وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA
BADJI MOKHTAR UNIVERSITY ANNABA

جامعة باجي مختار
عنابة

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2011

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT

Option
Mathématiques Appliquées

Titre

L'existence globale de la solution des systèmes de Réaction-Diffusion via Lyapunov

Par
SALAH DERRADJI Lylia

DIRECTEUR DE THESE: Prof. MOUMENI Abdelkader U.B.M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT	**Sissaoui Hocine**	**Prof**	**U.B.M. Annaba**
EXAMINATEURS	**Aissaoui Med Zine**	**MCA**	**Université de Guelma**
	Amiar Rachida	**MCA**	**U.B.M. Annaba**
	Djellit Ali	**Prof**	**U.B.M. Annaba**
	Yahi Mostepha	**M.R.A**	**C.S.C. Alger**

L'existence Globale de la Solution d'un Système de Réaction Diffusion

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des systèmes de Réaction Diffusion. Ces derniers servent de modèles notamment en chimie, en biologie et même en dynamique des populations. On s'intéresse plus particulièrement au problème de l'existence globale de la solution. La partie centrale de notre travail porte sur l'étude d'un système ayant une matrice de diffusion diagonale, où nous établissons un résultat d'existence globale en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov. Ensuite, nous terminons par étendre ce résultat à un système dont la matrice de diffusion est triangulaire.

Mots-clés: *Réaction Diffusion, Existence globale, Fonctionnelle de Lyapunov.*

Global Solution for Reaction Diffusion System

Abstract

In this thesis, we study reaction diffusion systems. These systems arise in the modelling of chemistry and various biological processes including population dynamics. We are especially interested on problem of global existence of solutions. The main part of our work is devoted to the study of a system with a diagonal diffusion matrix where we prove the existence of global solutions. Finally, we extend this result to a system with triangular diffusion matrix.
Our proof is based on a suitable Lyapunov functional.

Key-words: *Reaction Diffusion, Global Existence, Lyapunov functional.*

الوجود الاجمالي لحلول نظام تفاعل-انتشار

الملخص

هذه الرسالة مخصصة لدراسة أنظمة تفاعل-انتشار. تُستخدم الأخيرة كنماذج ، لا سيما في الكيمياء والبيولوجيا وحتى ديناميكيات السكان. هدفنا في الاطروحة هو دراسة الوجود الاجمالي للحل. يتعلق الجزء الاساسي من عملنا بدراسة نظام له مصفوفة انتشار قطرية ، حيث توصلنا لنتيجة الوجود الاجمالي باستخدام دالة Lyapunov. ثم تمكنا من توسيع هذه النتيجة إلى نظام بمصفوفة انتشار مثلثية.

الكلمات المفتاحية: تفاعل-انتشار ، الوجود الاجمالي، دالة Lyapunov .

Table des matières

0.1 Introduction

Par système de Réaction-Diffusion, nous entendons un système d'équations aux dérivées partielles, parabolique, semi linéaire de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - D\Delta u = F(u(x,t)) \qquad x \in \Omega,\ t \geq 0 \tag{R.D}$$

où $u = (u_1, ..., u_m) : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m,\ D$ est une matrice carrée définie positive dite matrice de diffusion et $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application régulière (au moins localement Lipschitziènne)

L'équation $(R.D)$ est posée sur un domaine ouvert Ω de IR^n et complétée par des conditions sur le bord, par exemple les conditions de Dиricklet homogènes ($u = 0$ sur $\partial\Omega$), ou les conditions de Neumann homogènes $\left(\frac{\partial}{\partial\eta}u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right)$.

Cette classe de systèmes a reçu un intérêt très attentionné par les chercheurs motivés tout autant par la richesse qu'apporte la structure de la solution que par le fait que ces systèmes modélisent plusieurs phénomènes. En effet, ces derniers interviennent couramment en chimie dans les réactions chimiques, en biologie dans les réactions des enzimes et même en dynamique des populations qui a été traditionnellement un domaine de prédilection en biomathématiques, et l'un des principaux outils pour l'étude théorique de tels systèmes (notamment de leurs solutions positives) est le **principe du maximum** qui permet d'obtenir des bornes à priori des trajectoires.

Le cas le plus abordé est celui à deux composantes, proposé par R.H.Martin, donné par

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\, u}{\partial\, t} - d_1 \triangle\, u = f\,(u,v) & \text{sur }]0,+\infty[\,\times\,\Omega \\
\dfrac{\partial\, v}{\partial\, t} - d_2 \triangle\, v = g\,(u,v) & \text{sur }]0,+\infty[\,\times\,\Omega \\
\dfrac{\partial\, u}{\partial\, \eta} = \dfrac{\partial\, v}{\partial\, \eta} = 0 & \text{sur }]0,+\infty[\,\times\,\partial\Omega \\
u\,(0,.) = u_0 \geq 0, \quad v\,(0,.) = v_0 \geq 0 & \text{sur } \Omega
\end{cases} \tag{SRD}
$$

$d_1,\ d_2$ sont deux constantes positives. f et g sont deux fonctions positives, continûment différentiables.

Nous allons donner un panorama des résultats obtenus au cours de ces dernières années autour de la question d'existence globale des solutions pour des systèmes de réaction-diffusion satisfaisant à deux propriétés qu'on trouve classiquement dans beaucoup d'applications :

$$
f\,(0,v) \geq 0, \text{ et } g\,(u,0) \geq 0 \qquad \forall u,v \ \geq 0 \tag{P}
$$

qui assure que le système(SRD) préserve la positivité.

La masse totale des composants est controlée au cours du temps (M1)

Cette classe correspond aux nonlinéarités f et g satisfaisant la condition

$$
f\,(u,v) + g\,(u,v) \leq 0,\ \forall u,v \ \geq 0 \tag{M2}
$$

Dans le cas où Ω est borné, la condition $(M2)$ garantit que la masse totale des composants reste controlée, et on aura que la fonction

$$
t \rightarrow := M\,(t) = \int\limits_{\Omega} u\,(x,t)\,dx + \int\limits_{\Omega} v\,(x,t)\,dx
$$

est non croissante. En effet, c'est une conséquence immédiate par l'intégration des équations differentielles du système (SRD) sur Ω et en prenant en compte les conditions aux bords.

La question est maintenant " **est-ce-que la condition** $(M2)$ **garantit l'existence globale des solutions du système donné ?**"

♦ Dans le cas où $d_1 = d_2$, la réponse est oui. En effet, en ajoutant les deux équations du système (SRD) nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}(u+v) - d_1\Delta(u+v) = 0$$

Ce qui donne par application du principe du maximum une L^{∞}- estimation de u et de v puisque

$$\|(u+v)(t)\|_{\infty} \leq \|u_0 + v_0\|_{\infty}$$

♦ Dans le cas où $d_1 \neq d_2$, on va voir que l'existence globale sera assurée que lorsqu'on ajoute d'autres conditions. Notons que M.Pierre-D.Schmitt [27] par des contre-exemples, ont montré que sous la condition $(M2)$ la solution peut exploser en temps fini.

♦ Une attention particulière est à porter au cas où

$$f(u,v) \leq 0 \leq g(u,v)$$

Dans ce cas, le principe du maximum nous donne l'estimation à priori

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty}, \ \forall t \in [0, T_{\max}[$$

$T_{\max}$ désigne le temps de l'existence maximal. Le problème est donc réduit à obtenir une estimation uniforme de v.

♦ Dans le cas où $d_1 > d_2$ (c'est le cas où la substance absorbée diffuse plus rapidement que l'autre substance), une réponse positive est donnée par Martin et Pierre [21] pour $\Omega = \mathbb{R}^n$, et le même résultat est obtenu par Kanel et Kirane [16] pour Ω un borné de $\mathbb{R}^n$.

♦ Toujours dans le cas $f \leq 0$, mais sans supposer que $d_1 > d_2$, la réponse d'après

Hollis-Martin-Pierre [15] est encore positive sous la condition

$$g(u,v) \leq C(u+v+1)^{\gamma} \text{ pour tout } u,v \ \geq 0 \text{ et } \gamma \geq 1$$

où les auteurs ont montré que sous la condition $(M2)$, v est controlée par u dans L^p pour tout p fini.

♦ Si f et g n'ont pas de signe, il est encore possible de montrer l'existence globale si les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$\lambda f(u,v) + g(u,v) \leq 0, \ \forall u,v \ \geq 0 \text{ et } \lambda \text{ suffisamment grand}$$

et

$$f(u,v), \ g(u,v) \leq C(u+v+1)^{\gamma} \text{ pour tout } u,v \ \geq 0 \text{ et } \gamma \geq 1$$

Voir Kouachi [18].

♦ Pour des résultats antérieurs voir [1], [2] (basé sur l'itération de Moser), [29] (basé sur la méthode de Bootstrap) et [20] (basé sur la fonctionnelle de Lyapunov).

♦ D'une autre part, des résultats d'existence globale sont obtenus pour f et g satisfaisant certaines conditions de croissance exponnentielle. voir [12], [3] (en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov), et [14], [17] (en utilisant les estimations).

♦ Dans la partie centrale de cette thèse, nous allons étendre ces résultats à des nonlinéarités plus générales, en d'autres termes, nous allons montrer l'existence d'une solution globale (u,v) pour le système (SRD) sous des conditions encore plus faibles sur f et g par l'effet de régularisant suivant :

soit $n, \ q \in \mathbb{N}$ tels que $n = \dim \Omega$ et $q > \frac{n}{2}$,

Si $F(u(x,t)) \in L^{\infty}(0, \ T_{\max}, \ L^q(\Omega))$, alors la solution est globale.

Ce qui revient donc à montrer que

$$\sup_{\substack{0<t<T_{\max} \\ x\in\Omega}} \|F(u(x,t))\|_{L^q(\Omega)} < +\infty$$

Plan de la Thèse

L'objet de cette thèse est l'étude du système de Réaction Diffusion (SRD), plus particulièrement l'existence locale, l'existence globale.

Notre thèse est divisée en six chapitres.

▶ Le premier chapitre sera consacré à la modélisation des systèmes de réaction-diffusion en utilisant la loi de comportement de Fick. Et nous allons traiter quelques exemples faisant ressortir leur rôle essentiel dans les sciences.

▶ Dans le deuxième, nous rappelons quelques résultats et théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle qui sont fondamentaux pour notre travail.

▶ Au cours du troisième chapitre, toutes les notions nécéssaires inhérentes à la théorie des opérateurs m-dissipatifs et à celle des semi groupes seront données. Ensuite, nous nous attacherons à l'étude des problèmes d'évolution semi-linéaires où nous allons aborder quelques questions, parmi lesquelles l'existence locale des solutions, l'existence globale ou l'éventuelle explosion en temps fini, etc.

▶ Dans le quatrième chapitre, nous allons donner quelques résultats généraux sur l'existence globale de la solution pour des systèmes de réaction diffusion à m équations.

▶ Le résultat le plus important est présenté au cinquième chapitre où, en faisant appel à la fonctionnelle de Lyapunov nous démontrons que la solution du système (SRD) est en fait globale.

▶ enfin, nous nous intéressons au dernier chapitre à l'étude d'un système à une matrice de diffusion triangulaire, pour lequel nous énonçons un résultat d'existence globale.

Chapitre 1

Exemples de Réaction Diffusion-Modélisation

1.1 Introduction

Les systèmes de réaction diffusion sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles, paraboliques, donnés sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - D\Delta u = F(u(x,t)) \qquad x \in \Omega,\ t \geq 0 \tag{R.D}$$

Ces systèmes servent de modèles dans de nombreux domaines en constituant un excellent laboratoire théorique pour la compréhension de certains processus naturels.

Ici le temps t varie dans un intervalle $[0,T]$, x dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, l'inconnue u est une fonction définie sur $[0,T] \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, qui, dans les applications correspond à un m-vecteurs de concentrations d'espèces chimiques, de températures, de densités de populations, etc. D est une $m \times m$ matrice qui sera le plus souvent diagonale, Δ désigne le Laplacien et $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est une fonction non linéaire modélisant les phénomènes de réaction mis en jeu. (réaction chimique par exemple).

1.2 Exemples de réaction diffusion

1.2.1 Modèles simples

L'équation de réaction diffusion la plus simple, ne portant que sur la concentration u d'une seule dimension de l'espace

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u)$$

est aussi appelée équation K.P.P (Kolmogorov-Pertrovsky-Piskunov). Si le terme en $f(u)$ (qui représente le facteur de réaction chimique dans le processus) vient de s'annuler, l'équation modélise une simple diffusion. L'équation correspondante est alors l'équation de la chaleur.

Si $f(u) = u(1-u)$, on obtient l'équation qui a été introduite à la fin des années 30 par Fisher [10] comme modèle de génétique des populations. Et avec $f(u) = u(1-u)(u-\alpha)$ et $0 < \alpha < 1$, on obtient l'équation de Zeldovich [31] qui est employée dans la théorie de la combustion. L'inconnue u représente une densité de gène dominant dans le premier cas et la température en combustion.

1.2.2 Modèles plus évolués

⧫ En dynamique des populations. "propagation d'une épidémie".(cf. J. D. Murray [24])

La modélisation mathématique en dynamique des populations est en plein essor depuis quelques années. Nous allons ici prendre l'exemple de la diffusion de la rage dans une population de Renards. Dans ce modèle, il s'agit d'une répartition spatiale des populations saines et infectées, on est placé dans un cas où les individus sains ne bougent pas (ils respectent les territoires des voisins), et en revanche les malades errent au hasard ayant perdu la notion du territoire. Si l'on note $S(t,x)$ (resp $I(t,x)$) la densité de renards sains (resp infectés) à l'abscisse x et à l'instant t (les renards se déplacent sur un segment de droite). Ces quantités vérifient des équations de type :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = & -rIS \\ \frac{\partial I}{\partial t} = & rIS - aI + d\Delta I \end{cases}$$

la première équation correspond au phénomène de contamination : lorsque cohabitent des individus sains et des individus infectés, un certain nombre d'individus sains sont infectés. Il est par ailleurs naturel de considerer ce terme comme proportionnelle au produit IS, en effet, la quantité de microbes dans l'air (donc la probabilité pour un individu sain donné d'être infecté) est proportionnelle à I. il nous faut ensuite multiplier cette probabilité par le nombre d'individus sains, c'est à dire par S. Pour ce qui est les variations de I, le premier terme correspond aux individus contaminés (qui augmente I). Le deuxième terme, en" $-aI$ ", correspond aux individus qui meurrent, et d est la constante de la diffusion.

♦ En génétique. "Ressemblances et différences entre individus".(cf. J. D. Murray [23])

Un caractère phénotypique dépend d'au moins d'un gène ou de plusieurs gènes. Par exemple, le caractère " couleur des yeux" dépend d'un seul gène. Cependant, la couleur des yeux peut varier d'un individu à l'autre. Ces variantes sont dues à des formes différentes du gène appelées " allèles".

On suppose qu'un certain gène à deux allèles que l'on note a et A.lorsque les deux allèles du couple sont identiques, on dit que l'individu est "Homozigote" pour le caractère (de type aa ou AA). Lorsque les deux allèles sont différents, on dit que l'individu est "hétérozigote" pour ce caractère. (de type aA).

Notons par $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ et $u_3(x,t)$ les densités respectives des individus de type aa, aA et AA au point x et à l'instant t, et supposons que les individus se produisent avec un taux r et se déplacent aléatoirement dans l'espace avec un mouvement Brownien de constante d alors, les densités u_1, u_2, u_3 vérifient le système

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u_1}{\partial t} = & d\Delta u_1 - a_1 \frac{r}{u}\left(u_1 + \frac{u_2}{2}\right)^2 \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} = & d\Delta u_2 - a_2 u_2 + \frac{2r}{u}\left(u_1 + \frac{u_3}{2}\right)\left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right) \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} = & d\Delta u_3 - a_3 u_3 + \frac{r}{u}\left(u_3 + \frac{u_2}{2}\right)
\end{cases}
$$

où $u = u_1 + u_2 + u_3$ et les coéfficients $a_1,\ a_2,\ a_3$ sont les taux de décés des trois populations.

♦ En chimie. "Réaction chimiques".(cf. Billingham et L. Niremberg [5])

On considère une réaction chimique de la forme

$$
A + B \xrightarrow{k} 2B
$$

On note $a(x,t)\,,\ b(x,t)$ les concentrations des substances A et B au point x et à l'instant t . Ces quantités sont solutions du système

$$
\begin{cases}
\frac{\partial a}{\partial t} - D_A \Delta a = -kab \\
\frac{\partial b}{\partial t} - D_B \Delta b = kab
\end{cases}
$$

où $D_A,\ D_B$ sont les constantes de diffusion des substances A et B , k est le taux de réaction. Si $D_A = D_B = 1$, alors la somme $a + b$ est solution de l'équation de la chaleur

$$
\frac{\partial}{\partial t}(a + b) = \Delta (a + b)
$$

Si en outre les données initiales sont telles que $a(x,0) + b(x,0) = 1$ pour tout $x \in \Omega$, alors (pour les conditions au bord de Neumann par exemple) la solution vérifie la relation

$$
a(x,t) + b(x,t) = 1,\ \forall x \in \Omega,\ t \geq 0
$$

1.2.3 Autres exemples

Les systèmes de réaction diffusion modélisent beaucoup d'autres problèmes tels que :

♦ Problèmes métallurgiques, comme la diffusion du phosphore dans une plaque de silicium

♦ Problèmes publicitaires, comme la publicité sur un produit où pour lancer un produit, on entreprend une action publicitaire destinée un premier temps à toucher un certain nombre de personnes, lesquelles prolongent par le phénomène " de bouche à l'oreille".

♦ Problèmes nucléaires, comme la bombe atomique : Un neutron peut entrer à chaque instant en collision avec un nayau atomique, il peut provoquer l'explosion (la fission) du nayau. La fission engendre de nouveaux neutrons qui obeissent à leur tour au même processus. Chaque collision dégage une quantité d'énergie et la réaction en chaîne peut produire une énergie considérable " bombe atomique" . Dans ce cas la solution du système correspondant explose en temps fini (cf. C. V. Pao [25]).

1.3 Modélisation

Les équations de Réaction Diffusion ont été proposées par A.Turing (1952) pour la modélisation des phénomènes de morphogènes, c'est à dire le developpement des formes.

Dans cette section, nous allons présenter les étapes à suivre pour établir le système $(R.D)$. Pour clarifier les idées, notons que pour modéliser un phénomène, on doit simplifier plusieurs termes et négliger d'autres facteurs rentrant dans les réactions, dans le but d'une obtention des équations simples et faciles à étudier.

1.3.1 Diffusion et migration

La diffusion désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces en son sein. Le déplacement des atomes, ions ou molécules dans un milieu, que celui-ci soit solide, liquide ou gazeux, est appelé de manière générale " migration". La diffusion est donc la migration sous une certaine agitation.

L'orqu'un atome se déplace parmi des atomes de même nature, on parle d'autodiffusion. Par en parlera d'autodiffusion du fer pour désigner la migration d'un atome de fer dans un cristal de fer.

Lorsque l'on a deux milieux homogènes différents que l'on met en contact, on parle d'interdiffusion.

1.3.2 Lois de Fick

Première loi de Fick

La première loi de Fick énonce que

Le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration.

Cette loi est inspirée de la loi de "Fourier" sur la conduction de la chaleur. Elle peut être vue comme une définition du vecteur densité du courant J_i.

Mathématiquement, cette loi s'exprime de la manière suivante :

Soit B un milieu dans lequel se trouve une espèce chimique A, et soit une surface S.On note $C_A(x, y, z, t)$ la concentration de A en un point donné. On appelle J_A le vecteur densité de courant des particules de A ; la première loi de Fick s'écrit :

$$J_A = -D_{AB}.\nabla C_A$$

D_{AB} est le coefficient de diffusion de A dans le milieu B ; il dépend de la température du milieu et de A.

Seconde loi de Fick

La loi de conservation des espèces indique que la variation par unité de temps de la quantité de particules i : $\int\int\int C_i.dV$ dans un volume donné V est égale au flux sortant : $\int\int J_i.dS$ du vecteur densité de courant de particules J_i à travers la surface fermée S délimitant le volume V.

On obtient la deuxième loi de Fick en identifiant les intégrands ci-dessous :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V C_i.dV = \int\int_S J_i.dS = \int\int\int_V \nabla.J_i.dV$$

La deuxième égalité ci-dessus est due au théorème de la divergence, dit de "Green-Ostrogradsky", et le signe moins provient du fait que la concentration diminue quand le flux sortant augmente. On a donc

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla.J_i = 0$$

à une dimension, l'équation devient :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\frac{\partial J_i}{\partial x}$$

1.3.3 Modélisation des systèmes de réaction diffusion

Considèrons une région bornée Ω de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3)$ dans laquelle des réactions se réalisent. Ω peut être des molécules ou une surface géographique qui forme les lieux des milliers de virus, d'épidémies ou même des rumeurs circulant entre les individus des populations. Ω peut être aussi une cellule vivante qui est le siège de plusieures réactions chimiques.

Nous avons besoin du principe suivant :

La vitesse de formation de la $i^{ème}$ espèce dans un volume ω est égale à la quantité formée par la réaction otée de son flux à travers la surface S. Soit alors J_i le flux de ces espèces à travers la frontière et soient $u_i(x,t)$ la concentration de la $i^{ème}$ espèce prenant part dans une réaction et $f_i((u_1, u_2, ..., u_m), x, t)$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$.Considérons alors un volume ω infiniment petit de Ω de frontière $S = \partial\omega$. En terme d'équations, le principe précédent se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega} u_i(x,t)\,dx = \int_{\omega} f_i((u_1, u_2, ..., u_m), x, t)\,dx - \int_{S} J_i d\sigma$$

Par application directe du théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{S} J_i d\sigma = \int_{\omega} \bigtriangledown .J_i dx,\ \ i = 1, ..., n$$

ceci implique

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bigtriangledown J_i - f_i\right) dx = 0,\ \ i = 1, ..., n$$

Puisque ω est infiniment petit et arbitraire, le théorème de l'intégrale nulle nous assure que

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bigtriangledown J_i - f_i = 0 \text{ dans } \Omega,\ \ i = 1, ..., n$$

Le phénomène de la diffusion est régi par la loi de Fick, D'après cette loi, J_i est proportionnel au gradient de la concentration des espèces et donné par :

$$J_i = -\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \bigtriangledown u_j, \ i = 1, ..., m$$

où les a_{ij} sont les coefficients d'autodiffusion, $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion.

De ce qui précède, on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\Delta u = f(u)$$

et par un changement de variable, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, ..., d_m)$ avec $d_i > 0, \ \forall i = 1, ..., m.$(le cas où l'écoulement de la matière se fait des milieux les plus concentrés vers les moins concentrés).

D'où on retrouve finalement le système

$$\frac{\partial}{\partial \, t} v(x,t) - D\Delta v = F(v(x,t)) \qquad x \in \Omega, \ t \geq 0 \tag{R.D}$$

Le système $(R.D)$ s'accompagne souvent de certaines conditions initiales et d'autres aux bords selon l'origine et la nature du problème étudié. S'il n' y a pas d'immigration des individus à travers la frontière de Ω sur lequel le problème est posé, nous choisissons les conditions aux bords de Neumann. Et s'il n'y a pas d'individus sur la frontière, nous prenons les conditions aux bords homogènes de Diricklet.

Chapitre 2

Quelques Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques propriétés d'analyse fonctionnelle qui seront constamment utilisées dans cette thèse.

2.1 Espaces de Sobolev

soit p un entier naturel et Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

$L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Banach des fonctions mesurables (au sens de Lebesgue) sur Ω, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On pose

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega), \ \forall \alpha, \ \text{avec} \ |\alpha| \leq m, \ D^\alpha f \in L^p(\Omega) \}$$

alors, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme $\|.\|_{m,p}$ définie par

$$\|f\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_p \, , \ \forall \ f \in W^{m,p}(\Omega)$$

On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

Lorsque $p = 2$, on notera de préférence

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) \text{ et } W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$

Sur $H^m(\Omega)$ on utilisera plutot la norme équivalente

$$|f|_2 = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui fait de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha f . D^\alpha g \ dx$$

En particulier, pour $m = 1$ on a

$$\langle f, g \rangle_1 = \int_\Omega f.g \ dx + \int_\Omega \nabla f . \nabla g \ dx$$

Lorsque Ω est borné, on sait qu'il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\forall \ u \in H_0^1(\Omega) \, , \ \|u\|_2 \leq C(\Omega) \, . \, \|\nabla u\|_2$$

Il sera alors parfois commode de munir l'espace $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle_{1,0} = \int_\Omega \nabla f . \nabla g \ dx$$

qui induit une norme équivalente à la norme $|.|_1$ sur le sous espace fermé $H_0^1(\Omega)$.

2.2 Inégalités fondamentales

Lemme 2.2.1 *(inégalité de Young) pour* $1 < p, q < \infty$, *tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *et* $a,\ b > 0$ *on a l'inégalité*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Preuve.

La fonction $f(x) = \exp x$ étant convexe, elle vérifie la relation :

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$

ainsi pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln a + \ln b) = \exp\left(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) \\ &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.2 *(Inégalité de Hôlder) pour* $1 < p, q < \infty$, *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et pour* $f,\ g$ *deux fonctions mesurables sur* $\mathbb{R}^n$, *on a l'inégalité*

$$\int_{\Omega} |(f.g)(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Preuve.

Par homogéneité, supposons que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$

L'inégalité de Young donne

$$\int_{\Omega} |(f.g)(x)|\,dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q\right) dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \|f\|_p \|g\|_q$$

■

Lemme 2.2.3 *(inégalité de Gronwall) Soit $T > 0$, $\lambda \in L^1(0,T)$ vérifiant $\lambda \geq 0$ p.p et c_1, c_2 deux constantes positives. Soit $\Phi \in L^1(0,T)$, $\Phi \geq 0$ telle que $\lambda\Phi \in L^1(0,T)$ et*

$$\Phi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \lambda(s)\Phi(s)\,ds, \quad \textit{pour presque tout } t \in (0,T)$$

alors

$$\Phi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^t \lambda(s)\,ds\right)$$

Preuve.

On pose

$$\Psi(t) = c_1 + c_2 \int_0^t \lambda(s)\Phi(s)\,ds, \quad \text{pour } t \in (0,T)$$

Ψ est dérivable presque partout (car absolument continue), et on a

$$\Psi'(t) \leq c_2\lambda(t)\Phi(t) \quad p.p \text{ sur } (0,T).$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\left\{\Psi(t)\exp\left(-\int_0^t c_2\lambda(s)\,ds\right)\right\} \leq 0$$

et donc

$$\Psi(t) \leq c_1 \exp\left(c_2 \int_0^t \lambda(s)\,ds\right) \quad \text{pour presque tout } t \in (0,T)$$

d'où le résultat, puisque $\Phi \leq \Psi$ *p.p.*$\blacksquare$

Remarque 2.2.1 *En particulier, si $c_1 = 0$ alors $\Phi = 0$ p.p.*

Remarque 2.2.2 *Ce résultat est très utile dans l'étude des problèmes semi-linéaires, aussi bien pour montrer l'unicité des solutions que pour établir des propriétés de bornage.*

2.3 Formules de Green

On se donne Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et on suppose que $\partial\Omega$ est C^1.Soit $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$ le vecteur unitaire normal extérieur à $\partial\Omega$. On définit la dérivée normale de u par

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta \nabla u, \quad \text{pour tout } u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$$

Soient $u, v \ \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, on a alors

1. **Première formule de Green :**

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$$

2. **Seconde formule de Green :**

$$\int\limits_{\Omega} \nabla v \nabla u dx = -\int\limits_{\Omega} u \Delta v dx + \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS$$

3. **Troisième formule de Green :**

$$\int\limits_{\Omega} \left(u\Delta v - v\Delta u\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) dS$$

2.4 Formes quadratiques

Soit V un espace vectoriel sur le corps K. Une application $Q : V \to K$ est appelée forme quadratique sur V s'il existe une forme bilinéaire symétrique $B : V \times V \to K$ telle que

$$\forall u \in V,\ Q(u) = B(u,u)$$

B est alors unique et appelée la forme bilinéaire associée. En effet, si $u,\ v$ sont deux vecteurs de V,

$$Q(u+v) = Q(u) + 2B(u,v) + Q(v)$$

Donc l'expression nécéssaire de la forme bilinéaire symétrique B en fonction de Q est

$$B(u,v) = \frac{1}{2}\left[Q(u+v) - Q(u) - Q(v)\right]$$

2.5 quelques outils abstraits

les résultats généraux ci-dessous sont très importants pour l'étude théorique des équations aux dérivées partielles.

Théorème 2.5.1 *(Théorème de l'intégrale nulle) Soit Φ une fonction numérique définie et continue dans le domaine Ω et F une famille dense dans Ω. Si pour tout w de F l'intégrale de Φ dans w est nulle alors, la fonction Φ est identiquement nulle dans Ω.*

Théorème 2.5.2 *(Théorème de la divergence) : Ce théorème énonce que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. L'expression du théorème est la suivante :*

$$\int_V divF.dV = \int_\Sigma F.dS$$

Où V est un volume et $\Sigma = \partial F$ (la frontière de F), dS est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur, $divF$ est aussi notée $\nabla.F$.

Théorème 2.5.3 *(Théorème du point fixe de Banach). Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application telle qu'il existe $k \in [0,1[$ vérifiant $d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$ pour tout $(x,y) \in X \times X$. Alors il existe un unique point x_0 de X tel que $f(x_0) = x_0$.*

Chapitre 3

Problèmes d'évolution semi linéaires

Dans ce chapitre nous allons présenter quelques résultats concernant les propriétés locales (existence, unicité) des solutions de problèmes d'évolution semi-linéaires. Il apparaîtra clairement que les solutions sont soit explosives en temps fini, soit au contraire uniformément bornées pour $t \geq 0$.

Dans toute la suite, X est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et X^* son dual de norme $\|.\|_{X^*}$.

3.1 Opérateurs m-dissipatifs

3.1.1 Opérateurs m-dissipatifs dans un Banach

Definition 1 *Un opérateur linéaire dans* X *est un couple* (D, A)*, où* D *est un sous espace vectoriel de* X*, et* $A : D \to X$ *est une application linéaire. On dit que* A *est borné si* $\|Au\|$ *reste bornée lorsque* $u \in \{x \in D,\ \|x\| \leq 1\}$*. Dans le cas contraire,* A *est dit non borné.*

Definition 2 *Un opérateur* A *dans* X *est dit dissipatif si on a*

$$\forall u_1, u_2 \in D(A),\ \forall \lambda > 0,\ \|u_1 - u_2 - \lambda (Au_1 - Au_2)\| \geq \|u_1 - u_2\|$$

Remarque 3.1.1 *Un opérateur linéaire A dans X est dit dissipatif si on a*

$$\forall u \in D(A), \ \forall \lambda > 0, \ \|u - \lambda Au\| \geq \|u\|$$

Definition 3 *Un opérateur A dans X est dit m-dissipatif si*

$$\begin{cases} A \text{ est dissipatif} \\ \quad \forall f \in X, \forall \lambda > 0, \ \exists u \in D(A) : u - \lambda Au = f \end{cases}$$

Remarque 3.1.2 *Si A est un opérateur linéaire m-dissipatif dans X, il est immédiat, que pour tout $f \in X$ et tout $\lambda > 0$, l'equation $u - \lambda Au = f$ possède une unique solution qui vérifie $\|u\| \leq \|f\|$.*

Definition 4 *Soit A un opérateur m-dissipatif dans X et $\lambda > 0$.Pour tout $f \in X$, on note $J_\lambda f$ la solution u de l'équation $u - \lambda Au = f$.*

Proposition 3.1.1

Soit A est un opérateur (linéaire) dissipatif dans X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$i)$ A est m-dissipatif dans X.

$ii)$ il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $f \in X$, il existe $u \in D(A)$: $u - \lambda_0 Au = f$.

Preuve.

Il est immédiat que $(i) \Rightarrow (ii)$. montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$

soit $\lambda > 0$. on remarque que l'équation $u - \lambda Au = f$ est équivalente à

$$u - \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

or, puisque A est dissipatif et $R(I - \lambda_0 A) = X$, on peut définir comme dans la définition (?) l'opérateur $J_{\lambda_0} = (I - \lambda_0 A)^{-1}$ qui est une contraction sur X. L'équation précédente est alors équivalente à

$$u = J_{\lambda_0}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda}f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u\right]$$

Lorsque $2\lambda > \lambda_0$, cette équation s'écrit $u = F(u)$, où F est une application Lipschitzienne sur X, de rapport $K = \left|1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\right| < 1$.En appliquant le théorème $(point)\ fixe$, on peut donc résoudre l'équation $u - \lambda Au = f$, pour tout $\lambda \in \left]\frac{\lambda_0}{2}, +\infty\right[$. En itérant ce procédé, on résout l'équatioon pour tout $\lambda \in \left]\frac{\lambda_0}{2^n}, +\infty\right[$, $n \in IN$ et donc pour tout $\lambda > 0$.■

Definition 5 *Un opérateur A est dit accrétif si l'opérateur $(-A)$ est dissipatif et il est dit m-accrétif si l'opérateur $(-A)$ est m-dissipatif.*

3.1.2 Opérateurs m-dissipatifs dans un Hilbert

Dans ce paragraphe, on suppose que $X = H$ espace de Hilbert réel et on note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire dans H des vecteurs $u, v \in H$.

Proposition 3.1.2

$$A \ \textit{dissipatif dans}\ H \ \Leftrightarrow \forall u \in D(A),\ \langle Au, u\rangle \leq 0 \tag{3.1}$$

Preuve.

Si (1.1) est vérifiée, alors

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0;\ \|u - \lambda Au\|^2 = \|u\|^2 - 2\lambda\langle Au, u\rangle + \lambda^2\ \|Au\|^2 \geq \|u\|^2$$

donc A est dissipatif.

Réciproquement, si A est dissipatif, on a

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0,\ -2\lambda\langle Au, u\rangle + \lambda^2\ \|Au\|^2\ \geq 0$$

En divisant par λ et en faisant tendre λ vers 0, on obtient (3.1) .■

3.1.3 Produit semi intérieur-Application de dualité

Definition 6 *Pour tout* u *et* v *dans* X, *on définit le produit semi interieur noté* $[u, v]$ *par*

$$[u, v] = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$$

Propriétés du produit semi intérieur

1. $[u, v] = \inf\limits_{\lambda \to 0} \frac{\|u+\lambda v\| - \|u\|}{\lambda}$
2. $[u, \lambda v] = \lambda [u, v]$
3. $[u, v + v'] \leq [u, v] + [u, v']$
4. $[u, \alpha u + v] = \alpha |u| + [u, v]$

Preuve. Voir A. Moumeni [22]

Definition 7 *Soit* $x \in X$, *on pose :*

$$J(x) := \left\{ w \in X^*;\ \langle w, x \rangle_{X^* \times X} = \|x\| \ \ et\ \ \|w\|_{X^*} \leq 1 \right\}$$

J est une application de X dans X^*, partout définie d'après le théorème de Banach, dite application duale normalisée.

Proposition 3.1.3 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est accrétif.*
2. $\forall\ u_1, u_2 \in D(A) : \exists w \in J(u_1 - u_2)$ *tel que* $\langle w, Au_1 - Au_2 \rangle \geq 0$
3. $\forall\ u_1, u_2 \in D(A) : [u_1 - u_2, Au_1 - Au_2] \geq 0$
4. $\forall \lambda > 0;\ (I + \lambda A)^{-1}$ *défini de* $R(I + \lambda A)$ *dans* X *est une contraction.*

Preuve. Voir A. Moumeni [22] .

Dans la suite, on désignera par $[.,.]_p$ le produit semi intérieur et par $J_p(.)$ l'application duale normalisée dans $L^P(\Omega)$ .On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.1.4

1) Si $p=1$ alors pour tout u,v dans $L^1(\Omega)$, on a

$$[u,v]_1 = \int\limits_{\{x,\ u(x)\neq 0\}} sign_0(u(x)).v(x)\,dx + \int\limits_{\{x,\ u(x)=0\}} |v(x)|\,dx$$

et

$$J_1(u) = \{w \in L^\infty(\Omega) : w(x) \in sign_0(u(x)) \quad p.p\}$$

2) Si $1 < p < \infty$, on a pour tout u,v dans $L^p(\Omega)$

$$[u,v]_p = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \int\limits_\Omega sign_0(u(x)).|u(x)|^{p-1} v(x)\,dx$$

et

$$J_p(u) = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} sign_0 u(x).|u(x)|^{p-1}$$

La fonction $sign_0$ est définie par

$$sign_0 r = \begin{cases} 1 \text{ si } & r > 0 \\ 0 \text{ si } & r = 0 \\ -1 \text{ si } & r < 0 \end{cases}$$

Preuve.

1) Si $p=1$, on a

$$[u,v]_1 = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\|u+\lambda v\|_1 - \|u\|_1}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\int\limits_\Omega |u(x)+\lambda v(x)|\,dx - \int\limits_\Omega |u(x)|\,dx}{\lambda}$$

Lorsqu'on fait tendre λ vers 0, on aura

$$\frac{|u(x)+\lambda v(x)|\,dx-|u(x)|\,dx}{\lambda}=\begin{cases} v(x) & si\ u(x)>0 \\ |v(x)| & si\ u(x)=0 \\ -v(x) & si\ u(x)<0 \end{cases}$$

ainsi

$$[u,v]_1=\int\limits_{\{x,\ u(x)\neq 0\}} sign_0(u(x)).v(x)\,dx+\int\limits_{\{x,\ u(x)=0\}} |v(x)|\,dx$$

Cherchons maintenant l'ensemble $J_1(u)$ qui est donné par

$$J_1(u)=\{w\in L^\infty(\Omega)\,;\ \langle w,u\rangle=\|u\|_1\ \text{ et }\ \|w\|_\infty\leq 1\}$$

Soit alors $w\in J_1(u)$, on a donc

$$\int\limits_\Omega w(x)\,u(x)\,dx=\int\limits_\Omega |u(x)|\,dx$$

ce qui donne

$$\int\limits_\Omega w(x)\,u(x)\,dx-\int\limits_\Omega |u(x)|\,dx=0$$

ainsi

$$\int\limits_\Omega (sign_0(u(x)).w(x)-1)\,|u(x)|\,dx=0$$

on peut donc conclure que

$$sign_0(u(x)).w(x)=1\ \ pp$$

d'où finalement

$$w(x)\in sign_0(u(x))\quad pp$$

2) si $1 < p < \infty$, on a :

$$[u,v]_p = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\|u+\lambda v\|_p - \|u\|_p}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\left(\int_\Omega |u(x)+\lambda v(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\lambda}$$

on définit maintenant les deux fonctions f et g comme suit

$f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, qui à chaque λ associe $f(\lambda)$ donnée par

$$f(\lambda) = \int_\Omega |u(x)+\lambda v(x)|^p\,dx$$

et $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$, qui à chaque λ associe $g(\lambda)$ donnée par

$$g(\lambda) = (f(\lambda))^{\frac{1}{p}}$$

donc $[u,v]_p$ devient

$$[u,v]_p = \lim_{\lambda\to 0}\frac{g(\lambda)-g(0)}{\lambda} = g'_d(0)$$

où $g'_d(0)$ est la dérivé de g à droite du point 0. Or

$$g'(\lambda) = \frac{1}{p}(f(\lambda))^{\frac{1}{p}-1} f'(\lambda)$$

donc la continuité de f et f' au point 0 donne que

$$g'(0) = \frac{1}{p}(f(0))^{\frac{1}{p}-1} f'(0)$$

en utilisant le fait que

$$f'(0) = p\int_\Omega sign_0(u(x))\,|u(x)|^{p-1}\,v(x)\,dx$$

et que

$$(f(0))^{\frac{1}{p}-1} = (\|u\|^p)^{\frac{1}{p}-1}$$

on déduit que

$$[u,v]_p = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} \int_\Omega sign_0(u(x)) \, . \, |u(x)|^{p-1} v(x) \, dx$$

et l'ensemble $J_p(u)$ défini par

$$J_p(u) = \left\{ w \in L^q(\Omega) \, ; \, \langle w, u \rangle = \|u\|_p \text{ et } \|w\|_q \leq 1 \right\}$$

est constitué d'un seul élément donné par

$$J_p(u) = \frac{1}{\|u\|_p^{p-1}} sign_0 u(x) \, . \, |u(x)|^{p-1} \in L^q(\Omega)$$

■

3.1.4 Le Laplacien dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Proposition 3.1.5

Soit Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *et posons* $X = L^1(\Omega)$, *on définit l'opérateur* A_1*sur l'ensemble*

$$D(A_1) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \, , \, \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

par

$$A_1 u = -\Delta u \ , \ \forall u \in D(A_1)$$

Alors, A_1 *est m-accrétif dans* X.

Preuve.

Si $X = L^1(\Omega)$, son dual est donc $X^* = L^\infty(\Omega)$.

Le produit semi intérieur et l'ensemble dual sont donnés respectivement par

$$[u,v]_1 = \int\limits_{\{x,\ u(x)\neq 0\}} sign_0\left(u\left(x\right)\right).v\left(x\right)dx + \int\limits_{\{x,\ u(x)=0\}} \left|v\left(x\right)\right|dx$$

et

$$J\left(u\right) = \left\{w \in L^{\infty}\left(\Omega\right) : w\left(x\right) \in sign_0\left(u\left(x\right)\right) \quad p.p\right\}$$

la fonction $sign_0$ est définie plus haut .

Il est clair que l'opérateur linéaire A_1 est accrétif dans $L^1\left(\Omega\right)$, pour le voir il suffit de remarquer que

$$[u, A_1 u]_1 \geq 0$$

Pour la m-accrétivité, voir Bresis-Strauss [7] .■

Proposition 3.1.6

On se donne Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, $X = L^P\left(\Omega\right)$, $1 < p < \infty$ *et on définit l'opérateur* A_2 *tel que*

$$\begin{cases} A_2 u = -\Delta u \ , \ \forall u \in D\left(A_2\right) \\ D\left(A_2\right) = \left\{u \in W^{2,p}\left(\Omega\right),\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \end{cases}$$

Alors, A_2 *est m-accrétif dans* X.

Preuve.

Montrons que l'opérateur A_2 est accrétif.

L'opérateur A_2 étant linéaire, d'après la proposition (3.1.3), il suffit de montrer que

$$[u, A_2 u]_p \geq 0$$

sachant que

$$[u, A_2 u]_p = \frac{-1}{\|u\|_p^{p-1}} \int\limits_{\Omega} sign_0 u. \left|u\right|^{p-1} \Delta u \ dx$$

La formule de Green donne

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} sign_0 u. \left|u\right|^p \Delta u \ dx &= \int_{\Omega} \nabla \left[sign_0 u. \left|u\right|^{p-1}\right] \nabla u \ dx \\
&= \int_{\Omega} \left[sign_0 u\right]^2 (p-1) \left|u\right|^{p-2} \left|\nabla u\right|^2 dx \geq 0
\end{aligned}$$

Ce qui montre que A_2 est accrétif

Pour la m-accrétivité, voir Bresis-Strauss [7] .■

3.2 C_0 Semi-groupes et leurs générateurs

Definition 8 *On appelle C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de $X \to X$, une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ vérifiant :*

1. $S(0) = I$, (I *est l'opérateur identité dans* X)
2. $S(t+s) = S(t) S(s)$, $\forall s, t \geq 0$
3. $\lim\limits_{t\to 0} S(t) x = x$, $\forall x \in X$.

Definition 9 *On dit que le semi-groupe $S(t)$ est de contraction si*

$$\forall t \geq 0,\ \left\|S(t)\right\| \leq 1.(\ et\ S(t) \in \mathcal{L}(X)).$$

Definition 10 *On appelle générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensembe*

$$D(A) = \left\{x \in X,\ \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}\ existe\right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t},\ \forall x \in D(A)$$

Exemple

Soit $C^*[0,\infty) = \{f : [0,\infty) \to \mathbb{R}\ ,\ f$ est uniformément continue et bornée$\}$. Avec la norme

$$\|f\|_{C^*[0,\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(\alpha)|$$

l'espace $C^*[0,\infty)$ devient un Banach.

Définissons

$$(S(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha)\ ,\ \forall t \geq 0,\ \text{et } \alpha \in [0,\infty)$$

Evidemment $S(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a :

i) $(S(0)f)(\alpha) = f(0+\alpha) = f(\alpha)$, donc $S(0) = I$.

ii) $(S(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = (S(t)f)(s+\alpha) = (S(t)S(s)f)(\alpha)\ ,\ \forall f \in C^*[0,\infty)$

donc

$$S(t+s) = S(t)S(s)\ ,\ \forall t,\ s \geq 0$$

iii) $\lim\limits_{t\to 0} \|S(t)f - f\|_{C^*[0,\infty)} = \lim\limits_{t\to 0} \left\{ \sup\limits_{\alpha\in[0,\infty)} |f(t+\alpha) - f(\alpha)| \right\} = 0,\quad \forall f \in C^*[0,\infty)$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} \|S(t)f\|_{C^*[0,\infty)} &= \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |(S(t)f)(\alpha)| = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} |f(t+\alpha)| = \sup_{\beta\in[t,\infty)} |f(\beta)| \\ &\leq \sup_{\beta\in[0,\infty)} |f(\beta)| = \|f\|_{C^*[0,\infty)}\ ,\quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

donc

$$\|S(t)\| = 1,\ \forall t \geq 0$$

ainsi $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $C^*[0,\infty)$, nommé le C_0 semi-groupe de translation à droite.

Soit maintenant $A : D(A) \subset C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ le générateur infitésimal du C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Si $f \in D(A)$, alors, nous avons

$$Af(\alpha) = \lim_{t \to 0} \frac{(S(t) f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha + t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent :

$$D(A) \subset \left\{ f \in C^* [0, \infty) \;\; tel \;\; que \;\; f' \in C^* [0, \infty) \right\}$$

Si $f \in C^* [0, \infty)$ tel que $f' \in C^* [0, \infty)$, alors :

$$\left\| \frac{S(t) f - f}{t} - f' \right\|_{C^* [0, \infty)} = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \left| \frac{(S(t) f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|$$

mais

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \left| \frac{(S(t) f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \sup_{\alpha \in [0, \infty)} \left| \frac{f(t + \alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} f(\tau) \mid_{\alpha}^{\alpha + t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \frac{1}{t} \left(\int_{\alpha}^{\alpha + t} \left[f'(\tau) - f'(\alpha) \right] d\tau \right) \\ &\leq \frac{1}{t} \left(\int_{\alpha}^{\alpha + t} \left| f'(\tau) - f'(\alpha) \right| d\tau \right) \to 0 \end{aligned}$$

uniformément par rapport à α, pour $t \to 0$.

Par suite :

$$\left\| \frac{S(t) f - f}{t} - f' \right\|_{C^* [0, \infty)} \to 0, \text{ si } t \to 0$$

d'où $f \in D(A)$ et l'ensemble $\left\{ f \in C^* [0, \infty) \;\; tel \;\; que \;\; f' \in C^* [0, \infty) \right\} \subset D(A)$.

Par conséquent

$$D(A) = \left\{ f \in C^* [0, \infty) \;\; tel \;\; que \;\; f' \in C^* [0, \infty) \right\}$$

et

$$Af = f'$$

Théorème 3.2.1 *(Hill-Yosida-Phillips) Un opérateur linéaire A dans X est le générateur d'un semi-groupe de contraction sur X si et seulement si A est m-dissipatif de domaine dense.*

Preuve. Voir T. Cazenave-A. Haraux [8] .

3.3 Problèmes semi linéaires

3.3.1 Préliminaires

Definition 11 *Une fonction $F : X \to X$ est dite localement Lipschitzienne sur les bornés de X si :*

$\forall M > 0$, $\exists K(M)$ telle que :$\|F(x) - F(y)\| \leq K(M)\|x - y\|$, $\forall x, y \in B_M$, où B_M est la boule de centre 0 et de rayon M.

Dans ce paragraphe, X est un espace de Banach, A est un opérateur m-dissipatif danx X, de domaine dense et $S(t)$ est le semi-groupe de contraction engendré par A. $F : X \to X$ une fonction Lipschitzienne sur les bornés de X. On note $K(M)$ la constante de Lipschitz de F sur B_M.

Etant donné $u_0 \in X$, on cherche $T > 0$ et une solution $u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)$ du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = F(u) \\ \quad u(0) = u_0 \end{cases} \tag{PSL}$$

Lemme 3.3.1

Si u est une solution du problème (PSL), alors, elle vérifie l'équation intégrale *suivante :*

$$u(t) = S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-s)\,F(u(s))\,ds,\ \forall t \in [0,T] \tag{3.2}$$

Preuve.

Soit u est une solution du problème (PSL), on définit w par

$$w(s) = S(t-s)\,u(s)$$

qui est différentiable pour $0 < s < t$.On a alors,

$$\begin{aligned} \frac{w(h+s)-w(s)}{h} &= \frac{S(t-h-s)\,u(h+s) - S(t-s)\,u(s)}{h} \\ &= S(t-h-s)\,\frac{[u(h+s) - S(h)\,u(s)]}{h} \\ &= S(t-h-s)\,\frac{[u(h+s) - u(s) + u(s) - S(h)\,u(s)]}{h} \\ & \quad S(t-h-s)\left[\frac{u(h+s)-u(s)}{h} - \frac{S(h)-I}{h}u(s)\right] \end{aligned}$$

Si on passe à la limite quand h tend vers zéro, on aura

$$w'(s) = S(t-s)\,[u'(s) - Au(s)] = S(t-s)\,F(u(s))$$

On intègre de 0 *à* $\tau < t$ pour avoir

$$w(\tau) - w(0) = \int_0^\tau S(t-s)\,F(u(s))\,ds$$

par suite

$$w(\tau) = S(t)\,u(0) + \int_0^\tau S(t-s)\,F(u(s))\,ds$$

en faisant tendre τ vers t, on aura

$$w(t) = S(t)\,u(0) + \int_0^t S(t-s)\,F(u(s))\,ds$$

comme $w(t) = S(0)\,u(t) = u(t)$, il en résulte

$$u(t) = S(t)\,u_0 + \int_0^t S(t-s)\,F(u(s))\,ds,\ \ \forall t \in [0,T]$$

■

Remarque 3.3.1 *La formule* (3.2) *nous définit une solution* $u \in C([0,T],X)$.

3.3.2 L'existence locale

commençons par énoncer un résultat d'unicité.

Lemme 3.3.2 *Soit* $u_0 \in X$ *et* $T > 0$ *alors, le problème* (PSL) *admet au plus une solution.*

Preuve.

Soient u et v deux solutions de (PSL), elles sont donc solutions de (3.2). Posons

$$M = \sup_{t\in[0,t]} \max\{\|u(t)\|, \|v(t)\|\}$$

on a

$$u(t) - v(t) = \int_0^t S(t-s)\,[F(u(s)) - F(v(s))]\,ds$$

donc

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\| &\leq \int_0^t \|F(u(s))-F(v(s))\| \,\mathrm{ds} \\ &\leq K(M)\int_0^t \|u(s)-v(s)\|\, ds\end{aligned}$$

On conclut en appliquant la remarque (2.2.1) qui donne

$$\|u(s)-v(s)\|=0$$

d'où on obtient finalement

$$u=v$$

le résultat attendu. ■

Posons maintenant

$$T_M=[2K(2M+\|F(0)\|)+2]^{-1}>0, \text{ pour } M>0$$

On peut établir un résultat d'existence locale.

Proposition 3.3.1

Soit $M>0$ et $u_0\in X$ tel que $\|u_0\|\leq M$. Alors, il existe une unique solution $u\in C([0,T_M],X)$ de (3.1) avec $T=T_M$.

Preuve.

Notons tout d'abord que le lemme (3.3.2) nous assure l'unicité de la solution.

Soit $u_0\in X$ tel que $\|u_0\|\leq M$.

On note $E=\{u\in C([0,T_M],X)\ ,\ \|u(t)\|\leq L;\ \forall t\in[0,T_M]\}$ avec $L=2M+\|F(0)\|$. Si on munit E de la distance d induite par la norme de $C([0,T_M],X)$ donnée par

$$d(u,v)=\max_{t\in[0,T_M]}\|u(t)-v(t)\|,\ \text{pour tout } u,v \text{ dans } E$$

alors, E est un espace métrique complet.

Pour tout $u\in E$, on définit $\Phi_u\in C([0,T_M],X)$ par

$$\Phi_u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)F(u(s))\,ds,\ \forall t\in[0,T_M]$$

1) montrons que $\Phi_u : E\to E$.

pour $s\in[0,T_M]$, on a :

$$F(u(s))=F(0)+(F(u(s))-F(0))$$

donc

$$\|F(u(s))\|\le\|F(0)\|+K(L)L\le\frac{M+\|F(0)\|}{T_M}$$

il en résulte que

$$\|\Phi_u(t)\|\le\|u_0\|+\int_0^t\|F(u(s))\|\,ds\le\frac{(M+\|F(0)\|)\,t}{T_M}\le L,\ \forall t\in[0,T_M]$$

ainsi, on a bien $\Phi_u : E\to E$.

2) Montrons que Φ_u est une contraction.

Notons d'une part que pour tout $u,v\in E$ on a

$$\|\Phi_u(t)\|-\|\Phi_v(t)\|=\left\|\int_0^t S(t-s)\left[F(u(s))-F(v(s))\right]ds\right\|$$

donc

$$\|\Phi_u(t)\| - \|\Phi_v(t)\| \leq K(L) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| \, ds \leq K(L) T_M . d(u,v)$$

d'autre part on sait que

$$\|F(0)\| + K(L) L \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M}$$

donc

$$K(L) L \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M}$$

d'où finalement

$$K(L) T_M \leq \frac{M + \|F(0)\|}{T_M} = \frac{M + \|F(0)\|}{2M + \|F(0)\|} < 1$$

on peut donc conclure que Φ_u étant une contraction, elle admet alors un point fixe $u \in E$ qui est solution de (3.2) .■

3.3.3 L'existence globale - L'éventuelle explosion en temps fini

Nous complétons ce chapitre par ce théorème.

Théorème 3.3.1

Il existe une fonction $T : X \to]0, +\infty[$ avec les propriétés suivantes : Pour tout $u_0 \in X$, il existe $u \in C(]0, T(u_0)[, X)$, qui pour tout $T < T(u_0)$ est l'unique solution de (3.1) *dans $C([0,T], X)$. de plus,*

$$2K(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|) \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2, \ \forall t \in [0, T(u_0)[\tag{3.3}$$

En particulier, l'une de ces deux éventualités suivantes aura lieu :

i) $T(u_0) = +\infty$

ii) $T(u_0) < +\infty$ *et* $\lim\limits_{t \to T(u_0)} \|u(t)\| = +\infty.$

Remarque 3.3.2

Si la propriété (i) *est satisfaite, on dit que la sulution* u *est globale. Si la propriété* (ii) *est satisfaite, on dit que* u *explose en temps fini. L'alternative* $(i) - (ii)$ *signifie en d'autres termes que l'existence globale de la solution* u *est équivalente à l'existence d'une estimation à-priori de* $\|u(t)\|$ *sur* $[0, T(u_0)[$.

Preuve.

Pour clarifier les idées, notons qu'à partir de la formule (3.3), il est clair que $\lim\limits_{t \to T(u_0)} \|u(t)\| = +\infty$ dès que $T(u_0) < +\infty$.

soit maintenant $u_0 \in X$, on introduit :

$$T(u_0) = \sup\{T > 0,\ \exists u \in C([0,T], X) \text{ solution de } (3.2)\}$$

d'après la proposition $(3.3.1)$, on sait que $T(u_0) > 0$. D'autre part, la propriété d'unicité permet de construire une solution maximale $u \in C([0, T(u_0)[, X)$ de (3.2).

Il nous reste donc montrer (3.3).

L'inégalité (3.3) étant immédiate si $T(u_0) = +\infty$, on peut supposer que $T(u_0) < +\infty$. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $t_0 \in [0, T(u_0)[$ tel que (3.3) ne soit pas vérifiée.

On a alors,

$$T(u_0) - t_0 < T_M, \text{ avec } M = \|u(t_0)\|$$

soit $v \in C([0, T_M], X)$ la solution donnée par la proposition (3.3.1) de l'équation

$$v(t) = S(t)\, u(t_0) + \int_0^t S(t-s)\, F(v(s))\, ds,\ \forall t \in [0, T_M]$$

on définit la fonction $w \in C([0, t_0 + T_M], X)$ par

$$w(t) = \begin{cases} u(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0 \\ v(t - t_0) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_0 + T_M \end{cases}$$

Pour $t_0 \leq t \leq t_0 + T_M$ on a

$$w(t) = v(t - t_0) = S(t - t_0) u(t_0) + \int_0^{t-t_0} S(t - t_0 - s) F(v(s)) \, ds$$

en utilisant le fait que

$$u(t_0) = S(t_0) u_0 + \int_0^{t_0} S(t_0 - s) F(u(s)) \, ds$$

on aura

$$w(t) = S(t - t_0) \left[S(t_0) u_0 + \int_0^{t_0} S(t_0 - s) F(w(s)) \, ds \right] + \int_0^{t-t_0} S(t - t_0 - s) F(v(s)) \, ds$$

en effectuant le changement de variables : $s' = s + t_0$, on obtient

$$\int_0^{t-t_0} S(t - t_0 - s) F(v(s)) \, ds = \int_{t_0}^{t} S(t - s') F(v(s' - t_0)) \, ds' = \int_{t_0}^{t} S(t - s) F(w(s)) \, ds$$

par conséquent

$$w(t) = S(t - t_0) \left[S(t_0) u_0 + \int_0^{t_0} S(t_0 - s) F(w(s)) \, ds \right] + \int_{t_0}^{t} S(t - s) F(w(s)) \, ds$$

d'où finalement

$$w(t) = S(t) u_0 + \int_0^{t} S(t - s) F(w(s)) \, ds$$

w est donc solution de (3.2) sur $[0, t_0 + T_M]$, c'est à dire, on a pu construire une solution de (3.2) avec $T = t_0 + T_M > T(u_0)$, ce qui contredit la définition de $T(u_0)$.

donc on a bien

$$2K(\|F(0)\| + 2\|u(t)\|) \geq \frac{1}{T(u_0) - t} - 2$$

D'où le résulat attendu.■

Chapitre 4

premiers résultats sur l'existence globale

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons un système de réaction diffusion à m équations, on établit que pour un système ayant une matrice de diffusion diagonale dont les coéfficients sont égaux, les solutions existent globalement en temps.

Sous leur forme la plus simple, les systèmes de réaction-diffusion s'écrivent

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) - D\Delta u = f(u(t,x)) & x \in \Omega,\ t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(0,.) = u_0(x) & x \in \overline{\Omega},\ t = 0 \end{cases}$$

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $D = diag(d_1, ..., d_m)$ est une matrice diagonale définie positive, dite matrice de diffusion. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est une fonction localement lipschitzienne.

Ces systèmes ont donné lieu au travail mathématique pionnier des chercheurs qui s'intéressent aux deux propriétés qu'on trouve dans plusieures applications :

$$\text{La positivité des solutions est préservée au cours du temps} \tag{4.1}$$

$$\text{La masse totale des composants est controlée au cours du temps} \tag{4.2}$$

En partant du fait que le système (S) possède une solution locale unique définie sur l'intervalle $]0, T_{\max}[\times\Omega$ (Voir Chapitrte 3), la question générique est dans quelle mesure les propriétés (4.1) et (4.2) contribuent à l'existence globale en temps de la solution.($T_{\max} = +\infty$).

On s'intéresse en premier lieu à la positivité de la solution.

4.2 Positivité de la solution

Definition 12 *Une fonction $f = (f_i)_{1\leq i\leq m}$ est dite quasi-positive si et seulement si pour tout $i = 1, ..., m$ on a $f_i(v) \geq 0$ si $v_i = 0$ pour tout $v = (v_1, ..., v_i, ..., v_m) \in \mathbb{R}_+^m$.*

Proposition 4.2.1

Si $f = (f_i)_{1\leq i\leq m}$ est quasi-positive, la solution du système (S) est non négative terme à terme.

Preuve.

On pose $u^+ = \max(u, 0)$ et $u^- = \min(u, 0)$, et on désigne par $(S)^+$ le système (S) où on a remplacé $f(u)$ par $f(u^+)$. On travaille sur la $i^{ème}$ équation du système, qu'on intègre sur $]0, t[\times\Omega$ après l'avoir multiplié par u_i^-.

$$\int_0^t\int_\Omega u_i^-.\frac{\partial u_i}{\partial t}dxdt - \int_0^t\int_\Omega d_i.u_i^-.\Delta u_i dxdt = \int_0^t\int_\Omega u_i^- f_i\left(u^+\right)dxdt$$

en utilisant le fait que $(u_i)_t = -\left(u_i^-\right)_t$ et que $\Delta u_i = -\Delta u_i^-$ si $u_i^- > 0$ et par integration par parties, on obtient

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u_i^-\right)^2.dx-d_i\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u_i^-\right|^2dxdt=\int_0^t\int_{\Omega}u_i^-f_i\left(u^+\right)dxdt$$

comme f_i est quasi-positive, on a

$$\begin{cases} u_i^-f_i\left(u^+\right)=0 \quad \text{si } u\geq 0 \\ \quad\quad\quad \text{et} \\ u_i^-f_i\left(u^+\right)\geq 0 \quad \text{si } u\leq 0\end{cases}$$

ainsi

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(u_i^-\right)^2.dx-d_i\int_0^t\int_{\Omega}\left|\nabla u_i^-\right|^2dxdt\geq 0$$

par conséquent : $u_i^-=0$ et $u=u_i^+$ qui est solution de (S). Il s'en suit, par unicité de la solution, que toutes ses composantes sont non négatives.■

4.3 Résultats d'existence globale

Definition 13 *La masse totale des composants du système (S) est la quantité :*

$$M\left(t\right)=\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega}u_i\left(t,x\right).dx$$

La condition (4.2) est par exemple satisfaite dès que $\sum_{i=1}^{m}f_i\leq 0$. En effet, il suffit pour le voir d'integrer sur $]0,t[\times\Omega$. Les conditions aux bord vont assurer que

$$\int_0^t\int_{\Omega}d_i.\Delta u_i\left(t,x\right)dxdt=0$$

si bien qu'on obtient l'estimation à priori

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_i\left(t,x\right).dx\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}u_i\left(0,x\right).dx$$

lorsque les u_i sont initialement positifs, comme les $u_i\left(t,.\right)$ le restent, ceci assure bien que la masse totale des composants reste bornée au cours du temps. Ainsi, on est ramené à la définition suivante.

Definition 14 *On dit qu'une fonction $f=(f_i)_{1\leq i\leq m}:\mathbb{R}^m\rightarrow\mathbb{R}^m$ vérifie la loi de la balance s'il existe des constantes $c_i>0$ telles que*

$$\sum_{i=1}^{m}c_if_i\left(v\right)\leq 0,\ \forall v\in IR_+^m$$

Proposition 4.3.1

Si les constantes de la diffusion sont telles que $d_i=d,\ \forall i=1,...,m$,et si la fonction f est quasi-positive, vérifiant la loi de la balance alors, la solution du système (S) est globale.

Preuve.

Précisons d'une part que nous considérons une nonlinéarité f quasi-positive, ce qui assure que la solution u est non négative.

d'autre part, puisque f vérifie la loi de la balance alors, en posant $w=\sum_{i=1}^{m}c_iu_i$ on obtient

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial t}-d\Delta w\leq 0, & x\in\Omega,\ t\in\left]0,T_{\max}\right[\\ \frac{\partial w}{\partial\eta}=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0\\ w\left(0,x\right)=w_0=\sum_{i=1}^{m}u_i\left(0,x\right), & x\in\overline{\Omega},\ t=0\end{cases}$$

on applique le principe du maximum, le but étant alors d'obtenir l'estimation

$$\left\|w\left(t,.\right)\right\|_{\infty}\leq\left\|w_0\right\|_{\infty},\ \forall t\in\left]0,T_{\max}\right[$$

par conséquent, la solution $u(t,x)$ est uniformément bornée (existe globalement).■

Definition 15 *On dit qu'une région $\hat{I} \subset \mathbb{R}^n$ est invariante pour le système (S) si la solution $u(t,x)$ de (S) vérifie la relation $u(t,x) \in \hat{I}$ dès que la donnée initiale $u(0,x) = u_0(x)$ vérifie la relation $u_0(x) \in \hat{I}$.*

Definition 16 *Soit $\hat{I} \subset \mathbb{R}_+^n$ une région invariante pour le système (S). Une fonction $L : \hat{I} \to [0,+\infty[$ est dite fonction de Lyapunov si*

1. *L est une fonction convexe qui admet une racine unique.*
2. *L peut s'écrire sous la forme*

$$L(u) = \sum_i \ell_i(u), \ \ell_i \in C^2\left(\hat{I}\right)$$

3. *L vérifie : $\nabla L(u) f(u) \leq 0, \ \forall u \in \hat{I}$.*

Proposition 4.3.2

Si les constantes de la diffusion sont telles que $d_i = d, \ \forall i = 1,...,m$ et si le système (S) admet une région invariante $\hat{I}$ et une fonction de Lyapunov alors, la solution de (S) existe globalement en temps.

Preuve.

Soit L une fonction de Lyapunov qui s'annulle au point x_0. Notons que pour tout x dans $\hat{I}$ on a $\ell_i''(x) \geq 0$.

Comme les constantes de la diffusion sont toutes égales à $d > 0$ ie $D = dI_m$ alors, le système (RD) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta_x u = f(u)$$

d'une autre part on a

$$\frac{d}{dt}L(u) = \nabla_u L(u) \frac{\partial u}{\partial t}$$

et

$$\Delta_x L(u) = \nabla_x (\nabla_u L(u) \nabla_x u) = \Delta_u L(u) (\nabla_x u)^2 + \nabla_u L(u) \Delta_x u$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} L(u) - d\Delta_x L(u) &= \nabla_u L(u) \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta_u L(u) (\nabla_x u)^2 - d\nabla_u L(u) \Delta_x u \\
&= \nabla_u L(u) [d\Delta_x u + f(u)] - d\Delta_u L(u) (\nabla_x u)^2 - d\nabla_u L(u) \Delta_x u \\
&= \nabla_u L(u) f(u) - d\Delta_u L(u) (\nabla_x u)^2 \\
&\leq \nabla_u L(u) f(u)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\frac{d}{dt} L(u) \leq d\Delta_x L(u) + \nabla_u L(u) f(u)$$

comme

$$\nabla_u L(u) f(u) \leq 0$$

alors on aura

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt} L(u) \leq d\Delta_x L(u) \\ \text{et} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} L(u) = \nabla_u L(u) f(u) \end{array} \right.$$

ce qui permet d'après le principe de maximum de conclure que $L(u)$ est bornée.■

Chapitre 5

Etude d'un système à une matrice de diffusion diagonale

5.1 Introduction

Considérons maintenant, le système de réaction diffusion à deux composantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \triangle u = f(u,v) \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \triangle v = g(u,v) \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times \Omega \tag{5.2}$$

avec les conditions aux bord

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur }]0,+\infty[\times \partial\Omega \tag{5.3}$$

et les conditions initiales

$$u(0,.) = u_0, \;\; v(0,.) = v_0 \qquad \text{sur } \Omega \tag{5.4}$$

Où $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$, $t > 0$, $x \in \Omega$. Ω est un ouvet borné de $\mathbb{R}^n$, d_1, d_2 deux constantes positives. On s'intéresse ici à des conditions initiales positives et uniformément bornées. Les nonlinéarités f et g sont deux fonctions continûment différentiables sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, choisies avec les propriétés suivantes :

$$f(0,s) \geq 0, \text{ et } g(r,0) \geq 0 \qquad \forall r,s \geq 0 \tag{5.5}$$

$$\sup\left(|f(r,s)|, |g(r,s)| \right) \leq C(r+s+1)^{\gamma}, \ \forall\, r,s \geq 0 \tag{5.6}$$

C est une constante positive et $\gamma \geq 1$.

On suppose que l'une des deux conditions suivantes est satisfaite

• il existe $p \geq 2$, $c(p) > 0$ et des nombres positifs $(B_i(p))_{0 \leq i \leq p}$ tels que

$$B_i(p) f(r,s) + B_{i-1}(p) g(r,s) \leq c(p)(r+s+1), \ \forall\, r,s \geq 0 \tag{5.7}$$

où

$$B_i^2(p) \leq \frac{4d_1d_2}{(d_1+d_2)^2} B_{i-1}(p) . B_{i+.1}(p) \tag{5.8}$$

• il existe $c(1) > 0$ et $B_i(1)$, $0 \leq i \leq 1$ tels que

$$\begin{cases} B_1(1) f(r,s) + B_0(1) g(r,s) \leq c(1)(r+s+1) \\ B_0(1), \ B_1(1) > 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

5.2 L'existence locale de la solution

Commençons par tirer quelques conséquences des sections précédentes, nous allons travailler dans l'espace de Banach $X = C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|(u,v)\|_X = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$

Nous allons étudier le système $(5.1) - (5.4)$ en l'écrivant sous la forme équivalente suivante

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) - AU(t) = F(U(t)) & t > 0 \\ U(0) = U_0 = (u_0, v_0) \end{cases}$$

Sachant que : $U(t) = (u(t), v(t))$, $F(U) = (f(u,v), g(u,v))$ et l'opérateur A est défini comme suit

$$A : D(\Delta) \times D(\Delta) \to C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$$

$$A := \begin{pmatrix} d_1\Delta & 0 \\ 0 & d_2\Delta \end{pmatrix}$$

avec

$$D(\Delta) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \ \Delta u \in C(\overline{\Omega}) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}$$

Notons d'une part qu'il est facile de s'assurer que la fonction F est locallement Lipshitzienne sur les bornés de X. D'autre part, on vérifie aisément que les opérateurs $d_1\Delta$, $d_2\Delta$ sont m-dissipatifs dans $L^p(\Omega)$. (Voir chapitre 3) .Soit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_1(t) & 0 \\ 0 & S_2(t) \end{pmatrix}$$

le semi-groupe de contraction engendré par l'opérateur A où $S_1(t)$, $S_2(t)$ sont les semi-groupes engendrés respectivement par les opérateurs $d_1\Delta$ et $d_2\Delta$.

Ainsi pour des conditions initiales $(u_0, v_0) \in C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$, nous pouvons conclure d'après la proposition (3.3.1) que le système $(5.1) - (5.4)$ admet une solution locale définie dans un intervalle maximal $[0, T_{\max}[$.

5.3 L'existence globale de la solution

Dans cette section, nous démontrons un résultat d'éxistence globale de la solution du système $(5.1) - (5.4)$. Notre démarche étant de chercher une estimation uniforme de

$$\sup\left(\left\|f(u,v)\right\|_q, \left\|g(u,v)\right\|_q\right)$$

pour un certain $q > \frac{n}{2}$.(Voir D.Henry [13]).On utilise pour cela une méthode qui fait appel à la fonctionnelle de Lyapunov.

Commençons par un premier lemme.

Lemme 5.3.1

Soit $(u(t,.), v(t,.))$ *une solution de* $(5.1)-(5.4)$. *Si l'une des deux conditions suivantes* (5.8) ou (5.9) *aura lieu alors, il existe un entier* $p \geq 1$ *et une fonction continue* $C_p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *telle que*

$$\sup\left(\left\|u(t,.)\right\|_p, \left\|v(t,.)\right\|_p\right) \leq C_p(t) \ \ , \ t \ < T_{\max}$$

Preuve.

Soit la fonctionnelle L_p donnée par

$$L_p(t) = \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i B_i(p)\, u^i v^{p-i}\right) dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(p)\, u^i v^{p-i}\right) dx$$

avec

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} \text{ et } \alpha_i(p) = C_p^i B_i(p)$$

On dérive L_p par rapport à t pour avoir

$$L_p'(t) = \int_\Omega \left[\left(\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i(p)\, u^{i-1} v^{p-i}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\sum_{i=0}^{p-1}(p-i)\,\alpha_i(p)\, u^i v^{p-i-1}\right)\frac{\partial v}{\partial t}\right] dx$$

$$= \int_\Omega \left[\left(\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i(p)\, u^{i-1} v^{p-i}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{p}(p-i+1)\,\alpha_{i-1}(p)\, u^{i-1} v^{p-i}\right)\frac{\partial v}{\partial t}\right] dx$$

(u, v) étant solution du système $(5.1) - (5.4)$ on aura

$$\begin{aligned}
L_p'(t) &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i(p)\, u^{i-1} v^{p-i} \right) \left(f(u,v) + d_1 \Delta u \right) dx + \\
&\quad \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} (p-i+1)\, \alpha_{i-1}(p)\, u^{i-1} v^{p-i} \right) \left(g(u,v) + d_2 \Delta v \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{p} d_1 i\alpha_i(p)\, u^{i-1} v^{p-i} \Delta u \right) dx \; + \\
&\quad \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} d_2 (p-i+1)\, \alpha_{i-1}(p)\, u^{i-1} v^{p-i} \Delta v \right) dx \; + \\
&\quad \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i(p)\, u^{i-1} v^{p-i} f(u,v) \right) dx + \\
&\quad \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} (p-i+1)\, \alpha_{i-1}(p)\, u^{i-1} v^{p-i} g(u,v) \right) dx
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}
L_p'(t) &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \left\{ i\alpha_i(p)\, f(u,v) + (p-i+1)\, \alpha_{i-1}(p)\, g(u,v) \right\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx + \\
&\quad \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \left\{ d_1 i\alpha_i(p)\, \Delta u + d_2 (p-i+1)\, \alpha_{i-1}(p)\, \Delta v \right\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx
\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

- Si $p = 1$, on obtient

$$L_1'(t) = \int_\Omega \left(d_1 \alpha_1(1)\, \Delta u + d_2 \alpha_0(1)\, \Delta v \right) dx + \int_\Omega \left(\alpha_1(1)\, f(u,v) + \alpha_0(1)\, g(u,v) \right) dx$$

On applique la formule de Green pour avoir

$$\begin{aligned} L_1'(t) &= \int\limits_{\Omega} (\alpha_1(1) f(u,v) + \alpha_0(1) g(u,v))\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} (B_1(1) f(u,v) + B_0(1) g(u,v))\, dx \end{aligned}$$

On obtient ainsi d'après la condition (5.9) que

$$L_1'(t) \leq c(1) \int\limits_{\Omega} (u+v+1)\, dx = c(1) \int\limits_{\Omega} (u+v)\, dx + c(1)\, mes\Omega$$

Il s'agit ensuite de résoudre l'inégalité différentielle suivante

$$L_1'(t) \leq c_1(1) L_1(t) + c_2(1), \ \forall \ t \ < T_{\max}$$

où

$$c_1(1) = \frac{c(1)}{\min(\alpha_1(1), \alpha_0(1))}, \qquad c_2(1) = c(1)\, mes\Omega$$

après une simple intégration, la fonctionnelle $L_1(t)$ vérifie alors

$$L_1(t) \leq \left[L_1(0) + \frac{c_2(1)}{c_1(1)}\right] \exp(c_1(1)\, t) - \frac{c_2(1)}{c_1(1)}, \ \ \forall \ \ t < T_{\max}$$

or,

$$\begin{aligned} L_1(t) &\geq \min(\alpha_1(1), \alpha_0(1)) \int\limits_{\Omega} (u+v)\, dx \\ &\geq \min(\alpha_1(1), \alpha_0(1)) \sup\left(\|u(t,.)\|_1, \|v(t,.)\|_1\right) \end{aligned}$$

ainsi, d'après l'estimation obtenue plus haut, on obtient finalement le résultat attendu

$$\sup \|u(t,.)\|_1, \|v(t,.)\|_1 \leq c_1(t), \ \forall \ t \ < T_{\max}$$

où

$$c_1(t) = \frac{1}{\min(\alpha_1(1), \alpha_0(1))} \left\{ \left[L_1(0) + \frac{c_2(1)}{c_1(1)} \right] \exp(c_1(1)t) - \frac{c_2(1)}{c_1(1)} \right\}$$

- Si $p \geq 2$, on pose

$$T = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \{d_1 i \alpha_i(p) \Delta u + d_2(p-i+1)\alpha_{i-1}(p) \Delta v\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \Delta \{d_1 i \alpha_i(p) u + d_2(p-i+1)\alpha_{i-1}(p) v\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^{p} \int_\Omega \Delta \{d_1 i \alpha_i(p) u + d_2(p-i+1)\alpha_{i-1}(p) v\} u^{i-1} v^{p-i} dx \end{aligned}$$

la formule de Green dit alors que

$$T = -\sum_{i=1}^{p} \int_\Omega \left[\nabla \{d_1 i \alpha_i(p) u + d_2(p-i+1)\alpha_{i-1}(p) v\} \nabla \left(u^{i-1} v^{p-i}\right) \right] dx$$

$$\begin{aligned} = \; - \int_\Omega \Bigg[&\sum_{i=2}^{p} d_1(i-1) i \alpha_i(p) u^{i-2} v^{p-i} \nabla^2 u + \sum_{i=1}^{p-1} d_1 i(p-i) u^{i-1} v^{p-i-1} \nabla u \nabla v + \\ &\sum_{i=2}^{p} d_2(i-1)(p-i+1)\alpha_{i-1}(p) u^{i-2} v^{p-i} \nabla u \nabla v + \\ &\sum_{i=1}^{p-1} d_2(p-i+1)(p-i)\alpha_{i-1}(p) u^{i-1} v^{p-i-1} \nabla^2 v \Bigg] dx \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} T \;=\; -\int_\Omega \Bigg\{ \sum_{i=1}^{p-1} &\left[d_1 i(i+1)\alpha_{i+1}(p) \nabla^2 u + (d_1+d_2) i(p-i)\alpha_i(p) \nabla u \nabla v \right. \\ &\left. + \; d_2(p-i)(p-i+1)\alpha_{i-1}(p) \nabla^2 v \right] u^{i-1} v^{p-i-1} \Bigg\} dx \end{aligned}$$

et $L_p'(t)$ devient

$$\begin{aligned}
L_p'(t) &= \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \left\{ i\alpha_i(p) f + (p-i+1)\alpha_{i-1}(p) g \right\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx \\
&\quad - \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} \left[d_1 i(i+1)\alpha_{i+1}(p)\nabla^2 u + (d_1+d_2) i(p-i)\alpha_i(p)\nabla u \nabla v \; + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. d_2(p-i)(p-i+1)\alpha_{i-1}(p)\nabla^2 v \right] u^{i-1} v^{p-i-1} \right\} dx
\end{aligned}$$

puisque $\alpha_i(p) = C_p^i B_i(p)\,,\ i = 0, ..., p$ alors

$$\begin{aligned}
L_p'(t) &= \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \left\{ iC_p^i B_i(p) f + (p-i+1) C_p^{i-1} B_{i-1}(p) g \right\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx - \\
&\quad \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} \left[d_1 i(i+1) C_p^{i+1} B_{i+1}(p)\nabla^2 u + (d_1+d_2) i(p-i) C_p^i B_i(p)\nabla u \nabla v \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \ d_2(p-i)(p-i+1) C_p^{i-1} B_{i-1}(p)\nabla^2 v \right] u^{i-1} v^{p-i-1} \right\} dx
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$iC_p^i \ = \ (p-i+1) C_p^{i-1} \ = \ pC_{p-1}^{i-1}$$

et que

$$i(i+1) C_p^{i+1} = i(p-i) C_p^i = (p-i)(p-i+1) C_p^{i-1} = p(p-1) C_{p-2}^{i-1}$$

ceci donne

$$\begin{aligned}
L_p'(t) &= \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} pC_{p-1}^{i-1} \left[B_i(p) f + B_{i-1}(p) g \right] u^{i-1} v^{p-i} \right) dx - \\
&\quad p(p-1) \int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} C_{p-2}^{i-1} \left[d_1 B_{i+1}(p)\nabla^2 u + (d_1+d_2) B_i(p)\nabla u \nabla v \; + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. d_2 B_{i-1}(p)\nabla^2 v \right] u^{i-1} v^{p-i-1} \right\} dx
\end{aligned}$$

Regardons maintenant la forme quadratique

$$Q = d_1 B_{i+1}(p)\nabla^2 u + (d_1 + d_2) B_i(p)\nabla u \nabla v + d_2 B_{i-1}(p)\nabla^2 v$$

En prenant en compte la condition (5.8), il est clair que Q est positive, ce qui permet d'avoir l'estimation suivante

$$L_p'(t) \leq p \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} \left[B_i(p) f(u,v) + B_{i-1}(p) g(u,v) \right] u^{i-1} v^{p-i} \right) dx$$

Précisons que nous considérons des nonlinéarités qui vérifient la condition (5.7), on a alors les majorations suivantes

$$L_p'(t) \leq c'(p) \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} (u+v+1) u^{i-1} v^{p-i} \right) dx$$

$$\leq c'(p) \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^i v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i+1} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx$$

$$\leq c'(p) \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1} u^i v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i-1} \right) dx$$

$$\leq c'(p) \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} C_{p}^{i} u^i v^{p-i} \right) dx + c'(p) \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i-1} \right) dx$$

Comme on sait que

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^i v^{p-i-1} = (u+v)^{p-1}$$

On obtient alors

$$L_p'(t) \leq c_1(p) L_p(t) + c'(p) \int\limits_\Omega (u+v)^{p-1} dx$$

On applique maintenant l'inégalité de Hôlder à l'intégrale $\int\limits_{\Omega} (u+v)^{p-1}\,dx$ pour avoir

$$L_p'(t) \leq c_1(p)\,L_p(t) + c'(p)\,(mes\Omega)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} (u+v)^p\,dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

D'autre part on a

$$(u+v)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i u^i v^{p-i} \leq \frac{\sup\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min\limits_{0\leq i\leq p} \alpha_i(p)} \sum_{i=0}^{p} \alpha_i(p)\,u^i v^{p-i}$$

ceci donne

$$L_p'(t) \leq c_1(p)\,L_p(t) + c'(p)\,(mes\Omega)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sup\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min\limits_{0\leq i\leq p} \alpha_i(p)} \right)^{\frac{p-1}{p}} (L_p(t))^{\frac{p-1}{p}}$$

on remarque que la fonctionnelle L_p satisfait l'inégalité différentielle suivante

$$\begin{aligned} L_p'(t) &\leq c_1(p)\,L_p(t) + c_2(p)\,(L_p(t))^{\frac{p-1}{p}} \quad , \ \forall \ \ t \ < T_{\max} \\ c_2(p) &= c'(p)\,(mes\Omega)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sup\limits_{0\leq i\leq p} C_p^i}{\min\limits_{0\leq i\leq p} \alpha_i(p)} \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

d'où finalement par intégration

$$(L_p(t))^{\frac{1}{p}} \leq \left[(L_p(0))^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right] \exp\left(c_1'(p)\,t\right) - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \tag{5.10}$$

où

$$c_1'(p) = \frac{c_1(p)}{p} \text{ et } c_2'(p) = \frac{c_2(p)}{p}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} L_p(t) &= \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(p)\, u^i v^{p-i} \right) dx \geq \int\limits_\Omega \left[\alpha_p(p)\, u^p + \alpha_0(p)\, v^p \right] dx \\ &\geq \min\left(\alpha_0(p),\ \alpha_p(p)\right) \sup\left(\int\limits_\Omega u^p dx,\ \int\limits_\Omega v^p dx \right) \end{aligned}$$

on obtient ainsi

$$(L_p(t))^{\frac{1}{p}} \geq \left[\min\left(\alpha_0(p),\ \alpha_p(p)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \sup\left(\left(\int\limits_\Omega u^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int\limits_\Omega v^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

et par conséquent

$$\sup\left(\|u(t,.)\|_p, \|v(t,.)\|_p \right) \leq \frac{(L_p(t))^{\frac{1}{p}}}{\left[\min\left(\alpha_0(p),\ \alpha_p(p)\right)\right]^{\frac{1}{p}}}, \quad \forall \ t \ < T_{\max}$$

En utilisant (5.10) et (5.11) ,on peut donc conclure que

$$\sup\left(\|u(t,.)\|_p, \|v(t,.)\|_p \right) \leq c_p(t), \quad \forall \ t \ < T_{\max} \tag{5.11}$$

avec

$$c_p(t) = \frac{1}{\left[\min\left(\alpha_0(p), \alpha_p(p)\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left((L_p(0))^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right) e^{\left(c_1'(p)t\right)} - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right\}$$

D'où le résultat anoncé. ■

Nous complétons ce chapitre par énoncer et démonter notre résultat principal.

Théorème 5.3.1

Soit $(u(t,.), v(t,.))$ *une solution du système* $(5.1)-(5.4)$. *On assume que la condition* (5.6) *et l'une des deux conditions* (5.7) *ou* (5.9) *sont satisfaites. Si de plus* p *est tel que* $p > \frac{\gamma n}{2}$ *alors, la solution* $(u(t,.), v(t,.))$ *existe globalement en temps.*

Preuve.

Commençons tout d'abord par rappeler la condition (5.6)

$$\sup\left(\left| f\ (u,v)\right| , \left| g\,(u,v)\right| \right) \leq C\,(u+v+1)^{\gamma}$$

qui donne

$$\sup\left(\int\limits_{\Omega} \left| f\ (u,v)\right|^{\frac{p}{\gamma}} dx,\ \int\limits_{\Omega} \left| g\,(u,v)\right|^{\frac{p}{\gamma}} dx \right) \leq C^{\frac{p}{\gamma}} \int\limits_{\Omega} (u+v+1)^{p}\, dx$$

donc on a bien

$$\sup\left(\left\| f\,(u,v)\right\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}}, \left\| g\,(u,v)\right\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}} \right) \leq C^{\frac{p}{\gamma}} \int\limits_{\Omega} (u+v+1)^{p}\, dx \tag{5.12}$$

Notons d'une part qu'on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} (u+v+1)^{p}\, dx &= \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{p} C_p^k\,(u+v)^{k} \right] dx \\ &= \int\limits_{\Omega} \left[1+(u+v)^{p} \right] dx + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \int\limits_{\Omega} (u+v)^{k}\, dx \end{aligned}$$

Après avoir appliqué l'inégalité de Hôlder, on déduit que

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} (u+v+1)^{p}\, dx \leq\ & mes\,(\Omega) + \int\limits_{\Omega} (u+v)^{p}\, dx + \\ & \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left(mes\,(\Omega) \right)^{\frac{p-k}{p}} \left(\int\limits_{\Omega} (u+v)^{p}\, dx \right)^{\frac{k}{p}} \end{aligned} \tag{5.13}$$

d'une autre part, la relation (5.11) nous permet d'avoir

$$\left(\int_{\Omega} (u+v)^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|u(t,.)+v(t,.)\|_p \leq \|u(t,.)\|_p + \|v(t,.)\|_p \leq 2c_p(t)$$

et l'inégalité (5.13) devient

$$\int_{\Omega} (u+v+1)^p \, dx \leq mes(\Omega) + 2^p (c_p(t))^p + \sum_{k=1}^{p-1} 2^k C_p^k (mes(\Omega))^{\frac{p-k}{p}} (c_p(t))^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} 2^k C_p^k (mes(\Omega))^{\frac{p-k}{p}} (c_p(t))^k$$

revenons maintenant à la relation (5.12), le but étant d'avoir

$$\sup\left(\|f(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}}, \|g(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}}\right) \leq C^{\frac{p}{\gamma}} \left[\sum_{k=0}^{p} 2^k C_p^k (mes(\Omega))^{\frac{p-k}{p}} (c_p(t))^k\right]$$

d'où finalement

$$\sup \|f(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}}, \|g(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}} \leq c_{p,\gamma}(t) \ , \quad \forall \ \ t \ < T_{\max}$$

avec

$$c_{p,\gamma}(t) = c\left[\sum_{k=0}^{p} 2^k C_p^k (mes(\Omega))^{\frac{p-k}{p}} (c_p(t))^k\right]^{\frac{\gamma}{p}}$$

Et le théorème est démontré.■

5.4 Conclusion

Grace au lemme (5.3.1) et au théorème (5.3.1) , on a pu avoir une estimation uniforme de

$$\sup\left(\|f(u,v)\|_q, \|g(u,v)\|_q\right)$$

pour $q = \frac{p}{\gamma} > \frac{n}{2}$, ce qui nous permet de conclure que la solution existe globalement en temps.

Remarque 5.4.1 *Il est clair que la condition* (5.5) *entraine la positivité de la solution.(Voir chapitre* 4, *pour plus de détails).*

Chapitre 6

Etude d'un système à une matrice de diffusion triangulaire

6.1 Introduction

Considérons dans ce chapitre un système à une matrice de diffusion triangulaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u - b\Delta v = f\ (u,v)\,, & \text{sur }\ ]0,+\infty[\times\Omega \\ \\ \frac{\partial v}{\partial t} - c\Delta v = g\,(u,v) & \text{sur }\ ]0,+\infty[\times\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Avec les conditions aux bords :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \qquad \text{sur }\ ]0,+\infty[\times\partial\Omega. \tag{6.2}$$

et les conditions initiales

$$u\,(0,.) = u_0, \qquad v\,(0,.) = v_0 \qquad \text{sur }\ \Omega \tag{6.3}$$

qui sont supposées non-négatives et uniformément bornées.

Notons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, $u = u\,(t,x)\,, v = v\,(t,x)\,, x \in$

Ω, $t > 0$ sont les inconnues, et les constantes de diffusion a, b, et c sont supposées non-négatives.

Concernant les fonctions f et g, on assume que :

(H1) $f(r,s)$ et $g(r,s)$ sont deux fonctions continument differentiable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, telles que

$$f(0,s) \geq 0, \text{ and } g(r,0) \geq 0 \qquad \forall r, s \geq 0. \tag{6.4}$$

(H2) on Assume aussi que

$$\sup\left(|f(r,s)|, |g(r,s)|\right) \leq C(r+s+1)^{\gamma}, \ \forall\, r,s \geq 0 \tag{6.5}$$

où C est une constante positive et $\gamma \geq 1$.

Et on suppose que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(C1) il existe $p \geq 2$, $c(p) > 0$ et des nombres positifs $(B_i(p))_{0 \leq i \leq p}$ tels que

$$B_i(p) f(r,s) + B_{i-1}(p) g(r,s) \leq c(p)(r+s+1) \tag{6.6}$$

où

$$[bB_{i+1}(p) + (a+c) B_i(p)]^2 \leq 4aB_{i+1}(p)[cB_{i-1}(p) + bB_i(p)] \tag{6.7}$$

(C2) il existe $c(1) > 0$ et $B_i(1)$, $0 \leq i \leq 1$ tels que

$$\begin{cases} B_1(1) f(r,s) + B_0(1) g(r,s) \leq c(1)(r+s+1), \\ B_0(1),\ B_1(1) > 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

6.2 Notations et observations

Dans toute la suite de ce chapitre, on adopte les notations du chapitre 5.

Notons tout d'abbord que les fonctions f et g étant continûment différentiables sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ alors, on vérifie aisément que pour $U = (u,v)$, la fonction $F(U) =$

$(f(u,v), g(u,v))$ est locallement Lipshitzienne sur les bornés de X.

Ainsi, par des arguments standards (Voir Pazy [26]) le système donné admet au plus une solution classique (u,v) definie sur $[0, T_{\max}[\times \Omega$. De plus si $T_{max} < \infty$ alors,

$$\lim_{t \to T_{max}} \{\|u(t,.)\|_\infty + \|v(t,.)\|_\infty\} = \infty.$$

$T_{max}(\|u_0\|_\infty, \|v_0\|_\infty)$ est le temps de l'existence maximal de la solution.

6.3 Résultat d'existence globale

L'étude de l'existence globale en temps de la solution du système (6.1)-(6.3) fera l'objet de cette section.

Notre résultat pricipal est le suivant :

Théorème 6.3.1

Soit $p > \frac{\gamma n}{2}$. On assume que la condition (6.5) est satisfaite et que l'une des deux conditions (6.6) ou (6.8) a lieu. Alors, la solution $(u(t,.), v(t,.))$ de (6.1)-(6.3) existe globalement en temps.

La preuve du théorème **6.3.1** s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 6.3.1

Soit $(u(t,.), v(t,.))$ une solution de (6.1)-(6.3).Si l'une des deux conditions (6.6) ou (6.8) est satisfaite, alors, il existe un entier $p \geq 1$ et une fonction continue $C_p : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\sup\left(\|u(t,.)\|_p, \|v(t,.)\|_p\right) \leq C_p(t), \qquad t < T_{\max}.$$

Preuve du lemme 6.3.1

Notons par L_p la fonctionnelle suivante :

$$L_p(t) = \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} C_p^i B_i(p) u^i v^{p-i}\right) dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(p) u^i v^{p-i}\right) dx \tag{6.9}$$

où

$$\alpha_i(p) = C_p^i B_i(p), \qquad i = 0, ..., p. \tag{6.10}$$

et

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!}.$$

Sa dérivée en t est

$$\begin{aligned} L_p'(t) &= \int_\Omega \left[\left(\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i(p) u^{i-1} v^{p-i} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\sum_{i=0}^{p-1} (p-i) \alpha_i(p) u^i v^{p-i-1} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx \\ &= \int_\Omega \left[\left(\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i(p) u^{i-1} v^{p-i} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^{p} (p-i+1) \alpha_{i-1}(p) u^{i-1} v^{p-i} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \right] dx \end{aligned}$$

On remplace $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ par leurs valeurs pour trouver que

$$\begin{aligned} L_p'(t) &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} i\alpha_i(p) u^{i-1} v^{p-i} \right) (f(u,v) + a\Delta u + b\Delta v)\, dx + \\ & \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} (p-i+1) \alpha_{i-1}(p) u^{i-1} v^{p-i} \right) (g(u,v) + c\Delta v)\, dx \\ &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \left\{ i\alpha_i(p) f(u,v) + (p-i+1) \alpha_{i-1}(p) g(u,v) \right\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx + \\ & \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \left\{ ai\alpha_i(p) \Delta u + \left[bi\alpha_i(p) + c(p-i+1) \alpha_{i-1}(p) \right] \Delta v \right\} u^{i-1} v^{p-i} \right) dx \end{aligned}$$

Discution

1) Si $p = 1$ alors,

$$\begin{aligned} L_1'(t) &= \int_\Omega \left[a\alpha_1(1) \Delta u + (b\alpha_1(1) + c\alpha_0(1)) \Delta v \right] dx \\ & + \int_\Omega (\alpha_1(1) f(u,v) + \alpha_0(1) g(u,v))\, dx. \end{aligned}$$

Et la formule de Green donne

$$\begin{aligned} L_1'(t) &= \int_\Omega \left(\alpha_1(1) f(u,v) + \alpha_0(1) g(u,v)\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(B_1(1) f(u,v) + B_0(1) g(u,v)\right) dx. \end{aligned}$$

En utilisant la condition (6.8) on déduit que

$$\begin{aligned} L_1'(t) &\leq c(1) \int_\Omega (u+v+1)\, dx \\ &= c(1) \int_\Omega (u+v)\, dx + c(1)\, mes(\Omega). \end{aligned}$$

donc la fonctionnelle L_1 résout l'inégalité différentielle suivante

$$L_1'(t) \leq c_1(1) L_1(t) + c_2(1), \ \forall t < T_{\max}$$

où

$$c_1(1) = \frac{c(1)}{\min(\alpha_1(1), \alpha_0(1))}, \qquad c_2(1) = c(1)\, mes(\Omega)$$

une simple intégration donne

$$L_1(t) \leq \left[L_1(0) + \frac{c_2(1)}{c_1(1)}\right] \exp(c_1(1)\, t) - \frac{c_2(1)}{c_1(1)}, \quad \forall t < T_{\max}.$$

En outre, d'après (6.9), il est facile de remarquer que

$$\begin{aligned} L_1(t) &\geq \min(\alpha_1(1), \alpha_0(1)) \int_\Omega (u+v)\, dx \\ &\geq \min(\alpha_1(1), \alpha_0(1)) \sup\left(\|u(t,.)\|_1, \|v(t,.)\|_1\right). \end{aligned}$$

d'où finalement la majoration souhaitée

$$\sup \|u(t,.)\|_1, \|v(t,.)\|_1 \leq c_1(t), \ \forall t < T_{\max} \tag{6.11}$$

où

$$c_1(t) = \frac{1}{\min(\alpha_1(1), \alpha_0(1))} \left\{ \left[L_1(0) + \frac{c_2(1)}{c_1(1)} \right] \exp(c_1(1)t) - \frac{c_2(1)}{c_1(1)} \right\}.$$

2) si $p \geq 2$, on pose

$$\begin{aligned} T &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} \{ai\alpha_i(p)\Delta u + [bi\alpha_i(p) + c(p-i+1)\alpha_{i-1}(p)]\Delta v\} u^{i-1}v^{p-i} \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^{p} \int_\Omega \Delta \{ai\alpha_i(p)u + [bi\alpha_i(p) + c(p-i+1)\alpha_{i-1}(p)]v\} u^{i-1}v^{p-i}dx. \end{aligned}$$

Par application directe de la formule de Green, on trouve

$$T = -\sum_{i=1}^{p} \int_\Omega \left[\nabla \{ai\alpha_i(p)u + b(p-i+1)\alpha_{i-1}(p)v\} \nabla \left(u^{i-1}v^{p-i}\right) \right] dx$$

ceci donne

$$\begin{aligned} T &= -\int_\Omega \left[\sum_{i=2}^{p} a(i-1)i\alpha_i(p)u^{i-2}v^{p-i}(\nabla u)^2 + \sum_{i=1}^{p-1} ai(p-i)\alpha_i(p)u^{i-1}v^{p-i-1}\nabla u \nabla v + \right. \\ & \sum_{i=2}^{p} [bi(i-1)\alpha_i(p) + c(p-i+1)(i-1)\alpha_{i-1}(p)] u^{i-2}v^{p-i}\nabla u \nabla v + \\ & \left. \sum_{i=1}^{p-1} [bi(i-1)\alpha_i(p) + c(p-i+1)(p-i)\alpha_{i-1}(p)] u^{i-1}v^{p-i-1}(\nabla v)^2 \right] dx \end{aligned}$$

et par conséquent T devient

$$\begin{aligned}
T &= -\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{p-1}\left[ai\left(i+1\right)\alpha_{i+1}\left(p\right)\left(\nabla u\right)^{2}+\left[\left(a+c\right)i\left(p-i\right)\alpha_{i}\left(p\right)+bi\left(i+1\right)\alpha_{i+1}\left(p\right)\right]\nabla u\nabla v\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\left[c\left(p-i\right)\left(p-i+1\right)\alpha_{i-1}\left(p\right)+bi\left(p-i\right)\alpha_{i}\left(p\right)\right]\left(\nabla v\right)^{2}\right]u^{i-1}v^{p-i-1}\right\}dx \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

Comme

$$\alpha_{i}\left(p\right)=C_{p}^{i}B_{i}\left(p\right),\ \ i=0,...,p$$

alors,

$$\begin{aligned}
L_{p}'\left(t\right) &= \int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{p}\left\{iC_{p}^{i}B_{i}\left(p\right)f+\left(p-i+1\right)C_{p}^{i-1}B_{i-1}\left(p\right)g\right\}u^{i-1}v^{p-i}\right)dx- \\
&\quad \int_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{p-1}\left\{ai\left(i+1\right)C_{p}^{i+1}B_{i+1}\left(p\right)\left(\nabla u\right)^{2}\right.\right. \\
&\quad +\left[i\left(i+1\right)bC_{p}^{i+1}B_{i+1}\left(p\right)+\left(a+c\right)i\left(p-i\right)C_{p}^{i}B_{i}\left(p\right)\right]\nabla u\nabla v \\
&\quad \left.\left.+\left[c\left(p-i\right)\left(p-i+1\right)C_{p}^{i-1}B_{i-1}\left(p\right)+bi\left(p-i\right)C_{p}^{i}B_{i}\left(p\right)\right]\left(\nabla v\right)^{2}\right]u^{i-1}v^{p-i-1}\right\}dx.
\end{aligned}$$

Or, par des calculs simples, on peut vérifier que

$$iC_{p}^{i}\ =\ \left(p-i+1\right)C_{p}^{i-1}\ =\ pC_{p-1}^{i-1}.$$

et que

$$i\left(i+1\right)C_{p}^{i+1}=i\left(p-i\right)C_{p}^{i}=\left(p-i\right)\left(p-i+1\right)C_{p}^{i-1}=p\left(p-1\right)C_{p-2}^{i-1},$$

on déduit donc que

$$\begin{aligned}
L_p'(t) &= \int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{p} pC_{p-1}^{i-1}\left[B_i(p)\,f + B_{i-1}(p)\,g\right]u^{i-1}v^{p-i}\right)dx \\
&\quad -p(p-1)\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{i=1}^{p-1} C_{p-2}^{i-1}\left[aB_{i+1}(p)(\nabla u)^2 + \left[bB_{i+1}(p) + (a+c)B_i(p)\right]\nabla u\nabla v\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +\ \left[cB_{i-1}(p) + bB_i(p)\right](\nabla v)^2\right]u^{i-1}v^{p-i-1}\right\}dx.
\end{aligned}$$

Pour simplifier $L_p'(t)$, on est amené à étudier la forme quadratique suivante

$$(F) = aB_{i+1}(p)(\nabla u)^2 + \left[bB_{i+1}(p) + (a+c)B_i(p)\right]\nabla u\nabla v + \left[cB_{i-1}(p) + bB_i(p)\right](\nabla v)^2$$

il est clair que $(F) \geq 0$ dés que la condition (6.7) soit vérifiée

$$\left[bB_{i+1}(p) + (a+c)B_i(p)\right]^2 - 4aB_{i+1}(p)\left[cB_{i-1}(p) + bB_i(p)\right] \leq 0.$$

ce qui nous permet d'avoir

$$L_p'(t) \leq p\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1}\left[B_i(p)\,f(u,v) + B_{i-1}(p)\,g(u,v)\right]u^{i-1}v^{p-i}\right)dx.$$

Et comme les non-linéarités f et g vérifient la condition (6.6), on a alors

$$\begin{aligned}
L_p'(t) &\leq c'(p)\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1}(u+v+1)\,u^{i-1}v^{p-i}\right)dx \\
&\leq c'(p)\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1}u^{i}v^{p-i} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1}u^{i-1}v^{p-i+1} + \sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1}u^{i-1}v^{p-i}\right)dx \\
&\leq c'(p)\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{p} C_{p-1}^{i-1}u^{i}v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i}u^{i}v^{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i}u^{i}v^{p-i-1}\right)dx \\
&\leq c'(p)\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=0}^{p} C_{p}^{i}u^{i}v^{p-i}\right)dx + c'(p)\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i}u^{i}v^{p-i-1}\right)dx.
\end{aligned}$$

de plus, on sait que

$$\sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i} u^{i} v^{p-i-1} = (u+v)^{p-1}.$$

ainsi, l'inégalité obtenue plus haut devient

$$L_p'(t) \leq c_1(p) L_p(t) + c'(p) \int_{\Omega} (u+v)^{p-1} dx.$$

en appliquant l'inégalité de Hôlder au deuxième terme du coté droit, on obtient

$$L_p'(t) \leq c_1(p) L_p(t) + c'(p) (mes(\Omega))^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} (u+v)^{p} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

ensuite, puisque

$$(u+v)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i u^i v^{p-i} \leq \frac{\sup\limits_{0 \leq i \leq p} C_p^i}{\min\limits_{0 \leq i \leq p} \alpha_i(p)} \sum_{i=0}^{p} \alpha_i(p) u^i v^{p-i}.$$

on a donc

$$L_p'(t) \leq c_1(p) L_p(t) + c'(p) (mes\Omega)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sup\limits_{0 \leq i \leq p} C_p^i}{\min\limits_{0 \leq i \leq p} \alpha_i(p)} \right)^{\frac{p-1}{p}} (L_p(t))^{\frac{p-1}{p}}.$$

par conséquent L_p résout l'inégalité différentielle suivante

$$L_p'(t) \leq c_1(p) L_p(t) + c_2(p) (L_p(t))^{\frac{p-1}{p}} \quad , \ \forall t < T_{\max}$$

tel que

$$c_2(p) = c'(p) (mes\Omega)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\sup\limits_{0 \leq i \leq p} C_p^i}{\min\limits_{0 \leq i \leq p} \alpha_i(p)} \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

ce qui donne après une simple intégration que

$$(L_p(t))^{\frac{1}{p}} \leq \left[(L_p(0))^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)}\right] \exp\left(c_1'(p)\, t\right) - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)}$$

où

$$c_1'(p) = \frac{c_1(p)}{p} \text{ et } c_2'(p) = \frac{c_2(p)}{p}$$

Cependant, on a

$$L_p(t) = \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i(p)\, u^i v^{p-i}\right) dx \geq \int_\Omega \left[\alpha_p(p)\, u^p + \alpha_0(p)\, v^p\right] dx \tag{6.13}$$

ainsi, $L_p(t)$ vérifie cette inégalité :

$$L_p(t) \geq \min\left(\alpha_0(p),\ \alpha_p(p)\right) \sup\left(\int_\Omega u^p dx,\ \int_\Omega v^p dx\right).$$

On leve à la puissance $\frac{1}{p}$ pour avoir

$$(L_p(t))^{\frac{1}{p}} \geq \left[\min\left(\alpha_0(p),\ \alpha_p(p)\right)\right]^{\frac{1}{p}} \sup\left(\left(\int_\Omega u^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int_\Omega v^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

donc on a bien

$$\sup\left(\|u(t,.)\|_p, \|v(t,.)\|_p\right) \leq \frac{(L_p(t))^{\frac{1}{p}}}{\left[\min\left(\alpha_0(p),\ \alpha_p(p)\right)\right]^{\frac{1}{p}}}, \quad \forall\ t < T_{\max}. \tag{6.14}$$

Enfin, en combinant (6.13) et (6.14) on obtient

$$\sup\left(\|u(t,.)\|_p, \|v(t,.)\|_p\right) \leq c_p(t), \quad \forall\ t < T_{\max} \tag{6.15}$$

où

$$c_p(t) = \frac{1}{\left[\min\left(\alpha_0(p), \alpha_p(p)\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\left(L_p(0)\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right) e^{\left(c_1'(p)t\right)} - \frac{c_2'(p)}{c_1'(p)} \right\}. \tag{6.16}$$

La preuve du lemme est complète.■

Preuve du théorème 6.3.1

Pour clarifier les idées, rappelons que la difficulté est de trouver une estimation uniforme de

$$\sup\left(\left\| f(u,v) \right\|_q, \left\| g(u,v) \right\|_q \right), \text{ pour un certain } q > \frac{n}{2}$$

Notons tout d'abord qu'à partir de la condition (6.5)

$$\sup\left(\left| f\ (u,v) \right|, \left| g(u,v) \right| \right) \leq C\left(u+v+1\right)^{\gamma}.$$

On obtient

$$\sup\left(\int_{\Omega} \left| f\ (u,v) \right|^{\frac{p}{\gamma}} dx, \int_{\Omega} \left| g(u,v) \right|^{\frac{p}{\gamma}} dx \right) \leq C^{\frac{p}{\gamma}} \int_{\Omega} (u+v+1)^p \, dx$$

d'où l'estimation suivante

$$\sup\left(\left\| f(u,v) \right\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}}, \left\| g(u,v) \right\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}} \right) \leq C^{\frac{p}{\gamma}} \int_{\Omega} (u+v+1)^p \, dx. \tag{6.17}$$

En outre, nous savons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u+v+1)^p \, dx &= \int_{\Omega} \left[\sum_{k=0}^{p} C_p^k (u+v)^k \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[1 + (u+v)^p \right] dx + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \int_{\Omega} (u+v)^k \, dx \end{aligned}$$

l'inégalité de Hôlder donne

$$\sum_{k=1}^{p-1}\int_{\Omega}(u+v)^k\,dx \leq \sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\left[\left(\int_{\Omega}1^{\frac{p}{p-k}}dx\right)^{\frac{p-k}{p}}\left(\int_{\Omega}(u+v)^p\,dx\right)^{\frac{k}{p}}\right].$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(u+v+1)^p\,dx &\leq mes\,(\Omega)+\int_{\Omega}(u+v)^p\,dx \\ &+\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k\,(mes\,(\Omega))^{\frac{p-k}{p}}\left(\int_{\Omega}(u+v)^p\,dx\right)^{\frac{k}{p}}\end{aligned} \tag{6.18}$$

En prenant en compte (6.16), on déduit que

$$\left(\int_{\Omega}(u+v)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\,(t,.)+v\,(t,.)\|_p \leq \|u\,(t,.)\|_p+\|v\,(t,.)\|_p \leq 2c_p\,(t)$$

et l'inégalité (6.18) devient

$$\int_{\Omega}(u+v+1)^p\,dx \leq mes\,(\Omega)+2^p\,(c_p\,(t))^p+\sum_{k=1}^{p-1}2^kC_p^k\,(mes\,(\Omega))^{\frac{p-k}{p}}\,(c_p\,(t))^k$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p}2^kC_p^k\,(mes\,(\Omega))^{\frac{p-k}{p}}\,(c_p\,(t))^k\,.$$

ceci donne l'estimation

$$\sup\left(\|f\,(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}},\|g\,(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}}^{\frac{p}{\gamma}}\right) \leq C^{\frac{p}{\gamma}}\left[\sum_{k=0}^{p}2^kC_p^k\,(mes\,(\Omega))^{\frac{p-k}{p}}\,(c_p\,(t))^k\right]$$

et on retrouve finalement l'estimation attendue

$$\sup\|f\,(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}},\|g\,(u,v)\|_{\frac{p}{\gamma}} \leq c_{p,\gamma}\,(t)\quad,\quad\forall\quad t\ <T_{\max} \tag{6.19}$$

où $c_{p,\gamma}(t)$ est donné par

$$c_{p,\gamma}(t) = c\left[\sum_{k=0}^{p} 2^k C_p^k \left(mes\left(\Omega\right)\right)^{\frac{p-k}{p}} \left(c_p\left(t\right)\right)^k\right]^{\frac{m}{p}} \text{ et } \frac{p}{\gamma} > \frac{n}{2} \tag{6.20}$$

Ce qui achève la démonstration.■

6.4 Sommation et conclusion

1. L'estimation (6.21) obtenue plus haut nous permet de conclure que la solution du système (6.1)-(6.3) existe globalement en temps. (il suffit de prendre $q = \frac{p}{\gamma} > \frac{n}{2}$).
2. il est immédiat que sous la condition (H1), le système (6.1)-(6.3) préserve la positivité. En d'autres termes : en partant de données initiales positives, les solutions restent aussi positives. (Voir D. Henry [13]).
3. Terminons par préciser que l'unicité de la solution découle du lemme (3.3.2).

Bibliographie

[1] *N.D.Alikakos,* "L^p bounds of solutions of reaction-diffusion equations". COMM. In Partial Differential Equations, 4(8), 827-868 (1979).

[2] *N. Alikakos*, "An application of invariance principle to reaction-diffusion equations", J. Differential Equations 33 (1979), 201-225.

[3] *A.Barabanova,* "On the global existence of solutions of a reaction-diffusion equation with exponential nonlinearity". Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 122, Number3, November 1994. pp 827-831.

[4] *P.Baras, J.C.Hasan, L.Veron*, "Compacité de l'opérateur définissant la solution d'une équation d'évolution non homogène", C.R.Acad. Sc. Paris, t. 284 (4 avril 1977), pp. 799-802.

[5] *Billingham and L. Niremberg,* "The development of travelling waves in quadratic and cubic auto catalysis with uniqual diffusion rates". Trans. R. SOC. Londol, Collège de France. Note Math, pp.65-129.

[6] *S.Bonavede, D.Schmitt,* "Triangular, reaction-diffusion systems with integrable initial data", Nonlinear Analysis 33 (1998) 785-801.

[7] *Brézis-Strauss,* "Semilinear second order elliptic equations in L^1", J. Math, Japon, 25 (1973).

[8] *T.Cazenave, A. Haraux,* "Introduction aux Problèmes d'Evolution Semi-linéaires", Mathématiques & Applications, Vol. 1, Ellipses, Paris, 1990.

[9] *T. Diagana,* "Some remarks on some strongly coupled reaction-diffusion equations". *J. Reine. Angew.*, 2003.

[10] *R. Fisher*, "The advance of advantageous genes", Ann. Eugenics, 7 (1937), PP 335-369.

[11] *A.Haraux, M.Kirane,* "Estimation C^1 pour des problèmes paraboliques semi-linéaires", Annales Faculté des sciences Toulouse, Vil V, pp. 265-280, 1983.

[12] *A.Haraux, A.Youkana,* "On a result of K. Masuda concerning reaction-diffusion equations", Tohoku Math. J. 40 (1988), 159-163.

[13] *D.Henry,* "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Lecture Notes in Mathematics 840, Springer- Verlag New York,1981.

[14] *M.A. Herrero, A.A. Lacey and J.J.L. Nelazquez*, "Global existence for reaction diffusion systems modelling ignition", Arch. Rational Mech. Anal.142 (1998), 219-251.

[15] *S.L.Hollis, R.H.Martin Jr, M.Pierre,* "Global existence and boundedness in reaction-diffusion systems", SIAM J. MATH. ANAL. Vol.18, No.3, May 1987. pp 744-761.

[16] *I. Kanel and M. Kirane*, "Global existence and large time behavior of positive solutions to a reaction diffusion system". *Differential Integral Equations*, 13(1-3) :255–264, 2000.

[17] *I. Kanel and M. Kirane*, "Global solutions of reaction diffusion systems with a balance law and nonlinearities of exponential growth", J. Differential Equations 165 (2000), 24-41.

[18] *S.Kouachi,* "Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional". Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2001 (2001), No. 68, pp. 1-10.

[19] *S.Kouachi, A.Youkana,* "Global existence for a class of reaction-diffusion systems". Bulletin of the polish Academy of sciences. Vol. 49, N3 (2001).

[20] *K. Masuda,* "On the global existence and asymptotic behavior of solutions of reaction-diffusion equations". Hokkaido Mathematical Journal Vol 12 (1983) p 360-370.

[21] *R. H. Martin and M. Pierre,* "Nonlinear reaction-diffusion systems. nonlinear equations in the applied sciences". *Math. Sci. Engrg. Academic Press, Boston, MA,*, 185 :363–398, 1992.

[22] *A.Moumeni,* "Semi-groupes de contraction et applications aux EDP semi-linéaires". Cours de magister 2005-2006. Univ de Annaba.

[23] *J.D. Murray,* "Mathematical biologie", Third Ed, Inter disciplinary applied Mathematics, Springer Verlag, 2002.

[24] *J.D. Murray*, "Mathematical biologie", Springer Verlag, 1993.

[25] *C.V.Pao,* "Reaction diffusion equations with nonlinear boundary conditions", Nonlinear Analysis 5, (1981), PP. 1077-1094.

[26] *A. Pazy,* "Semi-groups of linear operators and applications to partial differential equations", Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag, New York, (1981).

[27] *M. Pierre and D. Schmitt,* "Blow up in reaction-diffusion systems with dissipation of mass". *SIAM. J. Math. Anal.*, 42(1) :93–106, 2000.

[28] *P.Quittner and P. Souplet*, "Superlinear parabolic problems, Blow-uo, Global existence and steady states", Birkhauser, Verlag, Basel, 2007.

[29] *F. Roth,* "Global solutions of reaction diffusion systems". *Lecture notes in mathematics. 1072*, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[30] *J.Smoller*, "Shock Waves and Reaction Diffusion Equations", Springer-Verlag, New York, 1983.

[31] *J. Zeldovich and D. Frank - Kamenetski,*"A theory of thermal propagation of flame". *Lecture notes in mathematics. 1072,* Acta physiochimica URSS, 9 (1938), PP. 341-350.