

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار

- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

INFERENCE BAYESIENNE DANS DES MODELES D'ASSURANCE

Filière

Mathématiques Appliquées

Spécialité

Actuariat

Par

KERMOUNE SARA

DIRECTEUR DE THÈSE : Chadli Assia Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Seddik-Ameur Nacira Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Zeghdoudi Halim Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Merzougui Mouna M.C.A. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Ezzebsa Abdelali M.C.A. UNIV. DE GUELMA

Année : 2021/2022

Remerciements

Tout d'abord je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné la santé, la volonté et la patience pour pouvoir terminer cette thèse.

Mes sincères remerciements à ma directrice de thèse madame Chadli Assia, professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, pour son enthousiasme, sa gentillesse, sa disponibilité et sa rigueur scientifique, ainsi que ses précieux conseils. Je la remercie pour m'avoir donnée l'opportunité de travailler sur un thème très intéressant et proposée ce sujet de mémoire.

Je suis extrêmement reconnaissante aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter, d'examiner et d'évaluer ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude au Pr. Seddik-Ameur Nacira de l'Université Badji Mokhtar Annaba, qui a l'honneur de présider mon jury de soutenance.

Mes sincères remerciements au Dr. Ezzesba Abelali de l'Université de Guelma, ainsi Dr. Merzougui Mouna et Pr. Zeghdoudi Halim de l'Université Badji Mokhtar Annaba de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'expertiser ma thèse de Doctorat.

J'aimerais aussi remercier Monsieur Rahmania Nadji pour son accueil chaleureux à l'université de Lille, pour ses encouragements, ses remarques et ses conseils.

Je me permets de remercier mes chers parents pour leur encouragement tout au long de mes études. Merci, mes cher frères et mes chers sœurs qui m'ont toujours soutenu et encouragé pendant mes études. Merci aussi à mon mari qui m'a toujours encouragé.

J'adresse mes sincères et chaleureux remerciements à mes amies et mes collègues pour leur soutien moral et leur encouragement.

Merci à tous les professeurs et les membres du département de Mathématiques et de la Faculté des Sciences de l'université de Badji Mokhtar Annaba.

Je remercie toute personne ayant participé de près ou de loin à l'élaboration et l'évaluation de ce travail.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 13 |
| 1 L'assurance | 16 |
| 1.1 Préliminaires et Notations | 16 |
| 1.1.1 Définition juridique de l'assurance | 16 |
| 1.1.2 Définition technique de l'assurance | 16 |
| 1.1.3 Le contrat d'assurance | 17 |
| 1.1.4 Les parties du contrat | 17 |
| 1.1.5 L'assurance non vie | 18 |
| 1.1.6 l'assurance vie | 18 |
| 1.1.7 La réassurance | 19 |
| 1.1.8 La coassurance | 19 |
| 1.1.9 Théorie de la crédibilité | 19 |
| 1.2 Méthodes de tarification | 20 |
| 1.2.1 La prime pure | 20 |
| 1.2.2 La prime commerciale | 20 |
| 1.2.3 Les différents types de primes pures | 21 |
| 1.3 Les modèles usuels en assurance | 23 |
| 1.3.1 Nombre de sinistres | 23 |
| 1.3.2 Montant de sinistres | 25 |
| 2 L'analyse de survie | 27 |
| 2.1 Les différents plans d'expériences | 28 |
| 2.1.1 Les données censurées | 28 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.1.2 | Données progressivement censurées de type II | 30 |
| 2.1.3 | Les données tronquées | 32 |
| 2.2 | Notions de fiabilité | 33 |
| 2.2.1 | La durée de vie | 34 |
| 2.2.2 | La fonction de répartition $F(t)$ | 34 |
| 2.2.3 | La densité de probabilité $f(t)$ | 34 |
| 2.2.4 | La fonction de survie $R(t)$ | 34 |
| 2.2.5 | La fonction de hasard $h(t)$ | 35 |
| 2.2.6 | Le taux de hasard cumulé $H(t)$ | 35 |
| 2.2.7 | Moyenne et variance de la durée de survie | 35 |
| 2.3 | Les modèles usuels dans l'analyse de survie | 36 |
| 2.3.1 | Le modèle exponentiel | 36 |
| 2.3.2 | Le modèle de Weibull | 37 |
| 2.3.3 | Le modèle de Rayleigh | 37 |
| 2.3.4 | Le modèle de la loi gamma | 38 |
| 3 | Les méthodes d'estimations | 39 |
| 3.1 | La méthode des moments | 39 |
| 3.2 | La méthode du maximum de vraisemblance | 39 |
| 3.3 | La méthode Bayésienne | 41 |
| 3.3.1 | Le principe Bayésien | 41 |
| 3.3.2 | Lois a priori | 42 |
| 3.3.3 | La distribution de la loi a posteriori | 44 |
| 3.3.4 | Le risque a posteriori | 45 |
| 3.3.5 | Les propriétés de l'estimateur de Bayes | 45 |
| 3.3.6 | Les fonctions de perte | 45 |
| 3.4 | Les méthodes de Monte Carlo | 50 |
| 3.4.1 | Les méthodes MCMC | 51 |
| 3.4.2 | L'algorithme de Metropolis-Hastings | 52 |
| 3.4.3 | L'algorithme de Gibbs | 53 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Le modèle de Rayleigh Pareto | 55 |
| 4.1 | Introduction | 55 |
| 4.2 | Le modèle | 56 |
| 4.3 | Inférences statistiques en présence de données complètes | 61 |
| 4.3.1 | Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance | 61 |
| 4.3.2 | Estimation par la méthode Bayésienne | 62 |
| 4.4 | La prime Bayésienne sous la fonction de perte quadratique | 63 |
| 4.4.1 | Simulation | 64 |
| 4.5 | Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées | 66 |
| 4.5.1 | Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance | 66 |
| 4.5.2 | Estimation par la méthode Bayésienne | 67 |
| 4.5.3 | Simulation | 71 |
| 4.5.4 | Comparaison des deux méthodes pour les estimateurs des paramètres | 77 |
| 4.6 | Application avec des données réelles | 80 |
| | Conclusion et Perspectives | 82 |
| | Bibliographie | 84 |

Liste des tableaux

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance. | 40 |
| 3.2 | Quelques exemples de lois conjuguées | 42 |
| 4.1 | L'estimation des paramètres de RP et de la prime Bayésienne avec les erreurs IMSE, lorsque : $\mu(\alpha, \beta, \gamma) = 0.6749848$, $\alpha = 2.5$, $\beta = 0.4$, $\gamma = 1.2$ | 65 |
| 4.2 | L'estimation des paramètres de RP et de la prime Bayésienne avec les erreurs IMSE, lorsque : $\mu(\alpha, \beta, \gamma) = 2.88292$, $\alpha = 5$, $\beta = 1.25$, $\gamma = 2.5$ | 65 |
| 4.3 | Les fonctions de perte avec les estimateurs Bayésiens et les risques a posteriori correspondants. | 68 |
| 4.4 | Schéma de censure progressive | 71 |
| 4.5 | L'estimation du maximum de vraisemblance avec les erreurs quadratiques des paramètres de RP. | 72 |
| 4.6 | L'estimation du maximum de vraisemblance de la fonction de fiabilité et la fonction de hasard avec les erreurs quadratiques. | 73 |
| 4.7 | Estimation Bayésienne sous la fonction de perte quadratique avec les risques a posteriori entre parenthèses. | 74 |
| 4.8 | Estimation Bayésienne sous la fonction de perte entropie avec PR entre pa- renthèses | 75 |
| 4.9 | Estimation Bayésienne avec PR entre parenthèses sous la fonction de perte Linex. | 76 |
| 4.10 | Estimation Bayésienne avec les erreurs quadratiques de la fonction de fiabilité et la fonction de hasard. | 77 |

| | |
|---|----|
| 4.11 L'estimation du M.V et l'estimation Bayésienne des caractéristiques de fiabilité avec les erreurs quadratiques entre parenthèses. | 77 |
| 4.12 Comparaison du MLE et l'estimation Bayésienne sous les trois fonctions de perte à l'aide du critère de Pitman | 79 |
| 4.13 Comparaison du MLE et de l'estimation Bayésienne à l'aide de IMSE. | 80 |
| 4.14 Les débits annuels consécutifs de crue de la rivière Floyd à James, Iowa. | 81 |
| 4.15 Les statistiques AIC, CAIC, BIC et HQIC pour les données d'inondation de la rivière Floyd. | 81 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Les différents types d'observations | 29 |
| 2.2 | Les données progressivement censurées de type II | 31 |
| 4.1 | La fonction de densité de la distribution de RP pour certaines valeurs du paramètre α et $\beta = \gamma = 2$ | 57 |
| 4.2 | La fonction de densité de la distribution de RP pour certaines valeurs du paramètre β et $\alpha = \gamma = 2$ | 58 |
| 4.3 | La fonction de densité de la distribution de RP pour certaines valeurs du paramètre γ et $\alpha = \beta = 2$ | 58 |
| 4.4 | La fonction de répartition de la distribution de RP pour certaines valeurs des paramètres. | 59 |
| 4.5 | La fonction de survie de la distribution de RP pour différentes valeurs de paramètres. | 60 |
| 4.6 | La fonction de hasard de la distribution de RP pour différentes valeurs de paramètres. | 60 |

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons les problèmes d'inférences statistiques comprenant l'estimation des paramètres et de quelques caractéristiques de fiabilité d'une distribution de Rayleigh Pareto sous des données progressivement censurées à droite de type II. Nous utilisons deux approches, l'approche classique du maximum de vraisemblance et l'approche Bayésienne pour estimer les paramètres de la distribution, la fonction de fiabilité ainsi que la fonction taux de panne. Les estimateurs de Bayes et les risques a posteriori (PR) correspondants ont été dérivés sous différentes fonctions de perte aussi bien symétrique (perte quadratique) qu'asymétriques (Linex et entropie). Les estimateurs ne peuvent pas être obtenus explicitement, nous utilisons donc la méthode de Monte Carlo (MCMC) pour approcher les solutions. Nous utilisons également l'erreur quadratique moyenne intégrée (IMSE) et le critère de proximité de Pitman pour comparer les résultats des deux méthodes. Enfin, un ensemble de données réelles a été analysé pour étudier l'applicabilité et l'utilité du modèle de Rayleigh Pareto proposé.

Mots-clés : Analyse Bayésienne ; Maximum de vraisemblance ; Méthode de Monte Carlo ; Rayleigh Pareto ; Censure progressive.

Abstract

In this thesis, we consider the problems of statistical inferences including the estimation of parameters and some reliability characteristics of a Rayleigh Pareto distribution under progressively type II right censored data. We use two approaches, the classical maximum likelihood approach and the Bayesian approach for estimating the distribution parameters and the reliability characteristics. Bayes estimators and corresponding posterior risks (PR) have been derived using different loss functions (symmetric and asymmetric). The estimators cannot be obtained explicitly, so we use the method of Monte Carlo. Also we use the integrated mean square error (IMSE) and the Pitman closeness criterion to compare the results of the two methods. Finally, a real data set has been analyzed to investigate the applicability and the usefulness of the proposed model.

Key Words : Rayleigh Pareto Distribution ; Progressive Censoring ; Bayesian Estimation ; Maximum Likelihood Estimation ; Monte Carlo Methods.

ملخص

في هذه الأطروحة، قمنا بدراسة مشاكل الاستدلالات الإحصائية بما في ذلك تقدير المعلمات وبعض خصائص الموثوقية لتوزيع رايلي باريتو (Rayleigh Pareto) مع البيانات المحذوفة تدريجياً من النوع الثاني. استخدمنا في هذه الدراسة الطريقة الكلاسيكية (طريقة الإمكان الأعظم) والطريقة البايزية لتقدير معلمات التوزيع وخصائص الموثوقية $(h(t), R(t))$. تم اشتقاق تقديرات بايز والمخاطر اللاحقة المقابلة (PR) باستخدام دوال خسارة مختلفة (متناظرة و غير متناظرة).

لا يمكن الحصول على المقدرات بشكل صريح، لذلك نستخدم طريقة مونت كارلو. كما نستخدم معيار الخطأ التربيعي المتكامل (IMSE) ومعيار التقريب Pitman لمقارنة نتائج الطريقتين. أخيراً، تم تحليل مجموعة بيانات حقيقية للتحقق من قابلية التطبيق، فائدة النموذج ومرونته مقارنة بالنماذج الكلاسيكية.

الكلمات المفتاحية: توزيع رايلي باريتو، المعطيات المحذوفة تدريجياً، تقدير بايز، طريقة الإمكان الأعظم (MLE)، طرق مونت كارلو.

Notations et abréviations

$E(X)$: Espérance mathématique de X .

$V(X)$: Variance de X .

PR : le risque a posteriori.

RP : modèle de Rayleigh Pareto.

IMSE : integrated mean square error.

MCMC : méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov.

MLEs : estimateur du maximum de vraisemblance.

pdf : densité de probabilité.

cdf : fonction de répartition.

$\hat{\alpha}_{MLE}$: estimateur du maximum de vraisemblance de α .

$\hat{\beta}_{MLE}$: estimateur du maximum de vraisemblance de β .

$\hat{\gamma}_{MLE}$: estimateur du maximum de vraisemblance de γ .

$\hat{R}(t)_{MLE}$: estimateur du maximum de vraisemblance de $R(t)$.

$\hat{h}(t)_{MLE}$: estimateur du maximum de vraisemblance de $h(t)$.

$\pi(\cdot)$: la densité a priori.

$\pi(\cdot|\cdot)$: la densité a posteriori.

$\hat{\alpha}_{BQ}$: estimateur de Bayes de α sous la fonction de perte quadratique.

$\hat{\beta}_{BQ}$: estimateur de Bayes de β sous la fonction de perte quadratique.

$\hat{\gamma}_{BQ}$: estimateur de Bayes de γ sous la fonction de perte quadratique.

$\hat{\alpha}_{BE}$: estimateur de Bayes de α sous la fonction de perte entropie.

$\hat{\beta}_{BE}$: estimateur de Bayes de β sous la fonction de perte entropie.

$\hat{\gamma}_{BE}$: estimateur de Bayes de γ sous la fonction de perte entropie.

$\hat{\alpha}_{BL}$: estimateur de Bayes de α sous la fonction de perte Linex.

$\hat{\beta}_{BL}$: estimateur de Bayes de β sous la fonction de perte Linex.

$\hat{\gamma}_{BL}$: estimateur de Bayes de γ sous la fonction de perte Linex.

$\hat{R}(t)_{BQ}$: estimateur de Bayes de $R(t)$ sous la fonction de perte quadratique.

$\hat{h}(t)_{BQ}$: estimateur de Bayes de $h(t)$ sous la fonction de perte quadratique.

$\hat{R}(t)_{BE}$: estimateur de Bayes de $R(t)$ sous la fonction de perte entropie.

$\hat{R}(t)_{BE}$: estimateur de Bayes de $h(t)$ sous la fonction de perte entropie.

$\hat{R}(t)_{BL}$: estimateur de Bayes de $R(t)$ sous la fonction de perte Linex.

$\hat{h}(t)_{BL}$: estimateur de Bayes de $h(t)$ sous la fonction de perte Linex.

Introduction

Ce projet de thèse concernant les méthodes statistiques en assurance et en durées de survie est l'occasion pour nous de mettre en pratique les connaissances théoriques acquises en cours sur des problèmes classiques qui se posent en assurance et en fiabilité. C'est également l'occasion de se familiariser avec des logiciels de statistiques tels que R, très utilisé dans le monde de la finance, de la durée de vie et de l'assurance car complet et performant d'une part et d'autre part, d'utiliser les algorithmes induits par les méthodes de Monte-Carlo, tels que les algorithmes de Metropolis-Hastings et l'algorithme de Gibbs.

Les distributions classiques utilisées dans le domaine de l'assurance, telle que la loi de Pareto, ou la loi de Burr XII peuvent être inadéquats pour modéliser certains phénomènes liés à l'assurance vie ou l'assurance non-vie ; c'est pourquoi, ces dernières années des généralisations de distributions classiques ont été proposées par de nombreux auteurs. On peut citer parmi les plus récents Boumaraf (2019 [5]) et al qui ont fait l'étude des estimateurs par maximum de vraisemblance d'une distribution Beta-Pareto ; Maurya et al (2019 [30]) qui ont étudiés l'estimation dans un modèle Exponentiated Rayleigh ; Kim et al (2011[6]) qui se sont intéressés à l'estimation Bayésienne des paramètres d'une distribution Exponentiated-Weibull ou alors, Valiollahi et al (2018 [31]) qui se sont intéressés au modèle Power-Lindley. Toutes ces études ont été réalisées dans un contexte de données progressivement censurées à droite. Les données progressivement censurées à droite ont été définies par Balakrishnan et al (2000 [26]), (2007 [25]). Ils y ont donné l'algorithme permettant de générer des observations progressivement censurées et Balakrishnan et al (2014 [24]) où ils ont appliqué ce procédé dans un contexte industriel pour des distributions classique à savoir, Weibull, Lognormal...

Plusieurs auteurs ont utilisés les données progressivement censurées à droite dans le cas des distributions classique ; on peut citer Chadli et al (2017 [1]) pour une distribution de Rayleigh ou Yadav et al (2019 [4]) pour la distribution de Hjorth.

Cette thèse est consacrée à l'étude d'un nouveau modèle généralisé de la loi de Pareto, appelé Rayleigh-Pareto distribution (RP) qui décrit plusieurs phénomènes et particulièrement les distributions à queues lourdes. Ces distributions trouvent généralement leurs applications dans le domaine des assurances pour l'estimation de la prime chargée qui n'est autre que l'espérance de la loi.

L'approche utilisée pour faire de l'estimation des paramètres du modèle et de certaines caractéristiques de survie, à savoir la fonction de fiabilité et le taux de hasard est une approche Bayésienne basée sur des lois a priori informatives et non informatives d'une part et d'autre part, sur un panel de fonctions de perte aussi bien symétriques (perte quadratique), qu'asymétriques (perte LINEX et Entropie).

Versus, l'approche Bayésienne, l'approche classique du maximum de vraisemblance a été envisagée pour l'estimation des paramètres et des caractéristiques de fiabilité. Une étude comparative à l'aide du critère de Pitman a été menée pour montrer la pertinence de l'utilisation de l'approche Bayésienne dans les problèmes de l'inférence statistique pour le modèle RP.

Il arrive souvent que les données à partir desquelles on mène une inférence soient censurées ; le cas le plus fréquent est le cas des données censurées à droite. Dans cette thèse, on s'intéresse au cas où les données sont progressivement censurées à droite.

Les critères de sélection du modèle AIC, BIC, CAIC et HQIC ont été utilisés pour montrer la pertinence du modèle RP par rapport aux modèles concurrents sur un ensemble de données réelles en utilisant les dépassements des pics de crues de la rivière Floyd (1935-1973), USA. ([14])

Cette thèse est structurée de la manière suivante :

Au premier chapitre, on rappelle quelques définitions et principes de l'assurance, ainsi que les modèles usuels pour décrire les montants de sinistres ou les nombres de sinistres. Au chapitre deux, on revient sur les principes de l'analyse de survie et quelques modèles de survie usuels. De même, on étudie les différents plans d'expérience utilisés dans les problèmes de l'inférence statistique, c'est-à-dire les différents types de censures.

Le chapitre trois est consacré aux différentes méthodes d'estimation, on y rappelle brièvement le principe du maximum de vraisemblance et plus en détail le principe de l'approche Bayésienne.

Le chapitre quatre est consacré au modèle de Rayleigh Pareto. On y définit le modèle, ses différentes caractéristiques ainsi que l'estimation des paramètres et des caractéristiques de survie.

Les résultats théoriques sont appuyés par des simulations numériques et une analyse de données réelles.

Chapitre 1

L'assurance

D'une manière classique, L'assurance est une convention par laquelle, en contrepartie d'une prime, l'assureur s'engage à garantir le souscripteur en cas de réalisation d'un risque prévu au contrat. Dans ce chapitre on a fait un rappel sur les principes de l'assurance ainsi que les modèles usuels pour modéliser le nombre de sinistres et le montant des sinistres.

1.1 Préliminaires et Notations

1.1.1 Définition juridique de l'assurance

L'assurance est une opération par laquelle une partie, l'assuré, se fait promettre, moyennant une rémunération (la prime ou cotisation), pour lui ou pour un tiers en cas de réalisation d'un risque, une prestation par une autre partie, l'assureur, qui prenant en charge un ensemble de risques, les compense conformément aux lois de la statistique.

1.1.2 Définition technique de l'assurance

L'assurance est l'opération par laquelle un assureur, organisant en mutualité une multitude d'assurés exposés à la réalisation de certains risques, indemnise ceux d'entre eux qui subissent un sinistre grâce à la masse commune des primes collectées.

L'assurance se partage en deux grandes catégories contenant elles-mêmes plusieurs branches.

- La première catégorie est l'assurance de personnes. Dans ces contrats l'indemnisation est essentiellement forfaitaire. Cette catégorie inclue principalement les assurances en cas de vie et en cas de décès, les assurances maladie, accident corporel, dépendance et emprunteur.

- La seconde catégorie concerne les assurances de biens et de responsabilités. Dans ces contrats, le remboursement en cas de sinistre est majoritairement indemnitaire. Cette catégorie inclue principalement les assurances automobiles, habitation, biens professionnels, catastrophes naturelles, construction, responsabilité civile générale, protection juridique, assistance, perte pécuniaire.

1.1.3 Le contrat d'assurance

Un contrat d'assurance est un contrat par lequel une partie (le souscripteur) se fait promettre pour son compte ou celui d'un tiers par une autre partie (l'assureur) une prestation généralement pécuniaire en cas de réalisation d'un risque, moyennant le paiement d'une prime ou cotisation.

1.1.4 Les parties du contrat

L'assureur

L'assureur est la société d'assurance ou la personne physique auprès de la quelle le contrat d'assurance est souscrit, et qui s'engage à fournir les prestations prévues en cas de réalisation du risque.

L'assuré

L'assuré se confond très souvent avec le souscripteur, redevable des primes, mais il peut être distinct. Il s'agit précisément, soit de celui qui est le propriétaire des biens assurés dans une assurance de biens, soit de celui dont la responsabilité est assurée dans une assurance de responsabilité, soit enfin de la personne dont le sort future engendre le risque. Il y a lieu de les distinguer du bénéficiaire qui recevra en cas de survenance d'un sinistre la prestation par l'assureur.

Le risque

Le risque est l'éventualité de la survenance d'un fait dommageable tel que le vol, la perte, l'incendie, l'accident...etc. Le risque a un caractère aléatoire puisqu'il dépend d'un événement hasardeux provoquant le sinistre. Mais en matière d'assurance le mot "risque" s'emploie

également pour désigner l'objet de la garantie. Il en est l'élément constitutif, c'est pourquoi il doit être défini avec la plus grande précision possible.

Le sinistre

Le sinistre est la réalisation d'un risque entrant dans l'objet du contrat d'assurance. Le sinistre fait naître l'obligation pour une entreprise d'assurance d'exécuter la garantie prévue dans un contrat d'assurance.

1.1.5 L'assurance non vie

De manière schématique, l'activité d'assurance non vie comprend trois types d'activités : Les assurances de choses ou de biens. Les assurance de responsabilité civile (RC) ou de dettes. Les assurances de personne (incapacité, invalidité, frais de santé,...).

1.1.6 l'assurance vie

L'assurance vie représente actuellement la branche la plus dynamique sur les marchés développés. L'assurance-vie est un contrat par lequel l'assureur s'engage à verser une rente ou un capital à une personne, le souscripteur, moyennant une prime. Ce versement se fait selon le type de contrat souscrit. En effet dans un contrat d'assurance-vie, il faut distinguer deux sortes de contrats : un contrat d'assurance en cas de décès et un contrat d'assurance en cas de vie.

L'assurance en cas de vie

Le risque garanti ici est la vie de l'assuré. Le capital est versé à l'assuré à l'échéance du contrat, si celui-ci est toujours en vie. Dans ce type de contrat, l'assuré peut être le bénéficiaire.

L'assurance en cas de décès

Dans le cadre d'une assurance-décès, le risque se réalise si l'assuré décède avant le terme du contrat, le capital sera versé au bénéficiaire désigné par le souscripteur. Le bénéficiaire désigné doit être différent du souscripteur.

1.1.7 La réassurance

La réassurance est une opération par laquelle une société d'assurance (la cédante) s'assure elle-même auprès d'une autre société (le réassureur ou le cessionnaire) pour une partie des risques qu'elle a pris en charge.

1.1.8 La coassurance

La coassurance consiste en un partage proportionnel d'un même risque entre plusieurs assureurs. Chacun accepte un certain pourcentage du risque, reçoit en échange de ce même pourcentage de la prime et, en cas de sinistre, sera tenu au paiement de la même proportion des prestations dues.

1.1.9 Théorie de la crédibilité

La théorie de la crédibilité est un ensemble de techniques utilisées par les actuaires pour déterminer la prime d'un assuré/contrat dans un portefeuille hétérogène (la sinistralité n'est pas la même pour tous les contrats). En faisant une tarification, un assureur cherche

1. à charger assez de primes pour couvrir les sinistres,
2. à répartir équitablement ces primes entre les assurés.

Pour réaliser cela, la théorie de la crédibilité effectue une tarification basée sur l'expérience, c'est à dire basée sur un historique des sinistres passés pour chaque contrat assuré. Il faut donc disposer d'un historique assez conséquent (au moins cinq ans). Ces méthodes sont classiquement utilisés en assurance automobile et pour les accidents du travail ou de tels historiques existent. Elles ne peuvent pas être utilisées en assurance vie (on ne meurt qu'une fois) ou en assurance habitation (trop peu de sinistres). En pratique, on dispose d'un tableau de données ("portefeuille") de la forme

$$(x_{i,j})_{i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}}$$

avec chaque ligne qui représente un contrat et chaque colonne qui représente une année. $x_{i,j}$ représente donc le montant (ou éventuellement le nombre) de sinistres pour le contrat numéro i et l'année numéro j .

1.2 Méthodes de tarification

Pour qu'un assureur accepte de garantir un aléa, il doit pouvoir tarifier le risque, c'est-à-dire calculer une prime d'assurance. Le calcul de la prime est basé :

- Sur des paramètres techniques,
- Sur des paramètres commerciaux ,
- En incorporant les taxes.

Ce calcul est en général effectué par des actuaires.

1.2.1 La prime pure

La prime pure d'un risque est la prime permettant à l'assureur de régler les sinistres frappant la mutualité des assurés. Elle est appelée également prime de risque ou encore prime d'équilibre (ou même prime technique). En mathématique c'est l'espérance mathématique de la somme des montants de règlements qui sera effectué au titre de la garantie donnée.

$$P_i = E[X_i]$$

Cette valeur moyenne anticipée résulte la plupart du temps du produit :

$$\text{Prime pure} = \text{Fréquence des sinistres} \times \text{Coût moyen des sinistres}$$

Où : Fréquence des sinistres = $\frac{\text{nombre des sinistres}}{\text{nombre des contrats}}$

et Coût moyen des sinistres = $\frac{\text{masse totale des sinistres à prendre en charge}}{\text{nombre des sinistres}}$.

1.2.2 La prime commerciale

La prime commerciale est définie comme suit

$$\text{Prime commerciale} = \text{prime pure} + \text{Chargements} + (\text{marge bénéficiaire})$$

Les chargements ce sont les éléments de la prime destinée à la compensation des dépenses de gestion et de commercialisation. (Voir [22])

1.2.3 Les différents types de primes pures

Le but en crédibilité de précision consiste à calculer la «meilleure» prévision (estimation) du montant total des sinistres (ou toute autre quantité d'intérêt) de la prochaine année, $S_{i,n+1}$ pour $i = 1, \dots, I$.

On distingue ici trois types de primes pures : la prime individuelle (prime de risque), la prime collective, et la prime Bayésienne.

La prime individuelle (prime de risque)

Si le niveau de risque du contrat i est connu, alors la meilleure estimation est l'espérance

$$P^{ind} = \mu(\theta_i) = E[S_{it} | \Theta = \theta_i] = \int_0^{\infty} x f(x | \theta_i) dx.$$

Cette fonction est appelée la prime de risque. Or,

- le niveau de risque et, donc, la prime de risque sont inconnus ;
- prévoir $S_{i,n+1}$ et prévoir $\mu(\theta_i)$ deviennent donc des problèmes équivalents.

La prime collective

Comme première approximation de la prime de risque, on peut utiliser la moyenne pondérée de toutes les primes de risque possibles :

$$P^{coll} = E[\mu(\Theta)] = \int \mu(\theta) u(\theta) d\theta$$

Cette approximation sera la même pour tous les contrats ; c'est la prime collective.

Remarque. On a

$$P^{coll} = E[\mu(\Theta)] = E[E[S_{it} | \theta]] = E[S_{it}],$$

Cette prime correspond au montant moyen des sinistres espérés dans l'ensemble du portefeuille. (Voir [15])

La prime Bayésienne

On l'a vu, la prime collective est globalement adéquate, mais pas nécessairement équitable. En termes statistiques, cela signifie qu'il existe une meilleure approximation des primes de risque lorsque les données sont disponibles.

Supposons que, pour une police particulière, on ait observé, pour les n premières périodes, les montants des sinistres suivants : $S_1 = x_1, \dots, S_n = x_n$.

La meilleure approximation (ou estimation, ou prévision) de la prime de risque $\mu(\theta_i)$ est la fonction des observations $g^*(S_{i1}, \dots, S_{in})$ minimisant l'erreur quadratique moyenne

$$E[(\mu(\Theta) - g(S_{i1}, \dots, S_{in}))^2],$$

où $g()$ est une fonction quelconque. On peut démontrer que la fonction $g^*(S_{i1}, \dots, S_{in})$ est la prime bayésienne

$$\begin{aligned} B_{i,n+1} &\equiv g^*(S_{i1}, \dots, S_{in}) \\ &= E[\mu(\Theta) | g(S_{i1}, \dots, S_{in})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\theta) u(\theta | S_{i1}, \dots, S_{in}) d\theta, \end{aligned}$$

où $u(\theta | x_1, \dots, x_n)$ est la distribution a posteriori des niveaux de risque. En d'autres mots, $\mathcal{U}(\theta | x_1, \dots, x_n)$ est la fonction de structure révisée après l'observation de l'expérience $S_{i1} = x_1, \dots, S_{in} = x_n$. Or, par la règle de Bayes et étant donné l'indépendance conditionnelle des observations,

$$\begin{aligned} u(\theta_i | x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x_1, \dots, x_n | \theta_i) u(\theta_i)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n | \theta) u(\theta) d\theta} \\ &= \frac{\prod_{t=1}^n f(x_t | \theta_i) u(\theta_i)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{t=1}^n f(x_t | \theta) u(\theta) d\theta} \\ &\propto u(\theta_i) \prod_{t=1}^n f(x_t | \theta_i). \end{aligned}$$

Remarques.

1. La prime Bayésienne est la meilleure prévision de $S_{i,n+1}$ que l'on puisse calculer.
2. Comme la prime collective, la prime Bayésienne est une moyenne pondérée des primes de risque, mais en utilisant la distribution a posteriori de Θ plutôt que la distribution a priori ; comparer

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\theta) u(\theta) d\theta$$

et

$$B_{i,n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\theta) u(\theta | S_{i1}, \dots, S_{in}) d\theta.$$

3. À l'inverse, on peut interpréter la prime collective comme la prime Bayésienne de première année, lorsque aucune expérience n'est disponible.
4. L'ordre des sinistres n'est pas pris en compte dans les calculs puisque

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta_i) = \prod_{t=1}^n f(x_t | \theta_i).$$

La prime pure a posteriori (appelée aussi prime de Bayes) pour la période $n+1$ est donnée par

$$P^{Bayes} = \widetilde{\mu(\Theta)} = E[\mu(\Theta) | X]$$

Pour plus de détails et informations voir [15].

1.3 Les modèles usuels en assurance

1.3.1 Nombre de sinistres

Nous présentons dans cette partie quelques lois usuelles utilisées pour modéliser le nombre de sinistres. ([33])

La distribution de Poisson

La loi de Poisson de paramètre λ est la loi d'une variable aléatoire discrète réelle X , prenant toutes les valeurs entières non négatives, avec les probabilités :

$$Pr(X = k) = P_k = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!} \quad k \in [0, +\infty[\quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

La loi de Poisson dépend d'un seul paramètre λ . On la note $P(\lambda)$.

La loi de Poisson est la loi des événements rares ou loi des petites probabilités : loi du nombre de fois où un événement de probabilité très faible se produit au cours d'un très grand nombre d'expériences identiques et indépendantes.

Moments

La loi de Poisson est la seule loi discrète possédant la propriété, $E(X) = \text{Var}(X)$.

$$E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$$

Propriétés et domaine d'application

La loi de Poisson est la loi discrète d'une variable aléatoire représentant un nombre d'événements. Elle est utilisée pour décrire :

- la réalisation d'événements peu probables, dans une succession d'épreuves très nombreuses, au moins 50,
- le nombre des sinistres, le nombre d'accidents dans un atelier, le nombre de défauts sur un appareil, Elle a des applications dans le domaine des files d'attente et d'assurances.

La distribution binomiale négative

La loi binomiale négative est une distribution de probabilité discrète. Elle décrit la situation suivante : une expérience consiste en une série de tirages indépendants, donnant un « succès » avec probabilité p (constante durant toute l'expérience) et un « échec » avec une probabilité complémentaire. Cette expérience se poursuit jusqu'à l'obtention d'un nombre donné n de succès. La variable aléatoire représentant le nombre d'échecs (avant l'obtention du nombre donné r de succès) suit alors une loi binomiale négative. Ses paramètres sont r , le nombre de succès attendus, et p , la probabilité d'un succès.

Définition 1.3.1 *On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative (ou loi de Polya) de paramètres r et p , ce que l'on note $X \sim BN(r, p)$ si :*

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
 - $P(X = k) = C_{k+r-1}^k P^r (1-p)^k$.
- où : $r \geq 0$ et $0 \leq p \leq 1$.*

Moments

X admet alors une espérance et une variance donnés par

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p},$$

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Propriétés et domaine d'application

La loi binomiale négative est la distribution du nombre d'échecs avant le r -ième succès dans des épreuves de Bernoulli, de probabilité de succès p . C'est un modèle que l'on retrouve souvent en biologie, pour caractériser les résultats de comptage de bactéries par exemple, et en assurance pour modéliser les nombres des sinistres.

1.3.2 Montant de sinistres

Nous présentons dans cette partie les lois usuelles utilisées pour modéliser le coût d'un sinistre.

La distribution de Pareto

C'est une loi qui est utilisée notamment dans la modélisation de la distribution des revenus d'une population ou en théorie des assurances. Sa densité est définie pour $x > x_0 > 0$, x_0 pouvant s'interpréter comme le revenu minimum, en fonction d'un paramètre $\theta > 0$:

$$f(x; \gamma, \theta) = \frac{\theta \gamma^\theta}{x^{\theta+1}} \quad \gamma, \theta > 0,$$

$$F(x; \gamma, \theta) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x}\right)^\theta$$

Moments

$$E(x) = \frac{\theta \gamma}{\theta - 1} \quad \text{pour } \theta > 1$$

$$V(x) = \frac{\gamma^2 \theta}{(\theta - 1)^2 (\theta - 2)} \quad \text{pour } \theta > 2$$

Propriétés et domaine d'application

La distribution de Pareto est Heavy tailed (queue lourde), ce qui signifie que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(X > x + y | X > x) = 1 \quad \text{pour } y > 0$$

Par exemple, si X est le temps de vie d'un composant, plus il a vécu ($X > x$) plus il a de chances de vivre longtemps : le système rajeunit.

La distribution de Pareto est largement appliquée dans différents domaines tels que l'assurance, la réassurance, la physique, l'hydrologie, la géologie et l'astronomie.

La Loi log-normale

Définition 1.3.2 Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$. La variable aléatoire X définie par $X = e^Y$ suit, par définition, une loi log-normale. Cette loi est aussi appelée loi de Galton ou loi de Gibrat. La densité de la loi de la variable X se déduit de celle de la variable Y par le changement de variable $x \rightarrow e^y$:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \quad x \geq 0$$

$$f(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

Le facteur $1/x$ dans l'expression de la densité est un facteur de pondération.

Moments

L'espérance et la variance de la loi log-normale sont :

$$E(X) = \exp\left(m + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{Var}(X) = [\exp(\sigma^2) - 1]\exp(2m + \sigma^2)$$

Propriétés et domaine d'application

La loi log-normale représente la loi d'une grandeur résultant de l'influence d'un grand nombre de facteurs aléatoires et indépendants agissant sous forme multiplicative. Elle est fréquemment utilisée en fiabilité et en assurance car la variable aléatoire X est positive et grâce au paramètre de forme s , elle peut avoir des représentations très variées.

Le produit de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi log-normale suit une loi log-normale.

Chapitre 2

L'analyse de survie

L'analyse de la survie est une branche des statistiques qui cherche à modéliser le temps restant avant la mort pour des organismes biologiques (l'espérance de vie) ou le temps restant avant l'échec ou la panne dans les systèmes artificiels, ce que l'on représente graphiquement sous la forme d'une courbe de survie. On parle aussi d'analyse de la fiabilité en ingénierie, d'analyse de la durée en économie ou d'analyse de l'histoire d'événements en sociologie. La représentation des données de survie se fait souvent sous la forme graphique d'une courbe de survie. Plus généralement, l'analyse de survie implique la modélisation du facteur temps dans la probabilité d'occurrence des événements, notamment grâce à des concepts tels que le taux de défaillance instantané ou la loi de fiabilité d'un système. L'analyse de survie a été généralisée à la modélisation d'événements non pas uniques mais récurrents dans le temps, comme peuvent l'être par exemple les rechutes en cas de maladie, voire à des systèmes plus complexes encore soumis à des risques multiples qui peuvent dépendre les uns des autres, etc. L'analyse de survie repose souvent sur des séries temporelles de données longitudinales. Dans les cas où les événements d'intérêt ne se sont pas produits avant la fin de la période d'observation (e.g., la maladie n'est pas apparue chez un malade) on parle de censure de la série de données. Pour cela, dans ce chapitre nous avons fait un rappel sur l'analyse de survie et les plans d'expériences avec quelques modèles usuels.

2.1 Les différents plans d'expériences

Dans les cours de statistique, on suppose toujours que les données que l'on analyse ont été complètement et parfaitement observées. Or, en pratique, Dans le domaine des durées de survie, il est fréquent que les données soient manquantes, incomplètes ou erronées à cause de deux phénomènes distincts : la **censure** et la **troncature**.

2.1.1 Les données censurées

Une durée de vie aléatoire X est dite censurée par une variable aléatoire de censure C si on observe parfois C au lieu de X . L'information donnée par C sur X est :

$$\begin{aligned} X > C & \quad \text{s'il y a censure droite} \\ X < C & \quad \text{s'il y a censure gauche} \end{aligned}$$

Pour l'individu i ; considérons

- son temps de survie X_i ;
- son temps de censure C_i ;
- la durée réellement observée T_i .

Censure à gauche

La censure à gauche correspond au cas où l'individu a déjà subi l'évènement avant que l'individu soit observé. On sait uniquement la date de l'évènement inférieure à une certaine date connue. Pour chaque individu, on peut associer un couple des variables aléatoire (T, δ) :

$$T = X \vee C = \max(X, C),$$

$$\delta = \mathbf{1}_{X \geq C}.$$

Exemple de censure gauche : Un ethnologue étudie la durée d'apprentissage d'une tâche. Cette durée est une variable aléatoire X et C est l'âge de l'enfant. Pour les enfants qui savent déjà accomplir la tâche, C censure X à gauche car pour eux X est inconnu mais inférieur à C : $X < C$.

Censure à droite

La durée de vie est dite censurée à droite si l'individu n'a pas subi l'événement à sa dernière observation. En présence de censure à droite, les durées de vie ne sont pas toutes observées ; pour certaines d'entre elles, on sait seulement qu'elles sont supérieures à une certaine valeur connue.

Exemple de censure droite : Un exemple classique de censure droite est celui où l'étude porte sur la durée de survie X de patients atteints d'une certaine maladie. Pour les patients perdus de vue au bout du temps C alors qu'ils étaient encore vivants, C censure X à droite puisque, pour eux, X est inconnue mais supérieure à C : $X > C$.

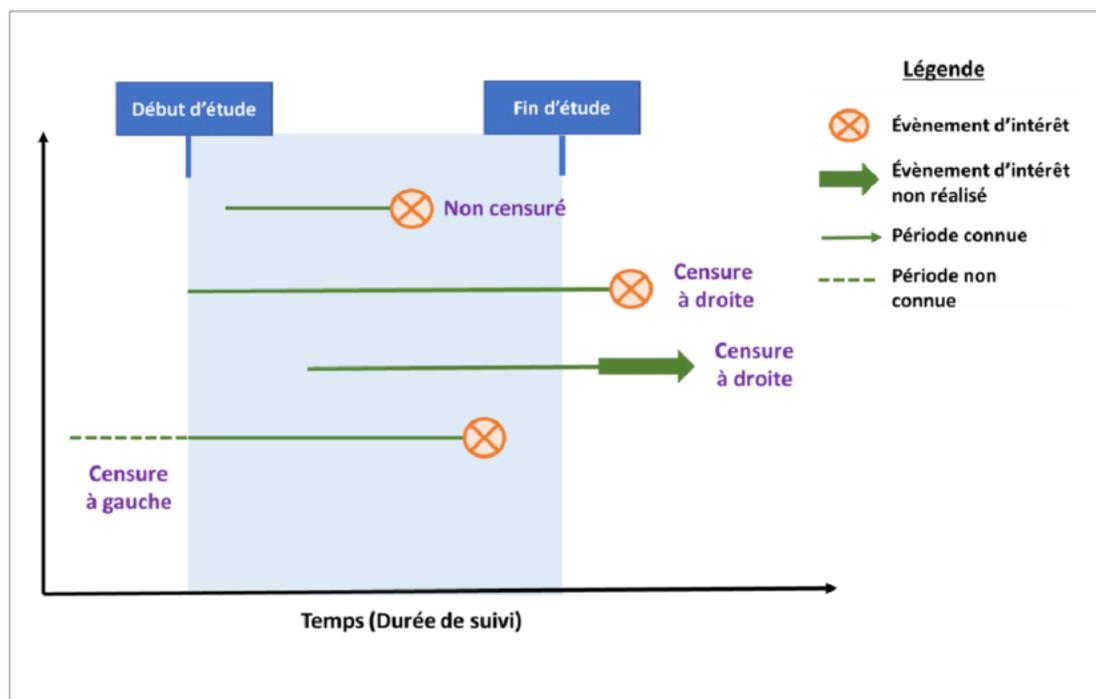


FIGURE 2.1 – Les différents types d'observations

La censure de type I

Soit C une valeur fixée, au lieu d'observer les variables X_1, \dots, X_n qui nous intéressent, on n'observe X_i uniquement lorsque $X_i \leq C$; sinon on sait uniquement que $X_i > C$. On utilise la notation suivante : $T_i = X_i \wedge C = \min(X_i; C)$.

Ce mécanisme de censure est fréquemment rencontré dans les applications industrielles. Par exemple, on peut tester la durée de vie de n objet identiques (ampoules) sur un intervalle d'observation fixé $[0; \mu]$: En biologie, on peut tester l'efficacité d'une molécule sur un lot de souris (les souris vivantes au bout d'un temps μ sont sacrifiées).

La censure de type II

Elle est présente quand on décide d'observer les durées de survie des n patients jusqu'à ce que k d'entre eux soient décédés et d'arrêter l'étude à ce moment là. Soient $X_{(i)}$ et $T_{(i)}$ les statistiques d'ordre des variables X_i et T_i : La date de censure est donc $X_{(k)}$ et on observe les variables suivantes

$$\begin{aligned} T_{(1)} &= X_{(1)} \\ &\vdots \\ T_{(k)} &= X_{(k)} \\ T_{(k+1)} &= X_{(k)} \\ &\vdots \\ T_{(n)} &= X_{(k)} \end{aligned}$$

La censure de type III (ou censure aléatoire de type I)

Soient C_1, \dots, C_n des variables aléatoires i.i.d. On observe les variables

$$T_i = X_i \wedge C_i.$$

L'information disponible peut être résumée par :

- la durée réellement observée T_i ;
- un indicateur $\delta_i = II_{\{X_i \leq C_i\}}$
- $\delta_i = 1$ si l'événement est observé (d'où $T_i = X_i$). On observe les vraies durées ou les durées complètes.
- $\delta_i = 0$ si l'individu est censuré (d'où $T_i = C_i$). On observe des durées incomplètes (censurées).

2.1.2 Données progressivement censurées de type II

Les données progressivement censurées sont un mécanisme assez populaire récemment dans la collecte de données de survie. Supposons que n unités sont placés pour un test

de survie et que m ($m < n$) unités ont entièrement observés (jusqu'à la panne). Le processus d'observations est le suivant : après la première panne, R_1 des $(n-1)$ survivants sont retirés du plan d'expérience. Après la deuxième panne, R_2 des $(n-2-R_1)$ survivants sont retirés du plan, ainsi de suite à la $m^{\text{ième}}$ étape $R_m = n - m - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1}$ survivants sont retirés du plan d'expérience. (Pour plus de détails voir [26],[25],[24]). Ce schéma de censures progressives à droite est noté (R_1, R_2, \dots, R_m) . Donc, $X = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ est un échantillon progressivement censuré de type II. Il est clair, que ce schéma englobe les données complètes ($R_1 = R_2 = \dots = R_m = 0$ et $n=m$) et les données censurées de type II ($R_1 = R_2 = \dots = R_{m-1} = 0$ et $R_m = n - m$). La fonction de densité des données progressivement censurées de type II est donnée par

$$f_{X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x_1, x_2, \dots, x_m) = C \prod_{i=1}^m f(x_i) [1 - F(x_i)]^{R_i}, \quad (2.1)$$

où

$$C = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - \sum_{i=1}^{m-1} (R_i + 1)).$$

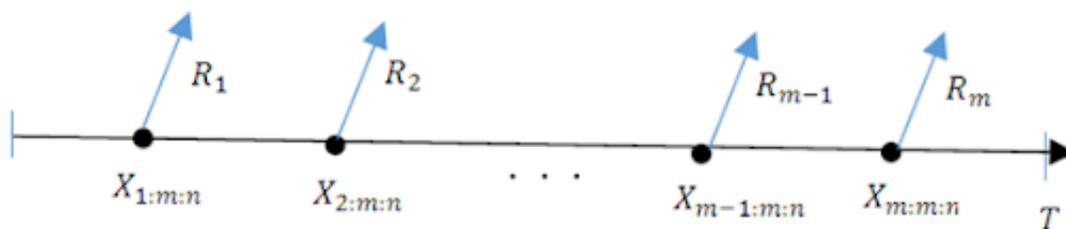


FIGURE 2.2 – Les données progressivement censurées de type II

Générer les données progressivement censurées

Pour générer les données progressivement censurées d'une distribution continue, on utilise la distribution de la loi Uniforme (algorithme 1) ou la distribution exponentielle (algorithme 2) dans l'algorithme de simulation introduit par Balakrishnan (pour plus de détails voir [27],[26]).

Algorithme 1 (avec la loi Uniforme)

1- Générer m variables indépendantes de la loi Uniforme $U(0, 1)$ (W_1, W_2, \dots, W_m).

2- Soit $V_i = W_i^{1/(i+\sum_{j=m-i+1}^m R_j)}$ pour $i=1, 2, \dots, m$.

3- Soit $U_{i:m:n} = 1 - V_m V_{m-1} \dots V_{m-i+1}$ pour $i=1, 2, \dots, m$.

Donc $U_{1:m:n}, U_{2:m:n}, \dots, U_{m:m:n}$ sont les données progressivement censurées de type II d'un échantillon de la loi Uniforme $U(0, 1)$.

4- Enfin, on prend $X_{i:m:n} = F^{-1}(U_{i:m:n})$, pour $i=1, 2, \dots, m$, où $F^{-1}(\cdot)$ est l'inverse de la fonction de répartition de la distribution à étudier.

Donc X_1, X_2, \dots, X_m est l'échantillon des données progressivement censurées de Type II de la distribution qu'on veut générer ($F(\cdot)$).

Algorithme 2 (avec la loi Exponentielle)

1- Générer m variables indépendantes de la loi exponentielle Z_1, Z_2, \dots, Z_m .

2- Prend $Z_i = -\text{Ln}(1 - U_i)$, où U_i sont des variables aléatoires indépendantes de la loi Uniforme $U(0, 1)$.

3- Soit

$$X_{i:m:n} = \frac{Z_1}{n} + \frac{Z_2}{n - R_1 - 1} + \frac{Z_3}{n - R_1 - R_2 - 2} + \dots + \frac{Z_i}{n - R_1 - R_2 - \dots - R_{i-1} - i + 1},$$

pour $i=1, 2, \dots, m$. C'est l'échantillon des données progressivement censurées de type II de la distribution exponentielle.

4- Soit $Y_{i:m:n} = F^{-1}[1 - \exp(-X_{i:m:n})]$, pour $i=1, 2, \dots, m$. où $F^{-1}(\cdot)$ est l'inverse de la fonction de répartition de la distribution qu'on veut étudier.

Donc $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}$ C'est l'échantillon des données progressivement censurées de la distribution $F(\cdot)$.

2.1.3 Les données tronquées

Le phénomène de troncature est très différent de la censure, dans le cas de la censure, on a connaissance du fait qu'il existe une information, mais on ne connaît pas sa valeur précise, mais dans le cas de la troncature on ne dispose pas de cette information.

La troncature, quant à elle, élimine de l'étude une partie des X_j . Lors d'une étude

pratique sur les durées de vie, il n'est pas rare que la variable d'intérêt X ne soit pas observable quand elle est inférieure à un seuil aléatoire Y , ce qui aura pour conséquence que l'analyse ne pourra porter que sur la loi conditionnelle de X sachant $X > Y$. Il y a trois types de troncature : troncature à gauche, à droite et par intervalle.

— La troncature à gauche

Soit Y une variable aléatoire indépendante de X , on dit qu'il y a troncature à gauche lorsque X n'est observable que si $X > Y$: On observe le couple $(X; Y)$; avec $X > Y$. Par exemple, si la durée de vie d'une population est étudiée à partir d'une cohorte tirée au sort dans cette population, seule la survie des sujets vivants à l'inclusion pourra être étudiée (il y a troncature à gauche car seuls les sujets ayant survécu jusqu'à la date d'inclusion dans la cohorte sont observables).

— La troncature à droite

De même, il y a troncature à droite lorsque X n'est observable que si $X < Y$.

— La troncature par intervalle

Quand une durée est tronquée à droite et à gauche, on dit qu'elle est tronquée par intervalle. Par exemple, on rencontre ce type de troncature lors de l'étude des patients d'un registre : les patients diagnostiqués avant la mise en place du registre ou répertoriés après la consultation du registre ne seront pas inclus dans l'étude.

2.2 Notions de fiabilité

La fiabilité a sans doute pris son développement depuis la dernière guerre mondiale. Elle est vite devenue une science à part entière dans les applications appartenant à de nombreux domaines. Elle a pour fondement mathématiques la statistique et le calcul de probabilité qui sont nécessaires à la compréhension et à l'analyse des données de fiabilité. Aujourd'hui, la fiabilité est devenue un paramètre clé de la qualité et d'aide à la décision, dans l'étude de la plupart des composants, produit et processus "grand public" : Assurance, transport, énergie, composants électronique, composants mécanique...

Le terme fiabilité (ou la durée de survie) désigne le terme écoulé jusqu'à la survenue d'un évènement précis. l'évènement écoulé (communément appelé "décès") est le passage

irréversible entre deux états (communément nommé "vivant" et "décès"). L'évènement terminal n'est pas forcément la mort : il peut s'agir de l'apparition d'une maladie (par exemple, le temps entre le diagnostic et la guérison), la panne d'une machine (durée de fonctionnement d'une machine, en fiabilité) ou la survenue d'un sinistre (temps entre deux sinistres, en actuariat).

La fiabilité est l'étude de la durée de vie (T : variable aléatoire) d'un matériel, elle se caractérise par sa courbe $R(t)$ appelée également "loi de survie" (R : reliability en anglais) et son taux de défaillance (fonction de hasard) $h(t)$.

2.2.1 La durée de vie

On appelle durée de vie une variable aléatoire T positive, généralement, la durée s'écoulant entre deux évènements (mort, panne, sinistre, entrée en chômage, maladie).

2.2.2 La fonction de répartition $F(t)$

La fonction de répartition (cumulative distribution function cdf en anglais) représente, pour t fixé, la probabilité de mourir avant l'instant t .

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - R(t).$$

2.2.3 La densité de probabilité $f(t)$

C'est une fonction $f(t) \geq 0$, telle que pour tout $t \geq 0$,

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Si la fonction de répartition a une dérivée au point t alors :

$$f(t) = P(t \leq T \leq t + dt) = \frac{dF}{dt} = -R'(t).$$

Pour t fixé, la densité de probabilité caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après l'instant t .

2.2.4 La fonction de survie $R(t)$

La fonction de survie est par définition le complément à un de la fonction de répartition :

$$R(t) = 1 - F(t) = P(T > t),$$

où t est la variable temps, T est une variable aléatoire symbolisant le moment du décès, et P est la fonction probabilité. La fonction de survie est égale à la probabilité que le décès intervienne après un temps t donné.

2.2.5 La fonction de hasard $h(t)$

La fonction de hasard (ou taux de panne, taux de défaillance, taux de décès, risque instantané, etc.), pour t fixé caractérise la probabilité de mourir dans un petit intervalle de temps après t , conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'au temps t (c'est-à-dire le risque de mort instantané pour ceux qui ont survécu) :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

2.2.6 Le taux de hasard cumulé $H(t)$

Le taux de hasard cumulé est l'intégrale du risque instantané $h(t)$:

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds = -\ln(R(t)).$$

On peut déduire de cette équation une expression de la fonction de survie en fonction du taux de hasard cumulé (ou du risque instantané) :

$$R(t) = \exp(-H(t)) = \exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right).$$

et en déduire aussi que

$$f(t) = h(t)\exp\left(-\int_0^t h(s)ds\right).$$

2.2.7 Moyenne et variance de la durée de survie

Le temps moyen de survie $E(X)$ et la variance de la durée de survie $V(X)$ sont définis par les quantités suivantes :

$$E(X) = \int_0^{\infty} R(t)dt$$

et

$$V(X) = 2 \int_0^{\infty} tR(t)dt - (E(X))^2.$$

Ainsi on peut déduire l'espérance et la variance à partir de n'importe laquelle des fonctions : R , F , f , h , et H (mais pas l'inverse).

2.3 Les modèles usuels dans l'analyse de survie

D'une manière générale, toutes les distributions utilisées pour modéliser des variables positives (log-normale, Pareto, logistique, etc.) peuvent être utilisées dans des modèles de survie. La distribution de base des modèles de durée est la distribution exponentielle, et ses diverses généralisations (Weibull, Gamma). Le choix du modèle détermine en particulier la forme de la fonction de hasard, on distinguera les modèles à fonction de hasard monotone des modèles permettant d'obtenir des fonctions de hasard en baignoire (U) et en cloche. (voir [21]). La situation de référence en assurance non vie est un taux de hasard constant ou croissant, en démographie en assurance vie et en fiabilité, le taux et en cloche ou monotone suivant la période étudiée.

2.3.1 Le modèle exponentiel

Cette loi, bien connue dans l'étude classique de la statistique, est décrite en analyse de survie par une fonction de risque instantané constante. En effet, si T est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$, alors sa fonction de densité est donnée par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \lambda > 0,$$

sa fonction de répartition par

$$F(t) = 1 - \exp\{-\lambda t\},$$

sa fonction de survie par

$$R(t) = \exp\{-\lambda t\}$$

et sa fonction de risque instantané par

$$h(t) = \lambda.$$

Historiquement, la loi exponentielle a été une des premières distributions utilisées, particulièrement grâce à la grande disponibilité de méthodes statistiques simples et parce qu'elle apparaît convenable pour présenter le temps de survie de plusieurs sujets. Cependant, le fait que la fonction de risque instantané soit constante se veut fort restrictif.

Elle implique, entre autres, que la probabilité de décès dans l'intervalle $[t, t + dt)$, sachant que l'individu a survécu jusqu'à t , ne s'accroît pas avec l'âge, ce qui, pour de nombreuses situations, est très irréaliste.

2.3.2 Le modèle de Weibull

Initialement utilisée pour représenter les effets de l'usure de pièces usinées (Weibull, 1951), la loi de Weibull est maintenant utilisée pour maintes applications en biologie, particulièrement pour la durée de vie d'organismes constitués de plusieurs composantes où la défaillance d'une de ces composantes peut entraîner la mort. La fonction de densité d'une loi de Weibull de paramètres λ et β est donnée par

$$f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} \exp[(-\lambda t)^\beta], \quad t > 0, \lambda > 0, \beta > 0,$$

sa fonction de survie par

$$R(t) = \exp[(-\lambda t)^\beta]$$

et sa fonction de risque instantané par

$$h(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}.$$

On remarque que $h(t)$ est croissante si $\beta > 1$, décroissante pour $\beta < 1$ et constante pour $\beta = 1$. Dans ce dernier cas, la loi de Weibull devient une exponentielle de paramètre λ . Le paramètre β est souvent appelé le paramètre de forme, la valeur de λ ne modifiant en rien celle-ci.

2.3.3 Le modèle de Rayleigh

En probabilités et en statistiques, la loi de Rayleigh est une loi de probabilité à densité. Elle apparaît comme la norme d'un vecteur gaussien bi-dimensionnel dont les coordonnées sont indépendantes, centrées et de même variance. Cette loi de probabilité est baptisée d'après Lord Rayleigh. Ce modèle est utilisé en physique pour modéliser la durée de vie de certaines particules ou le bruit en sortie de certains récepteurs de transmissions.

La fonction de densité de probabilité, la fonction de fiabilité et la fonction de taux de hasard sont données respectivement comme suit :

$$f(t, \sigma) = \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad t > 0, \sigma > 0,$$

$$R(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

et

$$h(t) = \frac{t}{\sigma^2}.$$

La distribution de Rayleigh est un cas particulier de la distribution de Weibull à deux paramètres est constituée un modèle approprié pour les études d'essai de survie.

2.3.4 Le modèle de la loi gamma

La loi gamma est la loi de l'instant d'occurrence du $\alpha^{\text{ème}}$ événement dans un processus de Poisson.

Soit $T_{i \in \{1, \alpha\}}$ le vecteur représentant les durées inter-événements (les temps entre défaillances successives d'un système). Si ces durées sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre β , alors le taux cumulé d'apparition de α défaillances suit une loi gamma de paramètres (α, β) . Sa densité de probabilité s'écrit

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad t \geq 0, \alpha \geq 1 \text{ et } \beta \geq 0.$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$h(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\int_t^\infty \Gamma(\alpha) f(u) du}.$$

La loi gamma est très utilisée dans l'approche Bayésienne, elle est la conjuguée naturelle de la loi exponentielle de paramètre λ . Un cas particulier intéressant consiste, pour un entier naturel n fixé, à choisir les paramètres : $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$ la loi obtenue est celle de Khi-deux à n degrés de liberté.

Chapitre 3

Les méthodes d'estimations

Dans ce chapitre, on a étudié les différents méthodes d'estimation suivantes : la méthode des moments, la méthode du maximum de vraisemblance et en détail la méthode Bayésienne.

3.1 La méthode des moments

La méthode des moments est un outil d'estimation intuitif qui date du début des statistiques. Elle consiste à estimer les paramètres recherchés en égalisant certains moments théoriques (qui dépendent de ces paramètres) avec leurs contreparties empiriques. L'égalisation se justifie par la loi des grands nombres qui implique que l'on peut "approcher" une espérance mathématique par une moyenne empirique. On est donc amené à résoudre un système d'équations. Autrement dit, si $\theta = E(X)$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments (EMM) est :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

3.2 La méthode du maximum de vraisemblance

Le maximum de vraisemblance est une méthode générale d'estimation due à Fisher (1922,1925) qui possède des propriétés statistiques intéressantes surtout dans les conditions asymptotiques (Cox et Hinkley, 1974 [10]).

Les méthodes d'estimation du maximum de vraisemblance sont des estimations ponctuelles puisqu'elles cherchent à trouver une valeur estimée $\hat{\theta}$ pour un paramètre θ à partir d'un ensemble d'échantillons donnés.

Soit X_1, X_2, \dots, X_n , n observations indépendantes et de la même loi, la fonction de vraisemblance dans ce cas (données complètes) est donnée par

$$L(\Theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \Theta).$$

Définition 3.2.1 On appelle fonction de vraisemblance (*likelihood* en anglais) la fonction

$$\theta \rightarrow L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n),$$

et estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) du paramètre θ tout point maximal de cette fonction

$$\hat{\theta}_{mv} = \arg \max_{\theta} L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n).$$

TABLE 3.1 – Estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance.

| Distribution | Paramètre à estimer | Estimateur |
|--|---------------------|---|
| Loi uniforme sur $[0, a]$ | a | $Sup(x_i)$ |
| Loi binomiale (k nombre de succès en n épreuves) | p | $\hat{p} = \frac{k}{n}$ |
| Loi de Poisson | λ | $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ |
| Loi normale | m σ^2 | $\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ |

3.3 La méthode Bayésienne

3.3.1 Le principe Bayésien

L'inférence Bayésienne est une méthode d'inférence permettant de déduire la probabilité d'un événement à partir de celles d'autres événements déjà évalués. Elle s'appuie principalement sur le théorème de Bayes¹ :

Théorème 3.3.1 Si A et B sont des événements tels que $P(B) \neq 0$, $P(A|B)$ et $P(B|A)$ sont reliés par

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} \end{aligned}$$

Définition 3.3.1 Un modèle statistique Bayésien est constitué d'un modèle statistique paramétrique, $f(x|\theta)$, et d'une distribution a priori pour les paramètres, Θ .

En statistique fréquentiste (classique), on considère θ un paramètre fixe appartenant à un espace Θ et on l'estime sur la base des échantillons observés.

Tandis que dans l'approche Bayésienne, on considère θ un paramètre aléatoire et on associe à l'information tirée de l'échantillon, une information prévenant d'une autre source (avis d'analystes, d'experts,...). Cette information additionnelle sur θ est résumée par une loi de probabilité $\pi(\theta)$ dite "loi a priori" du paramètre θ . L'inférence est alors fondée sur la distribution de θ conditionnelle à x , $\pi(\theta|x)$, appelée distribution a posteriori et définie par

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}.$$

Pour plus de détails voir [12], [8].

1. Thomas Bayes (né en 1702 à Londres - mort le 7 avril 1761 à Tunbridge Wells, dans le Kent) est un mathématicien britannique et pasteur de l'église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

3.3.2 Loïs a priori

Le choix des lois a priori est une étape fondamentale dans l'analyse Bayésienne. Ce choix peut avoir différentes motivations. Les stratégies sont diverses. Elles peuvent se baser sur des expériences du passé ou sur une intuition, une idée que le praticien a du phénomène aléatoire qu'il est en train de suivre. Elles peuvent être également motivées par des aspects calculabilité. Enfin, ces stratégies peuvent également tenir compte du fait qu'on ne sait rien par le truchement des lois non informatives.

Loïs conjuguées

Une des difficultés de l'approche Bayésienne est le calcul de la loi a posteriori. Ce calcul est peut être facile lorsque la loi a priori et la loi a posteriori ont la même forme. Dans ce cas, on parle de la loi a priori conjuguée.

Définition 3.3.2 une famille F de lois sur Θ est dite conjuguée si, pour tout π appartenant à cette famille, la loi $\pi(\theta|x)$ appartient également à celle-ci.

Dans ce cas, le praticien induit directement la forme de son estimateur dès qu'il a choisi sa loi a priori.

Une loi conjuguée peut être déterminée en considérant la forme de la vraisemblance $f(x|\theta)$ et en prenant une loi a priori de la même forme que cette dernière vue comme une fonction du paramètre. Les lois a priori conjuguées obtenues par ce procédé sont dites naturelles.

TABLE 3.2 – Quelques exemples de lois conjuguées

| $f(x \theta)$ | $\pi(\theta)$ | $\pi(\theta x)$ |
|--------------------------------------|-------------------------------|--|
| $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ | $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$ | $\mathcal{N}(\frac{\sigma^2\mu + \tau^2x}{\sigma^2 + \tau^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2})$ |
| $\mathcal{P}(\theta)$ | $\mathcal{Ga}(\alpha, \beta)$ | $\mathcal{Ga}(\alpha + x, \beta + 1)$ |
| $\mathcal{Ga}(\nu, \theta)$ | $\mathcal{Ga}(\alpha, \beta)$ | $\mathcal{Ga}(\alpha + \nu, \beta + x)$ |
| $\mathcal{B}(n, \theta)$ | $\mathcal{Be}(\alpha, \beta)$ | $\mathcal{Be}(\alpha + x, \beta + n - x)$ |
| $\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{\theta})$ | $\mathcal{Ga}(\alpha, \beta)$ | $\mathcal{Ga}(\alpha + 1/2, \beta + \frac{(\mu-x)^2}{2})$ |

\mathcal{N} : La loi Normale, \mathcal{P} : Poisson, \mathcal{Ga} : Gamma, \mathcal{B} : Binomiale, \mathcal{Be} : Beta.

Lois impropres

La loi a priori peut être impropre i.e. $\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = +\infty$. Ce choix de type de loi n'a donc plus d'intérêt que calculatoire et s'interprète difficilement. Nous verrons par la suite que la construction de lois non informatives peut conduire à des lois a priori de ce type.

Lois non informatives

Une loi non informative est une loi qui porte une information sur le paramètre à estimer dont le poids dans l'inférence est réduit. Certains auteurs la définissent également comme une loi a priori qui ne contient aucune information sur θ ou encore comme une loi qui ne donne pas d'avantage de poids à telle ou telle valeur du paramètre.

Par exemple, supposons un ensemble fini de taille q , une loi a priori non informative pourra être une loi de la forme :

$$P(\theta_i) = 1/q.$$

On a équiprobabilité, les valeurs possibles de θ se voit attribuer le même poids.

La règle de Jeffreys

Une méthode proposée par Jeffreys (1961) permet de fabriquer des lois a priori non informatives. Cette méthode utilise l'information de Fischer : $I(\theta)$. L'argument pourrait être le suivant. $I(\theta)$ représente une mesure de la quantité d'information sur θ contenue dans l'observation. Plus $I(\theta)$ est grande, plus l'observation apporte de l'information. Il semble alors naturel de favoriser (au sens rendre plus probable suivant $\pi(\theta)$), les valeurs de θ pour lesquels $I(\theta)$ est grande ; ce qui minimise l'influence de la loi a priori au profit de l'observation.

Le choix de ce type de loi conduit ainsi souvent à des estimateurs classiques du type maximum de vraisemblance. La règle de Jeffreys consiste donc à considérer des lois a priori de la forme :

$$\pi(\theta) = c\sqrt{I(\theta)} \text{ où } I(\theta) = E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right].$$

dans le cas unidimensionnel.

Rappels sur l'information de Fisher

Soit un n -échantillon (X_1, \dots, X_n) de loi $f(x|\theta)$. On a le résultat suivant. Sous certaines conditions de régularité, l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ est tel que, pour n assez grand, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ suit une loi normale centrée, de variance $1/I(\theta)$.

Comment choisir la loi a priori ?

Le choix des lois a priori est une étape fondamentale en statistique Bayésienne et constitue une différence notable avec la statistique fréquentiste. Les différents choix possibles peuvent être motivés par différents points de vue :

- *Choix basé sur des expériences du passé ou sur une intuition du statisticien.*
- *Choix basé sur la faisabilité des calculs.*
- *Choix basé sur la volonté de n'apporter aucune information nouvelle pouvant biaiser l'estimation.*

3.3.3 La distribution de la loi a posteriori

La distribution de l'échantillonnage $f(x|\theta)$ et la distribution a priori de θ , $\pi(\theta)$ permettent de trouver les deux distributions suivantes qui sont intéressantes dans la construction de la distribution a posteriori notée $\pi(\theta|x)$:

- *La distribution conjointe de (θ, x) est*

$$\pi(\theta, x) = f(x|\theta)\pi(\theta).$$

- *La distribution marginale de x est*

$$\pi(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

L'utilisation de la formule de Bayes donne :

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(x, \theta)}{\pi(x)} = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (3.1)$$

La distribution marginale de x , $\pi(x)$ s'appelle aussi une constante de normalisation où l'on rend la probabilité a posteriori est égale à un.

La formule (3.1) montre que la distribution a posteriori $\pi(\theta|x)$ est proportionnelle à $f(x|\theta)\pi(\theta)$. Ce qui permet de la réécrire sous la forme suivante :

$$\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$$

où \propto est le symbole de la proportionnalité, on peut écrire également :

$$\text{Posteriori} \propto \text{Vraisemblance} * \text{Priori}.$$

3.3.4 Le risque a posteriori

La recherche d'estimateurs de Bayes peut se faire dans le cadre de la théorie de la décision. La démarche consiste alors à fixer une règle de préférence entre estimateurs et à chercher un estimateur optimal au sens de cette règle de préférence. Rappelons qu'en statistique classique la règle de préférence repose (le plus souvent) sur le risque quadratique, notée $R(\theta)$, est défini comme suit

$$R(\hat{\theta}_B) = \text{Var}(\hat{\theta}_B) + [\text{biais}(\hat{\theta}_B)]^2. \quad (3.2)$$

L'approche Bayésienne fait reposer la règle de préférence sur le risque de Bayes. La densité a priori $\pi(\theta)$ étant fixée, le risque de Bayes de $\hat{\theta}_B$ est notée $r(\theta_B)$. Il est défini comme suit :

$$r(\theta_B) = E[R(\hat{\theta}_B)] = \int_{\Theta} R(\hat{\theta}_B)\pi(\theta|x)d\theta. \quad (3.3)$$

On dira que $\hat{\theta}_1$ est meilleur que $\hat{\theta}_2$ au sens du risque de Bayes, si

$$r(\hat{\theta}_1) < r(\hat{\theta}_2).$$

3.3.5 Les propriétés de l'estimateur de Bayes

1. L'estimateur de Bayes est admissible.
2. L'estimateur de Bayes est biaisé.

Sous certaines hypothèses de régularité le plus souvent satisfaites en pratique, on a les deux propriétés :

3. L'estimateur de Bayes est convergent en probabilité (quand la taille de l'échantillon $n \rightarrow +\infty$).
4. La loi a posteriori peut être asymptotiquement (c.à.d. pour de grandes valeurs de n) approximée par une loi normale $\mathcal{N}(E[X|\theta], \text{Var}[\theta|X])$.

Cette dernière propriété est particulièrement utile pour construire des intervalles de confiance a posteriori.

3.3.6 Les fonctions de perte

En statistique, une fonction de perte est généralement utilisée pour l'estimation des paramètres, et l'événement en question est une fonction de la différence entre les valeurs

estimées et vraies pour une instance de données. Le concept, aussi vieux que Laplace, a été réintroduit dans les statistiques par Abraham Wald au milieu du XXe siècle. Dans le contexte de l'économie, par exemple, il s'agit généralement d'un coût ou d'un regret économique. Dans le classement, c'est la pénalité pour une classification incorrecte d'un exemple. En actuariat, il est utilisé dans un contexte d'assurance pour modéliser les prestations payées sur les primes, notamment depuis les travaux de Harald Cramér dans les années 1920. Dans un contrôle optimal, la perte est la pénalité pour ne pas atteindre une valeur souhaitée. Dans la gestion des risques financiers, la fonction est mappée à une perte monétaire. Et dans les statistiques fréquentistes et bayésiennes, une fonction de perte est généralement traitée comme une sorte de convention mathématique d'arrière-plan.

Mathématiquement, une fonction de perte $L(d, \theta)$ représente les pertes subies lorsque nous estimons le paramètre θ par d . Il y a toujours une différence observée entre l'estimateur et le paramètre. Soit d l'estimateur du paramètre θ . La perte est généralement mesurée comme une fonction de la différence $d - \theta$ ou du rapport $\frac{d}{\theta}$. Pour un seul paramètre, si nous fixons θ , nous pourrions obtenir différentes valeurs de d comme une estimation de θ . Si $d = \theta$ il n'y a pas de perte, si $d < \theta$ on l'appelle sous-estimation (underestimation en anglais), par contre si $d > \theta$ on l'appelle surestimation (overestimation en anglais). Nous pouvons maintenant définir une fonction de perte en fonction de d et θ et la désigner par $L(d, \theta)$. La fonction de perte, $L(d, \theta)$ est définie comme une fonction à valeur réelle satisfaisant :

- i) $L(d, \theta) \geq 0$ pour toutes les estimateurs possibles d et toutes θ sous la population choisie.*
- ii) $L(d, \theta) = 0$ pour $d = \theta$.*

La fonction de perte quadratique

Proposée par Legendre (1805) et Gauss (1810), cette perte est sans aucun doute le critère d'évaluation le plus commun.

$$L(d, \theta) = (d - \theta)^2$$

Dans son article de 1810, Gauss a déjà reconnu le caractère aléatoire de la perte quadratique et le défendait pour des raisons de simplicité. De telles critiques restent valides aujourd'hui. Mais cette perte n'en demeure pas moins utilisée car elle donne en général des solutions Bayésiennes acceptables, i.e. celles fournies par une inférence non-décisionnelle fondée sur la densité a posteriori. En effet, les estimateurs de Bayes associés au coût quadratique sont les moyennes a posteriori.

Proposition 3.3.1 L'estimateur de Bayes δ^π associé à la distribution a priori π et avec la perte quadratique, est donné par l'espérance a posteriori

$$\delta^\pi = E^\pi[\theta|x] = \frac{\int_{\theta} \theta f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_{\theta} f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta} = \delta^\pi(x).$$

Démonstration. $E^\pi[(\theta - \delta)^2|x] = E^\pi[\theta^2|x] - 2\delta E^\pi[\theta|x] + \delta^2$. La perte actuelle a posteriori atteint un minimum à $\delta^\pi(x) = E^\pi[\theta|x]$.

□

Une variante de cette fonction de perte est une fonction de perte quadratique pondérée (fonction de perte quadratique généralisée) de la forme

$$L(d, \theta) = \omega(\theta)(d - \theta)^2,$$

où ω est une fonction positive.

L'estimateur de Bayes δ^π associé à π et au coût quadratique pondéré ($L(d, \theta) = \omega(\theta)(d - \theta)^2$) est

$$\delta^\pi = \frac{E^\pi[\omega(\theta)\theta|x]}{E^\pi[\omega(\theta)|x]}.$$

La fonction de perte 0-1

Ce coût est surtout utilisé dans l'approche classique des tests d'hypothèse, proposée par Neyman et Pearson. Plus généralement, c'est un exemple typique d'un coût non quantitatif. En effet, pour ce coût, la pénalité associée à un estimateur δ est 0 si la réponse est correcte et 1 sinon.

Exemple 3.3.1 Soit le test de $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \notin \Theta_0$. Alors $\mathcal{D} = 0, 1$, où 1 représente l'acceptation de H_0 et 0 son rejet. (En d'autres termes, la fonction de θ estimée est $\mathbb{I}_{\Theta_0}(\theta)$.) Pour la fonction de coût 0-1, qui vaut

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 1 - d & \text{si } \theta \in \Theta_0 \\ d & \text{sinon} \end{cases}$$

Le risque associé est

$$R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta(x))] \\ R(\theta, \delta) = \begin{cases} P_\theta(\delta(x) = 0) & \text{si } \theta \in \Theta_0, \\ P_\theta(\delta(x) = 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de perte absolue

Une solution alternative au coût quadratique en dimension un est d'utiliser le coût absolu,

$$L(\theta, d) = |\theta - d|$$

déjà considéré par Laplace (1773) ou, plus généralement, une fonction de coût linéaire par morceaux

$$L_{k_1, k_2}(\theta, d) = \begin{cases} k_2(\theta - d) & \text{si } \theta > d, \\ k_1(d - \theta) & \text{sinon.} \end{cases}$$

De telles fonctions croissent plus lentement que le coût quadratique. Par conséquent, tout en restant convexes, elles ne surpénalisent pas des erreurs grandes mais peu vraisemblables.

Proposition 3.3.2 L'estimateur de Bayes associé à la loi a priori π et à la fonction de perte linéaire par morceaux ($L_{k_1, k_2}(\theta, d)$) est le fractile ($k_2/(k_1 + k_2)$) de $\pi(\theta|x)$.

Démonstration. L'équation classique suivante,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\pi[L_{k_1, k_2}(\theta, d)|x] &= k_1 \int_{-\infty}^d (d - \theta)\pi(\theta|x)d\theta + k_2 \int_d^{+\infty} (\theta - d)\pi(\theta|x)d\theta \\ &= k_1 \int_{-\infty}^d P^\pi(\theta < y|x)dy + k_2 \int_d^{+\infty} P^\pi(\theta > y|x)dy, \end{aligned}$$

est obtenue par une intégration par parties. Dérivant en d , on obtient

$$k_1 P^\pi(\theta < y|x) - k_2 P^\pi(\theta > y|x) = 0$$

soit encore

$$P^\pi(\theta < y|x) = \frac{k_2}{k_1 + k_2}.$$

□

En particulier, si $k_1 = k_2$, soit, dans le cas du coût absolu, l'estimateur de Bayes est la médiane a posteriori.

La fonction de perte de DeGroot

DeGroot (1970) [23] a introduit différents types de fonctions de perte et a obtenu les estimateurs de Bayes sous ces fonctions de perte. Voici un exemple de fonction de perte asymétrique définie pour les valeurs positives du paramètre. Si d est un estimateur de θ alors la fonction de perte $L(d, \theta)$ sera,

$$L(\theta, d) = \left(\frac{\theta - d}{d}\right)^2.$$

L'estimateur de Bayes sous cette fonction de perte est

$$\hat{\theta}_B = \frac{\mathbb{E}^\pi(\theta^2|x)}{\mathbb{E}^\pi(\theta|x)}.$$

La fonction de perte Linex

Une fonction de perte asymétrique très pratique est la fonction de perte Linex (Linear Exponential en anglais). Elle a été introduite par Varian (1975) [16]. Cette fonction croît presque exponentiellement d'un côté de zéro et est approximativement linéaire de l'autre côté. Sous l'hypothèse que la perte minimale est obtenue pour $\tilde{u} = u$, la fonction de perte Linex pour u soit α , soit β s'exprime par

$$L(\Delta) \propto e^{(a\Delta)} - a\Delta - 1, \quad a \neq 0, \quad (3.4)$$

où $\Delta = (\tilde{u} - u)$ et \tilde{u} est un estimateur de u . Le signe et la norme de a représentent respectivement la direction et le degré de symétrie ($a > 0$: la surestimation est plus grave que la sous-estimation et vice-versa). Pour a proche de zéro, la perte Linex est approximativement la fonction de perte quadratique; (3.4) devient

$$E_u(L(\tilde{u} - u)) \propto e^{a\tilde{u}} E_u(e^{-a\tilde{u}}) - a(\tilde{u} - E_u(u)) - 1, \quad (3.5)$$

où $E_u(\cdot)$ représente l'espérance a posteriori relative à la densité a posteriori de u . L'estimateur de Bayes \tilde{u}_L de \tilde{u} sous la fonction de perte Linex est la valeur de \tilde{u} qui minimise (3.5). Pour trouver l'estimateur, nous dérivons l'équation (3.5) par rapport à \tilde{u} et nous obtenons :

$$\frac{d}{d\tilde{u}}(E_u(L(\tilde{u} - u))) = ae^{-a\tilde{u}}E_u(e^{-au}) - a. \quad (3.6)$$

En égalant cette expression à 0, nous obtenons

$$ae^{-a\tilde{u}}E_u(e^{-au}) = a, \quad (3.7)$$

d'où

$$e^{a\tilde{u}} = E_u(e^{-au}). \quad (3.8)$$

En appliquant le logarithme, nous trouvons

$$-a\tilde{u} = \log E_u(e^{-au}). \quad (3.9)$$

Alors, l'estimateur de Bayes \tilde{u}_L de \tilde{u} sous la fonction de perte Linex est

$$\tilde{u}_L = -\frac{1}{a} \log(E_u(e^{-au}))E_u(e^{au}), \quad (3.10)$$

étant donné que $E_u(e^{-au})$ existe et est finie.

La fonction de perte entropie

Calabria et Pulcini (1994) [29] ont proposé une fonction de perte qui découle de la fonction de perte Linex appelée la fonction de perte entropie est définie par

$$L_E(\theta, d) \propto \left(\frac{d}{\theta}\right)^p - p \ln\left(\frac{d}{\theta}\right) - 1,$$

qui a minimum lorsque $d = \theta$. L'estimateur de Bayes de paramètre θ sous cette fonction de perte est

$$\delta(x) = (E_\theta(\theta^{-p}))^{-1/p}.$$

3.4 Les méthodes de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo permettent d'estimer des quantités en utilisant la simulation de variables aléatoires. Les problèmes pouvant être rencontrés comprennent le

calcul d'intégrales, les problèmes d'optimisation et la résolution de systèmes linéaires. La simplicité, la flexibilité et l'efficacité pour les problèmes en grande dimension de la méthode en font un outil intéressant, pouvant servir d'alternative ou de référence pour d'autres méthodes numériques.

Les exemples d'application sont très variés, citons par exemple :

- La simulation de files d'attente et de réseaux.
- La simulation de portefeuilles d'actifs en finance.
- La comparaison d'estimateurs en statistique.
- La recherche d'état stationnaire en physique et en économie.

Supposons que l'on souhaite connaître la valeur d'une certaine quantité δ . La première étape de la méthode consiste à écrire le problème sous la forme d'une espérance. Soient une variable aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ de loi ν sur \mathbb{R}^d et une fonction $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Le problème traité par les méthodes de Monte Carlo est l'estimation de

$$\delta = \mathbb{E}_\nu[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\nu dx. \quad (3.11)$$

La solution standard à ce problème est de simuler une suite $(X_n)_{n \geq 1} = (X_{1,n}, \dots, X_{d,n})_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.) suivant la loi ν , puis d'estimer l'espérance $\mathbb{E}_\nu[h(X)]$ par la moyenne empirique, i.e.,

$$\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k). \quad (3.12)$$

3.4.1 Les méthodes MCMC

Les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov, ou méthodes MCMC (pour Markov chain Monte Carlo en anglais) sont une classe de méthodes d'échantillonnage à partir de distributions de probabilité. Ces méthodes de Monte-Carlo se basent sur le parcours de chaînes de Markov qui ont pour lois stationnaires les distributions à échantillonner et ayant la propriété de converger vers la distribution que l'on cherche à simuler. En effet, l'utilisation des chaînes de Markov a comme avantage de faciliter l'échantillonnage de distribution dont la forme explicite est difficile à obtenir ou bien de haute dimension. Ces méthodes (MCMC) sont notamment appliquées dans le cadre de l'inférence Bayésienne.

Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est une séquence de variables aléatoires dépendantes X_1, X_2, \dots ayant la propriété que la distribution conditionnelle du futur étant donné le passé ne dépend que du présent : la distribution conditionnelle de X_{n+1} sachant X_1, \dots, X_n ne dépend que de X_n . On dit que la chaîne de Markov a des probabilités de transition stationnaires si la distribution conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n est la même pour tout n . Cette propriété est si importante qu'elle est souvent assumée sans commentaire. Chaque chaîne de Markov utilisée dans MCMC a des probabilités de transition stationnaires, mais cela va sans dire. On dit que la chaîne de Markov a une distribution invariante, ou stationnaire ou distribution d'équilibre si chaque fois que X_n a cette distribution d'équilibre et que la distribution conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n est celle des probabilités de transition de la chaîne de Markov, alors X_{n+1} a aussi cette distribution d'équilibre (comme X_n). Ainsi, si X_1 a la distribution d'équilibre, alors X_n fait de même pour tout n .

3.4.2 L'algorithme de Metropolis-Hastings

L'algorithme de Metropolis-Hastings est un algorithme MCMC. Cet algorithme développé par Hastings(1970) [35] est une généralisation de l'algorithme de Metropolis (Metropolis et al, 1953 [28]). L'algorithme de Metropolis- Hastings peut être considéré comme une extension des algorithmes de simulation standard comme les méthodes d'acceptation-rejet qui sont toutes basées sur l'utilisation d'une loi de proposition. La loi de proposition de l'algorithme de Metropolis-Hastings a la particularité d'être markovienne (Marin et Robert, 2007 [17]). On la note $q(x, y)$. L'algorithme de Metropolis-Hastings permettant de simuler des réalisations de la loi cible π .

L'algorithme de Metropolis-Hastings est étudié et présenté dans de nombreux ouvrages consacrés aux méthodes de simulation MCMC (voir (Robert, 1992) [7],(Robert,2006) [8]). Le schéma de simulation est décrit ci-dessous :

Algorithme de Metropolis-Hastings

1. initialiser $\theta_0 \sim \pi_0(x)$, $k = 0$

2. initialiser k :

— proposer un candidat θ^* pour θ_{k+1} : simuler

$$\theta^* \sim q(\theta^*|\theta_k)$$

— accepter le candidat θ^* avec la probabilité

$$\alpha(\theta^*, \theta_k) = \min\left\{1, \frac{\pi(\theta^*|x)}{\pi(\theta_k|x)}\right\}$$

simuler $u \sim U_{[0,1]}$

— si $u \leq \alpha(\theta^*, \theta_k)$, alors prendre $\theta_{k+1} = \theta^*$, sinon poser $\theta_{k+1} = \theta_k$

3. $k \leftarrow k + 1$ et aller en (2).

Pour mettre en œuvre l'algorithme de Metropolis-Hastings, nous n'avons besoin de connaître la loi cible π et la loi de proposition q qu'à une constante de proportionnalité près, puisque les deux constantes se compensent dans le calcul du ratio de Metropolis-Hastings (défini dans l'algorithme). La convergence de l'algorithme de Metropolis-Hastings est théoriquement garantie pour un large choix de lois de proposition q , à condition cependant que le support de la fonction q contienne le support de la loi cible π . En pratique, le choix de la loi de proposition q influence fortement la vitesse de convergence. En effet, si la loi de proposition q ne permet que de petits déplacements dans l'espace des paramètres, le taux d'acceptation est élevé et la chaîne reste dans le voisinage de la valeur initiale. Au contraire, si la loi de proposition q autorise de grands sauts dans l'espace des paramètres, le taux d'acceptation est faible et la chaîne bouge difficilement. La loi de proposition q choisie doit permettre de bien explorer le support de la loi cible π . Gelman et al. (1996) [2] ont montré que la vitesse de convergence de l'algorithme de Metropolis-Hastings est optimale si la loi de proposition q choisie conduit à un taux d'acceptation compris entre 25% et 40%.

3.4.3 L'algorithme de Gibbs

L'algorithme de Gibbs est un cas particulier de l'algorithme de Metropolis-Hastings (Gelman et al., 2004 [9]). L'algorithme de Gibbs est plus simple à mettre en œuvre et

offre, en général, une meilleure vitesse de convergence que l'algorithme de Metropolis-Hastings, mais il ne s'applique que sous certaines conditions. Si la loi cible est la distribution $\pi(x_1, \dots, x_p)$, l'algorithme de Gibbs nécessite de connaître toutes les lois conditionnelles complètes π_1, \dots, π_p où π_j désigne la distribution de x_j conditionnellement à $X_{-j} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p)$. L'échantillonneur de Gibbs modifie tour à tour les composantes du vecteur de paramètres X en simulant de nouvelles valeurs suivant chacune des lois conditionnelles complètes (Marin et Robert, 2007 [17]). La description de l'algorithme de Gibbs est donnée par l'algorithme suivant

Algorithme de Gibbs

Entrées : $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_p^{(0)})$ (valeur initiale de la chaîne de Markov), T (nombre d'itérations)

Sorties : $x^{(1)}, \dots, x^{(T)}$

pour t allant de 1 à T faire

Générer $x_1^{(t)} \sim \pi_1(x_1 | x_2^{t-1}, \dots, x_p^{t-1})$.

Générer $x_2^{(t)} \sim \pi_2(x_2 | x_1^t, x_3^{t-1}, \dots, x_p^{t-1})$.

⋮

Générer $x_p^{(t)} \sim \pi_p(x_p | x_1^t, \dots, x_p^t)$

fin pour retourner $X^{(1)}, \dots, X^{(T)}$.

Lorsque le modèle est complexe, il arrive fréquemment que toutes les lois conditionnelles complètes π_j , $j = 1, \dots, p$ ne puissent pas être simulées de manière directe. Dans ce cas, nous faisons appel à un algorithme MCMC hybride appelé algorithme de « Metropolis-Hastings within Gibbs ». La structure de l'algorithme de Gibbs tel qu'il est déjà présenté est conservée, mais les lois conditionnelles complètes ne relevant pas des propriétés de conjugaison sont simulées grâce à une étape de l'algorithme de Metropolis-Hastings. Le remplacement d'une simulation de π_j par une étape de Metropolis-Hastings ne modifie pas la loi stationnaire de la chaîne, et est donc valable d'un point de vue théorique (Robert, 2006 [8]). La convergence de ce type d'algorithme peut être lente si les paramètres sont fortement corrélés (Gelman et al., 2004 [9]).

Chapitre 4

Le modèle de Rayleigh Pareto

4.1 Introduction

Dans un contexte de durées de survie, les distributions de Rayleigh et de Pareto jouent un rôle très important dans la modélisation de certains phénomènes aléatoires. Chacune de ces distributions a une spécificité qui la caractérise, cependant dans l'ajustement de certaines données généralement à queues lourdes, il est judicieux d'utiliser une composition de lois. Ce procédé a été utilisé par différents auteurs, on peut citer parmi les plus récents Boumaraf et al (2020) [5] qui ont fait l'étude des estimateurs par maximum de vraisemblance d'une distribution Beta-Pareto; Maurya et al (2019) [30] qui ont étudiés l'estimation dans un modèle Exponentiated Rayleigh; Kim et al (2011) qui se sont intéressés à l'estimation Bayésienne des paramètres d'une distribution Exponentiated-Weibull ou alors, Valiollahi et al (2018) [31] qui se sont intéressés au modèle Power-Lindley. Toutes ces études ont été réalisées dans un contexte de données progressivement censurées à droite. Les données progressivement censurées à droite ont été définies par Balakrishnan et al (2000), (2007) [26] [25]. Ils y ont donné l'algorithme permettant de générer des observations progressivement censurées et Balakrishnan et al (2014) [24] où ils ont appliqué ce procédé dans un contexte industriel pour des distributions classique à savoir, Weibull, Lognormal... . Plusieurs auteurs ont utilisés les données progressivement censurées à droite dans le cas des distributions classique; on peut citer Chadli et al (2017) [1] pour une distribution de Rayleigh ou Yadav et al (2019) [4] pour la distribution de Hjorth.

Dans cette partie, on s'est intéressé au modèle de Rayleigh Pareto introduit par Al

Kadim et al (2018) [19], ils y ont donné les principales caractéristiques statistiques de cette distribution et y ont abordé l'estimation des paramètres de la loi par maximum de vraisemblance. Le but de ce chapitre est double; d'une part on s'est intéressé à l'étude des estimateurs des paramètres, de la fonction de fiabilité et du taux de hasard à l'aide d'une approche Bayésienne sous différentes fonctions de pertes symétriques (perte quadratique) et asymétriques (Linex et Entropie) en prenant des lois a priori informatives sur les paramètres de type Gamma pour les paramètres de la loi de Pareto et une a priori non informative pour le paramètre de la loi de Rayleigh; d'autre part, on a fait une analyse de données réelles pour montrer la pertinence du modèle de R-P comme alternative à un modèle classique. Des simulations ont été menées à l'aide de l'algorithme de Balakrishnan pour générer des données progressivement censurées à droite d'une part et d'autre part, on a utilisé les méthodes MCMC et l'algorithme de Metropolis-Hastings pour le calcul des estimateurs.

4.2 Le modèle

La distribution de RP a été introduite par Al-Kadim,K et Bnadhher Dhea'a Med (2018) [19] par la même méthode utilisée par Al-Kadim ,K. et Boshi ,M.,(2013) [20]. La loi de RP est de la forme suivante

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{1-F^*(x)}} g(t)dt, \quad (4.1)$$

Où $F^(x)$ est la fonction de répartition de la distribution de Pareto , $F^*(x) = 1 - (\frac{\gamma}{x})^\theta$ et $g(t)$ est la fonction de densité de la loi de Rayleigh, $g(t) = \frac{t}{\beta^2} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{\beta^2}))$.*

D'où,

$$F_{R.P}(x; \theta, \beta, \gamma) = 1 - \exp(-\frac{1}{2\beta^2}(\frac{x}{\gamma})^{2\theta}). \quad (4.2)$$

Avec la proposition que $2\theta = \alpha$, la fonction de répartition de la distribution de Rayleigh Pareto est donnée par

$$F_{R.P}(x; \alpha, \beta, \gamma) = 1 - \exp(-\frac{1}{2\beta^2}(\frac{x}{\gamma})^\alpha); \quad \alpha, \beta, \gamma > 0. \quad (4.3)$$

La densité de RP est donnée par

$$f_{R.P}(x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha}{2\beta^2\gamma}(\frac{x}{\gamma})^{\alpha-1} \exp\{-\frac{1}{2\beta^2}(\frac{x}{\gamma})^\alpha\}. \quad (4.4)$$

On voit facilement que

Si $\alpha = 1$, la distribution de RP correspond à celle d'une loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = \frac{1}{2\beta^2\gamma}$.

Si $\beta = \sqrt{1/2}$, la distribution RP se réduit à la distribution de Weibull avec les paramètres α et γ ($W(x; \alpha, \gamma)$).

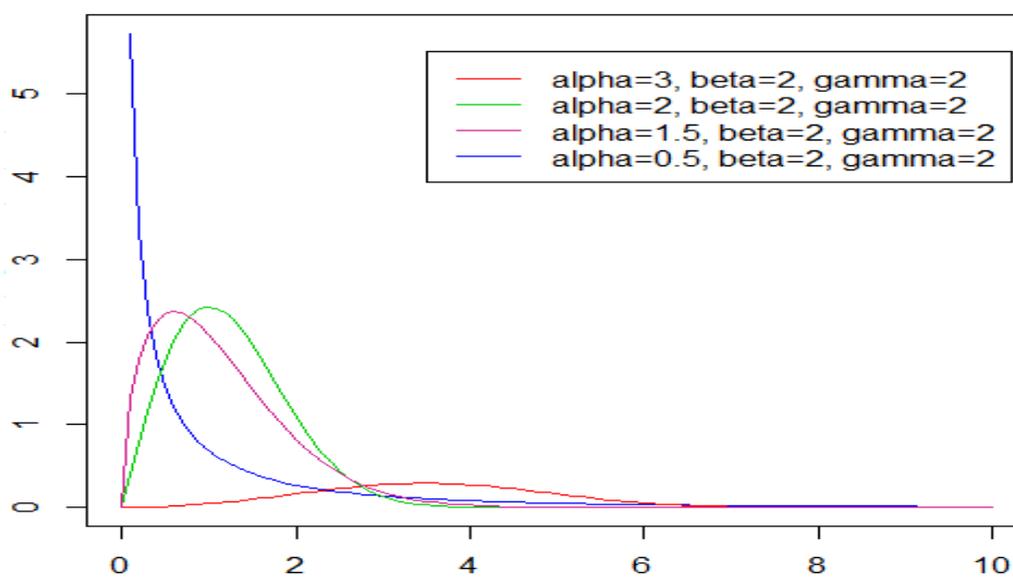


FIGURE 4.1 – La fonction de densité de la distribution de RP pour certaines valeurs du paramètre α et $\beta = \gamma = 2$

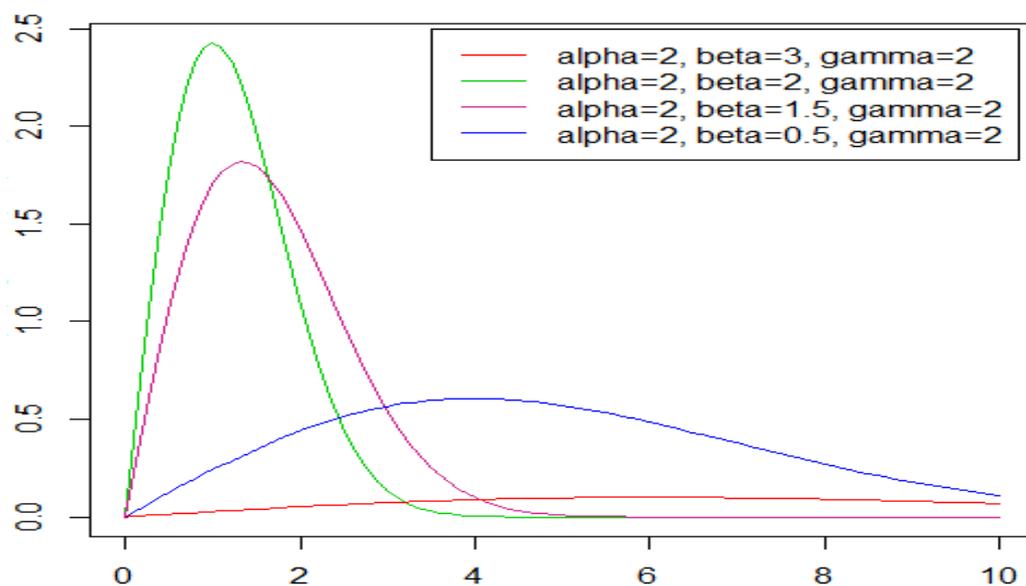


FIGURE 4.2 – La fonction de densité de la distribution de RP pour certaines valeurs du paramètre β et $\alpha = \gamma = 2$

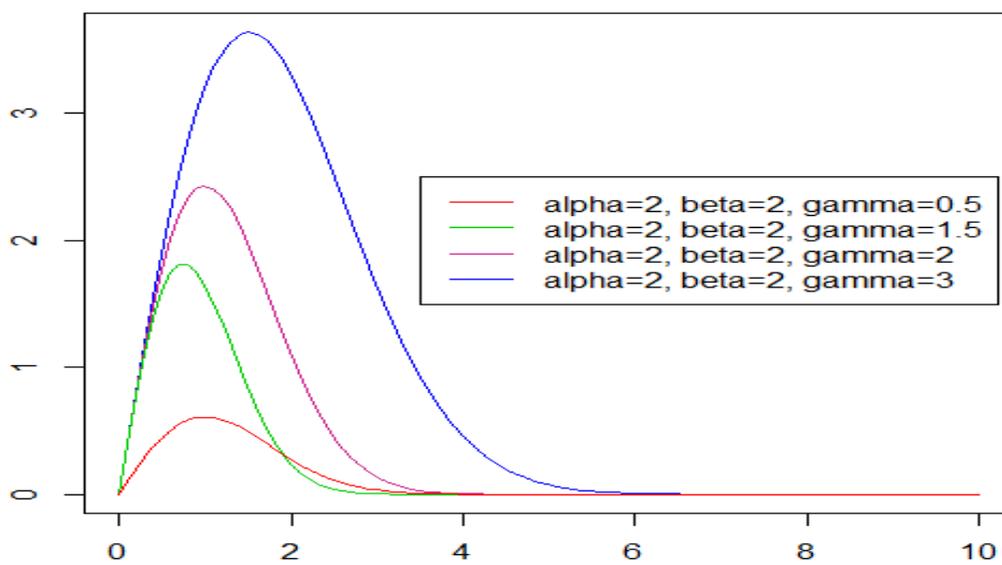


FIGURE 4.3 – La fonction de densité de la distribution de RP pour certaines valeurs du paramètre γ et $\alpha = \beta = 2$

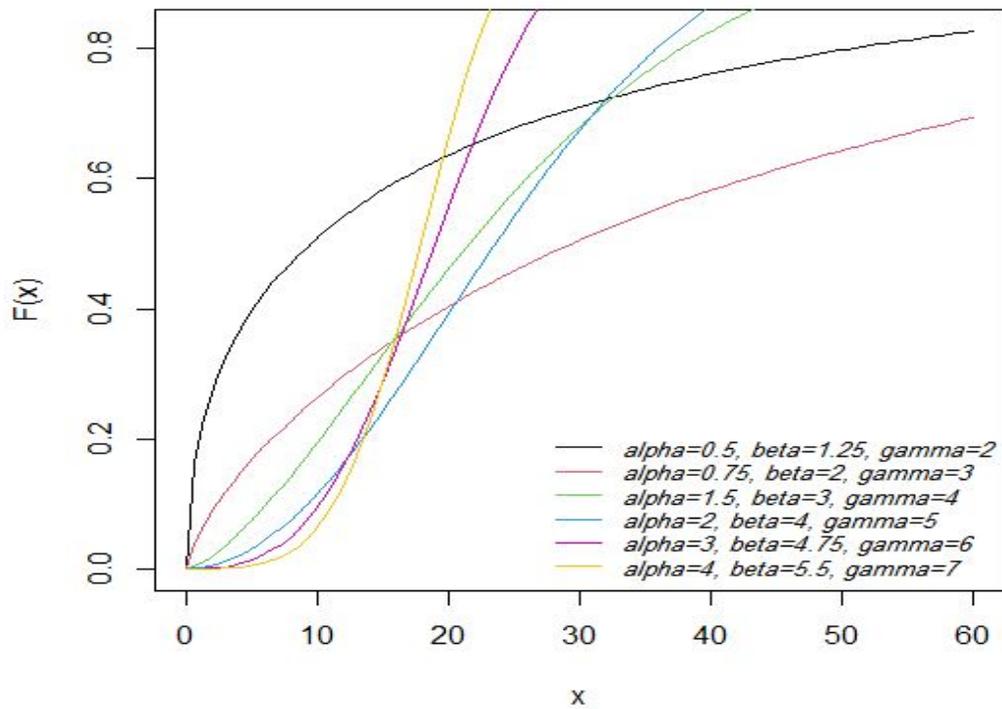


FIGURE 4.4 – La fonction de répartition de la distribution de RP pour certaines valeurs des paramètres.

La fonction de survie est définie comme suit

$$R(t) = \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^\alpha\right), \quad t > 0. \quad (4.5)$$

La fonction de hasard est donnée par

$$h(t) = \frac{\alpha}{2\beta^2\gamma} \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha-1}, \quad t > 0. \quad (4.6)$$

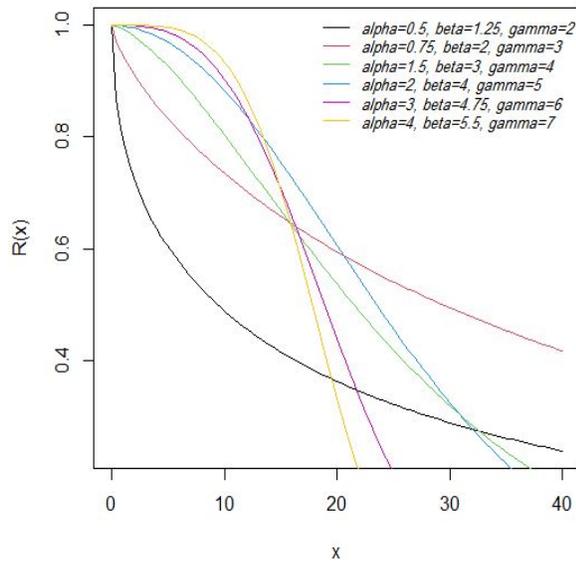


FIGURE 4.5 – La fonction de survie de la distribution de RP pour différentes valeurs de paramètres.

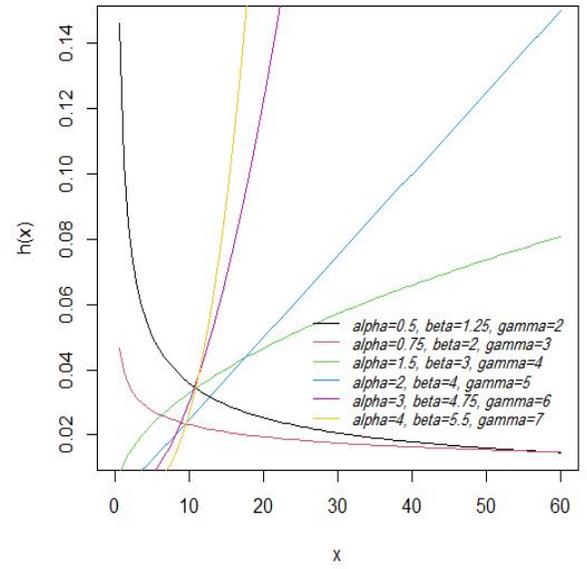


FIGURE 4.6 – La fonction de hasard de la distribution de RP pour différentes valeurs de paramètres.

La statistique d'ordre de la distribution (4.4)

soit Y_1, \dots, Y_N un N échantillon de la distribution de RP, la distribution de la $k^{\text{ième}}$ statistique d'ordre est comme suit :

$$\begin{aligned}
 f_{(k)}(y \mid \alpha, \beta, \gamma) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f_{RP}(y; \alpha, \beta, \gamma) (F_{RP}(y; \alpha, \beta, \gamma))^{k-1} \\
 &\quad [1 - F_{RP}(y; \alpha, \beta, \gamma)]^{n-k}, \quad y \geq 0 \\
 &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{\alpha}{2\beta^2\gamma} \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \\
 &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{y}{\gamma}\right)^\alpha (n-k+1+j)\right\}. \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Le moment d'ordre r de la distribution de Rayleigh Pareto est donné par la formule suivante

$$\mathbb{E}[X^r] = (\gamma(2\beta^2)^{(1/\alpha)})^r \Gamma\left(\frac{r}{\alpha} + 1\right), \quad r = 1, 2, 3, \dots \tag{4.8}$$

La moyenne, le mode et la médiane de la distribution de RP sont (respectivement)

$$\mathbb{E}[X] = \gamma(2\beta^2)^{(1/\alpha)} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right), \tag{4.9}$$

$$x_{mode} = \gamma \left(\frac{(\alpha-1)(2\beta^2)}{\alpha}\right)^{1/\alpha}, \tag{4.10}$$

et

$$x_{\text{médiane}} = \gamma(2\beta^2 \ln(2))^{1/\alpha}. \quad (4.11)$$

4.3 Inférences statistiques en présence de données complètes

4.3.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Dans le cas de données complètes la fonction de vraisemblance de la distribution de Rayleigh Pareto est comme suit

$$L(x_i; \alpha, \beta, \gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha}{2\beta^2\gamma} \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha\right) \quad (4.12)$$

$$= \frac{\alpha^n}{(2\beta^2)^n \gamma^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{\gamma^\alpha}\right). \quad (4.13)$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance est donné par

$$\begin{aligned} l(x_i|\alpha, \beta, \gamma) &= \ln L(x_i|\alpha, \beta, \gamma) = n \ln \alpha - n \ln 2\beta^2 - n \ln \gamma \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - (\alpha - 1)n \ln \gamma - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\alpha}{\gamma^\alpha}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance des trois paramètres α, β et γ sont la solution de l'équation

$$\nabla_{\Theta} l(x_i|\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Les équations de vraisemblance sont comme suit :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \gamma - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha \ln\left(\frac{x_i}{\gamma}\right), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{2n}{\beta} + \frac{1}{\beta^3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha \quad (4.16)$$

et

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = -\frac{n}{\gamma} - (\alpha - 1) \frac{n}{\gamma} + \frac{\alpha}{2\beta^2} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}{\gamma^{(\alpha+1)}}. \quad (4.17)$$

Ce système n'étant pas linéaire ; pour obtenir les valeurs approximées aux estimateurs du maximum de vraisemblance $\hat{\alpha}_{MLE}$, $\hat{\beta}_{MLE}$ et $\hat{\gamma}_{MLE}$ des paramètres α , β et γ respectivement on utilise des méthodes itératives . Dans le cadre de ce travail, nous utiliserons le package *BB solve* (Varadhan and Gilbert, 2009 [32]) dans le logiciel R.

4.3.2 Estimation par la méthode Bayésienne

Dans cette partie de travail, en utilise la méthode Bayésienne pour estimer les paramètres de la distribution de RP sous la fonction de perte quadratique .

La distribution a priori

On utilise la loi a priori informative de gamma ($G(a_1, b_1)$, $G(a_2, b_2)$ et $G(a_3, b_3)$) pour les trois paramètres α , β et γ .

$$\pi(\alpha) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \alpha^{a_1-1} \exp(-b_1 \alpha),$$

$$\pi(\beta) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \beta^{a_2-1} \exp(-b_2 \beta)$$

et

$$\pi(\gamma) = \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \gamma^{a_3-1} \exp(-b_3 \gamma).$$

Donc, la loi a priori de α , β et γ est

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{b_1^{a_1} b_2^{a_2} b_3^{a_3}}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \Gamma(a_3)} \alpha^{a_1-1} \beta^{a_2-1} \gamma^{a_3-1} \exp\{-b_1 \alpha - b_2 \beta - b_3 \gamma\}. \quad (4.18)$$

La distribution a posteriori

La densité a posteriori est écrite à l'aide de la formule suivante

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma | x) = \frac{L(x; \alpha, \beta, \gamma) \cdot \pi(\alpha, \beta, \gamma)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty L(x; \alpha, \beta, \gamma) \cdot \pi(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma}. \quad (4.19)$$

Donc, on obtient

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma | x) \propto A^{-1} \frac{\alpha^{n+a_1-1}}{\beta^{2n-a_2+1} \gamma^{n-a_3+1}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha - b_1 \alpha - b_2 \beta - b_3 \gamma\right), \quad (4.20)$$

où

$$A = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha^{n+a_1-1}}{\beta^{2n-a_2+1}\gamma^{n-a_3+1}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha - b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma\right) d\alpha d\beta d\gamma. \quad (4.21)$$

Les estimateurs Bayésiennes des paramètres α , β et γ sous la fonction de perte quadratique notés $\hat{\alpha}_{BQ}$, $\hat{\beta}_{BQ}$ et $\hat{\gamma}_{BQ}$ sont données respectivement comme suit

$$\hat{\alpha}_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{n+a_1}}{\beta^{2n-a_2+1}\gamma^{n-a_3+1}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha - b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma\right) d\alpha d\beta d\gamma,$$

$$\hat{\beta}_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{n+a_1-1}}{\beta^{2n-a_2}\gamma^{n-a_3+1}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha - b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma\right) d\alpha d\beta d\gamma$$

et

$$\hat{\gamma}_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{n+a_1-1}}{\beta^{2n-a_2+1}\gamma^{n-a_3}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha - b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma\right) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Leurs risques a posteriori correspondants sont

$$PR(\hat{\alpha}_{BQ}) = E_\pi(\alpha^2) - 2\hat{\alpha}_{BQ}E_\pi(\alpha) + \hat{\alpha}_{BQ}^2,$$

$$PR(\hat{\beta}_{BQ}) = E_\pi(\beta^2) - 2\hat{\beta}_{BQ}E_\pi(\beta) + \hat{\beta}_{BQ}^2,$$

$$PR(\hat{\gamma}_{BQ}) = E_\pi(\gamma^2) - 2\hat{\gamma}_{BQ}E_\pi(\gamma) + \hat{\gamma}_{BQ}^2.$$

On peut pas calculer l'expression analytique de ces estimateurs, on utilise les méthodes MCMC comme l'algorithme de Metropolis-Hastings.

4.4 La prime Bayésienne sous la fonction de perte quadratique

La théorie de la crédibilité est l'une des techniques quantitatives importantes en sciences actuarielles qui permet aux compagnies d'assurances d'effectuer une évaluation de l'expérience

(ajuster les primes futures en fonction de l'expérience passée). Nous traitons l'estimateur de la prime Bayésienne développé par Bailey (1950)[3], en considérant la distribution de Rayleigh Pareto comme une distribution de réclamation qui est un outil populaire dans la théorie de la crédibilité. (Voir Métiri. F[13], Sadoun. A [34]).

Soit X_1, X_2, \dots, X_N un N échantillons *i.i.d* de la distribution de RP avec les paramètres inconnus α, β et γ . Pour obtenir l'estimateur de la prime Bayésienne sous la fonction de perte quadratique, on écrit

$$L(P_{BQ}, \mu(\Theta)) = (P_{BQ} - \mu(\Theta))^2. \quad (4.22)$$

Θ c'est l'ensemble des paramètres de la distribution RP.

La prime Bayésienne P_{BQ} est l'estimateur de la prime individuelle $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$.

On obtient alors

$$P_{BQ} = E[\mu(\Theta)|X] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mu(\alpha, \beta, \gamma) f(\alpha, \beta, \gamma|x) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (4.23)$$

où

$$\mu(\alpha, \beta, \gamma) = E[X|\alpha, \beta, \gamma] = \gamma(2\beta^2)^{(1/\alpha)} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right). \quad (4.24)$$

$\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ est la prime individuelle de la distribution RP et $f(\alpha, \beta, \gamma|x)$ est la distribution a posteriori (4.20).

Donc, sous la fonction de perte quadratique, P_{BQ} s'écrit comme suit

$$P_{BQ} = A^{-1} \iiint \mu(\alpha, \beta, \gamma) \frac{\alpha^{n+a_1-1}}{\beta^{2n-a_2+1} \gamma^{n-a_3+1}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha - b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma\right). \quad (4.25)$$

On remarque qu'on a pas une solution analytique pour cette fonction, c'est pour ça on utilise la méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov "Metropolis-hastings".

4.4.1 Simulation

Dans cette partie, une étude de simulation de Monte Carlo est effectuée pour obtenir les estimateurs des paramètres de la distribution de RP et de la prime Bayésienne sous la fonction de perte quadratique et avec des données complètes.

Nous avons générer 10000 échantillons de taille n (20,40,60,80,100,150) de la loi de RP

avec différentes valeurs des paramètres (Table 4.1 : $\alpha = 2.5, \beta = 0.4, \gamma = 1.2, \mu(\alpha, \beta, \gamma) = 0.6749848$ et Table 4.2 : $\alpha = 5, \beta = 1.25, \gamma = 2.5, \mu(\alpha, \beta, \gamma) = 2.88292$) et nous avons choisi les valeurs d'hyperparamètres comme suit : $a_1 = 4, b_1 = 2, a_2 = 0.5, b_2 = 2, a_3 = 3, b_3 = 2$.
Pour chaque estimateur, on a calculé l'erreur quadratique intégrée (IMSE) :

$$IMSE = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} (\hat{\theta}_i - \theta)^2.$$

TABLE 4.1 – L'estimation des paramètres de RP et de la prime Bayésienne avec les erreurs IMSE, lorsque : $\mu(\alpha, \beta, \gamma) = 0.6749848, \alpha = 2.5, \beta = 0.4, \gamma = 1.2$.

| n | $\hat{\alpha}_{BQ}$ | $\hat{\beta}_{BQ}$ | $\hat{\gamma}_{BQ}$ | $\hat{\mu}(\alpha, \beta, \gamma)$ |
|-----|----------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| 20 | 2.529639 (0.0009179484) | 0.4632385 (0.002107178) | 1.250439 (0.001154738) | 0.8081547 (1.773422e - 06) |
| 40 | 2.520234 (0.0006600813) | 0.4244336 (0.001457842) | 1.222834 (0.0006845722) | 0.7261308 (2.615909e - 07) |
| 60 | 2.503549 (0.0006387582) | 0.4119491 (0.001261631) | 1.208749 (0.0005387801) | 0.6998786 (6.196976e - 08) |
| 80 | 2.504397 (0.0006230419) | 0.4463971 (0.001156126) | 1.230397 (0.0004566867) | 0.7725194 (9.512987e - 07) |
| 100 | 2.512491 (0.0006338195) | 0.4250906 (0.001081559) | 1.220291 (0.0004078598) | 0.7271954 (2.725948e - 07) |
| 150 | 2.502746 (0.0006331314) | 0.415346 (0.0009816383) | 1.210546 (0.0003422103) | 0.7071107 (1.03207e - 07) |

TABLE 4.2 – L'estimation des paramètres de RP et de la prime Bayésienne avec les erreurs IMSE, lorsque : $\mu(\alpha, \beta, \gamma) = 2.88292, \alpha = 5, \beta = 1.25, \gamma = 2.5$.

| n | $\hat{\alpha}_{BQ}$ | $\hat{\beta}_{BQ}$ | $\hat{\gamma}_{BQ}$ | $\hat{\mu}(\alpha, \beta, \gamma)$ |
|-----|----------------------------|---------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| 20 | 5.055562 (0.002729415) | 1.313062 (0.004197956) | 2.560562 (0.003271577) | 3.006308 (1.522479e - 06) |
| 40 | 5.00662 (0.00149122) | 1.28662 (0.002457018) | 2.52662 (0.001804951) | 2.951993 (4.771172e - 07) |
| 60 | 5.029598 (0.001166517) | 1.287098 (0.001874212) | 2.534598 (0.00133407) | 2.955279 (5.235871e - 07) |
| 80 | 5.036759 (0.00104114) | 1.301759 (0.001523632) | 2.546759 (0.001060544) | 2.982931 (1.000233e - 06) |
| 100 | 4.97638 (0.0009319631) | 1.26388 (0.001319149) | 2.50138 (0.0008961759) | 2.90644 (5.532259e - 08) |
| 150 | 5.016116 (0.0008129285) | 1.273616 (0.001028583) | 2.521116 (0.0006760829) | 2.92859 (2.085786e - 07) |

4.5 Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées

4.5.1 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

Soit $X = (X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n})$ est un échantillon progressivement censuré de type II de la distribution de Rayleigh Pareto, avec le schéma de censure : $R_i = (R_1, \dots, R_m)$. La fonction de vraisemblance est donnée par

$$L(x | \alpha, \beta, \gamma) \propto \frac{\alpha^m}{\beta^{2m} \gamma^{m\alpha}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha (1 + R_i)\right\}. \quad (4.26)$$

On met $\ln L(x | \alpha, \beta, \gamma) = l(x | \alpha, \beta, \gamma)$, alors le logarithme de la fonction de vraisemblance est

$$l(x | \alpha, \beta, \gamma) \propto m \ln \alpha - 2m \ln \beta - m\alpha \ln \gamma + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^m \ln(x_i) - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha (1 + R_i). \quad (4.27)$$

Par conséquent, nous obtenons les estimateurs du maximum de vraisemblance de α, β et γ en résolvant les équations non linéaires suivantes

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{m}{\alpha} - m \ln \gamma + \sum_{i=1}^m \ln(x_i) - \frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha (1 + R_i) \ln\left(\frac{x_i}{\gamma}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{-2m}{\beta} + \frac{1}{\beta^3} \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\gamma}\right)^\alpha (1 + R_i) = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma} = -\frac{m\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m x_i^\alpha \left(\frac{\alpha}{\gamma^{\alpha+1}}\right) (1 + R_i) = 0$$

On voit qu'il n'y a pas de solution analytique de ce système alors on utilise les méthodes numériques pour obtenir les estimateurs $\hat{\alpha}_{MLE}$, $\hat{\beta}_{MLE}$ et $\hat{\gamma}_{MLE}$.

Lorsqu'on obtient les estimateurs des paramètres simultanément, les caractéristiques de fiabilité peuvent s'écrire sous la forme

$$\hat{R}(t)_{MLE} = \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\beta}^2} \left(\frac{t}{\hat{\gamma}}\right)^\alpha\right), \quad (4.28)$$

$$\widehat{h}(t)_{MLE} = \frac{\widehat{\alpha}}{2\widehat{\beta}^2\widehat{\gamma}} \left(\frac{t}{\widehat{\gamma}}\right)^{\widehat{\alpha}-1}. \quad (4.29)$$

4.5.2 Estimation par la méthode Bayésienne

Dans cette partie, en utilisant les données progressivement censurées, on trouve les estimateurs de Bayes des paramètres inconnus, leurs risques a posteriori correspondants et les caractéristiques de fiabilité sous les trois fonctions de perte : la fonction de perte quadratique, la fonction de perte entropie et la fonction de perte Linex.

La densité a priori

Ici, nous supposons que les paramètres inconnus sont indépendants. On propose pour les paramètres γ et α les loi a priori (respectivement) : $G(a, b)$ et $G(c, d)$ avec les densités suivantes

$$\pi(\gamma) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \gamma^{a-1} \exp(-b\gamma)$$

et

$$\pi(\alpha) = \frac{d^c}{\Gamma(c)} \alpha^{c-1} \exp(-d\alpha),$$

et la distribution a priori impropre pour β donnée par

$$\pi(\beta) \propto \frac{1}{\beta}.$$

D'où, la densité a priori est

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma) \propto \frac{b^a d^c}{\Gamma(a)\Gamma(c)} \frac{\alpha^{c-1} \gamma^{a-1}}{\beta} \exp(-d\alpha - b\gamma). \quad (4.30)$$

La densité a posteriori

La densité a posteriori de α, β et γ est donnée par la formule suivante

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma|x) = \frac{L(x; \alpha, \beta, \gamma) \cdot \pi(\alpha, \beta, \gamma)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty L(x; \alpha, \beta, \gamma) \cdot \pi(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma}.$$

D'où

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma | x) = A^{-1} \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1) (\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}], \quad (4.31)$$

où

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1) (\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma.$$

Les estimateurs de Bayes

Nous estimons ici les paramètres de la distribution de Rayleigh Pareto avec la méthode Bayésienne sous les trois fonctions de perte (quadratique, entropie et Linex). (Voir le tableau 4.3).

TABLE 4.3 – Les fonctions de perte avec les estimateurs Bayésiens et les risques a posteriori correspondants.

| Fonction de perte | Expression | Estimateur de Bayes | Risque a posteriori |
|-------------------|---|---|--|
| Quadratique | $L(\theta, d) = (\theta - d)^2$ | $\hat{d}^\pi(x) = E^\pi[\theta x]$ | $E^\pi[(\theta - \hat{d}_Q)^2]$ |
| Entropie | $L(\theta, d) = (\frac{d}{\theta})^p - p \ln(\frac{d}{\theta})$ | $\hat{d}_E = [E^\pi(\theta)^{-p}]^{-1/p}$ | $p[E^\pi(\ln(\theta) - \ln(\hat{d}))]$ |
| Linex | $L(\theta, d) = e^{r(d-\theta)} - r(d - \theta) - 1$ | $\hat{d}_L = -\frac{1}{r} \ln(E^\pi(e^{-r\theta}))$ | $r(\hat{d}_Q - \hat{d}_L)$ |

— **Sous la fonction de perte quadratique**, les estimateurs Bayésiens de α, β et γ sont

$$\hat{\alpha}_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i+1) (\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma, \quad (4.32)$$

$$\hat{\beta}_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i+1) (\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma, \quad (4.33)$$

$$\hat{\gamma}_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i+1) (\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma \quad (4.34)$$

et les risques a posteriori correspondants sont

$$PR(\hat{\alpha}_{BQ}) = E_{\pi}(\alpha^2) - 2\hat{\alpha}_{BQ}E_{\pi}(\alpha) + \hat{\alpha}_{BQ}^2,$$

$$PR(\hat{\beta}_{BQ}) = E_{\pi}(\beta^2) - 2\hat{\beta}_{BQ}E_{\pi}(\beta) + \hat{\beta}_{BQ}^2,$$

$$PR(\hat{\gamma}_{BQ}) = E_{\pi}(\gamma^2) - 2\hat{\gamma}_{BQ}E_{\pi}(\gamma) + \hat{\gamma}_{BQ}^2.$$

— **Sous la fonction de perte entropie**, les estimateurs Bayésiens de α, β et γ sont

$$\hat{\alpha}_{BE} = [A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-p-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i+1)(\frac{x_i}{\gamma})^{\alpha} + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma]^{-1/p}, \quad (4.35)$$

$$\hat{\beta}_{BE} = [A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+p+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i+1)(\frac{x_i}{\gamma})^{\alpha} + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma]^{-1/p}, \quad (4.36)$$

$$\hat{\gamma}_{BE} = [A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-p-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+p+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i+1)(\frac{x_i}{\gamma})^{\alpha} + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma]^{-1/p} \quad (4.37)$$

et les risques a posteriori correspondants sont

$$PR(\hat{\alpha}_{BE}) = pE(\ln(\alpha) - \ln(\hat{\alpha}_{BE})),$$

$$PR(\hat{\beta}_{BE}) = pE(\ln(\beta) - \ln(\hat{\beta}_{BE})),$$

$$PR(\hat{\gamma}_{BE}) = pE(\ln(\gamma) - \ln(\hat{\gamma}_{BE})).$$

— Les estimateurs de Bayes de α, β et γ **sous la fonction de perte Linéa** sont données comme suit

$$\hat{\alpha}_{BL} = -\frac{1}{r} \ln \left(A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i+1)(\frac{x_i}{\gamma})^{\alpha} + r\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma \right), \quad (4.38)$$

$$\widehat{\beta}_{BL} = -\frac{1}{r} \ln \left(A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + r\beta + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma \right), \quad (4.39)$$

$$\widehat{\gamma}_{BL} = -\frac{1}{r} \ln \left(A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + r\gamma + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma \right) \quad (4.40)$$

et les risques a posteriori correspondants sont

$$PR(\widehat{\alpha}_{BL}) = r(\widehat{\alpha}_{BQ} - \widehat{\alpha}_{BL}),$$

$$PR(\widehat{\beta}_{BL}) = r(\widehat{\beta}_{BQ} - \widehat{\beta}_{BL}),$$

$$PR(\widehat{\gamma}_{BL}) = r(\widehat{\gamma}_{BQ} - \widehat{\gamma}_{BL}).$$

— Les estimateurs Bayésiens de **la fonction de fiabilité sous les trois fonctions de perte** sont données par

$$\widehat{R}(t)_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} e^{(-\frac{1}{2\beta^2}(\frac{t}{\gamma})^\alpha)} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}],$$

$$\widehat{R}(t)_{BE} = [A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} e^{(\frac{p}{2\beta^2}(\frac{t}{\gamma})^\alpha)} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma]^{-1/p}$$

et

$$\widehat{R}(t)_{BL} = -\frac{1}{r} \ln \left(A^{-1} \iiint e^{-r \exp(-\frac{1}{2\beta^2}(\frac{t}{\gamma})^\alpha)} \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma \right).$$

— Les estimateurs Bayésiens de **la fonction de hasard sous les trois fonctions de perte** sont données par

$$\widehat{h}(t)_{BQ} = A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c}}{2\beta^{2m+3}\gamma^{\alpha m-a+2}} (\frac{t}{\gamma})^{\alpha-1} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}],$$

$$\widehat{h}(t)_{BE} = [A^{-1} \iiint \frac{\alpha^{m+c-p-1}}{2\beta^{2m-2p+1}\gamma^{\alpha m-a-p+1}} (\frac{t}{\gamma})^{\alpha-p-1} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma]^{-1/p}$$

et

$$\widehat{h}(t)_{BL} = -\frac{1}{r} \ln \left(A^{-1} \iiint e^{-r \frac{\alpha}{2\beta^2\gamma} (\frac{t}{\gamma})^{\alpha-1}} \frac{\alpha^{m+c-1}}{\beta^{2m+1}\gamma^{\alpha m-a+1}} \prod_{i=1}^m (x_i)^{\alpha-1} \exp[-\{\frac{1}{2\beta^2} \sum_{i=1}^m (R_i + 1)(\frac{x_i}{\gamma})^\alpha + d\alpha + b\gamma\}] d\alpha d\beta d\gamma \right).$$

Pour calculer ces estimateurs, nous utilisons les méthodes numériques MCMC, dans ce travail on a utilisé l'algorithme de **Metropolis-Hastings** (voir la partie de simulation).

4.5.3 Simulation

Dans cette partie, nous réalisons une étude de simulation Monte Carlo en utilisant différentes tailles d'échantillons "n" (10, 30, 50), différents schémas de censure R_i (voir le tableau 4.4) et sous différentes fonctions de perte (symétrique et asymétrique). Nous avons simulé 10 000 échantillons de la distribution de Rayleigh Pareto, en supposant que $\alpha = 2$, $\beta = 0.25$ et $\gamma = 1.5$ avec les hyper-paramètres $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$ et $d = 2$.

TABLE 4.4 – Schéma de censure progressive

| (n, m) | R_i | Schéma de censure |
|----------|-------------------------|---|
| (10,10) | $R_1(\text{complet})$ | $(0*10) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ |
| (10,5) | $R_2(\text{type - II})$ | $(0*4, 5)$ |
| (10,5) | R_3 | $(5, 0*4)$ |
| (30,30) | $R_4(\text{complet})$ | $(0*30)$ |
| (30,20) | $R_5(\text{type - II})$ | $(0*19, 10)$ |
| (30,20) | R_6 | $(10, 0*19)$ |
| (50,50) | $R_7(\text{complet})$ | $(0*50)$ |
| (50,40) | $R_8(\text{type - II})$ | $(0*39, 10)$ |
| (50,40) | R_9 | $(10, 0*39)$ |

L'estimation du maximum de vraisemblance

Dans cette étude, on a utilisé le package *BB solve* de R [32] qui a de grandes capacités pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires, afin d'obtenir les estimateurs du maximum de vraisemblance (MLE) des paramètres (α , β et γ) et les caractéristiques de la fiabilité $R(t)$ et $h(t)$ où $t = 0.25$ ($R(0.25) = 0.8007$, $h(0.25) = 1.7777$). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5 et le tableau 4.6.

A partir du Tableau 4.5, on observe que l'estimateur de β est plus proche de la valeur réelle que les autres estimateurs.

Nous remarquons également à partir du tableau 4.6 que les estimateurs de $R(t)$ et $h(t)$ sont plus proches des valeurs réelles lorsque la taille de l'échantillon n augmente.

TABLE 4.5 – L'estimation du maximum de vraisemblance avec les erreurs quadratiques des paramètres de RP.

| (n, m) | R_i | $\hat{\alpha}_{MLE}$ | $\hat{\beta}_{MLE}$ | $\hat{\gamma}_{MLE}$ |
|----------|-------|----------------------|---------------------|----------------------|
| (10,10) | R_1 | 1.9906(0.0081) | 0.2317(0.0013) | 1.6131(0.0174) |
| (10,5) | R_2 | 1.9649(0.0269) | 0.2503(0.0024) | 1.6492(0.0323) |
| (10,5) | R_3 | 1.8320(0.1498) | 0.2200(0.0045) | 1.7090(0.0775) |
| (30,30) | R_4 | 1.9990(0.0074) | 0.2350(0.0005) | 1.5933(0.0126) |
| (30,20) | R_5 | 1.9780(0.0070) | 0.2361(0.0006) | 1.6216(0.0181) |
| (30,20) | R_6 | 1.9225(0.0293) | 0.1728(0.0067) | 1.6725(0.0396) |
| (50,50) | R_7 | 2.0030(0.0072) | 0.2365(0.0003) | 1.5858(0.0113) |
| (50,40) | R_8 | 1.9918(0.0083) | 0.2359(0.0003) | 1.6010(0.0136) |
| (50,40) | R_9 | 2.9190(0.0116) | 0.1888(0.0041) | 1.6509(0.0256) |

4.5 Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées 73

TABLE 4.6 – L'estimation du maximum de vraisemblance de la fonction de fiabilité et la fonction de hasard avec les erreurs quadratiques.

| (n, m) | R_i | $\widehat{R}(t)_{mle}$ | $\widehat{h}(t)_{mle}$ |
|----------|----------------|------------------------|------------------------|
| (10,10) | R ₁ | 0.7823(0.0055) | 1.9693(0.5413) |
| (10,5) | R ₂ | 0.7998(0.0078) | 1.7684(0.6533) |
| (10,5) | R ₃ | 0.6900(0.0300) | 2.6696(2.1197) |
| (30,30) | R ₄ | 0.7949(0.0019) | 1.8329(0.1516) |
| (30,20) | R ₅ | 0.8021(0.0020) | 1.8089(0.1921) |
| (30,20) | R ₆ | 0.6329(0.0331) | 3.5540(3.8524) |
| (50,50) | R ₇ | 0.7978(0.0013) | 1.8059(0.0921) |
| (50,40) | R ₈ | 0.7959(0.0015) | 1.8129(0.1053) |
| (50,40) | R ₉ | 0.6815(0.0159) | 2.9577(1.6362) |

Estimation Bayésienne

Dans cette partie, on obtient les estimateurs Bayésiens pour les paramètres de la distribution de RP et les caractéristiques de fiabilité sous les données progressivement censurées en utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings dans le logiciel R.

Dans le tableau 4.7, on présente les estimateurs Bayésiens $\hat{\alpha}_{BQ}$, $\hat{\beta}_{BQ}$ et $\hat{\gamma}_{BQ}$ sous la fonction de perte quadratique avec les risques a posteriori. Les estimateurs de Bayes des paramètres inconnus de la distribution sous la fonction de perte entropie et leurs risques a posteriori (**PR**) où $p=-0.5, 1, 2$ sont données dans le tableau 4.8. Sous la fonction de perte Linex (avec $r=-0.5, 1, 2$) les résultats des estimateurs sont résumés dans le tableau 4.9. Ensuite, les estimateurs Bayésiens de $R(t)$ et $h(t)$ sous les trois fonctions de perte sont présentés dans le tableau 4.10.

On remarque d'après le tableau 4.7 que les meilleurs estimateurs de α , β et γ sont dans les petites échantillons ($n=10$).

D'après le tableau 4.8, on observe que $p=-0,5$ donne les meilleurs estimateurs des paramètres de la distribution sous la fonction de perte entropie, et d'après le tableau 4.9, $r=-0,5$ donne les meilleurs estimateurs des paramètres de RP sous la fonction de perte de Linex.

On remarque aussi, d'après le tableau 4.10, que les bons résultats pour la fonction de fiabilité $R(t)$ sont sous la fonction de perte de Linex. Alors que, pour la fonction de hasard $h(t)$, les estimateurs sous la fonction de perte entropie sont mieux que les autres fonctions de perte.

4.5 Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées 74

D'après les résultats du tableau 4.11, nous constatons que l'estimation Bayésienne des caractéristiques de fiabilité est plus performante que l'approche classique du maximum de vraisemblance.

TABLE 4.7 – Estimation Bayésienne sous la fonction de perte quadratique avec les risques a posteriori entre parenthèses.

| (n, m) | R | $\hat{\alpha}_{BQ}$ | $\hat{\beta}_{BQ}$ | $\hat{\gamma}_{BQ}$ |
|----------|----------------|---------------------|--------------------|---------------------|
| (10,10) | R ₁ | 2.0203(0.0735) | 0.2773(0.0504) | 1.5223(0.0200) |
| (10,5) | R ₂ | 2.0109(0.0011) | 0.3064(0.0029) | 1.5239(0.0012) |
| (10,5) | R ₃ | 2.0247(0.0014) | 0.3132(0.0033) | 1.5357(0.0016) |
| (30,30) | R ₄ | 2.0887(0.5475) | 0.3492(0.3185) | 1.5917(0.1378) |
| (30,20) | R ₅ | 2.0207(0.0017) | 0.3162(0.0028) | 1.5337(0.0008) |
| (30,20) | R ₆ | 1.9808(0.0016) | 0.2938(0.0028) | 1.4988(0.0008) |
| (50,50) | R ₇ | 1.8324(0.8387) | 0.5716(0.4744) | 1.5113(0.2129) |
| (50,40) | R ₈ | 2.0382(0.0062) | 0.3232(0.0072) | 1.5482(0.0026) |
| (50,40) | R ₉ | 2.0196(0.0061) | 0.2941(0.0071) | 1.5266(0.0026) |

4.5 Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées 75

TABLE 4.8 – Estimation Bayésienne sous la fonction de perte entropie avec PR entre parenthèses

| (n, m) | R_i | Paramètres | $p = -0.5$ | $p = 1$ | $p = 2$ |
|----------|-------|---------------------|------------------------|----------------|-----------------|
| (10, 10) | R_1 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 1.9323(0.0036) | 1.8818(0.0192) | 1.8313(0.0927) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.3682(0.0154) | 0.3415(0.0441) | 0.3319(0.1456) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.4940(0.0014) | 1.4795(0.0068) | 1.4670(0.0306) |
| (10, 5) | R_2 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 2.0152($2.94e - 05$) | 2.0149(0.0001) | 2.01467(0.0004) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.2986($7.17e - 04$) | 0.2973(0.0027) | 0.2965(0.0107) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.5249($3.10e - 05$) | 1.5246(0.0001) | 1.5244(0.0004) |
| (10, 5) | R_3 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 2.0208($3.16e - 05$) | 2.0204(0.0001) | 2.0201(0.0005) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.3016($8.33e - 04$) | 0.3002(0.0031) | 0.2993(0.0124) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.5297($3.74e - 05$) | 1.5294(0.0001) | 1.5291(0.0005) |
| (30, 30) | R_4 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 1.4146($1.50e - 02$) | 1.2967(0.0570) | 1.2347(0.2119) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.6883($2.88e - 02$) | 0.5745(0.1230) | 0.5135(0.4705) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.2335($5.89e - 03$) | 1.1915(0.0228) | 1.1665(0.0881) |
| (30, 20) | R_5 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 2.0003($6.98e - 05$) | 1.9993(0.0003) | 1.9984(0.0016) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.2923($9.91e - 04$) | 0.2907(0.0034) | 0.2898(0.0131) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.5125($3.94e - 05$) | 1.5122(0.0001) | 1.5119(0.0007) |
| (30, 20) | R_6 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 2.0020($6.76e - 05$) | 2.0010(0.0003) | 2.0001(0.0016) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.2925($9.27e - 04$) | 0.2910(0.0032) | 0.2901(0.0123) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.5138($3.88e - 05$) | 1.5134(0.0001) | 1.5131(0.0007) |
| (50, 50) | R_7 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 1.1489($9.79e - 03$) | 1.0928(0.0304) | 1.0699(0.1032) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.8794($1.49e - 02$) | 0.7837(0.0852) | 0.6967(0.4060) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.0943($4.44e - 03$) | 1.0684(0.0149) | 1.0560(0.0533) |
| (50, 40) | R_8 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 2.0105(0.0002) | 2.0061(0.0016) | 2.0012(0.0081) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.3115(0.0021) | 0.3080(0.0068) | 0.3063(0.0244) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.5259(0.0001) | 1.5245(0.0006) | 1.5233(0.0028) |
| (50, 40) | R_9 | $\hat{\alpha}_{BE}$ | 2.0118(0.0002) | 2.0075(0.0015) | 2.0027(0.0079) |
| | | $\hat{\beta}_{BE}$ | 0.3117(0.0021) | 0.3083(0.0067) | 0.3066(0.0241) |
| | | $\hat{\gamma}_{BE}$ | 1.5269(0.0001) | 1.5255(0.0006) | 1.5244(0.0027) |

4.5 Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées 76

TABLE 4.9 – Estimation Bayésienne avec PR entre parenthèses sous la fonction de perte Linex.

| (n, m) | R_i | <i>paramètres</i> | $r = -0.5$ | $r = 1$ | $r = 2$ |
|----------|-------|---------------------|--------------------|----------------|----------------|
| (10, 10) | R_1 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 1.9594(0.0077) | 1.8980(0.0459) | 1.8258(0.2363) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.3915(0.0044) | 0.3686(0.0140) | 0.3583(0.0486) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.5025(0.0023) | 1.4864(0.0114) | 1.4717(0.0524) |
| (10, 5) | R_2 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 2.0156(1.18e - 04) | 2.0149(0.0004) | 2.0144(0.0019) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.2992(6.93e - 05) | 0.2987(0.0002) | 0.2985(0.0010) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.5251(7.32e - 05) | 1.5247(0.0002) | 1.5244(0.0011) |
| (10, 5) | R_3 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 2.0211(1.29e - 04) | 2.0204(0.0005) | 2.0198(0.0020) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.3023(8.28e - 05) | 0.3018(0.0003) | 0.3015(0.0012) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.5300(8.92e - 05) | 1.5295(0.0003) | 1.5291(0.0013) |
| (30, 30) | R_4 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 1.5217(3.20e - 02) | 1.3405(0.1170) | 1.2519(0.4114) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.7476(1.14e - 02) | 0.6775(0.0472) | 0.6317(0.1861) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.2670(9.39e - 03) | 1.2122(0.0360) | 1.1800(0.1364) |
| (30, 20) | R_5 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 2.0009(1.99e - 04) | 1.9995(0.0010) | 1.9980(0.0051) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.2932(1.30e - 04) | 0.2925(0.0004) | 0.2921(0.0016) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.5128(7.91e - 05) | 1.5123(0.0003) | 1.5119(0.0014) |
| (30, 20) | R_6 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 2.0026(1.88e - 04) | 2.0012(0.0009) | 1.9997(0.0050) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.2933(1.23e - 04) | 0.2927(0.0004) | 0.2923(0.0015) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.5141(7.75e - 05) | 1.5136(0.0003) | 1.5132(0.0014) |
| (50, 50) | R_7 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 1.2202(2.24e - 02) | 1.1138(0.0615) | 1.0784(0.1938) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.9119(6.05e - 03) | 0.8698(0.0300) | 0.8318(0.1360) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.1205(7.68e - 03) | 1.0807(0.0244) | 1.0630(0.0842) |
| (50, 40) | R_8 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 2.0129(6.80e - 04) | 2.0074(0.0041) | 1.9998(0.0234) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.3140(4.41e - 04) | 0.3118(0.0014) | 0.3107(0.0049) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.5267(2.33e - 04) | 1.5251(0.0011) | 1.5237(0.0051) |
| (50, 40) | R_9 | $\hat{\alpha}_{BL}$ | 2.0141(6.56e - 04) | 2.0088(0.0039) | 2.0014(0.0228) |
| | | $\hat{\beta}_{BL}$ | 0.3142(4.30e - 04) | 0.3120(0.0013) | 0.3109(0.0048) |
| | | $\hat{\gamma}_{BL}$ | 1.5277(2.28e - 04) | 1.5261(0.0010) | 1.5247(0.0050) |

4.5 Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées 77

TABLE 4.10 – Estimation Bayésienne avec les erreurs quadratiques de la fonction de fiabilité et la fonction de hasard.

| (n, m) | R_i | $\widehat{R}(t)_{BQ}$ | $\widehat{h}(t)_{BQ}$ | $\widehat{R}(t)_{BE}$ | $\widehat{h}(t)_{BE}$ | $\widehat{R}(t)_{BL}$ | $\widehat{h}(t)_{BL}$ |
|----------|-------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------|
| (10,10) | R_1 | 0.8402 (0.0068) | 1.4081 (0.6727) | 0.8751 (0.0001) | 1.0056 (0.0174) | 0.8758 (0.0001) | 1.0697 (0.0156) |
| (10,5) | R_2 | 0.8611 (0.0030) | 1.2052 (0.2619) | 0.8507 (8.28e - 05) | 1.2976 (3.54e - 03) | 0.8510 (6.14e - 05) | 1.3156 (4.77e - 03) |
| (10,5) | R_3 | 0.8685 (0.0036) | 1.1442 (0.3110) | 0.8552 (1.02e - 04) | 1.2551 (4.84e - 03) | 0.8556 (7.72e - 05) | 1.2780 (5.96e - 03) |
| (30,30) | R_4 | 0.9163 (0.0091) | 0.7286 (1.3834) | 0.8942 (6.17e - 05) | 0.6054 (9.17e - 03) | 0.8944 (4.98e - 05) | 0.6283 (5.13e - 03) |
| (30,20) | R_5 | 0.8730 (0.0021) | 1.0986 (0.1891) | 0.8406 (8.63e - 05) | 1.3862 (3.14e - 03) | 0.8409262 (6.21e - 05) | 1.4047 (5.13e - 03) |
| (30,20) | R_6 | 0.8326 (0.0021) | 1.4601 (0.1959) | 0.8415 (8.77e - 05) | 1.3779 (3.21e - 03) | 0.8418 (6.32e - 05) | 1.3967 (5.20e - 03) |
| (50,50) | R_7 | 0.9301 (0.0081) | 0.4527 (1.5825) | 0.8892 (4.02e - 05) | 0.5198 (1.74e - 03) | 0.8893 (3.30e - 05) | 0.5233 (7.11e - 04) |
| (50,40) | R_8 | 0.8855 (0.0046) | 0.9906 (0.4083) | 0.8628 (0.0001) | 1.1755 (0.0058) | 0.8632 (8.93e - 05) | 1.2042 (7.70e - 03) |
| (50,40) | R_9 | 0.8521 (0.0047) | 1.2975 (0.4160) | 0.8635 (0.0001) | 1.1699 (0.0059) | 0.8639 (9.19e - 05) | 1.1994 (7.90e - 03) |

TABLE 4.11 – L'estimation du M.V et l'estimation Bayésienne des caractéristiques de fiabilité avec les erreurs quadratiques entre parenthèses.

| (n, m) | R_i | $\widehat{R}(t)_{mle}$ | $\widehat{h}(t)_{mle}$ | $\widehat{R}(t)_{BL}$ | $\widehat{h}(t)_{BE}$ |
|----------|-------|------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| (10,10) | R_1 | 0.7969(0.0040) | 1.9197(0.5254) | 0.8758(0.0001) | 1.0056(0.0174) |
| (10,5) | R_2 | 0.7994(0.0096) | 1.8688(1.3082) | 0.8510(6.14e-05) | 1.2976(3.54e-03) |
| (10,5) | R_3 | 0.6855(0.0367) | 3.2914(8.4523) | 0.8556(7.72e-05) | 1.2551(4.84e-03) |
| (30,30) | R_4 | 0.8077(0.0011) | 1.7795(0.1240) | 0.8944(4.98e-05) | 0.6054(9.17e-03) |
| (30,20) | R_5 | 0.8021(0.0020) | 1.8089(0.1921) | 0.8409262(6.21e-05) | 1.3862(3.14e-03) |
| (30,20) | R_6 | 0.6451(0.0301) | 3.5749(4.1357) | 0.8418(6.32e-05) | 1.3779(3.21e-03) |
| (50,50) | R_7 | 0.8101(0.0007) | 1.7490(0.0694) | 0.8893(3.30e-05) | 0.5198(1.74e-03) |
| (50,40) | R_8 | 0.8074(0.0008) | 1.7800(0.0883) | 0.8632(8.93e-05) | 1.1755(0.0058) |
| (50,40) | R_9 | 0.8075(0.0008) | 1.7797(0.0896) | 0.8639(9.19e-05) | 1.1699(0.0059) |

4.5.4 Comparaison des deux méthodes pour les estimateurs des paramètres

Dans cette section, nous comparons la performance des deux méthodes pour différents schémas de censure, en utilisant le critère de Pitman [11, 18] et l'erreur quadratique moyenne intégrée (IMSE) définie (respectivement) comme suit.

Définition 4.5.1 Soit $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ deux différents estimateurs d'un paramètre θ , on dit que $\hat{\theta}_1$ domine dans le sens du critère de proximité de Pitman $\hat{\theta}_2$ si pour toute $\theta \in \Theta$

$$P_{\theta}(|\hat{\theta}_1 - \theta| < |\hat{\theta}_2 - \theta|) > \frac{1}{2}.$$

Définition 4.5.2 L'erreur quadratique moyenne intégrée (en anglais ; *The integrated mean square error : IMSE*) est définie comme :

$$IMSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \theta)^2.$$

Pour cette comparaison, nous sélectionnons les meilleurs estimateurs Bayésiens de α , β and γ sous les trois fonctions de perte (quadratique, entropie ($p=-0.5$), et Linex ($r=-0.5$)) pour les comparer avec les estimateurs de maximum de vraisemblance "MLE".

Dans le tableau 4.12, nous comparons les estimateurs du maximum de vraisemblance avec les estimateurs de Bayes en utilisant le critère de Pitman, on dit donc que l'estimateur Bayésien est meilleur que l'estimateur du M.V lorsque la probabilité de Pitman est supérieure à 0,5. Selon ce critère, on constate que les estimateurs Bayésiens de α et γ sont plus efficaces que les estimateurs avec la méthode du maximum de vraisemblance surtout lorsque les données sont progressivement censurées.

Dans le tableau 4.13, nous comparons les estimateurs de Bayes avec les estimateurs du maximum de vraisemblance MLEs en utilisant le critère IMSE. Il est observé à partir des résultats que la méthode Bayésienne fonctionne bien, mais dans les données complètes (R_1 , R_4 et R_7) les MLE sont mieux que les estimateurs Bayésiens.

4.5 Inférences statistiques en présence de données progressivement censurées 79

TABLE 4.12 – Comparaison du MLE et l'estimation Bayésienne sous les trois fonctions de perte à l'aide du critère de Pitman

| n | m | R | Paramètres | quadratique | Entropie(p=-0.5) | Linex(a=-0.5) |
|----|----|-------|------------|-------------|------------------|---------------|
| 10 | 10 | R_1 | α | 0.6043 | 0.6055 | 0.5982 |
| | | | β | 0.1982 | 0.2187 | 0.1880 |
| | | | γ | 0.7548 | 0.7566 | 0.7520 |
| 10 | 5 | R_2 | α | 0.7297 | 0.7304 | 0.7227 |
| | | | β | 0.3036 | 0.3526 | 0.2778 |
| | | | γ | 0.9614 | 0.9629 | 0.9596 |
| 10 | 5 | R_3 | α | 0.7405 | 0.7445 | 0.7289 |
| | | | β | 0.4822 | 0.5125 | 0.4624 |
| | | | γ | 0.9592 | 0.9599 | 0.9579 |
| 30 | 30 | R_4 | α | 0.2175 | 0.2182 | 0.2108 |
| | | | β | 0.0135 | 0.0160 | 0.0125 |
| | | | γ | 0.2932 | 0.2952 | 0.2927 |
| 30 | 20 | R_5 | α | 0.8199 | 0.8092 | 0.8311 |
| | | | β | 0.2209 | 0.2649 | 0.1999 |
| | | | γ | 0.9826 | 0.9827 | 0.9823 |
| 30 | 20 | R_6 | α | 0.7827 | 0.7684 | 0.7969 |
| | | | β | 0.8208 | 0.8518 | 0.7980 |
| | | | γ | 0.9932 | 0.9932 | 0.9928 |
| 50 | 50 | R_7 | α | 0.0834 | 0.0840 | 0.0826 |
| | | | β | $9e - 04$ | $9e - 04$ | $8e - 04$ |
| | | | γ | 0.1148 | 0.1164 | 0.1136 |
| 50 | 40 | R_8 | α | 0.7817 | 0.7816 | 0.7770 |
| | | | β | 0.1061 | 0.1275 | 0.0938 |
| | | | γ | 0.8645 | 0.8705 | 0.8563 |
| 50 | 40 | R_9 | α | 0.7727 | 0.7697 | 0.7700 |
| | | | β | 0.5346 | 0.5775 | 0.5056 |
| | | | γ | 0.9782 | 0.9793 | 0.9776 |

TABLE 4.13 – Comparaison du MLE et de l'estimation Bayésienne à l'aide de IMSE.

| n | m | R | Paramètres | MLE | quadratique | Entropie(p=-0.5) | Linex(a=-0.5) |
|----|----|-------|------------|--------|-------------|------------------|---------------|
| 10 | 10 | R_1 | α | 0.0088 | 0.0759 | 0.0778 | 0.0735 |
| | | | β | 0.0013 | 0.0520 | 0.0498 | 0.0536 |
| | | | γ | 0.0176 | 0.0204 | 0.0206 | 0.0230 |
| 10 | 5 | R_2 | α | 0.0241 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 |
| | | | β | 0.0023 | 0.0029 | 0.0024 | 0.0033 |
| | | | γ | 0.0311 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0012 |
| 10 | 5 | R_3 | α | 0.1445 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0015 |
| | | | β | 0.0044 | 0.0034 | 0.0029 | 0.0037 |
| | | | γ | 0.0741 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0017 |
| 30 | 30 | R_4 | α | 0.0075 | 0.5412 | 0.5440 | 0.5375 |
| | | | β | 0.0005 | 0.3150 | 0.3125 | 0.3169 |
| | | | γ | 0.0128 | 0.1363 | 0.1366 | 0.1359 |
| 30 | 20 | R_5 | α | 0.0072 | 0.0015 | 0.0017 | 0.0013 |
| | | | β | 0.0006 | 0.0026 | 0.0021 | 0.0031 |
| | | | γ | 0.0183 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0007 |
| 30 | 20 | R_6 | α | 0.0270 | 0.0016 | 0.0018 | 0.0015 |
| | | | β | 0.0068 | 0.0027 | 0.0022 | 0.0031 |
| | | | γ | 0.0385 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 |
| 50 | 50 | R_7 | α | 0.0073 | 0.8052 | 0.8067 | 0.8033 |
| | | | β | 0.0003 | 0.4584 | 0.4571 | 0.4594 |
| | | | γ | 0.0114 | 0.2018 | 0.2019 | 0.2016 |
| 50 | 40 | R_8 | α | 0.0082 | 0.0045 | 0.0046 | 0.0043 |
| | | | β | 0.0003 | 0.0062 | 0.0054 | 0.0068 |
| | | | γ | 0.0136 | 0.0022 | 0.0022 | 0.0023 |
| 50 | 40 | R_9 | α | 0.0114 | 0.0053 | 0.0056 | 0.0051 |
| | | | β | 0.0041 | 0.0067 | 0.0059 | 0.0073 |
| | | | γ | 0.0255 | 0.0024 | 0.0024 | 0.0025 |

4.6 Application avec des données réelles

Dans cette section, nous comparons l'ajustement du modèle proposé (RP) avec des modèles compétitifs et classiques tels que Rayleigh, Pareto, Beta Pareto, Log-normal. Nous fournissons cette application à un ensemble de données réelles en utilisant les dépassements des pics de crue (the exceedances of flood peaks) de la Rivière Floyd dans les années (1935-1973) à James, Iowa, USA (Source : Conseil des ressources en eau des États-Unis (1977)) . Pour plus de détails voir [14].

TABLE 4.14 – Les débits annuels consécutifs de crue de la rivière Floyd à James, Iowa.

| Années | Décharge d'inondation en (ft ³ /s) |
|-------------|--|
| 1935 – 1944 | 1460, 4050, 3570, 2060, 1300, 1390, 1720, 6280, 1360, 7440 |
| 1945 – 1954 | 5320, 1400, 3240, 2710, 4520, 4840, 8320, 13900, 71500, 6250 |
| 1955 – 1964 | 2260, 318, 1330, 970, 1920, 15100, 2870, 20600, 3810, 726 |
| 1965 – 1973 | 7500, 7170, 2000, 829, 17300, 4740, 13400, 2940, 5660 |

Pour tester la qualité de l'ajustement des modèles ci-dessus, nous considérons certaines mesures d'adéquation, notamment; le critère d'information d'Akaike (AIC), le critère d'information d'Akaike corrigé (CAIC), le critère d'information Bayésien (BIC) et le critère d'information de Hannan-Quinn (HQIC) définis par

$$AIC = -2l + 2p,$$

$$CAIC = -2l + \frac{2pn}{n - p - 1},$$

$$BIC = -2l + p \log(n)$$

et

$$HQIC = -2l + 2p \log(\log(n)),$$

où l est la log-vraisemblance, n est la taille de l'échantillon et p le nombre de paramètres.

En général, plus les valeurs de ces statistiques sont petites, meilleur est l'ajustement aux données. Les calculs requis suivants sont effectués à l'aide du logiciel R.

TABLE 4.15 – Les statistiques AIC, CAIC, BIC et HQIC pour les données d'inondation de la rivière Floyd.

| Distribution | AIC | CAIC | BIC | HQIC |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Rayleigh Pareto | 788.2277 | 788.9134 | 793.2183 | 790.0183 |
| Rayleigh | 436627347 | 436627347 | 436627348 | 436627347 |
| Pareto | 953.1139 | 953.4467 | 956.4405 | 954.3072 |
| Beta Pareto | 4618.009 | 4619.185 | 4624.663 | 4620.396 |
| Log-normal | 901.1985 | 901.5319 | 904.5257 | 902.3923 |

A partir des résultats de la Table 4.15, on constate que le modèle RP a les plus petites valeurs des statistiques AIC, CAIC, BIC et HQIC parmi tous les modèles testés. Ainsi, la distribution RP pourrait être choisie comme le meilleur modèle pour l'ensemble de données.

Conclusion et Perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié un modèle, qui est une généralisation du modèle de Pareto et qui peut dans certaines circonstances être plus adéquat pour la modélisation de certains phénomènes aléatoires. Ce modèle appelé Rayleigh Pareto a été étudié dans le détail avec ses caractéristiques statistiques. Nous nous sommes intéressés au problème de l'estimation des paramètres et des caractéristiques de fiabilité de cette distribution à l'aide d'une approche Bayésienne d'une part et en utilisant l'approche classique du maximum de vraisemblance d'autre part. Les données sous lesquelles ont été menées les estimations proviennent d'un plan progressivement censuré à droite de type II. Nous avons utilisé des méthodes numériques pour obtenir les estimateurs de Bayes et les estimateurs du maximum de vraisemblance, car ils ne sont pas sous leur forme explicite. Les estimateurs Bayésiens sont obtenus sous trois fonctions de perte (quadratique, entropie et Linex) par l'utilisation de la méthode MCMC de Metropolis-Hastings.

Il a été vérifié que l'on peut obtenir les résultats sous données complètes ($R_1 = R_2 = \dots = R_m = 0$) et censurées de type II ($R_1 = R_2 = \dots = R_{m-1} = 0$ et $R_m = n - m$) à partir du schéma progressivement censuré.

Pour les caractéristiques de fiabilité, nous avons trouvé que la méthode de Bayes fonctionne mieux que la méthode classique du maximum de vraisemblance. Pour les paramètres de la distribution RP, nous avons utilisé deux critères (Pitman et IMSE) pour comparer les performances des deux approches et nous avons montré que l'estimation Bayésienne sous des données censurées progressives est plus efficace que l'estimation par maximum de vraisemblance.

L'application à des données réelles des crues de la rivière Floyd montre la supériorité d'un point de vue adéquation du modèle proposé par rapport à certains autres modèles. Comme perspectives et extension de ce travail, on peut s'intéresser à la prédiction dans

un échantillon futur (Y_1, \dots, Y_N) des statistiques d'ordre ; à savoir $Y_{(k)}$ avec $1 \leq k \leq N$ et on peut aussi appliquer le modèle dans les provisions techniques et les mesures de risques en actuariat.

Bibliographie

- [1] A. Chadli, K. Boudjerda, A. Meradji, H. Fellag : *Bayesian estimation of the Rayleigh distribution under different loss function, Electronic Journal of Applied Statistical Analysis. 10(1), 50–64, (2017).*
- [2] A. Gelman, X. L. Meng, H. Stern : *Posterior predictive assessment of model fitness via realized discrepancies, Statistica sinica, 733-760, (1996).*
- [3] A. L. Bailey : *Credibility Procedures : Laplace's generalization of Bayes Rule and the combination of collateral knowledge with observed data, New York State Insurance Department, (1950).*
- [4] A. S. Yadav, H. S. Bakouch, C. Chesneau : *Bayesian estimation of the survival characteristics for Hjorth distribution under progressive type-II censoring, Communications in Statistics-Simulation and Computation. 1–19,(2019).*
- [5] B. Boumaraf, N. Seddik-Ameur and V. S. Barbu : *Estimation of beta-pareto distribution based on several optimization methods, Mathematics, 8(7) : 1055, (2020).*
- [6] C. Kim, J. Jung, Y. Chung : *Bayesian estimation for the exponentiated Weibull model under Type II progressive censoring, Statistical Papers. 52(1) , 53–70, (2011).*
- [7] C. P. Robert : *L'analyse statistique bayésienne, Economica, (1992).*
- [8] C. P. Robert : *Le choix bayésien : Principes et pratique, Springer Science & Business Media, (2005).*
- [9] D. K. Park, A. Gelman & J. Bafumi : *Bayesian multilevel estimation with post-stratification : State-level estimates from national polls, Political Analysis, 12(4), 375-385, (2004).*

- [10] D. R. Cox, D. V. Hinkley : *Theoretical Statistics*, Chapman and Hall, London, (1974).
- [11] E. J. Pitman : *The closest estimates of statistical parameters*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 33 (2), 212–222, (1937).
- [12] E. Parent, J. Bernier : *Le raisonnement bayésien : modélisation et inférence*, Springer Science et Business Media, (2007).
- [13] F. Metiri Farouk : *Prime de crédibilité et méthode de l'entropie*, Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, (2016).
- [14] G. S. Mudholkar, A. D. Hutson : *The exponentiated Weibull family : some properties and a flood data application*, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, 25(12), 3059-3083, (1996).
- [15] H. Bühlmann, A. Gisler : *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer, Netherlands, 2005.
- [16] H. R. VARIAN : *A Bayesian approach to real estate assessment*, in *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honour of Leonard J. Savage*, eds. Stephen E. Fienberg and Arnold Zellner, Amsterdam : North Holland, 195-208, (1975).
- [17] J. M. Marin, C. P. Robert : *Bayesian core : a practical approach to computational Bayesian statistics (Vol. 268)*, New York : Springer.(2007).
- [18] Jozani, Mohammad Jafari and Davies, F. Katherine and N. Balakrishnan : *Pitman closeness results concerning ranked set sampling*, *Statistics & Probability Letters*. 82(12), 2260–2269, (2012).
- [19] K. A. Al-Kadim, B. D. A. Mohammed : *Rayleigh Pareto Distribution*, *Journal of University of Babylon*. 26(1), 84–95, (2018).
- [20] K. A. Al-Kadim, M. A. Boshi : *exponential Pareto distribution*, *Mathematical Theory and Modeling*, 3(5), 135-146, (2013).
- [21] L. Khribi : *L'échantillonnage de Gibbs pour l'estimation Bayésienne dans l'analyse de survie*.(2007).
- [22] M. Fromenteau, P. Petauton : *Théorie et pratique de l'assurance vie-5e édition : Cours et exercices corrigés*, Dunod,(2017).

- [23] M. H. DeGroot : *Optimal statistical decision*, McGraw-Hill Inc, (1970).
- [24] N. Balakrishnan, E. Cramer : *The art of progressive censoring*, Springer, 2014.
- [25] N. Balakrishnan : *Progressive censoring methodology : an appraisal*, *Test*. 16(2), 211, (2007).
- [26] N. Balakrishnan, R. Aggarwala : *Progressive censoring : theory, methods, and applications*, Springer Science and Business Media, 2000.
- [27] N. Balakrishnan, R. A. Sandhu : *A simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples*, *The American Statistician*. 49(2), 229-230, (1995).
- [28] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller & E. Teller, *Equation of state calculations by fast computing machines*, *The journal of chemical physics*, 21 (6), 1087-1092, (1953).
- [29] R. Calabria and G. Pulcini : *An engineering approach to Bayes estimation for the Weibull distribution*, *Microelectronic Reliability*. 34 (5), 789-802, (1994).
- [30] R. K. Maurya, Y. M. Tripathi, T. Sen, M. K. Rastogi : *On progressively censored inverted exponentiated Rayleigh distribution*, *Journal of Statistical Computation and Simulation*. 89 (3), 492-518, (2019).
- [31] R. Valiollahi, M. Z. Raqab, A. Asgharzadeh, F. A. Alqallaf : *Estimation and prediction for power Lindley distribution under progressively type II right censored samples*, *Mathematics and Computers in Simulation*. 149, 32-47, (2018).
- [32] R. Varadhan P. Gilbert : *BB : An R package for solving a large system of nonlinear equations and for optimizing a high-dimensional nonlinear objective function*, *Journal of statistical software*. 32(4), 1-26, (2009).
- [33] R. Veysseyre : *Aide-mémoire Statistique et probabilités pour l'ingénieur*, Dunod, 2006.
- [34] S. Ahmed : *Méthode de tarification des risques en assurance non-vie*, Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, (2018).
- [35] W. K. Hastings : *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*, *Biometrika* 57, 97-109, (1970).