximation du sous-espace de **Krylov** est plus rapide quand on est éloigné à l'origine (voir, [[5], section 4.4.3]) : une procédure de décalage-inversé (shift-invert) est souvent utilisée pour accélérer la convergence au voisinage des petites valeurs propres. Plus précisément, l'approximation spectrale se fabrique dans le sous espace de **Krylov** :

$$\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g}) = \text{vect} \left\{ \mathbf{g}, \mathbb{A}^{-1}\mathbf{g}, \dots, \mathbb{A}^{-(l-1)}\mathbf{g} \right\},$$

ou plus généralement, dans  $\mathcal{K}_l((\mathbb{A} - \sigma I)^{-1}, \mathbf{g})$  pour une valeur de  $\sigma$  bien choisie. Pour plus de simplicité de l'exposé, nous supposons dans cette section que  $\sigma = 0$ , et que les colonnes orthonormales de  $Q_l$  forment la base d'un tel espace. Si le processus de **Lanczos** est utilisé pour générer la base orthonormée, nous obtenons (voir, par exemple, [5])

$$\mathbb{A}^{-1}Q_l = Q_l T_l + \beta_{l+1} q_{l+1} e_l^\top, \quad q_{l+1}^\top Q_l = 0$$

Soit  $(\theta_j^{(l)})_{j=\overline{1,l}}$  les valeurs propres de  $T_l^{-1}$ , et  $(y_j^{(l)})_{j=\overline{1,l}}$  les vecteurs propres de  $T_l^{-1}$ , alors

$(\theta_j^{(l)}, Q_l y_j^{(l)})_{j=\overline{1,l}}$  approche les valeurs et les vecteurs propres de  $\mathbb{A}$ , cette technique de décalage-inversé pour la construction du sous-espace de **Krylov** est connue comme un préconditionnement implicite pour l'évaluation des fonctions matricielle [135], l'estimation de l'erreur entre le couple propre  $(\alpha_j, \zeta_j)_{j=\overline{1,N}}$  de  $\mathbb{A}$  et ces valeurs de **Ritz**  $(\theta_j^{(l)}, Q_l y_j^{(l)})_{j=\overline{1,l}}$  construite par projection dans  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g})$  est donnée par :

$$\left| (\theta_j^{(l)}) - \alpha_j \right| = \mathcal{O}(2 \exp(-4l\sqrt{\gamma})), \quad (2.6.11)$$

$$\tan(\zeta_j, \mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g})) = \mathcal{O}(2 \exp(-2l\sqrt{\gamma})), \quad (2.6.12)$$

où  $\gamma$  est lié à l'écart entre les valeurs propres recherché et le reste du spectre, pour plus de détail voir [107], [théorèmes 12.4.1 et 12.4.3]. Les figures suivantes expliquent la différence

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov90

entre la distribution des valeurs de **Ritz** construites par projection dans  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}, \mathbf{g})$  et dans  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g})$  par rapport aux valeurs propres de  $\mathbb{A}$ .

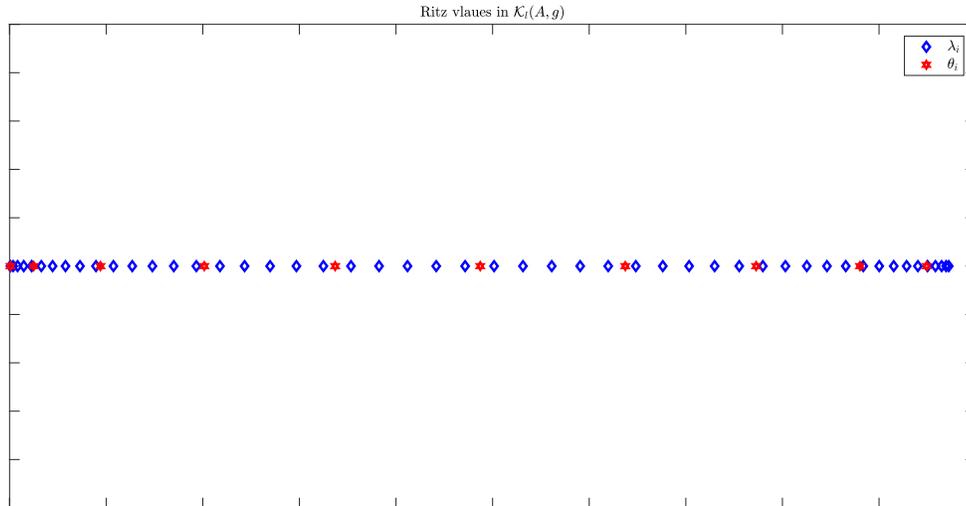


FIGURE 2.5 – Distribution des valeurs de **Ritz** construites dans  $\mathcal{K}_l(A, b)$  par rapport aux valeurs propres.

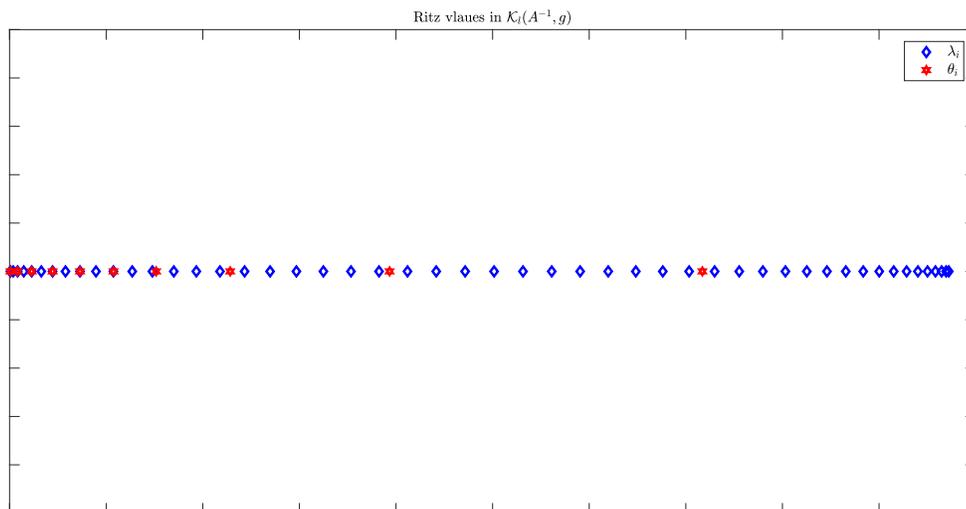


FIGURE 2.6 – Distribution des valeurs de **Ritz** construites dans  $\mathcal{K}_l(A^{-1}, b)$  par rapport aux valeurs propres.

### 2.6.1 Troncature spectrale projetée

Dans la suite,  $e_j$  désigne le  $j$ -ième vecteur canonique de dimension appropriée. On peut ensuite obtenir une approximation de (2.6.3) dans  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g})$  par projection,

$$\mathbf{P}_l = Q_l F \left( T_l^{-1}, a, b \right)^{-1} e_1 \|\mathbf{g}\| = \|\mathbf{g}\| Q_l \sum_{i=1}^l y_i^{(l)} \frac{\theta_i^{(l)}}{1 - J_0 \left( 2\sqrt{\theta_i^{(l)} ab} \right)} \left( y_i^{(l)} \right)^\top e_1, \quad (2.6.13)$$

et l'approximation de (2.6.5) dans  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g}^\delta)$  est donnée par

$$\mathbf{P}_{l,m}^\delta = Q_l F \left( T_{l,m}^{-1}, a, b \right)^{-1} e_1 \|\mathbf{g}^\delta\| = \|\mathbf{g}^\delta\| Q_l \sum_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m} y_i^{(l)} \frac{\theta_i^{(l)}}{1 - J_0 \left( 2\sqrt{\theta_i^{(l)} ab} \right)} \left( y_i^{(l)} \right)^\top e_1. \quad (2.6.14)$$

#### Critère d'arrêt a posteriori

Notre objectif ici est d'établir une estimation d'erreur similaire à l'estimation (2.4.6) dans le cas discret. Dans ce but, introduisons les notations suivantes :

- Soit le sous espace  $\mathcal{V}_\alpha$  défini par

$$\mathcal{V}_\alpha = N(\mathbb{A} - I\alpha) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \mathbb{A}\zeta = \zeta\alpha \right\},$$

associé à la valeur propre  $\alpha$  de  $A$  et  $\mathcal{V}_\theta^l$  défini par

$$\mathcal{V}_\theta^l = N \left( Q_l (T_l^{-1} - I\theta) \right) = \left\{ y \in \mathbb{R}^l : Q_l T_l^{-1} y = \theta Q_l y \right\},$$

le sous espace associé à la valeur de **Ritz**  $\theta$  de  $\mathbb{A}$ .

- Notons  $\mathcal{X}(\alpha_m) = \bigoplus_{\alpha \leq \alpha_m} \mathcal{V}_\alpha$  le sous espace invariant des valeurs propres inférieures à  $\alpha_m$ .
- $\mathcal{R}(\alpha_m) = \bigoplus_{\theta \leq \alpha_m} \mathcal{V}_\theta^l$  le sous espace invariant des valeurs de **Ritz** inférieures à  $\alpha_m$ .
- Soit  $\mathcal{G}(\alpha_m)$  la matrice dont les colonnes sont formées par les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\alpha \leq \alpha_m$ .

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov 92

- Si  $E^m$  est le projecteur orthogonal sur le sous espace  $\mathcal{X}(\alpha_m)$ , il est bien connu que la matrice associée a  $E^m$  est donnée par  $\mathcal{G}(\alpha_m) \mathcal{G}^\top(\alpha_m)$  où les colonnes de  $\mathcal{G}(\alpha_m)$  sont les vecteurs propres de  $\mathbb{A}_m$  (voir [107] et [131]).
- On pose que  $T_l^{-1} = S_l$ , et soit  $S_{l,m}$  la restriction de  $S_l$  sur le sous-espace invariant  $\mathcal{X}(\alpha_m)$  de valeurs propres inférieures au seuil de  $\alpha_m$ .
- $E_l^m$  est le projecteur orthogonal sur le sous espace  $\mathcal{R}(\alpha_m)$ , de la même façon la matrice associée a  $E_l^m$  est donnée par  $Q_l \mathcal{F}(\alpha_m) \mathcal{F}^\top(\alpha_m) Q_l^\top$  où les colonnes de  $\mathcal{G}(\alpha_m)$  sont les vecteurs propre de  $S_{l,m}$ .

**Remarque 2.6.1.** On a  $\mathcal{G}(\alpha_m) \mathcal{G}^\top(\alpha_m) = \mathcal{G}(\alpha_m) \mathcal{G}^*(\alpha_m)$  car  $\mathcal{G}^*(\alpha_m) = \left(\overline{\mathcal{G}(\alpha_m)}\right)^\top$ .

De la même façon pour obtenir le taux de convergence, on suppose qu'il existe une borne a priori équivalente à (2.4.5) pour l'analogue discrète de (2.3.12) :

$$\|\mathbb{A}^\gamma \mathbf{p}\|^2 \leq E_1^2 \iff \sum_{i=1}^N \alpha_i^{2\gamma} \langle \mathbf{p}, \zeta_i \rangle^2 \leq E_1^2 < +\infty. \quad (2.6.15)$$

$$\| \left( Q_l S_l Q_l^\top \right)^\gamma \mathbf{p} \|^2 = \| Q_l (S_l)^\gamma Q_l^\top \mathbf{p} \|^2 \leq E_2^2 \iff Q_l \sum_{i=1}^l \left( \theta_i^{(l)} \right)^{2\gamma} \langle Q_l^\top \mathbf{p}, y_i^{(l)} \rangle^2 \leq E_2^2 < +\infty, \quad (2.6.16)$$

où  $\gamma > 0$  et  $E = \max(E_1, E_2) > 0$  est une constante donnée.

### Critère d'arrêt :

En raison de la difficulté d'évaluation numérique des vecteurs propres de la matrice  $\mathbb{A}$  à cause de sa grande taille, ces vecteurs seront remplacés par les vecteurs **Ritz**. Comme  $\mathbf{g}_\delta$  est le premier vecteur de la base du sous-espace  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g}^\delta)$  alors on a,  $\mathbf{g}^\delta = Q_l \sum_{i=1}^l \langle Q_l^\top \mathbf{g}^\delta, y_i^{(l)} \rangle y_i^{(l)} = Q_l \|\mathbf{g}^\delta\| e_1$ , donc on propose de choisir le paramètre de régularisation comme étant la première valeur propre  $\alpha_m$ , où  $m$  vérifiant  $\|(I - E_l^m) \mathbf{g}^\delta\| \leq \tau \delta$ , avec  $\tau > 1$  est une constante positive. Plus précisément, il doit satisfaire la relation suivante :

$$\|(I - E_l^m) \mathbf{g}^\delta\| \leq \tau \delta \leq \|(I - E_l^{m-1}) \mathbf{g}^\delta\|, \quad (2.6.17)$$

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>93</sup>

où  $E_l^m : \mathbb{R}^N \rightarrow \text{vect}\{Q_l y_i^{(l)}\}_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m}$  est un opérateur de projection orthogonale, et  $I \in \mathbb{R}^{l \times l}$  est la matrice d'identité .

Soit

$$E_l^m \mathbf{g}^\delta = Q_l \sum_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m} \langle Q_l^\top \mathbf{g}^\delta, y_i^{(l)} \rangle y_i^{(l)} = Q_l \|\mathbf{g}_m^\delta\| e_1, \quad (2.6.18)$$

où  $\mathbf{g}_m^\delta = \sum_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m} \langle Q_l^\top \mathbf{g}^\delta, y_i^{(l)} \rangle y_i^{(l)}$ , et soit

$$\Psi_m = \|(I - E_l^m) \mathbf{g}^\delta\|. \quad (2.6.19)$$

Selon le lemme suivant, il existe une solution unique pour (2.6.17).

**Lemme 2.6.1.** Pour  $\delta > 0$ , la fonction  $\Psi_m$  possède les propriétés suivantes :

- (a)  $\Psi_m$  est une fonction continue ;
- (b)  $\lim_{m \rightarrow 0^+} \Psi_m = \|\mathbf{g}^\delta\|$  ;
- (c)  $\lim_{m \rightarrow l} \Psi_m = 0$  ;
- (d)  $\Psi_m$  est une fonction strictement décroissante sur  $(0, l)$ .

**Lemme 2.6.2.** Pour  $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta\| \leq \delta$  et  $\mathbf{p}$  satisfaisant (2.6.15) et (2.6.16). Si on prend  $m$  comme solution de (2.6.17), alors on a l'inégalité suivante :

$$\alpha_m \leq \left( \frac{2E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}. \quad (2.6.20)$$

*Preuve.* En utilisant  $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta\| \leq \delta$  et (2.6.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \|E_l^m \mathbf{g} - \mathbf{g}\| &= \|(E_l^{m-1} - I) \mathbf{g}^\delta - (I - E_l^{m-1}) (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta)\| \\ &\geq \|(E_l^{m-1} - I) \mathbf{g}^\delta\| - \|(I - E_l^{m-1}) (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta)\| \\ &\geq \tau\delta - \delta = (\tau - 1)\delta. \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>94</sup>

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \|E_l^{m-1} \mathbf{g} - \mathbf{g}\|^2 &= Q_l \sum_{\alpha_m \leq \theta_i^{(l)}} \langle Q_l^\top \mathbf{g}, \mathbf{y}_i^{(l)} \rangle^2 = Q_l \sum_{\alpha_m \leq \theta_i^{(l)}} \left( \frac{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i^{(l)}} \sqrt{ab})}{\theta_i^{(l)}} \right)^2 \langle Q_l^\top \mathbf{p}, \mathbf{y}_i^{(l)} \rangle^2 \\
 &= Q_l \sum_{\alpha_m \leq \theta_i^{(l)}} \left( \frac{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i^{(l)}} \sqrt{ab})}{\theta_i} \right)^2 \times (\theta_i^{-2\gamma}) \times (\theta_i^{(l)})^{2\gamma} \langle Q_l^\top \mathbf{p}, \mathbf{y}_i^{(l)} \rangle^2 \\
 &\leq \sup_{\theta_i^{(l)} \geq \alpha_m} \left( \left( \frac{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i^{(l)}} \sqrt{ab})}{\theta_i^{(l)}} \right)^2 \times (\theta_i^{(l)})^{-2\gamma} \right) E^2 \leq (2\alpha_m^{-(1+\gamma)} E)^2.
 \end{aligned} \tag{2.6.22}$$

En combinant (2.6.21) avec (2.6.22), on obtient

$$(\tau - 1)\delta \leq \|E_l^{m-1} \mathbf{g} - \mathbf{g}\| \leq 2\alpha_m^{-(1+\gamma)} E,$$

et par conséquent

$$\alpha_m \leq \left( \frac{2E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$$

□

### Ordre de précision de l'approximation régularisée

**Théorème 2.6.2.** *Si  $\mathbf{p}$  satisfait les conditions (2.6.15) et (2.6.16), et si  $\alpha_m \leq \left( \frac{2E}{(\tau - 1)\delta} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}$ , alors l'estimation d'écart entre (2.6.3) et (2.6.14) peut être estimée comme suit :*

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{l,m}^\delta\| &\leq \left[ \tilde{M} \left( \frac{2}{\tau - 1} \right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \delta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} + \left( \tilde{M} [(\tau + 1)\delta + \|\mathbf{g}\| \Theta(\mathcal{X}(\alpha_m), \mathcal{R}(\alpha_m))] \right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \right] E^{\frac{1}{1+\gamma}} \\
 &\quad + 2\| (F^{-1}(\mathbb{A}_m, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top) \mathbf{g} \|.
 \end{aligned} \tag{2.6.23}$$

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>95</sup>

*Preuve.* On a :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{l,m}^\delta\| &= \|F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) \mathbf{g} - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \mathbf{g}^\delta\| \\
 &\leq \|F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) \mathbf{g} - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \mathbf{g}\| + \|(Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top) (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta)\| \\
 &= \Delta_1 + \Delta_2.
 \end{aligned} \tag{2.6.24}$$

$$\begin{aligned}
 (\Delta_2)^2 &= Q_l \sum_{\theta_i^{(l)}} \left( \frac{\theta_i^{(l)}}{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i^{(l)}}\sqrt{ab})} \right)^2 \langle Q_l^\top (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta), y_i^{(l)} \rangle \\
 &\leq \alpha_m^2 Q_l \sum_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m} \left( \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i^{(l)}}\sqrt{ab})} \right)^2 \langle Q_l^\top (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta), y_i^{(l)} \rangle^2 \\
 &\leq \alpha_m^2 \left( \sum_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m} \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i^{(l)}}\sqrt{ab})} \right)^2 \left( Q_l \sum_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m} \langle Q_l^\top (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta), y_i^{(l)} \rangle^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.6.25}$$

On prend  $\tilde{M} = \sup_{i=1,l} \left( \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i^{(l)}}\sqrt{ab})} \right)$ , il vient

$$Q_l \sum_{\theta_i^{(l)} \leq \alpha_m} \langle Q_l^\top (\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta), y_i^{(l)} \rangle^2 = \|(I - E_l^m)(\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta)\|^2 \leq \|\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta\|^2 \leq \delta^2.$$

Donc

$$\Delta_2 \leq \alpha_m \tilde{M} \delta \leq \tilde{M} \left( \frac{2}{\tau - 1} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} E^{\frac{1}{1+\gamma}} \delta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}. \tag{2.6.26}$$

Pour  $\Delta_1$ , on a :

$$\Delta_1 = \|F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) \mathbf{g} - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \mathbf{g}\| \leq \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}. \tag{2.6.27}$$

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>96</sup>

Pour le premier terme, on utilise  $\mathbf{g} = F(\mathbb{A}, a, b) \mathbf{p}$  :

$$\Delta_{1,1} = \|(I - E^m) \left( F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \right) (F(\mathbb{A}, a, b) \mathbf{p})\|, \quad (2.6.28)$$

$$\Delta_{1,2} = \|E^m \left( F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \right) \mathbf{g}\|. \quad (2.6.29)$$

Comme  $(I - E^m)F^{-1}(\mathbb{A}_m, a, b) = 0$ , on a

$$\Delta_{1,1} \leq \|(I - E^m)F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) F(\mathbb{A}, a, b) \mathbf{p}\| \quad (2.6.30)$$

$$+ \|(I - E^m) \left( F^{-1}(\mathbb{A}_m, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \right) \mathbf{g}\|, \quad (2.6.31)$$

et de (2.6.30), il résulte

$$\|(I - E^m)F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) F(\mathbb{A}, a, b) \mathbf{p}\| = \|(I - E^m)\mathbf{p}\|,$$

donc

$$\begin{aligned} \|(I - E^m)\mathbf{p}\|^2 &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\alpha_i}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \right)^2 |\langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \left( \frac{\alpha_i}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \right)^{2(1+\gamma)} |\langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} |\langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle|^{\frac{2\gamma}{1+\gamma}} \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left( \left( \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \right)^{2\gamma} \alpha_i^{2\gamma} |\langle \mathbf{p}, \zeta_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \left( \sum_{i=1}^m |\langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle|^2 \right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.6.32)$$

On a

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \right)^{2\gamma} \alpha_i^{2\gamma} |\langle \mathbf{p}, \zeta_i \rangle|^2 \leq \sup_{i=1, m} \left( \frac{1}{1 - J_0(2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{ab})} \right)^{2\gamma} E^2 \leq \tilde{M}^{2\gamma} E^2, \quad (2.6.33)$$

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>97</sup>

et

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle^2 = \|(I - E^m)\mathbf{g}\|^2, \quad (2.6.34)$$

$$\|(I - E^m)\mathbf{g}\| \leq \|(I - E_l^m)\mathbf{g}\| + \|(E_l^m - E^m)\mathbf{g}\|, \quad (2.6.35)$$

$$\|(I - E_l^m)\mathbf{g}\| \leq \|(I - E_l^m)\mathbf{g}^\delta\| + \|(I - E_l^m)(\mathbf{g} - \mathbf{g}^\delta)\| \leq \tau\delta + \delta = (\tau + 1)\delta. \quad (2.6.36)$$

Pour estimer  $\|(E_l^m - E^m)\mathbf{g}\|$ , on utilise le résultat (voir [46, Page 62, Def 2.61]) :

$$\|(E_l^m - E^m)\mathbf{g}\| \leq \|(E_l^m - E^m)\| \|\mathbf{g}\| = \Theta(\mathcal{X}(\alpha_m), \mathcal{R}(\alpha_m)) \|\mathbf{g}\|, \quad (2.6.37)$$

où  $\Theta(\mathcal{X}(\alpha_m), \mathcal{R}(\alpha_m))$  est l'angle principal entre les sous-espaces  $\mathcal{X}(\alpha_m)$  et  $\mathcal{R}(\alpha_m)$ , défini par

$$\Theta(\mathcal{X}(\alpha_m), \mathcal{R}(\alpha_m)) = \max\left\{ \sup_{x \in \mathcal{R}(\alpha_m), \|x\|=1} d(x, \mathcal{X}(\alpha_m)), \sup_{x \in \mathcal{X}(\alpha_m), \|x\|=1} d(x, \mathcal{R}(\alpha_m)) \right\}.$$

On arrange tous ces calculs, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^m \langle \mathbf{g}, \zeta_i \rangle^2 \leq ((\tau + 1)\delta + \|\mathbf{g}\| \Theta(\mathcal{X}(\alpha_m), \mathcal{R}(\alpha_m)))^2,$$

ce qui donne l'estimation (2.6.32) :

$$\|(I - E^m)\mathbf{p}\| \leq E^{\frac{1}{1+\gamma}} \left( \tilde{M}((\tau + 1)\delta + \|\mathbf{g}\| \Theta(\mathcal{X}(\alpha_m), \mathcal{R}(\alpha_m))) \right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}. \quad (2.6.38)$$

On remarque que le deuxième terme est borné par  $\| \left( F^{-1}(\mathbb{A}_m, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \right) \mathbf{g} \|$ ,

et

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} &= \| E^m \left( F^{-1}(\mathbb{A}, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \right) \mathbf{g} \| \\ &= \| E^m \left( F^{-1}(\mathbb{A}_m, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \right) \mathbf{g} \| \\ &\leq \left\| \left( F^{-1}(\mathbb{A}_m, a, b) - Q_l F^{-1}(S_{l,m}, a, b) Q_l^\top \right) \mathbf{g} \right\|, \end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation (2.6.23). □

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov 98

Les deux termes de la majoration supérieure (2.6.23) soulignent les différentes étapes de la convergence. L'erreur  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{l,m}^\delta\|$  peut être importante tant que les basses fréquences approximatives (vecteurs et valeurs de **Ritz**) ne sont pas suffisamment précises, et cette convergence est guidée par (2.6.11) et (2.6.12). Une fois que cette précision sera améliorée de manière satisfaisante, *i.e.*,  $\Theta(\mathcal{X}(\alpha_m), \mathcal{R}(\alpha_m)) \approx 0$ , l'erreur  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{l,m}^\delta\|$  sera dominée par "l'erreur intrinsèque"  $\left( \tilde{M} \left( \frac{2}{\tau-1} \right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} + \left( \tilde{M}(\tau+1) \right)^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \right) E^{\frac{1}{1+\gamma}} \delta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}$ , due à la perturbation des données. Ce comportement est confirmé par les résultats des tests numériques.

### 2.6.2 Procédure de Kozlov-Maz'ya preconditionnée avec projection

Soit la fonction  $H$  définie par  $H(\alpha) = [I - (I - \omega\alpha^{-r}F(\alpha; a; b))^k]F(\alpha; a; b)^{-1}$ . Pour simplifier les calculs on prend l'itération initiale le vecteur nul, dans ce cas les projections de (2.6.8) et (2.6.10) dans le sous-espace  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g}^\delta)$  sont données par les formules suivantes :

$$\mathbf{p}_{k,r}^{\delta,(l)} = Q_l \|\mathbf{g}^\delta\| H(S_l) e_1, \quad (2.6.39)$$

$$\mathbf{u}_{k,r}^{\delta,(l)}(t) = Q_l \|\mathbf{g}^\delta\| F(S_l; t_1; t_2) H(S_l) e_1, \quad (2.6.40)$$

où  $S_l = T_l^{-1}$ . Pour établir la convergence et l'estimation d'erreur, on suppose qu'il existe une borne a priori pour le problème discret de (2.3.12), pour  $\gamma > 0, r \geq 0$  :

$$\|\mathbb{A}^{\gamma(1+r)} \mathbf{p}\| \leq E^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \alpha^{2\gamma(1+r)} \langle \mathbf{p}, \zeta_i \rangle^2 \geq E^2 < +\infty. \quad (2.6.41)$$

L'estimation de la convergence de la solution construite par la procédure de **Kozlov-Maz'ya** preconditionnée projetée dans le sous-espace de **Krylov** est donnée par ce théorème.

**Théorème 2.6.3.** Soit  $\mathbf{u}_{k,r}^{\delta,(l)}(t)$  la solution donnée par (2.6.40) et  $\mathbf{u}(t)$  la solution donnée par (2.6.4). Si  $\mathbf{p}$  satisfait la condition (2.6.41), alors le taux de convergence de la procédure de **Kozlov-Maz'ya** preconditionnée projetée dans  $\mathcal{K}_l(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g}^\delta)$  est donné par :

$$\sup_{t=(t_1;t_2) \in [0, T_1][0, T_2]} \|\mathbf{u}_{k,r}^{\delta,(l)}(t) - \mathbf{u}(t)\| \leq \frac{\tau_\gamma}{(1+k)^\gamma} + \omega \frac{2}{\alpha^{(1+r)}} k\delta +$$

## 2.6 Régularisation de l'analogue discret du problème de Goursat par les méthodes de Krylov<sup>99</sup>

$$\|F(\mathbb{A}; t_1; t_2) H(\mathbb{A}) \mathbf{g}^\delta - Q_l \|\mathbf{g}^\delta\| F(S_l; t_1; t_2) H(S_l) e_1\|, \quad (2.6.42)$$

$$\text{où } \tau_\gamma = \kappa_\gamma \left( \frac{\tilde{M}}{\omega} \right)^\gamma E$$

*Preuve.* On a

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{k,r}^{\delta,(l)}(t)\| \leq \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{k,r}^\delta(t)\| + \|\mathbf{u}_{k,r}^\delta(t) - \mathbf{u}_{k,r}^{\delta,(l)}(t)\|$$

où  $\mathbf{u}_{k,r}^\delta(t)$  est définie par (2.6.10). De (2.5.25), il résulte immédiatement que

$$\sup_{t=(t_1;t_2) \in [0,T_1][0,T_2]} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_{k,r}^\delta(t)\| \leq \frac{\tau_\gamma}{(1+k)^\gamma} + \omega \frac{2}{\alpha_1^{(1+r)}} k\delta,$$

et le second terme de l'estimation (2.6.42) est donné par

$$\|\mathbf{u}_{k,r}^\delta(t) - \mathbf{u}_{k,r}^{\delta,(l)}(t)\| = \|F(\mathbb{A}; t_1; t_2) H(\mathbb{A}) \mathbf{g}^\delta - Q_l \|\mathbf{g}^\delta\| F(S_l; t_1; t_2) H(S_l) e_1\|.$$

□

Le second terme de l'estimation (2.6.42) sera négligeable par rapport à (2.6.3) si les valeurs et les vecteurs de **Ritz** approchent les couples propres de  $\mathbb{A}$  avec une grande précision (les résultats du test numérique confirment ce comportement).

De la même manière que dans le cas analytique, pour obtenir une estimation Hölderienne entre la solution régularisée et la solution exacte, le choix a priori du paramètre  $k = k(\delta) =$

$$\left[ \left( \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \right] \text{ donne :}$$

$$\sup_{t=(t_1;t_2) \in [0,T_1][0,T_2]} \|\mathbf{u}_{k,r}^{\delta,(l)}(t) - \mathbf{u}(t)\| \leq$$

$$\left[ \kappa_\gamma \left( \frac{\tilde{M}}{\omega} \right)^\gamma + \frac{2}{\alpha_1^{(1+r)}} \right] E^{\frac{1}{1+\gamma}} \delta^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} + \|F(\mathbb{A}; t_1; t_2) H(\mathbb{A}) \mathbf{g}^\delta - Q_l \|\mathbf{g}^\delta\| F(S_l; t_1; t_2) H(S_l) e_1\|. \quad (2.6.43)$$

## 2.7 Exemples numériques

**Exemple 2.7.1.** Maintenant, on donne un exemple numérique tridimensionnel pour montrer la fiabilité et l'efficacité des méthodes proposées. Les expériences numériques ont été réalisés par le logiciel MATLAB. On considère le problème inverse suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{t_1 t_2}(x, t) - u_{xx}(x, t) = p(x), \quad x \in (0, \pi), t = (t_1, t_2) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[, \\ u(0, t_1, t_2) = u(\pi, t_1, t_2) = 0, \quad (t_1, t_2) \in \bar{Q} = [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x, 0, t_2) = 0, \quad t_2 \in [0, 1], \\ u(x, t_1, 0) = 0, \quad t_1 \in [0, 1], \\ u(x, 1, 1) = g(x), \quad x \in [0, \pi], \end{array} \right. \quad (2.7.1)$$

où  $p(x)$  est la source inconnue et  $u(x, 1, 1) = g(x)$  est la condition supplémentaire. Il est simple de vérifier que l'opérateur

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

est un opérateur auto-adjoint, positif et à résolvante compacte ( $A$  est diagonalisable). Ces couples propres  $(\lambda_n, \phi_n)$  sont donnés par

$$\lambda_n = n^2, \quad \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas, la formule (2.3.17) se présente sous la forme

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{1 - J_0(2k)} \left( \int_0^\pi g(x) \sin(kx) dx \right) \sin(kx). \quad (2.7.2)$$

Pour simplifier le calcul, on prend la solution :  $p(x) = (\pi - x) \times x$ ; et on a calculé une approximation finie de la fonction donnée

$$g(x) = u(x, 1, 1) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{4000} \frac{1 - J_0(2k)}{k^2} \left( \int_0^\pi p(x) \sin(kx) dx \right) \sin(kx),$$

où les coefficients  $(p(x), \sin(kx)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} p(x) \sin(kx) dx$  ont été évalués numériquement par la règle des trapèzes pour approcher l'intégrale en utilisant une grille équidistante

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M=1999} = \pi, h = \frac{\pi}{1999}$$

$M$  est un paramètre constant intervenant dans dans le calcul de l'intégrale  $\int_0^{\pi} p(x) \sin(kx) dx$ . La fonction de Bessel  $J_0$  est évaluée numériquement (*i.e.*, `besselj(0, .)` de MATLAB). Cette donnée a été considérée comme la "donnée exacte"  $g$ .

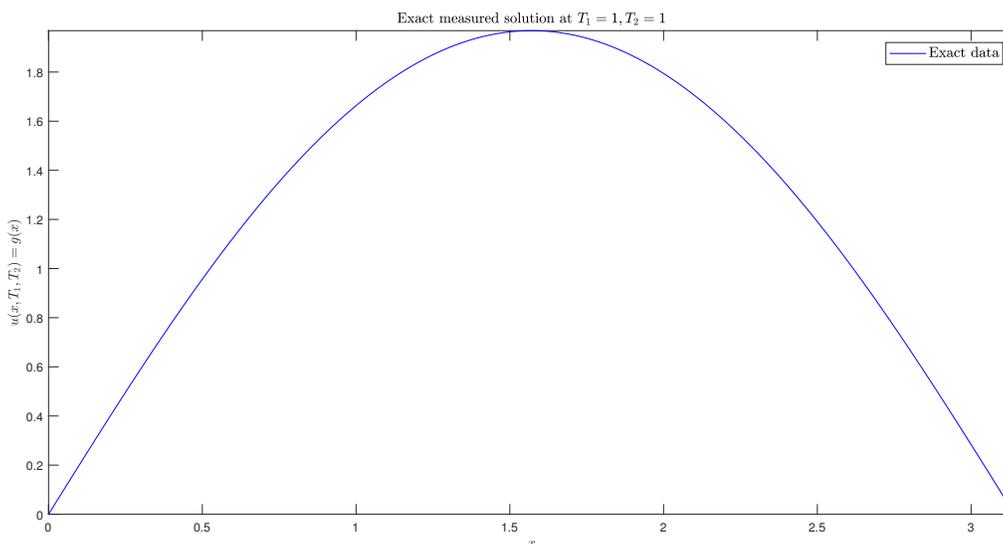
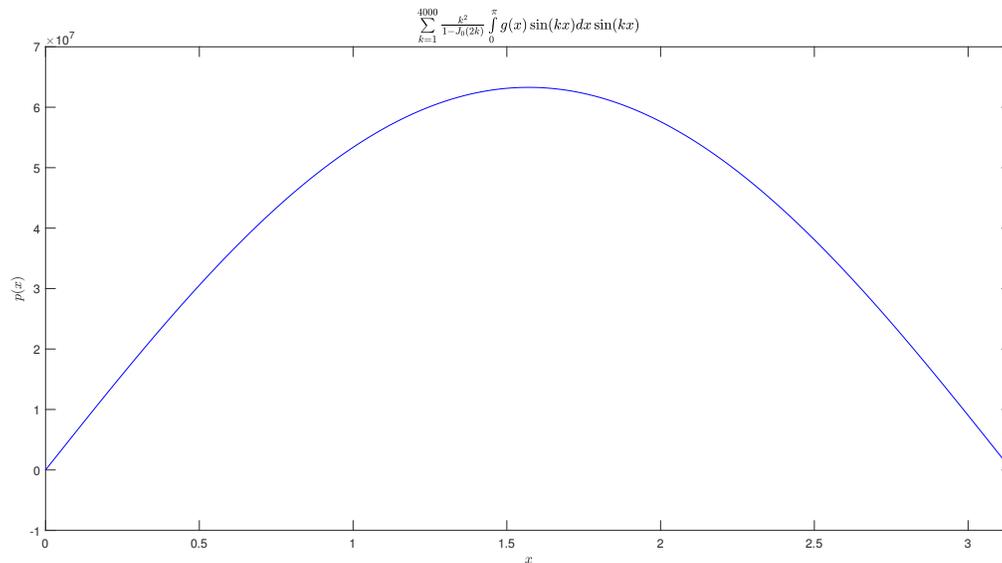
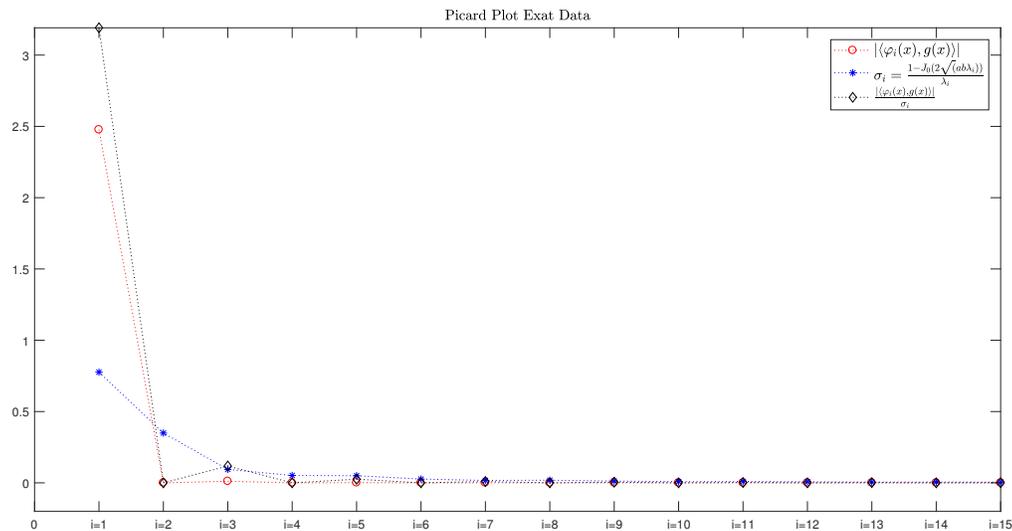


FIGURE 2.7 – Donnée exacte  $g$

Ce problème est mal conditionné car  $Cond(F) = 1.250161330363614e + 07$ , ce qui qualifie ce problème comme une approximation du problème **mal posé** en dimension finie. La reconstruction de  $p(x)$  par l'inversion directe est complètement sans signification comme le montre l'image suivante.

FIGURE 2.8 – Reconstruction de  $p(x)$  par l'inversion directe

L'analyse du cratère **mal posé** de ce problème en dimension finie peut être donnée par la condition discrète de Picard. Dans le cas d'une donnée exacte  $g$ , la solution  $p$  existe si la décroissance des coefficients  $|(g(x), \sin(kx))| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \int_0^\pi g(x) \sin(kx) dx \right|$  est plus rapide que les valeurs propres  $\sigma_k = \frac{1 - J_0(2k)}{k^2}$ , *i.e.*,  $|(g(x), \sin(kx))| \approx \sigma_{k+1}$ . La figure suivante présente cette condition pour les 15 premiers coefficients.

FIGURE 2.9 – Courbe de Picard discrète :  $i = \overline{1, 15}$ 

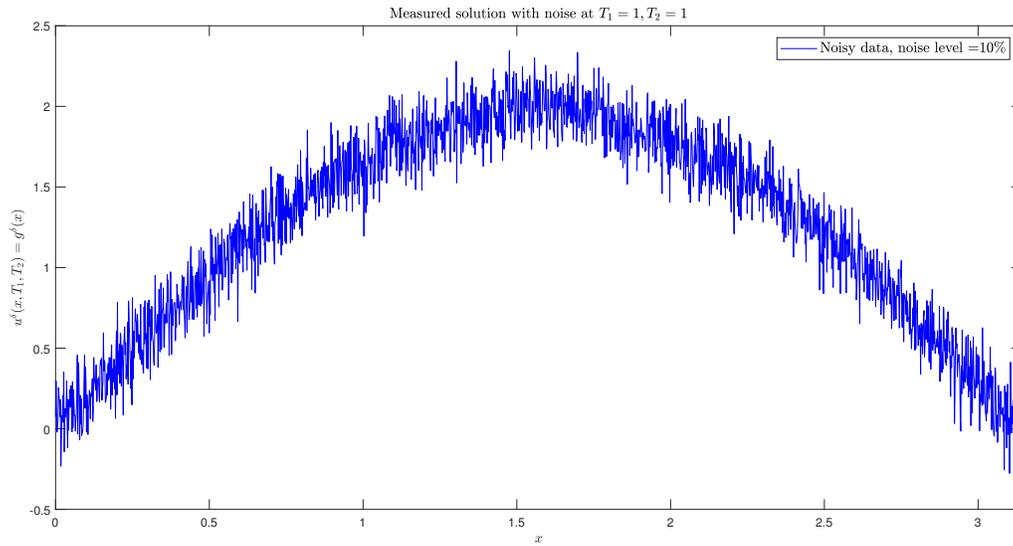
Maintenant on ajoute du bruit à la donnée  $g$  en utilisant une perturbation aléatoire (obtenue par la commande de MATLAB `randn`), on obtient le vecteur  $g^\delta$  :

$$\begin{aligned} \text{noise} &= \text{randn}(\text{size}(g)); \\ \text{noise} &= \varepsilon * \text{noise} * \text{norm}(g) / \text{norm}(\text{noise}); \\ g^\delta &= g + \text{noise}; \end{aligned}$$

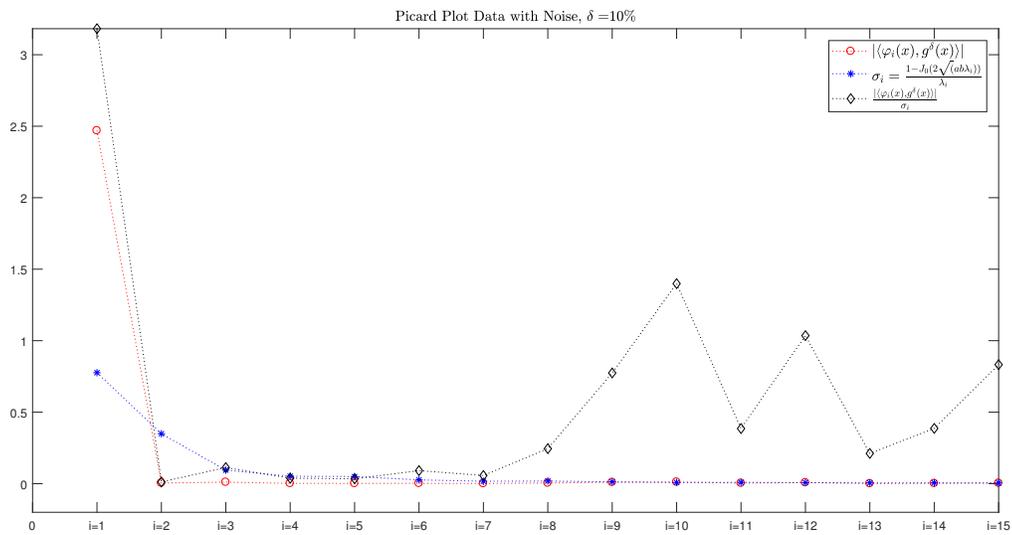
Le niveau du bruit  $\delta = \frac{\|g^\delta - g\|}{\|g\|} = \frac{\|\text{noise}\|}{\|g\|}$ <sup>7</sup>, la fonction "randn(.)" génère des valeurs aléatoires normalement distribuées dont la moyenne est égale à 0, la variance  $\sigma^2 = 1$ , et l'écart-type  $\sigma = 1$ . "randn(size(g))" renvoie un tableau d'entrées aléatoires de la même taille que  $g$ .

Les figures suivantes présentent la donnée infectée  $g^\delta$  pour deux niveaux du bruit différents  $\delta = 10\%$ ,  $\delta = 25\%$ , et les courbes de comparaison de la décroissance des coefficients  $\langle \varphi_k(x), g^\delta \rangle$  par rapport aux valeurs propres pour les 15 premiers termes.

7. Le niveau du bruit est le pourcentage de la quantité de bruit  $\|g - g^\delta\|$  par rapport à la norme d'information  $g$ .

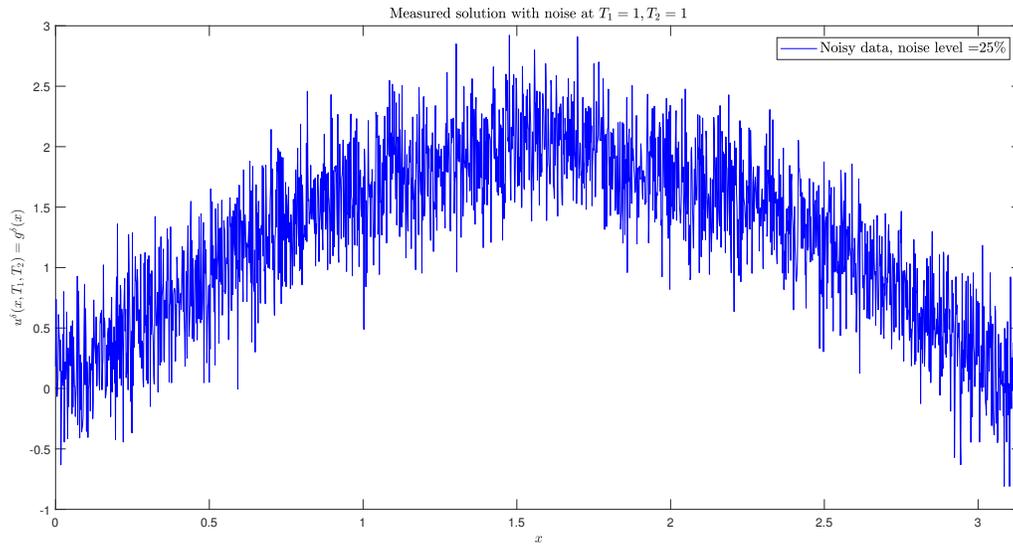


(a)  $g^\delta$  avec un niveau du bruit 10%

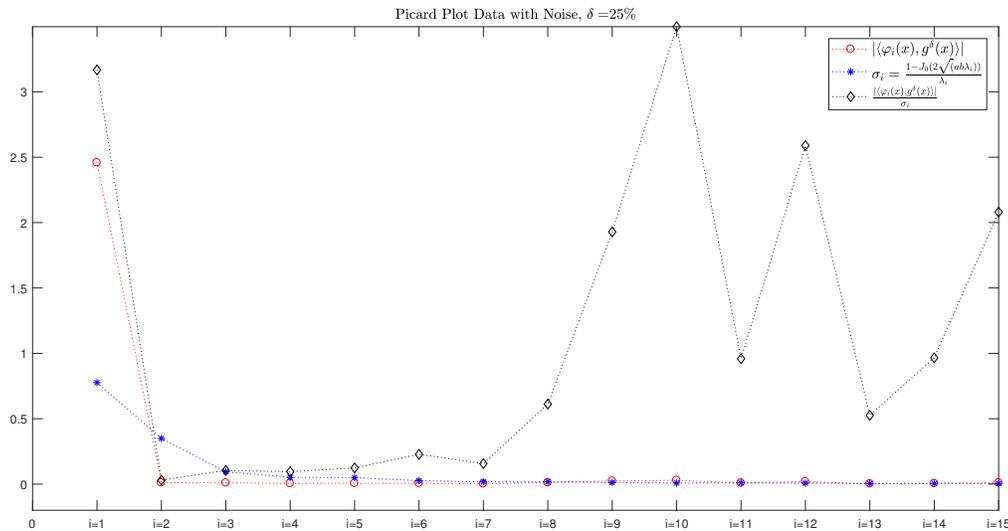


(b) Courbe de Picard discrète :  $i = \overline{1, 15}$ ,  $\delta = 10\%$

FIGURE 2.10 – Données bruitées et courbes de Picard discrètes pour  $\delta = 10\%$



(a)  $g^\delta$  avec un niveau du bruit 25%



(b) Courbe de Picard discrète :  $i = \overline{1, 15}$ ,  $\delta = 25\%$

FIGURE 2.11 – Données bruitées et courbes de Picard discrètes pour  $\delta = 25\%$

Les courbes qui visualisent la condition de Picard, montrent que dans le cas des données bruitées, le terme  $\frac{|\langle \varphi_i(x), g^\delta \rangle|}{\sigma_i}$  commence à croître à partir de la 4-ième valeur propre, ce qui amplifie le bruit, *i.e.*,  $|\langle \varphi_i(x), g^\delta \rangle| \approx \sigma_{i+1}$  pour  $i < 4$  et  $|\langle \varphi_i(x), g^\delta \rangle| \approx \sigma_4$  pour  $i \geq 4$ . A première vue, on peut dire que la méthode de troncature donnera une meilleure solution

régularisée à l'ordre de troncature  $N = 3$ .

**Méthode de troncature.** La solution approximative de (2.7.2) dans le cas de données inexactes  $g^\delta$  est donné par

$$p_N^\delta(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{1 - J_0(2k)} \left( \int_0^\pi g^\delta(x) \sin(kx) dx \right) \sin(kx). \quad (2.7.3)$$

L'erreur relative  $RE(p)$  est donnée par

$$RE(p) = \frac{\|p_N^\delta - p\|_*}{\|p\|_*}. \quad (2.7.4)$$

Pour vérifier l'efficacité du critère d'arrêt, on calcule les solutions régularisées  $p_N^\delta$  pour  $N = \overline{1, 10}$  et on prend la solution avec la plus faible erreur, et on vérifie si le premier entier  $N$  qui est choisi selon le critère  $\|P_N g^\delta - g^\delta\| \leq \tau \delta$  avec  $\tau = 1.00009 > 1$  coïncide avec la solution d'erreur minimale. Le tableau suivant donne l'erreur relative et l'erreur en norme pour l'ordre de troncature  $N = 3$  qui satisfait le critère d'arrêt, pour un niveau du bruit de  $\delta = 10\%$  et  $\delta = 25\%$ .

Niveau du bruit	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$
Ordre de troncature	$N = 3$	$N = 3$
Erreur relative $RE(p)$	0.008834814903403	0.009638522508573
$\min_{N=\overline{1,10}} Er(N) = \min_{N=\overline{1,10}} \ p_N^\delta - p\ $	0.711775393652456	0.776525963223667

TABLE 2.1 – Résultats numériques pour la méthode de troncature

Les figures suivantes visualisent la solution approchée par cette méthode et l'erreur  $Er(N) = \|p_N^\delta - p\|$  en fonction de l'ordre de troncature  $N$ , et  $\|P_N g^\delta - \delta\|$ ,  $N = \overline{1, 10}$ , pour  $\delta = 10\%$  et  $\delta = 25\%$ .

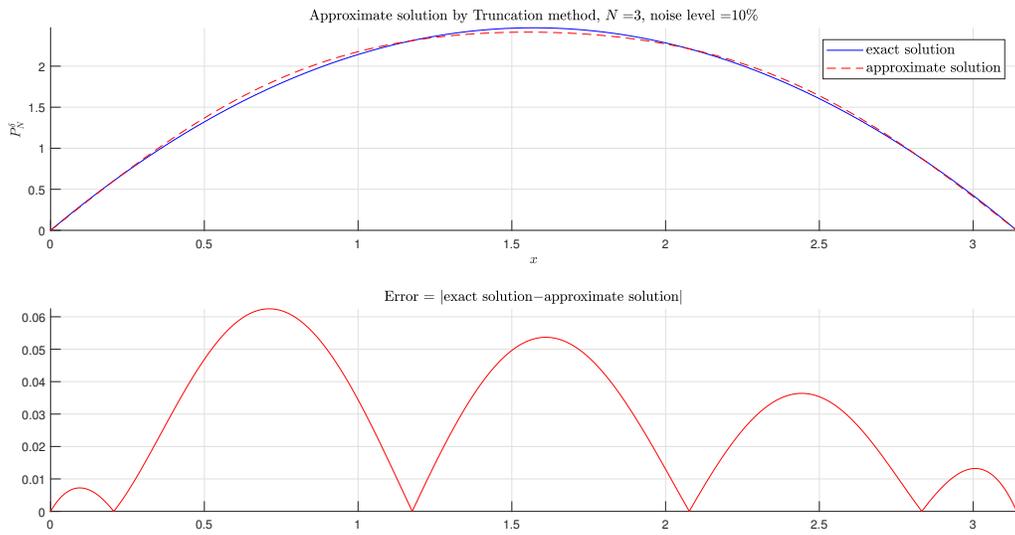


FIGURE 2.12 – La solution exacte et la solution approchée,  $N = 3$ ,  $\delta = 10\%$ .

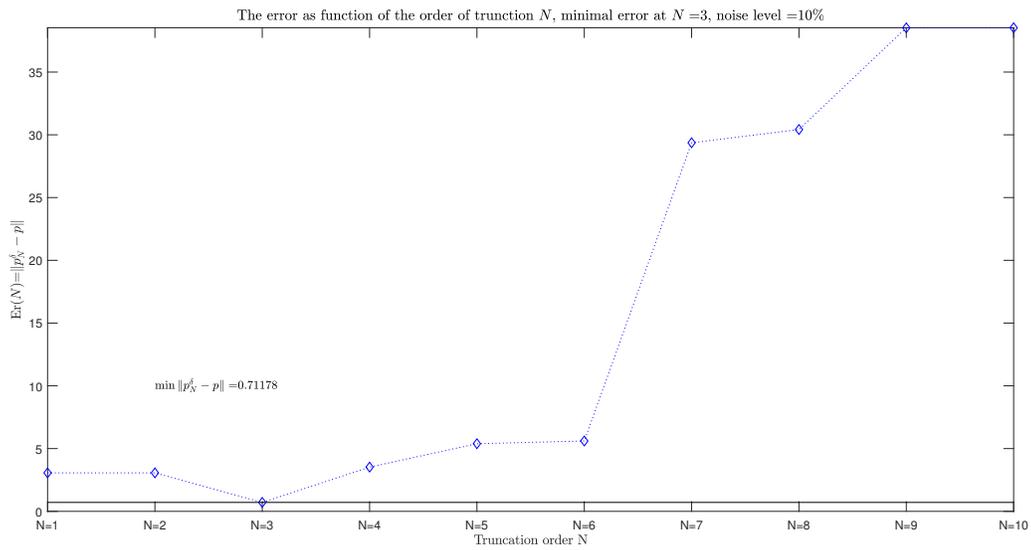


FIGURE 2.13 –  $Er(N) = \|p_N^\delta - p\|$ ,  $N = \overline{1, 10}$ ,  $\delta = 10\%$ .

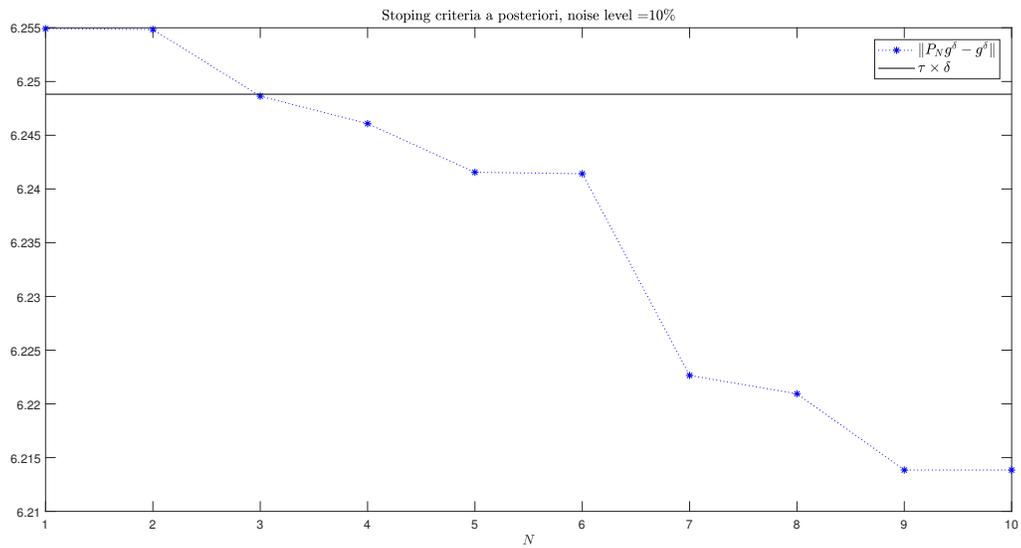


FIGURE 2.14 –  $\|P_N g^\delta - g^\delta\|$ ,  $N = \overline{1, 10}$ ,  $\delta = 10\%$ .

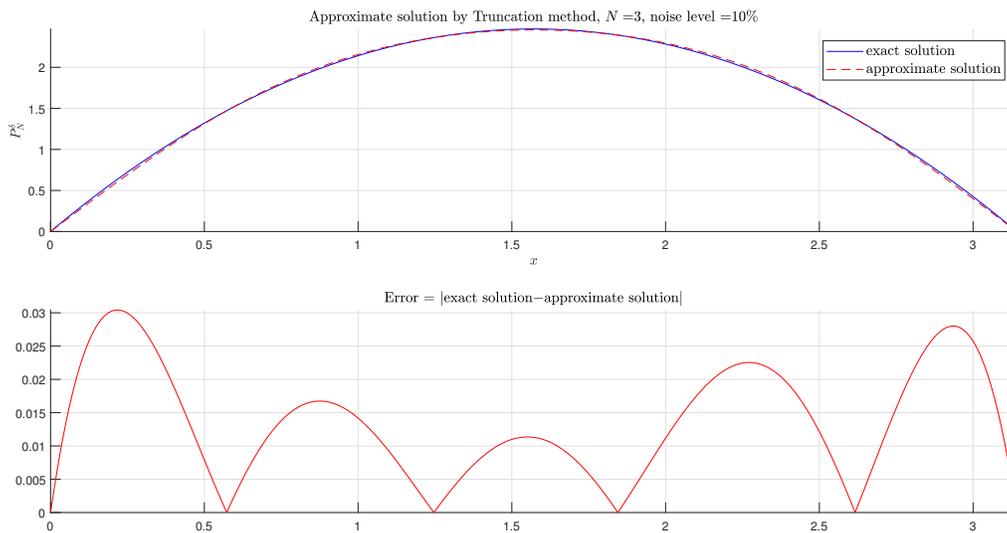


FIGURE 2.15 – Solution exacte et solution approchée,  $N = 3$ ,  $\delta = 25\%$ .

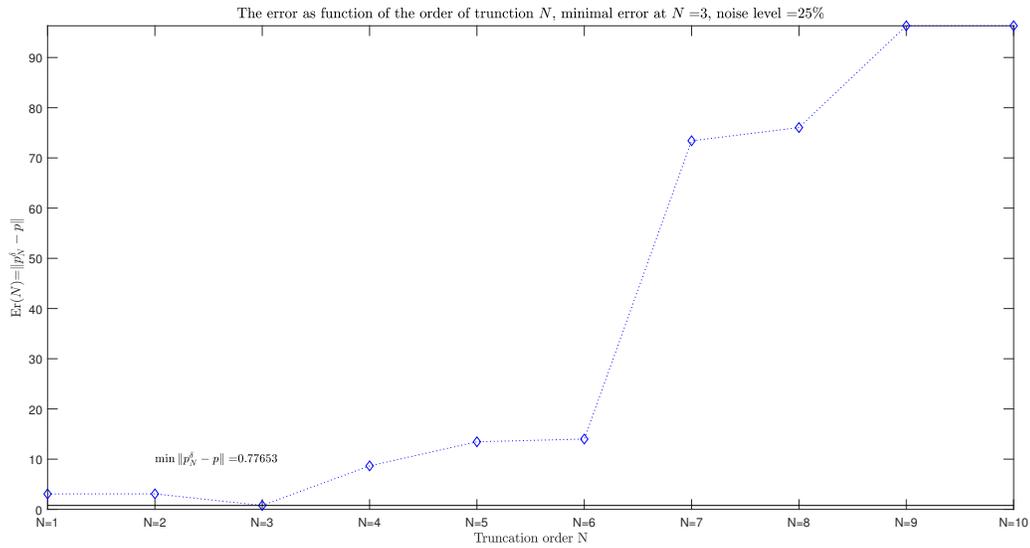


FIGURE 2.16 –  $Er(N) = \|p_N^\delta - p\|$ ,  $N = \overline{1,10}$ ,  $\delta = 25\%$ .

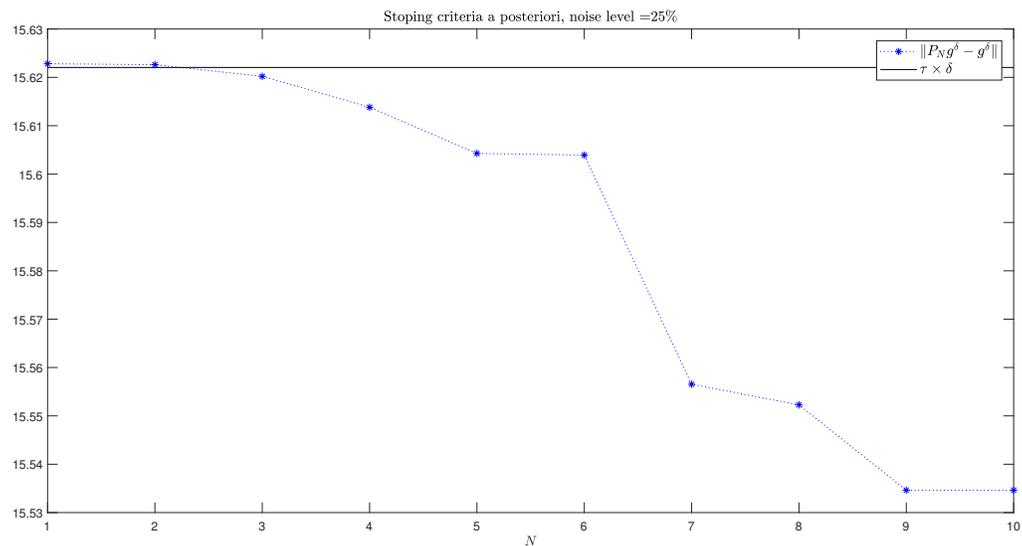


FIGURE 2.17 –  $\|P_N g^\delta - g^\delta\|$ ,  $N = \overline{1,10}$ ,  $\delta = 25\%$ .

Les résultats obtenus confirment la conclusion basée sur les courbes de la condition de Picard.

**Itérations de Kozlov-Maz'ya préconditionné.**

L'approximation de la solution construite par la méthode itérative de (2.5.3) est générée

par la formule :

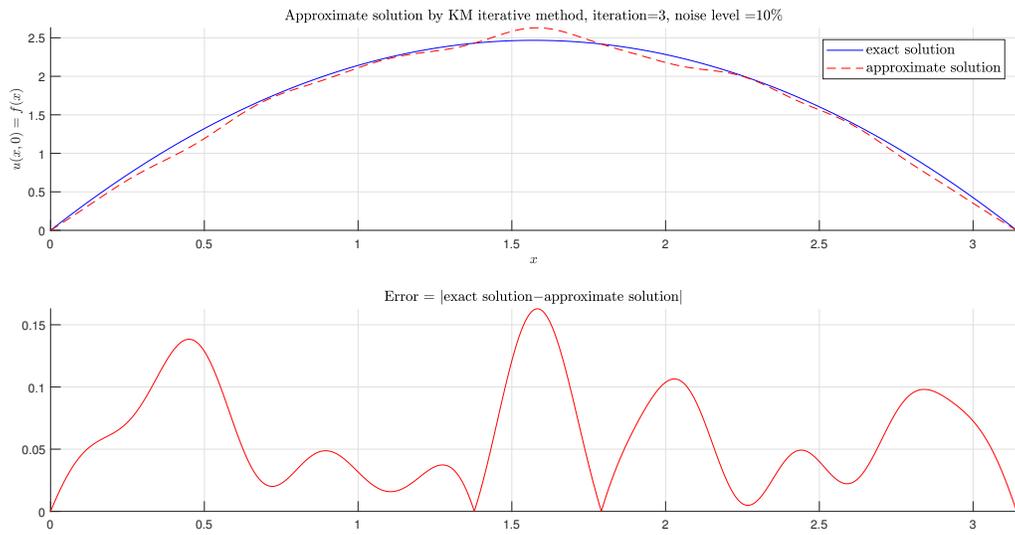
$$p_k^\delta = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N \left( I - \omega(i^2)^{-r} F(i^2; 1, 1) \right)^k \int_0^\pi p_0 \sin(ix) dx \sin(ix) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^N \left[ 1 - \left( I - \omega(i^2)^{-r} F(i^2; 1, 1) \right)^k \right] \left( F(i^2; 1, 1) \right)^{-1} \int_0^\pi g^\delta \sin(ix) dx \sin(ix). \quad (2.7.5)$$

Afin de simplifier les calculs, on prend  $p_0$  la fonction nulle et  $\omega = 1$ . Maintenant on va analyser la méthode de **Kozlov-Maz'ya** sans préconditionnement, *i.e.*, ( $r = 0$ ) pour un bruit de niveau 10% en fonction de  $N$ , *i.e.*, on voit la limite de l'efficacité et la fiabilité de cette méthode pour ce problème. On calcule les solutions régularisées  $p_k^\delta$  pour  $k = \overline{1, 100}$  pour  $N = 20, 200, 1000, 4000$  et on prend la solution avec la plus faible erreur, les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

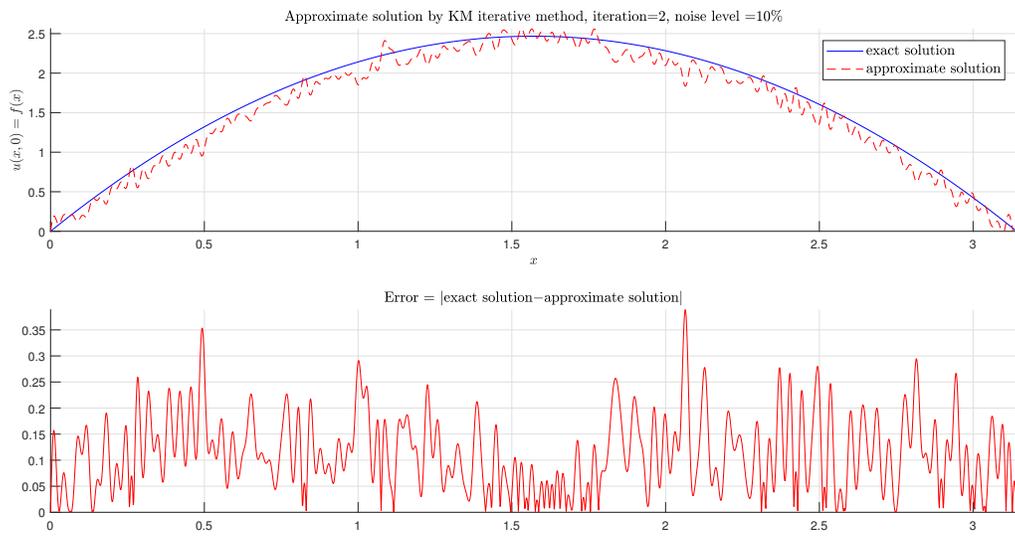
Niveau du bruit $\delta = 10\%$	$N = 20$	$N = 200$	$N = 1000$	$N = 40000$
$cond(F(A; 1; 1))$	3.127476661807348e + 02	2.988411273262019e + 04	7.816576943699557e + 05	1.250161330363614e + 07
Itération	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 3$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 2$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 2$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 1$
Erreur relative $RE(p)$	0.039868620630640	0.073952419232442	0.123261113510267	1.33942655445993
$\min_{k=1,100} (Er(k)) = \min(\ p_k^\delta - p\ )$	3.212008791811175	5.957964358760811	9.930511114275720	107.9106777216042

TABLE 2.2 – Résultats numériques pour les itérations de Kozlov-Maz'ya.

Les figures suivantes visualisent la solution approchée par cette méthode.

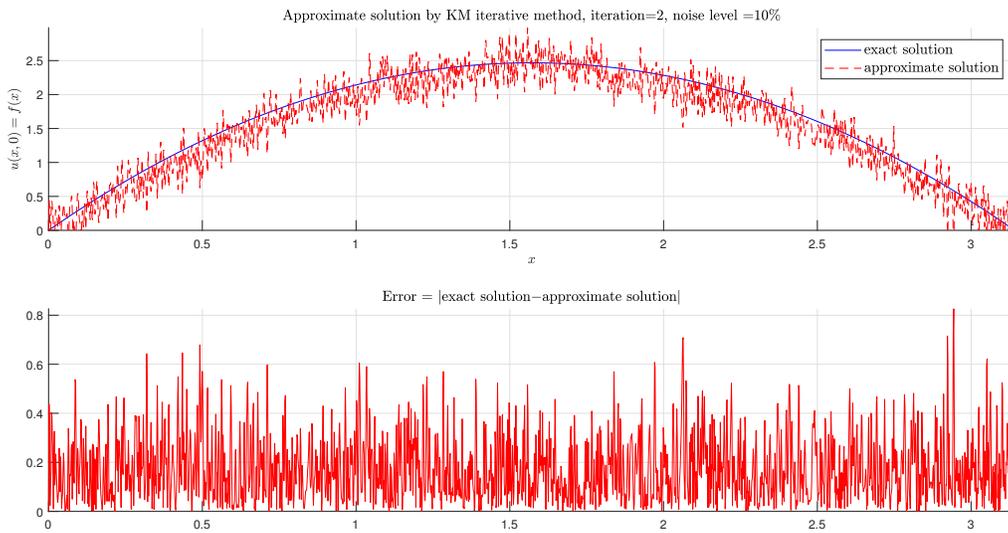
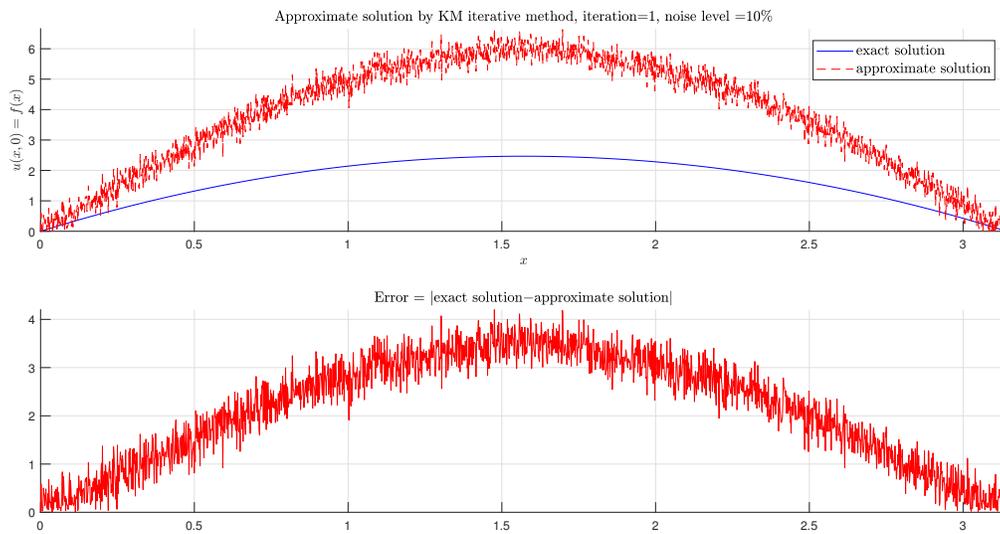


(a) La solution exacte et la solution approchée,  $k = 4$ ,  $\delta = 10\%$ .

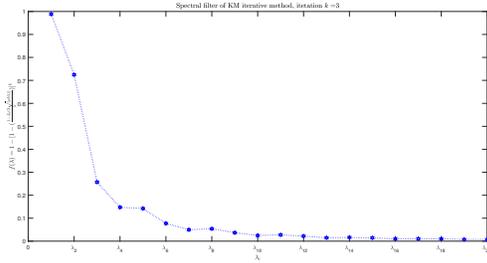


(b) Solution exacte et solution approchée,  $k = 3$ ,  $\delta = 10\%$ .

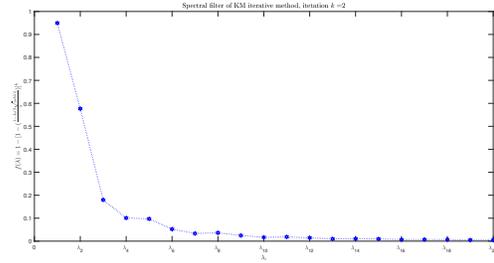
FIGURE 2.18 – Solution par KM  $N = 20$  et  $N = 200$ .

(a) La solution exacte et la solution approchée,  $k = 2$ ,  $\delta = 10\%$ .(b) Solution exacte et solution approchée,  $k = 1$ ,  $\delta = 10\%$ .FIGURE 2.19 – Solution par KM  $N = 1000$  et  $N = 4000$ .

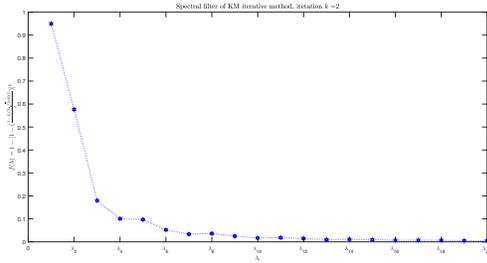
Et voici les courbes de filtre spectral dans chaque cas :



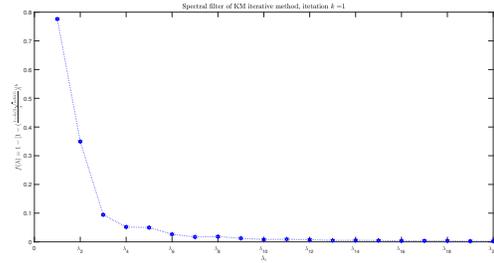
(a)  $N = 20$  avec un niveau du bruit 10%



(b)  $N = 200$  avec un niveau du bruit 10%



(c)  $N = 1000$  avec un niveau du bruit 10%



(d)  $N = 4000$  avec un niveau du bruit 10%

FIGURE 2.20 – Courbes de filtre spectral pour  $\delta = 10\%$ , la méthode KM.

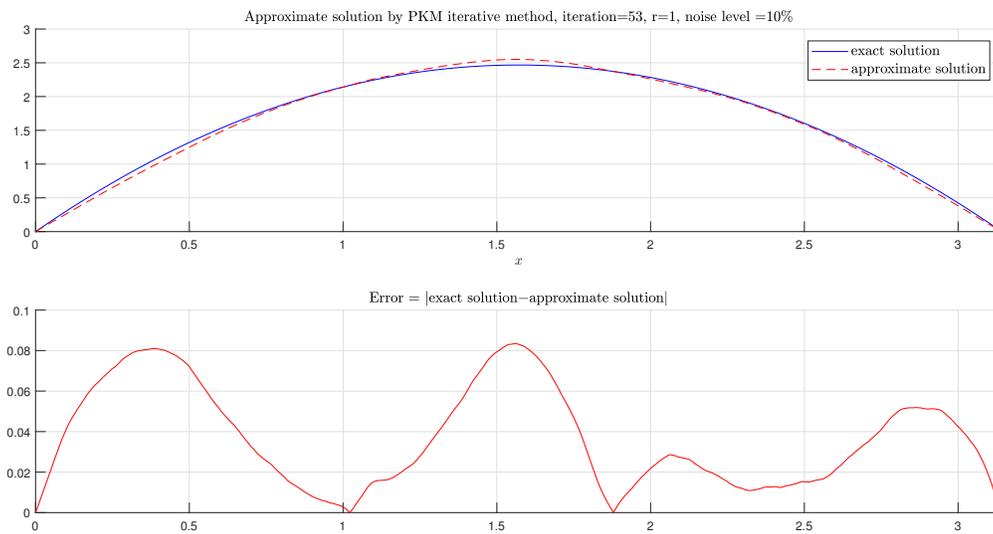
Selon les résultats obtenus dans cet exemple, on peut prévoir que dans le cas où  $\sigma(i) = \mathcal{O}(i^{-2})$ , la méthode de **Kozlov-Maz'ya** perd son efficacité si le problème est mal conditionné.

Maintenant, on prend  $N = 4000$  et on reconstitue  $p_k^\delta$  avec la version préconditionnée, pour  $r = 1, 1.5, 2$  et  $\delta = 10/100, 25/100$ , le paramètre  $k = k(\delta, g^\delta)$  est choisi avec la méthode a posteriori  $\|u_\delta^k(1, 1) - g^\delta\| \leq \tau\delta$  avec  $\tau = 1.0000000001 > 1$ . Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau suivant :

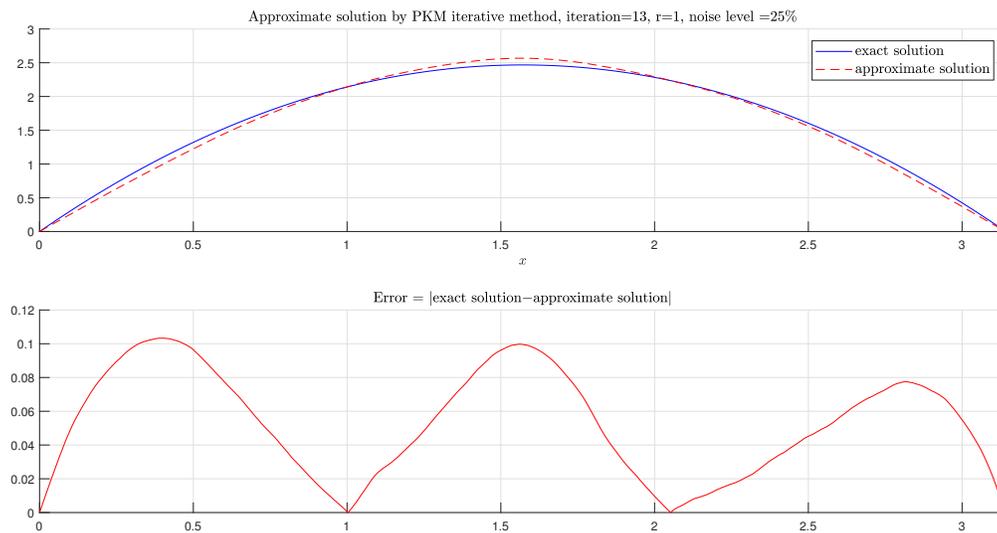
Préconditionnement	Résultats pour $r = 1$		Résultats pour $r = 1.5$		Résultats pour $r = 2$	
	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$
Niveau du bruit						
Itération	$k = 53$	$k = 13$	$k = 205$	$k = 54$	$k = 761$	$k = 216$
Erreur relative $RE(p)$	0.024548613677870	0.033950644897557	0.020838163390935	0.032262884857583	0.018026617536029	0.030503500894300
$Er(k) = \min(\ p_k^\delta - p\ )$	1.977754979049752	2.735228060907737	1.678823168651157	2.599253953925558	1.452311444350373	2.457509477471477

TABLE 2.3 – Résultats numériques pour les itérations de Kozlov-Maz'ya préconditionné.

Résultats obtenus pour  $r = 1$  :



(a) Solution exacte et solution approchée,  $k = 53, \delta = 10\%$ .



(b) La solution exacte et la solution approchée,  $k = 13, \delta = 25\%$ .

FIGURE 2.21 – Solution par PKM  $r = 1$

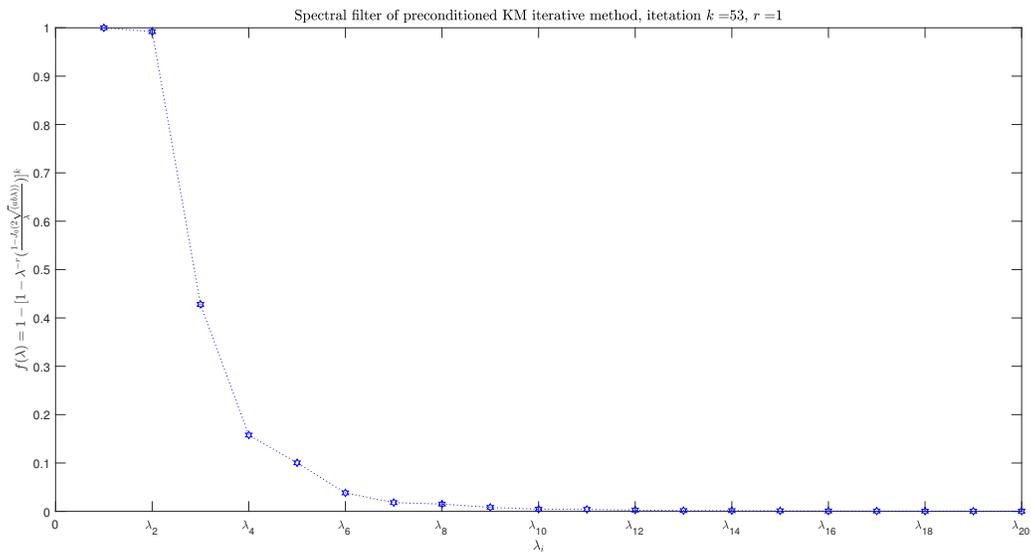


FIGURE 2.22 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ .

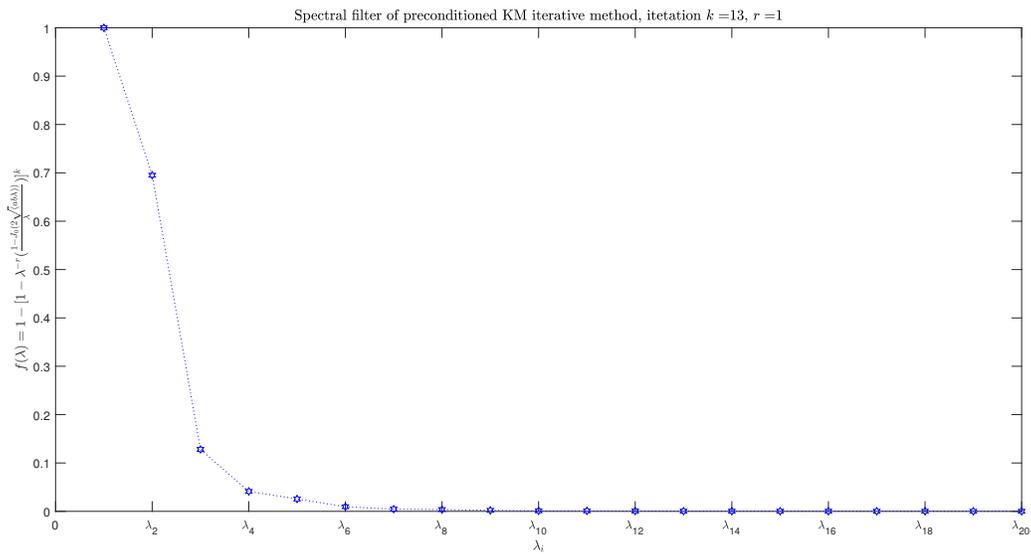
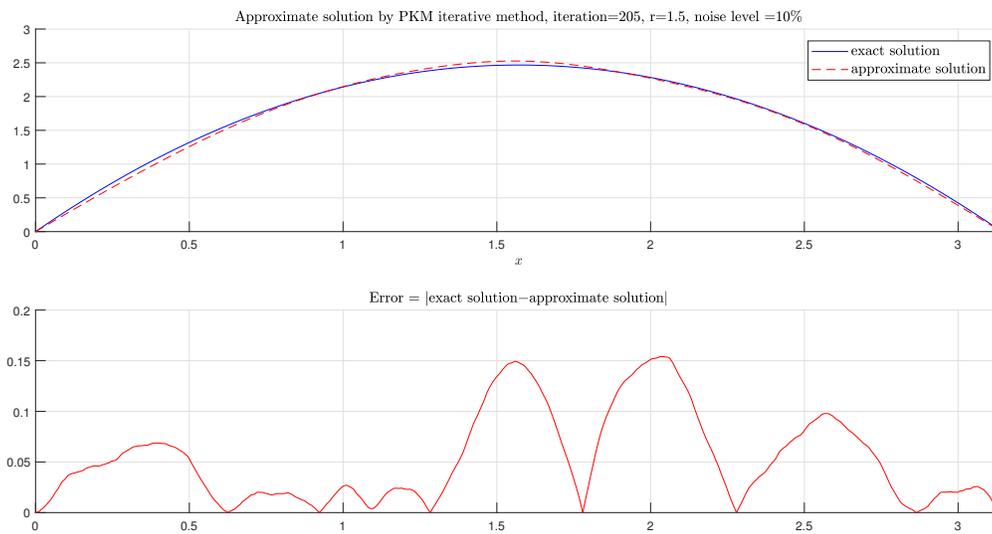
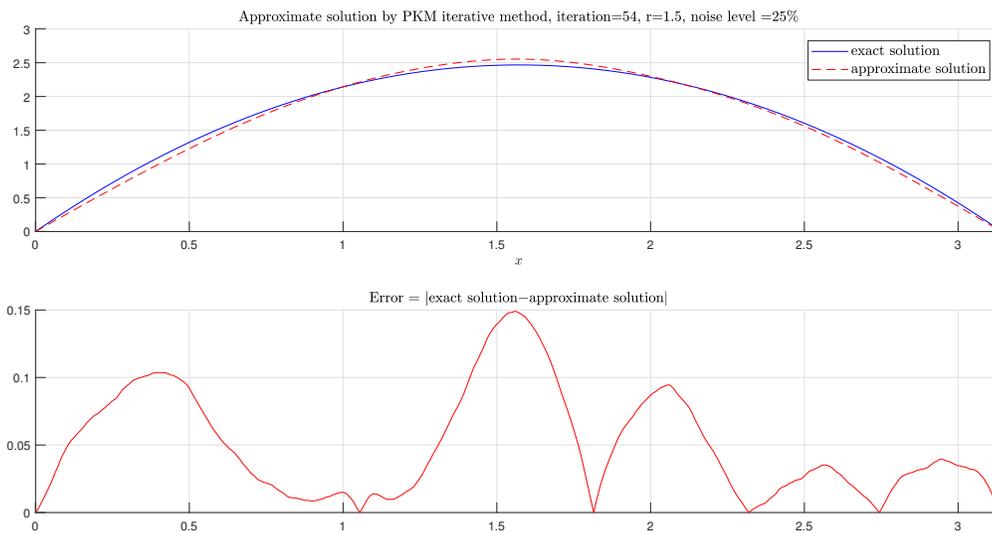


FIGURE 2.23 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ .

Résultats obtenus pour  $r = 1.5$  :



(a) La solution exacte et la solution approchée,  $k = 205$ ,  $\delta = 10\%$ .



(b) Solution exacte et solution approchée,  $k = 54$ ,  $\delta = 25\%$ .

FIGURE 2.24 – Solution par PKM  $r = 1.5$

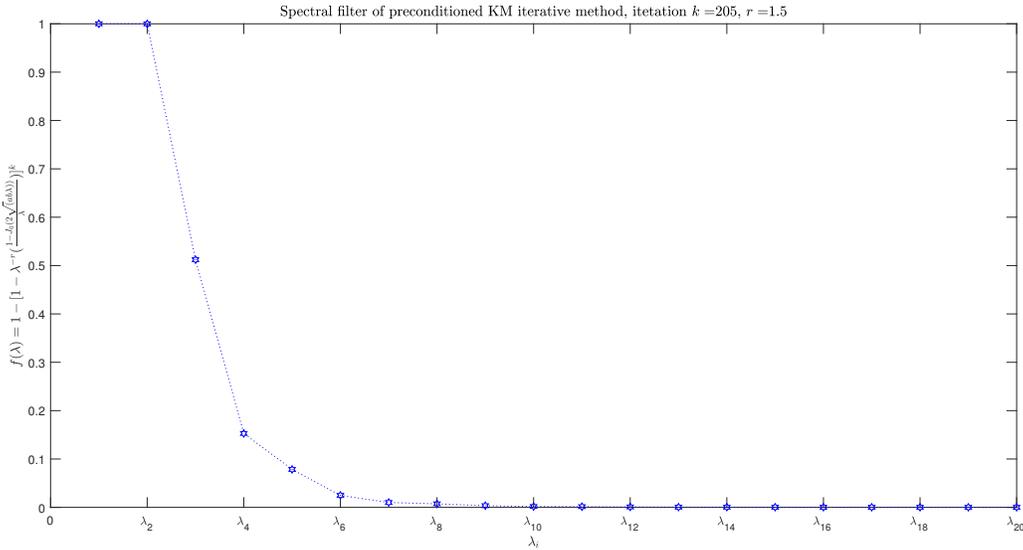


FIGURE 2.25 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ .

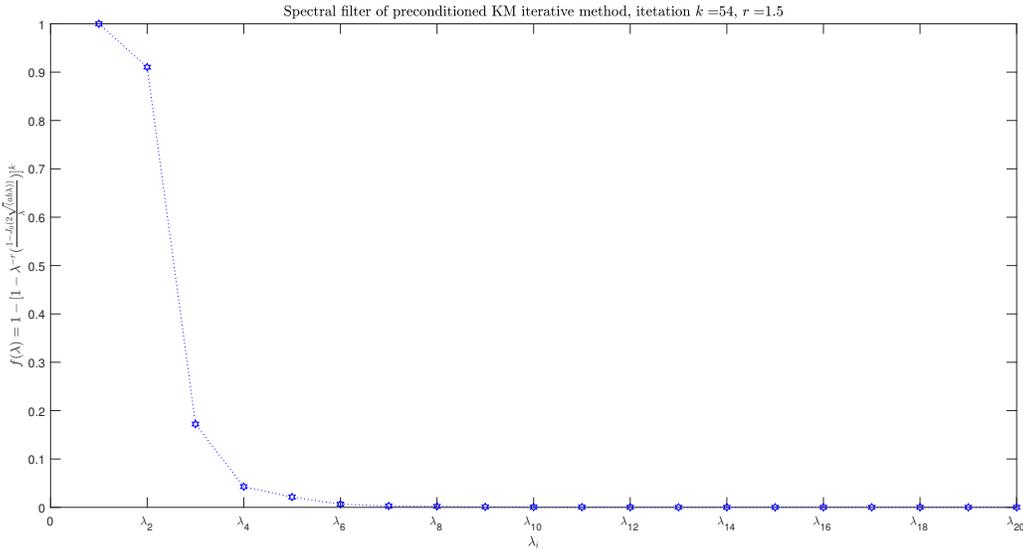
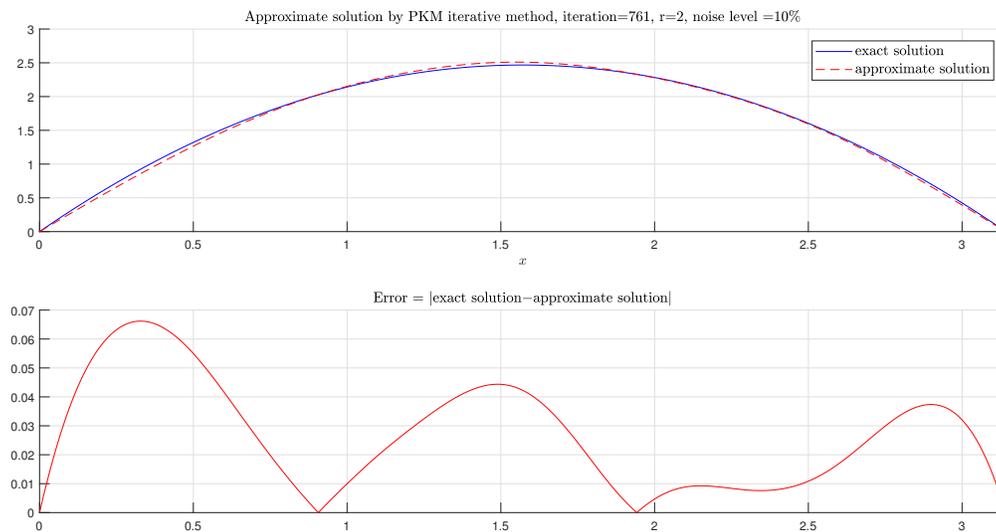
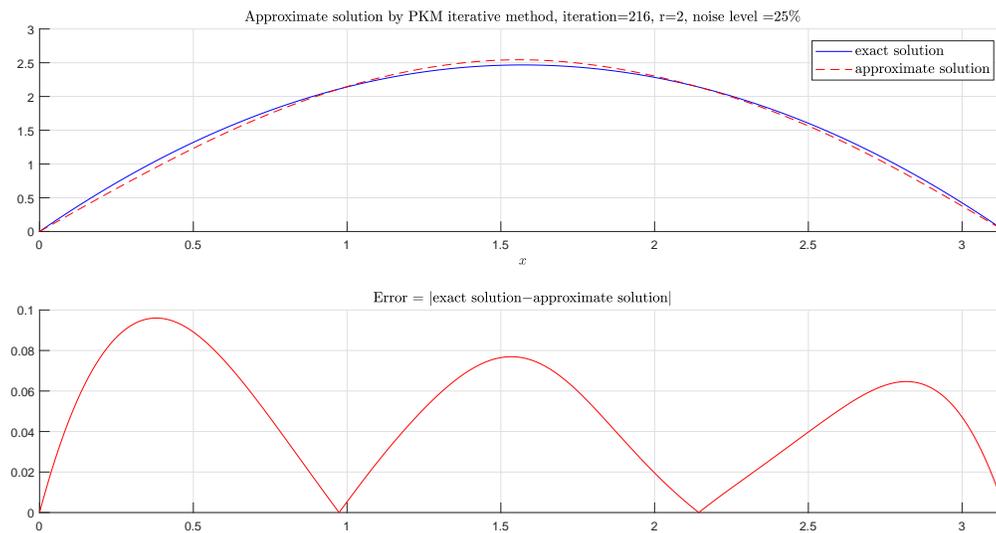


FIGURE 2.26 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ .

Résultats obtenus pour  $r = 2$  :



(a) Solution exacte et solution approchée,  $k = 761$ ,  $\delta = 10\%$ .



(b) Solution exacte et solution approchée,  $k = 216$ ,  $\delta = 25\%$ .

FIGURE 2.27 – Solution par PKM  $r = 2$

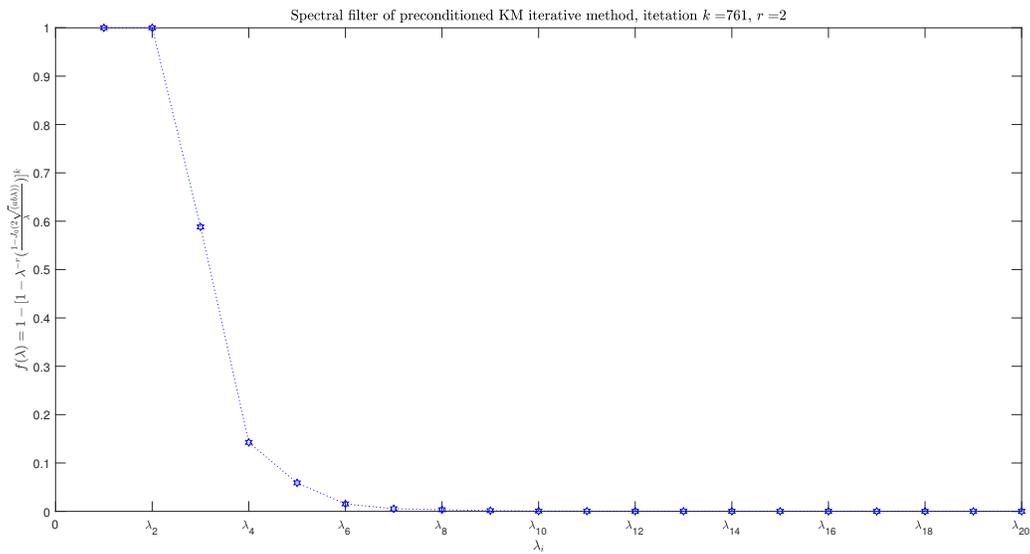


FIGURE 2.28 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ .

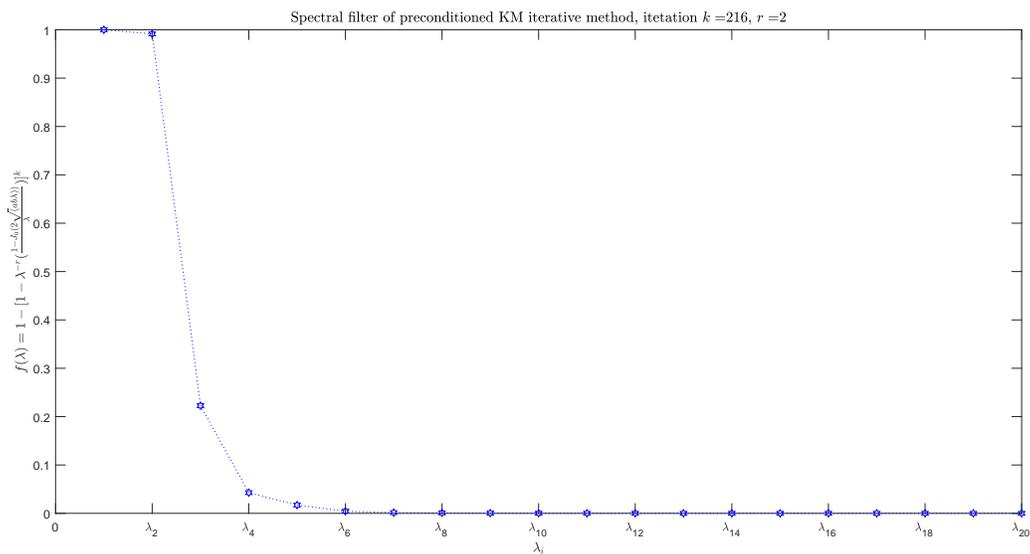


FIGURE 2.29 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ .

**Exemple 2.7.2.** Dans le même contexte, on conserve les mêmes données que dans l'exemple ci-dessus et en utilisant la méthode des différences finies centrées avec un pas  $h = \frac{\pi}{M+1}$

pour approcher la deuxième dérivée  $u_{xx}$ , on obtient le problème semi-discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{t_1 t_2}(t, x_i) - \mathbb{A}_h u(t, x_i) = x(\pi - x), & x_i = ih, i = \overline{1, M}, t = (t_1, t_2) \in ]0, 1[ \times ]0, 1[, \\ u(t_1, t_2, x_0 = 0) = u(t_1, t_2, x_{N+1} = \pi) = 0, & t = (t_1, t_2) \in \overline{Q} = [0, 1] \times [0, 1], \\ u(t_1, 0, x_i) = 0, & x_i = ih, i = \overline{1, M}, t_1 \in [0, 1], \\ u(0, t_2, x_i) = 0, & x_i = ih, i = \overline{1, M}, t_2 \in [0, 1], \\ u(1, 1, x_i) = g(x_i), & x_i = ih, i = \overline{1, M}, \end{array} \right. \quad (2.7.6)$$

où  $\mathbb{A}_h$  est la matrice de discrétisation associée à l'opérateur  $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  :

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, 1) \in \mathcal{M}_M(\mathbb{R}),$$

est une matrice symétrique définie positive. On suppose que les erreurs de discrétisation soient faibles par rapport à l'incertitude  $\epsilon$  ; et que  $\mathbb{A}_h$  est une bonne approximation de l'opérateur différentiel  $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , dans le sens que le caractère non-borné se caractérise par la grande norme de  $\mathbb{A}_h$ . Les couples propres  $(\alpha_k, \zeta_k)$  de  $\mathbb{A}_h$  sont donnés par

$$\alpha_k = 4 \left( \frac{M+1}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{k\pi}{2(M+1)} \right), \quad \zeta_k = \left( \sin \left( \frac{jk\pi}{M+1} \right) \right)_{j=1}^M, \quad k = 1 \dots M. \quad (2.7.7)$$

On prend  $M = 15000$ , de (2.7.7) on peut déduire que le conditionnement du problème discret est

$F(\alpha_{\max}, a, b) / F(\alpha_{\min}, a, b) \approx 9.1189e + 07$ , ce qui qualifie que ce problème comme une bonne approximation du problème **mal posé** en dimension finie. La donnée exacte  $g$  est construite de la même façon que dans l'exemple ci-dessus par un calcul numérique de l'intégrale via la méthode de trapèze sur la variable spatiale  $x$  discrétisée en 15000 points équidistant. La série de Fourier est tronquée à 4000 termes, *i.e.*,

$$g(x) = u(x, 1, 1) \sum_{k=1}^{4000} \frac{1 - J_0(2k)}{k^2} \left( \int_0^\pi p(x) \sin(kx) dx \right) \sin(kx).$$

Avant d'ajouter la quantité du bruit à cette donnée, on génère le sous-espace **Krylov** par la

commande

$$[T \ Q] = \text{myLanczos}(A, l, v),$$

en utilisant le package LAPACK<sup>8</sup>, où  $l$  est la dimension du sous espace de **Krylov**,  $v = \frac{g}{\|g\|}$  et  $A = \text{inv}(\mathbb{A}_h)$  est l'inverse de la matrice de discrétisation. Le résultat de cette transformation nous produit une matrice d'une forme réduite tridiagonale  $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$  et une matrice  $Q \in \mathbb{R}^{M \times l}$ .

Dans cet exemple, on prend  $l = 20$ , dans ce cas le conditionnement du problème projetée est approximativement égal à

$$F(\theta_{\max}, a, b) / F(\theta_{\min}, a, b) \approx 1.8514e + 06,$$

où  $\theta_{\max}, \theta_{\min}$  sont la plus grande et la plus petite valeur **Ritz** de  $\mathbb{A}_h$  (la plus grande et la plus petite valeur propre de  $T^{-1}$ ). En effet, le préconditionnement implicite obtenu par projection de  $p = \frac{\mathbb{A}_h}{I - J_0(2\sqrt{\mathbb{A}_h})}g$  dans  $\mathcal{K}_{20}(\mathbb{A}_h^{-1}, g)$  rend la reconstruction de  $p$  à partir de  $g$  un peu moins instable (sensible), la figure suivante visualise la reconstruction de  $p$  par projection dans  $\mathcal{K}_{20}(\mathbb{A}_h^{-1}, g)$ , *i.e.*,

$$p = Q \|g\|_{2e_1} \sum_{i=1}^{20} \frac{\theta_i}{1 - J_0(2\sqrt{\theta_i})}.$$

---

8. //www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/16777-lapack

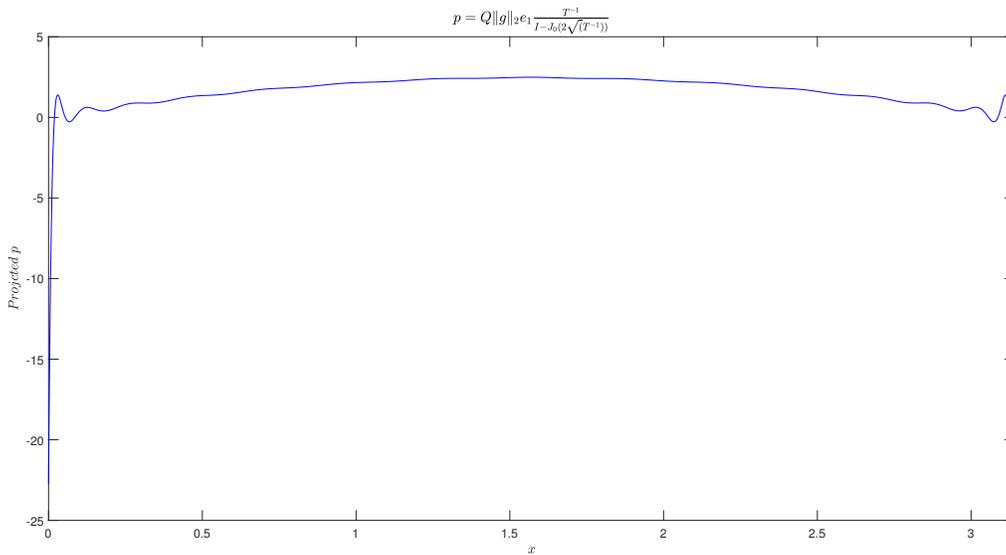


FIGURE 2.30 – Reconstruction de  $p(x)$  par l’inversion directe dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, g)$

L’analyse du cratère **mal posé** de ce problème peut être donnée par la condition discrète de Picard, pour plus de détails sur l’héritage de cette condition dans les méthodes du sous-espaces de **Krylov**, on recommande [50]. La figure suivante présente cette condition pour les 15 premiers coefficients.

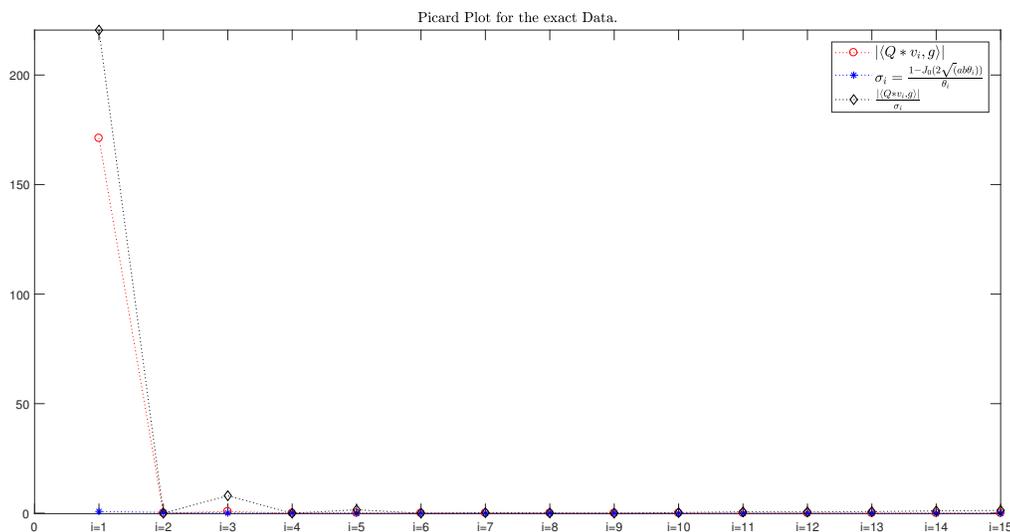


FIGURE 2.31 – Héritage de la Condition de Picard Discrète dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, g), i = \overline{1, 15}$

Maintenant, on ajoute du bruit à la donnée  $\mathbf{g}$  de la même façon que dans l'exemple ci-dessus. Les figures suivantes présentent la donnée infectée  $\mathbf{g}^\delta$  pour deux niveaux du bruit différents (10% et 25%) et les courbes de Picard discrètes dans les sous-espace  $\mathcal{K}_{20}(\mathbb{A}_h^{-1}, \mathbf{g}^\delta)$

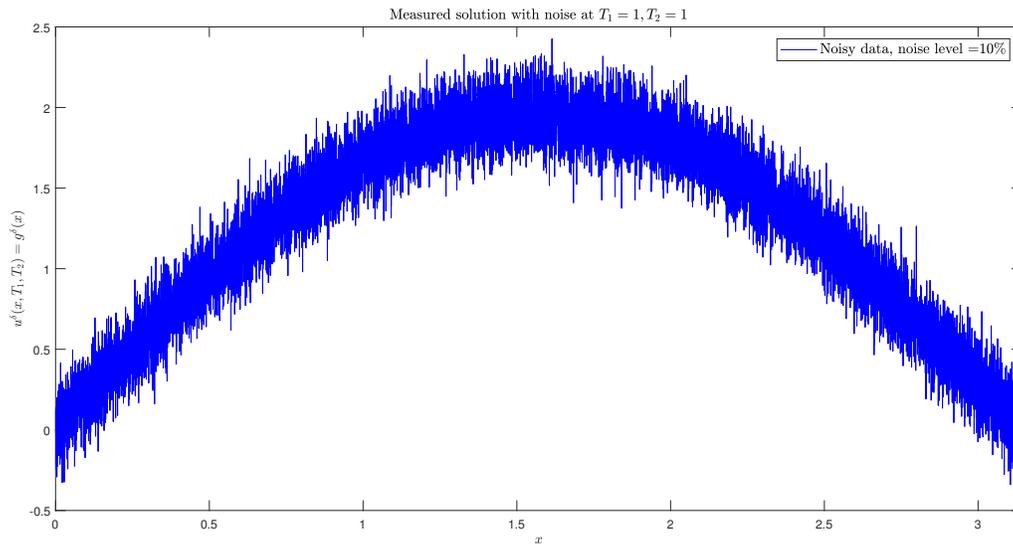


FIGURE 2.32 –  $\mathbf{g}^\delta$  avec un niveau du bruit 10%

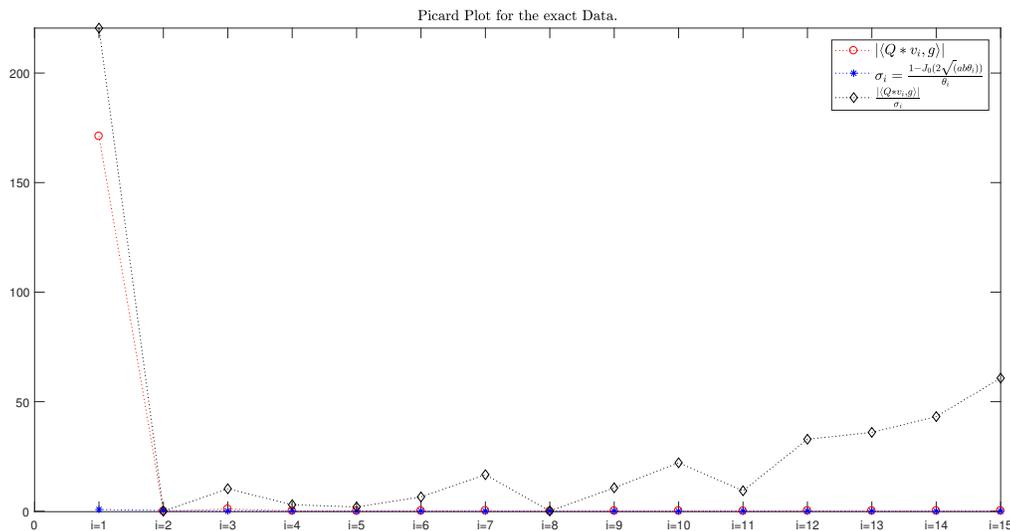


FIGURE 2.33 – Héritage de la Condition de Picard Discrète dans  $\mathcal{K}_{20}(\mathbb{A}^{-1}, \mathbf{g}^\delta), i = \overline{1, 15}, \delta = 10\%$

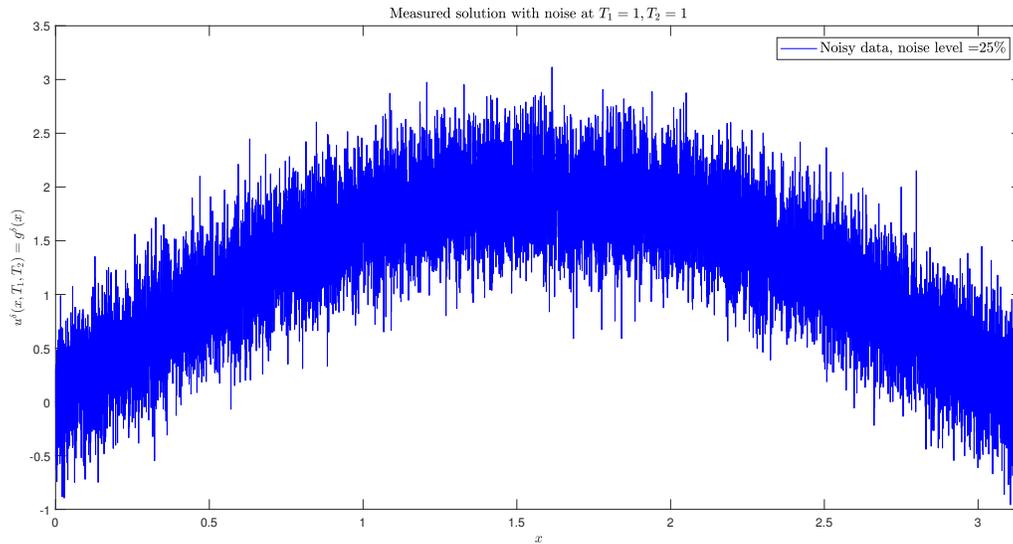


FIGURE 2.34 –  $g^\delta$  avec un niveau du bruit 25%

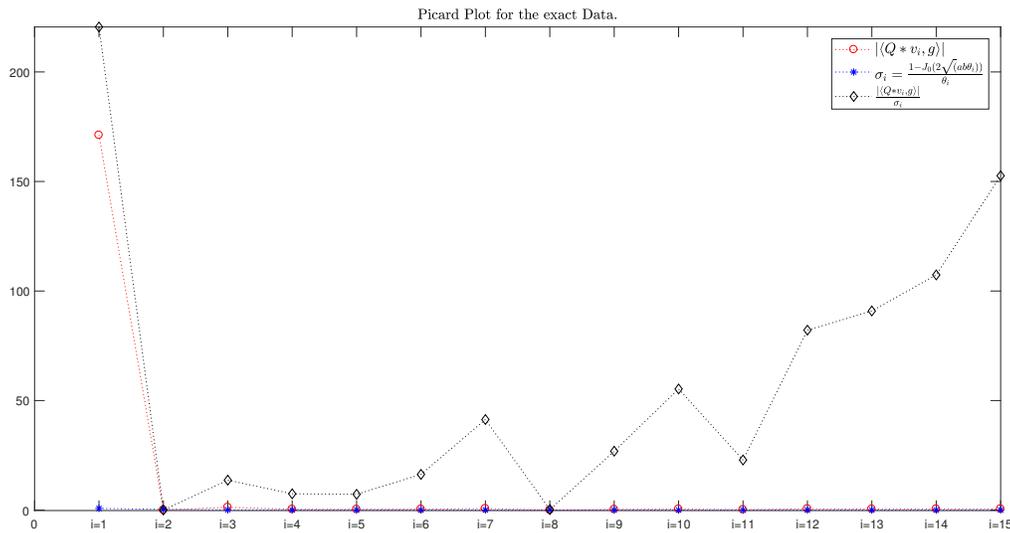


FIGURE 2.35 – Héritage de la Condition de Picard Discrète dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, \mathbf{g}^\delta), i = \overline{1, 15}, \delta = 25\%$

Les deux figures (2.33) et (2.35) indiquent qu'à partir de la quatrième valeur de **Ritz**, le problème devient sensible au bruit, *i.e.*, visuellement, la meilleure solution régularisée peut être obtenue si l'on tronque la série à  $N = 3$  dans les deux cas (niveau du bruit 10% et 25%).

**Méthode de troncature projetée.** La solution régularisée de l'analogue discret du problème par la méthode de troncature projetée (troncature sur les valeurs de **Ritz**) est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{p}_N^{l,\delta} = Qe_1 \|\mathbf{g}^\delta\| \sum_{\theta_i \leq \alpha_N} \frac{\theta_i}{1 - J_0(2\sqrt{ab}\sqrt{\theta_i})}.$$

L'erreur relative  $RE(\mathbf{p}_N^{l,\delta})$  est donnée par

$$RE(\mathbf{p}_N^{l,\delta}) = \frac{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_N^{l,\delta}\|_*}{\|\mathbf{p}\|_*}.$$

Pour vérifier l'efficacité du critère d'arrêt (choix a posteriori du paramètre de régularisation), on calcule les solutions régularisées  $\mathbf{p}_N^{l,\delta}$  pour  $N = \overline{1, 10}$  et on prend la solution avec la plus faible erreur et on vérifie si le premier entier  $N$  choisi selon la condition  $\|(I - E_l^N)\mathbf{g}^\delta\| \leq \tau\delta$  avec  $\tau = 1.0001 > 1$ , coïncide avec la solution d'erreur minimale.

Le tableau suivant montre l'erreur relative et l'erreur en norme pour un ordre de troncature  $N = 3$  qui satisfait le critère d'arrêt, et un niveau du bruit de  $\delta = 10\%$  et  $\delta = 25\%$ . Les

Niveau du bruit	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$
Ordre de troncature	$N = 3$	$N = 3$
Erreur relative $RE(p)$	0.012853239897899	0.026453799805133
$\min_{N=\overline{1,10}} Er(N) = \min_{N=\overline{1,10}} \ p_N^\delta - p\ $	2.836500627979114	5.837922605954127

TABLE 2.4 – Résultats numériques pour la méthode de troncature sur les valeurs de **Ritz**

figures suivantes visualisent la solution approchée par cette méthode et l'erreur  $Er(N) = \|\mathbf{p}_N^{l,\delta} - \mathbf{p}\|$  en fonction de l'ordre de troncature  $N$  et  $\|(I - E_l^N)\mathbf{g}^\delta\|$  pour  $\delta = 10\%$  et  $\delta = 25\%$ .

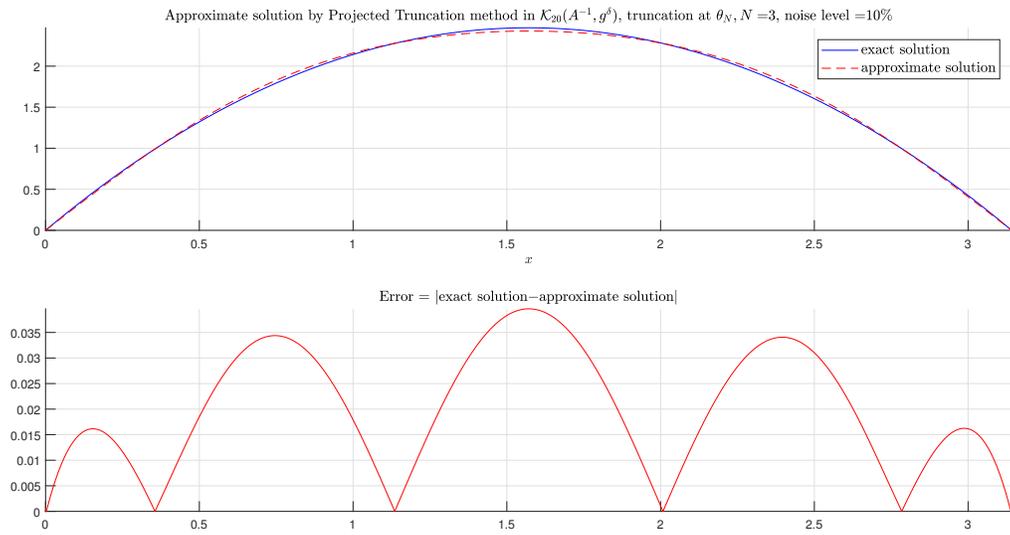


FIGURE 2.36 – Solution exacte et solution approchée :  $N = 3, \delta = 10\%$ .

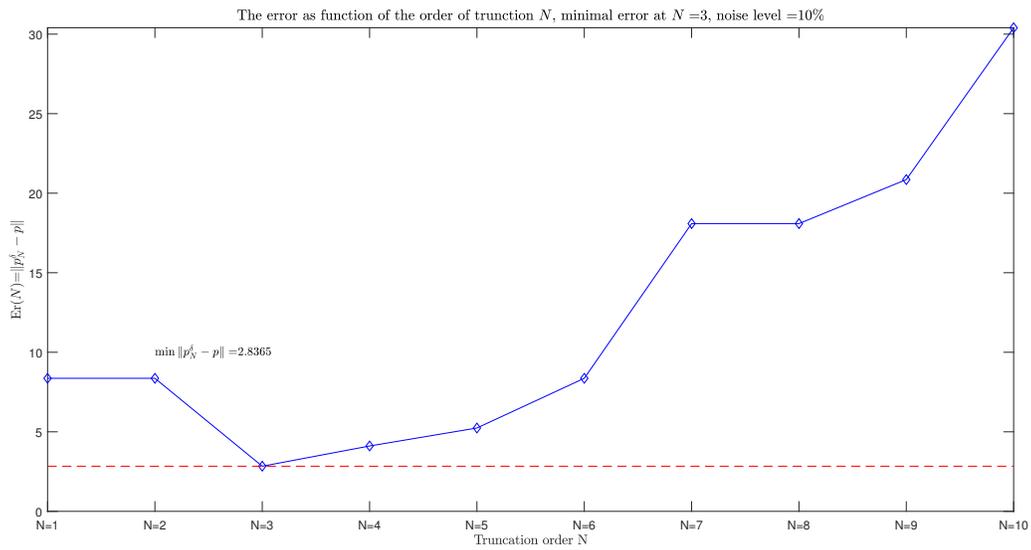


FIGURE 2.37 –  $Er(N)$  avec un niveau du bruit 10%.

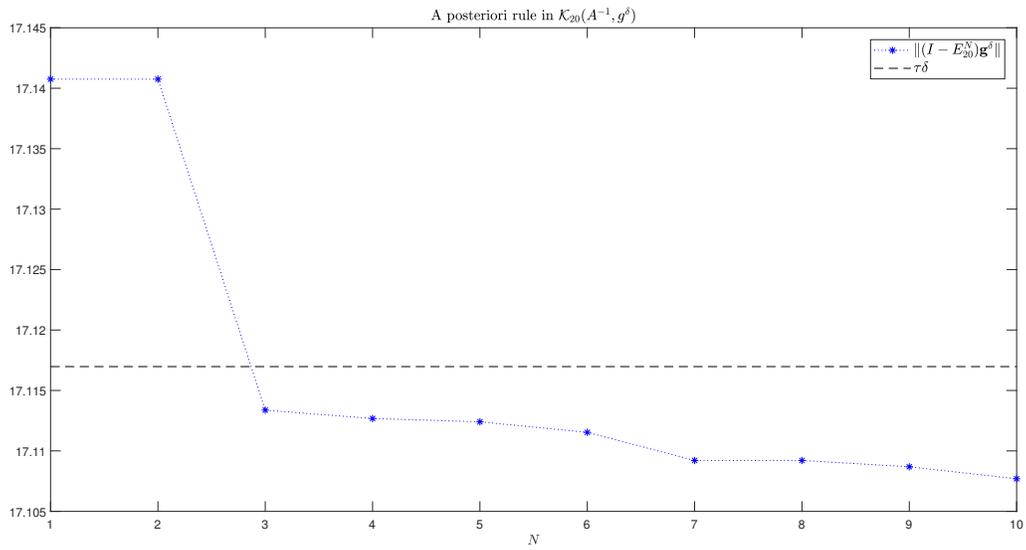


FIGURE 2.38 –  $\|(I - E_7^m)g^{\delta}\|, \delta = 10\%$ .

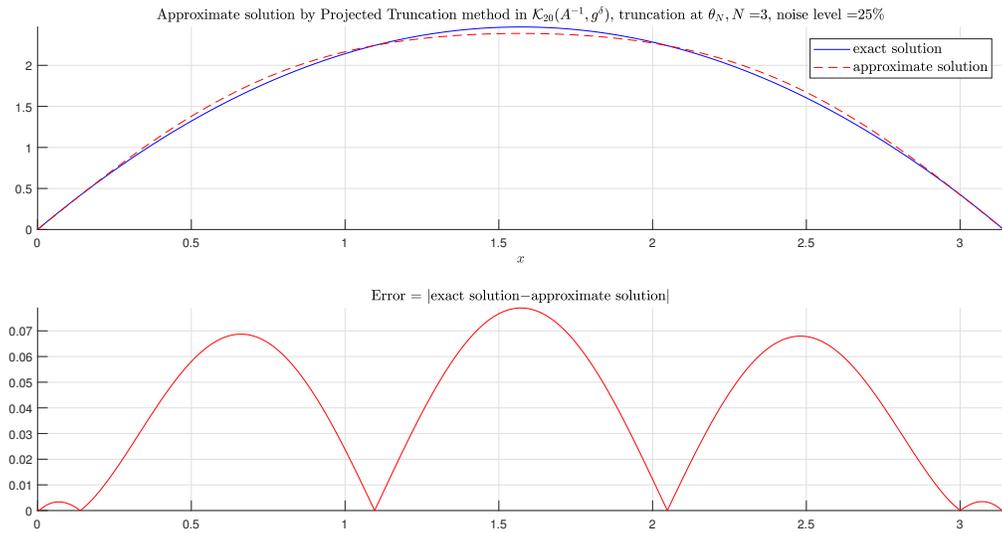


FIGURE 2.39 – Solution exacte et solution approchée :  $N = 3, \delta = 25\%$ .

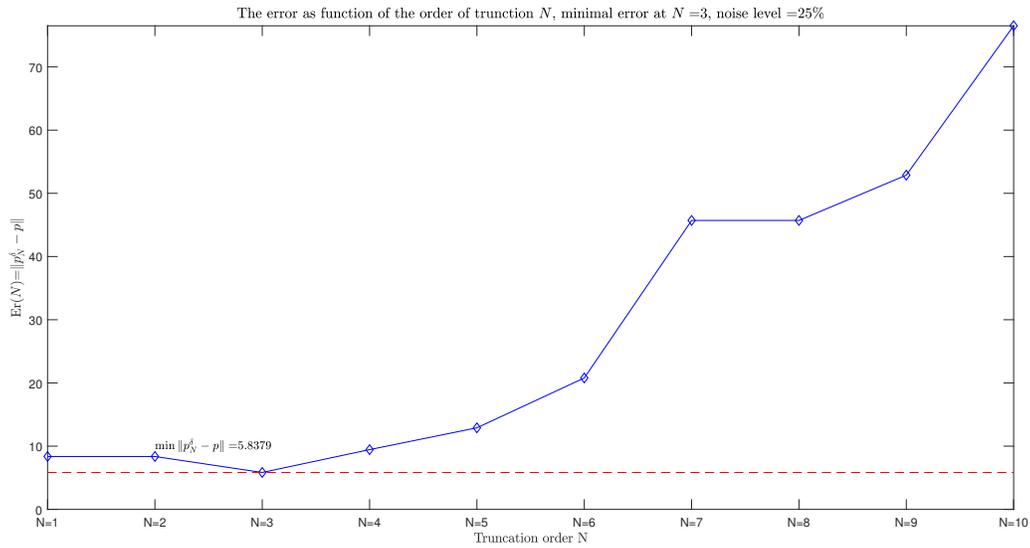


FIGURE 2.40 –  $Er(N)$  avec un niveau du bruit 25%.

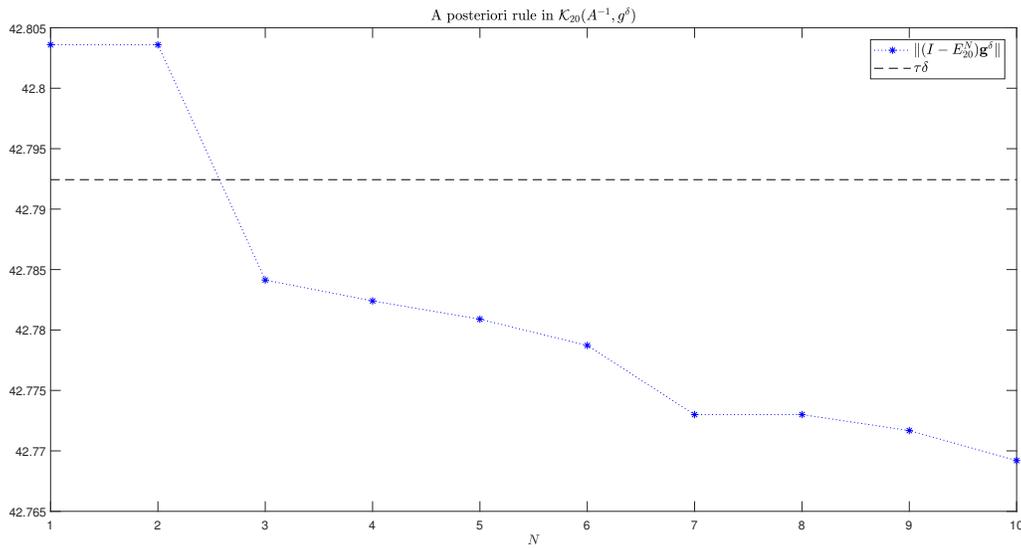


FIGURE 2.41 –  $\|(I - E_l^m)g^\delta\|, \delta = 25\%$ .

Les résultats obtenus confirment la conclusion basée sur les courbes de la condition de Picard discrète héritée dans le sous espace de **Krylov**.

**Procédure de Kozlov-Maz'ya préconditionnée avec projection.** La solution approximative de l'analogue discret du problème inverse de Goursat (reconstruction du terme source) régularisée par la procédure de Kozlov-Maz'ya préconditionnée calculée par la projection dans un sous espace de Krylov est donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{p}_{k,r}^{\delta,(l)} = Qe_1 \|\mathbf{g}^\delta\| \sum_{i=1}^{20} \left( 1 - \left( 1 - \omega \theta_i^{-r} \frac{1 - J_0(2\sqrt{ab}\sqrt{\theta_i})}{\theta_i} \right)^k \right) \frac{\theta_i}{1 - J_0(2\sqrt{ab}\sqrt{\theta_i})}.$$

Afin de simplifier les calculs, on prend  $\omega = 1$ . On calcule 1500 itération et on prend l'itération avec la plus faible erreur. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau suivant pour deux niveaux du bruit 10% et 25% avec le préconditionnement ( $T^{-r}$ ,  $r = 1, 1.5, 2$ ).

Préconditionnement	Résultats pour $r = 1$		Résultats pour $r = 1.5$		Résultats pour $r = 2$	
	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$
Niveau du bruit						
Itération	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 126$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 68$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 410$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 229$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 1276$	$\min_k \ p_k^\delta - p\ $ à $k = 723$
Erreur relative $RE(p)$	0.011702770750774	0.015469963844717	0.010415654867259	0.012773682844993	0.011227831383987	0.014216772157167
$\min_{k=1,4000} (Er(k)) = \min(\ p_k^\delta - p\ )$	2.582610831771145	3.413968968830131	2.298565327223438	2.818943682623844	2.152517227347340	2.477799451695424

TABLE 2.5 – Résultats numériques des itérations de Kozlov-Maz'ya préconditionné projetées dans  $\mathcal{K}_{20}(A^{-1}, g^\delta)$ .

Résultats obtenus pour  $r = 1$

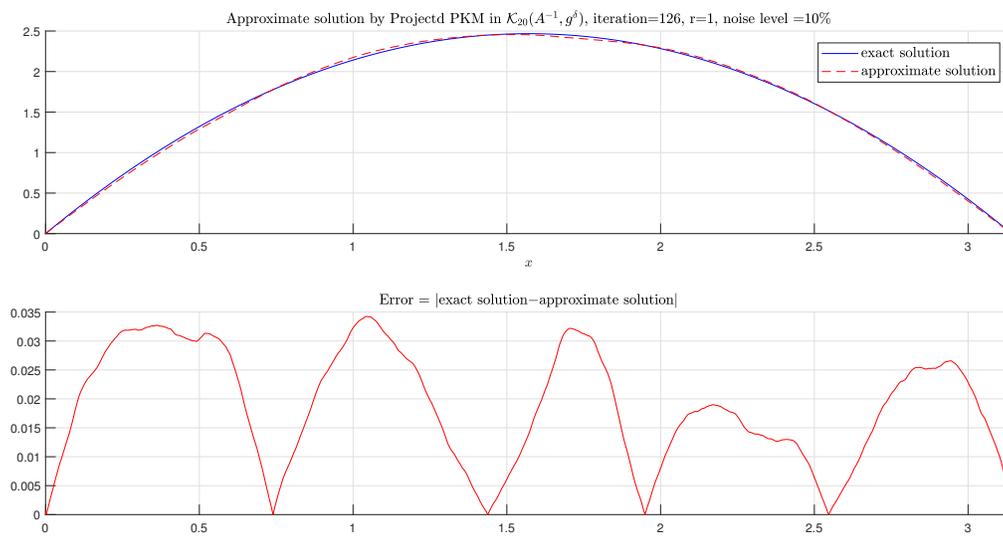


FIGURE 2.42 – Solution exacte et solution approchée :  $k = 126, \delta = 10\%$ .

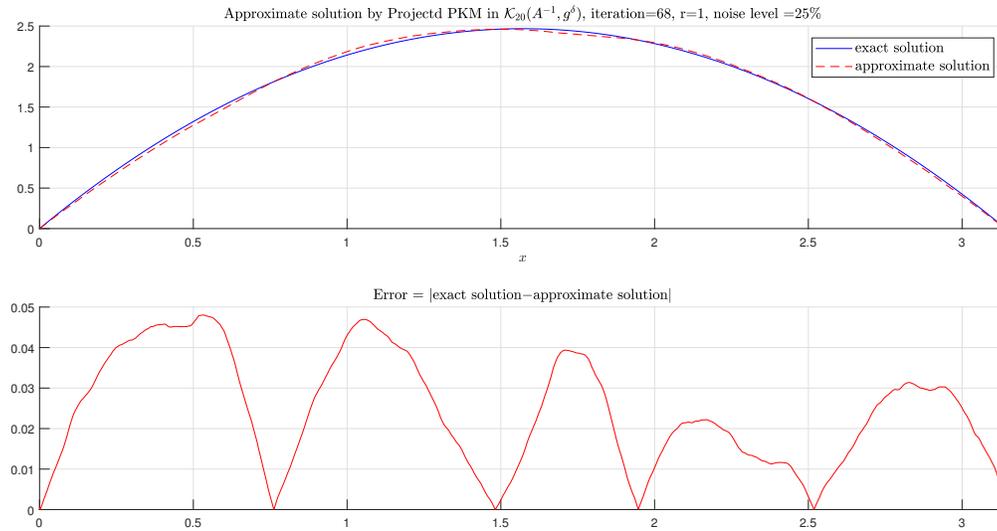


FIGURE 2.43 – Solution exacte et solution approchée :  $k = 68, \delta = 25\%$ .

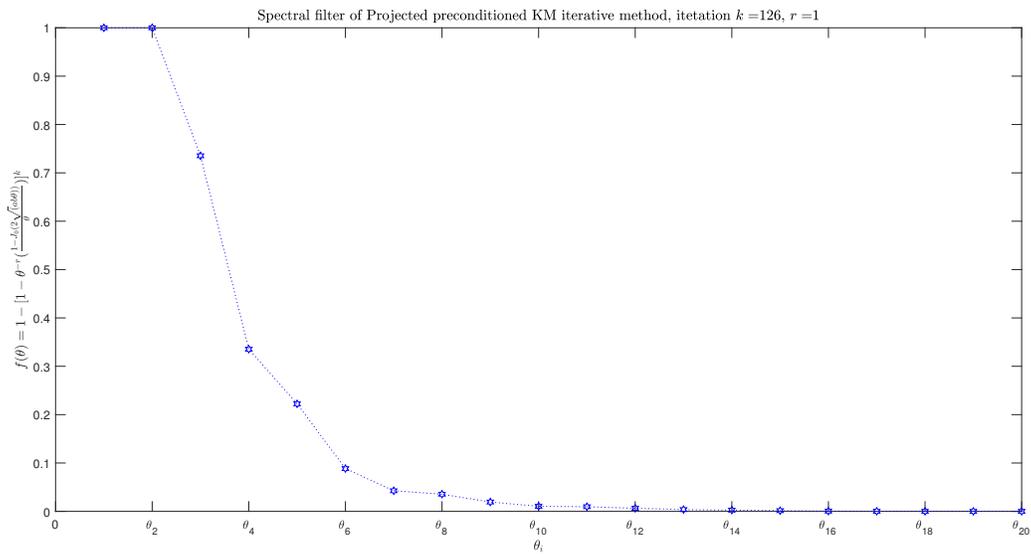


FIGURE 2.44 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ .

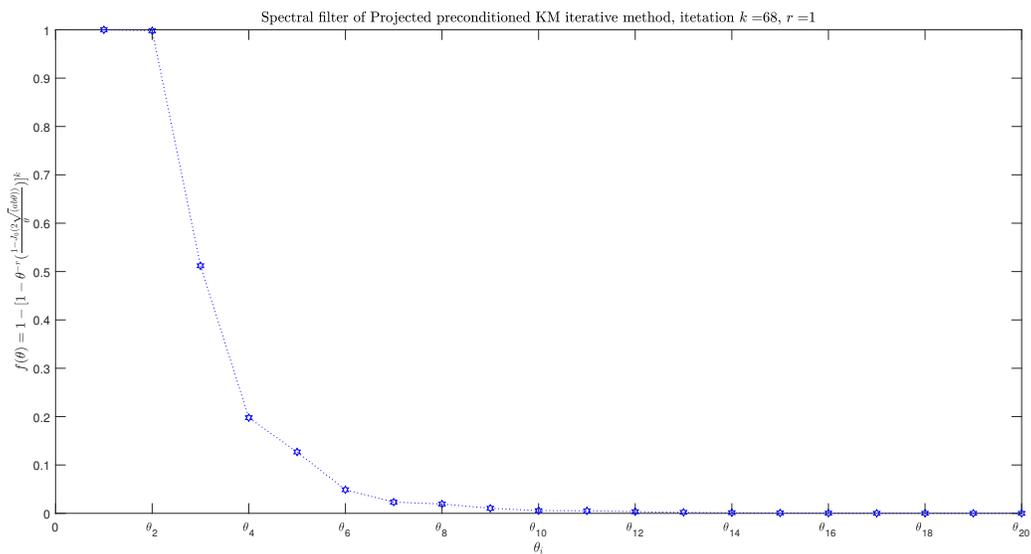


FIGURE 2.45 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ .

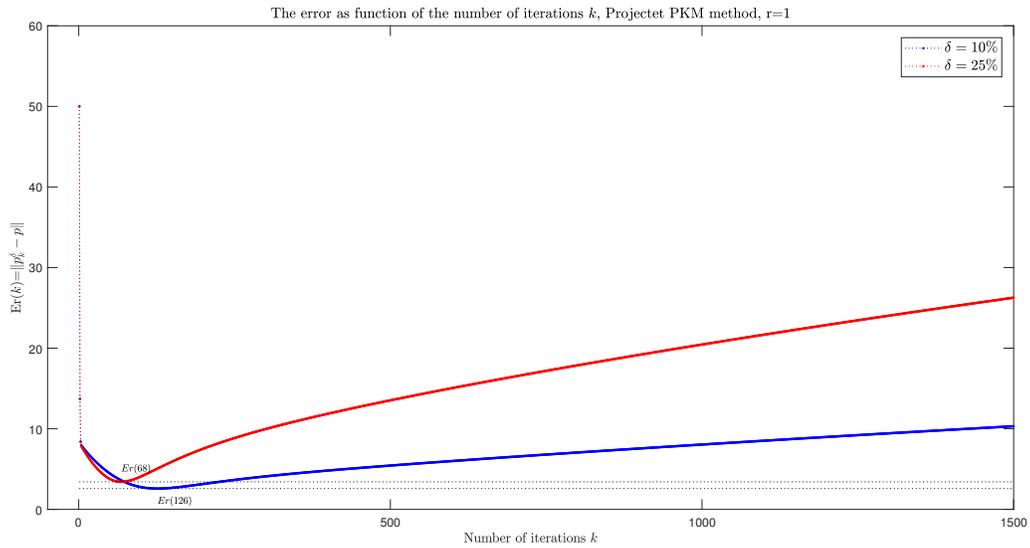


FIGURE 2.46 – Projected PKM,  $r = 1$ ,  $Er(k) = \|p_k^\delta - p\|, k = \overline{1, 1500}$

Résultats obtenu pour  $r = 1.5$

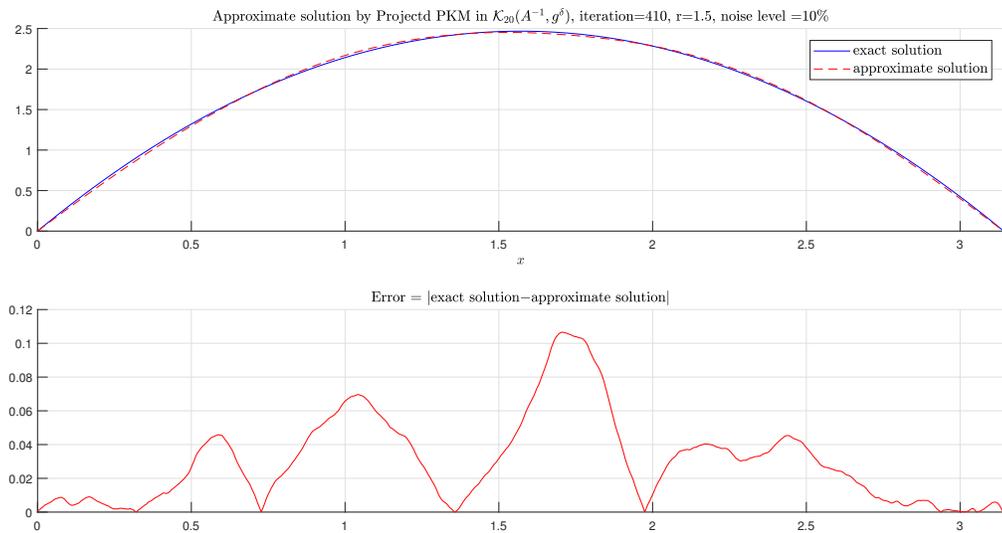


FIGURE 2.47 – Solution exacte et solution approchée,  $k = 410, \delta = 10\%$ .

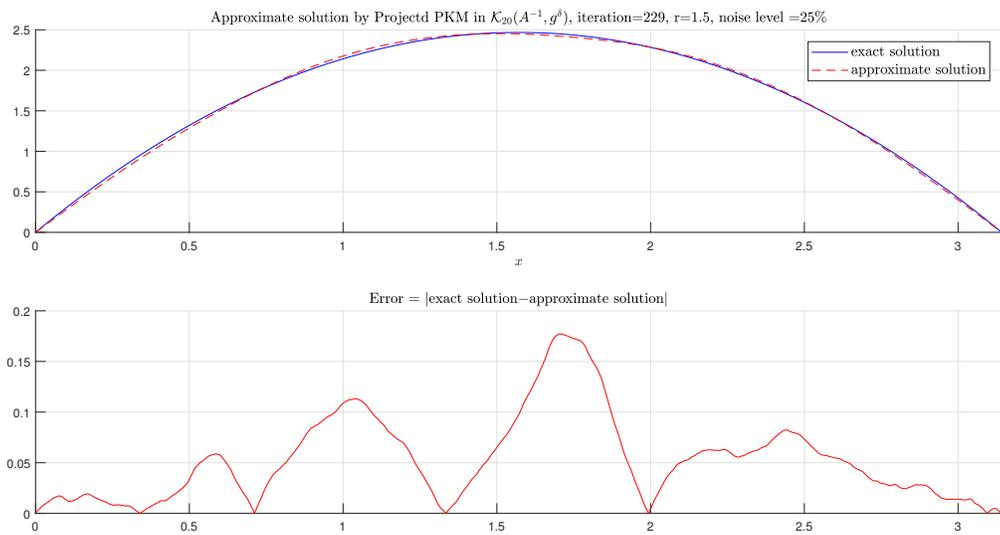


FIGURE 2.48 – La solution exacte et la solution approchée :  $k = 229$ ,  $\delta = 25\%$ .

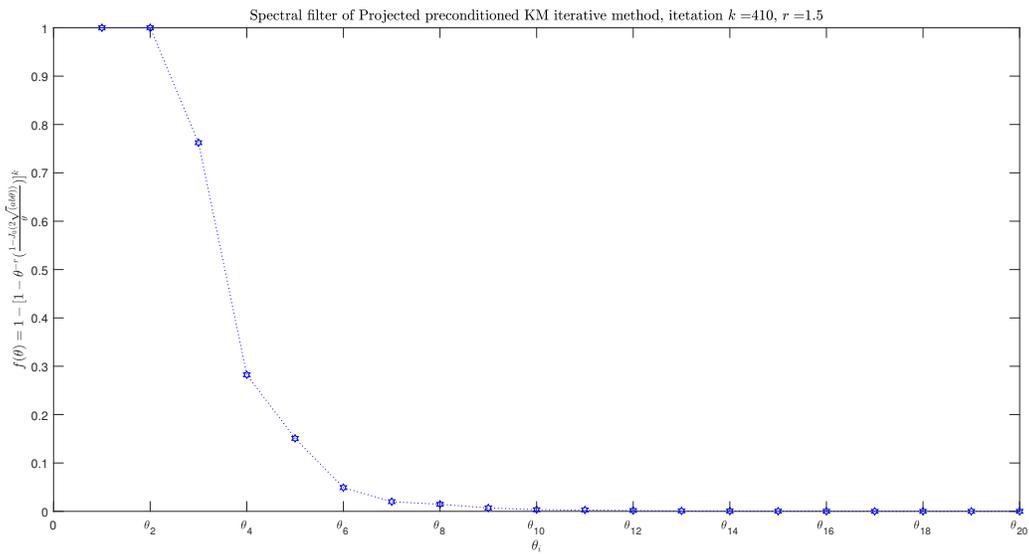


FIGURE 2.49 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ .

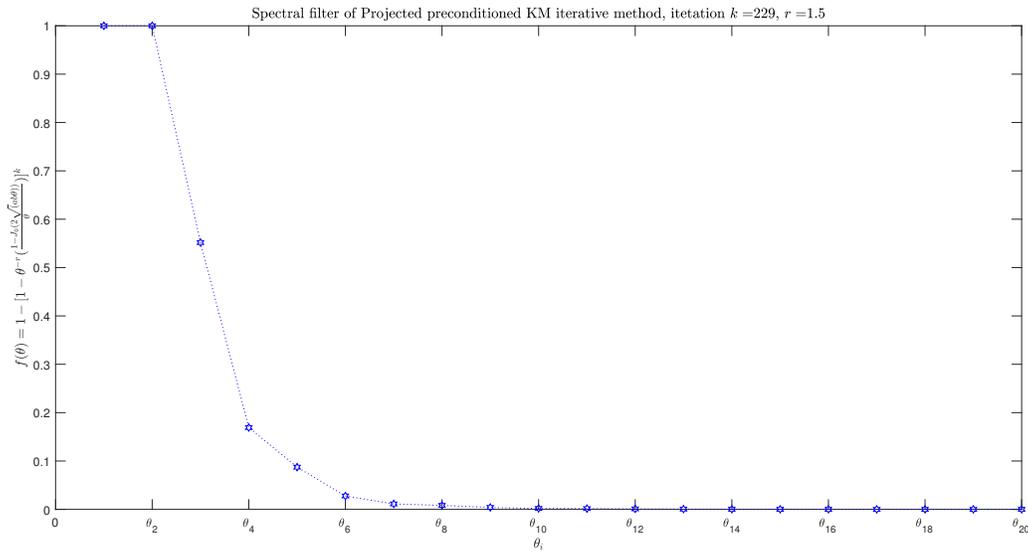


FIGURE 2.50 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ .

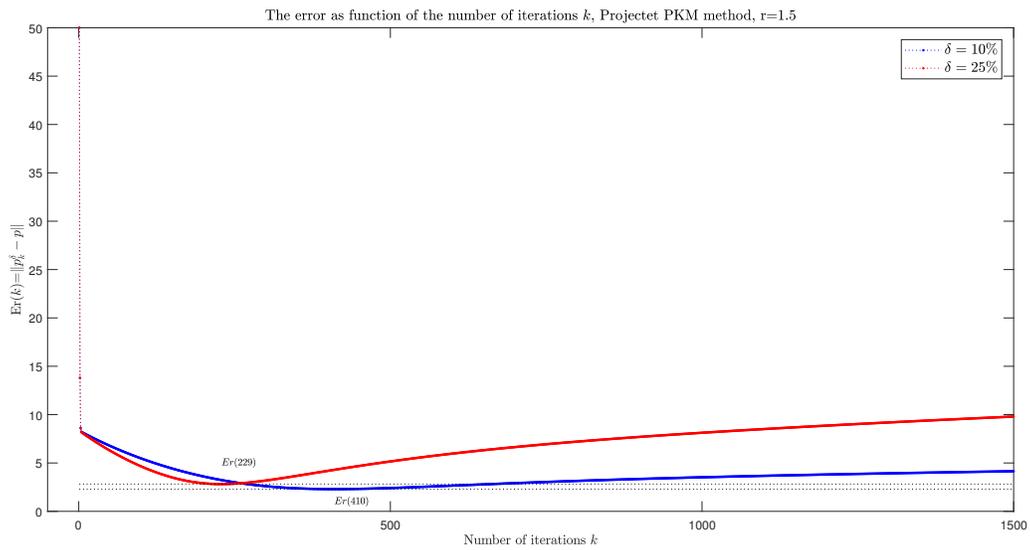


FIGURE 2.51 – PKM,  $r = 1.5$ ,  $Er(k) = \|p_k^\delta - p\|$ ,  $k = \overline{1, 1500}$

Résultats obtenus pour  $r = 2$ .

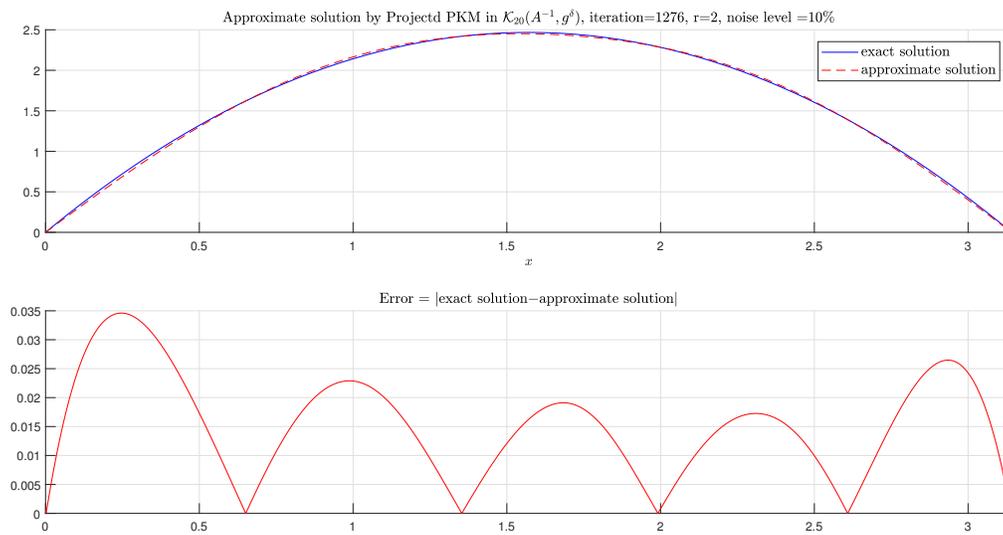


FIGURE 2.52 – Solution exacte et solution approchée :  $k = 1276$ ,  $\delta = 10\%$ .

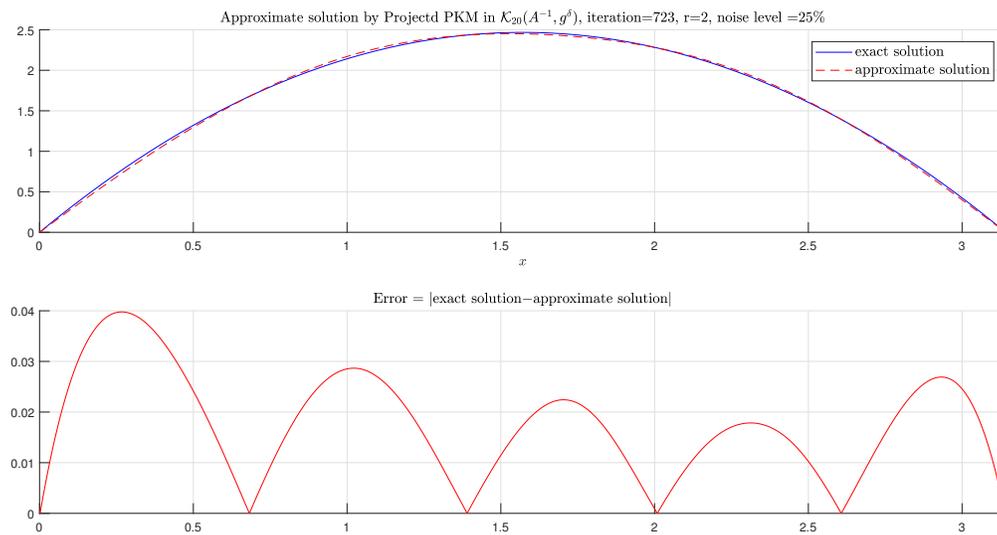


FIGURE 2.53 – Solution exacte et solution approchée :  $k = 723$ ,  $\delta = 25\%$ .

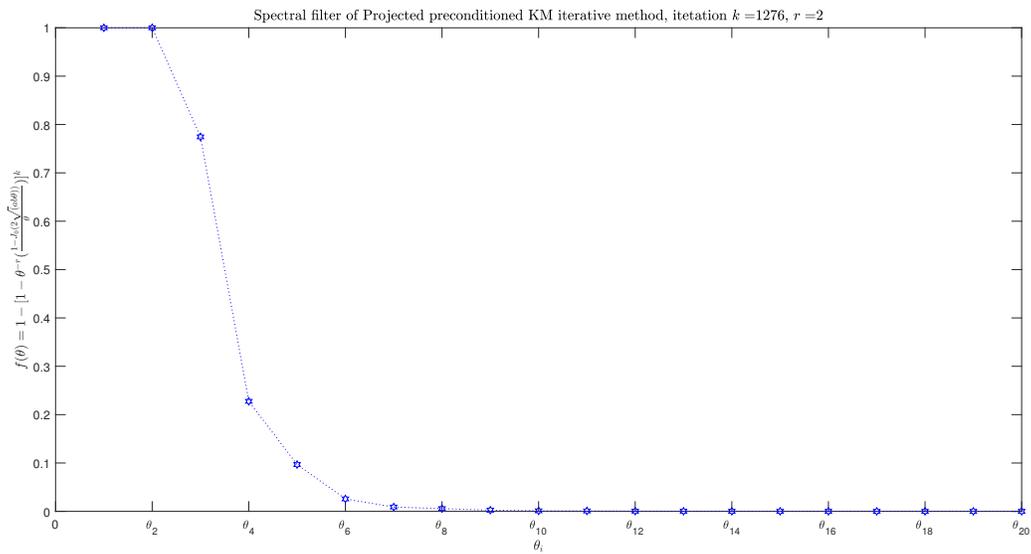


FIGURE 2.54 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 10\%$ .

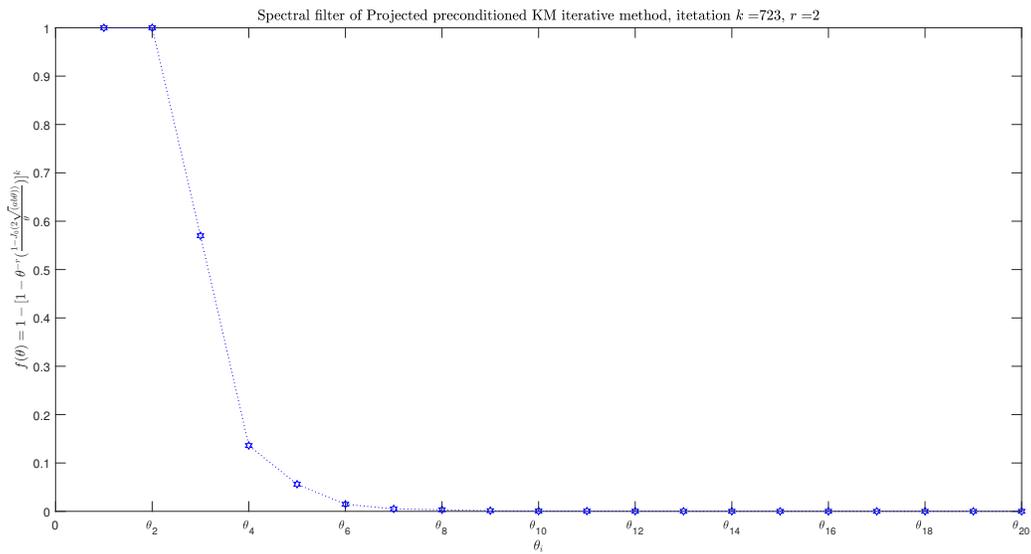


FIGURE 2.55 – Courbe de filtre spectral :  $\delta = 25\%$ .

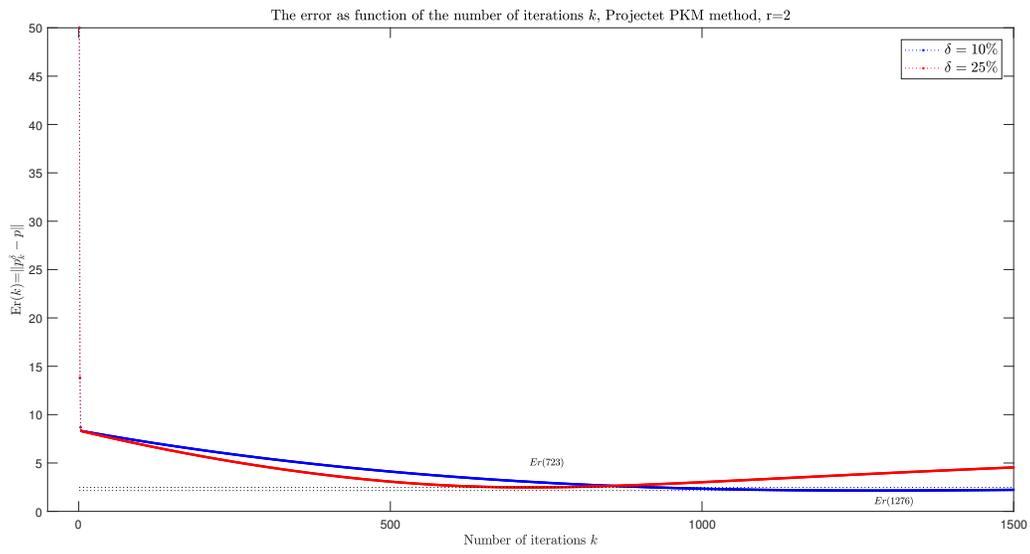


FIGURE 2.56 – PKM,  $r = 2$ ,  $Er(k) = \|p_k^\delta - p\|, k = \overline{1, 1500}$

---

## Etude d'un problème inverse engendré par une équation elliptique généralisée

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la détermination simultanée d'un terme source et d'une condition au bord inaccessible en utilisant deux mesures internes en deux points différents, pour un modèle gouverné par une équation elliptique abstraite généralisée (cette généralisation est donnée par un opérateur de sous diffusion fractionnaire, où la dérivée spatiale  $\partial_z^2 u$  est remplacée par  $D_z^\alpha D_z^\alpha u$  où  $0 < \alpha < 1$ ). Le problème est défini sur un domaine cylindrique par rapport à  $z$  où  $z \in [0, +\infty)$ . Ce type de problème est **mal posé**, il nous donne un système de deux équations d'opérateurs instables de première espèce, ce qui nécessite une procédure de régularisation.

La méthode proposée pour régulariser ce problème est une variante de la procédure de **Kozlov-Maz'ya**, présentée par **G. Bastay** dans [8]. Les résultats de convergence et les estimations d'erreur liées à cette approche ont été établis avec un choix du paramètre de régularisation a priori.

Cette étude est clôturée par une série de tests numériques pour des exemples en 1-D et 2-D avec mesures internes entachées par un bruit de niveau élevé.

---

### 3.1 Position du problème

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme  $\|\cdot\|$ . On note par  $\mathcal{L}(H)$  l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur  $H$ . Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur strictement positif, auto-adjoint et à résolvante compacte. Dans ce cas  $A$  admet une base orthonormée formée de vecteurs propres  $(\phi_n) \subset H$  associés aux valeurs propres réelles  $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$ , i.e.,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ 0, & \text{if } i \neq j \end{cases},$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, \quad h_n = \langle h, \phi_n \rangle.$$

On considère le problème suivant [141] :

$$\begin{cases} D_z^2 u(z) - Au(z) = f, & 0 < z < \infty, \\ u(0) = g, \\ \|u(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où  $g$  est la condition au bord inconnue et  $f$  est le terme source inconnu qu'on veut déterminer en utilisant les données supplémentaires suivantes :

$$u(Z_1) = \psi_1 \in H, \quad u(Z_2) = \psi_2 \in H, \quad 0 < Z_1 < Z_2 < +\infty. \quad (3.1.2)$$

Ce problème est une version abstraite d'un problème inverse, qui est une généralisation des problèmes inverses pour les équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre dans un domaine cylindrique.

Un exemple simple de (3.1.1) est le problème aux limites pour l'équation de Poisson sur la

bande infinie  $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, +\infty)$ , où l'opérateur  $A$  est donné par

$$Au(z, x, y) = -u_{xx}(z, x, y) - u_{yy}(z, x, y), \mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

où  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Dans ce cas, l'équation (3.1.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{zz} + u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, 0 < z < +\infty, \\ u(z, x, y) = 0 & (x, y) \in \partial\Omega, 0 < z < +\infty, \\ u(0, x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(z, x, y) \text{ est bornée, quand } z \rightarrow +\infty, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Ici  $g(x, y)$  est la condition au bord inconnue et  $f(x, y)$  est le terme source inconnu qu'on veut déterminer en utilisant les données supplémentaire suivantes :

$$u(Z_1, x, y) = \psi_1(x, y), \quad u(Z_2) = \psi_2(x, y), \quad 0 < Z_1 < Z_2 < +\infty. \quad (3.1.4)$$

Le problème de trouver  $(u(z); u(0); f)$  dans (3.1.1) - (3.1.2) est bien connu comme étant un problème **mal posé** au sens de Hadamard ; c'est-à-dire que la solution ne dépend pas continûment des données. En raison de l'importance de ce modèle, il existe de nombreuses méthodes numériques différentes dans la littérature. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [54, 75, 88, 125].

Le modèle étudié dans ce chapitre sera assez différent de (3.1.1)- (3.1.2); on cherche à remplacer l'équation elliptique classique dans le problème (3.1.1) par un opérateur de sous-diffusion fractionnaire pour lequel la dérivée spatiale  $\partial_z^2 u$  devient  $D_z^\alpha D_z^\alpha u$  où  $0 < \alpha < 1$ .

Par conséquent, on s'intéresse au modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha u(z) - Au(z) = f, & 0 < z < \infty, \\ u(0) = g, \\ \|u(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Le but est de trouver  $(u(z); u(0); f)$  satisfaisant ((3.1.5)- (3.1.2)), ( $g$  est la condition au bord

inconnue à déterminer et  $f$  est le terme source ) à partir des données internes (3.1.2).

La notation  $D_z^\alpha$  représente l'opérateur de dérivée fractionnaire de Liouville-Caputo d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ , pour les fonctions différentiables, défini par :

$$D_z^\alpha u(z, x, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^z (z-s)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} u(s, x, y) ds$$

## 3.2 Résultats préparatoires

Le traitement du problème présenté dans ce chapitre, nécessite un rappel sur la fonction principale du calcul fractionnaire (la fonction de **Mittag-Leffler**) et ses propriétés.

### 3.2.1 Fonction de Mittag-Leffler et ses propriétés

**Définition 3.2.1.** [109] La fonction de **Mittag-Leffler** de deux-paramètres est définie par :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

où  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  sont des paramètres arbitraires.

**Propriétés 3.2.1.** La fonction de **Mittag-Leffler** vérifie les propriétés suivantes :

1- Si  $\beta = 1$  alors la fonction de **Mittag-Leffler** de deux-paramètres s'écrit comme suit :

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z) \text{ (fonction de Mittag-Leffler d'un seul paramètre).}$$

2- On a :

$$E_{\alpha, 1-\alpha}(z) = E_\alpha(z).$$

3- Pour  $0 < \alpha < 1, \lambda > 0$  et  $z > 0$  on a :

$$D_z^\alpha E_{\alpha, 1}(-\lambda z^\alpha) = -\lambda E_{\alpha, 1}(-\lambda z^\alpha), \quad z > 0,$$

et

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} (E_{\alpha,1}(-z)) = (-1)^n E_{\alpha,1}(-z), n \in \mathbb{N}, z > 0,$$

et  $E_{\alpha,1}(-z)$  est décroissante pour  $z > 0$ .

4- Pour  $z \geq 0$ , on a :

$$E_{\alpha,1}(0) = 1, \lim_{z \rightarrow +\infty} E_{\alpha,1}(z) = 0,$$

de plus, pour tout  $z > 0$ ,  $E_{\alpha,1}(-z)$  a le comportement asymptotique :

$$E_{\alpha,1}(-z) = \frac{1}{z\Gamma(1-\alpha)} + \mathcal{O}(|z|^{-2}).$$

**Lemme 3.2.1.** [110] Pour tout  $0 < \alpha < 1$  et  $z > 0$ , on a :

$$0 \leq E_{\alpha,1}(-z) < 1.$$

De plus  $E_{\alpha,1}$  est complètement monotone, i.e.,

$$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial z^n} E_{\alpha,1}(-z) \geq 0.$$

**Lemme 3.2.2.** [76] Pour tout  $0 < \alpha < 1$  et  $z > 0$  on a l'estimation uniforme suivante

$$\frac{1}{1 + c_1(\alpha)z} \leq E_{\alpha,1}(-z) \leq \frac{1}{1 + c_2(\alpha)z}, \quad (3.2.1)$$

avec des constantes optimales données par

$$c_1(\alpha) = \Gamma(1-\alpha), c_2 = \Gamma(1-\alpha)^{-1}. \quad (3.2.2)$$

En utilisant (3.2.1), on obtient les estimations suivantes :

$$\frac{\tau_1}{\lambda} \leq E_{\alpha,1}(-\lambda z^\alpha) \leq \frac{\tau_2}{\lambda}; \forall \lambda \geq \lambda_1 > 1. \quad (3.2.3)$$

avec

$$\tau_1 := \frac{1}{\lambda_1^{-1} + c_1 z^\alpha}, \tau_2 := \frac{1}{c_2(\alpha) z^\alpha}. \quad (3.2.4)$$

### 3.3 Analyse du problème

#### 3.3.1 Caractère bien posé du problème direct

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha u(z) - Au(z) = f, & 0 < z < \infty, \\ u(0) = g, \\ \|u(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

En utilisant le développement de Fourier, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \phi_n, \\ g &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \phi_n, \\ f &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (D_z^\alpha D_z^\alpha u_n(z) - \lambda_n u_n(z)) \phi_n, \\ \|u(+\infty)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n(+\infty) \phi_n \right\| < +\infty. \end{aligned}$$

En substituant ces dernières formules dans le problème (3.3.1), on obtient la famille des problèmes :

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha u_n(z) - \lambda_n u_n(z) = f_n, & 0 < z < \infty, \\ u_n(0) = g_n, \\ \|u_n(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Pour trouver la solution de ce problème, on applique la méthode citée dans l'article [132, p.1245, Pb. (4.5)-(4.7)].

Considérons l'équation différentielle :

$$D_z^\alpha D_z^\alpha X(z) - a^2 X(z) = (D_z^\alpha X(z) - aX(z)) (D_z^\alpha X(z) + aX(z)) = 0, \quad (3.3.3)$$

où  $a > 0, 0 < \alpha < 1$  et  $z \in \mathbb{R}$ .

Il est bien connu que la solution fondamentale de l'équation différentielle <sup>1</sup>

$$(D_z^\alpha X(z) + aX(z)) = 0,$$

est donnée par l'expression  $X(z) = E_\alpha(-az^\alpha)$ . Pour l'équation différentielle

$$(D_z^\alpha X(z) - aX(z)) = 0,$$

sa solution fondamentale est donnée par  $X(z) = E_\alpha(az^\alpha)$ .

L'ensemble  $\{E_\alpha(-az^\alpha), E_\alpha(az^\alpha)\}$  est un système fondamental pour (3.3.3), d'où la solution générale de (3.3.3) sera donnée par l'expression

$$X(z) = c_1 E_\alpha(-az^\alpha) + c_2 E_\alpha(az^\alpha), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.3.4)$$

Il est facile de vérifier que  $\frac{-1}{a^2} f_n$  est une solution particulière à l'équation non-homogène

$$D_z^\alpha D_z^\alpha X(z) - a^2 X(z) = f_n, \quad (3.3.5)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation (3.3.5) est donnée par

$$X(z) = c_1 E_\alpha(-az^\alpha) + c_2 E_\alpha(az^\alpha) - \frac{1}{a^2} f_n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.3.6)$$

En vertu de (3.3.6), la solution générale  $u_n(z)$  sera donnée par la formule

$$u_n(z) = c_{1,n} E_\alpha(-az^\alpha) + c_{2,n} E_\alpha(az^\alpha) - \frac{1}{a^2} f_n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

De la convergence de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(+\infty)|$  et la condition  $u_n(0) = g_n$  et les propriétés de la fonction **Mittag-Leffler**, il en résulte que  $c_{1,n} = 0$  et  $c_{2,n} = g_n + \frac{1}{\lambda_n} f_n$ , par conséquent, la

---

1. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and applications of fractional differential equations. NorthHolland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

solution du problème (3.3.2) est donnée par

$$u_n(z) = E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)g_n - \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)}{\lambda_n}f_n.$$

Donc, la solution du problème (3.3.1) prend la forme

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)g_n\phi_n - \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)}{\lambda_n}f_n\phi_n \right) \\ &= E_\alpha(-\sqrt{Az^\alpha})g - \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{Az^\alpha})}{A}f = S_\alpha(z)g - K_\alpha(z)f. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

**Théorème 3.3.1.** *Pour tout  $g, f \in H$ , le problème (3.3.1) admet une solution unique généralisée donnée par l'expression (3.3.7), de plus, on a l'estimation de stabilité :*

$$\sup_{z \geq 0} \|u(z)\| \leq \sup_{z \geq 0} \|S_\alpha(z)g\| + \sup_{z \geq 0} \|K_\alpha(z)f\| \leq \|g\| + \frac{1}{\lambda_1}\|f\| \quad (3.3.8)$$

### 3.3.2 Caractère mal posé du problème inverse

Le problème inverse proposé consiste à déterminer  $u(0) = g$  et  $f$  à partir des conditions supplémentaires  $u(Z_1) = \psi_1, u(Z_2) = \psi_2$ . Ce problème est équivalent à :

$$\begin{cases} u(Z_1) = S_\alpha(Z_1)g - K_\alpha(Z_1)f = \psi_1, \\ u(Z_2) = S_\alpha(Z_2)g - K_\alpha(Z_2)f = \psi_2. \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Ce qui donne le système des équations d'opérateurs suivant :

$$\begin{pmatrix} S_\alpha(Z_1) & -K_\alpha(Z_1) \\ S_\alpha(Z_2) & -K_\alpha(Z_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.10)$$

D'où on a

$$\begin{pmatrix} K_\alpha(Z_2) & -K_\alpha(Z_1) \\ S_\alpha(Z_2) & -S_\alpha(Z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_\alpha(Z_1) & -K_\alpha(Z_1) \\ S_\alpha(Z_2) & -K_\alpha(Z_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_\alpha(Z_2) & -K_\alpha(Z_1) \\ S_\alpha(Z_2) & -S_\alpha(Z_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.3.11)$$

et donc

$$\begin{pmatrix} K_\alpha(Z_2)S_\alpha(Z_1) - K_\alpha(Z_1)S_\alpha(Z_2) & 0 \\ 0 & K_\alpha(Z_2)S_\alpha(Z_1) - K_\alpha(Z_1)S_\alpha(Z_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_\alpha(Z_2)\psi_1 - K_\alpha(Z_1)\psi_2 \\ S_\alpha(Z_2)\psi_1 - S_\alpha(Z_1)\psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.12)$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}g \\ \mathcal{B}f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_\alpha(Z_2)\psi_1 - K_\alpha(Z_1)\psi_2 \\ S_\alpha(Z_2)\psi_1 - S_\alpha(Z_1)\psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.13)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= K_\alpha(Z_2)S_\alpha(Z_1) - K_\alpha(Z_1)S_\alpha(Z_2) \\ &= K_\alpha(Z_2) - K_\alpha(Z_1) = A^{-1}(S_\alpha(Z_1) - S_\alpha(Z_2)). \end{aligned}$$

En conséquence la solution du système d'équation (3.3.10) est donnée par

$$\begin{cases} g = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \psi_{1,n}\phi_n - \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \psi_{2,n}\phi_n \right), \\ f = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \psi_{1,n}\phi_n - \frac{\lambda_n E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \psi_{2,n}\phi_n \right), \end{cases} \quad (3.3.14)$$

où  $\psi_{1,n} = \langle \psi_1, \phi_n \rangle$  et  $\psi_{2,n} = \langle \psi_2, \phi_n \rangle$ .

En substituant (3.3.14) dans la solution du problème (3.3.1) donnée par (3.3.7), on obtient :

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha) \langle g, \phi_n \rangle \phi_n - \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)}{\lambda_n} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right), \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \psi_{1,n}\phi_n + \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \psi_{2,n}\phi_n \right). \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Soit

$$\eta_g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)}{\lambda_n} \psi_{1,n}\phi_n - \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{\lambda_n} \psi_{2,n}\phi_n, \quad (3.3.16)$$

$$\eta_f = \sum_{n=1}^{+\infty} E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha) \psi_{1,n} \phi_n - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) \psi_{2,n} \phi_n. \quad (3.3.17)$$

Alors les solutions (3.3.14) et (3.3.15) prennent la forme

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} \langle \eta_g, \phi_n \rangle \phi_n, \quad (3.3.18)$$

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} \langle \eta_f, \phi_n \rangle \phi_n, \quad (3.3.19)$$

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{S_\alpha(z) \lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} \langle \eta_g, \phi_n \rangle \phi_n - \frac{K_\alpha(z) \lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} \langle \eta_f, \phi_n \rangle \phi_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z^\alpha) \lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} \langle \eta_g, \phi_n \rangle \phi_n - \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} \langle \eta_f, \phi_n \rangle \phi_n \right). \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

On a

$$\frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} = \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha) \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} - 1 \right)}.$$

De l'inégalité (3.2.1), on obtient

$$\frac{1}{1 + c_1(\alpha) \sqrt{\lambda} Z_2^\alpha} \leq E_\alpha(-\sqrt{\lambda} Z_2^\alpha) \leq \frac{1}{1 + c_2(\alpha) \sqrt{\lambda} Z_2^\alpha}, \quad \lambda \geq \lambda_1, \quad (3.3.21)$$

$$1 + c_2(\alpha) \sqrt{\lambda} Z_2^\alpha \leq \frac{1}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda} Z_2^\alpha)} \leq 1 + c_1(\alpha) \sqrt{\lambda} Z_2^\alpha, \quad \lambda \geq \lambda_1. \quad (3.3.22)$$

Et de l'inégalité (3.2.3), on a

$$c_2 Z_2^\alpha \sqrt{\lambda_n} \leq \frac{1}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} \leq (\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha) Z_2^\alpha) \sqrt{\lambda_n}, \quad (3.3.23)$$

ce qui implique que

$$\frac{(c_2(\alpha)Z_2^\alpha\sqrt{\lambda_n})\lambda_n}{\left(\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} - 1\right)} \leq \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \leq \frac{(\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)Z_2^\alpha)\sqrt{\lambda_n}\lambda_n}{\left(\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} - 1\right)}. \quad (3.3.24)$$

Puisque la fonction  $A(t) = \frac{E_\alpha(-tZ_1^\alpha)}{E_\alpha(-tZ_2^\alpha)}$  est croissante et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E_\alpha(-tZ_1^\alpha)}{E_\alpha(-tZ_2^\alpha)} = \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^\alpha$  [118, page 17], il découle que  $A(t) - 1$  atteint ses bornes supérieure et inférieure. Notons  $\mu_1 = \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1$  la borne inférieure (resp.  $\mu_2 = \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^\alpha - 1$  la borne supérieure) de  $A(\sqrt{\lambda_n}) - 1$ , il vient que

$$\frac{(c_2(\alpha)Z_2^\alpha\sqrt{\lambda_n})\lambda_n}{\mu_2} \leq \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \leq \frac{(\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)Z_2^\alpha)\sqrt{\lambda_n}\lambda_n}{\mu_1}. \quad (3.3.25)$$

De cette estimation on voit clairement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} = +\infty. \quad (3.3.26)$$

On conclut donc que la reconstitution de  $g$  (resp.  $f$ ) à partir de  $\eta_g$  (resp.  $\eta_f$ ) est instable (ceci découle des hautes fréquences).

En vertu de l'estimation (3.3.25), on déduit le résultat suivant.

**Corollaire 3.3.1.** *Le système d'équations (3.3.10) est correctement résoluble (existence et unicité) si et seulement si  $\eta_g, \eta_f \in H^{\frac{3}{2}}$ .*

**Théorème 3.3.2.** *Si  $g$  et  $f \in H^{\frac{3\theta}{2}}$ , avec  $\theta > 0$  et*

$$\max \left\{ \|g\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}}, \|f\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}} \right\} < E,$$

alors  $u(z) \in H^{\frac{3\theta+1}{2}}$ , et

$$\|u(\cdot, z)\|_{H^{\frac{3\theta+1}{2}}} \leq \left( \frac{1}{c_2(\alpha)Z_2^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \right) E. \quad (3.3.27)$$

De plus on a

$$\|g\| \leq ME^{\frac{1}{\theta+1}} \|\eta_g\|^{\frac{\theta}{\theta+1}}, \quad (3.3.28)$$

$$\|f\| \leq ME^{\frac{1}{\theta+1}} \|\eta_f\|^{\frac{\theta}{\theta+1}}, \quad (3.3.29)$$

$$\text{où } M = \left( \frac{\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)Z_2^\alpha}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^{\frac{\theta}{\theta+1}}.$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, z)\|_{H^{\frac{3\theta+1}{2}}} &= \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{3\theta+1} \left( g_n E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha) - f_n \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)}{\lambda_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{3\theta+1} \left( g_n E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{3\theta+1} \left( f_n \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}z^\alpha)}{\lambda_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{3\theta} g_n^2 \lambda_n \left( \frac{1}{c_2(\alpha)z^\alpha \sqrt{\lambda_n}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{3\theta} f_n^2 \lambda_n \left( \frac{1}{\lambda_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{c_2(\alpha)z^\alpha} \|g\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|f\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}}. \end{aligned}$$

Pour (3.3.28), on a

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} |\langle \eta_g, \phi_n \rangle| \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \right)^2 \left( |\langle \eta_g, \phi_n \rangle|^{\frac{2}{\theta+1}} |\langle \eta_g, \phi_n \rangle|^{\frac{2\theta}{\theta+1}} \right) \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \right)^{2(\theta+1)} |\langle \eta_g, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{\theta+1}} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle \eta_g, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{\theta}{\theta+1}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \right)^{2\theta} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{\theta+1}} \|\eta_g\|^{\frac{2\theta}{\theta+1}}. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \right)^{2\theta} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)Z_2^\alpha)\sqrt{\lambda_n}\lambda_n}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^{2\theta} |\langle g, \phi_n \rangle|^2$$

et  $\frac{E_\alpha(-tZ_1^\alpha)}{E_\alpha(-tZ_2^\alpha)}$  est une fonction croissante de valeurs supérieures à 1 pour tout  $t > 0$ , donc

$$\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} - 1 \geq \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1.$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\lambda_n}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \right)^{2\theta} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \leq \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)Z_2^\alpha)}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^{2\theta} \lambda_n^{3\theta} |\langle g, \phi_n \rangle|^2 \leq \\ & \left( \frac{(\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)Z_2^\alpha)}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^{2\theta} \|g\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}}^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne (3.3.28). Par le même raisonnement, on montre (3.3.29).  $\square$

**Théorème 3.3.3.** Soit  $\psi_i = u(\cdot, Z_i)$  pour  $i = 1, 2$ , si  $g \in H^{\frac{\theta}{4}}$  et  $f \in H^{\frac{\theta}{2}}$  avec  $\theta > 0$ . Alors, on a

$$\|g\| \leq C_1 \|g\|_{H^{\frac{\theta}{4}}}^{\frac{2}{\theta+2}} \left( \|\psi_1\| + \frac{1}{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} \|\psi_2\| \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}}, \quad (3.3.30)$$

$$\|f\| \leq C_2 \|f\|_{H^{\frac{\theta}{2}}}^{\frac{2}{\theta+2}} \left( \|\psi_1\| + \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^\alpha \|\psi_2\| \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}}, \quad (3.3.31)$$

$$\text{avec } C_1 = \left( \frac{c_1(\alpha)Z_2^\alpha}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}} \text{ et } C_2 = \left( \frac{1}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}}$$

*Preuve.* Soit  $\langle \psi_i, \phi_n \rangle = \psi_{i,n}$  et  $E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha) = S1_n$ ,  $E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha) = S2_n$ ,

et  $\frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{\lambda_n} = K1_n$ ,  $\frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)}{\lambda_n} = K2_n$ , on a

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{K2_n \psi_{1,n} - K1_n \psi_{2,n}}{K2_n S1_n - K1_n S2_n} \phi_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{K2_n \psi_{1,n} - K1_n \psi_{2,n}}{K2_n S1_n - K1_n S2_n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n}}{S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n}} \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\left( \psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^{\frac{4}{\theta+2}}}{\left( S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n} \right)^2} \right) \left( \psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}} \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left( \psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^2}{\left( S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n} \right)^{\theta+2}} \right)^{\frac{2}{\theta+2}} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^2 \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}}. \end{aligned}$$

On a (d'après l'inégalité de Minkows) :

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^2 \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}} \leq \left( \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (\psi_{1,n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}},$$

et comme

$$\frac{K1_n}{K2_n} = \frac{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \leq \frac{1}{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \leq \frac{1}{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)},$$

il résulte donc

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^2 \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}} \leq \left( \|\psi_1\| + \frac{1}{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} \|\psi_2\| \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}}. \quad (3.3.32)$$

D'autre part on a

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left( \psi_{1,n} - \frac{K1_n}{K2_n} \psi_{2,n} \right)^2}{\left( S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n} \right)^{\theta+2}} \right)^{\frac{2}{\theta+2}} = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n^2}{\left( S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n} \right)^\theta} \right)^{\frac{2}{\theta+2}},$$

et comme

$$S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n} = \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} = \frac{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} - 1}{\frac{1}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} - 1}.$$

et la fonction  $\frac{E_\alpha(-tZ_1^\alpha)}{E_\alpha(-tZ_2^\alpha)}$  est croissante de valeurs supérieures à 1 pour tout  $t > 0$ , donc

$$\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} - 1 \geq \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_2^\alpha)} - 1.$$

En tenant compte de toutes ces remarque et de l'inégalité

$$\frac{1}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)} - 1 \leq c_1(\alpha) \sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha,$$

on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n^2}{(S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n})^\theta} \leq \left( \frac{c_1(\alpha) Z_2^\alpha}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_2^\alpha)} - 1} \right)^\theta \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{\frac{\theta}{2}} g_n^2,$$

d'où

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n^2}{(S1_n - \frac{K1_n S2_n}{K2_n})^\theta} \right)^{\frac{2}{\theta+2}} \leq \left( \frac{c_1(\alpha) Z_2^\alpha}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_2^\alpha)} - 1} \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}} \|g\|_{\frac{H^{\frac{\theta}{4}}}{H^{\frac{\theta}{4}}}}^{\frac{4}{\theta+2}}. \quad (3.3.33)$$

En combinant (3.3.32) et (3.3.33), on obtient (3.3.30).

Pour (3.3.31), on a

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S2_n \psi_{1,n} - S1_n \psi_{2,n}}{K2_n S1_n - K1_n S2_n} \phi_n,$$

donc

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{S_{2n}\psi_{1,n} - S_{1n}\psi_{2,n}}{K_{2n}S_{1n} - K_{1n}S_{2n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\psi_{1,n} - \frac{S_{1n}}{S_{2n}}\psi_{2,n}}{\frac{K_{2n}S_{1n}}{S_{2n}} - K_{1n}} \right)^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left( \psi_{1,n} - \frac{S_{1n}}{S_{2n}}\psi_{2,n} \right)^{\frac{4}{\theta+2}}}{\left( \frac{K_{2n}S_{1n}}{S_{2n}} - K_{1n} \right)^2} \left( \psi_{1,n} - \frac{S_{1n}}{S_{2n}}\psi_{2,n} \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}} \\
&\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left( \psi_{1,n} - \frac{S_{1n}}{S_{2n}}\psi_{2,n} \right)^2}{\left( \frac{K_{2n}S_{1n}}{S_{2n}} - K_{1n} \right)^{\theta+2}} \right)^{\frac{2}{\theta+2}} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \psi_{1,n} - \frac{S_{1n}}{S_{2n}}\psi_{2,n} \right)^2 \right)^{\frac{\theta}{\theta+2}} \\
&\leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n^2}{\left( \frac{K_{2n}S_{1n}}{S_{2n}} - K_{1n} \right)^\theta} \right)^{\frac{2}{\theta+2}} \left( \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_{1,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{S_{1n}}{S_{2n}}\psi_{2,n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}}.
\end{aligned}$$

On a  $\frac{S_{1n}}{S_{2n}} = \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E_\alpha(-tZ_1^\alpha)}{E_\alpha(-tZ_2^\alpha)} = \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^\alpha$ , de plus on a

$$\frac{K_{2n}S_{1n}}{S_{2n}} - K_{1n} = \frac{1}{\lambda_n} \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}Z_2^\alpha)} - 1 \right) \geq \frac{1}{\lambda_n} \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1 \right).$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &\leq \left( \left( \frac{1}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^\theta \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^\theta f_n^2 \right)^{\frac{2}{\theta+2}} \left( \|\psi_1\| + \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^\alpha \|\psi_2\| \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}} \leq \\
&\left( \left( \frac{1}{\frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1} \right)^\theta \|f\|_{H^{\frac{\theta}{2}}}^2 \right)^{\frac{2}{\theta+2}} \left( \|\psi_1\| + \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^\alpha \|\psi_2\| \right)^{\frac{2\theta}{\theta+2}}.
\end{aligned}$$

□

## 3.4 Régularisation par la procédure itérative alternative

### 3.4.1 Description de la méthode

L'algorithme itératif pour résoudre le problème **mal posé** ((3.1.5)-(3.1.2)) commence par le choix des éléments arbitraires  $g_0, f_0 \in H$ . La première approximation  $u_0(z)$  est la solution du problème direct (bien-posé) suivant :

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha u_0 - Au_0 = f_0, & 0 < z < +\infty, \\ u_0(0) = g_0, \\ \|u_0(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Soit  $\eta_g = v_2(Z_1) - v_1(Z_2)$  et  $\eta_f = w_2(Z_1) - w_1(Z_2)$ , où  $v_i$ , pour  $i = 1, 2$ , sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha v_i - Av_i = \psi_i, & 0 < z < +\infty, \\ v_i(0) = 0 \\ \|v_i(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Et  $w_i$  sont les solutions du problèmes

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha w_i - Aw_i = 0, & 0 < z < +\infty, \\ w_i(0) = \psi_i, \\ \|w_i(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

C'est-à-dire :

$$\eta_g = K_\alpha(Z_2)\psi_1 - K_\alpha(Z_1)\psi_2, \quad (3.4.4)$$

et

$$\eta_f = S_\alpha(Z_2)\psi_1 - S_\alpha(Z_1)\psi_2. \quad (3.4.5)$$

Si la  $k$ -ième solution approchée est construite, on considère que  $v_k$  est la solution du

problème

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha v_k - Av_k = g_k, & 0 < z < +\infty, \\ v_k(0) = 0, \\ \|v_k(+\infty)\| < +\infty, \end{cases} \quad (3.4.6)$$

on trouve que  $v_k(z) = -K_\alpha(z)g_k$ .

De plus, considérons  $w_k$  comme solution du problème

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha w_k - Aw_k = f_k, & 0 < z < +\infty, \\ w_k(0) = 0, \\ \|w_k(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Ce qui donne  $w_k = -K_\alpha(z)f_k$ .

Ensuite, mettons

$$g_{k+1} = g_k - \omega (v_k(Z_1) - v_k(Z_2) - \eta_g), \quad (3.4.8)$$

$$f_{k+1} = f_k - \omega (w_k(Z_1) - w_k(Z_2) - \eta_f), \quad (3.4.9)$$

où  $0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|\mathcal{B}\|}$  avec

$$\|\mathcal{B}\| = \sup_{n \geq 1} \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)}{\lambda_n} \leq \frac{C}{\lambda_1^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.4.10)$$

où  $C = \frac{\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right)^\alpha - 1}{c_2 Z_2^\alpha}$ .

Finalement, on obtient  $u_{k+1}$  en résolvant le problème

$$\begin{cases} D_z^\alpha D_z^\alpha u_{k+1} - Au_{k+1} = f_{k+1}, & 0 < z < +\infty, \\ u_{k+1}(0) = g_{k+1}, \\ \|u_{k+1}(+\infty)\| < +\infty. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Cela est équivalent à l'algorithme de [Landweber-Fridman](#) pour résoudre le système

d'équations **mal posé** (3.3.10), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{k+1} \\ f_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} g_k \\ f_k \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} K_\alpha(Z_2) & -K_\alpha(Z_1) \\ S_\alpha(Z_2) & -S_\alpha(Z_1) \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_\alpha(Z_1) & K_\alpha(Z_1) \\ S_\alpha(Z_2) & K_\alpha(Z_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_k \\ f_k \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} (I - \omega\mathcal{B})g_k + \omega\eta_g \\ (I - \omega\mathcal{B})f_k + \omega\eta_f \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

et  $u_{k+1} = S_\alpha(z)g_{k+1} - K_\alpha(z)f_{k+1}$ .

Posons  $G = I - \omega\mathcal{B}$ . Si on itère les algorithmes (3.4.8) et (3.4.9), on obtient :

$$\begin{aligned} g_k &= G^k g_0 + (I - G^k)g, \text{ et } g_k - g = G^k(g_0 - g), \\ f_k &= G^k f_0 + (I - G^k)f, \text{ et } f_k - f = G^k(f_0 - f), \\ u_k(z) - u(z) &= S_\alpha(z)G^k(g_0 - g) - K_\alpha(z)G^k(f_0 - f). \end{aligned}$$

### 3.4.2 Convergence et estimations d'erreur

**Proposition 3.4.1.** *L'opérateur  $G = I - \omega\mathcal{B}$  est auto-adjoint et quasi-contractant sur  $H$  (1 n'est pas une valeur propre de  $G$ ). De plus, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$\left\| \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|G^i\| \leq k.$$

**Théorème 3.4.1.** *Soient  $g_0, f_0$  deux éléments quelconques du processus itératif proposé ci-dessus et  $u_k$  la  $k$ -ième solution approchée. On a :*

$$\sup_{z \in [0, +\infty)} \|u_k(z) - u(z)\| \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty.$$

*Preuve.* Il découle immédiatement du théorème (2.2.2) et l'estimation (3.4.10) que

$$\begin{aligned}
\|u_k(z) - u(z)\| &= \|S_\alpha(z)G^k(g_0 - g) - K_\alpha(z)G^k(f_0 - f)\| \\
&\leq \|S_\alpha(z)G^k(g_0 - g)\| + \|K_\alpha(z)G^k(f_0 - f)\| \\
&\leq \|S_\alpha(z)\| \|G^k(g_0 - g)\| + \|K_\alpha(z)\| \|G^k(f_0 - f)\| \\
&\leq \|G^k(g_0 - g)\| + \lambda_1^{-1} \|G^k(f_0 - f)\| \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty.
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

□

**Théorème 3.4.2.** Soient  $g_0, f_0$  deux éléments quelconques du processus itératif proposé ci-dessus et  $u_k$  la  $k$ -ième solution approchée. Si  $(g_0 - g), (f_0 - f) \in H^{\frac{3\theta}{2}}, \theta > 0$  avec

$$E = \max \left\{ \|g_0 - g\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}}, \|f_0 - f\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}} \right\}.$$

Alors le taux de convergence de cette méthode est donné par :

$$\sup_{z \in [0, +\infty)} \|u_k(z) - u(z)\| \leq (1 + \lambda_1^{-1}) M_\theta \frac{1}{(k+1)^\theta} E, \tag{3.4.14}$$

$$\text{avec } M_\theta = \left( \frac{\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha) Z_2^\alpha}{\omega \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_2^\alpha)} - 1 \right)} \right)^\theta \kappa_\theta.$$

*Preuve.* On a

$$\|u_k(z) - u(z)\| \leq \sqrt{\Delta_1} + \sqrt{\Delta_2}, \tag{3.4.15}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \|(I - \omega \mathcal{B})(g_0 - g)\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \omega \left( \frac{E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)}{\lambda_n} \right) \right)^{2k} \|(g_0 - g, \phi_n)\|^2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= \lambda_1^{-2} \|(I - \omega \mathcal{B})(f_0 - f)\|^2 \\
&= \lambda_1^{-2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 - \omega \left( \frac{E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} Z_2^\alpha)}{\lambda_n} \right) \right)^{2k} |(f_0 - f, \phi_n)|^2.
\end{aligned}$$

On note  $\mathcal{B}_n = \left( \frac{E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha) - E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} Z_1^\alpha)}{\lambda_n} \right)$ , alors

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega \mathcal{B}_n)^{2k} |(g_0 - g, \phi_n)|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \omega \mathcal{B}_n)^{2k} (\omega \mathcal{B}_n)^{2\theta} (\omega \mathcal{B}_n)^{-2\theta} |(g_0 - g, \phi_n)|^2, \end{aligned}$$

En utilisant (2.5.4) et (3.3.24), on en dérive les estimations suivantes :

$$(1 - \omega \mathcal{B}_n)^{2k} (\omega \mathcal{B}_n)^{2\theta} \leq \left( \kappa_\theta \frac{1}{(k+1)^\theta} \right)^2, \quad (3.4.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} (\omega \mathcal{B}_n)^{-2\theta} |(g_0 - g, \phi_n)|^2 &\leq \left( \frac{\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha) Z_2^\alpha}{\omega \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_2^\alpha)} - 1 \right)} \right)^{2\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{3\theta} |(g_0 - g, \phi_n)|^2 \\ &\leq \left( \frac{\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha) Z_2^\alpha}{\omega \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1} Z_2^\alpha)} - 1 \right)} \right)^{2\theta} E^2. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

En combinant (3.4.16) et (3.4.17), on obtient l'estimation :

$$\sqrt{\Delta_1} \leq M_\theta \frac{E}{(k+1)^\theta}. \quad (3.4.18)$$

De la même manière, on obtient

$$\sqrt{\Delta_2} \leq \lambda_1^{-1} M_\theta \frac{E}{(k+1)^\theta}. \quad (3.4.19)$$

En combinant (3.4.15), (3.4.18) et (3.4.19), on obtient (3.4.14).  $\square$

Puisque dans la pratique, les données mesurées  $\psi_1$  et  $\psi_2$  ne sont jamais connues exactement, notre objectif est de résoudre le système à partir de la connaissance des données perturbées.

On suppose donc que les fonctions  $\psi_1^\delta$  et  $\psi_2^\delta$  sont bruitées :

$$\|\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| \leq \delta_1, \quad (3.4.20)$$

$$\|\psi_2 - \psi_2^{\delta_2}\| \leq \delta_2, \quad (3.4.21)$$

$$\|\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| + \|\psi_2 - \psi_2^{\delta_2}\| \leq \delta, \quad (3.4.22)$$

où  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  désigne la quantité du bruit, le niveau du bruit dans  $\psi_1^{\delta_1}$  est donné par

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{\|\psi_1\|} \text{ et dans } \psi_2^{\delta_2} \text{ est donné par } \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{\|\psi_2\|}.$$

Dans le théorème suivant, nous considérons le cas de données inexactes.

### Choix a priori du paramètre de régularisation

**Théorème 3.4.3.** Soient  $g_0, f_0$  deux éléments quelconques du processus itératif proposé ci-dessus et  $u_k$  (respectivement,  $u_k^\delta$ ) la  $k$ -ième solution approchée correspondant aux données exactes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  (resp. aux données inexactes  $\psi_1^{\delta_1}$  et  $\psi_2^{\delta_2}$  satisfaisant (3.4.22)). Si  $(g_0 - g), (f_0 - f) \in H^{\frac{3\theta}{2}}, \theta > 0$  avec

$$E = \max \left\{ \|g_0 - g\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}}, \|f_0 - f\|_{H^{\frac{3\theta}{2}}} \right\},$$

et si on choisit le paramètre de régularisation  $k = k(\delta) = [b]$ , où  $b = \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{\theta+1}}$ , alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\sup_{z \in [0, +\infty)} \|u_k^\delta(z) - u(z)\| \leq \left( \frac{2\omega}{\lambda_1} + M_\theta(1 + \lambda_1^{-1}) \right) E^{\frac{1}{\theta+1}} \delta^{\frac{\theta}{\theta+1}}, \quad (3.4.23)$$

où  $[b]$  désigne la partie entière de  $b$  et  $M_\theta = \left( \frac{\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)Z_2^\alpha}{\omega \left( \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_1^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_1}Z_2^\alpha)} - 1 \right)} \right)^\theta$   $\kappa_\theta$  est une constante positive.

*Preuve.* Soit  $G = (I - \omega\mathcal{B})$  et

$$g_k = G^k g_0 + \omega \sum_{j=0}^{k-1} G^j \eta_g, \quad (3.4.24)$$

$$f_k = G^k f_0 + \omega \sum_{j=0}^{k-1} G^j \eta_f, \quad (3.4.25)$$

$$u_k(z) = S_\alpha(z)g_k - K_\alpha(z)f_k, \quad (3.4.26)$$

$$g_k^\delta = G^k g_0 + \omega \sum_{j=0}^{k-1} G^j \eta_g^\delta, \quad (3.4.27)$$

$$f_k^\delta = G^k f_0 + \omega \sum_{j=0}^{k-1} G^j \eta_f^\delta, \quad (3.4.28)$$

$$u_k^\delta(z) = S_\alpha(z)g_k^\delta - K_\alpha(z)f_k^\delta, \quad (3.4.29)$$

avec  $\eta_g^\delta = K_\alpha(Z_2)\psi_1 - K_\alpha(Z_1)\psi_2$  et  $\eta_f^\delta = S_\alpha(Z_2)\psi_1 - S_\alpha(Z_1)\psi_2$ .

Alors on a :

$$\begin{aligned} \|\eta_g - \eta_g^\delta\| &= \|K_\alpha(Z_2)\psi_1 - \psi_1^{\delta_1} - K_\alpha(Z_1)(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \\ &\leq \|K_\alpha(Z_2)\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| + \|K_\alpha(Z_1)(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \\ &\leq \|K_\alpha(Z_2)\| \times \|\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| + \|K_\alpha(Z_1)\| \times \|(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \\ &\leq \lambda_1^{-1} \left( \|\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| + \|(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \right) \leq \lambda_1^{-1} \delta, \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

et

$$\begin{aligned} \|\eta_f - \eta_f^\delta\| &= \|S_\alpha(Z_2)\psi_1 - \psi_1^{\delta_1} - S_\alpha(Z_1)(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \\ &\leq \|S_\alpha(Z_2)\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| + \|S_\alpha(Z_1)(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \\ &\leq \|S_\alpha(Z_2)\| \times \|\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| + \|S_\alpha(Z_1)\| \times \|(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \\ &\leq \left( \|\psi_1 - \psi_1^{\delta_1}\| + \|(\psi_2 - \psi_2^{\delta_2})\| \right) \leq \delta. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|u_k^\delta(z) - u(z)\| \leq \|u_k^\delta(z) - u_k(z)\| + \|u_k(z) - u(z)\|. \quad (3.4.32)$$

De

$$\begin{aligned} \|u_k^\delta(z) - u_k(z)\| &\leq \|S_\alpha(z)(g_k^\delta - g_k)\| + \|K_\alpha(z)(f_k^\delta - f_k)\|, \\ &\leq \omega \left\| \sum_{j=0}^{+\infty} G^j(\eta_g^\delta - \eta_g) \right\| + \lambda_1^{-1} \left\| \sum_{j=0}^{+\infty} G^j(\eta_f^\delta - \eta_f) \right\|, \end{aligned}$$

et (3.4.31) et (3.4.5), on obtient :

$$\|u_k^\delta(z) - u_k(z)\| \leq \omega \left( \lambda_1^{-1} \delta \sum_{j=0}^{+\infty} \|G^j\| + \lambda_1^{-1} \delta \sum_{j=0}^{+\infty} \|G^j\| \right).$$

Comme  $\|G\| = \|I - \omega\mathcal{B}\| \leq 1$ , il en résulte que

$$\sup_{z \in [0; +\infty)} \|u_k^\delta(z) - u_k(z)\| \leq \frac{2\omega}{\lambda_1} k\delta. \quad (3.4.33)$$

Et on a de (3.4.14) :

$$\sup_{z \in [0; +\infty)} \|u_k(z) - u(z)\| \leq (1 + \lambda_1^{-1}) M_\theta \frac{1}{(k+1)^\theta} E \leq (1 + \lambda_1^{-1}) M_\theta \frac{1}{k^\theta} E. \quad (3.4.34)$$

En combinant (3.4.32) avec (3.4.33) et (3.4.34), puis en passant au supremum par rapport à  $z \in [0, +\infty)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{z \in [0; +\infty)} \|u_k^\delta(z) - u(z)\| &\leq \frac{2\omega}{\lambda_1} k\delta + (1 + \lambda_1^{-1}) M_\theta \frac{1}{k^\theta} E \\ &\leq \left( \frac{2\omega}{\lambda_1} + M_\theta(1 + \lambda_1^{-1}) \right) E^{\frac{1}{\theta+1}} \delta^{\frac{\theta}{\theta+1}}. \end{aligned}$$

□

### 3.5 Tests numériques

Dans cette partie, on donne deux exemples numériques pour illustrer la faisabilité et l'efficacité de la méthode proposée.

Dans le premier exemple, le couple inconnu  $(f, g)$  est unidimensionnel, et dans le deuxième exemple, il est de deux dimensions spatiales. Les tests ont été faits par l'environnement de développement MATLAB, et on utilise la fonction-MATLAB `m1(z, alpha, beta, gama)` programmée par R. Garrappa (Numerical evaluation of two and three parameters). Homepage : <http://www.dm.uniba.it/Members/garrappa>.

**Exemple 3.5.1.** On considère le problème inverse suivant

$$\begin{cases} D_\alpha^y D_\alpha^y u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) = f(x), & x \in (0, \pi), y \in (0, +\infty), \alpha = \frac{1}{2}, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = g(x), & x \in [0, \pi], \\ \|u(x, +\infty)\| < +\infty, & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (3.5.1)$$

où  $f(x)$  est le terme source inconnue et  $g(x)$  est la condition au bord inconnue.

Maintenant on commence par la construction des conditions supplémentaires :

$$\psi_1 = u(x, 1) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N a_n(x),$$

où

$$a_n(x) = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx \sin(nx) - \frac{1 - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1})}{n^2} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \sin(nx)$$

et

$$\psi_1 = u(x, 1) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N b_n(x),$$

où

$$b_n(x) = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2}) \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx \sin(nx) - \frac{1 - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})}{n^2} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \sin(nx),$$

et

$$f(x) = 2(\pi - x)x, \quad g(x) = (\pi - x)x.$$

On prend  $N = 100$  et on évalue les intégrales  $\int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$  et  $\int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx$  numériquement par la méthode des trapèzes sur une grille équidistante

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M=1999} = \pi, h = \frac{\pi}{1999}.$$

Ces données sont considérées comme étant les "données exactes"  $\psi_1$  et  $\psi_2$ .

Les deux figures suivantes visualisent les courbes de ces données.

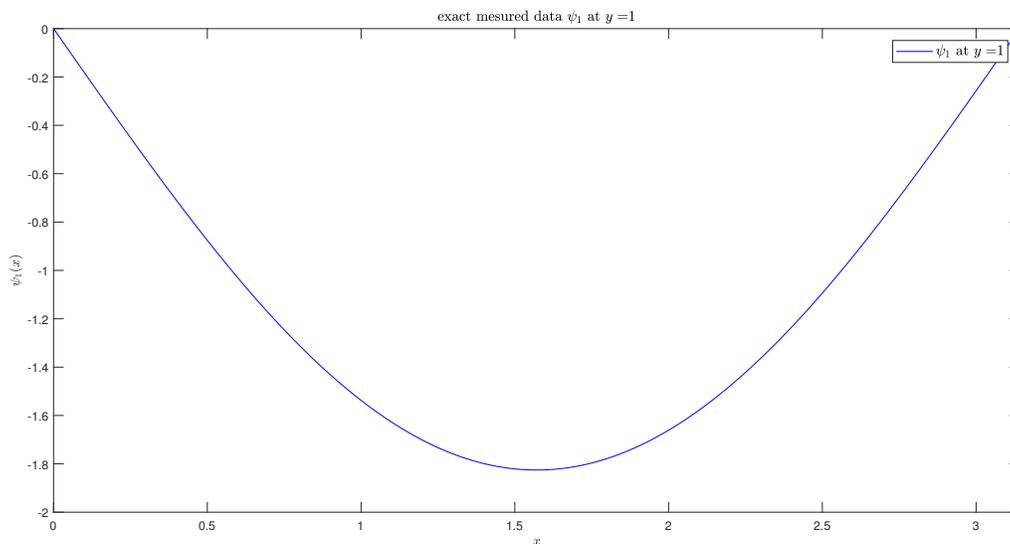
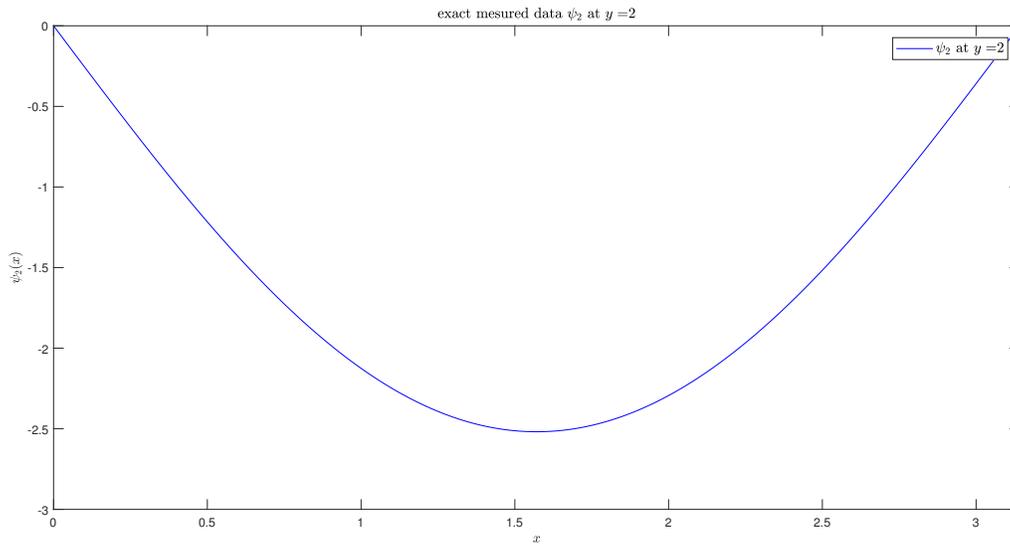


FIGURE 3.1 – Donnée exacte  $\psi_1$  mesurée au point  $Y_1 = 1$ .

FIGURE 3.2 – Donnée exacte  $\psi_2$  mesurée au  $Y_2 = 2$ .

Maintenant on ajoute du bruit aux données  $\psi_1$  et  $\psi_2$  en utilisant une perturbation aléatoire (obtenue par la commande de MATLAB `randn`), on obtient le vecteur  $\psi_1^\delta$  et  $\psi_2^\delta$  :

$$\text{noise} = \text{randn}(\text{size}(\psi_1));$$

$$\text{noise1} = \varepsilon_1 * \text{noise} * \text{norm}(\psi_1) / \text{norm}(\text{noise});$$

$$\psi_1^\delta = \psi_1 + \text{noise1};$$

$$\text{noise} = \text{randn}(\text{size}(\psi_2));$$

$$\text{noise2} = \varepsilon_2 * \text{noise} * \text{norm}(\psi_2) / \text{norm}(\text{noise});$$

$$\psi_2^\delta = \psi_2 + \text{noise2};$$

Le niveau du bruit  $\delta_1 = \frac{\|\psi_1^\delta - \psi_1\|}{\|\psi_1\|}$  et  $\delta_2 = \frac{\|\psi_2^\delta - \psi_2\|}{\|\psi_2\|}$ , la fonction "`randn(.)`" génère des valeurs aléatoires normalement distribuées dont la moyenne est égale à 0, la variance  $\sigma^2 = 1$ , et l'écart-type  $\sigma = 1$ . "`randn(size(\psi_1))`" renvoie un tableau d'entrées aléatoires de la même taille que  $\psi_1$ .

les images suivantes représentent les données infectées  $\psi_1^\delta$  et  $\psi_2^\delta$  pour deux niveaux du

bruit différents 10% et 25%, et les courbes des données

$$\eta_g^\delta = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \left( \left( \frac{1 - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})}{n^2} \int_0^\pi \psi_1^\delta \sin(nx) dx - \frac{1 - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1})}{n^2} \int_0^\pi \psi_2^\delta \sin(nx) dx \right) \sin(nx) \right),$$

et

$$\eta_f^\delta = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{100} \left( \left( E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2}) \int_0^\pi \psi_1^\delta \sin(nx) dx - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) \int_0^\pi \psi_2^\delta \sin(nx) dx \right) \sin(nx) \right).$$

et les courbes des erreurs en valeur absolue  $|\eta_g - \eta_g^\delta|$ ,  $|\eta_f - \eta_f^\delta|$ .

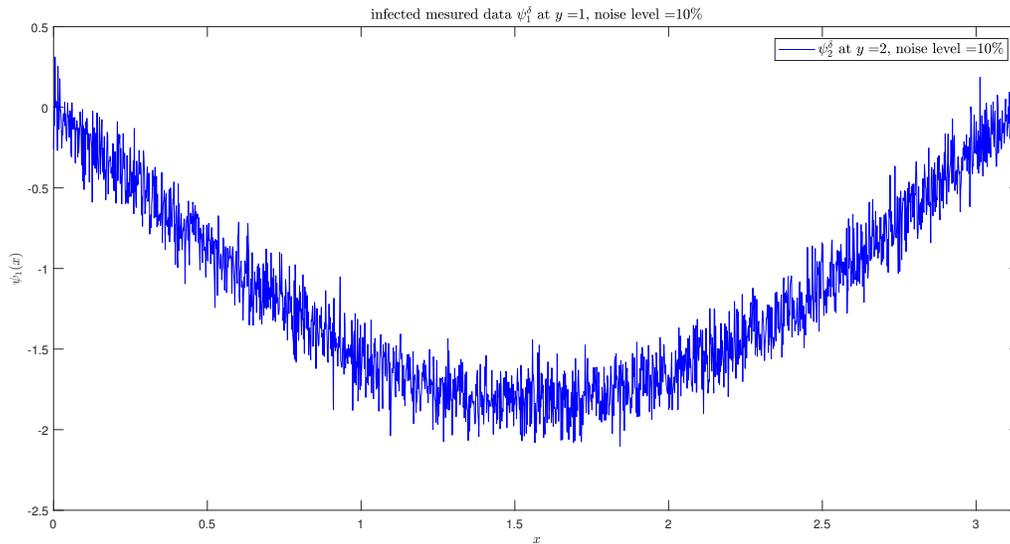


FIGURE 3.3 – Donnée bruitée  $\psi_1^\delta$ , niveau du bruit = 10%.

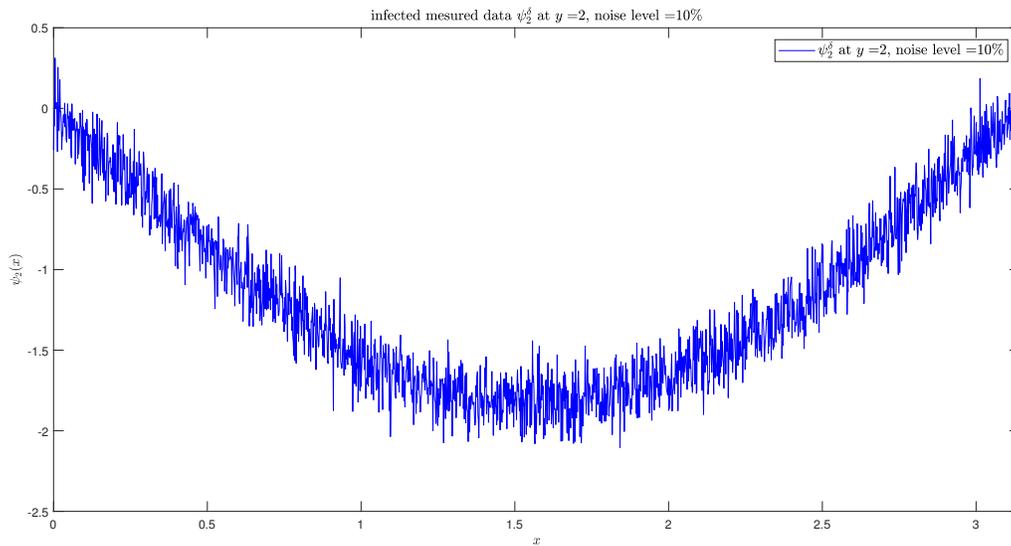


FIGURE 3.4 – Donnée bruitée  $\psi_2^\delta$ , niveau du bruit = 10%.

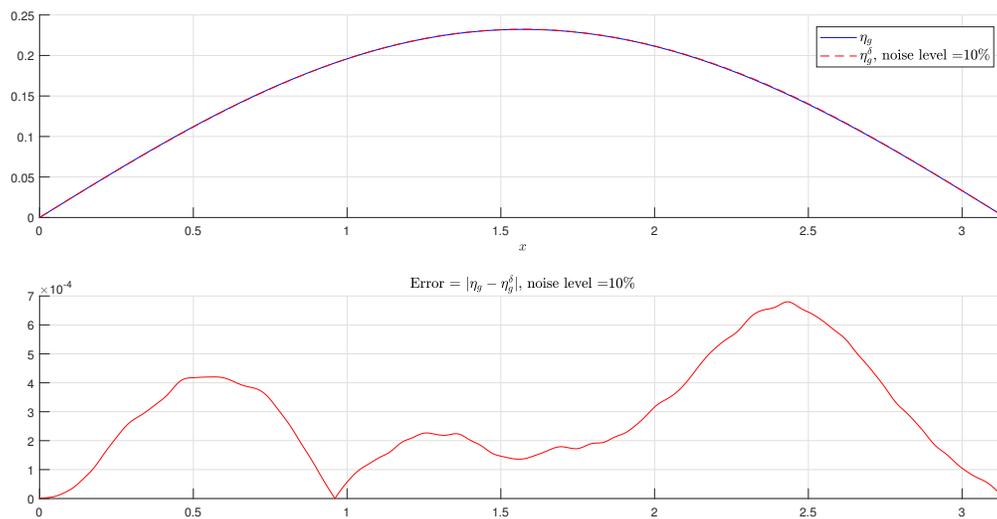


FIGURE 3.5 – Donnée exacte  $\eta_g$  et donnée bruitée  $\eta_g^\delta$ , niveau du bruit = 10%.

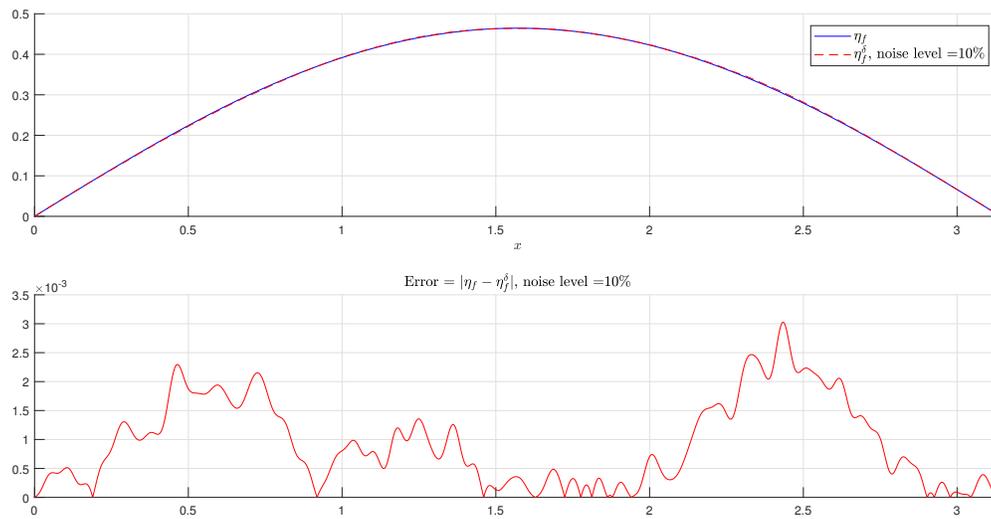


FIGURE 3.6 – Donnée exacte  $\eta_f$  et donnée bruitée  $\eta_f^\delta$ , niveau du bruit = 10%.

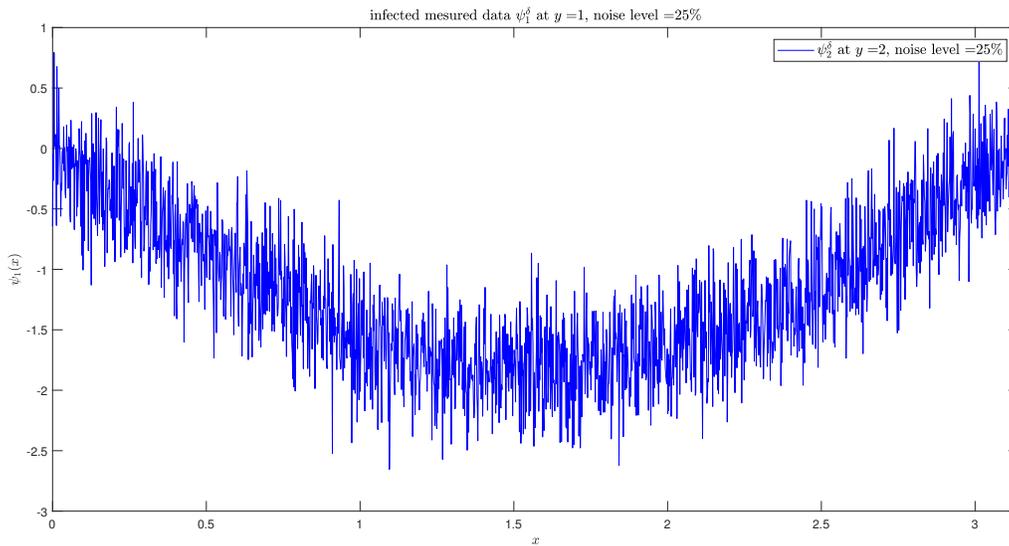


FIGURE 3.7 – Donnée bruitée  $\psi_1^\delta$  niveau du bruit = 25%.

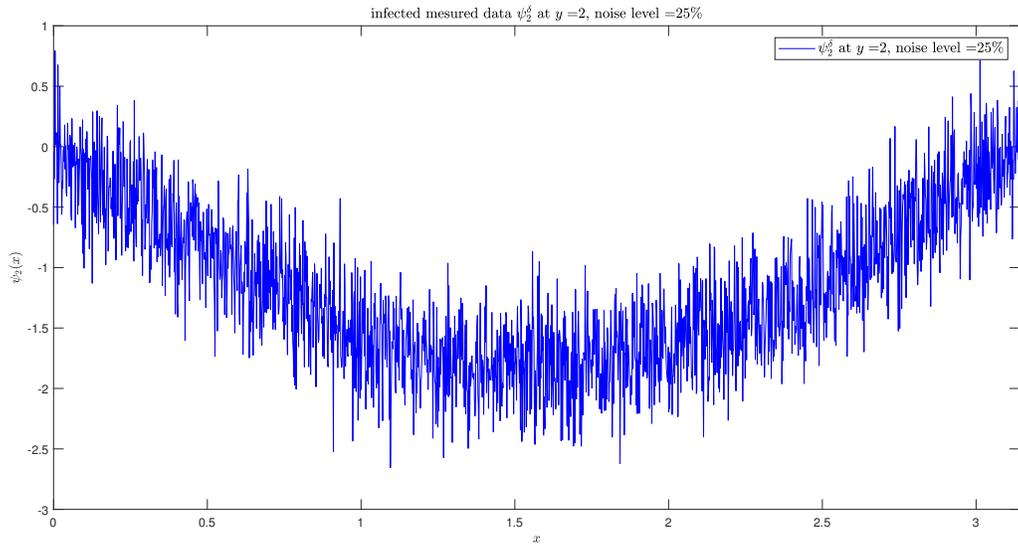


FIGURE 3.8 – Donnée bruitée  $\psi_2^\delta$ , niveau du bruit = 25%.

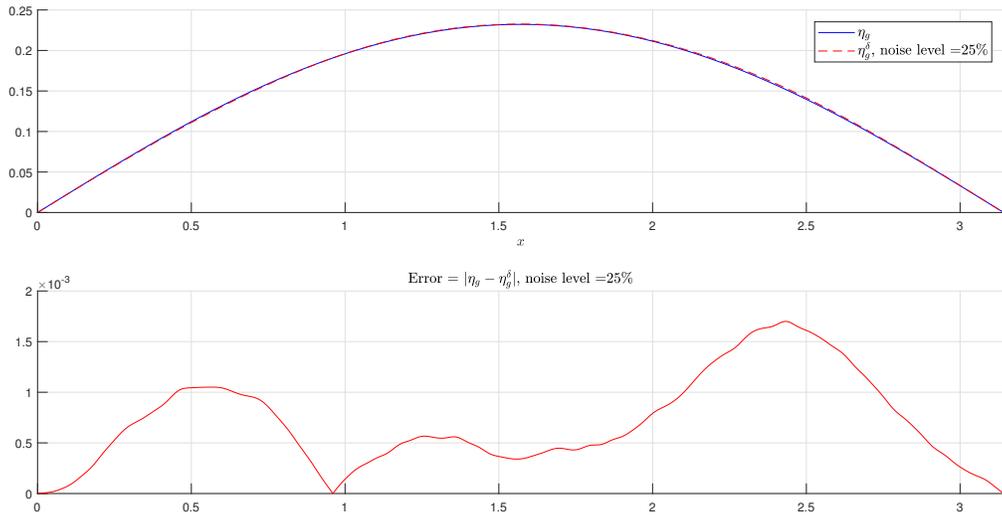


FIGURE 3.9 – Donnée exacte  $\eta_g$  et donnée bruitée  $\eta_g^\delta$ , niveau du bruit = 25%.

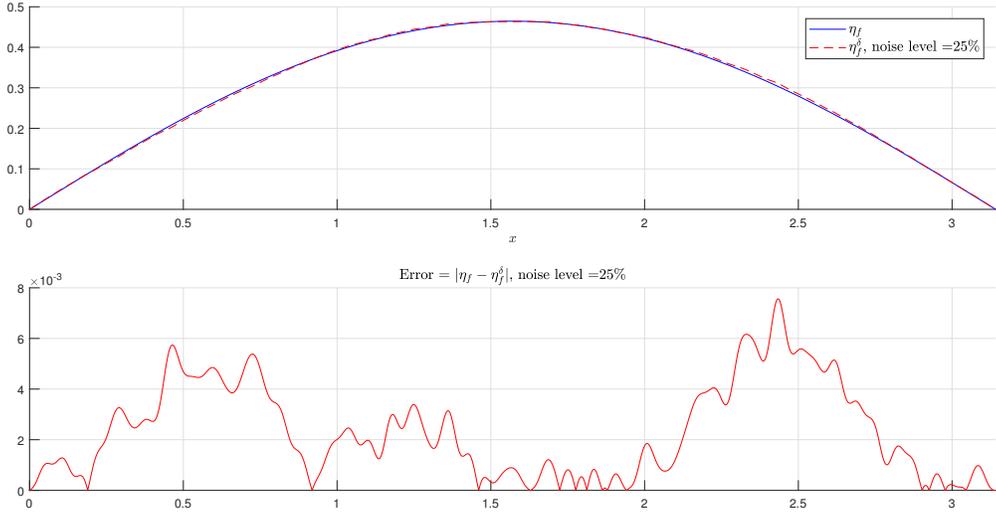


FIGURE 3.10 – Donnée exacte  $\eta_f$  et donnée bruitée  $\eta_f^\delta$ , niveau du bruit = 25%.

**Reconstruction itérative.**

Les solutions du problème ((3.1.5)- (3.1.2)) par la procédure itérative sont données par

$$g_k^\delta = \sum_{n=1}^{100} (c_{1,n} + c_{2,n}) \sin(nx),$$

où

$$c_{1,n} = \left(1 - \frac{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})}{n^2}\right)^k \int_0^\pi g_0 \sin(nx) dx,$$

$$c_{2,n} = \left(1 - \omega_1 \left(1 - \frac{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})}{n^2}\right)\right)^k \frac{n^2}{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})} \int_0^\pi \eta_g^\delta \sin(nx) dx,$$

et

$$f_k^\delta = \sum_{n=1}^{100} (\hat{c}_{1,n} + \hat{c}_{2,n}) \sin(nx),$$

où

$$\hat{c}_{1,n} = \left(1 - \frac{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})}{n^2}\right)^k \int_0^\pi f_0 \sin(nx) dx,$$

$$\hat{c}_{2,n} = \left(1 - \omega_2 \left(1 - \frac{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})}{n^2}\right)\right)^k \frac{n^2}{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2}\sqrt{2})} \int_0^\pi \eta_f^\delta \sin(nx) dx.$$

Pour simplifier les calculs, on prend  $g_0 = 0$  et  $f_0 = 0$ , les valeurs des paramètres de relaxation sont choisis par des tests pour synchroniser les meilleures itérations<sup>2</sup>. On calcule les itérations pour  $k = \overline{1,300}$  et on prend l'itération avec l'erreur minimale.

Le tableau suivant donne les valeurs de  $\omega_1, \omega_2$ , et l'erreur relative pour les meilleures itérations avec deux niveaux du bruit 10% et 25%.

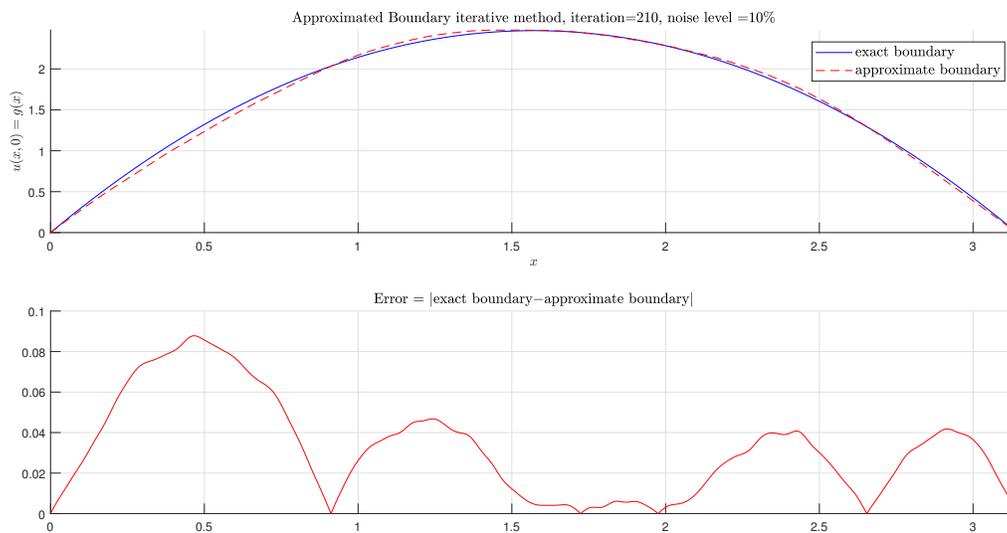
2. La meilleure itération c'est l'itération avec l'erreur minimale

Reconstruction de :	Condition au bord.		Terme source.	
Niveau du bruit	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$
Paramètre de relaxation	$\omega_1 = 1$	$\omega_1 = 1$	$\omega_2 = 0.309$	$\omega_2 = 0.75$
Itération	$k = 210$	$k = 60$	$k = 210$	$k = 60$
Erreur relative	0.022168221511525	0.033963063821482	0.033028140869578	0.046019804000306

TABLE 3.1 – Résultats numériques pour la méthode itérative.

Les images suivantes visualisent les solutions approchées, les courbes des filtres spectrale, les courbes de convergence pour les deux niveaux du bruit 10% et 25%.

**Résultats pour un bruit du niveau 10%.**

FIGURE 3.11 –  $g_k^\delta$ , itération  $k = 210$  niveau du bruit = 10%.

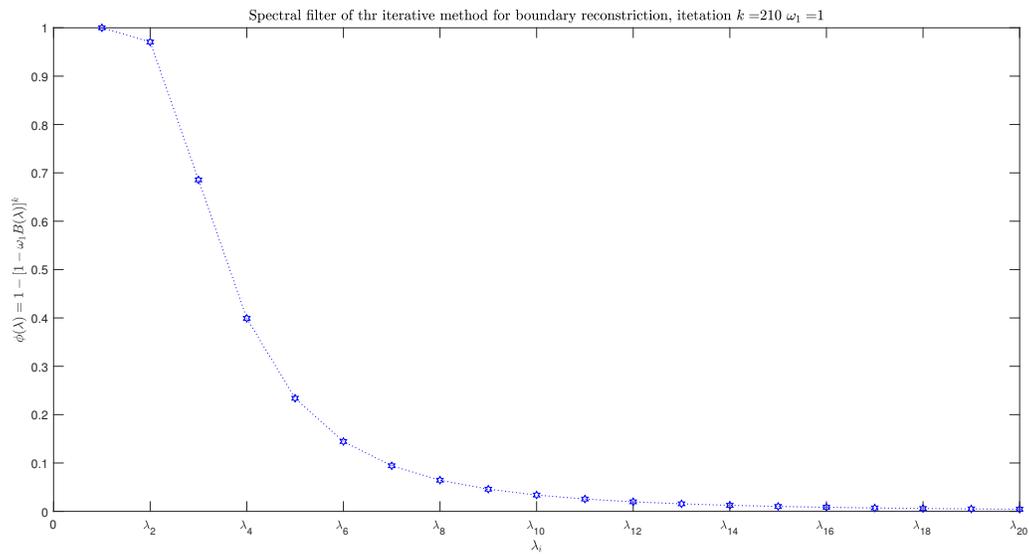


FIGURE 3.12 – Courbe de filtre spectral pour la condition au bord, niveau du bruit = 10%.

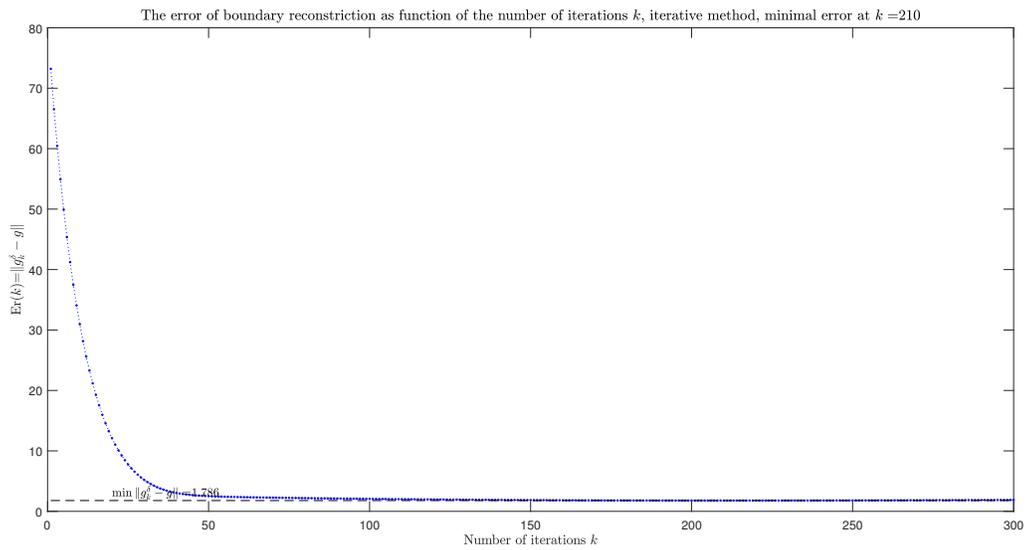


FIGURE 3.13 – Courbe de la convergence  $Er_g(k) = \|g_k^\delta - g\|$ , niveau du bruit = 10%.

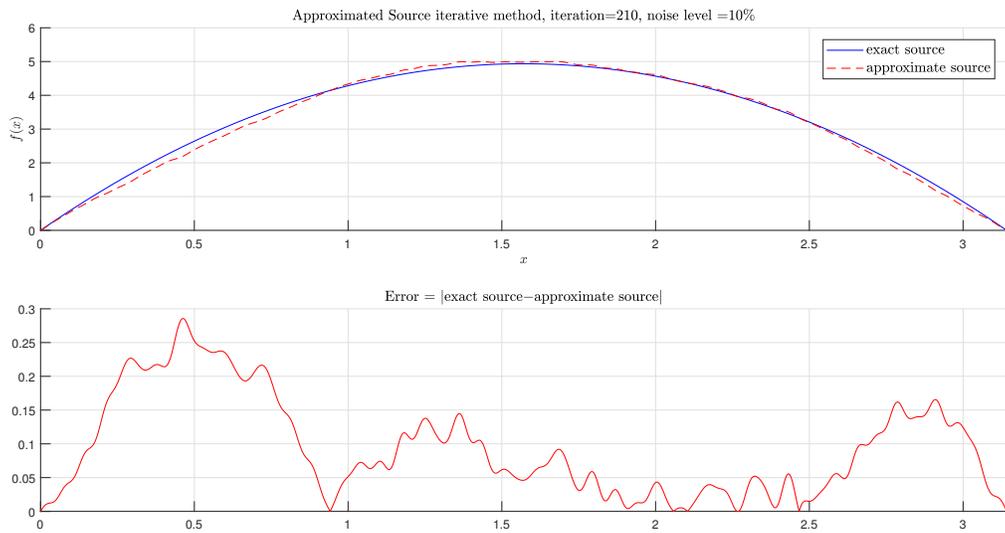


FIGURE 3.14 –  $f_k^\delta$ , itération  $k = 210$  niveau du bruit = 10%.

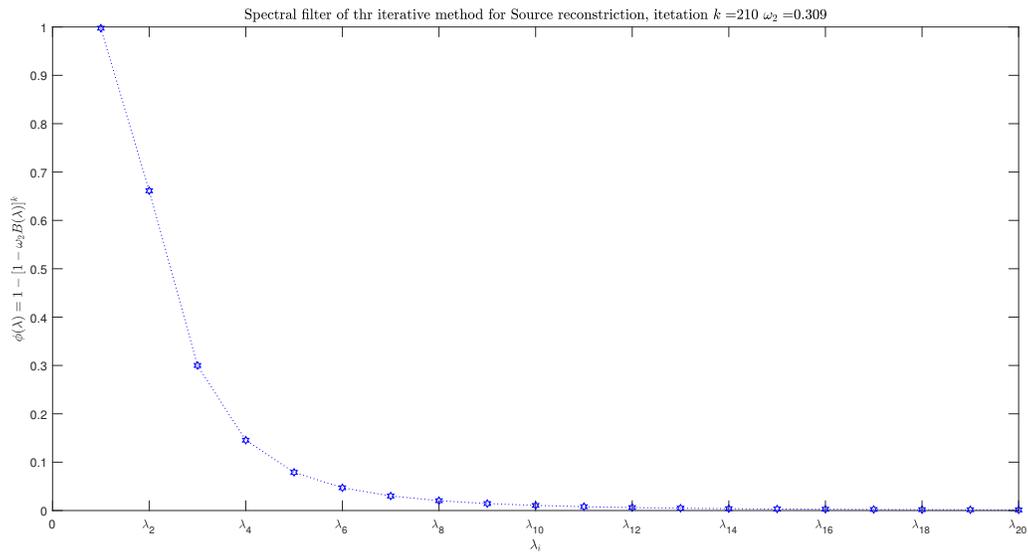


FIGURE 3.15 – Courbe de filtre spectral pour la source, niveau du bruit = 10%.

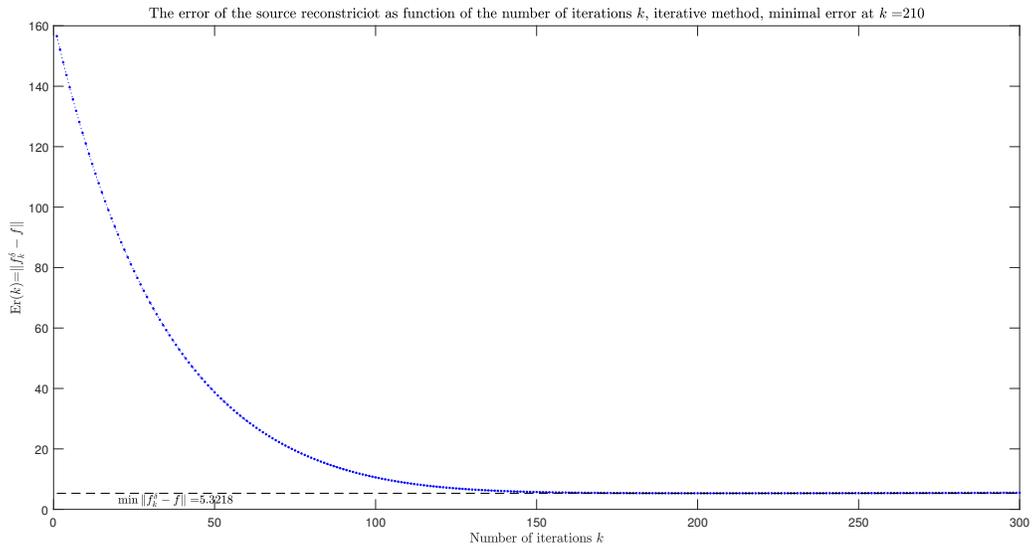


FIGURE 3.16 – Courbe de la convergence  $Er_f(k) = \|f_k^\delta - f\|$ , niveau du bruit = 10%.

Résultats pour un bruit de niveau 25%.

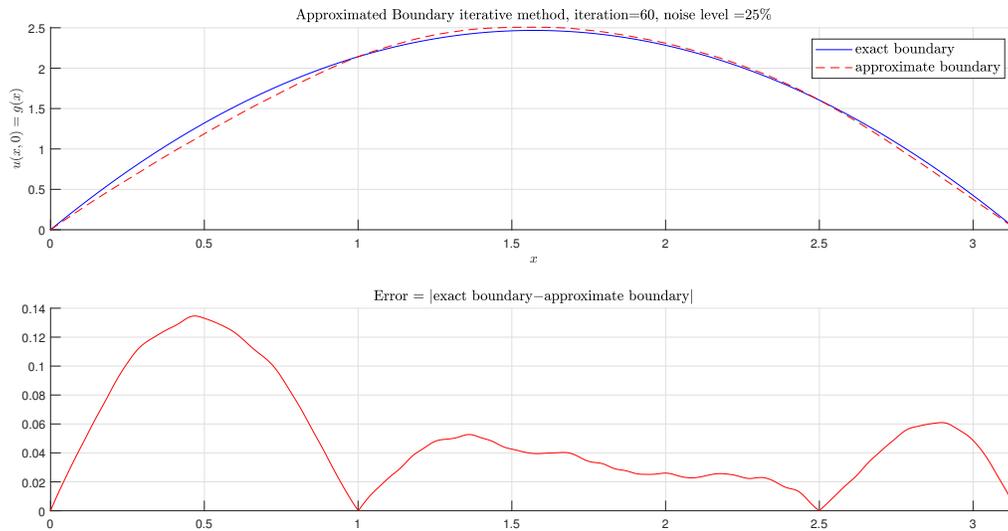


FIGURE 3.17 –  $g_k^\delta$ , itération  $k = 60$  niveau du bruit = 25%.

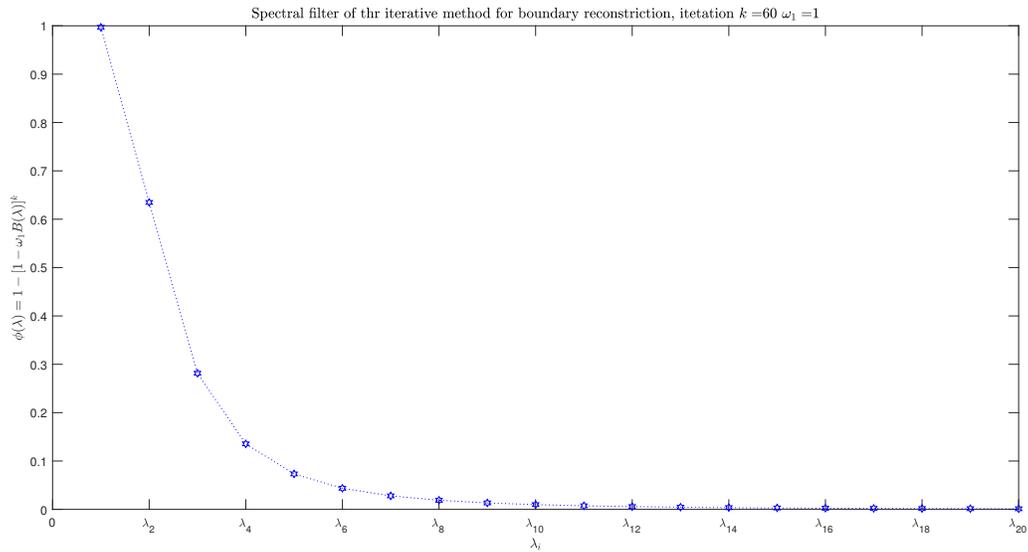


FIGURE 3.18 – Courbe de filtre spectral pour la condition au bord, niveau du bruit = 25%.

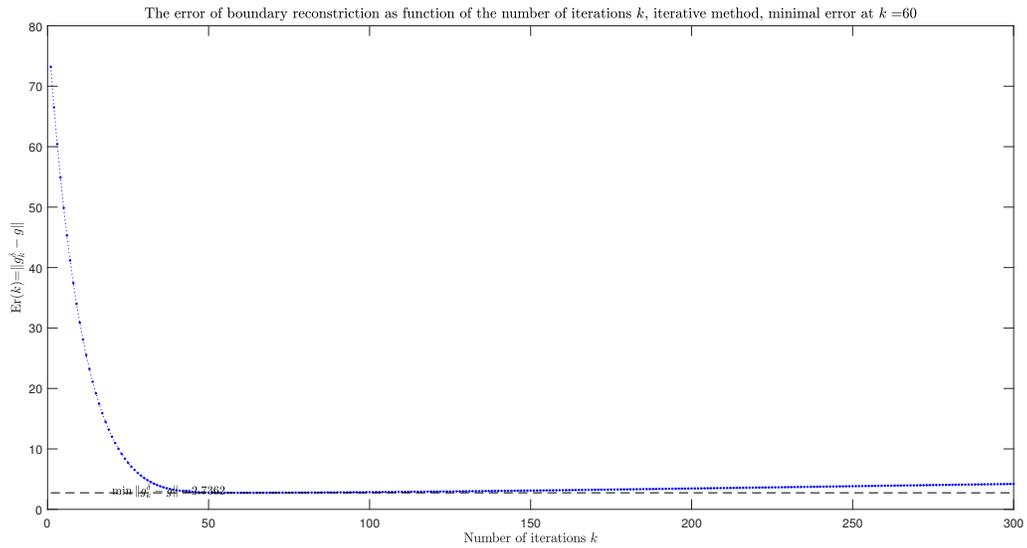


FIGURE 3.19 – Courbe de la convergence  $Er_g(k) = \|g_k^\delta - g\|$ , niveau du bruit = 25%.

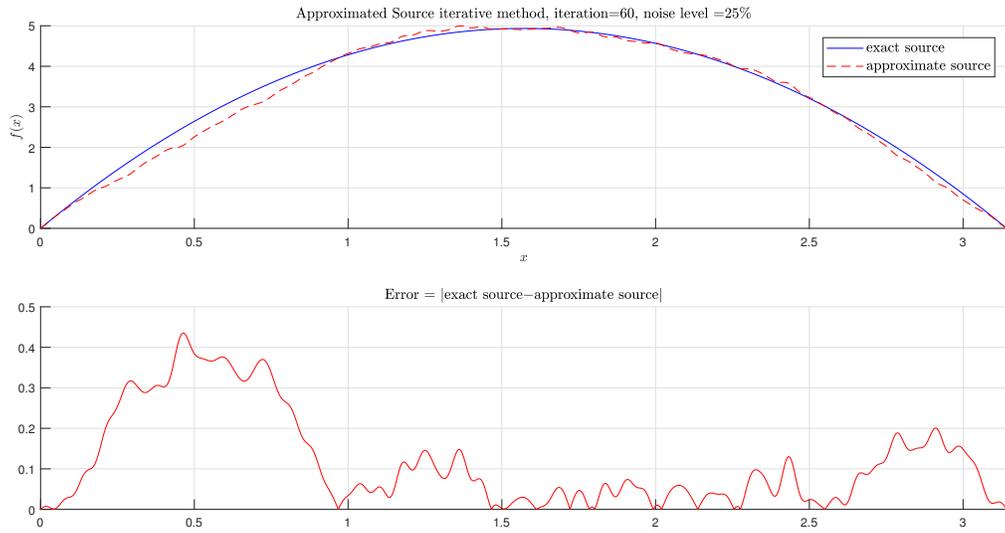


FIGURE 3.20 –  $f_k^\delta$ , itération  $k = 60$  niveau du bruit = 25%.

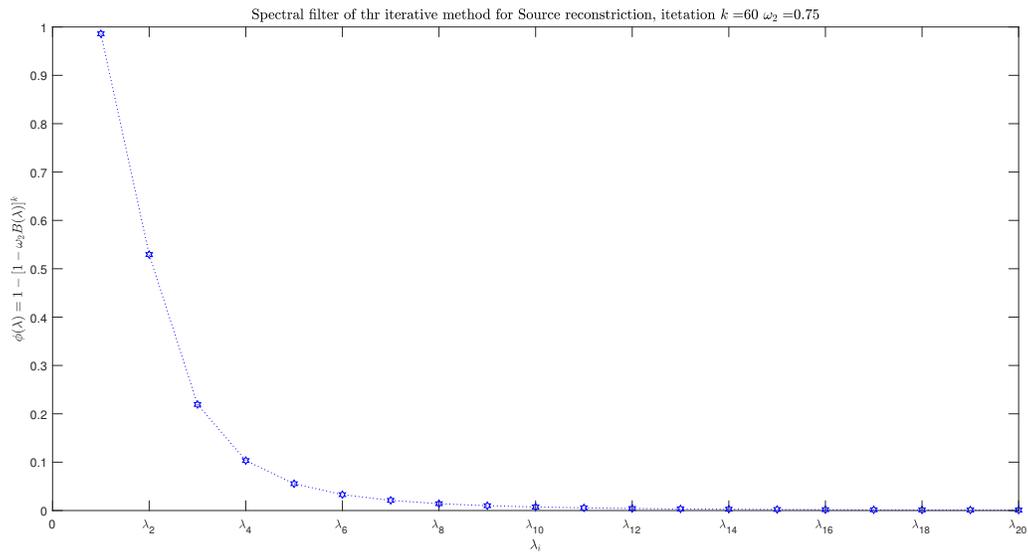


FIGURE 3.21 – Courbe de filtre spectral pour la source, niveau du bruit = 25%.

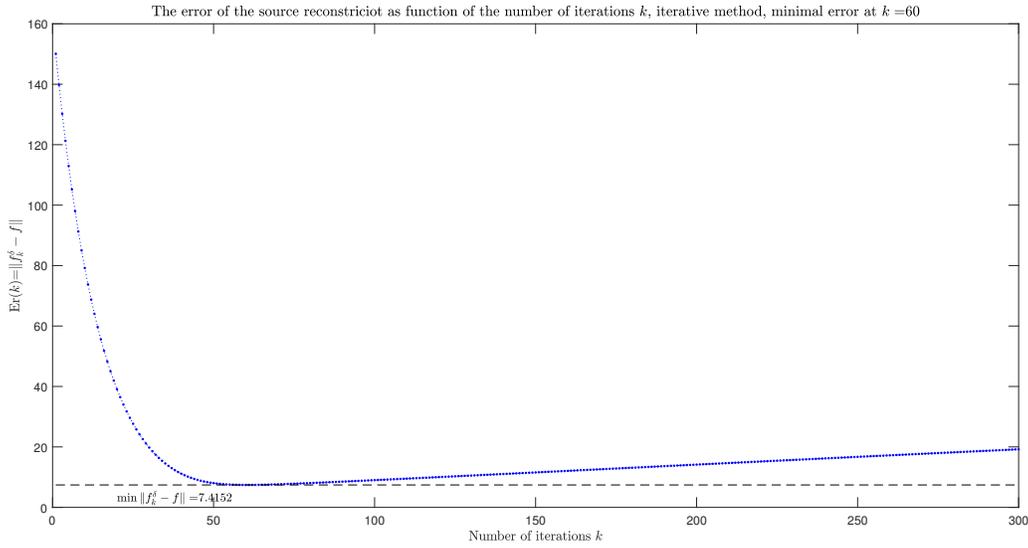


FIGURE 3.22 – Courbe de la convergence  $Er_f(k) = \|f_k^\delta - f\|$ , niveau du bruit = 25%.

**Exemple 3.5.2.** On considère le problème inverse tridimensionnel suivant (pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_z^\alpha D_z^\alpha u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, z) = f(x, y), \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), z \in (0, +\infty), \\ u(x, y, z) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, z \in (0, +\infty), \\ u(x, y, 0) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \|u(x, y, z)\| < +\infty, \quad (x, y) \in \Omega, z \in (0, +\infty), \end{array} \right. \quad (3.5.2)$$

où  $\omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$  et  $f(x, y)$  est le terme source inconnu et  $g(x, y)$  est la condition au bord inconnue.

On sait que

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset H = L^2(\Omega).$$

est un opérateur auto-adjoint, positif et à résolvante compacte ( $A$  est diagonalisable). Ces couples propres  $(\lambda_{n,m}, \phi_{n,m})$  sont donnés par

$$\lambda_{n,m} = n^2 + m^2, \phi_{n,m}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin(nx) \sin(my), n, m \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce qui suit, on prend  $g(x, y) = (\pi - x)x(\pi - y)y$  et  $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ .

Maintenant on commence par la construction des conditions supplémentaires :

$$\psi_1 = u(x, y, 1) = \sum_{n=1}^{20} \sum_{m=1}^{20} \left( E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1})g_{n,m}\phi_{n,m}(x, y) - \frac{1 - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1})}{(n^2 + m^2)}f_{n,m}\phi_{n,m}(x, y) \right)$$

et

$$\psi_2 = u(x, y, 1.5) = \sum_{n=1}^{20} \sum_{m=1}^{20} \left( E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1.5})g_{n,m}\phi_{n,m}(x, y) - \frac{1 - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1.5})}{(n^2 + m^2)}f_{n,m}\phi_{n,m}(x, y) \right),$$

$$\text{où } g_{n,m} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} g(x, y) \sin(nx) \sin(my) dx dy \text{ et } f_{n,m} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin(nx) \sin(my) dx dy.$$

On calcule les intégrales par la méthode des trapèzes sur une grille équidistante pour  $x$  et  $y$  :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M=499} = \pi, 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{M=499} = \pi, h = \frac{\pi}{499}.$$

Les figures suivantes visualisent le maillage  $g(x_i, y_j)$  et le maillage  $f(x_i, y_j)$  en 250000 points.

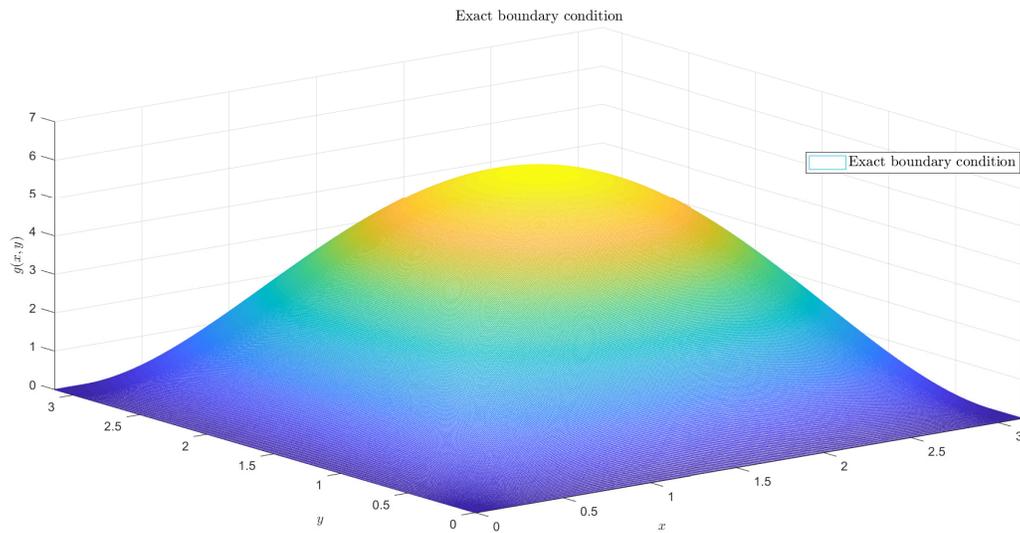


FIGURE 3.23 – Condition au bord exacte  $g(x, y) = (\pi - x)x(\pi - y)y$ .

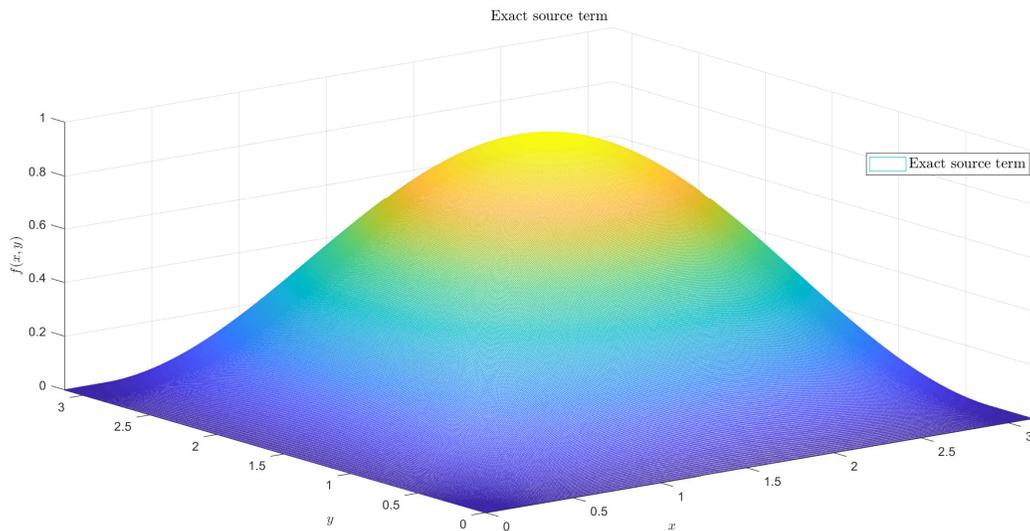
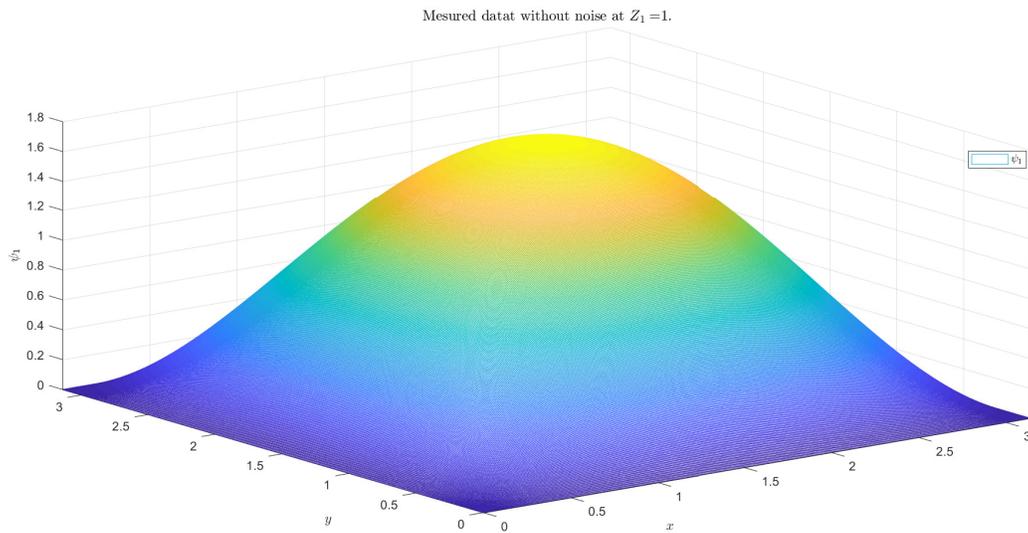
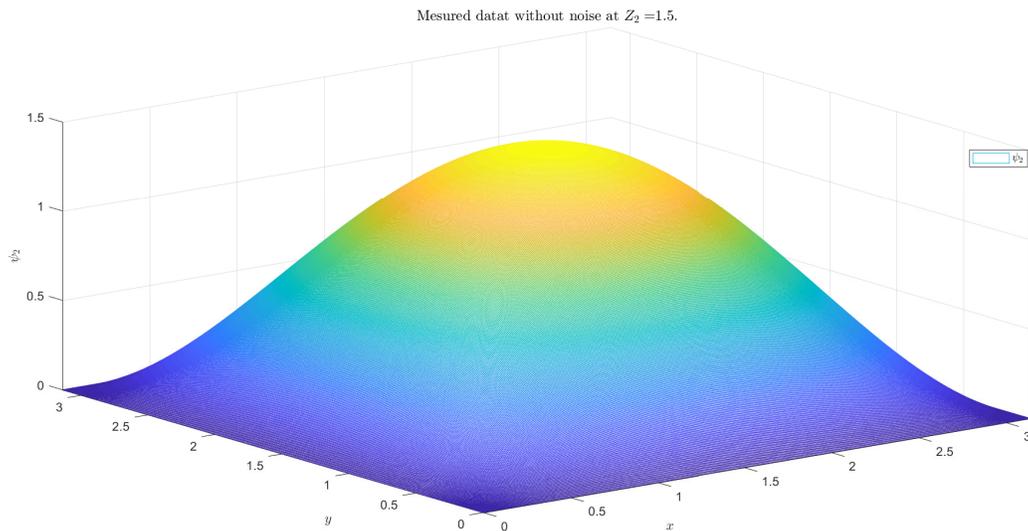
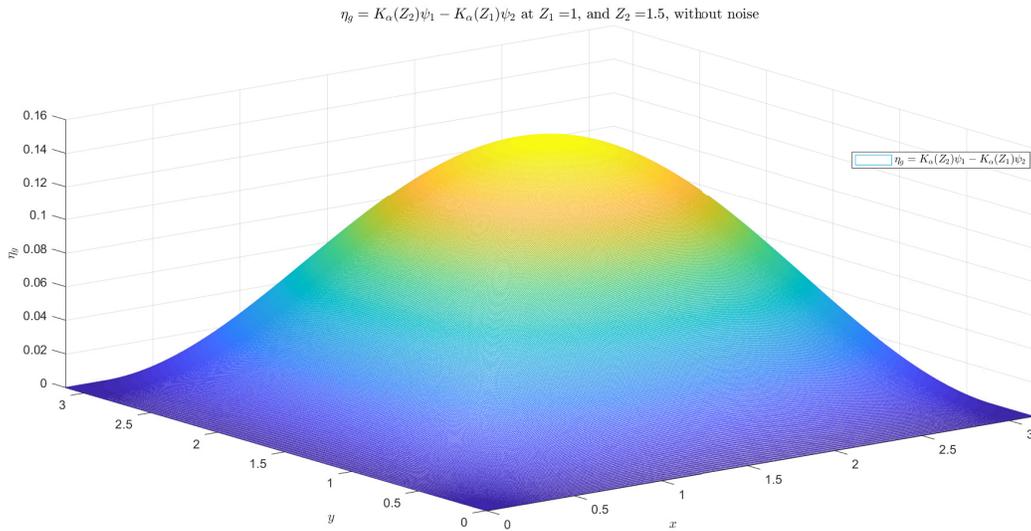
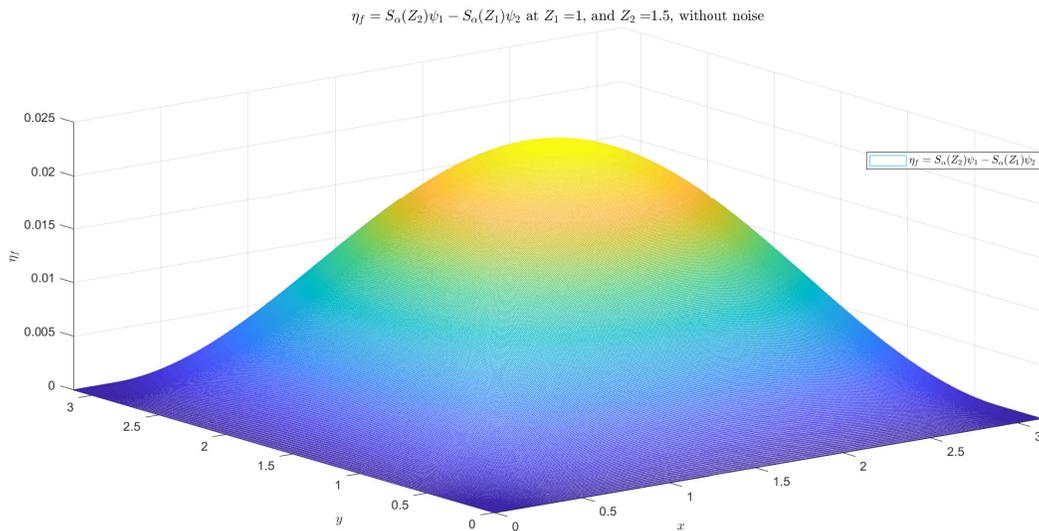


FIGURE 3.24 – Source exacte  $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ .

Les figures suivantes visualisent le maillage  $\psi_1$  et le maillage  $\psi_2$ , considérées comme données exacte en 250000 points.

FIGURE 3.25 – Donnée exacte  $\psi_1$  à  $Z_1 = 1$ .FIGURE 3.26 – Donnée exacte  $\psi_2$  à  $Z_2 = 1.5$ .

Maintenant, on construit  $\eta_g$  et  $\eta_f$  de la même façon dans la construction de  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . Les figures suivantes visualisent le maillage de  $\eta_g$  et  $\eta_f$ .

FIGURE 3.27 – Donnée exacte  $\eta_g = K_\alpha(Z_2)\psi_1 - K_\alpha(Z_1)\psi_2$ .FIGURE 3.28 – Donnée exacte  $\eta_f = S_\alpha(Z_2)\psi_1 - S_\alpha(Z_1)\psi_2$ .

Dans les figures suivantes, on montre les données perturbées pour trois niveaux du bruit<sup>3</sup>, pour plusieurs niveaux du bruit.

3. Les  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont perturbées de la même manière que dans les exemples précédents.

Données bruitées  $\psi_1^\delta$  et  $\psi_2^\delta$ , niveau du bruit 1%.

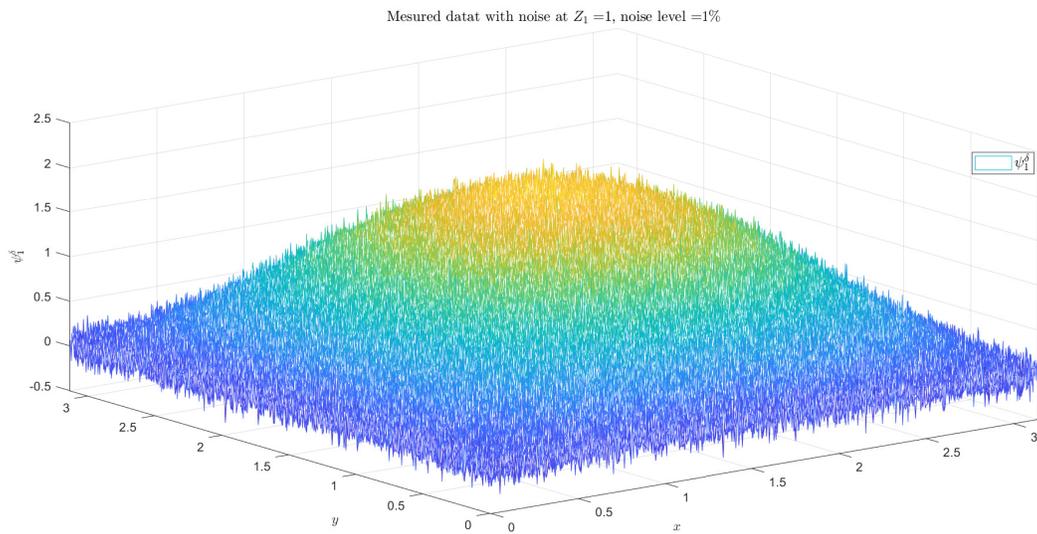


FIGURE 3.29 – Donnée bruitée  $\psi_1^\delta$  niveau du bruit = 1%.

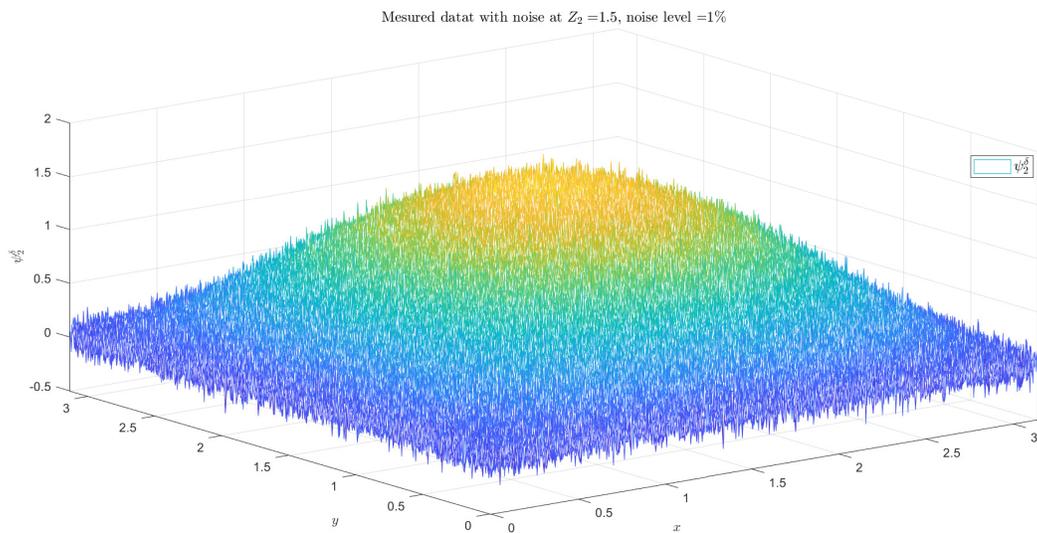
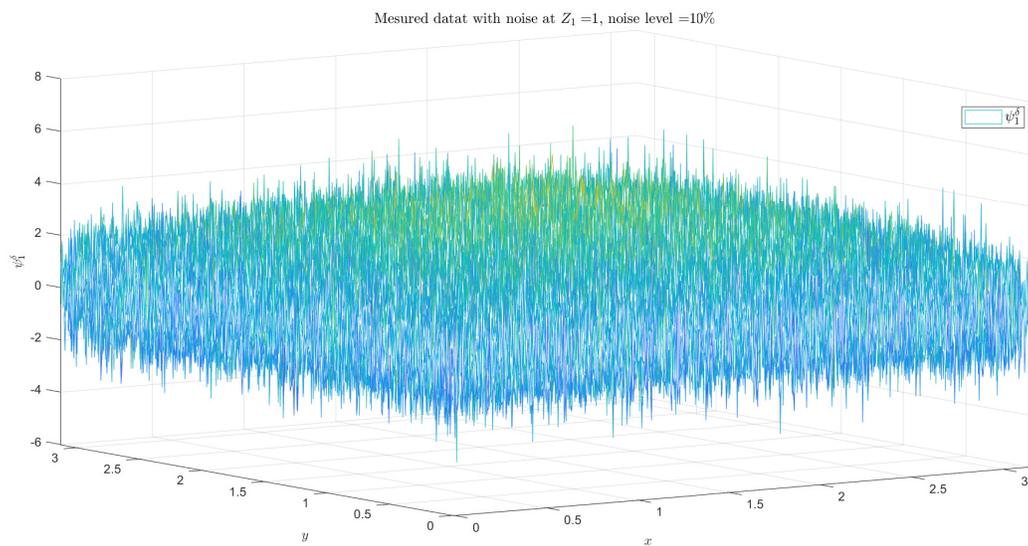
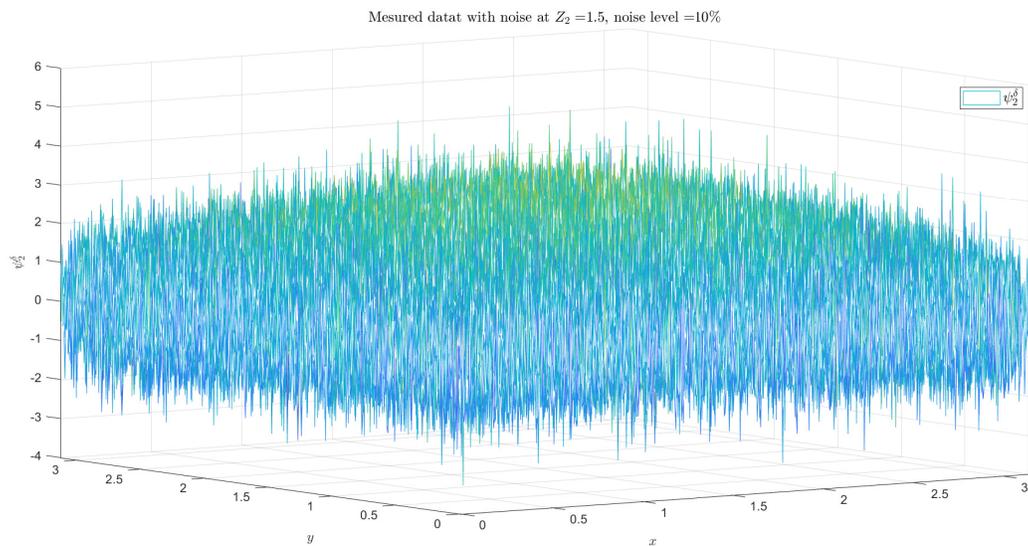
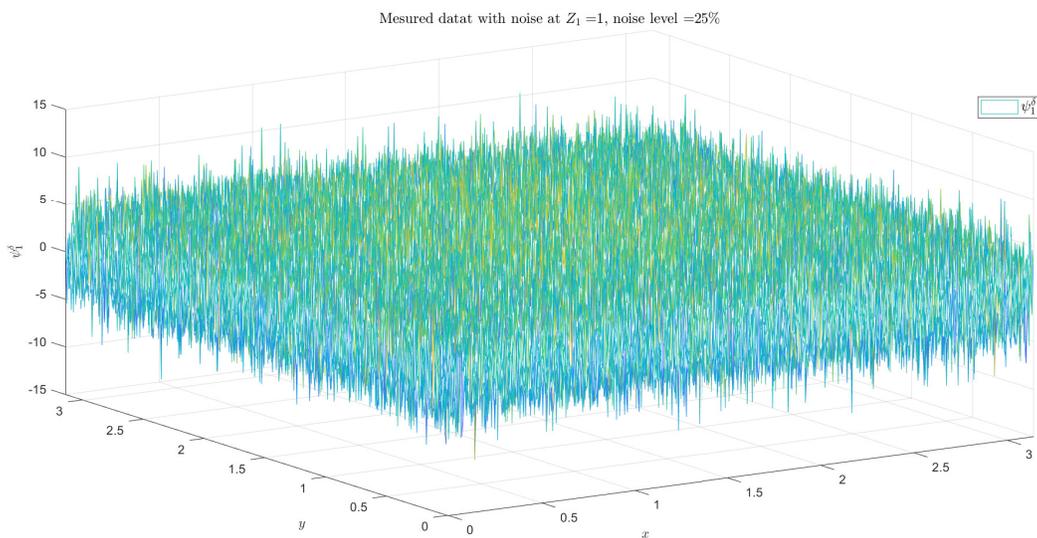
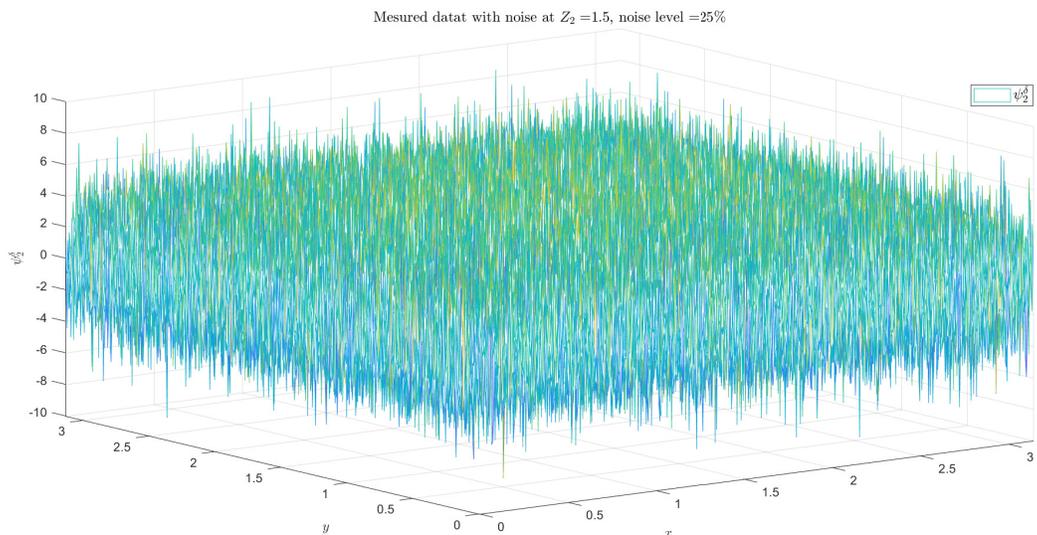


FIGURE 3.30 – Donnée bruitée  $\psi_2^\delta$  niveau du bruit = 1%.

**Données bruitées  $\psi_1^\delta$  et  $\psi_2^\delta$ , niveau du bruit 10%**FIGURE 3.31 – Donnée bruitée  $\psi_1^\delta$  niveau du bruit = 10%.FIGURE 3.32 – Donnée bruitée  $\psi_2^\delta$  niveau du bruit = 10%.

Données bruitées  $\psi_1^\delta$  et  $\psi_2^\delta$ , niveau du bruit 25%FIGURE 3.33 – Donnée bruitée  $\psi_1^\delta$  niveau du bruit = 25%.FIGURE 3.34 – Donnée bruitée  $\psi_2^\delta$  niveau du bruit = 25%.

**Reconstruction itérative.** Pour simplifier les calculs, on prend  $g_0 = 0$  et  $f_0 = 0$ , les solutions du problème ((3.1.5)- (3.1.2)) par la procédure itérative prennent la forme suivante :

$$g_k^\delta = \sum_{n=1}^{20} \sum_{m=1}^{20} \left(1 - (1 - \omega_1 \frac{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1})} - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1.5}))^k\right) \frac{n^2 + m^2}{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1.5})} \eta_{g,n,m} \phi_{n,m}$$

$$f_k^\delta = \sum_{n=1}^{20} \sum_{m=1}^{20} \left(1 - (1 - \omega_2 \frac{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1})} - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1.5}))^k\right) \frac{n^2 + m^2}{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{1}) - E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{n^2 + m^2}\sqrt{2})} \eta_{f,n,m} \phi_{n,m}$$

Dans ce test on adopte un choix heuristique du paramètre de régularisation  $k$ , les résultats obtenus (les erreurs relatives) sont données dans le tableau suivant :

Reconstruction de :	Condition au bord.			Terme source.		
	$\delta = 1\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$	$\delta = 1\%$	$\delta = 10\%$	$\delta = 25\%$
Niveau du bruit	$\omega_1 = 1$	$\omega_1 = 1$	$\omega_1 = 1$	$\omega_2 = 1$	$\omega_2 = 1$	$\omega_2 = 1$
Paramètre de relaxation	$k = 300$	$k = 200$	$k = 150$	$k = 300$	$k = 200$	$k = 150$
Erreur relative	0.017956971960396	0.027304933634501	0.041549893695591	0.001009021830722	0.005121828038576	0.020062989115554

TABLE 3.2 – Résultats numériques pour la méthode itérative 2-ième exemple.

Les figures suivantes visualisent les solutions  $g_k^\delta$  et  $f_k^\delta$  et les erreurs en valeur absolue  $|g - g_k^\delta|$  et  $|f - f_k^\delta|$  pour les trois niveaux du bruit.

Résultats pour le niveau du bruit 1%

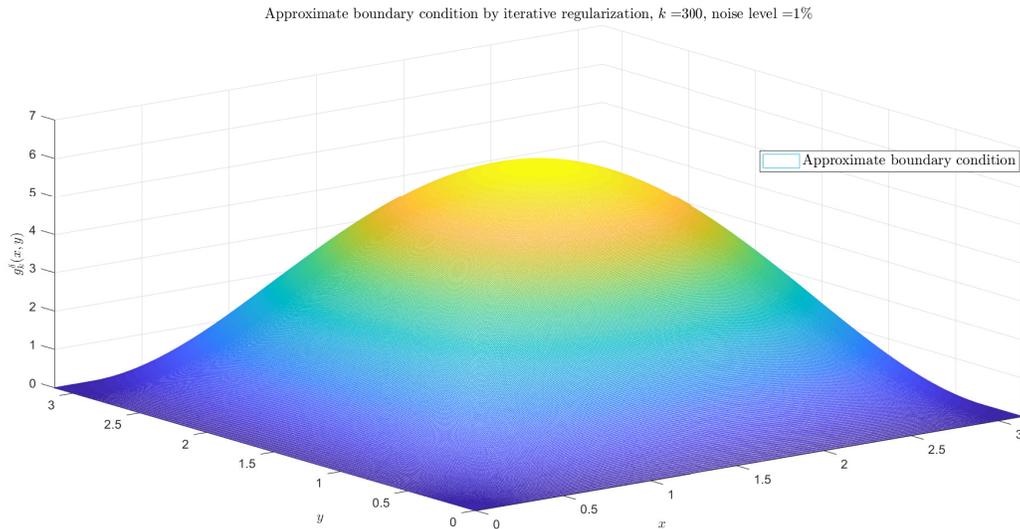
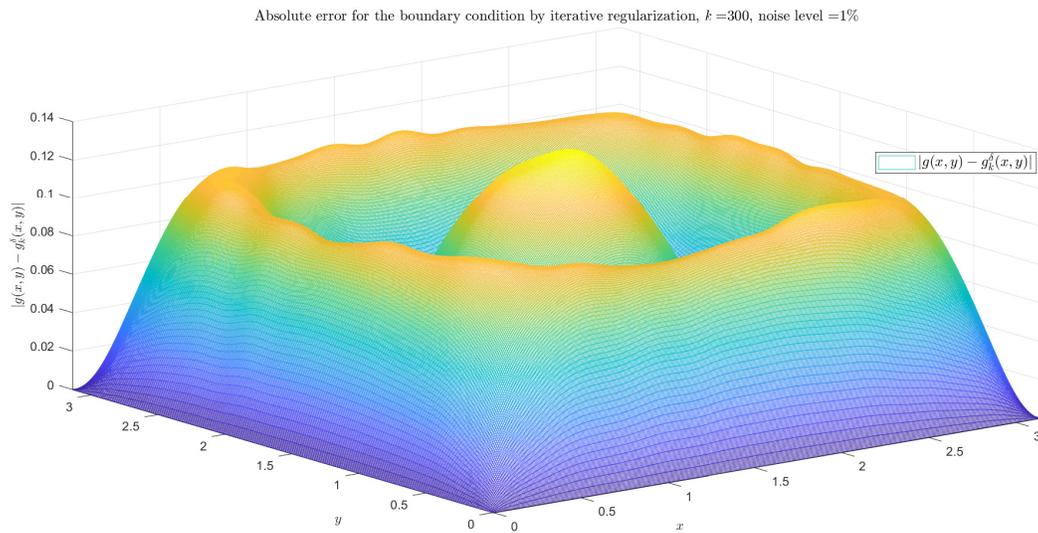
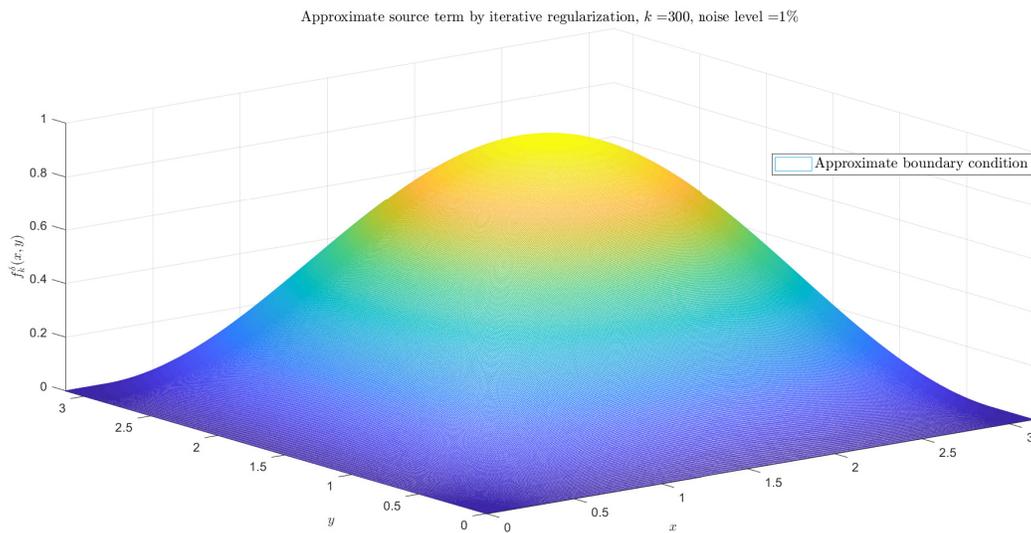


FIGURE 3.35 –  $g_k^\delta$ , itération  $k = 300$ , niveau du bruit = 1%.

FIGURE 3.36 –  $|g_k^\delta - g|$ , itération  $k = 300$ , niveau du bruit = 1%.FIGURE 3.37 –  $f_k^\delta$ , itération  $k = 300$ , niveau du bruit = 1%.

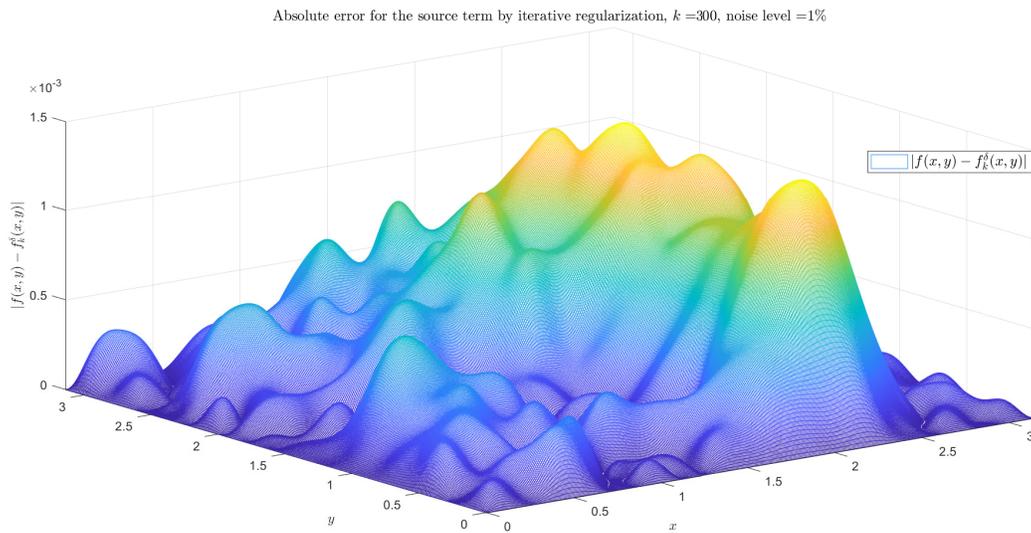


FIGURE 3.38 –  $|f_k^\delta - f|$ , itération  $k = 300$ , niveau du bruit = 1%.

Résultats pour le niveau du bruit 10%

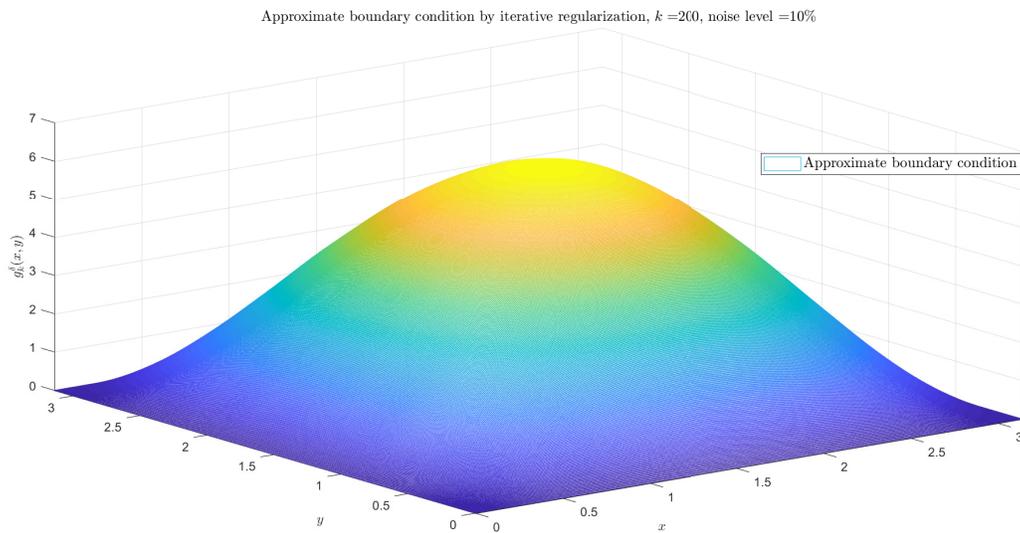


FIGURE 3.39 –  $g_k^\delta$ , itération  $k = 200$ , niveau du bruit = 10%.

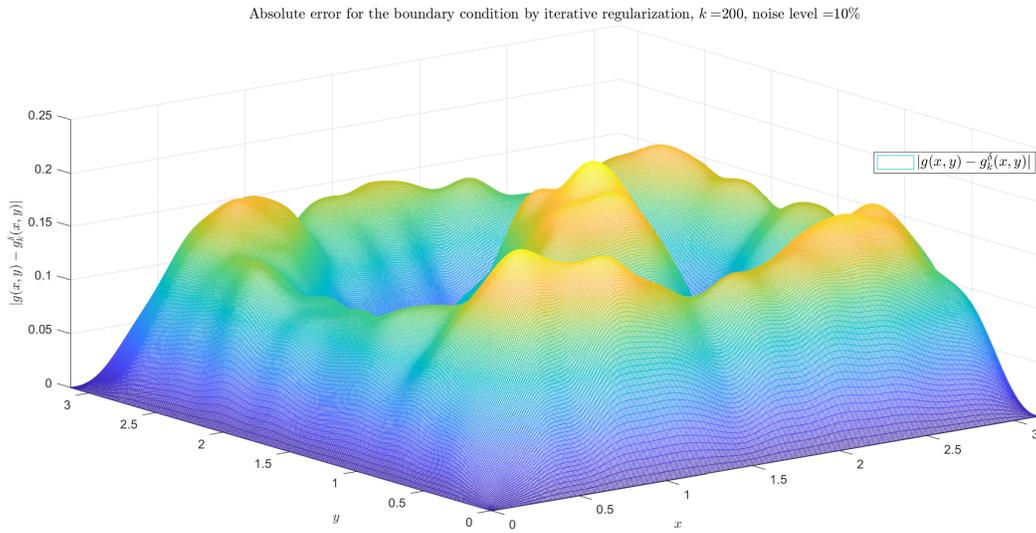


FIGURE 3.40 –  $|g_k^\delta - g|$ , itération  $k = 200$ , niveau du bruit = 10%.

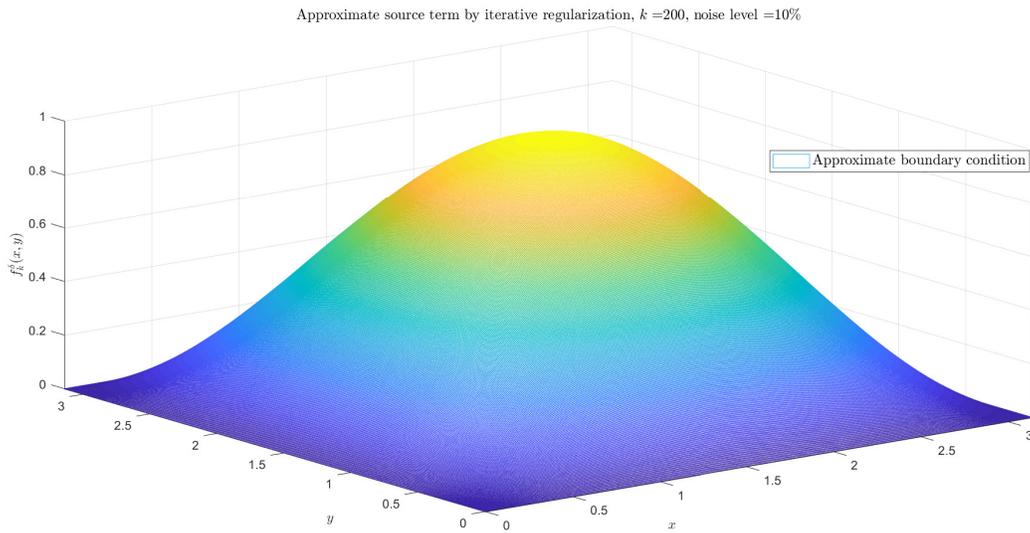


FIGURE 3.41 –  $f_k^\delta$ , itération  $k = 200$ , niveau du bruit = 10%.

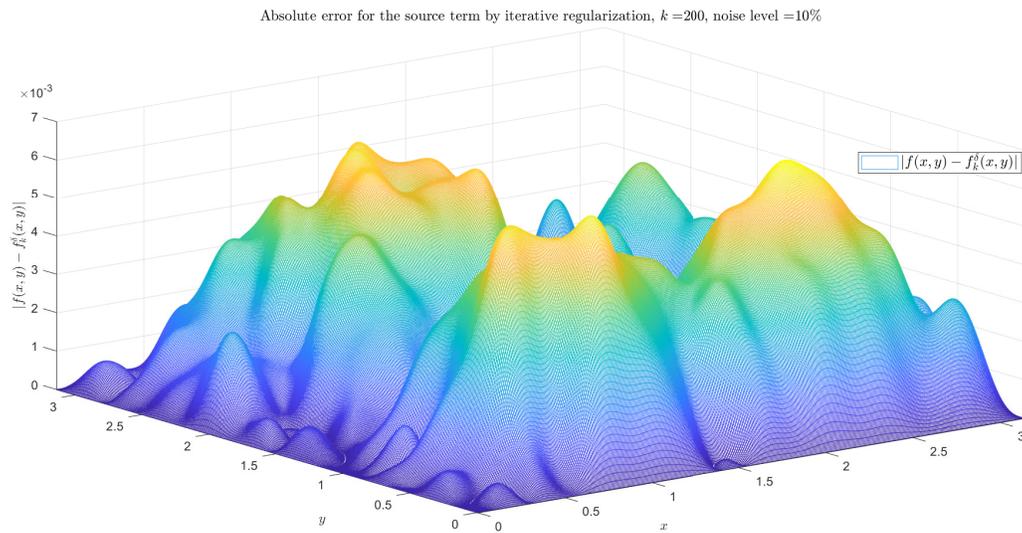


FIGURE 3.42 –  $|f_k^\delta - f|$ , itération  $k = 200$ , niveau du bruit = 10%.

Résultats pour le niveau du bruit 25%

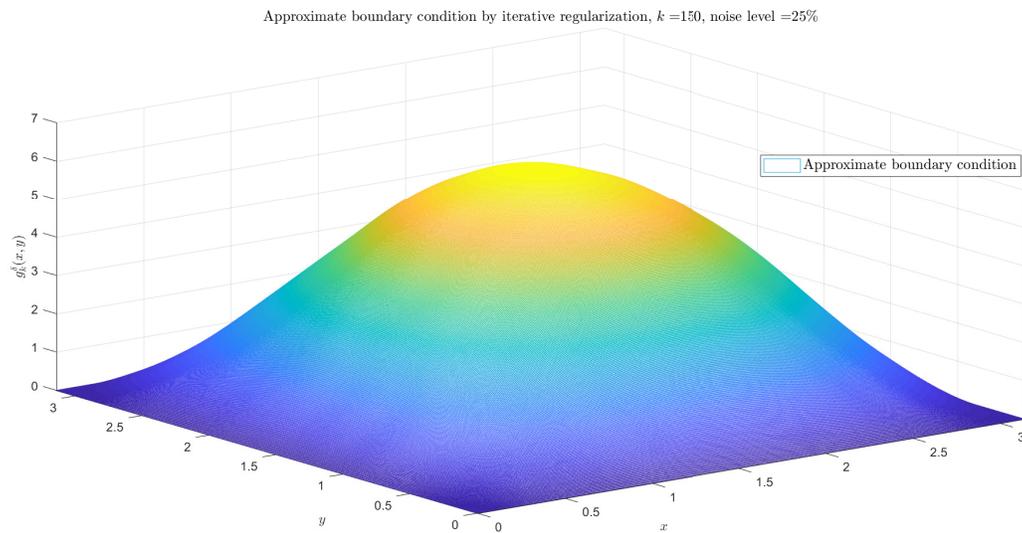


FIGURE 3.43 –  $g_k^\delta$ , itération  $k = 150$ , niveau du bruit = 25%.

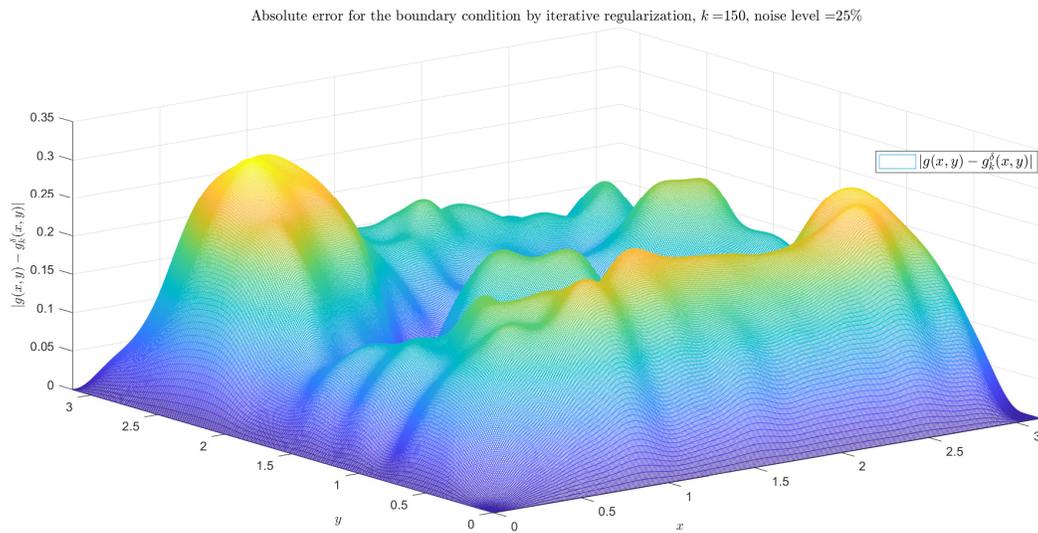


FIGURE 3.44 –  $|g_k^\delta - g|$ , itération  $k = 150$ , niveau du bruit = 25%.

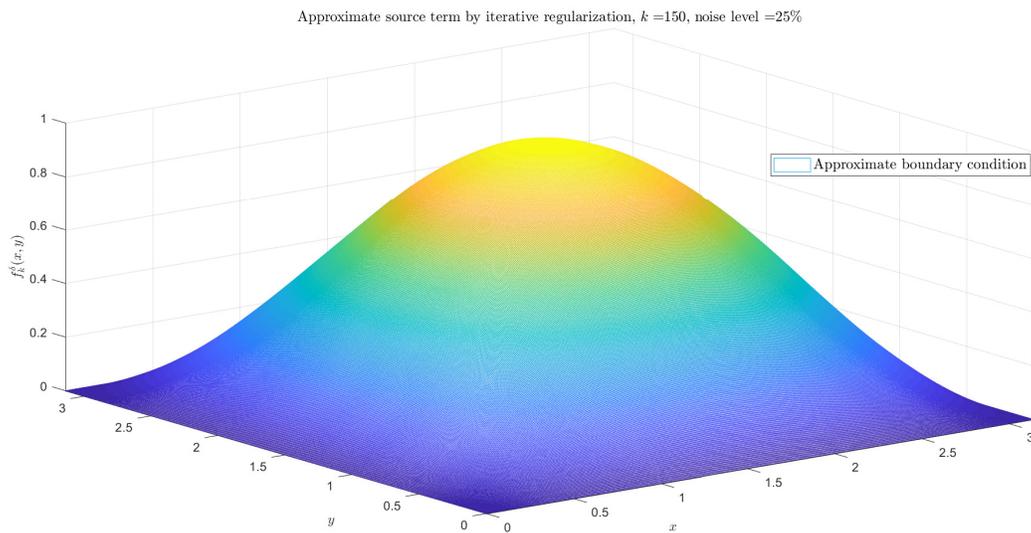


FIGURE 3.45 –  $f_k^\delta$ , itération  $k = 150$ , niveau du bruit = 25%.

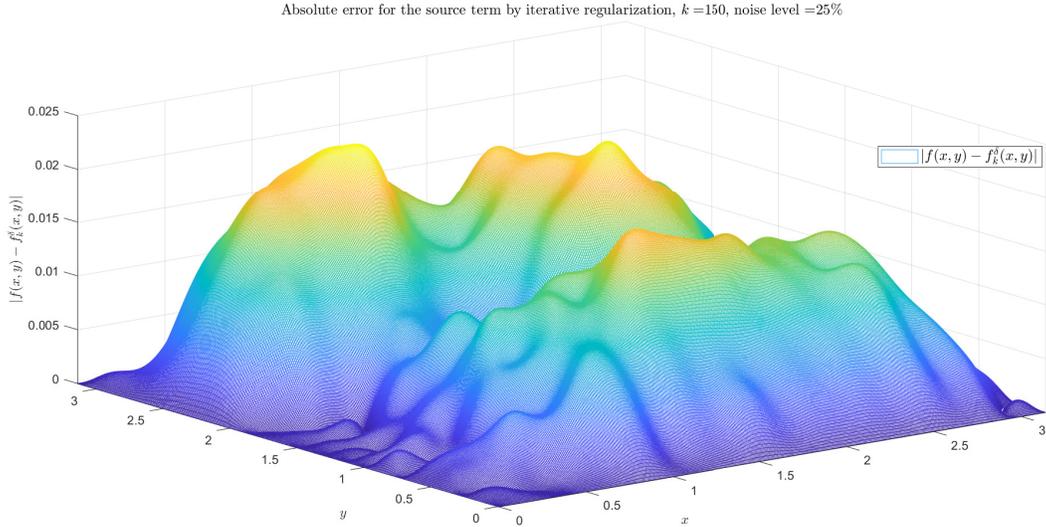


FIGURE 3.46 -  $|f_k^\delta - f|$ , itération  $k = 150$ , niveau du bruit = 25%.

---

## Conclusion et perspectives

*Je pense et je réfléchis pendant des mois et des années. Quatre-vingt-dix-neuf fois, la conclusion est fausse. La centième fois, j'ai raison.*  
- Albert Einstein

Dans ce travail, on a étudié deux variantes de méthodes de régularisation itératives appliquées à deux problèmes inverses. On a montré clairement que ces méthodes donnent des résultats satisfaisants si elles sont préconditionnées. Dans le cas standard, elles peuvent produire des résultats limités pour des données faiblement bruitées. Si le bruit est fort, une étape d'analyse spectrale est nécessaire pour bien comprendre le comportement après l'infection pour proposer le bon remède.

L'application de la méthode de projection de Krylov pour le problème inverse de Goursat est nouvelle et très intéressante et elle a montré que cette technique est fiable. Elle donne des résultats très acceptables, lorsqu'on n'a pas le choix sauf de passer par une réduction de la taille de la matrice de l'opérateur discret.

Le choix d'une base de Krylov rationnelle est un préconditionnement implicite qui a un effet de filtrage sur les données bruitées, *i.e.*, lorsqu'on emploie cette démarche en réalité on exécute deux opérations simultanément : le filtrage et la régularisation.

Dans cette thèse on a proposé aussi des critères d'arrêt basés sur une stratégie de choix a posteriori et a priori, et les résultats numériques obtenus confirment l'analyse théorique développée sous des hypothèses larges et simplement vérifiables.

Comme perspectives, on projette de compléter l'analyse a posteriori du problème elliptique généralisé avec deux inconnus : la source et la condition au bord.

On souhaite aussi d'étendre la méthode de Krylov pour des problèmes posés sur des domaines en dimension 3-D où la technique de discrétisation se base sur les éléments finis.

---

La méthode de Krylov par bloc récemment développée nous encourage aussi d'employer cette nouvelle idée pour étudier des problèmes inverses avec deux inconnus.

---

## Bibliographie

- [1] S. Andrieux, T.N. Baranger, A. Ben Abda, *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*. Inverse Problems **22** (2006), 115-33.
  - [2] E.M. Aksen, *The quasi-inversion method for some hyperbolic equations*, Differ. Uravn., Volume 27, Number 6 (1991), 1089–1092.
  - [3] W.E. Arnoldi, *The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem*. Quart. Appl. Math., 9 (1951), 17–29.
  - [4] J.C. Baez, I.E. Segal, Z.-T. Zhou, *The global Goursat problem and scattering for nonlinear wave equations*, J. Funct. Anal., (1990) **93**, 239-269.
  - [5] Z. Bai, J. Demmel, Dongarra J, A. Ruhe and H .van der Vorst, *Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems : A Practical Guide* (Philadelphia : SIAM), (ed) (2000)
  - [6] V.S. Barashenkov, *Mechanics in Six-dimensional spacetime*, Foundations of Physics, (1998) **28**, no 3, 47-484.
  - [7] V.S. Barashenkov, *Propagation of signals in space with multi-dimensional time*, JINR., (1996) E2, 96-112.
  - [8] G. Bastay, *Iterative Methods for Ill-posed Boundary Value Problems*, Linkoping Studies in Science and Technology, Dissertations, **392**, Linkoping Univ., Linkoping (1995).
  - [9] F.Bauer, MA. Lukas, *Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problems*, Mathematics and Computers in Simulation (2011), 81 : 1795–1841.
  - [10] E.S.V. Bazán, A. Kleefeld, K.H. Leem and G. Pelekanos, *Sampling method based projection approach for the reconstruction of 3D acoustically penetrable scatterers*, Linear Algebr. Appl. (2016), **495** 289–323.
-

- [11] A. Bjorck, *A bidiagonalization algorithm for solving large and sparse ill-posed systems of linear equations*, BIT **28** (1988), 659–670.
- [12] A. Bjorck, E. Grimme, P. Van Dooren, *An implicit shift bidiagonalization algorithm for ill-posed systems*, BIT (1994), **34**, 510–534.
- [13] B. Beckermann, L. Reichel, *Error estimation and evaluation of matrix functions via the Faber transform*, SIAM J. Numer. Anal. (2009), **47**, 3849–3883.
- [14] L.S. Borges, F.S.V. Bazán, M.C. Cunha, *Automatic stopping rule for iterative methods in discrete ill-posed problems*, Comput. Appl. Math. (2015,) **34** (3), 1175–1197.
- [15] N. Boussetila, F. Rebbani, *The modified quasi-reversibility method for ill-posed evolution problems with two-dimensional time*, Analytic methods of analysis and differential equations, 15–23, Camb. Sci. Publ., Cambridge, 978-1-904868-41-X Edits. 2006.
- [16] N. Boussetila, *Etude de problèmes non-locaux et régularisation de problèmes mal-posés en EDP*, PHD Thesis, U. BM Annaba (2006).
- [17] A. Bouzitouna, N. Boussetila, F. Rebbani, *Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type*, Boundary Value Problems volume (2013) : 178.
- [18] A. Bouzitouna, *Sur Quelques Méthodes Itératives Appliquées à Certains Problèmes Inverses*, PHD Thesis, U.BM Annaba (2014).
- [19] P. Brianzi, P. Favati, O. Menchi and F. Romani *A framework for studying the regularizing properties of Krylov subspace methods*, Inverse Problems. (2006), **22** 1007–21.
- [20] C. Brezinski, M. Redivo-Zaglia, P. Novati, *A rational Arnoldi approach for ill-conditioned linear systems*, J. Comput. Appl. Math. (2012), **236** 2063–2077.
- [21] A. Bouzitouna, *Sur Quelques Méthodes Itératives Appliquées à Certains Problèmes Inverses*, Thèse de Doctora, U.BM-Annaba (2014).
- [22] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2011).
- [23] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris (1983).
- [24] D. Calvetti, B. Lewis, and L. Reichel, *GMRES-type methods for inconsistent systems*, Lin. Alg. Appl, (2000), **316** pp. 157-169.

- [25] D. Calvetti and L. Reichel, *Lanczos-based exponential filtering for discrete ill-posed problems*, Numer. Algorithms, (2002), **29**, pp. 45–65.
- [26] J. Chung, J. G. Nagy, and D.P. O’leary, *A weighted-GCV method for Lanczos-hybrid regularization*, Electron. Trans. Numer. Analysis, vol. (2008), **28**, pp. 149–167.
- [27] J. Chung, E. Sturler, J. Jiang, *Hybrid Projection Methods with Recycling for Inverse Problems*, arXiv :2007.00207, (2020).
- [28] B.A. CIPRA, *The best of the 20th century : Editors name top 10 algorithms*, SIAM News, (2000), **33**.
- [29] P.L. Chebyshev, *Sur les fractions continues*, Reprinted in Oeuvres I, 11 (Chelsea, New York, 1962), pp. 203–230.
- [30] O.S. Coulibaly, *Stabilisation et approximation numérique d’une classe de problèmes inverses en EDP*, PHD Thesis, Université de Bamako (2016).
- [31] L.M. Delves, J.L. Mohamed, *Computational Methods for Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, (1985).
- [32] P.A.M. Dirac, *Relativistic Quantum Mechanics*, Proc. R. Soc. A, (1932), **136**, (829) :453-464.
- [33] J. Dongarra and F. Sullivan, *The Top 10 Algorithms* (Guest editors introduction), Comput. Sci. Eng., (2000), **2**, pp. 22–23.
- [34] J.J. Dongarra, I.S. Duff, D.C. Sorensen, and H.A. Van Der Vorst, *Numerical Linear Algebra for High-Performance Computers, Software, Environments, and Tools*, SIAM, Philadelphia, PA, (1998).
- [35] V. Druskin, L.A. Knizhnerman, *Two polynomial methods of calculating functions of symmetric matrices*, USSR Comput. Math. Math. Phys., Pergamon Press, Inc. (1989), Vol. **29** (6), 112-121.
- [36] D.T. Du, F. Jelassi, *A preconditioned Richardson regularization for the data completion problem and the Kozlov-Maz’ya-Fomin method*. ARIMA, (2010), **13**, 17–32.
- [37] H. Egger, *Preconditioning iterative regularization methods in Hilbert scales*, Ph.D. thesis, Johannes Kepler Universität, (2005).
- [38] L. Eldén and V. Simoncini, *A numerical solution of a Cauchy problem for an elliptic equation by Krylov subspaces*, Inverse Problems, (2009), **25**, 065002 (22pp).

- [39] L. Eldén and V. Simoncini, *Solving ill-posed linear systems with GMRES and a singular preconditioner*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., (Jan. 2012), vol. **33**, no. 4, pp. 1369–1394.
- [40] H. Engl, M Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems* (Dordrecht : Kluwer) (1996).
- [41] V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover, New York, (1959).
- [42] X. Feng and L. Eldén. *Solving a cauchy problem for a 3d elliptic PDE with variable coefficients by a quasi-boundary-value method*. Inverse Problems, (2013), **30**(1) :015005.
- [43] M.D. Francesco, A. Pascucci, *A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (2007) Vol. **336**, no.2, 1026-1041.
- [44] A. Friedman, *The Cauchy Problem in Several Time Variables*, Journ. of Math. and Mech., (1962) **11**, 859-889.
- [45] R Frostig, C. Musco, C. Musco, and A. Sidford, *Principal Component Projection Without Principal Component Analysis*. In ICML, (2016).
- [46] A. Galantai, *Projectors and Projection Methods*. Norwell, MA : Kluwer Academic, (2003).
- [47] F.R. GANTMACHER, *On the algebraic analysis of Krylov's method of transforming the secular equation*, Trans. Second Math. Congress, II (1934), pp. 45–48.
- [48] A. Gaul, M. Gutknecht, J. Liesen, and R. Nabben. *A framework for deflated and augmented Krylov subspace methods*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., (2013), **34**(2) :495–518.
- [49] S. Gazzola, P. Novati, and M.R. Russo, *On Krylov projection methods and Tikhonov regularization*, Electron. Trans. Numer. Anal., (2015), **44**, 83–123.
- [50] S. Gazzola and P. Novati, *Inheritance of the discrete Picard condition in Krylov subspace methods*, BIT Numer. Math., (2016), **56**, pp. 893–918.
- [51] D. Gert, E. Klann, R. Ramlau, L. Reichel. *On fractional Tikhonov regularization*. Private notes (2014).
- [52] G. Golub and W. Kahan, *"Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix"*, Journal SIAM Numerical Analysis, (1965), Series B, **2**(2), 205-224.

- [53] G.H. Golub, and G. Meurant, *Matrices, Moments and Quadrature with Applications*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2010).
- [54] R. Gorenflo, *Funktionentheoretische Bestimmung des Aussenfeldes zu einer zweidimensionalen magnetohydrostatischen Konfiguration*, *Z. Angew. Math. Phys.* (1965), **16**, No. 2, 279-290.
- [55] S. Güttel, *Convergence estimates of Krylov subspace methods for the approximation of matrix functions using tools from potential theory*, Ph.D. Thesis, Technische Universität(Freiberg) ( 2006).
- [56] M. Hanke, *Conjugate Gradient Type Methods for Ill-Posed Problems*, Pitman Research Notes in Mathematics 327, Longman, Harlow, UK, (1995).
- [57] P.C. Hansen, *The discrete Picard condition for discrete ill-posed problems*, *BIT* **30** (1990), 658–672.
- [58] P.C. Hansen, *Regularization Tools : A MATLAB package for analysis and solution of discrete ill-posed problem*, *Numer. Algorithms*, **6** (1994), 1-35.
- [59] P.C. Hansen, *Discrete Inverse Problems : Insight and Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 2010.
- [60] P.C. Hansen, Y. Dong, and K. Abe. *Hybrid enriched bidiagonalization for discrete ill-posed problems*. *Numerical Linear Algebra with Applications*, (2019), **26**(3) :e2230.
- [61] P.C. Hansen, M.E. Kilmer, R.H. Kjeldsen, *Exploiting residual information in the parameter choice for discrete ill-posed problems*, *BIT* **46** (2006) 41–59.
- [62] N.J. Higham, *Functions of matrices : Theory and computation*, SIAM (2008).
- [63] P. Hillion, *The Goursat problem for the homogeneous wave equations*, *J. Math. Phys.*, (1990) **31**, 1939-1941.
- [64] P. Hillion, *The Goursat problem for Maxwells equations*, *J. Math. Phys.*, (1990) **31**, 3085-3085
- [65] I. Hnetynkova, M. Plesinger, and Z. Strakos, *The regularizing effect of the Golub-Kahan iterative bidiagonalization and revealing the noise level in the data*, *BIT*, **49** (2009), pp. 669–696.

- [66] M. Hochbruck and C. Lubich, *Exponential integrators for quantum-classical molecular dynamics*, BIT, Numer. Math. **39** (1999), 620-45
- [67] M. Hochbruck, and M. Hochstenbach, *Subspace extraction for matrix functions*, Dept. of Math., Case Western Reserve University, (2005)
- [68] M. Hochbruck, M. Honig, and A. Ostermann *Regularization of nonlinear ill-posed problems by exponential integrators*, Math. Model. Numer. Anal., (2009), **43** : 709–720.
- [69] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Dover, New York, (1964).
- [70] *IEEE standard for floating-point arithmetic*. IEEE Std 754-2008, pages 1–70.
- [71] I.C.F. Ipsen and C.D. Meyer, *The idea behind Krylov methods*, Amer. Math. Monthly, **105** (1998), pp. 889–899.
- [72] Z. Jia, *On regularizing effects of MINRES and MR-II for large-scale symmetric discrete illposed problems*, J. Comput. Appl. Math., **320** (2017), pp. 145–163.
- [73] Z. Jia, *Regularization properties of Krylov iterative solvers CGME and LSMR for linear discrete ill-posed problems with an application to truncated randomized SVDs*. Numer Algor (2020). <https://doi.org/10.1007/s11075-019-00865-w>
- [74] T.K. Jensen and P.C. Hansen, *Iterative regularization with minimum residual methods*, BIT, **47** (2007), pp. 103-120.
- [75] C.R. Johnson, *Computational and numerical methods for bioelectric field problems*, Critical Reviews in Biomedical Engineering, **25** (1997), 181.
- [76] B. Kaltenbacher and W. Rundell, *Regularization of a backwards parabolic equation by fractional operators*, Inverse Probl. Imaging **13**(2) (2019) 401–430.
- [77] A.V. Karashev, River Hydraulic, Hydrometeorological Edition, Leningrad (in Russian 1969).
- [78] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier. Amsterdam . (2006).
- [79] M.E. Kilmer, D.P. O’Leary, *Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems*, SIAM J. Matrix Anal. Applic. **22** (2001) 1204–1221.

- [80] L. Komzsik, *The Lanczos method : evolution and application*, SIAM (2003).
- [81] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, *On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations*. *Lenningrad Mathematics Journal*, (1990) **1**, 1207-1228.
- [82] M.A. Krasnosel'skii, G.M. Vainikko, P.P. Zabreiko, Y.B. Rutitskii, *Approximate solutions of operator equations*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1972)
- [83] A.N. Krylov, *On the numerical solution of the equation by which the frequency of small oscillations is determined in technical problems*, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser.Fiz.-Mat.*, **4** (1931), pp. 491–539.
- [84] A.I. Kozhanov, Y.A. Kosheleva, **Linear inverse problems for ultraparabolic equations : the case of an unknown coefficient of space type**, *Sib. J. Pure and Appl. Math.*, (2016) **16** :3,27-39.
- [85] C. Lanczos, *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*, *J.Research Nat. Bur. Standards*, **45** (1950),pp. 255–282.
- [86] C. Lanczos, *Solution of systems of linear equations by minimized iterations*, *J. Research Nat. Bur. Standards*, **49** (1952), pp. 33–53.
- [87] G. Landi, E.L. Piccolomini, and I. Tomba, *A stopping criterion for iterative regularization methods*, *Appl. Numer. Math.*, vol. **106**, (Aug 2016), pp. 53–68.
- [88] M.M. Lavrentev, V.G. Romanov, and S.P. Shishatskii, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, **64**, (1986), *Translations of Mathematical Monographs*, Amer. Mathe. Soc., Providence, RI, USA.
- [89] A. Lakhdari, *Sur quelques méthodes de régularisation itératives pour une classe de problèmes inverses en EDP*, PHD Thesis, U. Guelma (2015).
- [90] A. Lakhdari, N. Boussetila, *An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem*, *Boundary Value Problems* (2015) 2015 :55.
- [91] B. Lewis and L. Reichel, *Arnoldi-Tikhonov regularization methods*, *J. Comput. Appl. Math.*, **226** (2009), pp. 92–102.
- [92] J. Liesen and Z. Staskos, *Krylov Subspace Methods : Principles and Analysis*, Oxford University Press, 422 2013

- [93] M. Meerschaert, C. Tadjeran, *Finite difference approximations for fractional advection dispersion flow equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics. (2004), vol. **172**, no. 1, 65–77.
- [94] M.S.E. Meziani, Etude d'un Problème de Cauchy mal posé avec des conditions de Dirichlet, Mémoire de Magister, U. Guelma (2010).
- [95] M.S.E. Meziani, N. Boussetila, F. Rebbani, A. Abderafik, *Iterative Regularization Method for An Abstract Inverse Goursat Problem*, Khayyam Journal of Mathematics (2000). DOI 10.22034/kjm.2020.237076.1900 (accepted paper).
- [96] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons Inc., New York, (1993).
- [97] C. Musco, C. Musco, and A. Sidford. *Stability of the lanczos method for matrix function approximation*. In Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms,(2018), pages 1605–1624. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [98] P. Novati, *Some properties of the Arnoldi based methods for linear ill-posed problems*, SIAM J. Numer. Anal. **55** (2017), pp. 1437–1455
- [99] P. Novati, *A convergence result for some Krylov-Tikhonov methods in Hilbert spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim., **39** (2018), pp. 655–666.
- [100] P. Novati and M.R. Russo, *A GCV based Arnoldi-Tikhonov regularization method*, BIT, **54** (2014), pp. 501–521.
- [101] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus. Academic Press, New York. 1974.
- [102] C.C. Paige, The computation of eigenvalues and eigenvectors of very large and sparse matrices, PhD thesis, London University, London, England, (1971).
- [103] C.C. Paige, *Computational variants of the Lanczos method for the eigenproblem*, J. Inst.Math. Appl., **10**, (1972), pp. 373–381.
- [104] C.C. Paige, *Bidiagonalization of matrices and solution of linear equations*, SIAM J. Numer. Anal. **11**, (1974), 197-269.
- [105] C.C. Paige, M.A. Saunders, *LSQR : An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares*, ACM Transactions on Mathematical Software, **8**, (1982), pp. 43–71.

- [106] B.N. Parlett, *Do we fully understand the symmetric Lanczos algorithms yet?*, in Proc. Cornelius Lanczos International Centenary Conference, (1993) (J. D. Brown, M. T. Chu, D. C. Ellison and R. J. Plemmons, eds), SIAM, pp. 93–108.
- [107] B.N. Parlett. The symmetric eigenvalue problem. SIAM, Philadelphia, (1998).
- [108] W.P. Petersen and P. Arbenz, *Introduction to Parallel Computing*, Oxford University Press, Oxford, (2004).
- [109] I. Podlubny, *Fractional differential equations*. Academic Press, New York. (1999).
- [110] H. Pollard, *The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function  $E_\alpha(-x)$* , Bull Am Math Soc., (1948), **54**, 1115-1116.
- [111] A.D. Poularikas, *Bessell Functions, The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*. Ed. Alexander D. Poularikas, Boca Raton : CRC Press LLC (1999).
- [112] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker. 231. New York, NY : Marcel Dekker (2000).
- [113] R. Ramlau and L. Reichel, *Error estimates for Arnoldi–Tikhonov regularization for ill-posed operator equations*, Inverse Problems, (2019) **35** 055002.
- [114] L. Reichel, and G. Rodrieguez, *Old and new parameter choice rules for discrete ill-posed problems*, Numer. Algorithms, **63** (2013), pp. 65–87.
- [115] K. Ramdani, M. Tucsnak, J. Valein, *Detectability and state estimation for linear agestructured population diffusion models*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis (2016).
- [116] Z. Ranjbar, *Numerical Solution of Ill-posed Cauchy Problems for Parabolic Equations*, PhD Thesis, Department of Mathematics, Linköping University, (2010).
- [117] Z. Ranjbar and L. Elden, *Solving an Ill-Posed Cauchy problem for two-dimensional parabolic PDE with variable coefficients using a precinditioned GMRES method*, SIAM J. Sci. Comput. (2014), **36**, B868–B886.
- [118] Z. Ruan, J.Z. Yang, X. Lu, *Tikhonov Regularisation Method for Simultaneous Inversion of the Source Term and Initial Data in a Time-Fractional Diffusion Equation*, East Asian Journal on Applied Mathematics (2015), **5**(03) : 273-300.

- [119] Y. Saad, *Analysis of some Krylov subspace approximations to the matrix exponential operator* SIAM J. Numer. Anal., Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. **29(1)** (1992), pp. 209-228
- [120] J. Sabatier, O.P. Agrawal, and J.A.T. Machado, *Advances in Fractional Calculus*. Springer Netherlands. (2007).
- [121] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Longhorne, PA. (1993).
- [122] R. Sassane, N. Boussetila, F. Rebbani, A. Benrabah, *Iterative regularization method for an abstract ill-posed generalized elliptic equation*, Asian-European Journal of Mathematics, Asian-European Journal of Mathematics (2021), 2150069 (22 pages).
- [123] R. Sassane, *Méthodes variationnelles de régularisation pour une classe de problèmes inverses en EDP*, PHD Thesis, U. BM Annaba (2020).
- [124] A. Shlapunov, *On Iterations of Non-Negative Operators and Their Applications to Elliptic Systems*. Math. Nachr., (2000) **218**, 165-174.
- [125] A.P.S. Selvadurai, *Partial differential equation in Mechanics, 2 : The biharmonic equation, Poisson's equation*, Springer-Verlag, Heidelberg, (2000).
- [126] T.J. Stieltjes, *Sur l'évaluation approchée des intégrales*, C.R. Acad. Sci. Paris, **97** (1883), pp. 740–742, 798–799. Reprinted in Oeuvres I (P. Noordhoff, Groningen, (1914), pp. 314–316, 317–318.
- [127] T.J. Stieltjes, *Note sur quelques formules pour l'évaluation de certaines intégrales*, Bul. Astr. Paris, **1** (1884), p. 568. Reprinted in Oeuvres I (P. Noordhoff, Groningen, (1914), pp. 426–427.
- [128] T.J. Stieltjes, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques*, Ann.Sci. École Norm. Sup. (**3**), **1** (1884), pp. 409–426. Reprinted in Oeuvres I(P. Noordhoff, Groningen, (1914), pp. 377–394.
- [129] T.J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys., **8** (1894), pp. J. 1–122. Reprinted in Oeuvres II (P. Noordhoff, Groningen, 1918), pp. 402–566. English translation Investigations on continued fractions in Thomas Jan Stieltjes, *Collected Papers*, Vol. II (Springer-Verlag, Berlin, 1993), pp. 609–745.

- [130] N.H. Tuan, T.D. Xua, N.A.Triet, D. Lesnic, *On the Cauchy problem for a semilinear fractional elliptic equation*, Applied Mathematics Letters (2018), Vol.83, 80-86.
- [131] N. Truhar and I. Slapničar, *Relative Perturbation Bound For Invariant Subspaces Of Hermitian Matrix*, GLASNIK MATEMATIČKI Vol.35(55)(2000), 221-231.
- [132] B.K.H. Turmetov, B.T. Torebek. *On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation*. New York J. Math. (2014); **20**, 1237-1251.
- [133] U. Tyn Myint, L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhäuser Boston (2007).
- [134] J. Uglum, *Quantum cosmology of  $\mathbb{R} \times S^2 \times S^1$* , Physical Review, (1992) vol. **46**, no. 3,4365-4372.
- [135] J. van den Eshof and M. Hochbruck, *Preconditioning Lanczos approximations to the matrix exponential*. SIAM J. Sci. Comput., (2006), **27**(4) :1438-1457.
- [136] A. van der Sluis and H.A. van der Vorst, *SIRT- and CG-type methods for the iterative solution of sparse linear least-squares problems*, Lin. Alg. Appl., **130** (1990), pp. 257-302.
- [137] H.A. Van Der Vorst, *An iterative solution method for solving  $f(A)x = b$ , using Krylov subspace information obtained for the symmetric positive definite matrix  $A$* , J. Comput. Appl. Math., **18** (1987), 249-263.
- [138] C. Walker, *Some remarks on the asymptotic behavior of the semigroup associated with agestructured diffusive populations*, Monatshefte für Mathematik, (2013) Vol. 170, no. **3-4**, 481-501.
- [139] G.F. Webb, *Population models structured by age, size, and spatial position*, in Structured Population Models in Biology and Epidemiology, Vol. 1936 of Lecture Notes in Mathematics, 149, Springer, Berlin, Germany (2008).
- [140] D. Youjun, L. Zhenhai, *Iteration methods on sideways parabolic equations*, Inverse Problems **25** (2009) 095004.
- [141] F. Zouyed, S. Debbouche, *An Iterative Regularization Method for a Class of Inverse Boundary Value Problems of Elliptic Type*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 2020, Vol. 16, No. 1, 66–85.

- [142] F. Zouyed, Etude de certaines équations différentielles abstraites avec conditions aux limites non-locales, PHD Thesis, U. BM Annaba (2007).