وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار

-عنابة-

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2019/2020

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

G-MOUVEMENT BROWNIEN FRACTIONNAIRE MULTIVARIÉ ET G-ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

Option

Modélisation mathématique-Probabilités et Statistique

Par

BELKSIER Manel

DIRECTEUR DE THÈSE :	BOUTABIA Hacène	Prof.	U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	BENCHETTAH Azzedine	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	AISSAOUI Md Zine	Prof.	UNIV. DE GUELMA
EXAMINATEUR :	MERZOUGUI Mouna	M.C.A.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	ARRAR Nawel Khadija	M.C.A.	U.B.M. ANNABA

r

Table des matières

Remerciements

Et voilà ! après cinq années de labeur, cette thèse est finalement terminée. Je suis ravie du chemin parcouru, et me voici à présent face à cette feuille, essayant en quelques lignes de trouver les mots justes pour remercier toutes les personnes qui ont contribué chacune de sa manière au cheminement de cette formation et sans lesquelles ce travail n'aurait jamais vu le jour.

En préambule à cette thèse, je remercie Allah le tout puissant et le miséricordieux, pour la santé, la volonté, le courage, la patience et l'endurance qui m'ont accompagnée tout au long de la préparation et de l'élaboration de ce modeste travail scientifique.

J'offre mes remerciements les plus sincères et les plus chaleureux à mon directeur de thèse, notre honoré Professeur Hacène Boutabia à l'université Badji–Mokhtar d'Annaba qui, avec une grande générosité, m'a permis de bénéficier de son encadrement et de ses constantes orientations dans mes recherches en y accordant une attention méticuleuse et sans égale. Les conseils judicieux qu'il m'a prodigués, ses suivis hebdomadaires, et ce malgré sa grande charge de travail, ont énormément contribués à alimenter ma réflexion et constitués un apport considérable, non seulement durant les années de mon doctorat, mais aussi durant mon mémoire de Master et pendant ses cours de calculs stochastique et sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené à bon port. Je lui suis reconnaissante pour le temps qu'il m'a consacré et la confiance professionnelle qu'il m'a accordée tout au long de l'expérience enrichissante qu'il m'a octroyée.

Ma profonde gratitude s'adresse au Professeur Azzedine Benchettah, professeur à l'université Badji Mokhtar d'Annaba, pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de ce mémoire.

Je tiens également à remercier très chaleureusement Mme Mouna Merzougui et Mme Khadija Nawel Arrar, M.C.A. à l'université Badj– Mokhtar d'Annaba d'avoir accepté la lourde tâche qui a consisté à examiner ma thèse et pour le temps qu'elles ont consacré à la lecture de ce manuscrit.

Par la même occasion, je souhaite remercier très vivement le Professeur Md Zine Aissaoui de l'université de Guelma, pour l'amabilité avec laquelle il a accepté d'être examinateur de ma thèse et de faire partie du jury. Je serai enchantée de faire sa connaissance le jour de la soutenance.
Je suis sincèrement ravie d'avoir soumis mon travail à leur expertise.

Qu'il me soit permis ici de présenter mes vifs remerciements et mon profond respect à tous les professeurs du "Laboratoire Probabilités et Statistique" (LaPS) qui m'ont enseigné et qui par leurs conseils scientifiques, leurs talents, leurs motivations et leurs critiques, ont guidé mes réflexions durant mes études universitaires. Leur enthousiasme à aider les étudiants dans leur parcours universitaire mérite d'être souligné.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à Mme Amel Redjil, docteure en mathématiques à l'université Badji–Mokhtar d'Annaba, pour sa gentillesse, sa générosité, ses conseils avisés, son extrême amabilité ainsi que son soutien moral et intellectuel dans cette démarche de formation.

Un immense "Merci" à ma chère amie Rania Bougherra pour son implication, son écoute et sa collaboration. Je la remercie chaleureusement pour tous ces agréables moments passés ensemble et la bonne humeur partagée tout au long de cette formation. Son amitié m'est chère et éternelle.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes très chères collègues et amies Dr. Sara Stihi et Dr. Selma Meradji qui m'ont apporté leur amour et leur soutien indéfectible tout au long de ma démarche. Leur amitié m'est chère et perpétuelle.

Et parce que si le travail de thèse nécessite un soutien scientifique, il nécessite aussi un soutien moral, et pour tout cela j'adresse un "Merci" tout spécial à mes parents sans qui je n'en serais pas là aujourd'hui. Je les remercie pour leur soutien dans mes choix, leur attention sans faille, leur amour inconditionnel, leur confiance en moi et leurs encouragements qui m'ont assuré des bases solides me permettant de persévérer et de surmonter tous les obstacles dans la vie.

Je voudrais enfin remercier tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réussite de ce travail et qui n'ont pas pu être cité ici. Je les prie de bien vouloir me pardonner cela.

M.Belksier

Dédicaces

À cœur vaillant rien d'impossible

À conscience tranquille tout est accessible

Quand il y a la soif d'apprendre, tout vient à point à qui sait attendre

Souhaitant que le fruit de nos efforts fournis jour et nuit, nous mènera vers le bonheur fleuri

Aujourd'hui, ici rassemblés auprès des jurys, nous prions Dieu que cette soutenance fera signe de persévérance et que nous serions enchantés par notre travail honoré... Je dédie cette thèse à

A la plus douce et la plus merveilleuse de toutes les mamans. A la personne qui m'a tout donné sans compter. A celle que j'aime et que j'aimerai pour l'éternité. A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la maman que j'adore...
Je te dédie ce travail que tu as tant souhaité et qui n'est que le fruit de tes conseils, de tes encouragements et de tes prières incessantes. Quoique je dise, je ne saurais d'aucune manière exprimer ma profonde affection et mon immense gratitude. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé et longue vie afin que je puisse te rendre un minimum de ce que je te dois.

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel et mon soutien moral, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi papa...
Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien–être, tu as su m'entourer d'attention, m'inculquer les valeurs nobles de la vie, m'apprendre le sens du travail, de l'honnêteté et de la responsabilité. Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir. Que dieu te procure bonne santé et longue vie.

A ma source de joie et de bonheur, la plus belle chose qui me soit arrivée dans ma vie, mon très cher fiancé Billel...
Merci d'avoir été toujours là pour moi. Ton amour inconditionnel, tes encouragements et ton soutien moral m'ont permis d'avancer dans la vie jusqu'à maintenant et je l'espère pour toujours. Que ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et de mon amour éternel, sincère et fidèle.

A la mémoire de mon très cher cousin Hatem... Puisse Allah te réserver sa clémence à sa bien large miséricorde et vous accueillir toi et ton papa dans son éternel paradis.

A mes adorables soeurs, Abir, Randa et Sondès, qui m'ont constamment encouragé avec beaucoup d'affection, je vous souhaite un avenir radieux plein de réussite. Puisse Dieu, le tout puissant, vous préserver du mal, vous combler de santé et de bonheur.

Un sincère merci à mon unique frère Moatez Billeh pour son soutien moral et sa bonne humeur. Mon ange gardien et mon fidèle compagnon dans les moments les plus délicats de cette vie. Je te dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A mes chers grands–pères et mes chères grands–mères
Que ce modeste travail, soit l'expression des vœux que vous n'avez cessés de formuler dans vos prières. Vous êtes pour moi une source inépuisable de sagesse. Je tiens à vous rendre hommage à travers cette thèse et j'implore Dieu pour qu'il vous accorde santé, bonheur, longue vie et vous protège de tout mal.

A mes très chères tantes
Je vous remercie de tout coeur pour vos encouragements et vos prières au long de ma vie d'étudiante et de doctorante. Je vous dédie cette thèse tout en vous souhaitant une longue vie pleine de réussite, de santé et de bonheur à vous et à tous vos enfants.

A tous les membres de ma famille, petits et grands. Veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection particulière.

Impossible d'oublier mes chères amies Assia, Sara et Amira, leur vraie amitié m'est précieuse. Tous mes vœux de bonheur et de santé.

En témoignage de l'amitié qui nous uni et des moments merveilleux que nous avons passés ensemble durant mon parcours à l'université, je dédie ce travail à mes aimables amies et collègues d'études, à vous Rania, Imen, Selma et sara.

A toute personne qui m'a aidé à enrichir, achever et présenter mon doctorat et à tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer.

M.Belksier

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude des équations différentielles stochastiques des vecteurs propres orthogonaux du (G, ε) $-$processus de Wishart fractionnaire défini par la matrice $R_t^{\varepsilon}\,(R_t^{\varepsilon})^*$. Nous introduisons d'abord un nouveau processus appelé $G-$mouvement Brownien fractionnaire multivarié $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ où le paramètre de Hurst H est une matrice diagonale. De plus, en s'inspirant du cas classique, nous donnons une approximation (R_t^{ε}) de la partie Riemann-Liouville de (B_t^H) par une suite de $G-$processus d'Itô. En outre, nous obtenons, sous l'hypothèse que tous les éléments diagonaux de H sont égaux dans $(0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, un système d'équations différentielles stochastiques des vecteurs propres orthogonaux du (G, ε) $-$processus de Wishart fractionnaire, qui admet 0 et $\left|R_t^{H,\varepsilon}\right|^2$ comme seules valeurs propres. Finalement, une comparaison asymptotique de la valeur propre $\left|R_t^{H,\varepsilon}\right|^2$ sera démontrée.

Mots-clès

$G-$mouvement Brownien, $G-$mouvement Brownien fractionnaire, matrices aléatoires, (G, ε) $-$processus de Wishart, valeurs propres, vecteurs propres.

Abstract

This thesis is dedicated to the study of stochastic differential equations for orthogonal eigenvectors of (G, ε) −Wishart fractional process defined by the matrix $R_t^\varepsilon (R_t^\varepsilon)^*$. We introduce at first a new process called multivariate G−fractional Brownian motion $\left(B_t^H\right)$ where the Hurst parameter H is a diagonal matrix. Moreover, we give an approximation (R_t^ε) of Riemann-Liouville process of $\left(B_t^H\right)$ by G−Itô's processes. Then we give stochastic differential equations for orthogonal eigenvectors of (G, ε) −Wishart fractional process, which has 0 and $|R_t^\varepsilon|^2$ as only eigenvalues. An intermediate asymptotic comparison result concerning the eigenvalue $|R_t^\varepsilon|^2$ is also obtained.

Keywords

G−Brownian motion, multivariate G−fractional Brownian motion, random matrices, (G, ε) −Wishart process, eigenvalues, eigenvectors.

مــلــخـــــص

موضوع هذه الأطروحة يرتكز أساسا على دراسة المعادلات التفاضلية الستوكاستيكية للأشعة الذاتية المتعامدة لعملية (G,ε)–ويــشــار الجزئية والمعرفة بالمصفوفة $\mathbf{R}_t^{\varepsilon}(\mathbf{R}_t^{\varepsilon})^*$.

نقدم أولا تعريف للحركة G–البراونية الجزئية متعددة المتغيرات $(\mathbf{B}_t^{\mathbf{H}})$ حيث العامل H، المسمى مؤشر Hurst، عبارة عن مصفوفة قطرية.

إضافة الى ذلك واستلهاما من الحالة الكلاسيكية، نعطي تقريبا $(\mathbf{R}_t^{\varepsilon})$ لجزء ريـمـان ـ لـيـوفـيـل $(\mathbf{B}_t^{\mathbf{H}})$ من خلال سلسلة من عمليات إيــتــو.

زيادة على ذلك بموجب فرضية أن "جميع العناصر القطرية لـ *H* متساوية في المجال 1/2 ا $(0,1)$" ، نتحصل على نظام المعادلات التفاضلية العشوائية للأشعة الذاتية المتعامدة لعملية (G,ε)–ويــشــار الجزئية، والتي تقبل 0 و $|\mathbf{R}_t^{\mathbf{H},\varepsilon}|^2$ كقيم ذاتية .

أخيرًا، سيتم أيضا إجراء مقارنة مقاربة للقيمة الذاتية $|\mathbf{R}_t^{\mathbf{H},\varepsilon}|^2$.

الـكـلــمـــات الــمـفـتـــاحـــيـــة: G-حركة براونية، G-حركة براونية جزئية، مصفوفات عشوائية، (G,ε)-ويــشـــار، القيم الذاتية، الأشعة الذاتية.

Introduction

En concevant les mathématiques comme un graphe, où chaque sommet est un domaine, la théorie des probabilités et l'algèbre linéaire figurent parmi les sommets les plus connectés aux autres. Or leur réunion constitue le cœur de la théorie des matrices aléatoires née de ses différentes applications. Elle est apparue dans les années 30, par les travaux du statisticien Wishart [31] lors de la naissance de la statistique mathématique. En effet; ces matrices de Wishart ont été introduites non seulement en statistique mécanique qui représentent des matrices de covariance de données statistiques mais également dans des contextes plus inattendus comme les modèles de marches aléatoires ou dans des problèmes d'interaction quantique pour des états aléatoires. Puis, elle a connu un nouvel essor particulièrement important dans les années 50 à travers les travaux de Wigner en physique nucléaire afin de mieux comprendre la spectroscopie des atomes lourds [3, 37]. Dès lors, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des matrices aléatoires et leur intérêt dans différentes disciplines tant pour ses applications en physique théorique, statistique, finance, télécommunications...(voir [2, 3]) que pour ses multiples liens avec de nombreux problèmes mathématiques en algèbre d'opérateurs, combinatoire, théorie des nombres...

De nombreux aspects de cette théorie ne sont pas encore entièrement exploités, et vu sa nouveauté, ce domaine est très riche en questions ouvertes ce qui explique, indubitablement, la richesse exceptionnelle de cette théorie très actuelle qui peut être considérée comme une branche à part et entière des mathématiques modernes.

Une autre source de motivation est venue dans le cadre de la théorie des espérances non linéaires où Peng a proposé, en 2006 [39, 40], la théorie de la $G-$espérance qui joue un rôle profond et fascinant dans plusieurs problèmes d'incertitudes et s'avère être un outil de base pour mesurer les pertes de risque en finance. Il l'a défini comme étant le suprémum des espérances linéaires classiques pris sur une famille de mesures de probabilités relativement compacte, en vertu de laquelle le processus canonique (B_t) est un $G-$mouvement Brownien, où G représente la fonction génératrice d'une équation de la chaleur non linéaire. De plus, une intégrale stochastique du type d'Itô sous la $G-$espérance a été développée. Par ailleurs, une propriété essentielle du $G-$mouvement Brownien est que son processus de variation quadratique est un processus non déterministe en général et qu'il comporte des incréments indépendants et stationnaires identiquement distribués. De nos jours, plusieurs travaux sont consacrés, entièrement ou partiellement, aux $G-$équations diférentielles stochastiques, ce qui confirme l'intérêt croissant des chercheurs dans ce domaine.

En outre, la combinaison de ces théories a permis d'étudier les EDS des processus matrices ainsi que celles des valeurs propres et des vecteurs propres, dans le cadre non linéaire (pour un récit récent, nous renvoyons le lecteur à [32, 33, 53]).

Parallèlement à cela, le mouvement Brownien fractionnaire (mBf en abrégé) a connu son plein

essor et est devenu un processus incontournable qui présente en contre partie une certaine différence manifestée par l'indépendance de ses accroissements, il a été considéré comme un bon outil pour la modélisation des: réseaux de télécommunications, fluctuations boursières, turbulence,...etc (pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [26, 50]).
Historiquement parlant, ce processus a été initié par Kolmogorov [24] en 1940, sous l'appellation de "Wiener Spirals", ensuite étudié par Mandelbrot et Van Ness [28] en 1968. Il a été défini comme étant l'unique processus gaussien auto-similaire centré, ayant des incréments stationnaires (voir [1, 6, 21] pour plus de détails sur les propriétés du mBf). Depuis, en se basant sur l'étude du mBf, diverses extensions ont été introduites par de nombreux mathématiciens, citons en particulier, le mouvement Brownien fractionnaire multivarié (mBfm en abrégé) qui a également vu des recherches considérables et fructueuses aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique (voir [4, 5, 7, 14], ainsi que les références qui y sont citées).
En s'inspirant du $G-$mouvement Brownien introduit par Peng [18], le $G-$mouvement Brownien fractionnaire (GfBm en abrégé) de paramètre de Hurst $h \in (0, 1)$ a été défini par Wein Chen (voir [11]) dans le cas uni-dimensionnel, comme étant un processus $G-$Gaussien centré avec des incréments stationnaires.
Dans cette thèse, nous définissons un nouveau processus appelé $G-$mouvement Brownien fractionnaire multivarié ($G-$mBfm en abrégé) à l'aide du $G-$mouvement Brownien multi-dimensionnel. Ce processus est caractérisé par un paramètre appelé l'exposant de Hurst H qui est, dans notre cas, une matrice diagonale $H := diag\,[h_1, h_2, ..., h_d]$, $h_i \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ pour tout $i = 1, 2, ..., d$. L'objectif essentiel de cette thèse est de contribuer au développement de cette théorie émergente, et ce en étudiant les équations différentielles stochastiques des vecteurs propres orthogonaux du $(G, \varepsilon)-$processus de Wishart fractionnaire Σ^{ε} défini par la matrice $\Sigma^{\varepsilon} = R^{\varepsilon} (R^{\varepsilon})^{*}$, où R^{ε} est une approximation dans $\mathcal{L}^2_G(\Omega)$ du processus de Riemann-Liouville lié à $\left(B^H_t\right)$. Comme l'une des valeurs propres de Σ^{ε} est de multiplicité $(d-1)$, nous ne pouvons donc pas appliquer l'approche de Bru [8] utilisée dans [32] et [53]. Notre approche est principalement basée sur des techniques algébriques, plus précisément, le procédé de Gram-Shmidt.

Organisation de la thèse

Venons-en à une description détaillée des chapitres de ce manuscrit qui commencera par un petit glossaire contenant certaines notations utilisées le long de notre travail.
Le premier chapitre exposera brièvement quelques notions, définitions, propriétés et théorèmes concernant le $G-$mouvement Brownien ainsi que la $G-$intégrale stochastique dans le cas multi-dimensionnel. Ces notions sont utiles pour la bonne compréhension du présent travail et seront utilisées à plusieurs reprises dans tout le reste de la thèse.
Le second chapitre est constitué de deux parties: La première consiste à introduire le $G-$mouvement Brownien fractionnaire multivarié en tant que représentation intégrale par rapport au $G-$mouvement

Brownien à $d-$dimension pour $\frac{1}{2}I < H < I$. Nous donnons, par la suite, ses différentes propriétés.
Il est bien connu que pour $H \neq \frac{1}{2}$, un mBf d'indice de Hurst H, n'est ni une semimartingale ni un processus de Markov. Ainsi, la théorie classique de l'intégrale stochastique ne s'applique pas et dans ce cas de nouveaux outils ont dû être développés afin de construire une intégrale par rapport à celui-ci. De ce fait, la deuxième partie consiste à donner une approximation (R_t^{ε}) dans $\mathcal{L}_G^2$ du processus de Riemann-Liouville lié à (B_t^H) par des $G-$processus de type Itô.
Le dernier chapitre contient l'essentiel de ce travail où nous introduisons les processus $G-$Wishart correspondant à $R_t^{H,\varepsilon}$. Puis, nous énoncerons et prouverons, en utilisant des techniques plus avancées, un système d'équations différentielles stochastiques pour ses vecteurs propres orthogonaux, qui admet 0 et $\left|R_t^{H,\varepsilon}\right|^2$ comme seules valeurs propres. Finalement, une comparaison asymptotique de la valeur propre $\left|R_t^{H,\varepsilon}\right|^2$ sera démontrée en dernier lieu. Une fois que ceci sera établi, nous clôturerons ce chapitre par le temps de collision pour éviter l'explosion des solutions des EDS des vecteurs propres.
Enfn, on rappellera dans la dernière section de cette thèse "Conclusion et perspectives" les différentes contributions apportées par cette thèse ainsi que les perspectives envisagées. Le présent travail de recherche a fait l'objet de la production scientifique et des communications suivantes:

Publication internationale:

Stochastic differential equations for orthogonal eigenvectors of $(G, \varepsilon)-$Wishart process related to multivariate $G-$fractional Brownian motion, **M. Belksier**, H. Boutabia and R. Bougherra, A paraître dans *"Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática"*.

Communications nationales:

1. $G-$mouvement Brownien fractionnaire et $G-$équations différentielles stochastiques, **M. Belksier** and H. Boutabia, Première édition des Doctoriales Nationales de Mathématiques (28-31 Octobre 2017, à Constantine).

2. $G-$Itô processes of Riemann-Liouville approximation for $G-$multivariate fractional Brownian motion, **M. Belksier** and H. Boutabia, Journées Jeunes Chercheurs (JJC'2018, 17-18 décembre 2018, à Annaba).

3. L'inverse de la dérivée de la solution d'une équation différentielle stochastique dirigée par un $G-$mouvement Brownien, R Bougherra., H. Boutabia et **M. Belksier**, Journée de Mathématiques appliquées « JMA2019 » (28 avril 2019, à Mila).

Communications internationales:

1. $d-$dimensional fractional Brownian motion in the $G-$expectation space, **M. Belksier**, H. Boutabia and R. Bougherra, International Seminar in Industrial Engineering and Applied Mathematics (ISIEAM'18, 23-24 October 2018, à Skikda).

2. Differentiability of slotion for $G-$EDS driven by G-Brownian motion, R. Bougherra, H. Boutabia and **M. Belksier**, International Seminar in Industrial Engineering and Applied Mathematics (ISIEAM'18, 23-24 October 2018, à Skikda).

3. Stochastic differential equations for eigenvalues of $\varepsilon-$Wishart process in the $G-$Framework, **M. Belksier** and H. Boutabia, the first International Conference on Research in Applied Mathematics and Computer Science ICRAMCS 2019 (ISIEAM'18, 29-30 mars 2019, à Casablanca).

4. GSDEs for eigenvalues of -fractional Wishart process, **M. Belksier** and H. Boutabia, International Conference, Financial Mathematics: Tools and Applications (MFOA' 2019, 28-29 octobre 2018, à Bejaia).

Chapitre 1: Notations et préliminaires

Comme le $G-$calcul stochastique joue un rôle primordial dans notre travail, nous allons maintenant en donner quelques notations mathématiques et présenter les principaux résultats obtenus dans le cadre de la $G-$espérance qui seront utiles par la suite. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer à [10, 15, 20, 27, 39, 43, 45].

1.1 Notations générales

Tout au long de cette thèse, nous utilisons de manière courante les notations suivantes :

- $\Omega = C_0^d(\mathbb{R}^+)$ l'espace des fonctions continues $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ nulles en 0, muni de la distance

$$\rho\left(\omega^1, \omega^2\right) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\left[\left(\max_{t\in[0,i]}\left|\omega_t^1 - \omega_t^2\right|\right) \wedge 1\right],\ \omega^1, \omega^2 \in \Omega.$$

- Pour tout $t \in [0; \infty)$, on pose $\Omega_t := \{\omega_{.\wedge t} : \omega \in \Omega\}$.

- Le processus canonique sera noté par $\{B_t(\omega) = \omega_t, t \geq 0\}$ si $\omega \in \Omega$.

- $\mathcal{B}(\Omega)$ désigne la tribu borélienne sur Ω.

- $C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)^n$ est l'éspace des fonctions localement Lipschitziennes définies sur $\left(\mathbb{R}^d\right)^n$ telles que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C\left(1 + |x|^k + |y|^k\right)|x - y| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ dépendant uniquement de φ.

- On note aussi, pour tout $t > 0$,

$$Lip(\Omega_t) = \left\{\varphi\left(B_{t_1\wedge t}, ...B_{t_m\wedge t}\right) :\ t_1, ..., t_m \in [0; \infty),\ \varphi \in C_{l,Lip}\left(\left(\mathbb{R}^d\right)^m\right)\right\}$$

et

$$\mathcal{H} = Lip(\Omega) := \bigcup_{n=1}^{\infty} Lip(\Omega_n).$$

- $\mathbb{S}_d$ désigne l'ensemble des matrices symétriques d'ordre d.

Dans toute la suite $\mathcal{H}$ sera considéré comme l'espace des variables aléatoires et on supposera que les conditions suivantes sont satisfaites : $c \in \mathcal{H}$ pour chaque constante c et $|X| \in \mathcal{H}$ si $X \in \mathcal{H}$.

1.2 Préliminaires

Lors de ce paragraphe, nous passons en revue les notions et les résultats de base dans le cadre de la $G-$espérance, qui concernent le $G-$mouvement Brownien en particulier et le $G-$calcul stochastique en général. Nous commençons par rappeler la théorie de la $G-$espérance.

1.2.1 Espérance sous-linéaire

Définition 1.1. *Une espérance sous-linéaire $\mathbb{E} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant les quatre axiomes suivants : pour tout $X, Y \in \mathcal{H}$, nous avons*

1) *Monotonicité : $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ si $X \geq Y$.*

2) *Préservation des constantes : $\mathbb{E}[c] = c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

3) *Sous–additivité : $\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X - Y]$.*

4) *Homogénéité positive : $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$, pour tout $\lambda \geq 0$.*

Dans ce nouveau contexte, le triplet $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ s'appelle alors espace d'espérance sous linéaire. Si seulement 1) et 2) sont satisfaites, E est appelée espérance non-linéaire.
Notons que si 1) et 2) sont satisfaites et si l'inégalité 3) est une égalité, alors $\mathbb{E}$ n'est autre que l'espérance linéaire classique.

Remarque 1.1. *En fait 3) et 4) impliquent la propriété de convexité suivante :*

$$\mathbb{E}\left[\alpha X + (1-\alpha) Y\right] \leq \alpha \mathbb{E}\left[X\right] + (1-\alpha) \mathbb{E}\left[Y\right], \text{ pour tout } \alpha \in [0,1]$$

Notons que la propriété 4) est équivalente à la propriété suivante :

$$\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda^+ \mathbb{E}[X] + \lambda^- \mathbb{E}[-X] \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R},$$

où $\lambda^+ = \max\{0, \lambda\}$ et $\lambda^- = -\min\{0, \lambda\}$.

- Pour tout $p \geq 1$, on note par $\mathcal{L}_G^p$, l'adhérence de $\mathcal{H}$ par rapport à la norme de Banach $\|X\|_{p,G} := \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}$.

Selon Denis et al. [15], nous avons le théorème de représentation de la $G-$espérance sur $\mathcal{L}_G^1(\Omega)$, qui stipule que celle-ci peut s'exprimer comme étant le supremum des epérances linéaires classiques :

Théorème 1.1. *Soit $\mathbb{E}$ une espérance sous-linéaire définie sur $(\Omega, \mathcal{H})$. Alors il existe une famille de mesures de probabilités $\mathcal{P}$ relativement compacte sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ telle que pour tout $X \in \mathcal{L}_G^1(\Omega)$,*

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sup_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^P\left[X\right],$$

où $\mathbb{E}^P$ désigne l'espérance classique sous la probabilité P.

Remarque 1.2. *Si $\mathcal{P}$ est un singleton alors $\mathbb{E}$ n'est autre que l'epérance linéaire classique.*

Naturellement, nous pouvons définir une capacité de Choquet associée à $\mathbb{E}$ en posant :

$$C(A) := \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A), \;\; A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Par rapport à cette capacité une notion de "quasi-sure" a été introduite dans [10, 39, 40].

Définition 1.2. *Nous disons qu'un ensemble $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ est polaire si et seulement si $C(A) = 0$. De plus, une propriété a lieu quasi-sûrement (q.s. en abrégé) si elle a lieu en dehors d'un ensemble polaire.*

Remarque 1.3.

- *Une propriété est vraie q.s. si elle est vraie presque sûrement pour chaque probabilité $P \in \mathcal{P}$.*
- *La convergence dans $\mathcal{L}_G^2$ entraine la convergence q.s..*

Grâce à la représentation de la $G-$espérance et à la notion « quasi-sûre » introduite, la théorie des processus stochastiques en temps continu, dans le cadre de la $G-$espérance, s'est considérablement développée, en particulier la formule d'Itô, certaines inégalités stochastiques ainsi que les équations différentielles stochastiques gouvernées par un $G-$mouvement Brownien.

1.2.2 Distributions et indépendance

Parallèlement aux concepts du cadre classique, Peng [42, 43] a établi les notions de distributions et d'indépendance pour les variables aléatoires dans ce nouveau contexte. Néanmoins, ces notions sont moins probabilistes mais plutôt fonctionnelles et s'expriment à l'aide des familles de fonctions tests de l'espace $C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $d \geq 1$.

Définition 1.3. *Soit $X = (X_1, ..., X_d)$ un vecteur aléatoire, où $X_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, ..., d$. La distribution de X est donnée par la fonctionnelle $\mathbb{F}_X[.]$ suivante : pour tout $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$,*

$$\mathbb{F}_X[\varphi] := \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

De plus, si X' est un autre vecteur aléatoire $d-$dimensionnel tel que pour tout $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\mathbb{F}_X[\varphi] = \mathbb{F}_{X'}[\varphi]$, alors X et X' sont dits identiquement distribués.

Notons que le triplet $\left(\mathbb{R}^d, C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right), \mathbb{F}_X\right)$ forme un espace d'espérance non-linéaire.

Remarque 1.4. *$\mathbb{F}_X$ caractérise l'incertitude de la distribution de $X \in \mathcal{H}$, au sens que si $\mathbb{F}_X$ n'est pas une espérance linéaire alors X a une distribution incertaine représentée par les quatre* *paramètres typiques suivants :*

$$\overline{\mu} = \mathbb{E}[X], \ \underline{\mu} = -\mathbb{E}[-X], \ \overline{\sigma}^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] \ \text{et } \underline{\sigma}^2 = -\mathbb{E}\left[-X^2\right].$$

Les intervalles $\left[\underline{\mu}, \overline{\mu}\right]$ *et* $[\underline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^2]$ *caractérisent la* ***moyenne incertaine*** *et la* ***variance incertaine*** *de* X *respectivement.*

Proposition 1.1. *Soient* $X, Y \in \mathcal{H}$ *telles que* $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y]$ *(i.e.,* Y *n'a pas une moyenne incertaine). Alors, nous avons :*

$$\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y].$$

En particulier, si $\mathbb{E}[Y] = -\mathbb{E}[-Y] = 0$*, alors* $\mathbb{E}[X + \alpha Y] = \mathbb{E}[X]$.

Démonstration. Nous avons $\mathbb{E}[\alpha Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] + \alpha^- \mathbb{E}[-Y] = \alpha^+ \mathbb{E}[Y] - \alpha^- \mathbb{E}[Y] = \alpha \mathbb{E}[Y]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Ainsi
$\mathbb{E}[X + \alpha Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\alpha Y] = \mathbb{E}[X] + \alpha \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[-\alpha Y] \leq \mathbb{E}[X + \alpha Y].$ □

Proposition 1.2. *(voir [20]). Soient* $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^{m+n}\right)$ *et* $(X, Y) \in \mathcal{H}^m \times \mathcal{H}^n$ *un couple de vecteurs aléatoires défini sur un espace d'espérance sous-linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$. *Alors nous avons*

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}^m$*, l'application* $\varphi(x, .) \in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) L'application $\mathbb{E}[\varphi(., Y)] \in C_{l,lip}(\mathbb{R}^m)$.

Démonstration. (i) En effet, pour tout $(x, y), (u, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, nous avons

$$|\varphi(x, y) - \varphi(u, z)| \leq C |(x, y) - (u, z)| \left(1 + |(x, y)|^k + |(u, z)|^k\right), C > 0, k \in \mathbb{N},$$

et ainsi par une simple application de l'inégalité $(a + b)^p \leq 2^p (a^p + b^p)$ pour $a, b > 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(x, z)| &\leq C |y - z| \left(1 + |(x, y)|^k + |(x, z)|^k\right) \\ &\leq C |y - z| \left(1 + \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{\frac{k}{2}} + \left(|x|^2 + |z|^2\right)^{\frac{k}{2}}\right) \\ &\leq C |y - z| \left(1 + 2^{\frac{k}{2}} \left(|x|^k + |y|^k\right) + 2^{\frac{k}{2}} \left(|x|^k + |z|^k\right)\right) \\ &\leq C' |y - z| \left(1 + \left(|y|^k + |z|^k\right)\right), \end{aligned}$$

où $C' = C \max\left(2^{\frac{k}{2}}, 1 + 2^{\frac{k}{2}+1} |x|^k\right)$. Par conséquent, $\varphi(x, .) \in C_{l,lip}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) De même, nous avons

$$|\varphi(x,Y)-\varphi(u,Y)| \leq C\,|x-u|\left(1+2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+|Y|^k\right)+2^{\frac{k}{2}}\left(|u|^k+|Y|^k\right)\right),$$

ce qui conduit à

$$\begin{array}{rcl} |\mathbb{E}[\varphi(x,Y)]-\mathbb{E}[\varphi(u,Y)]| & \leq & \mathbb{E}\,|\varphi(x,Y)-\varphi(u,Y)| \\ & \leq & C\,|x-u|\left(1+2^{\frac{k}{2}}\left(|x|^k+\hat{E}\left(|Y|^k\right)\right)+2^{\frac{k}{2}}\left(|u|^k+\hat{E}\left(|Y|^k\right)\right)\right) \\ & \leq & C''\,|x-u|\left(1+|x|^k+|u|^k\right), \end{array}$$

où $C''=C\max\left(2^{\frac{k}{2}},1+2^{\frac{k}{2}+1}\mathbb{E}\left(|Y|^k\right)\right)$, ce qui signifie que $\mathbb{E}[\varphi(.,Y)]$ appartient à $C_{l,lip}(\mathbb{R}^m)$. La preuve est ainsi achevée.

□

La notion d'indépendance qui suit joue un rôle important dans la théorie d'espérance sous-linéaire.

Définition 1.4. *Dans un espace d'espérance sous-linéaire* $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$, *un vecteur aléatoire* $Y=(Y_1,Y_2,...,Y_n)\,,Y_i\in\mathcal{H}$ *est dit indépendant par rapport à un autre vecteur aléatoire* $X=(X_1,X_2,...,X_m)\,,X_i\in\mathcal{H}$ *si pour toute fonction test* $\varphi\in C_{l,Lip}(\mathbb{R}^{m+n})$, *nous avons*

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\varphi(x,Y)]_{|x=X}\right].$$

Remarque 1.5. *Il est important de noter que la condition "Y est indépendant de X" ne signifie pas automatiquement que "X est indépendant de Y" (voir [39, 40]).*

1.2.3 Distribution $G-$normale

Après la définition de base ci-dessus, nous introduisons maintenant la notion fondamentale de la distribution $G-$normale.
Soient $X=(X_1,...,X_d)$ un vecteur aléatoire à $d-$dimension défini sur $(\Omega,\mathcal{H},\mathbb{E})$ et $G:\mathbb{S}_d\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$G(A):=\frac{1}{2}\mathbb{E}\left((AX,X)\right),$$

où $(.,.)$ est le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^d$. D'après Peng [41], il existe un sous-ensemble borné, convexe et fermé Γ de $\mathbb{R}^{d\times d}$, tel que

$$G(A):=\frac{1}{2}\sup_{\gamma\in\Gamma}\{tr[\gamma\gamma^*A]\},\ \text{pour tout } A\in\mathbb{S}_d.$$

Définition 1.5. *On dira que* X *suit une distribution* $G-$*normale si pour tout* $\varphi\in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$, *la fonction*

$$u(t,x) := \mathbb{E}\left[\varphi\left(x+\sqrt{t}X\right)\right], (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$

est l'unique solution de viscosité de l'équation parabolique aux dérivées partielles, appelée $G-$*équation de la chaleur, écrite comme suit :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - G\left(D^2 u\right) = 0, \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ \qquad\qquad u(0,x) = \varphi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

où $D^2 u = \left(\partial^2_{x_i x_j} u\right)_{i,j=1}^d$ *est la matrice hessienne de* u*.*

L'ensemble $\Sigma := \{\gamma\gamma^* : \gamma \in \Gamma\}$ caractérise le fait que la variance de X est incertaine. Notons que le cas où Σ est composé d'une seule matrice, ce qui correspond au cas de l'espérance linéaire classique, X est alors un vecteur aléatoire gaussien de matrice de variance-covariance Σ. La loi $G-$normale sera alors notée par $X \sim \mathcal{N}(0;\Sigma)$.

Remarque 1.6. *Le cas réel* $(d=1)$ *correspond à* $\Sigma = [\underline{\sigma}^2; \overline{\sigma}^2]$ *et* $G = G_{\overline{\sigma},\underline{\sigma}}$ *est la fonction sous-linéaire paramétrée par* $\underline{\sigma}$ *et* $\overline{\sigma}$ *donnée par la formule suivante :*

$$G(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}^2 \alpha^-\right), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $\underline{\sigma}^2 = \overline{\sigma}^2 > 0, \mathcal{N}(0;[\underline{\sigma}^2;\overline{\sigma}^2])$ *est juste, la distribution normale classique* $\mathcal{N}(0;\overline{\sigma}^2)$*.*

En effet, la fonction génératrice correspondante est dans ce cas $G(\alpha) = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\alpha$ et l'équation aux dérivées partielles devient l'équation de la chaleur classique

$$\partial_t u = \frac{\overline{\sigma}^2}{2}\partial^2_{xx} u, \ u\,|_{t=0} = \varphi,$$

qui admet comme unique solution la fonction

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\overline{\sigma}^2 t}\right) dy.$$

Ainsi, pour tout φ

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = u(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) dy.$$

Dans les deux situations suivantes, le calcul de $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ est facile :

•Pour tout φ convexe, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}^2}\right) dy.$$

En effet, pour tout $t \geq 0$ fixé, nous remarquons que la fonction $u(t,x) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right]$ est convexe, puisque

$$\begin{aligned} u(t, \alpha x + (1-\alpha) y) &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(\alpha x + (1-\alpha) y + \sqrt{t}X\right)\right] \\ &\leq \alpha\mathbb{E}\left[\varphi\left(x + \sqrt{t}X\right)\right] + (1-\alpha)\mathbb{E}\left[\varphi\left(y + \sqrt{t}X\right)\right] \\ &= \alpha u(t,x) + (1-\alpha) u(t,y). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\left(\partial_{xx}^2 u\right)^- = 0$ et par conséquent la $G-$équation de la chaleur 1.1 devient

$$\partial_t u = \frac{\overline{\sigma}^2}{2} \partial_{xx}^2 u, \quad u\,|_{t=0} = \varphi.$$

•Pour tout φ concave, on a

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\underline{\sigma}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2\underline{\sigma}^2}\right) dy,$$

en particulier

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[-X] = 0, \\ \mathbb{E}\left[X^2\right] &= \overline{\sigma}^2, -\mathbb{E}\left[-X^2\right] = \underline{\sigma}^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^4\right] &= 3\overline{\sigma}^4, \\ -\mathbb{E}\left[-X^4\right] &= 3\underline{\sigma}^4. \end{aligned}$$

1.3 $G-$calcul stochastique

Dans cette partie, on se propose de reprendre les principaux travaux de Peng [27, 43, 45] sur le $G-$calcul stochastique, qui généralise le calcul stochastique classique. On notera qu'à la différence du cas classique, la variation quadratique du $G-$mouvement Brownien est un processus non déterministe.

1.3.1 $G-$Mouvement Brownien

L'objet de ce paragraphe est d'introduire la notion du $G-$mouvement Brownien $d-$dimensionnel.

Définition 1.6. *Sur l'espace d'espérance sous-linéaire* $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ *, un processus* $d-$*dimensionnel* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est dit* $G-$*mouvement Brownien de dimension* d *(réel dans le cas où* $d = 1$*) si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $B_0 = 0$;

(ii) *pour chaque* $t, s \geq 0$*, l'accroissement* $B_{t+s} - B_s$ *est* $\mathcal{N}(0; t\Sigma)-$*distribué et est indépendant du vecteur* $(B_{t_1}, ..., B_{t_m})$*, pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $t_0, ..., t_m \in [0, s]$ *.*

Peng [40] a construit une $G-$espérance sous-linéaire $\mathbb{E}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{H})$ telle que le processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$ soit un $G-$mouvement Brownien. Dans toute la suite nous considérons ce processus canonique.
Selon la définition ci-dessus, nous avons la proposition suivante qui est utile pour les développements ultérieurs. Pour tout $a = (a_1, ..., a_d)^* \in \mathbb{R}^d$, on pose $B_t^a := (a, B_t)$.

Proposition 1.3. *(voir [20]). Pour tout* $a \in \mathbb{R}^d$*, le processus* $(B_t^a)_{t\geq 0}$ *est un* $G_{\underline{\sigma_a}, \overline{\sigma_a}}-$*mouvement Brownien réel de fonction génératrice* $G_{\underline{\sigma_a}, \overline{\sigma_a}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_a^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}_a^2 \alpha^-\right)$ *où* $\overline{\sigma}_a^2 = \mathbb{E}\left[(a, B_1)^2\right]$ *et* $\underline{\sigma}_a^2 = -\mathbb{E}\left[-(a, B_1)^2\right]$ *. En particulier,* $B_{t+s}^a - B_s^a \sim \mathcal{N}\left(0; [t\underline{\sigma}_a^2; t\overline{\sigma}_a^2]\right)$ *pour tout* $t, s \geq 0$.

Il résulte de cette proposition que toutes les composantes $(B_t^i)_{t\geq 0}$ de $(B_t)_{t\geq 0}$ sont également des $G-$mouvements Browniens. La fonction génératrice de $(B_t^i)_{t\geq 0}$ est dans ce cas définie par

$$G_i(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_i^2 \alpha^+ - \underline{\sigma}_i^2 \alpha^-\right),$$

où $\overline{\sigma}_i^2 = \mathbb{E}\left[(B_1^i)^2\right]$ et $\underline{\sigma}_i^2 = -\mathbb{E}\left[-(B_1^i)^2\right]$ pour tout $i \in \overline{1, d}$. Notons que d'après le cas unidimensionnel, nous avons :
Pour toute fonction convexe φ :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(B_{t+s}^i - B_t^i\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \overline{\sigma}_i^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2s\overline{\sigma}_i^2}\right) dy,$$

et si $\underline{\sigma}_i^2 > 0$, alors pour toute fonction concave φ :

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(B_{t+s}^i - B_t^i\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s \underline{\sigma}_i^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2s\underline{\sigma}_i^2}\right) dy.$$

En particulier, d'après Peng [27, 39, 40], nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left(B_t^i - B_s^i\right)^2\right] = \overline{\sigma}_i^2 (t-s), \mathbb{E}\left[\left(B_t^i - B_s^i\right)^4\right] = 3\overline{\sigma}_i^4 (t-s)^2,$$

$$\mathbb{E}\left[-\left(B_t^i - B_s^i\right)^2\right] = -\underline{\sigma}_i^2 (t-s), \mathbb{E}\left[-\left(B_t^i - B_s^i\right)^4\right] = -3\underline{\sigma}_i^4 (t-s)^2.$$

Remarque 1.7. *Dans [39], Peng a montré que $X \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)$ si et seulement si $aX + b\overline{X} \overset{d}{=} \sqrt{a^2+b^2}X$, pour tout $a, b \geq 0$ et pour toute variable aléatoire $\overline{X}$ indépendante de X telle que $\overline{X} \overset{d}{=} X$. Par conséquent, puisque les variables aléatoires*

$$\frac{B_{t_1}}{\sqrt{t_1}}, \frac{B_{t_2} - B_{t_1}}{\sqrt{t_2 - t_1}}, ..., \frac{B_{t_n} - B_{t_{n-1}}}{\sqrt{t_n - t_{n-1}}},$$

sont $\mathcal{N}(0,\Sigma)-$distribuées, alors il n'est pas difficile de prouver par récurrence que, pour tout $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$ et $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, la variable aléatoire

$$b_1^2 B_{t_1}^i + b_2^2 \left(B_{t_2}^i - B_{t_1}^i\right) + ... + b_n^2 \left(B_{t_n}^i - B_{t_{n-1}}^i\right) \sim \mathcal{N}(0, \left[\underline{\sigma}_i^2 A, \overline{\sigma_i}^2 A\right]),$$

où $A = b_1^2 t_1 + ... + b_n^2 (t_n - t_{n-1})$.

La notion de $G-$mouvement Brownien se généralise aux processus indexés par $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

Définition 1.7. *Soit $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ un autre $G-$mouvement Brownien $d-$dimensionnel défini sur $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{E})$ indépendant du processus canonique $(B_t)_{t\geq 0}$. Le processus $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ défini par*

$$W_t = \begin{cases} B_t \ \text{si } t \geq 0 \\ \widetilde{B}_{-t} \ \text{si } t < 0 \end{cases},$$

est appelé $G-$mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}$.

1.3.2 $G-$Intégrales stochastiques

Dans ce qui suit, nous discutons les intégrales stochastiques de type Itô, par rapport au $G-$mouvement Brownien $(B_t^i)_{t\geq 0}$, définies suivant une procédure usuelle (pour plus de détails voir [40, 41, 43]). Soit $T > 0$ et soit $\pi = (t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une partition de $[0, T]$. Soit $M_G^{p,0}([0,T])$ $(p \geq 1)$ la collection des processus simples de la forme suivante :

$$\eta_t(\omega) = \sum_j \xi_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

où $\xi_j \in \mathcal{L}_G^p\left(\Omega_{t_j}\right)$; $j \in \mathbb{N}$ et on note par $M_G^p([0,T])$ l'adhérence de $M_G^{p,0}([0,T])$ relativement par rapport à la norme

$$\|\eta\|_{T,p} = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\eta_s|^p \, ds\right)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Notons que $M_G^p([0,T])$ est un espace de Banach.

Remarque 1.8. *Tout processus déterministe continu X appartient à $M_G^p([0,t])$ pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $p \geq 1$.*

En effet il est facile de voir, grâce au théorème de la convergence dominée, que la suite de processus simples déterministes (X^n) définie pour tout $t \in [0,T]$ par

$$X_s^n = \sum_{j=0}^{n-1} X_{\frac{j}{n}t} \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{n}t, \frac{j}{n}t)}(s),$$

converge vers X pour la norme $\|.\|_{t,p}$.

Définition 1.8. *Pour tout $\eta \in M_G^{2,0}([0,T])$, la $G-$intégrale d'Itô est définie pour tout $t \geq 0$ par*

$$I(\eta) = \int_0^T \eta_s dB_s^i := \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \left(B_{t_{j+1}\wedge t}^i - B_{t_j \wedge t}^i\right).$$

L'application $I : M_G^{2,0}([0,T]) \to \mathcal{L}_G^2(\Omega_T)$ est continue et peut donc se prolonger par continuité à $M_G^2([0,T])$.

Nous présentons quelques propriétés principales de l'intégrale d'Itô par rapport au $G-$mouvement Brownien (B_t^i).

Proposition 1.4. *Soient $\eta, \theta \in M_G^2([0,T])$ et $0 \leq s \leq r \leq t$. Alors nous avons*

(i) $\int_s^t \eta_u dB_u^i = \int_s^r \eta_u dB_u^i + \int_r^t \eta_u dB_u^i$,

(ii) $\int_s^t (\alpha\eta_u + \theta_u) dB_u^i = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u^i + \int_s^t \theta_u dB_u^i$, *si $\alpha \in \mathbb{R}$ et θ est borné dans $\mathcal{L}_G^1(\Omega_s)$.*

Le processus de variation quadratique du $G-$mouvement Brownien est un processus très intéressant. On a vu que le $G-$mouvement Brownien est un processus de variance incertaine mais sans une moyenne incertaine. Cette incertitude est concentrée dans sa variation quadratique $\langle B^i \rangle$. Par ailleurs $\langle B^i \rangle$ lui-même est un processus de moyenne-variance.

Définition 1.9. *Soit $(\pi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivision de $[0,t]$ dont le pas (i.e. $\max_i \left\{\left|t_{i+1}^N - t_i^N\right|\right\}$) tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Le processus de variation quadratique $\langle B^i \rangle$ de B^i est défini par la limite suivante :*

$$\left\langle B^i \right\rangle_t := \lim_{\mu(\pi_N)\to 0} \sum_j \left(B_{t_{j+1}}^i - B_{t_j}^i\right)^2 = \left(B_t^i\right)^2 - 2\int_0^t B_s^i dB_s^i.$$

Par cette construction, nous pouvons dire que le processus de variation quadratique $(\langle B_t^i \rangle)_{t\geq 0}$ est un processus croissant nul en 0.

Remarque 1.9. *Une caractéristique importante de la théorie des $G-$espérances est que la variation quadratique du $G-$mouvement Brownien $(B^i)_{t\geq 0}$ n'est pas un processus déterministe en général sauf dans le cas où $\underline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_i$ (i.e. $(B^i)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien classique).*

Définition 1.10. *L'intégrale d'un processus $\eta \in M_G^{1,0}([0,T])$ par rapport à $\langle B^i \rangle_t$ est définie par*

$$I(\eta) = \int_0^T \eta_t d\left\langle B^i \right\rangle_t := \sum_{l=0}^{N-1} \xi_l \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t_{l+1}} - \left\langle B^i \right\rangle_{t_l} \right) \tag{1.2}$$

L'application $Q : M_G^{1,0}([0,T]) \to \mathcal{L}_G^1(\Omega)$ est continue et peut donc se prolonger par continuité à $M_G^1([0,T])$.

Corollaire 1.1. *(Voir [20]) Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, nous avons*

$$\underline{\sigma}_i^2 t \leq \left(\left\langle B^i \right\rangle_{t+s} - \left\langle B^i \right\rangle_s \right) \leq \overline{\sigma}_i^2 t.$$

Proposition 1.5. *Pour tout $\eta \in M_G^2([0,T])$ fixé, nous avons*

$$\underline{\sigma}_i^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \eta_t \, dB_t^i\right)^2\right] \leq \overline{\sigma}_i^2 \mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt\right] \tag{1.3}$$

Démonstration. Tout d'abord, nous avons

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \eta_t dB_t^i\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^i + \xi_{N-1}\left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i\right)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t \, dB_t^i\right)^2 + \eta_{N-1}^2\left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. 2\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t \, dB_t^i\right)\eta_{N-1}\left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\left(\int_0^{t_{N-1}} \eta_t dB_t^i\right)^2 + \xi_{N-1}^2\left(B_{t_N}^i - B_{t_{N-1}}^i\right)^2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \xi_i^2\left(B_{t_{i+1}}^i - B_{t_i}^i\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2\left(\left\langle B^i\right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i\right\rangle_{t_i}\right)\right].
\end{aligned}
$$

appliquons le corollaire 1.1 à cette dernière, nous trouvons

$$
\underline{\sigma}_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right) \leq \left(\left\langle B^i\right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i\right\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right)
$$

et en multipliant membre à membre par (η_i^2), nous obtenons

$$
\underline{\sigma}_i^2\eta_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right) \leq \eta_i^2\left(\left\langle B^i\right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i\right\rangle_{t_i}\right) \leq \overline{\sigma}_i^2\eta_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right),
$$

d'où en sommant par rapport à i et en appliquant $\mathbb{E}$, nous aboutissons à

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \underline{\sigma}_i^2\eta_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right)\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2\left(\left\langle B^i\right\rangle_{t_{i+1}} - \left\langle B^i\right\rangle_{t_i}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \overline{\sigma}_i^2\eta_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right)\right].
\end{aligned}
$$

De plus, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée de la manière suivante :

$$
\underline{\sigma}_i^2\mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \eta_t \, dB_t^i\right)^2\right] \leq \overline{\sigma}_i^2\mathbb{E}\left[\int_0^T \eta_t^2 \, dt\right],
$$

ce qui implique que l'inégalité 1.3 est bien vérifiée. □

Définition 1.11. *(Processus de co-variation quadratique du $G-$mouvement Brownien). Le processus de co-variation quadratique peut être formulé par*

$$\left\langle B^i, B^j \right\rangle = \frac{1}{4}\left[\left\langle B^i + B^j \right\rangle_t - \left\langle B^i - B^j \right\rangle_t\right].$$

Notons que les processus $(B^i + B^j)_{t\geq 0}$ et $(B^i - B^j)_{t\geq 0}$ sont des $G-$mouvements Browniens.

Remarque 1.10. *Il résulte de cette définition que* $\langle B^i \rangle = \langle B^i, B^i \rangle$.

Dans [18], Gao a obtenu l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy suivante (BDG, en abrégé).

Lemme 1.1. *Soit* $p \geq 2$, $\eta \in M_G^2$ *et* $0 \leq s \leq t$. *Alors,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s \eta_u^i dB_s^i\right|^p\right] \leq K t^{\frac{p}{2}-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\eta_u^i\right|^p\right] du,$$

où K est une constante positive indépendante de η.

Remarque 1.11. *Il s'ensuit d'après la remarque 1.7 ,que*

$$\int_0^t f(s) dB_s^i \sim N(0, [\underline{\sigma}_{i,t}^2, \overline{\sigma}_{i,t}^2]),$$

pour toute fonction déterministe $f \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$, *où* $\underline{\sigma}_{i,t}^2 = \underline{\sigma}^2 \int_0^t f^2(s)ds$ *et* $\overline{\sigma}_{i,t}^2 = \overline{\sigma}^2 \int_0^t f^2(s)ds$.

En outre, pour toute fonction convexe $\varphi \in C_{l,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)^n$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)\right] = \frac{1}{\overline{\sigma}_{i,t}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2\overline{\sigma}_{i,t}^2}\right)dy.$$

Nous obtenons, en particulier

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)^4 = 3\overline{\sigma}_{i,t}^4.$$

1.3.3 $G-$Formule d'Itô

Un outil fondamental du $G-$calcul stochastique est la $G-$formule d'Itô donnée dans un cadre vectoriel ([10, 20]). Dans la suite, nous adoptons souvent la convention de notation d'Einstein.

Théorème 1.2. *($G-$formule d'Itô [20]). Soit φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\partial_{x^i}\varphi$, $\partial^2_{x^j x^i}\varphi \in C_{b,Lip}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Soit $X = \left(X^i\right)$ un $G-$processus d'Itô $d-$dimensionnel avec*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t \alpha^i(s)\,ds + \int_0^t \theta_{kl}^i(s)\,d\left\langle B^k, B^l\right\rangle_s + \int_0^t \beta_k^i(s)\,dB_s^k,$$

où α^i, $\theta_{kl}^i \in M_G^1([0,T])$ et $\beta_k^i \in M_G^2([0,T])$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons q.s.

$$\begin{aligned}\varphi(X_t) - \varphi(X_0) &= \int_0^t \partial_{x^i}\varphi(X_u)\,\beta_k^i(u)\,dB_u^k + \int_0^t \partial_{x^i}\varphi(X_u)\,\alpha^i(u)\,du + \\ &\int_0^t \left[\partial_{x^i}\varphi(X_u)\,\theta_{kl}^i(u) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^j x^i}\varphi(X_u)\,\beta_k^i(u)\,\beta_l^j(u)\right] d\left\langle B^k, B^l\right\rangle_u.\end{aligned}$$

Dans toute la suite, nous posons :

$$dX_t^i dX_t^j = \sum_{k,l} \beta_k^i(t)\,\beta_l^j(t)\,d\left\langle B^k, B^l\right\rangle_t.$$

Il résulte que

$$dB_t^i dB_t^j = d\left\langle B^i, B^j\right\rangle_t \text{ et } dt dB_t^k = dt d\left\langle B^k, B^l\right\rangle_t = 0.$$

Ainsi la formule d'Itô s'écrit en notation différentielle :

$$d(\varphi(X_t)) = \partial_{x^i}\varphi(X_t)\,dX_t^i + \frac{1}{2}\partial^2_{x^j x^i}\varphi(X_t)\,dX_t^i dX_t^j.$$

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.2, qui nous sera très utile dans tous les développements ultérieurs.

Corollaire 1.2. *Soient (X_t), (Y_t) des $G-$processus d'Itô unidimensionnels. Alors nous avons la $G-$formule d'intégration par parties :*

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t,$$

Démonstration. Provient de la $G-$formule d'Itô appliquée au processus bidimensionnel (X_t, Y_t) avec $\varphi(x,y) = xy$. □

Chapitre 2: $G-$mouvement Brownien fractionnaire $d-$dimensionnel

Durant les dernières années, l'étude du calcul stochastique par rapport au mouvement Brownien fractionnaire a été intensivement émergée comme sujet intéressant et fascinant vue qu'elle s'applique à de nombreux domaines d'applications non seulement dans les mathématiques mais également dans les domaines de la physique, la finance, la télécommunication,..., citons entre autres [6, 21, 28, 50] pour plus d'applications. Diverses extensions du mouvement Brownien fractionnaire ont été obtenues par de nombreux auteurs (voir [4, 5, 7, 14]).
Dans cette première partie, l'attention est portée sur le $G-$mouvement Brownien fractionnaire $d-$dimentionnel ainsi que ses principales propriétés.

2.1 $G-$mouvement Brownien fractionnaire multivarié

L'objectif principal de cette première partie est d'introduire le $G-$mouvement Brownien fractionnaire multi-dimensionnel défini sur un espace d'espérance sous linéaire, que l'on désignera par la suite par l'abréviation $G-$mBfm. Cette étude a été inspirée par les résultats obtenus dans [4, 5, 14] dans le cas classique.
Dans tout ce qui suit, nous considèrons le cas où le $G-$mouvement Brownien $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est de dimension $d > 1$.

2.1.1 Représentation intégrale du $G-$mBfm

En suivant l'approche développée par Didier et Pipiras dans [14], nous donnons la représentation de ce processus comme étant l'intégrale de Wiener par rapport au $G-$mouvement Brownien W. Pour cela nous considèrons une matrice diagonale $H := diag\,[h_1, h_2, ..., h_d]$, $h_i \in (0, 1)$ pour tout $i = 1, 2, ..., d$ et $K_H\,(t, u)$ étant le noyau donné par la forme matricielle suivante :

$$K_H\,(t,u) := (t-u)_+^D - (-u)_+^D = diag\,[k_{h_1}\,(t,u)\,, k_{h_2}\,(t,u)\,, ..., k_{h_d}\,(t,u)]\,,$$

avec $D = H - \frac{1}{2}I$, où I désigne la matrice identité d'ordre d et $k_{h_i}\,(t,u) := (t-u)_+^{h_i-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{h_i-\frac{1}{2}}$. Nous entendons par a^D l'exponentielle de la matrice $D\log a$ pour tout $a > 0$. Nous posons $M_H = \Gamma\,(H + \frac{1}{2}I)^{-1}$, où $\Gamma\,(x)$ est la fonction usuelle Gamma. Notons que la matrice

$$\Gamma\left(H + \frac{1}{2}I\right) = diag\left[\Gamma\left(h_1 + \frac{1}{2}\right), \Gamma\left(h_2 + \frac{1}{2}\right), ..., \Gamma\left(h_d + \frac{1}{2}\right)\right],$$

est inversible.

Définition 2.12. *Le processus* $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ *défni par :*

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} K_H(t,u)\, M_H dW_u,$$

est appelé $G-$*mouvement Brownien fractionnaire multivarié de dimension* d *et de paramètre de Hurst la matrice* H*.*

Remarque 2.12.

- *L'une des particularités du* $G-$*mBfm est que lorsque* $H = \frac{1}{2}I$*, il s'identifie au* $G-$*mouvement Brownien (en abréviation* $G-$*mB) i.e.* $B_t^{\frac{1}{2}I} = B_t$*, pour tout* $t \geq 0$*.*
- *La présence de la matrice* M_H *est justifiée par le fait que si* $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *est le mouvement Brownien classique alors* $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ *est le mouvement Brownien fractionnaire classique.*

Remarque 2.13. *Les composantes* $\left(B_t^{H,i}\right)_{t\in\mathbb{R}}$ *du* $G-$*mBfm sont elles-même des* $G-$*mBf réels.*

Démonstration. En effet ; soit $C_{h_i} = \Gamma\left(h_i + \frac{1}{2}\right)^{-1}$, $i = 1, ..., d$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
B_t^{H,i} &= \sum_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \left(K_H(t,u)\, M_H\right)_{i,k} dW_u^k \\
&= \sum_{k,l=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \left(K_H(t,u)\right)_{i,l} \left(M_H\right)_{l,k} dW_u^k \\
&= \sum_{k,l=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} k_{h_i}(t,u)\, \delta_{i,l} C_{h_l} \delta_{l,k} dW_u^k,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$B_t^{H,i} = C_{h_i} \int_{\mathbb{R}} k_{h_i}(t,u)\, dW_u^i,$$

d'où le résultat désiré. □

2.1.2 Propriétés principales du $G-$mBfm

Dans ce présent paragraphe, nous abordons quelques propriétés essentielles du $G-$mBfm, à savoir l'autosimilarité du processus et la stationnarité de ses accroissements. En effet, la propriété d'autosimilarité a connu un essor considérable au cours des dernières années (puisqu'elle assure la modélisation de plein de phénomènes comme le traffic internet, le traitement d'image, les reliefs géographiques, les mathématiques financières,. . .) pour expliquer plusieurs phénomènes où l'autosimilarité du processus est justifiée, par exemple, par son intérêt dans les modélisations des fluctuations boursières ou de trafic de réseaux de télécommunications. Le lecteur pourra consulter les travaux de Huang [58] ainsi que les références citées.

Auto-similarité et Stationnarité des accroissemements du $G-$mBfm

La proposition suivante exprime l'auto-similarité du $G-$mBfm.

Proposition 2.6. *(Auto-similarité.) Le processus* $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ *est $H-$autosimilaire au sens que*

$$B_{at}^H \overset{d}{=} a^H B_t^H \text{ pour tout } a>0 \text{ et pour tout } t\in\mathbb{R}.$$

Démonstration. Comme B est $\frac{1}{2}I-$auto-similaire alors W est aussi $\frac{1}{2}I-$auto-similaire, par conséquent

$$\begin{aligned} K_H(at,s)\,M_H dW_s &= a^D K_H\left(t,\frac{s}{a}\right) M_H dW_s \\ &\overset{d}{=} a^D K_H\left(t,\frac{s}{a}\right) a^{\frac{1}{2}I} M_H dW_{\frac{s}{a}} \\ &\overset{d}{=} a^H K_H\left(t,\frac{s}{a}\right) M_H dW_{\frac{s}{a}}. \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $a>0$

$$B_{at}^H \overset{d}{=} a^H B_t^H.$$

□

Tout comme le mouvement Brownien fractionnaire classique, le $G-$mBfm possède également la propriété de stationnarité de ses accroissements.

Proposition 2.7. *(Stationnarité des accroissemements.) Le $G-$mBfm* $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ *est à accroissements stationnaires.*

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout $s,t\in\mathbb{R}$

$$B_t^H - B_s^H \overset{d}{=} B_{t-s}^H.$$

Observons que, selon Peng [15–17], le processus $\left(\widetilde{B}_v\right)_{v\in\mathbb{R}}$ défini par $\widetilde{B}_v = B_{u-v} - B_u$ $(u\in\mathbb{R})$ est un $G-$mouvement Brownien, cela veut dire que $\widetilde{B}_v \overset{d}{=} B_v$. Il s'ensuit que

$$B_t^H - B_s^H = \int_{\mathbb{R}} \left((t-u)_+^D - (s-u)_+^D\right) M_H dB_s = \int_{\mathbb{R}} \left((t-s-v)_+^D - (-v)_+^D\right) M_H d\widetilde{B}_v \overset{d}{=} B_{t-s}^H,$$

ce qui achève la démonstration. □

2.2 Approximation de la partie Riemann-Liouville du $G-$mBfm

A titre de rappel, le processus $\left(B_t^H\right)_{t\in\mathbb{R}}$ étant $G-$gaussien mais n'étant pas un $G-$processus d'Itô pour $H \neq \frac{1}{2}I$, nous ne pouvons donc considérer l'intégration de type Itô. Afin de résoudre ce problème, nous nous proposons dans ce paragraphe d'approximer sa partie Riemann-Liouville $\left(R_t^H\right)_{t\geq 0}$ par des $G-$processus d'Itô.

Tout comme le mouvement Brownien fractionnaire multivarié classique (voir [7, 20, 21]), le $G-$mBfm $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ admet également une représentation moyenne mobile qui s'exprime à l'aide du $G-$mouvement Brownien indexé par $\mathbb{R}$ à $d-$dimension $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ comme suit :

$$B_t^H := \int_{-\infty}^{0} \left[(t-u)^D - (-u)^D\right] M_H dW_u + \int_0^t (t-u)^D M_H dW_u, t \geq 0.$$

Cette forme intégrale fait apparaître la présence de deux intégrales de Wiener dont la première s'appelle la partie basse fréquence du $G-$mBfm et la seconde est sa partie haute fréquence. Or la rugosité des trajectoires du $G-$mBfm est principalement due à sa partie haute fréquence. De ce fait, nous nous concentrons uniquement sur cette partie appelée aussi, processus de Riemann-Liouville qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$R_t^H := \int_0^t (t-u)^D M_H dW_u = \int_0^t (t-u)^D M_H dB_u, t \geq 0.$$

Dans tout le reste de cette thèse, nous supposons que

$$\text{ou bien tous les } h_i \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \text{ou bien tous les } h_i \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), i = 1, 2, ..., d$$

et nous posons

$$R_t^{H,\varepsilon} = \int_0^t (t-u+\varepsilon)^D M_H dW_u, \varepsilon > 0.$$

L'idée principale consiste à approcher la partie Riemann-Liouville du $G-$mBfm, qui n'est généralement pas un $G-$processus d'Itô, par une suite de processus de type $G-$Itô. Ceci permet non seulement d'obtenir la $G-$EDS satisfaite par le processus $\left(R_t^{H,\varepsilon}\right)_{t\geq 0}$ mais aussi d'étudier les $G-$EDS des valeurs propres et des vecteurs propres du processus de Wishart correspondant.

Nous énonçons maintenant le premier lemme de ce chapitre dont le résultat va nous aider intensivement par la suite.

Lemme 2.2. *(Voir [13, 55]). Soit v une fonction à valeurs matricielles, définie par*

$$v(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,u)du,$$

où a et b sont deux fonctions réelles dérivables et f est une fonction à valeurs matricielles, dérivable par rapport à t. Alors v est dérivable et admet comme dérivée la matrice

$$v'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,u)du + f\left[t, b(t)\right] b'(t) - f\left[t, a(t)\right] a'(t).$$

Le théorème suivant est la clé de voûte pour démontrer nos résultats souhaités.

Théorème 2.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, le processus $\left(R_t^{H,\varepsilon}\right)_{t\geq 0}$ est un $G-$processus d'Itô $d-$dimensionnel satisfaisant la $G-$équation differentielle stochastique suivante :*

$$dR_t^{H,\varepsilon} = \varepsilon^D M_H dW_t + \left(\int_0^t D(t-u+\varepsilon)^{D-I} M_H dW_u\right) dt \tag{2.1}$$

Démonstration. Soit $\varphi(u)$ une matrice déterministe d'ordre d, différentiable par rapport à u. Une application directe de la $G-$formule d'intégation par parties donne

$$d\left(\varphi_u^{ij} W_u^j\right) = \varphi_u^{ij} dW_u^j + d\varphi_u^{ij} W_u^j + d\varphi_u^{ij} dW_u^j = \varphi_u^{ij} dW_u^j + d\varphi_u^{ij} W_u^j,$$

d'où en intégrant, nous trouvons

$$\int_0^t \varphi^{ij}(u)\, dW_u^j = \varphi^{ij}(t)\, W_t^j - \int_0^t d\varphi^{ij}(u)\, W_u^j$$

et en sommant par rapport à j, nous obtenons l'égalité entre les $i^{ième}-$coordonnées :

$$\left(\int_0^t \varphi(u)\, dW_u\right)_i = \left(\varphi(t)\, W_t\right)_i - \left(\int_0^t d\varphi(u)\, W_u\right)_i.$$

Ainsi

$$\int_0^t \varphi(u)\, dW_u = \varphi(t)\, W_t - \int_0^t d\varphi(u)\, W_u.$$

Soit maintenant la matrice diagonale $\varphi(u) = (t-u+\varepsilon)^D M_H$, alors φ est dérivable et admet comme dérivée la matrice

$$\varphi'(u) = -D(t-u+\varepsilon)^{D-I} M_H.$$

De plus

$$\varphi(t) = \varepsilon^D M_H = diag\left[\varepsilon^{h_1-\frac{1}{2}} C_{h_1}, ..., \varepsilon^{h_d-\frac{1}{2}} C_{h_d}\right],$$

par conséquent

$$R_t^{H,\varepsilon} = \varepsilon^D M_H W_t + I(t), \tag{2.2}$$

où

$$I(t) := \int_0^t M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} DW_u du.$$

Notons que la fonction déterministe $I(t)$ est dérivable, ce qui entraîne que

$$dR_t^{H,\varepsilon} = \varepsilon^D M_H dW_t + I'(t)dt.$$

Il résulte du lemme précédant avec

$$a(t) = t, b(t) = 0 \text{ et } f(t,u) = M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} DW_u,$$

que I admet comme dérivée

$$I'(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t,u)du - f(t,t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\left(M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} D\right) W_u du + M_H \varepsilon^{D-I} DW_t,$$

puisque $f(t,t) = M_H \varepsilon^{D-I} DW_t$.
Comme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} D\right) = -\frac{\partial}{\partial u}\left(M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} D\right),$$

alors

$$I'(t) = -\int_0^t \frac{\partial}{\partial u}\left(M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} D\right) W_u du + M_H \varepsilon^{D-I} DW_t.$$

En utilisant de nouveau la $G-$formule d'intégration par parties, nous obtenons

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial u}\left(M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} D\right) W_u du = M_H \varepsilon^{D-I} DW_t - \int_0^t M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} DdW_u,$$

d'où

$$I'(t) = \int_0^t M_H (t-u+\varepsilon)^{D-I} DdW_u.$$

Nous obtenons, finalement, la différentielle satisfaite par 2.2 :

$$dR_t^{H,\varepsilon} = \varepsilon^D M_H dW_t + I'(t)\,dt = \varepsilon^D M_H dW_t + \left(\int_0^t D\,(t-u+\varepsilon)^{D-I} M_H dW_u\right) dt,$$

d'où le résultat souhaité. □

2.2.1 Convergence dans $\mathcal{L}_G^2$

Dans ce qui suit, nous utiliserons le Lemme 2.3 :

Lemme 2.3. *Supposons que* $\frac{1}{2} < h_i < 1$, *alors pour tout* $a, b > 0$, *nous avons*

$$\left\|(a+b)^D - a^D\right\| \leq \left\|b^D\right\|,$$

où $\|A\| := \left(\sum_{i,j} A_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *est la norme Euclidienne classique de la matrice* A.

Démonstration. Nous avons

$$\left\|(a+b)^D - a^D\right\|^2 = \sum_{i=1}^d \left((a+b)^{h_i-\frac{1}{2}} - a^{h_i-\frac{1}{2}}\right)^2.$$

En utilisant l'inégalité $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ pour tout $0 < p < 1$, il résulte du fait que $0 < h_i - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, pour tout $i = 1, 2, ..., d$, que

$$(a+b)^{h_i-\frac{1}{2}} - a^{h_i-\frac{1}{2}} \leq b^{h_i-\frac{1}{2}},$$

et

$$\left[(a+b)^{h_i-\frac{1}{2}} - a^{h_i-\frac{1}{2}}\right]^2 \leq \left[b^{h_i-\frac{1}{2}}\right]^2$$

d'où en sommant par rapport à i, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^d \left[(a+b)^{h_i-\frac{1}{2}} - a^{h_i-\frac{1}{2}}\right]^2 \leq \sum_{i=1}^d \left[b^{h_i-\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Il s'ensuit que

$$\left\|(a+b)^D - a^D\right\|^2 \leq \sum_{i=1}^d b^{2\left(h_i-\frac{1}{2}\right)} = \left\|b^D\right\|^2,$$

d'où le résultat désiré. □

Proposition 2.8. *Pour tout processus matriciel déterministe* $\nu \in L^2([0,\infty[)$, *il existe une* *constante positive μ indépendante de ν telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t v_s dW_s\right|^2\right] \leq \mu \int_0^t \|v_s\|^2 ds \tag{2.3}$$

Démonstration. Nous avons, d'une part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t v_s dW_s\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d \left(\left|\int_0^t v_s dW_s\right|\right)_i^2\right] \\
& \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \int_0^t v_s^{i,j} dW_s^j\right)^2\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^d \int_0^t v_s^{i,j} dW_s^j\right]^2
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^d \int_0^t v_s^{i,j} dW_s^j\right]^2 &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^d \left(\int_0^t v_s^{i,j} dW_s^j\right)^2 + \sum_{m\neq k} \int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m \int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^d \mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^{i,j} dW_s^j\right]^2 + \sum_{m\neq k} \mathbb{E}\left(\int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m \int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^d \overline{\sigma}_j^2 \left[\int_0^t \left(v_s^{i,j}\right)^2 ds\right] + 2\sum_{m<k} \mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m \int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k\right],
\end{aligned}$$

où $\overline{\sigma}_j^2 = \mathbb{E}\left[\left(W_1^j\right)^2\right]$. Par conséquent

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t v_s dW_s\right|^2\right] \leq \sum_{i=1}^d \left\{\sum_{j=1}^d \overline{\sigma}_j^2 \left[\int_0^t \left(v_s^{i,j}\right)^2 ds\right] + 2\sum_{m<k} \mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m \int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k\right]\right\} \tag{2.4}$$

En appliquant la $G-$formule d'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
d\left[\int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m \int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k\right] &= v_t^{i,k}\left(\int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m\right) dW_t^k + v_t^{i,m}\left(\int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k\right) dW_t^m \\
&\quad + v_t^{i,k} v_t^{i,m} d\left\langle W^k, W^m\right\rangle_s,
\end{aligned}$$

d'où en intégrant

$$\begin{aligned}\int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m \int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k &= \int_0^t v_s^{i,k} \left(\int_0^s v_u^{i,m} dW_u^m \right) dW_s^k + \int_0^t v_s^{i,m} \left(\int_0^s v_u^{i,k} dW_u^k \right) dW_s^m \\ &\quad + \int_0^t v_s^{i,k} v_s^{i,m} d\left\langle W^k, W^m \right\rangle_s .\end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^{i,k} \left(\int_0^s v_u^{i,m} dW_u^m \right) dW_s^k \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^{i,m} \left(\int_0^s v_u^{i,k} dW_u^k \right) dW_s^m \right] = 0,$$

alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^{i,m} dW_s^m \int_0^t v_s^{i,k} dW_s^k \right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t v_s^{i,k} v_s^{i,m} d\left\langle W^k, W^m \right\rangle_s \right].$$

Rappelons que pour tout $t \geq 0$, le processus $W_t^k \pm W_t^m = (e_k \pm e_m, B_t)$ est un $G_\pm-$mouvement Brownien réel, où $(e_i)_{i=1}^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $G_\pm(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_\pm^2(k,m)\,\alpha^+ - \underline{\sigma}_\pm^2(k,m)\,\alpha^-\right)$ avec les paramètres $\overline{\sigma}_\pm^2(k,m) = \mathbb{E}\left((e_k \pm e_m, B_1)^2\right)$ et $\underline{\sigma}_\pm^2(k,m) = -\mathbb{E}\left(-(e_k \pm e_m, B_1)^2\right)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\left\langle W^k, W^m \right\rangle_t &= \frac{1}{4}\left(\left\langle W^k + W^m \right\rangle_t - \left\langle W^k - W^m \right\rangle_t\right) \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\overline{\mu}^2 - \underline{\mu}^2\right) t,\end{aligned}$$

où $\overline{\mu} = \max_{k<m} \overline{\sigma}_+(k,m)$ et $\underline{\mu} = \min_{k<m} \underline{\sigma}_-(k,m)$. Finalement, en utilisant l'inégalité 2.4, nous trouvons

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t v_s dW_s\right|^2\right] \leq \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\sum_{j=1}^d \overline{\sigma}_j^2 \left(v_s^{i,j}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\overline{\mu}^2 - \underline{\mu}^2\right) \sum_{k<m} v_s^{i,k} v_s^{i,m} \right) ds$$

et en posant $\mu = \max\left\{\overline{\sigma}_j^2, \frac{1}{4}\left(\overline{\mu}^2 - \underline{\mu}^2\right); j = 1, 2, ..., d\right\}$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t v_s dW_s\right|^2\right] \leq \mu \int_0^t \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \left(v_s^{i,j}\right)^2 + 2 \sum_{k<m} v_s^{i,k} v_s^{i,m} \right) ds = \mu \int_0^t \|v_s\|^2 ds,$$

d'où le résultat voulu. □

À ce niveau, nous énonçons le théorème principal de cette partie, basé sur la proposition et le lemme précédents.

Théorème 2.4. *Pour tout $t \geq 0$, les variables aléatoires $R_t^{H,\varepsilon}$ convergent vers R_t^H dans $L_G^2(\Omega)$ quand ε tend vers 0.*

Démonstration. **Le cas où $\frac{1}{2} < \mathbf{h}_i < 1$:**
D'après la Proposition 2.8, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|R_t^{H,\varepsilon} - R_t^H\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \left\|\left((t-u+\varepsilon)^D - (t-u)^D\right) M_H\right\| dW_u\right)^2 \\
&\leq \mu \int_0^t \left\|\left((t-u+\varepsilon)^D - (t-u)^D\right) M_H\right\|^2 du \\
&\leq \mu \int_0^t \left\|(t-u+\varepsilon)^D - (t-u)^D\right\|^2 \|M_H\|^2 \, du.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit, d'après le Lemme 2.3, que

$$\mathbb{E}\left[\left|R_t^{H,\varepsilon} - R_t^H\right|^2\right] \leq \mu \|M_H\|^2 \int_0^t \left\|\varepsilon^D\right\|^2 du \leq \mu \|M_H\|^2 \, t \sum_{i=1}^d \varepsilon^{2h_i - 1},$$

d'où $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} R_t^{H,\varepsilon} = R_t^H$ dans $L_G^2(\Omega)$.

Le cas où $0 < \mathbf{h}_i < \frac{1}{2}$: Pour tout $i = 1, 2, ..., d$, il existe $\theta \in (0,1)$ tel que

$$(t-s+\varepsilon)^{h_i - \frac{1}{2}} - (t-s)^{h_i - \frac{1}{2}} = \varepsilon \left(h_i - \frac{1}{2}\right) (t-s+\theta\varepsilon)^{h_i - \frac{3}{2}},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\left|(t-s+\varepsilon)^{h_i - \frac{1}{2}} - (t-s)^{h_i - \frac{1}{2}}\right|^2 &\leq \varepsilon^2 \left(h_i - \frac{1}{2}\right)^2 \sup_{0<\theta<1} |t-s+\theta\varepsilon|^{2h_i - 3} \\
&= \varepsilon^2 \left(h_i - \frac{1}{2}\right)^2 (t-s)^{2h_i - 3}, \text{ si} 0 \leq s \leq t.
\end{aligned}$$

En utilisant, la Proposition 2.8, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|R_t^{H,\varepsilon} - R_t^H\right|^2\right) &\leq \mu \int_0^t \left\|(t-s+\varepsilon)^D - (t-s)^D\right\|^2 \|M_H\|^2 \, ds \\
&\leq \mu \|M_H\|^2 \varepsilon^2 \sum_{i=1}^d \left(h_i - \frac{1}{2}\right)^2 \int_0^t (t-s)^{2h_i - 3} \, ds \\
&= \mu \|M_H\|^2 \varepsilon^2 \sum_{i=1}^d \left(h_i - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{t^{2h_i - 2}}{2h_i - 2},
\end{aligned}$$

ce qui assure la convergence souhaitée. □

Chapitre 3: Analyse stochastique du $(G, \varepsilon)-$processus de Wishart fractionnaire

Les matrices de Wishart constituent un autre ensemble de matrices aléatoires voisin des ensembles gaussiens. Elles se sont considérablement développées tant pour leurs diverses applications (en physique théorique, analyse de données statistiques, finance, télécommunications...) que pour leurs multiples liens avec de nombreux problèmes mathématiques (en algèbres d'opérateurs, combinatoire, théorie des nombres...). Elles jouent en particulier un rôle crucial dans la technique dite d'analyse de composantes principales [2, 12, 32].

La motivation originelle de Wishart était d'étudier la matrice de covariance empirique des échantillons gaussiens multivariés qui est une matrice hermitienne aléatoire semi-définie positive, appelée aujourd'hui matrice de Wishart. Ces aspects sont redevenus à la mode avec l'avènement de l'informatique et des masses de données de grande dimension. Pour plus de détails sur les matrices de Wishart et leurs propriétés, le lecteur est invité à se référer à [1, 7, 9, 13, 27, 28].

Tout le long de ce chapitre, nous nous interésserons particulièrement à l'étude des équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres orthogonaux du $(G, \varepsilon)-$processus de Wishart fractionnaire, en se basant sur le procédés de Gram-Shmidt. En outre, une comparaison asymptotique sera également démontrée. Ce chapitre constitue l'essentiel de cette thèse. Nous en donnons les principaux résultats.

Notons que dans [33], les auteurs traitent le cas des mouvements Browniens d'ellipsoïdes de Dynkin avec des méthodes analogues. Ils dérivent les équations différentielles stochastiques correspondantes et obtiennent un théorème de non-collision des valeurs propres (voir aussi [49],IV.361).

3.1 Le processus (G, ε) $-$Wishart fractionnaire

Dans le cas classique, le processus de Wishart fractionnaire peut présenter une corrélation en série des processus stochastiques alors que le processus de Wishart est un processus de Markov dont les incréments sont indépendants du passé, de sorte que le processus de Wishart puisse considéré comme "sans mémoire". La différence entre le processus de Wishart et le processus $\varepsilon-$Wishart fractionnaire est que le premier est gouverné par une équation différentielle stochastique (EDS) particulière, tandis que le second est gouverné par une EDS aux dérivées partielles. Pour plus de détails sur le processus de Wishart et le processus $\varepsilon-$Wishart fractionnaire (voir [47, 58]) et les références qui y sont contenues. Notons que le processus $\varepsilon-$Wishart fractionnaire devient le processus de Wishart lorsque l'indice de Hurst H est égal à $\frac{1}{2}I$.

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier le processus $\varepsilon-$Wishart fractionnaire dans le cadre de la $G-$espérance.

Définition 3.13. *Le processus* $(\Sigma_t^\varepsilon)_{t\geq 0}$ *défini par* $\Sigma_t^\varepsilon = R_t^\varepsilon \left(R_t^\varepsilon\right)^*$ *s'appelle le processus* $(G,\varepsilon)-$*Wishart fractionnaire.*

Dans toute la suite, les entrées de la matrice Σ^ε et les composantes du vecteur R^ε seront notées respectivement par $\Sigma^{\varepsilon ij}$ et $R^{\varepsilon i}$.
Dans le paragraphe suivant, avant d'entrer dans le vif du sujet et d'élaborer et prouver les principeaux résultats de cette thèse, nous donnons en premier temps, les valeurs propres de Σ^ε.
Les seules valeurs propres de Σ^ε sont 0 de multiplicité $(d-1)$ et $\lambda^\varepsilon := |R^\varepsilon|^2$ de multiplicité 1. En effet, le polynôme caractéristique de Σ^ε est donné par

$$\mathcal{P}^\varepsilon(\lambda) = \det\left(\Sigma^\varepsilon - \lambda I\right) = (-\lambda)^d \det\left(I - \frac{\Sigma^\varepsilon}{\lambda}\right), \text{pour tout } \lambda \neq 0.$$

En utilisant l'identité de Weinstein-Aronszajn, nous aboutissons à

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^\varepsilon(\lambda) &= (-\lambda)^d\left(1 - \frac{R^{\varepsilon,*}R^\varepsilon}{\lambda}\right)\\ &= (-\lambda)^d\left(1 - \frac{|R^\varepsilon|^2}{\lambda}\right)\\ &= (-\lambda)^{d-1}\left(\lambda - |R^\varepsilon|^2\right).\end{aligned}$$

La proposition suivante exprime la $G-$EDS de la valeur propre $\lambda^\varepsilon = |R^\varepsilon|^2$.

Proposition 3.9. *Pour tout* $i = 1, ..., d$, *nous avons*

$$\begin{aligned} d\lambda^\varepsilon(t) &= \sum_{i=1}^d 2R_t^{\varepsilon,i}\varepsilon^{h_i-\frac{1}{2}}C_{h_i}dB_t^i + \left(h_i - \frac{1}{2}\right)C_{h_i}R_t^{\varepsilon,i}\left(\int_0^t (t-u+\varepsilon)^{h_i-\frac{3}{2}}dB_u^i\right)dt \\ &\quad + \varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2 d\left\langle B^i\right\rangle_t \end{aligned} \tag{3.1}$$

La preuve de cette proposition se démontre aisément en s'appuyant essentiellement sur la $G-$formule d'intégration par parties.

Démonstration. La formule 2.1 peut être réecrite comme suit :

$$dR_t^{\varepsilon,i} = \varepsilon^{h_i-\frac{1}{2}}C_{h_i}dB_t^i + \left(h_i - \frac{1}{2}\right)C_{h_i}\left(\int_0^t (t-u+\varepsilon)^{h_i-\frac{3}{2}}dB_u^i\right)dt.$$

Par la suite, utilisons la $G-$formule d'intégration par parties, nous obtenons

$$d\lambda^\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^d\left(2R_t^{\varepsilon,i}dR_t^{\varepsilon,i} + dR_t^{\varepsilon,i}dR_t^{\varepsilon,i}\right) = 2\sum_{i=1}^d R_t^{\varepsilon,i}dR_t^{\varepsilon,i} + \sum_{i=1}^d \varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2 d\left\langle B^i\right\rangle_t,$$

ce qui prouve la formule 3.1. □

Remarque 3.14. *Il est bien connu que si B est un mouvement Brownien fractionnaire classique, alors Σ n'est autre que le processus de Wishart fractionnaire classique, qui a été largement étudié avec un large éventail d'applications dans de nombreux domaines tels que la technologie des communications, la physique nucléaire, la chromodynamique quantique,...etc.*

Remarque 3.15. *De façon similaire, le processus $\Sigma = RR^*$ admet uniquement deux valeurs propres : 0 de multiplicité $(d-1)$ et $\lambda := |R|^2$ de multiplicité 1, d'où, d'après le théorème 2.4, λ_t converge vers λ_t dans $\mathcal{L}_G^1(\Omega)$ lorsque ε tends vers 0 pour tout $t \geq 0$.*

3.1.1 Comparaison asympthotique

Après avoir donné la $G-$EDS des valeurs propres, nous allons maintenant présenter un résultat de comparaison asymptotique intermédiaire concernant la valeur propre λ^ε, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 3.5. *Pour tout $a > 0$ et $t \geq 0$, nous avons*

1. *la variable aléatoire $\lambda^\varepsilon(t) \in L_G^2(\Omega)$.*
2. *$\varepsilon^\alpha\ \lambda_t^\varepsilon = o(1)$ quand $\varepsilon \to 0$, q.s..*

Pour la démonstration de ce théorème, nous énonçons le lemme suivant qui sera utile par la suite. Dans ce qui suit, posons pour tout $p, q \in \overline{1,d}, \eta_t^{p,q} = R_t^p \xi_t^q$ où

$$\xi_t^q = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^{h_q - \frac{3}{2}}\, dB_s^q.$$

Lemme 3.4. *Pour tout $p, q = 1, ..., d$, nous avons*

$$\mathbb{E}\left((\eta_t^{p,q})^2\right) \leq \frac{3}{8}\overline{\sigma}^4 \left[\left(\frac{(t+\varepsilon)^{2h_p} - \varepsilon^{2h_p}}{h_p}\right)^2 + \left(\frac{(t+\varepsilon)^{2h_q-2} - \varepsilon^{2h_q-2}}{h_q - 1}\right)^2\right],$$

avec $\overline{\sigma} = \max_{1\leq i\leq d} \overline{\sigma}_i$.

Démonstration. En utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous trouvons

$$|\eta_t^{p,q}| \leq \left(\frac{|R_t^p|^2 + |\xi_t^q|^2}{2}\right)^2,$$

ensuite, par l'inégalité $(c+d)^2 \leq 2\left(c^2+d^2\right)$ pour tout $c, d \in \mathbb{R}$, nous aurons

$$|\eta_t^{p,q}| \leq \frac{|R_t^p|^4 + |\xi_t^q|^4}{2},$$

par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(|\eta_t^{p,q}|^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|R_t^p|^4\right)+\mathbb{E}\left(|\xi_t^q|^4\right)}{2}.$$

Compte tenu de la remarque 1.11 avec $f(s) = (t-s+\varepsilon)^{h_p-\frac{1}{2}}$ (resp. $(t-s+\varepsilon)^{h_q-\frac{3}{2}}$), nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(|R_t^p|^4\right) = 3\overline{\sigma}^4\left(\int_0^t (t-s+\varepsilon)^{2h_p-1}\,ds\right)^2 \leq \frac{3}{4}\overline{\sigma}^4\left(\frac{(t+\varepsilon)^{2h_p}-\varepsilon^{2h_p}}{h_p}\right)^2,$$

(resp. $\mathbb{E}\left(|\xi_t^q|^4\right) \leq \frac{3}{4}\overline{\sigma}^4\left(\frac{(t+\varepsilon)^{2h_q-2}-\varepsilon^{2h_q-2}}{h_q-1}\right)^2$), ceci entraîne

$$\mathbb{E}\left((\eta_t^{p,q})^2\right) \leq \frac{3}{8}\overline{\sigma}^4\left[\left(\frac{(t+\varepsilon)^{2h_p}-\varepsilon^{2h_p}}{h_p}\right)^2+\left(\frac{(t+\varepsilon)^{2h_q-2}-\varepsilon^{2h_q-2}}{h_q-1}\right)^2\right].$$

D'où l'inégalité voulue. □

Passons maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration. 1. Soit O_t^ε un vecteur propre associé à la valeur propre λ_t^ε. En premier lieu, observons que $\Sigma_t O_t = \lambda^\varepsilon(t)\,O_t$ et $\Sigma_0 = 0$, alors $\lambda_0^\varepsilon = 0$ et d'après la $G-$EDS 3.1, on en déduit que

$$\begin{aligned}|\lambda_t^\varepsilon| \;\leq\; & \sum_{i=1}^d \left\{2\varepsilon^{h_i-\frac{1}{2}}C_{h_i}\left|\int_0^t R_s^{\varepsilon,i}dB_s^i\right| + \left(h_i-\frac{1}{2}\right)C_{h_i}\left|\int_0^t \eta_s^{i,i}ds\right|\right.\\ & \left.+\left|\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\left\langle B^i\right\rangle_t\right|\right\}.\end{aligned}$$

Par une simple application de l'inégalité $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$, pour tout $a_i \geq 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\lambda_t^\varepsilon| \;\leq\; & 3d\sum_{i=1}^d \left\{4\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\left|\int_0^t R_s^{\varepsilon,i}dB_s^i\right|^2 + \left(h_i-\frac{1}{2}\right)^2 C_{h_i}^2\left|\int_0^t \eta_s^{i,i}ds\right|^2\right.\\ & \left.+\left|\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\left\langle B^i\right\rangle_t\right|^2\right\}.\end{aligned}$$

Compte tenu de l'inégalité de Hölder et le fait que $\langle B^i \rangle_t \leq \overline{\sigma}^2 t$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|\lambda_t^\varepsilon|^2\right) &\leq 3d\sum_{i=1}^{d}\Bigg\{4\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\overline{\sigma}^2\left|\int_0^t \mathbb{E}\left(R_s^{\varepsilon,i}\right)^2 ds\right| + \left(h_i-\frac{1}{2}\right)^2 C_{h_i}^2 t \\
&\qquad \int_0^t \left|\mathbb{E}\left(\left|\eta_s^{i,i}\right|^2\right) ds\right| + \overline{\sigma}^4\varepsilon^{4h_i-2}C_{h_i}^4 t^2\Bigg\} \\
&\leq 3d\sum_{i=1}^{d}\Bigg\{4\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\overline{\sigma}^2\int_0^t \left|\mathbb{E}\left(\lambda_s^\varepsilon\right) ds\right| + \left(h_i-\frac{1}{2}\right)^2 C_{h_i}^2 t \\
&\qquad \int_0^t \left|\mathbb{E}\left(\left|\eta_s^{i,i}\right|^2\right) ds\right| + \overline{\sigma}^4\varepsilon^{4h_i-2}C_{h_i}^4 t^2\Bigg\}
\end{aligned}$$

par la suite, en appliquant l'inégalité $2a \leq (1+a^2)$ à cette dernière, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|\lambda_t^\varepsilon|^2\right) &\leq 3d\sum_{i=1}^{d}\Bigg\{2\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\overline{\sigma}^2\int_0^t \mathbb{E}\left(\lambda_s^\varepsilon\right)^2 ds + \left(h_i-\frac{1}{2}\right)^2 C_{h_i}^2 t \\
&\qquad \int_0^t \left|\mathbb{E}\left(\left|\eta_s^{i,i}\right|^2\right) ds\right| + 2\overline{\sigma}^4\varepsilon^{4h_i-2}C_{h_i}^4 t^2\Bigg\}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.4, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée comme suit :

$$\mathbb{E}\left(|\lambda_t^\varepsilon|^2\right) \leq L\left(\varepsilon, t, h_i, d\right) + A(\varepsilon, t, h_i, d, \overline{\sigma}) + 6\overline{\sigma}^2 d\sum_{i=1}^{d}\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\int_0^t \mathbb{E}\left|\lambda_s^\varepsilon\right|^2 ds,$$

où

$$L\left(\varepsilon, t, h_i, d\right) = 6d\sum_{i=1}^{d}\left(\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2\overline{\sigma}^2 t + \overline{\sigma}^4\varepsilon^{4h_i-2}C_{h_i}^4 t^2\right)$$

et

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon, t, h_i, d, \overline{\sigma}) &= \frac{9}{8}\overline{\sigma}^4 dt\sum_{i=1}^{d}\left(h_i-\frac{1}{2}\right)^2 C_{h_i}^2\int_0^t\Bigg[\left(\frac{(s+\varepsilon)^{2h_i}-\varepsilon^{2h_i}}{h_i}\right)^2 \\
&\qquad + \left(\frac{(s+\varepsilon)^{2h_i-2}-\varepsilon^{2h_i-2}}{h_i-1}\right)^2 ds\Bigg].
\end{aligned}$$

En faisant appel au lemme de Gronwall, l'inégalité ci-dessus donne

$$\mathbb{E}\left(|\lambda_t^\varepsilon|^2\right) \leq \left(L\left(\varepsilon, t, h, d\right) + A(\varepsilon, t, h, d, \overline{\sigma})\right)\exp\left(6\overline{\sigma}^2 d\sum_{i=1}^{d}\varepsilon^{2h_i-1}C_{h_i}^2 t\right) < \infty.$$

2. En conclusion, $\mathbb{E}\left[\left(\varepsilon^{\alpha}\lambda_i^{\varepsilon}(t)\right)^2\right]$ converge vers 0 lorsque ε tend vers 0 alors $\varepsilon^{\alpha}\lambda_t^{\varepsilon}$ converge vers 0 $q.s.$ quand ε tend vers 0. La preuve est ainsi achevée.

□

3.2 $G-$Equations différentielles stochastiques des vecteurs propres orthogonaux

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier les équations différentielles stochastiques des vecteurs propres orthogonaux de Σ_t. Comme nous l'avons déjà mentionné, notre approche est essentiellement basée sur les techniques algébriques. En effet, les valeurs propres se touchent (la valeur 0 étant de multiplicité $(d-1)$, par conséquent nous ne pouvons pas appliquer l'approche de Bru comme dans [32].

Dans la suite, nous considérons $O_t^{\varepsilon,*}\Sigma_t^{\varepsilon}O_t^{\varepsilon} = \Lambda_t^{\varepsilon} := diag\left(\lambda^{\varepsilon}(t), 0, ..., 0\right)$ la factorisation de Σ_t^{ε} avec O_t^{ε} une matrice orthogonale et Λ_t^{ε} est la matrice diagonale. Soit le premier temps de collision

$$\tau^{\varepsilon} := \inf\left\{t > 0 : \lambda^{\varepsilon}(t) = 0\right\} = \inf\left\{t > 0 : R_i^{\varepsilon}(t) = 0 \text{ pour tout } i \in \overline{1,d}\right\}.$$

Maintenant, pour la commodité des notations, nous notons O_t (resp. $\Sigma_t, \Lambda_t, \lambda_i, O_t^*, \tau$) au lieu de O_t^{ε} (resp. $\Sigma_t^{\varepsilon}, \Lambda_t^{\varepsilon}, \lambda_i^{\varepsilon}, O_t^{\varepsilon,*}, \tau^{\varepsilon}$). Dans le but de simplifier les calculs, nous supposons que les hypothèses suivantes soient satisfaites :

($\mathbf{H}_1$) Il existe un processus réel et croissant u^j tel que $\left\langle W^i, W^j\right\rangle_t = \delta_{ij}u_t^j$ $q.s.$ pour chaque $i,j \in \overline{1,d}$ et $t \geq 0$, où δ_{uv} est le symbole de Kronecker.

($\mathbf{H}_2$) $h_i = h \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ pour tout $i \in \overline{1,d}$.

Nous avons $\underline{\sigma}^2 t \leq u_t \leq \overline{\sigma}^2 t$ où $\underline{\sigma} := \min\limits_i \underline{\sigma}_i$. Une remarque notable est que l'hypothèse ($\mathbf{H}_1$) est satisfaite dans le cas classique avec $u_t^j = t$ pour tout $t \geq 0$.

Le lemme suivant est utile pour le résultat principal qui suit.

Lemme 3.5. *Soient* $\alpha^{ij} := \frac{R^iR^i}{(R^1)^2+(R^i)^2}$ *et* $\beta^{ij} := R^1\alpha^{ij}$ *pour tout* $1 < i < j$. *Alors nous avons*

(i)

$$d\alpha^{ij} := \frac{1}{(R^1)^2+(R^i)^2}\left[-2\beta^{ij}dR^1 + \frac{R^j\left(\left(R^1\right)^2-\left(R^i\right)^2\right)}{(R^1)^2+(R^i)^2}dR^i\right] \tag{3.2}$$

(ii)

$$\begin{aligned} d\beta^{ij} \;=\; & \frac{1}{(R^1)^2+(R^i)^2}\left[\alpha^{ij}\left(1-2\left(R^1\right)^2\right)dR^1 + R^1R^idR^j\frac{R^1R^j\left(\left(R^1\right)^2-\left(R^i\right)^2\right)}{(R^1)^2+(R^i)^2}dR^i\right] \\ & -2\varepsilon^{2h-1}C_h^2\beta^{ij}du \end{aligned} \tag{3.3}$$

Démonstration. Notons que sous l'hypothèse $(\mathbf{H_2})$, $\xi_t^i = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^{h-\frac{3}{2}} dB_s^i$. Ainsi, la formule 2.1 devient

$$dR_t^i = \varepsilon^{h-\frac{1}{2}} C_h dB_t^i + \left(h - \frac{1}{2}\right) C_h \xi_t^i dt.$$

(i) La formule 3.2 provient de la $G-$formule d'Itô avec

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2}, X_t = \left(R^1, R^2, R^3\right)$$

et les faits suivants :

- $$d\left\langle R^i, R^j \right\rangle_t = \varepsilon^{2h-1} C_h^2 \delta_{ij} du_t,$$

qui provient de l'hypothèse $(\mathbf{H_1})$

- $$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{-2x_1 x_2 x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_2 x_3 (3x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}.$$

(ii) La formule 3.3 découle de la formule 3.2 et la $G-$formule d'intégration par parties. La preuve est ainsi achevée.

□

Maintenant, nous sommes prêts à énoncer et démontrer le résultat principal de cette thèse.

Théorème 3.6. *Les vecteurs propres orthogonaux de Σ_t satisfont les équations suivantes sur $\{t < \tau\}$,*

$$\begin{cases} dO_t^{i1} = dR_t^i, \\ dO_t^{i2} = -\delta_{i1} dR_t^2 + \delta_{i2} dR_t^1, \\ dO_t^{ij} = \delta_{i1}\left(-dR_t^j + \sum\limits_{k=2}^{j-1}\left[R_t^k d\alpha^{kj} + \alpha^{kj} dR_t^k + \varepsilon^{2h-1} C_h^2 \frac{R^j\left(\left(R^1\right)^2 - \left(R^k\right)^2\right)}{\left(R^1\right)^2 + \left(R^k\right)^2} du_t\right]\right) \\ \qquad - \sum\limits_{k=2}^{j-1} \delta_{ik} d\beta^{kj} + \delta_{ij} dR_t^1 \end{cases} \tag{3.4}$$

pour tout $i \in \overline{1, d}$ et pour tout $j \in \overline{3, d}$, où α^{kj} et β^{kj} sont définis dans le lemme précédent.

Démonstration. Nous en donnons la preuve en deux étapes.

Etape1 : Tout d'abord, construisons une base orthogonale de $\mathbb{R}^d$. Evidemment, puisque $\Sigma R = \lambda R$ alors $V^1 := R$ est un vecteur propre associé à $\lambda = |R|^2$. Il est facile de vérifier que

$$V^2 := \left(-R^2, R^1, 0, ..., 0\right)^*, V^3 := \left(-R^3, 0, R^1, 0, ..., 0\right)^*, ..., V^d := \left(-R^d, 0, ..., 0, R^1\right)^*,$$

sont les vecteurs propres associés à la valeur propre 0. Alors $\left\{V^1, V^2, ..., V^d\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^d$ mais non-orthogonale. Soit O la matrice orthogonale dont les colonnes sont $O^1, O^2, ..., O^d$, obtenues par le procédé de Gram-Shmidt. Alors nous obtenons

$$O^1 = V^1 = R, \tag{3.5}$$

$$O^2 = V^2 - \frac{(V^2, V^1)}{|V^1|^2} V^1 = V^2,$$

et

$$O^j = V^j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\left(V^j, V^k\right)}{|V^k|^2} V^k, \text{ pour tout } j \in \overline{3, d}.$$

Puisque $\left|V^k\right|^2 = (R^1)^2 + \left(R^k\right)^2$, $\left(V^k, V^1\right) = 0$ et $\left(V^k, V^l\right) = R^k R^l$ pour tout $k, l \in \overline{2, d}$, Alors

$$O^{i2} = -\delta_{i1} R^2 + \delta_{i2} R^1,$$

$$\begin{aligned} O^{i2} &= \delta_{i1}\left(-R^j + \sum_{k=2}^{j-1} \frac{R^j \left(R^k\right)^2}{(R^1)^2 + (R^k)^2}\right) - \sum_{k=2}^{j-1} \delta_{ik} \frac{R^1 R^k R^j}{(R^1)^2 + (R^k)^2} + \delta_{ij} R^1 \\ &= \delta_{i1}\left(-R^j + \sum_{k=2}^{j-1} R^k \alpha^{kj}\right) - \sum_{k=2}^{j-1} \delta_{ik} \beta^{kj} + \delta_{ij} R^1, j \in \overline{3, d} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Etape2 : Par la suite, compte tenu de la $G-$formule d'intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\left(R^k \alpha^{kj}\right) &= R^k d\alpha^{kj} + \alpha^{kj} dR^k + dR^k d\alpha^{kj} \\ &= R^k d\alpha^{kj} + \alpha^{kj} dR^k + \varepsilon^{2h-1} C_h^2 \frac{R^j \left((R^1)^2 - \left(R^k\right)^2\right)}{\left[(R^1)^2 + (R^k)^2\right]^2} du_t \end{aligned} \tag{3.7}$$

Par conséquent, le résultat souhaité 3.4 découle des formules 3.5, 3.6 et 3.7.

□

3.2.1 Non explosion des EDS des vecteurs propres

Pour éviter l'explosion des solutions des EDS des vecteurs propres du système 3.4, nous donnons le corollaire suivant.

Corollaire 3.3. *Nous avons $\tau = +\infty$ q.s..*

Démonstration. En appliquant la $G-$ formule d'Itô au processus positif $(U_t)_{0 \leq T \leq \tau}$ défini par $U := -\sum_{i=1}^{d} \log \left(R^i\right)^2$, nous obtenons

$$dU = \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{2}{R^i} dR^i - \frac{1}{\left(R^i\right)^2} dR^i dR^i \right)$$

et en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} dR_t^i &= \varepsilon^{h-\frac{1}{2}} C_h dB_t^i + \left(h - \frac{1}{2}\right) C_h \xi_t^i dt \\ dR_t^i dR_t^i &= \varepsilon^{2h-1} C_h^2 du_t, \end{aligned}$$

nous aboutirons à

$$\langle U \rangle_t = 4\varepsilon^{2h-1} C_h^2 \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{1}{\left(R_s^i\right)^2} du_s.$$

Il est clair que U est une martingale locale classique par rapport à sa filtration naturelle sous chaque mesure de probabilité $P \in \mathcal{P}$. Si $\tau < +\infty$ $q.s.$, alors il existe $P^0 \in \mathcal{P}$ telle que $P^0 (\tau = +\infty) < 1$, $\lim_{t \uparrow \tau} U_t = -\infty$ et U est continue sur $[0, \tau[$. Soit $\xi_t = \inf \{s \geq 0 : U_s > t\}$ l'inverse de $\langle U \rangle_t$. Par l'argument de Mc. Kean (voir [29],p.47), Bru [8] et Williams [56], le processus $\widetilde{B}_t = U_{\xi_t}$ est un mouvement Brownien classique sur $[0, \langle U \rangle_\tau[$ P^0 $p.s.$ sur $\{\tau < +\infty\}$ (voir [23],p.92). Ainsi

$$\lim_{t \uparrow \langle U \rangle_{(\tau)}} \widetilde{B}_t = \lim_{\xi_t \uparrow \tau} U_{\xi_t} = \lim_{t \uparrow \tau} U_t = -\infty,$$

ce qui est impossible pour un mouvement Brownien. Par conséquent $\tau = +\infty$ $q.s.$. □

Appendices

Annexe A: Processus et analyse stochastique de base

Nous donnons dans cette partie quelques notions de base sur le calcul matriciel et les processus matrices en général.

Définition 1.14. *(Processus stochastique matriciel)*
Une fonction mesurable $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $(t,w) \to X(t,w) = X_t(w)$ *est appelée un processus stochastique (variable matricielle) si* $X(t,w)$ *est une matrice aléatoire pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$.

Définition 1.15. *(Martingale locale)*
Un processus stochastique matriciel X *est appelé martingale locale, si chaque entrée de* X *est une martingale locale, i.e. s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt strictement monotones* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T_n \overset{p.s}{\to} \infty$, *tel que* $(X_{t\wedge T_n})_{i,j}$ *est une martingale pour tout* i,j.

Définition 1.16. *(Mouvement Brownien matriciel)*
Un mouvement Brownien matriciel B *dans* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *est une matrice composée de mouvements Browniens réels indépendants, i.e.* $B = (B_{ij})_{i,j}$ *où* B_{ij} *sont des mouvements Browniens indépendants et unidimensionnels,* $1 \le i \le n$, $1 \le j \le p$.

Définition 1.17. *(Semimartingale)*
Un processus stochastique matriciel X *est appelé semimartingale si* X *peut être décomposé en* $X = X_0 + M + A$ *où* M *est une martingale locale et* A *un processus adapté à variation finie.*

Théorème 1.7. *(La formule d'Itô matricielle sur un sous-ensemble ouvert)*
Soit $U \subseteq \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *un ouvert, et soit* X *une semimartingale continue à valeurs dans* U. *Soit* $f : U \to \mathbb{R}$ *continue et deux fois différentiable. Alors* $f(X)$ *est une semimartingale continue et*

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + tr\left(\int_0^t Df(X_s)^* \, dX_s\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,l=1}^{n}\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial X_{ij}\partial X_{kl}} f(X_s)\, d\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle_s , \end{aligned}$$

où $D = \left(\frac{\partial}{\partial X_{ij}}\right)_{i,j}$ *et* $d\langle X_{ij}, X_{kl}\rangle = dX_{ij}dX_{kl}$.

Démonstration. Voir Revuz et Yor ([48], Théorème 3.3 et Remarque 2, Chapitre IV] et ([47], Lemme 2.11) . □

A.1 L'Argument de McKean

Le théorème de Lévy nous donne un moyen facile de décider si une martingale locale continue est un mouvement Brownien.

Théorème 1.8. *(Théorème de Lévy)*
Soit B une martingale locale continue de dimension $p \times p$ telle que

$$\left\langle B^{ij}, B^{kl} \right\rangle_t = \left\{ \begin{array}{c} t, \text{ si } i = k \text{ et } j = l \\ 0, \text{ sinon} \end{array} \right\},$$

Pour tout $i, j, k \in \{1, ..., p\}$ et $B_0 = 0$. Alors B est un mouvement Brownien $p-$dimensionnel.

Démonstration. Il suffit de montrer que $X := vec(B)$ est un mouvement Brownien p^2-dimensionnel. Soient $a, b \in \{1, ..., p^2\}$. Alors, il existe $i, j, k, l \in \{1, ..., p\}$ tel que $a = p(j-1) + i$ et $b = p(l-1) + k$. Clairement, $i = k$ et $j = l$ impliquent $a = b$, et inversement. Ainsi,

$$\left\langle X^a, X^b \right\rangle = \left\langle B^{ij}, B^{kl} \right\rangle = t 1_{\{i=k\}} 1_{\{j=l\}} = t 1_{\{a=b\}}.$$

On conclut par le théorème 40, chapitre 2 Protter [46], [9] que X est un mouvement Brownien p^2-dimensionnel. □

Pour chaque temps d'arrêt fini τ_0 on dira que M est une martingale locale sur l'intervalle stochastique $[0, \tau_0]$ si le processus arrêté $(M_{t \wedge \tau_0})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale locale. Le prochain théorème nous montre que toute martingale locale continue et arrêtée est l'arrêt d'un mouvement brownien après changement de temps.

Théorème 1.9. *Soit $0 < \tau_0 < \infty$ un temps d'arrêt et M est une martingale locale continue non identiquement nulle sur l'intervalle $[0, \tau_0]$. Soit*

$$T_t := \inf \{s : \langle M, M \rangle_s > t\} \text{ (Avec la convention } \inf\{\emptyset\} = +\infty).$$

Alors $B_t := M_{T_t}$ est un $(\mathcal{F}_{T_t})-$mouvement Brownien arrêté sur l'intervalle stochastique $\left[0, \langle M, M \rangle_{\tau_0}\right)$, $\langle M, M \rangle_{\tau_0} > 0$ p.s., i.e B est un mouvement Brownien arrêté à $\langle M, M \rangle_{\tau_0}$ par rapport à la filtration définie par

$$\mathcal{F}_{T_t} = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T_t \leq s\} \in \mathcal{F}_s; \ s \in \mathbb{R}_+\}$$

De plus, on a $M_t = B_{\langle M, M \rangle_t}$.

Démonstration. Observons que T_t est l'inverse continu à droite de $\langle M, M \rangle_s$. Comme M est continue, alors $\langle M, M \rangle$ l'est aussi, on en déduit que $\langle M, M \rangle_{T_t} = t$ sur $\left\{T_{\langle M, M \rangle_t} \geq t\right\}$ (Voir Revuz et Yor [48], p.7 − 8 pour plus de détails).
Supposons $\langle M, M \rangle_{\tau_0} = 0$. Comme $\langle M, M \rangle$ est un processus croissant et $\langle M, M \rangle_t = 0$ pour tout $t \in [0, \tau_0]$, alors $E(\langle M, M \rangle_t) = 0$ pour tout $t \in [0, \tau_0]$. D'après le Corollaire 3 du chapitre II Protter [46], il résulte que $E(M_t^2) = 0$, d'où $M_t = 0$ pour tout $t \in [0, \tau_0]$, ce qui est une contradiction.

L'ensemble $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une famille de temps d'arrêt, car M est adaptée. Observons que

$$\langle M,M\rangle_{\tau_0} > t \Rightarrow T_t \leq \tau_0.$$

Par conséquent, $T_t < \infty$ sur $\{\tau_0 < \infty\}$. D'après les propositions 4.8 et 4.9, chapitre I de Revuz et Yor [48] on conclut que le processus arrêté M_{T_t} est $\mathcal{F}_{T_t}-$mesurable. En outre,

$$\langle B,B\rangle_t = \langle M,M\rangle_{T_t} = t,$$

comme mentionné ci-dessus et d'après le théorème (5.1.2) on en déduit que B est un $\left(\mathcal{F}_{T_t}\right)-$mouvement Brownien arrêté sur $\left[0, \langle M,M\rangle_{\tau_0}\right)$.
Pour prouver que M est un mouvement Brownien aprés changement de temps, il suffit d'observer que $T_{\langle M,M\rangle_t} > t$ si et seulement si $\langle M,M\rangle$ est constant sur $\left[t, T_{\langle M,M\rangle_t}\right]$. Comme M et $\langle M,M\rangle$ sont constants sur les mêmes intervalles, alors on a $M_{T_{\langle M,M\rangle_t}} = M_t$ d'où $B_{\langle M,M\rangle_t} = M_t$. $\square$

Annexe B: Mouvement Brownien fractionnaire classique

Cette partie consiste à rappeler, d'une manière succincte, le mouvement Brownien fractionnaire classique, noté mBf dans le cas unidimensionnel, et nous nous sommes également intéressés à la généralisation de ce processus au cas vectoriel classique "mouvement Brownien fractionnaire multivarié", noté mBfm.

B.1 Cas univarié

Les définitions développées ici peuvent être retrouvées dans le travail de Mandelbrot et Van Ness [28] et les références qui y sont contenues.

Définition 2.18. *Un mouvement Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst $h \in \left]0,1\right[$, noté $\{B_h(t)\}_{t\geq 0}$ est le seul processus Gaussien réel centré, nul à l'origine et continu, admettant pour tous $t,s \geq 0$ la fonction de covariance :*

$$Cov\left(B_h(s)\,B_h(t)\right) = \frac{C_h}{2}\left(s^{2h} + t^{2h} - |s-t|^{2h}\right),$$

où C_h est une constante positive qui ne dépend que de h.

Remarque 2.16.
- *Lorsque $C_h = 1$, le mBf sera dit mBf standard.*
- *Les cas limites $h = 0$ et $h = 1$ présentent des particularités par rapport aux cas intermédiaires, cependant le cas $h = \frac{1}{2}$, coïncide avec le mouvement Brownien standard (dit aussi le processus de Wiener et noté mB en abrégé).*

Remarque 2.17. *Une autre notion d'une importance majeure, c'est la notion de la mémoire longue d'un processus stochastique, dite aussi la dépendance à long terme. Plusieurs définitions peuvent être données selon le domaine envisagé (domaine temporel ou fréquentiel).*

Propriétés Parmi les différentes propriétés du mBf, nous citons brièvement qu'il est :

Remarque 2.18.
- *Un processus gaussien de variance t^{2h}.*
- *A accroissements non indépendants pour $h \neq \frac{1}{2}$ et sa variation quadratique est presque sûrement infinie sur tout intervalle pour $h < \frac{1}{2}$.*
- *Ses trajetoires sont localement höldériennes d'ordre $\gamma < h$.*
- *Pour tout $h \in \left]0,1\right[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, il est ni une semi-Martingale et ni un processus Markovien.*
- *Les accroissements du mBf ne sont indépendants que lorsque $h = \frac{1}{2}$ (c'est à dire dans le cas du MB).*

B.1.1 Propriétés principales du mBf

Le mBfm possède plusieurs propriétés remarquable. Résumons ici quelques propriétés déjà établies par plusieurs auteurs et qui sont présentées avec plus de détails dans [26].

- **Auto-similarité du mBf :** Une des propriétés notable du mBf est son auto-similarité. Le mBf de paramètre de Hurst h est un processus $h-$autosimilaire : ce qui signifie que $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\forall a > 0$ on a l'égalité en loi suivante :

$$\{B_h(at)\}_{t\in\mathbb{R}} \overset{loi}{=} \left\{a^h B_h(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

- **A accroissements stationnaires :** Le mBf est un processus à accroissements stationnaires : c'est-à-dire

$$\forall s \in \mathbb{R}, \{B_h(t+s) - B_h(s)\}_{t\in\mathbb{R}} \overset{loi}{=} \{B_h(t) - B_h(0)\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

- **Continuité** : Le mBf est un processus admettant des trajectoires continues, nulle part dérivables.

Toutes ces propriétés ont rendu le mouvement brownien fractionnaire très attractif pour les applications.

Proposition 2.10. *Pour tout $h \in]0,1[$, le mouvement Brownien fractionnaire $\{B_h(t)\}_{t\geq 0}$ est $\gamma-$Höldérien pour tout $\gamma < h$.*

Démonstration. Nous avons

$$\mathbb{E}\left(\left|B_t^h - B_s^h\right|^2\right) = \mathbb{E}\left(\left|B_t^{2h} - 2B_t^h B_s^h + B_s^{2h}\right|\right),$$

par l'application de la linéarité de l'espérance, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|B_t^{2h} - 2B_t^h B_s^h + B_s^{2h}\right|\right) &= \mathbb{E}\left(\left|B_t^{2h}\right|\right) - 2\mathbb{E}\left(\left|B_t^h B_s^h\right|\right) + \mathbb{E}\left(\left|B_s^{2h}\right|\right)\\ &= \left|t^{2h}\right| + \left|s^{2h}\right| - \left|t^{2h} + s^{2h} - (t-s)^{2h}\right|\\ &= |t-s|^{2h}.\end{aligned}$$

Donc nous avons

$$\mathbb{E}\left(\left|B_t^h - B_s^h\right|^2\right) = |t-s|^{2h}.$$

Prenons $\alpha = 2, d = 1$, d'où $\varepsilon = 2h$. D'après le théorème de Kolmogorov, $\mathrm{B}_h(t)$ a une modification (version) $\widetilde{B}_h(t)$ dont ses trajectoires sont Höldérien de paramètre $\alpha < h$. $\square$

La dépendance à long et à court terme

Définition 2.19. *Un processus stationnaire* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *est dit à long terme si* $r(n) = Cov(X_k, X_{k+n})$ *satisfait :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{cn^{-\alpha}} = 1,$$

pour $\alpha \in (0,1)$ et c est une constante.
Le mouvement Brownien fractionnaire possède la propriété de longue dépendance. Cette propriété est décrite de la manière suivante :

Proposition 2.11. *Le mouvement Brownien fractionnaire présente une dépendance à long terme si* $h > \frac{1}{2}$, *et une dépendance à court terme si* $h < \frac{1}{2}$.

Démonstration. Nous considèrons :

$$X_k = B_k^h - B_{k-1}^h, X_{k+n} = B_{k+n}^h - B_{k+n-1}^h.$$

Puisque le mouvement Brownien fractionnaire est centré, alors

$$\begin{aligned} r(n) &= \mathbb{E}\left(X_k X_{k+n}\right) = \mathbb{E}\left[\left(B_k^h - B_{k-1}^h\right)\left(B_{k+n}^h - B_{k+n-1}^h\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[B_1^h\left(B_{n+1}^h - B_n^h\right)\right] = \mathbb{E}\left(B_1^h B_{n+1}^h\right) - \mathbb{E}\left(B_1^h B_n^h\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(n+2)^{2h} - 2n^{2h} + (n-1)^{2h}\right], \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} r(n) &= \frac{1}{2}n^{2h}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2h} - 2 + \left(n - \frac{1}{n}\right)^{2h}\right] \\ &= \frac{n^{2h}}{2}\left[\left(1+\frac{2h}{n}\right) + \frac{h(2h-1)}{n^2} - 2 + 1 - \frac{2h}{n}\right. \\ &= \left. + \frac{h(2h-1)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= h(2h-1)n^{2h-2} + o(n^{2h-2}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $h > \frac{1}{2}$, nous obtenons

$$r(n) > 0 \text{ et } \sum_n r(n) = \infty$$

et pour $h < \frac{1}{2}$, nous avons

$$r(n) < 0 \text{ et } \sum_n r(n) < \infty$$

La preuve est ainsi achevée. □

Remarque 2.19. *Si un processus stationnaire* $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ *est à dépendance à long terme, la dépendance entre* X_k *et* X_{k+1} *diminue doucement quand* $n \to \infty$ *et* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$.

Remarque 2.20. *La dépendance à long terme est étroitement associée à la propriété de l'auto-similarité des processus stochastiques auto-similaires à accroissements stationnaires. La connexion est déterminée par l'indice d'auto-similarité de processus consideré qui nous renseigne sur la nature de sa mémoire : courte ou longue.*

Dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff d'un mBf de paramètre $h \in]0,1[$ est presque sûrement égale à $2-h^2$, ce qui implique que :

- Si $h < \frac{1}{2}$ alors les trajectoires sont plus irrégulières que le mouvement Brownien. Il y a phénomène d'anti-persistance, ainsi par exemple en finance une période de hausse aura tendance à être suivie par une période baissière et vice versa.
- Si $h > \frac{1}{2}$ alors les trajectoires sont plus régulières que le mouvement Brownien. Il y a phénomène de persistance, ainsi par exemple en finance une période de hausse aura tendance à se poursuivre.

B.1.2 Représentation par moyenne mobile du mBf

Il existe divers représentations du mouvement Brownien fractionnaire, nous nous focalisons sur la représentation par moyenne mobile (voir les travaux de Mandelbrot et Van Ness (1968) [28]), où le mouvement Brownien fractionnaire est défini, à une constante multiplicative près, par l'intégrale de Wiener suivante :

$$B_h(t) := \frac{1}{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}} \left[(t-s)_+^{h-\frac{1}{2}} - (-s)_+^{h-\frac{1}{2}}\right] dW_s,$$

où $x_+ = \max\{x, 0\}$, $\Gamma(x)$ désigne la fonction usuelle Gamma et W est un bruit blanc réel. Pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$B_h(t) := \frac{1}{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)} \left[U_t + \int\limits_0^t (t-s)^{h-\frac{1}{2}}\, dW_s\right],$$

où $U_t = \int\limits_{-\infty}^{0} \left[(t-s)^{h-\frac{1}{2}} - (-s)^{h-\frac{1}{2}}\right] dW_s$. Supposons que $\frac{1}{2} < h < 1$, alors U_t est un processus ayant des trajectoires absolument continues et nous ne considèrons que l'intégrale fractionnaire stochastique ci-dessous :

$$\widehat{B}_h(t) = \int_0^t (t-s)^{h-\frac{1}{2}}\, dW_s.$$

Le terme $\widehat{B}_h(t)$ joue un rôle essentiel dans la présentation d'une dépendance à long terme, communément, défini comme un mouvement Brownien fractionnaire. $\widehat{B}_h(t)$ n'est pas une semi-martingale mais il peut être approché par une semi-martingale (voir [13,53,55]). Notons que le cas où $0 < h < \frac{1}{2}$ a été étudié dans [54].

B.2 Cas multivarié

Le recueil de données temporelles multivariées intervient dans de nombreuses applications, par exemple, neurosciences, économie, sociologie, physique,...etc et de telles séries exhibent souvent des propriétés spécifiques telles que la fractalité, la longue dépendance, l'autosimilarité. En ce sens, il paraît pertinent de s'intéresser à une alternative au mBf dans un cadre multivarié. En effet, un mouvement Brownien fractionnaire multivarié (mBfm) est un processus nul à l'origine, gaussien, à accroissements stationnaires et autosimilaires.
Après avoir défini le mBf univarié et énoncé les différentes propriétés en suivant principalement [28] nous donnons à présent une version généralisée du mBf que l'on note par mBfm.

B.2.1 Définition et propriétés

Il s'agit du processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Le mouvement Brownien fractionnaire multivarié est une extension multivariée naturelle des mBfs. Il a été défini et étudié dans [14] comme le seul processus multivarié gaussien autosimilaire à accroissements stationnaires. La définition axiomatique est la suivante :

Définition 2.20. *Un mouvement Brownien fractionnaire multivarié de paramètre $H \in (0,1)^d$ est un processus $d-$multivarié partant de $0 \in \mathbb{R}^d$ et ayant les propriétés ci-dessous :*

- *Il est gaussien.*
- *Il est auto-similaire de paramètre $H \in (0,1)^d$.*
- *Il est à accroissements stationnaires*

autosimililarité multivariée

L'autosimilarité est ici entendue au sens vectoriel. En dépit de son importance théorique et pratique, le modèle mBf n'arrive pas à fournir un cadre théorique universel pour l'invariance d'échelle puisque la plupart des contextes d'application modernes impliquent l'enregistrement de séries temporelles multivariées qui nécessitent alors d'être analysées conjointement. L'autosimililarité multivariée implique que l'exposant de Hurst H fasse maintenant place à une matrice de Hurst.

La détection d'anomalies repose souvent sur une modélisation statistique du trafic normal. Parmi les diverses tentatives, l'autosimilarité et le mouvement Brownien fractionnaire ont montré qu'il était possible de modéliser pertinemment et de façon robuste la statistique du trafic internet à travers une large variété de réseaux, trafics et depuis les premiers âges d'internet jusqu'aux collections de données les plus récentes.

Définition 2.21. *Un processus multivarié* $(X(t) = (X_1(t),\cdots, X_p(t)))_{t\in\mathbb{R}}$ *est dit auto-similaire s'il existe un vecteur* $h = (h_1, h_2, ..., h_d)$ *tel que pour tout* $a > 0$,

$$(X_1(at), \cdots, X_d(at))_{t\in\mathbb{R}} \overset{loi}{=} (a^{h_1}X_1(t), \cdots, a^{h_d}X_d(t))_{t\in\mathbb{R}}.$$

Différentes représentations du mBfm furent établies et démontrées. Nous nous sommes focalisés en particulier sur la représentation moyenne mobile obtenue et étudiée par Didier et Pipiras [14].

Théorème 2.10. *(Didier et Pipiras, [14]) . Soit* $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ *un mBfm de paramètre* $H = (h_1, h_2, ..., h_d)$*. Supposons que pour tout* $i \in \{1, ..., d\}$, $h_i \neq \frac{1}{2}$*. Le mBfm* $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ *admet une représentation moyenne mobile qui s'exprime à l'aide du* $G-$*mouvement Brownien indéxé par* $\mathbb{R}$ *à* $d-$*dimension* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *comme suit :*

$$B_t^H := \int_{-\infty}^{0} \left[(t-u)^{h-\frac{1}{2}I} - (-u)^{h-\frac{1}{2}I}\right] M_H dW_u + \int_{0}^{t} (t-u)^{h-\frac{1}{2}I} M_H dW_u, t \geq 0.$$

où M_H *est une matrice avec des entrées à valeurs réelles et* W *est un mouvement Brownien à* $d-$*dimension.*

Démonstration. Cette représentation est déduite de la représentation générale obtenue dans [14]. □

Conclusion et perspectives

Au terme de ce travail de recherche, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des matrices aléatoires, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

En premier lieu, nous avons défini un nouveau processus appelé $G-$mouvement Brownien fractionnaire multivarié $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ à l'aide du $G-$mouvement Brownien multidimensionnel, où le paramètre de Hurst est une matrice diagonale $H := diag\,[h_1, h_2, ..., h_d]$, $h_i \in (0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, pour tout $i = 1, 2, ..., d$.

A ce niveau, les principales difficultés rencontrées dans ce travail sont dues au fait qu'en plus de la non linéarité de l'espérance, le processus des co-variations quadratiques n'est pas déterministe. Pour contourner ces difficultés et aussi la délicatesse de l'indépendance dans le cadre non linéaire, nous avons supposé dans notre modèle que les co-variations quadratiques des entrées sont nulles. Ajouté à cela, le mBf n'est pas une semimartingale, ainsi, la théorie classique de l'intégrale stochastique ne s'applique pas. Pour cette raison, nous avons donné, en deuxième lieu, une approximation (R_t^ε) dans $\mathcal{L}_G^2$ du processus de Riemann-Liouville lié à (B_t^H) par des $G-$processus de type Itô, qui a été la clé de nos résultats.

Par la suite, nous avons obtenu, sous l'hypothèse que tous les éléments diagonaux de H sont égaux dans $(0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ et en se basant sur des techniques d'algèbre, un système d'équations différentielles stochastiques des vecteurs propres orthogonaux du $(G, \varepsilon)-$processus de Wishart fractionnaire défini par la matrice $R_t^\varepsilon\,(R_t^\varepsilon)^*$, dont les seules valeurs propres sont 0 de multiplicité $(d-1)$ et $\left|R_t^{H,\varepsilon}\right|^2$ de multiplicité 1.

D'autre part, de nombreuses études sur le comportement asymptotique des valeurs propres de matrices aléatoires ont été réalisées, en particulier par L. Pastur, M. Shcherbina. Dans un autre contexte, Girko a utilisé la technique des perturbations pour donner en 1990 les équations différentielles stochastiques des valeurs propres et des vecteurs propres pour un processus matriciel avec des incréments indépendants. Pour cela, une comparaison asymptotique de la valeur propre $\left|R_t^{H,\varepsilon}\right|^2$ a été établie.

En dernier lieu, nous avons prouvé que ces équations différentielles stochastiques n'explosent pas.

Compte tenu des applications en physique, mathématiques financières, mécanique, etc. . . , le domaine des équations différentielles stochastiques dans le cadre de la $G-$espérance est en plein essor et l'amélioration des nouvelles méthodes de calcul stochastique pour l'analyse de processus fractionnaires l'est tout autant. Par ailleurs, ce domaine est très riche en questions ouvertes, en effet, nous avons l'intention d'étudier ultérieurement les $G-$EDS par rapport au $G-$mBf réel (existence et unicité, stabilité, principe de moyennisation), ainsi que la simulation de trajectoires Browniennes fractionnaires. Également, ces travaux de thèse peuvent être étendus de différentes manières, par exemple, il y a la possibilité d'étudier les $G-$EDS en imposant d'autres types de bruits tels que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.

Finalement, les pistes de recherche en ce qui concerne ces $G-$EDS sont nombreuses, et elles peuvent être toujours diversifiées. Par conséquent, différentes perspectives peuvent être lancées à la suite de ce travail.

Bibliographie

[1] E. Alòs, O. Mazet, D. Nualart, Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than $\frac{1}{2}$, *Stochastic Process. Appl.* $86:1(2000), 121-139$.

[2] T. W. Anderson, An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 2003.

[3] G. W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, An Introduction to Random Matrices, Cambridge University Press, 2009.

[4] P. O. Amblard, J. F. Coeurjolly, Identification of the Multivariate Fractional Brownian Motion, *IEEE Transactions on Signal Processing,* $59:11\,(2011)$.

[5] P. Amblard, J. Coeurjolly, F. Lavancier, A. Philippe, Basic properties of the Multivariate Fractional Brownian Motion, *Séminaires et congrès, Société mathématique de France* $28(2013), 65-87$.

[6] B. Arras, Contributions à l'étude statistique de la dépendance spatiale dans les champs à longue mémoire sur un réseau, Autour de quelques processus à accroissements stationnaires et autosimilaires. Thése de Doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures *"Ecole Centrale Paris, France"*, 2014.

[7] S. Achard, I. Gannaz, Multivariate wavelet Whittle estimation in long-range dependence, *Journal of Time Series Analysis, Wiley-Blackwell* $37:4(2016), 476-512$.

[8] M. F. Bru, *Diffusions of perturbed principal component analysis*, J. Multivariate Anal. $\mathbf{29}(1989), 127-136$.

[9] A. Blanchet, J. Dolbeault, R. Monneau, Formulation de monotonie appliquées à des problèmes à frontiére libre et de modélisation en biologie. *Thése de Doctorat de l'université Paris Dauphine, France,* 2005.

[10] H. Boutabia, I. Grabsia, Chaotic expansion in the $G-$expectation space, *Opuscula Math.* $\mathbf{33}\,(2013)\,, 647-666$.

[11] W. Chen, Fractional $G-$White Noise Theory, Wavelet Decomposition for Frac- tional $G-$Brownian Motion and Bid-Ask Pricing for European Contingent Claim Under Uncertainty, Preprint arXiv :1306.4070v1 [math :PR] (2013).

[12] C. Donati-Martin, Y. Doumerc, H. Matsumoto, M. Yor, Some properties of the Wishart processes and a matrix extension of the Hartman-Watson laws, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* $\mathbf{40}\,(2004)\,, 1385-1412$.

[13] N. T. Dunga, T. H. Thao, An approximate approach to fractional stochastic integration and its applications, *Brazilian Statistical Association* $24:1(2010), 57-67$.

[14] G. Didier, V. Pipiras, Integral representations of operator fractional Brownian motion, *Bernoulli* $17:1(2011), 1-33$.

[15] L. Denis, M. Hu, S. Peng, Function spaces and capacity related to a sublinear expectation : application to $G-$Brownian motion paths, *Potential Anal.* $\mathbf{34}(2011), 139-161$.

[16] J. Frécon, Méthodes d'optimisation pour l'analyse de processus invariants d'échelle. *Thése de Doctorat de l'université de Layon, France*, 2016.

[17] V. L. Girko, Theory of Random Determinants, VSP, chapter 18, The distribution of eigenvalues and eigenvectors of additive random matrix-valued processes, $1990, 442-467$.

[18] F. Gao, Pathwise properties and homeomorphic flows for stochastic differential equation driven by $G-$Brownian motion, *Stochastic Process. Appl.* $119\,(2009)\,, 3356-3382$.

[19] P. Graczyk, J. Malecki, Multidimensional Yamada-Watanabe theorem and its applications to particle systems, *J. Math. Phys.* $\mathbf{54}\,(2013)\,, 021503$.

[20] I. Grabsia, Chaos de Wiener par rapport au $G-$mouvement Brownien. *Thése de Doctorat de l'université Badji Mokhtar Annaba, Algérie* (2014).

[21] Y. Hu, B. Oksendal, Fractional white noise calculus and applications to finance. Infinite Dimensional Analysis, *Quantum Probability and Related Topics* $6:1(2003), 1-32$.

[22] M. Hu, S. Ji, S. Yang, A stochastic recursive optimal control problem under the $G-$expectation framework, *Appl. Math. Optim.* $\mathbf{70}\,(2014)\,, 253-278$.

[23] N. Ikeda, S. Watanabe, Stochastic Differential Equation and Diffusion Processes, *North-Holland, Amsterdam*, 1981.

[24] A. N. Kolmogorov, The Wiener spiral and some other interesting curves in Hilbert space, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* Russie, $26:2(1940), 115-118$.

[25] M. Katori, H. Tanemura, Symmetry of matrix-valued stochastic processes and noncolliding diffusion particle systems, *J.Math. Phys.* $\mathbf{45}\,(2004)\,, 3058-3085$.

[26] F. Lavancier, Contributions à l'étude statistique de la dépendance spatiale dans les champs à longue mémoire sur un réseau, les processus ponctuels et la géométrie aléatoire. *Mémoire d'habilitation de l'université de Nantes, France,* 2011.

[27] Y. Lin, Équations différentielles stochastiques sous les espérances mathématiques non-linéaires et applications. *Thése de Doctorat de l'université de Rennes 1, France,* 2013.

[28] B. Mandelbrot, J. van Ness, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.* $10:4(1968), 422-437$.

[29] H. P. McKean, Stochastic Integrals, *Academic Press, New York*, 1969.

[30] R. J. Muirhead. A Spects of Multivariate Statistical Theory, *Wiley*, 2005.

[31] S. N. Majumdar, Handbook of Random Matrix Theory, *Oxford University Press*, 2011.

[32] S. Meradji, H. Boutabia, S. Stihi, Stochastic differential equations for eigenvalues and eigenvectors of a $G-$Wishart process with drift, *Ukr. Mat. Zh.* $71:4\,(2019)\,, 502-515$.

[33] S. Meradji, Analyse stochastique des valeurs propres des matrices aléatoires à valeurs $G-$Brownienne. *Thése de Doctorat de l'université Badji-Mokhtar Annaba, Algérie,* 2018.

[34] M. Belksier, H. Boutabia, R. Bougherra, Stochastic differential equations for orthogonal eigenvectors of $(G,\varepsilon)-$Wishart process related to multivariate $G-$fractional Brownian motion. A paraître dans Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática.

[35] J. K. Norris, L. C. G. Rogers, D. Williams, Brownian motions of ellipsoids, T*rans. Amer. Math. Soc.* $\mathbf{294}\,(1986)\,, 757-765$.

[36] D. Nualart, V. Pèrez-Abreu, On the eigenvalue process of a matrix fractional Brownian motion, *Stochastic Process. Appl.* $124(2014), 4266-4282$.

[37] C. Nadal, Matrices aléatoires et leurs applications à la physique statistique et physique quantique. *Thése de Doctorat de l'université Paris-Sud XI, France*, 2011.

[38] D. Nualart, V. Pérez-Abreu, On the eigenvalue process of a matrix fractional Brownian motion, *Stochastic Process. Appl.* $\mathbf{124}\,(2014)\,, 4266-4282$.

[39] S. Peng, $G-$Brownian Motion and Dynamic Risk Measure under Volatility Uncertainty, arXiv : $0711.2834v1$ [math.PR], 2007.

[40] S. Peng, $G-$expectation*,* $G-$Brownian motion and related stochastic calculus of Itô type. *Stoch. Anal. Appl., Abel Symp., Springer Berlin* $(2007)\,\mathbf{2}, 541-567$.

[41] S. Peng, Multi-dimensional $G-$Brownian motion and related stochastic calculus under $G-$expectation, *Stochastic Process. Appl.* $\mathbf{118}\,(2008)\,, 2223-2253$.

[42] S. Peng, Survey on normal distributions, Central limit theorem, Brownian motion and the related stochastic calculus under sublinear expectations, *Sci. China Math.* $\mathbf{52}\,(2009)\,, 1391-1411$.

[43] S. Peng, Nonlinear Expectations and Stochastic Calculus under Uncertainty with Robust Central Limit Theorem and $G-$Brownian Motion, arXiv : $1002.4546v1$ [math.PR], 2010.

[44] L. Pastur, M. Shcherbina, Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices, *American Mathematical Society*, 2011.

[45] L. Peng, W. Falei, On the comparison theorem for multi-dimensional $G-$SDEs, *Stat. Probabil. Lett.* $\mathbf{96}(2015), 38-44$.

[46] P. E. Protter, Stochastic Integration and Differential Equations, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2004.

[47] O. Pfaffel, Wishart Processes, arXiv : $1201.3256v1$ [math.PR], 2012.

[48] D. Revuz, M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, *Springer-Verlag*, 2001.

[49] L. C. G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes and Martingales, Ito Calculus. *Wiley-New York*, 1987.

[50] N. Savy, Mouvement Brownien Fractionnaire, application aux télécommunications. Calcul Stochastique relativement à des Processus Fractionnaires. *Thése de Doctorat de l'université de Renne1, France*, 2003.

[51] H. M. Soner, N. Touzi, J. Zhang, Martingale Representation Theorem for the $G-$expectation, *Stoch. Proc. Appl.* $\mathbf{121}(2011), 265-287$.

[52] Z. Sun, X. Zhang, J. Guo, A stochastic maximum principle for processes driven by $G-$Brownian motion and applications to finance, *Optimal Control Appl. Methods,* 2017.

[53] S. Stihi, H. Boutabia, S. Meradji, Stochastic differential equations for Random matrices processes in the nonlinear framework, *Opuscula Math.* $38:2(2018), 261-283$.

[54] T. H. Thao, T. T. Nguyen, Fractal Langevin Equation, *Vietnam J. Math.* $30:1(2002), 89-96$.

[55] T. H. Thao, A note on fractional Brownian motion, *Vietnam J. Math.* $31:3(2003), 255-260$.

[56] D. Williams, A Note on Brownian Motions and Symmetric Matrices, *University of Cambridge*, 1985.

[57] P. Wu, Z. Chen, Invariance principles for the law of the iterated logarithm under $G-$framework, *Sci. China Math.* $\mathbf{58}\,(2011)\,, 1251-1264$.

[58] J. Yue, N. J. Huang, Fractional Wishart Processes and $\varepsilon-$Fractional Wishart Processes with Applications, *Computers & Mathematics with Applications*, $75:8(2018), 2955-2977$.