

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2020 /2021

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option

Mathématiques Appliquées

Solutions périodiques de quelques classes
des équations différentielles ordinaires

Présentée Par

Melki Houdeifa

DIRECTEUR DE THÈSE : Makhlouf Ammar

Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : Ferchichi Mohamed Réda

Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : Ellagoune Fateh

Prof. U.8 MAI 1945 GUELMA

EXAMINATEUR: Hadidi Elbahi

M.C.A U.B.M. ANNABA



REMERCIEMENTS

Avant tout on tient à remercier Allah le tout puissant qui nous a donné la volonté, la patience, la force et la santé d'accomplir ce travail.

On tient à remercier nos parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation et d'encouragements.

Mes sincères remerciements à mon directeur de thèse Professeur **Makhlouf Ammar** pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, son aide et ses conseils. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur **Ferchichi Mohamed Réda**, Professeur à l'Université Badji Mokhtar Annaba, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse, je l'en remercie énormément.

Je remercie le professeur **Ellaggoune Fateh**, de l'Université Guelma d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ma thèse, je l'en remercie énormément.

Je remercie Monsieur **Hadidi Elbahi**, Maître de Conférence A à l'Université Badji Mokhtar Annaba, d'avoir accepté de faire partie du jury, et d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger cette thèse, je l'en remercie énormément.

Je remercie aussi toute personne qui m'a soutenu à terminer cette thèse.

Merci a tous...



DÉDICACE

Je dédie ce travail à

Mes très chers parents

A mes chers frères

A toute ma famille

A tous mes amis

Enfin à tous ceux qui me sont très chers.

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'étudier le nombre maximum des cycles limites de certains systèmes différentiels polynômiaux en utilisant la méthode de moyennisation. Cette étude est illustrée par des applications.

Dans le troisième chapitre, nous étudions le nombre maximum de cycles limites qui se produit par bifurcation zéro-Hopf à l'origine d'un système quadratique dans \mathbb{R}^4 de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z - (b + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= (b + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)z + (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j,0}x^2 + a_{j,1}xy + a_{j,2}xz + a_{j,3}xw + a_{j,4}y^2 + a_{j,5}yz + a_{j,6}yw \\ &\quad + a_{j,7}z^2 + a_{j,8}zw + a_{j,9}w^2. \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} .

Dans le quatrième chapitre, nous étudions le nombre maximum de cycles limites qui se produisent par une bifurcation de l'origine pour un système planaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(1 + \sin^n \theta)xP(x, y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)yQ(x, y), \end{cases}$$

où n et m sont des entiers positifs, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2 respectivement et ε est un petit paramètre.

Dans le cinquième chapitre, nous étudions le nombre maximum de cycles limites qui peut être obtenu en perturbant le centre non linéaire $\dot{x} = y^{2p-1}$, $\dot{y} = -x^{2q-1}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2p-1}, \\ \dot{y} = -x^{2q-1} - \varepsilon(f(x, y) + g(x, y)y + h(x, y)y^2 + l(x, y)y^3), \end{cases}$$

où p et q sont des entiers positifs, $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, $l(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre.

Dans le sixième chapitre, nous étudions le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynômiaux de Kukles généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y^{2p} - g(x)y^{2p+1} - h(x)y^{2p+2} - l(x)y^{2p+3}, \end{cases}$$

où $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$, $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ et $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$, où $f^k(x)$, $g^k(x)$, $h^k(x)$ et $l^k(x)$ sont de degrés n_1, n_2, n_3, n_4 respectivement pour $k = 1, 2$, p est un nombre positif et ε est un petit paramètre.

Dans le septième chapitre, nous étudions le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynômiaux de Kukles généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f_1(x, y) - f_2(x, y)y - g_1(x, y)y^2 - g_2(x, y)y^3, \end{cases}$$

où $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y) + \varepsilon^2 f_{12}(x, y)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$, $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y) + \varepsilon^2 g_{12}(x, y)$ et $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y) + \varepsilon^2 g_{22}(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement. ε est un petit paramètre.

Mots clés : théorie de moyennisation, Système différentiel de Kukles, cycle limite, bifurcation de Hopf.

Abstract

The objective of this thesis is to study the maximum number of limit cycles of some polynomial differential systems using averaging method. This study is illustrated by applications.

In the third chapter, we study the maximum number of limit cycles which occurs by zéro-Hopf bifurcation at the origin of a quadratic system in \mathbb{R}^4 of the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z - (b + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (b + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)z + (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right.$$

where

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) = & a_{j,0}x^2 + a_{j,1}xy + a_{j,2}xz + a_{j,3}xw + a_{j,4}y^2 + a_{j,5}yz + a_{j,6}yw \\ & + a_{j,7}z^2 + a_{j,8}zw + a_{j,9}w^2, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ and $W_j(x, y, z, w)$ have the same expression as $X_j(x, y, z, w)$ by replacing a_{ji} respectively by b_{ji} , c_{ji} and d_{ji} .

In the fourth chapter, we study the maximum number of limit cycles which occur by a bifurcation of the origin for a planar system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(1 + \sin^n \theta)xP(x, y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)yQ(x, y), \end{cases}$$

where m, n are non-negative integers, $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ are polynomials of degree n_1 and n_2 respectively and ε is a small parameter.

In the fifth chapter, we study the maximum number of limit cycles which can be obtained by perturbation of the nonlinear center $\dot{x} = y^{2p-1}$, $\dot{y} = -x^{2q-1}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2p-1}, \\ \dot{y} = -x^{2q-1} - \varepsilon(f(x, y) + g(x, y)y + h(x, y)y^2 + l(x, y)y^3), \end{cases}$$

where p and q are positive integers, $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, $l(x, y)$ are polynomials of degree n_1, n_2, n_3 and n_4 respectively. ε is a small parameter.

In the sixth chapter, we study the maximum number of limit cycles for generalized polynomial Kukles differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y^{2p} - g(x)y^{2p+1} - h(x)y^{2p+2} - l(x)y^{2p+3}, \end{cases}$$

where $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$, $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$, and $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, where $f^k(x), g^k(x), h^k(x)$ and $l^k(x)$ have degree n_1, n_2, n_3, n_4 respectively for $k = 1, 2$. p is a positive integer and ε is a small parameter.

In the seventh chapter, we study the maximum number of limit cycles for generalized polynomial Kukles differential system of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - f_1(x, y) - f_2(x, y)y - g_1(x, y)y^2 - g_2(x, y)y^3, \end{cases}$$

where $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y) + \varepsilon^2 f_{12}(x, y)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$, $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y) + \varepsilon^2 g_{12}(x, y)$ and $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y) + \varepsilon^2 g_{22}(x, y)$ have degree n_1, n_2, n_3 and n_4 respectively, and ε is a small parameter.

key words : Averaging theory, Kukles differential system, Limit cycle, Hopf bifurcation.

الملخص

هدفنا في هذه الأطروحة هو دراسة العدد الأكبر للدورات الحدية لمجموعة من الجمل التفاضلية باستعمال نظرية المتوسط، هذه الدراسة موضحة بمجموعة من التطبيقات.

في الفصل الثالث، درسنا العدد الأكبر للدورات الحدية المتفرعة عن مبدأ الإحداثيات لأنظمة تفاضلية بكثيرات حدود من الدرجة الثانية في \mathbb{R}^4 من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b+b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b+b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z - (b+d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (b+d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)z + (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{cases}$$

حيث

$$X_j(x, y, z, w) = a_{j,0}x^2 + a_{j,1}xy + a_{j,2}xz + a_{j,3}xw + a_{j,4}y^2 + a_{j,5}yz + a_{j,6}yw + a_{j,7}z^2 + a_{j,8}zw + a_{j,9}w^2.$$

$W_j(x, y, z, w)$ و $Z_j(x, y, z, w)$, $Y_j(x, y, z, w)$ لديهم نفس عبارة $X_j(x, y, z, w)$ وذلك من خلال تعويض $a_{i,j}$ ب $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ و $d_{i,j}$.

في الفصل الرابع، درسنا العدد الأكبر للدورات الحدية الناتجة عن ذبذبة المبدأ لجملة تفاضلية من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (1 + \sin^n \theta)xP(x, y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon (1 + \cos^m \theta)yQ(x, y), \end{cases}$$

حيث m, n هي أعداد طبيعية، $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ كثيرات حدود من الدرجة n_1 و n_2 بالترتيب. و ε وسيط صغير.

في الفصل الخامس، قمنا بدراسة العدد الأكبر للدورات الحدية التي نتحصل عليها عن طريق ذبذبة المركز الغير خطي

$$\dot{y} = -x^{2q-1}, \dot{x} = y^{2p-1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2p-1}, \\ \dot{y} = -x^{2q-1} - \varepsilon(f(x, y) + g(x, y)y + h(x, y)y^2 + l(x, y)y^3), \end{cases}$$

حيث p و q هي أعداد طبيعية $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, $l(x, y)$ كثيرات حدود من الدرجة n_1, n_2, n_3 بالترتيب و ε وسيط صغير.

في الفصل السادس، قمنا بدراسة العدد الأكبر للدورات الحدية لجملة تفاضلية معممة كثيرة الحدود لكيكلاس من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y^{2p} - g(x)y^{2p+1} - h(x)y^{2p+2} - l(x)y^{2p+3}, \end{cases}$$

حيث $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$, $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$ و $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$ مع l^k, f^k, g^k, h^k من الدرجة n_4, n_3, n_2, n_1 على الترتيب من اجل $k = 1, 2$ عدد موجب و ε وسيط صغير.

في الفصل السابع، قمنا بدراسة العدد الأكبر للدورات الحدية لجملة تفاضلية معممة كثيرة الحدود لكيلاس من الشكل

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f_1(x, y) - f_2(x, y)y - g_1(x, y)y^2 - g_2(x, y)y^3, \end{cases}$$

حيث $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$, $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y) + \varepsilon^2 f_{12}(x, y)$ و $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y) + \varepsilon^2 g_{22}(x, y)$ و $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y) + \varepsilon^2 g_{12}(x, y)$ كثيرات حدود من الدرجة n_4 و n_3, n_2, n_1 بالترتيب و ε وسيط صغير.

كلمات مفتاحية: نظرية المتوسط، نظام كيلاس التفاضلي، دورة حدودية، تفرع هوبف.



TABLE DES MATIÈRES

1	Notions préliminaires	8
1.1	Définitions générales du système dynamique	9
1.2	Notion du flot	10
1.3	Systèmes différentiels polynômiaux	10
1.4	Points d'équilibres	10
1.5	Linéarisation	10
1.6	Nature des points d'équilibres	11
1.6.1	Cas des systèmes linéaires	11
1.6.2	Cas des systèmes non linéaires	12
1.6.3	Stabilité des points d'équilibres	13
1.7	Méthode directe de Lyapunov	14
1.7.1	La stabilité par la méthode directe de Lyapunov	14
1.8	Étude qualitative au voisinage d'un point d'équilibre	15
1.9	Plan et portrait de phase	16
1.10	Solutions périodiques et cycles limites	16
1.10.1	Solutions périodiques	16
1.10.2	La méthode du gradient	17
1.10.3	Cycles limites	17
1.10.4	Stabilité des cycles limites	18
1.11	Existence et non-existence des cycles limites	19
1.11.1	Existence et unicité des cycles limites	19
1.11.2	Non existence des cycles limites	19
1.11.3	Intégrales premières	19
1.12	Bifurcation de Hopf	20
1.13	Théorème de Bezout	22
1.14	Théorème de Descartes	22
1.15	Système Hamiltonien	22
1.16	Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales	22
2	Théorie de moyennisation	24
2.1	Théorie de moyennisation du premier ordre	24
2.2	Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre	27
2.3	Théorie de moyennisation du second ordre	31
2.4	Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer	34
3	La Bifurcation zéro-Hopf dans \mathbb{R}^4	35
3.1	Introduction et résultats principaux	35
3.2	Preuve du théorème 3.1	36

3.3	Applications	43
4	Cycles limites pour une classe de systèmes différentiels planaires	45
4.1	Introduction et résultats principaux	45
4.2	Preuves des résultats	46
4.3	Applications	54
5	Cycles limites pour le système de Kukles généralisé	56
5.1	Introduction et résultat principaux	56
5.2	Preuves des résultats	57
5.2.1	Preuve du théorème 5.1	57
5.2.2	Preuve du Corollaire 5.2	60
6	Estimation du nombre de cycles limites pour une classe des systèmes de Kukles généralisés	62
6.1	Introduction et résultats principaux	62
6.2	Preuves des résultats	63
6.2.1	Preuve du théorème 6.1	63
6.2.2	Preuve du théorème 6.2	65
6.3	Applications	81
7	Le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes de Kukles généralisés	83
7.1	Présentation du problème et résultats principaux	83
7.2	Preuves des résultats	84
7.2.1	Preuve du cas (a) du théorème 7.1	84
7.2.2	Preuve du cas (b) du théorème 7.1	86
7.3	Applications	97
	Appendice	100



INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches, et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la physique et plus récemment la biologie, l'électronique. Il convient de souligner que la plupart de ces équations sont globalement de nature non-linéaire. Du fait que la description d'un système, à partir des lois régissant son fonctionnement, conduit souvent à un modèle non linéaire, la manipulation peut se révéler complexe. De ce fait il n'existe pas une théorie de l'ensemble des équations non-linéaires. Des calculs approchés basés sur la méthode des petites perturbations, des méthodes de linéarisation...etc, sont effectués concernant ces phénomènes, sur lesquels on dispose de très peu d'informations. A partir de tels calculs, il a été déduit des conjectures que les chercheurs s'efforceront par la suite de démontrer.

Soit l'équation différentielle dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (0.0.a)$$

où P et Q sont des polynômes. Existe-t-il une borne K pour le nombre de cycles limites, de la forme $K \leq d^q$, où d est le maximum des degrés de P et Q , et q est une constante universelle?. C'est une version moderne de la seconde moitié du seizième problème de Hilbert.

En fait, depuis un article de Petrovskii et Landis (1957) prétendant donner une solution positive, les progrès semblent aller en reculant. Un peu plus tôt, Dulac (1923) affirmait que le système (0.0.a) a toujours un nombre fini de cycles limites. Après qu'un trou fût trouvé dans Petrovskii-Landis (voir [Petrovskii- Landis, 1959]), Ilyashenko (1985) a trouvé une erreur dans l'article de Dulac.

Puis Shi Songling (1982) a trouvé un contre-exemple aux bornes spécifiques de Petrovskii-Landis pour le cas $d = 2$. Ensuite, deux longs travaux ont été publiés, indépendamment, démontrant les affirmations de Dulac [Écalle, 1992] et [Ilyashenko, 1991].

Les chercheurs considèrent deux classes spéciales des équations différentielles : les systèmes de Liénard généralisés et les systèmes de Kukles généralisés.

Le système de Liénard polynomial s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \end{cases} \quad (0.0.b)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux polynômes de degré n et m respectivement. Ce système est très intéressant pour étudier les cycles limites des systèmes planaires. Nous avons une version simplifiée du problème de Hilbert dans [50] (1998). En 1977, Lins et al. [25] ont déclaré la conjecture que si $f(x)$ est de degré $n \geq 1$ alors le système (0.0.b) a au plus $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cycles limites. Ils ont prouvé cette conjecture pour $n = 1, 2$. La conjecture pour $n = 3$ a été prouvé par Li Chengzi et Llibre dans [22] (2012).

On note $H(m, n)$ le nombre maximal de cycles limites qui peuvent exister simultanément pour le système (0.0.b). L'histoire commence avec Liénard (1928), un ingénieur français qui établit un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour le système portant son nom (pour une revue complète des résultats antérieurs aux années soixante-dix, voir le livre de Sansone et Conti [49] (1964)).

- En 1928, Liénard [24] montra que si $m = 1$ et si $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ est une fonction continue et impaire qui a une unique racine positive en $x = a$ et qui est strictement croissante pour $x \geq a$, alors le système (0.0.b) possède un unique cycle limite.
- En 1975, Rychkov [44] a prouvé que pour des polynômes $F(x)$ impairs et de degré 5 et si $m = 1$, alors (0.0.b) n'a au plus que 2 cycles limites.
- En 1977, Lins, De Melo et Pugh [25] ont prouvé que si $m = 3$ et $n = 1$, alors il n'y a au plus qu'un cycle limite. Ils ont de plus donné les conditions pour que ce cycle existe.
- En 1983, Xianwu [53] a prouvé la conjecture pour certains cas où $m = 4$ et $n = 1$.
- Dumortier et al. dans [15] et [13] ont prouvé que $H(3, 1) = 1$.
- En 1997, Dumortier et Li [14] ont prouvé que $H(2, 2) = 1$.
- En 1998, Coppel [12] a prouvé que $H(2, 1) = 1$.

Notons par $\hat{H}(m, n)$ le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude du système (0.0.b). Blows, Lloyd [2] en 1984 et Lynch [[33], [34]] (1988, 1995) ont prouvé que

- Si g est impair alors $\hat{H}(m, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- Si f est pair alors $\hat{H}(m, n) = n$, quelque soit g .
- Si f est impair alors $\hat{H}(m, 2n + 1) = \lfloor \frac{(m-2)}{2} \rfloor + n$.
- Si $g(x) = x + g_e(x)$ où g_e est pair, alors $\hat{H}(2m, 2) = m$.

- En 1998, Gasull et Torregrosa [17] ont amélioré certains résultats et ont obtenu une borne supérieure pour $\hat{H}(6, 7)$, $\hat{H}(7, 6)$, $\hat{H}(7, 7)$ et $\hat{H}(4, 20)$.

- En 1999, Christopher et Lynch [[11], [35]] ont montré que :

- ◇ $\hat{H}(m, 2) = \lfloor \frac{(2m+1)}{3} \rfloor$.
- ◇ $\hat{H}(2, n) = \lfloor \frac{(2n+1)}{3} \rfloor$.
- ◇ $\hat{H}(m, 3) = 2 \lfloor \frac{(3m+2)}{8} \rfloor$ pour tout $1 < m \leq 50$.
- ◇ $\hat{H}(3, n) = 2 \lfloor \frac{(3n+2)}{8} \rfloor$ pour tout $1 < n \leq 50$
- ◇ $\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4)$ pour $k = 6, 7, 8, 9$ et $\hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5)$.
- ◇ En 2006, Yu et Han [54] ont prouvé que $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$ pour $n = 4, m = 10, 11, 12, 13$; $n = 5, m = 6, 7, 8, 9$; $n = 6, m = 5, 6$. Voir aussi Llibre [28] pour un tableau avec toutes les valeurs spécifiques.

En 2012, Llibre J. Valls.C [31] ont étudié, en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre un et deux un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(g_{11}(x) + f_{11}(x)y) - \varepsilon^2(g_{12}(x) + f_{12}(x)y), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(g_{21}(x) + f_{21}(x)y) - \varepsilon^2(g_{22}(x) + f_{22}(x)y), \end{cases}$$

où $g_{1i}, f_{1i}, g_{2i}, f_{2i}$ pour $i = 1, 2$ de degré l, k, m et n respectivement et ε un petit paramètre.

En 2013, Llibre et Valls [30] ont étudié le système différentiel polynômial plus général

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x)y, \end{cases}$$

où $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x) + \varepsilon^3 f_{13}(x)$, $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x) + \varepsilon^3 g_{23}(x)$ et $f_2(x) = \varepsilon f_{21}(x) + \varepsilon^2 f_{22}(x) + \varepsilon^3 f_{23}(x)$ où f_{1i}, f_{2i} et g_{2i} de degré l, n et m respectivement pour $i = 1, 2, 3$ et ε suffisamment petit.

Ils ont trouvé une borne supérieure du nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la méthode de moyennisation d'ordre trois.

Le système polynomial généralisé de Kukles s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (0.0.c)$$

où $Q(x, y)$ est le polynôme avec des coefficients réels du degré n .

Kukles [42], en 1944 a introduit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x^3 + a_5 x^2 y + a_6 xy^2 + a_7 y^3, \end{cases} \quad (0.0.d)$$

et a donné la condition nécessaire et suffisante pour que le système ait un centre à l'origine. Ce système cubique sans le terme y^3 a aussi étudié dans [43] et les auteurs l'ont appelé système réduit. Dans [10], une description de la bifurcation de ses périodes critiques apparut, et [56] présente l'existence des systèmes réduits de Kukles avec cinq cycles limites. Dans [45], l'auteur a étudié la classe des systèmes réduits de Kukles sous une perturbation cubique.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - \frac{a+1}{a}x^2 + \frac{2-a}{1-a}y^2 + \frac{1}{a}x^3 + \varepsilon g(x, y), \end{cases} \quad (0.0.e)$$

où

$$g(x, y) = b_{01}y + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{12}xy^2 + b_{21}x^2y + b_{03}y^3,$$

et $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre et $a > 2$ est une constante.

Dans [8], l'auteur a prouvé que certains systèmes cubiques de la forme (0.0.c) pouvant avoir sept cycles limites. Dans [5], Chavarriga and al ont étudié le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude pour les systèmes de Kukles qui peuvent coexister avec quelques courbes algébriques invariantes. Aussi ils ont donné une famille de systèmes cubiques de Kukles.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \lambda y + abx^2 - a(a^2 + 3c - b\lambda)xy - 2aby^2 - b^2cx^3 \\ \quad - b(b^2 - a^2c - 2c^2 + bc\lambda)x^2y - b^2(-a^2 - 3c + b\lambda)xy^2 + b^3y^3, \end{cases} \quad (0.0.f)$$

avec une hyperbole invariante

$$h(x, y) = 1 + abx - b^2cx^2 - b^3xy = 0, \text{ avec } b \neq 0,$$

qui coexiste avec un ou deux cycles limites de faible amplitudes. Dans [28], les auteurs ont étudié le nombre maximum de cycles limites des équations différentielles polynomiales généralisées de Liénard en utilisant la méthode de la moyennisation du premier et second ordre. Dans [27], Llibre et Mereu ont étudié le nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux de Kukles.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_n^k(x) + g_m^k(x)y + h_l^k(x)y^2 + d_0^k y^3) \end{cases}, \quad (0.0.g)$$

où pour chaque k les polynômes $f_n^k(x)$, $g_m^k(x)$ et $h_l^k(x)$ ont respectivement les degrés n , m et l , $d_0^k \neq 0$ est un nombre réel et ε est un petit paramètre.

En 2019, Boulfoul et al [6] ont étudié par la méthode de la moyennisation le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$, du système différentiel polynômial de Kukles de type

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases} \quad (0.0.h)$$

où $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x)$, $g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x)$, $h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ et $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$ sont de degrés n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre.

Cette thèse est scindée en sept chapitres.

Le chapitre 1 est un rappel sur les notions de base de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. On introduira des définitions élémentaires tels que : le système dynamique, les points d'équilibre et leurs natures, la linéarisation et la stabilité au voisinage d'un point d'équilibre, le cycle limite ainsi que des théorèmes sur l'existence et la non-existence des cycles limites. On introduira aussi un rappel succinct de la bifurcation de Hopf.

Dans le chapitre 2 nous présentons la méthode de moyennisation du premier et second ordre, nous illustrons ceci à travers des exemples.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la bifurcation de zéro-Hopf dans \mathbb{R}^4 . On démontre un résultat sur le nombre maximum de cycles limites qui se produit par une bifurcation de zéro-Hopf autour de l'origine d'un système quadratique dans \mathbb{R}^4 . Nous traitons cette étude en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux. Le résultat de ce chapitre est soumis pour publication intitulé "**4-Dimensional Hopf Bifurcation via averaging theory of second order**".

L'objectif du chapitre 4 est de donner le nombre maximal de cycles limites pour un système planaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(1 + \sin^n \theta)xP(x, y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)yQ(x, y), \end{cases}$$

où n et m sont des entiers positifs, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2 respectivement et ε est un petit paramètre.

Le résultat de ce chapitre est soumis pour publication sous l'intitulé "**Limit cycles of a planar differential system via averaging theory**".

L'objectif du chapitre 5 est de donner le nombre maximal de cycles limites qui peut être obtenu en perturbant le centre non linéaire $\dot{x} = y^{2p-1}$, $\dot{y} = -x^{2q-1}$, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2p-1}, \\ \dot{y} = -x^{2q-1} - \varepsilon(f(x, y) + g(x, y)y + h(x, y)y^2 + l(x, y)y^3), \end{cases}$$

où p et q sont des entiers positifs, $f(x, y), g(x, y), h(x, y), l(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre.

Le résultat de ce chapitre est soumis pour publication sous l'intitulé "**Limit cycles of a Kukles differential system via averaging theory**".

Le chapitre 6 concerne l'étude du nombre maximal des cycles limites qui bifurquent d'un centre linéaire perturbé par une classe généralisée de systèmes différentiels de Kukles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y^{2p} - g(x)y^{2p+1} - h(x)y^{2p+2} - l(x)y^{2p+3}, \end{cases}$$

où $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x)$, $g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x)$, $h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$, et $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, où $f^k(x), g^k(x), h^k(x)$ et $l^k(x)$ sont de degrés n_1, n_2, n_3, n_4 respectivement pour $k = 1, 2$, p est un nombre positive, ε est un petit paramètre.

Le résultat de ce chapitre est soumis pour publication sous l'intitulé "**Estimation of the number of limit cycles for generalized Kukles differential system**".

Dans le chapitre 7 nous donnons le nombre maximal de cycles limites de certains systèmes de Kukles généralisés de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f_1(x, y) - f_2(x, y)y - g_1(x, y)y^2 - g_2(x, y)y^3, \end{cases}$$

où $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y) + \varepsilon^2 f_{12}(x, y)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$, $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y) + \varepsilon^2 g_{12}(x, y)$ et $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y) + \varepsilon^2 g_{22}(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre.

Le résultat de ce chapitre a été accepté dans le journal "Journal of Applied analysis", intitulé "**Maximum number of limit cycles for generalized Kukles differential system**".

NOTIONS PRÉLIMINAIRES



Sommaire

1.1 Définitions générales du système dynamique	9
1.2 Notion du flot	10
1.3 Systèmes différentiels polynômiaux	10
1.4 Points d'équilibres	10
1.5 Linéarisation	10
1.6 Nature des points d'équilibres	11
1.6.1 Cas des systèmes linéaires	11
1.6.2 Cas des systèmes non linéaires	12
1.6.3 Stabilité des points d'équilibres	13
1.7 Méthode directe de Lyapunov	14
1.7.1 La stabilité par la méthode directe de Lyapunov	14
1.8 Étude qualitative au voisinage d'un point d'équilibre	15
1.9 Plan et portrait de phase	16
1.10 Solutions périodiques et cycles limites	16
1.10.1 Solutions périodiques	16
1.10.2 La méthode du gradient	17
1.10.3 Cycles limites	17
1.10.4 Stabilité des cycles limites	18
1.11 Existence et non-existence des cycles limites	19
1.11.1 Existence et unicité des cycles limites	19
1.11.2 Non existence des cycles limites	19
1.11.3 Intégrales premières	19
1.12 Bifurcation de Hopf	20
1.13 Théorème de Bezout	22
1.14 Théorème de Descartes	22
1.15 Système Hamiltonien	22
1.16 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales	22

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques.

1.1 Définitions générales du système dynamique

On considère un espace topologique M (c'est à dire un ensemble de points muni d'une topologie) [39]

Définition 1.1 [16] Une carte de dimension n sur M est un couple (U, φ) formé de

- un ouvert $U \subset M$,
- un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ (un homéomorphisme est une application continue et inversible dont l'inverse est continue).

L'ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$: φ est ce que l'on appelle une fonction coordonnées.

Un point de M peut appartenir à deux domaines différents correspondants à deux cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Définition 1.2 Un système dynamique sur E est une carte C^1

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (t, x) &\rightarrow \phi(t, x), \end{aligned}$$

où E est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et si $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, alors ϕ_t satisfait

- ❶ $\phi_0(x) = x$ pour tout $x \in E$.
- ❷ $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$ pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

Exemple 1.1 Soit le système

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1.a}$$

où A est une matrice constante, $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La solution de (1.1.a) est donnée par

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

le système (1.1.a) engendre un système dynamique

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \phi(t, x) &= e^{At} x_0. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est linéaire si

$$\phi(t, \alpha x + \beta y) = \alpha \phi(t, x) + \beta \phi(t, y),$$

$\forall \alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Notion du flot

Définition 1.3 Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2.a)$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\varphi(t, x_0)$ la solution de (1.2.a). L'ensemble des applications φ_t définies par

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0),$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.2.a).

1.3 Systèmes différentiels polynômiaux

Définition 1.4 On appelle système différentiel du plan, un système de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.3.a)$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on dit aussi que (1.3.a) est un système différentiel planaire polynômial.

- Le système (1.3.a) est de degré d où $d = \max(\deg P, \deg Q)$.
- Si P et Q ne dépendent pas de t explicitement, alors le système (1.3.a) est dit autonome.

1.4 Points d'équilibres

Pour connaître l'aspect des trajectoires du système (1.3.a), au moins localement, nous devons chercher ses points d'équilibre.

Définition 1.5 On dit que le point (x_0, y_0) est un point d'équilibre (point critique) du système (1.3.a), s'il est solution du système

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

1.5 Linéarisation

Le système

$$\dot{x} = Ax, \text{ où } A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (1.5.a)$$

est appelé le système linéarisé du système (1.3.a) en x_0 .

Exemple 1.2 Dans le cas $n = 2$, soit

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

alors les points d'équilibre de $f(x) = 0$, sont : $(1,0)$ et $(-1,0)$.

Le système linéarisé est

$$Ax = Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

alors

$$Df(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Df(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la linéarisation du système d'équations différentielles nous amène à l'étude de la nature des points d'équilibres.

Définition 1.6 Le point critique x_0 du système (1.3.a) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $A = Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

1.6 Nature des points d'équilibres

1.6.1 Cas des systèmes linéaires

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.6.a}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice constante inversible, et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de la matrice A qui sont les racines du polynôme caractéristique suivant

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

Définition 1.7 Soit le système différentielle linéaire planaire (1.6.a) où A est une matrice d'ordre 2, λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A .

1) Cas réel :

- i) Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et de signes différents, la solution $x = x_0$ est appelée **un selle** est toujours instable.
- ii) Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles, non nulles et de même signe, la solution $x = x_0$ est appelée **un noeud**

Si de plus :

- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ est **un noeud impropre stable**.
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ est **un noeud impropre instable**.
- Si $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ on a deux cas :
 - ◇ Si A est diagonalisable, la singularité est **un noeud propre**, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.
 - ◇ Si A est non diagonalisable, la singularité est **un noeud exceptionnel**, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.

2) Cas complexes :

Si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

i) Si $\alpha \neq 0$ on a :

- $\alpha > 0$ est **un foyer instable**.
- $\alpha < 0$ est **un foyer stable**.

ii) Si $\alpha = 0$: le point critique est **un centre**. Il est stable mais pas asymptotiquement stable.

1.6.2 Cas des systèmes non linéaires

Définition 1.8 Un point d'équilibre x_0 du système (1.3.a) est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles négatives. Il est appelé **source** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles positives. Il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

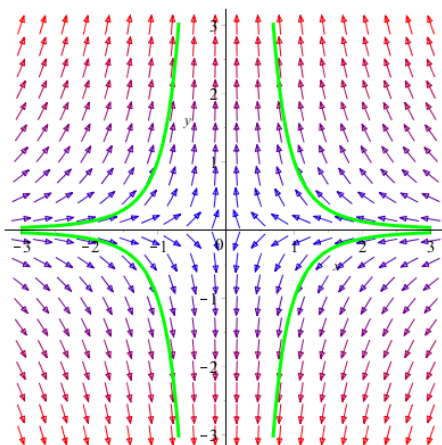


FIGURE 1.1 – selle

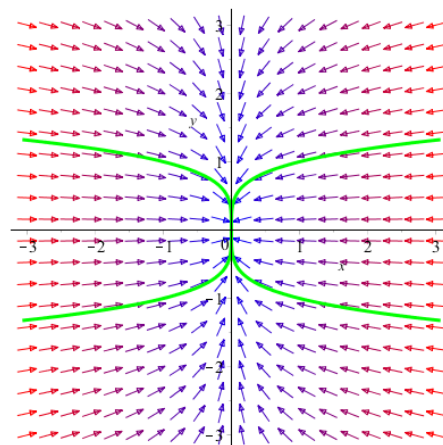


FIGURE 1.2 – noeud impropre stable

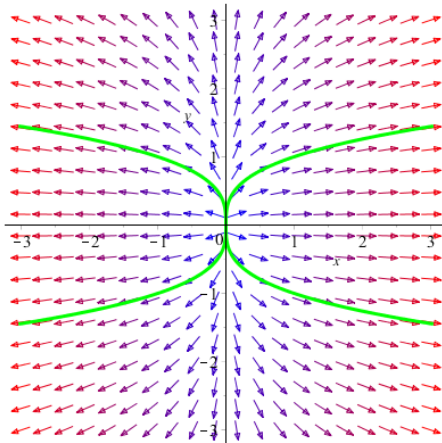


FIGURE 1.3 – noeud impropre instable

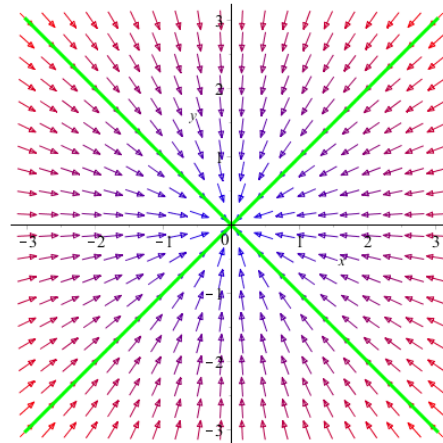


FIGURE 1.4 – noeud propre stable

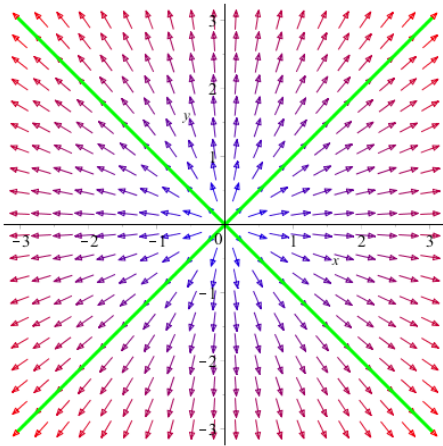


FIGURE 1.5 – noeud propre instable

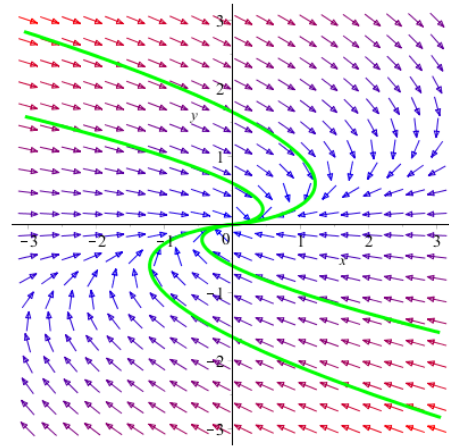


FIGURE 1.6 – noeud exceptionnel stable

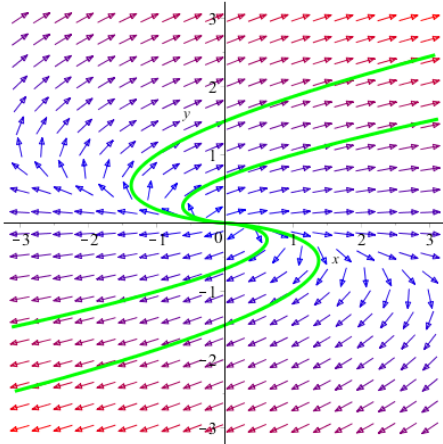


FIGURE 1.7 – noeud exceptionnel in-stable

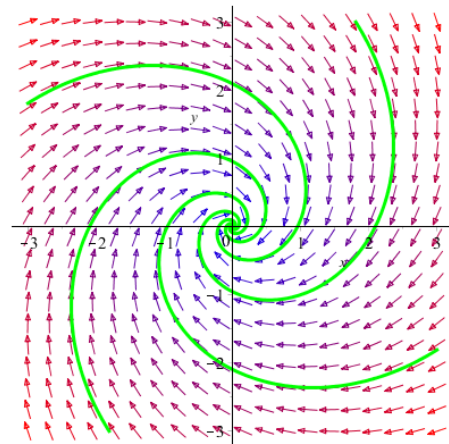


FIGURE 1.8 – foyer stable

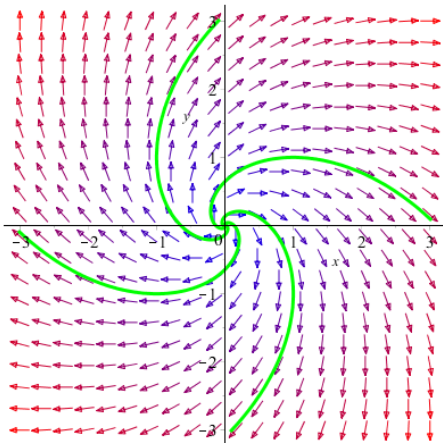


FIGURE 1.9 – foyer instable

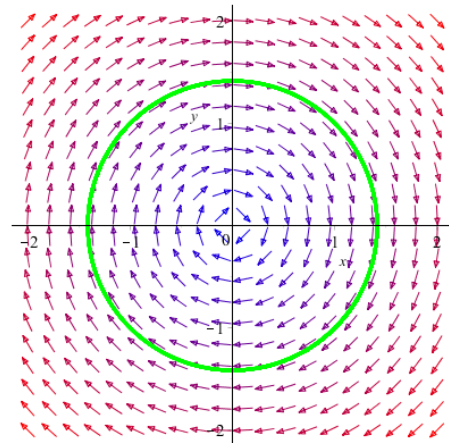


FIGURE 1.10 – centre

1.6.3 Stabilité des points d'équilibres

Définition 1.9 On dit qu'un point d'équilibre est stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que, si

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x) - x_0\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0,$$

avec $\varphi(t, x)$ est appelé le flot de l'équation différentielle (1.2.a).

Définition 1.10 On dit qu'un point d'équilibre x_0 est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage de x_0 tel que pour tout x dans ce voisinage, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_0$.

Théorème 1.1 Soit le système linéaire (1.5.a). Le point $x = x_0$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négatives. Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors le point $x = x_0$ est instable.

1.7 Méthode directe de Lyapunov

Pour l'étude de la stabilité non linéaire, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé, Lyapunov a proposé une seconde méthode basée sur la recherche, d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs réelles.

1.7.1 La stabilité par la méthode directe de Lyapunov

Considérons le système (1.2.a), supposons que l'origine est un point singulier de (1.2.a) et posons $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie dans un voisinage U de l'origine, telle que :

- $V(0) = 0$.
- $V(x) > 0$ pour $x \neq 0, x \in U$.

Si $V(x) \geq 0$ alors la fonction est dite semi-définie positive. La méthode des fonctions de Lyapunov consiste à étudier directement la stabilité des points singuliers d'un système différentiel (1.2.a), à l'aide d'une fonction convenablement choisie $V(x)$ que l'on appelle fonction de Liapunov.

Théorème 1.2 (Théorème de Lyapunov de la stabilité).

Si pour le système (1.2.a) il existe une fonction $V(x)$ (fonction de Lyapunov) de signe défini (définie positive ou définie négative) tel que

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

est une fonction semi-définie (positive ou négative) de signe inverse de V ou est identiquement nulle, alors le point d'équilibre $x = 0$ est stable.

Théorème 1.3 (Théorème de Lyapunov de la stabilité asymptotique).

Si pour le système (1.2.a) il existe une fonction $V(x)$ (fonction de Lyapunov) de signe défini (définie positive ou définie négative) tel que

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

est une fonction définie (positive ou négative) de signe inverse de V , alors le point d'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Théorème 1.4 (Théorème de Lyapunov de l'instabilité).

Supposons que pour le système (1.2.a) il existe une fonction $V(x)$ dérivable au voisinage de l'origine 0 et telle que $V(0) = 0$. Si

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

$f_i(x)$ est définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut de l'origine des points en lesquels la fonction $V(x)$ prend des valeurs positives, alors le point d'équilibre $x = 0$ est instable.

Remarque 1.2 La méthode directe de Lyapunov est justement applicable aux systèmes non autonomes

$$\dot{x} = f(x, t),$$

une petite modification est apportée pour que $V(x, t)$ soit définie positive dans U , on exige l'existence d'une fonction $W(x)$ continue dans U vérifiant :

- $W(0) = 0$
- $0 < W(x) \leq V(x, t)$.

La dérivée de V par rapport au temps s'écrit

$$\frac{dV(x, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Les propriétés de stabilité sont dites globales si U est égal à \mathbb{R}^n .

Remarque 1.3 La méthode directe de Lyapunov donne des conditions suffisantes mais pas nécessaires de stabilité.

1.8 Étude qualitative au voisinage d'un point d'équilibre

Considérent le système d'équation différentiel autonome donné par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.8.a}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Soit J la matrice jacobienne au voisinage de x^* un point d'équilibre de (1.8.a). Soient $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs λ dont la partie réelle négative, $\{v_1, v_2, \dots, v_u\}$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est positive et $\{w_1, w_2, \dots, w_c\}$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est nulle, tel que $s + u + c = n$. On note E^s le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$, E^u le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, \dots, v_u\}$ et E^c le sous-espace vectoriel engendré par $\{w_1, w_2, \dots, w_c\}$, avec $E^s \oplus E^u \oplus E^c = \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.5 (Théorème de la variété centrale).[37] Il existe des variétés de classe C^r stable W^s , instable W^u et centrale W^c tangentes respectivement à E^s, E^u et E^c en x^* . Ces variétés sont invariantes par rapport au flot ϕ_t de (1.8.a).

Supposons que, par un changement de coordonnées, le point fixe x^* ait été ramené à l'origine et les équations du système dynamique mises sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y), \\ \dot{y} = By + g(x, y), \end{cases} \tag{1.8.b}$$

où x et f sont des n -vecteurs et A une matrice $n \times n$ dont les valeurs propres sont de partie réelle nulle. De même y et g sont des m -vecteurs et B une matrice $m \times m$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle négative.

Localement, la variété centrale peut être représentée au voisinage de $x^* = 0$ par :

$$W^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}, \quad (1.8.c)$$

pour δ suffisamment petit. Les conditions $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$ implique que la variété centrale W^c est tangente à $E^c \equiv (y = 0)$ au point $(x, y) = (0, 0)$. Portant $y = h(x)$ avec $h(0) = Dh(0) = 0$ dans (1.8.b), on obtient

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x)), \quad (1.8.d)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Pour calculer la fonction $y = h(x)$, on remplace dans (1.8.b) \dot{y} par $Dh(x)\dot{x}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Dh(x)\dot{x} \\ &= Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] \\ &= Bh(x) + g(x, h(x)). \end{aligned}$$

D'où le système qui nous permettra de trouver la fonction $h(x)$:

$$Dh(x)[Ax, f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0. \quad (1.8.e)$$

Dans la pratique, on résout approximativement (1.8.e) en développant $h(x)$ en série de Taylor autour de $x = 0$ et en tenant compte du fait que $h(0) = Dh(0) = 0$

$$h(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{2ij}x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^n a_{3ijk}x_i x_j x_k + \dots,$$

avec $a_{2ij}, a_{3ijk} \dots \in \mathbb{R}^m$.

1.9 Plan et portrait de phase

Définition 1.11 Soit le système planaire (1.3.a), un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système représentent dans le plan $(x \circ y)$ des courbes appelées orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan $(x \circ y)$ est dit le plan de phase.

1.10 Solutions périodiques et cycles limites

1.10.1 Solutions périodiques

On appelle solution périodique toute solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (1.2.a), telle qu'il existe un nombre $T > 0$ vérifiant $\varphi(t + T) = \varphi(t)$.

Remarque 1.4

- Si $\varphi(t)$ a une période T , la solution a aussi une période kT , et supposons que T est la plus petite période.
- Les points d'équilibre sont considérés comme des solutions périodiques à une période arbitraire $T \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 1.6 Soit $\varphi(t)$ une solution du système (1.2.a), supposons qu'il existe deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) tels que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ (c'est à dire que l'orbite de $\varphi(t)$ se recoupe). Alors, $\varphi(t)$ est une solution périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Lemme 1.1 Une solution périodique du système différentiel autonome (1.2.a) correspond à une orbite fermée dans le plan de phase, et une orbite fermée correspond à une solution périodique.

1.10.2 La méthode du gradient

Définition 1.12 Supposons que le système différentiel puisse s'écrire sous la forme $\dot{x} = -\overrightarrow{\text{grad}V(x)}$ où

$$\overrightarrow{\text{grad}V(x)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T,$$

et $x \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ et V est une fonction de classe C^1 définie sur U à valeur dans \mathbb{R} . On dit alors que V est un potentiel du système.

Théorème 1.7 Si un système admet un potentiel il ne peut admettre d'orbites fermées.

Exemple 1.3 Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(y), \\ \dot{y} = x \cos(y), \end{cases}$$

ce système n'admet pas d'orbites fermées puisqu'il admet la fonction $V(x, y) = -x \sin(y)$ comme potentiel.

1.10.3 Cycles limites

Définition 1.13 On appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Définition 1.14 L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.

1.10.4 Stabilité des cycles limites

Théorème 1.8 Γ étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de Γ s'enroulent toutes en spirales autour de Γ pour $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

1. Le cycle limite est dit stable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers Γ .
2. Le cycle limite est dit instable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont repoussées de Γ .

Exemple 1.4 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.10.a)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, le système (1.10.a) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

Comme $r > 0$, on n'accepte que la racine positive $r = 1$. Donc, pour $r = 1$ on a la solution périodique $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$, avec $\theta(0) = \theta_0$.

Dans le plan de phase il y a un seul cycle limite d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et d'amplitude $r = 1$.

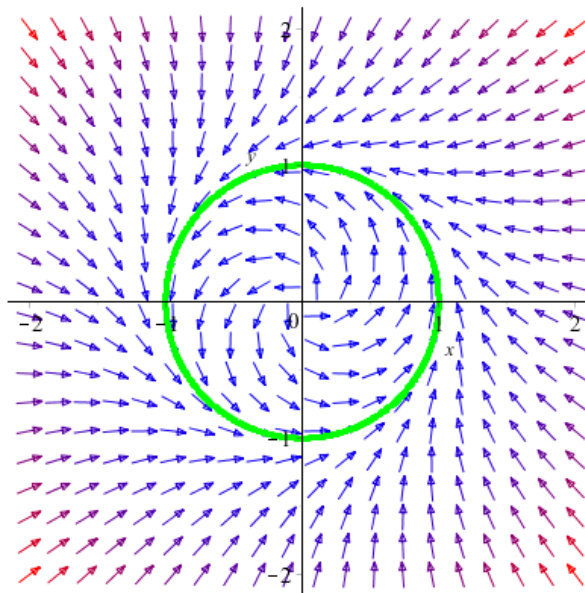


FIGURE 1.11 – Cycle limite du système (1.10.a).

1.11 Existence et non-existence des cycles limites

1.11.1 Existence et unicité des cycles limites

Théorème 1.9 (Poincaré-Bendixson). On considère le système autonome

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.11.a)$$

dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, où $f, g \in C^1(D)$. Supposons que γ^+ est une orbite bornée et positive et que $\omega(\gamma^+)$ ne contient que des points critiques. Alors $\omega(\gamma^+)$ une orbite périodique. De plus si $\omega(\gamma^+) \neq \gamma^+$ alors l'orbite périodique est appelé cycle limite. Un résultat analogue est valable pour une orbite bornée et négative.

Corollaire 1.10 Soit D un ensemble fermé borné ne contenant aucun point singulier et supposons que D est positivement invariant. Alors il existe un cycle limite contenu dans D .

Théorème 1.11 (Critère de Dulac). On considère le système (1.11.a), où f et g sont de classe C^1 sur un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$. Soit ψ une fonction de classe C^1 et A une région annulaire de E .

Si $\frac{\partial}{\partial x}(\psi f) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi g)$ ne change pas de signe dans A , alors il y a un seul cycle limite contenu dans A .

1.11.2 Non existence des cycles limites

Théorème 1.12 (Critère de Bendixson). Supposons que le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ soit simplement connexe, f et g sont continûment différentiables dans D . Le système (1.11.a) n'admet pas de cycle limite dans D , si $\nabla(f, g)$ non nulle et ne change pas de signe en D .

Théorème 1.13 (Critère de Dulac). On considère le système (1.11.a) où f et g sont de classe C^1 . Soit ψ une fonction de classe C^1 . Supposons que le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ soit simplement connexe.

Si $\frac{\partial}{\partial x}(\psi f) + \frac{\partial}{\partial y}(\psi g)$ non nulle et de signe constant sur D , alors il n'y a pas de cycle limite contenu entièrement dans D .

1.11.3 Intégrales premières

On dit qu'une fonction $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une intégrale première du système (1.11.a) si elle est constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ de ce système, c'est-à-dire

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} g(x, y) \equiv 0,$$

sur les points de Ω .

On dit que le système différentiel (1.11.a) est intégrable sur un ouvert Ω , s'il admet une intégrale première sur Ω .

1.12 Bifurcation de Hopf

Théorème 1.14 Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\mu(x, y), \\ \dot{y} = g_\mu(x, y), \end{cases} \quad (1.12.a)$$

où μ est un paramètre. Supposons que $(x, y) = (x_0, y_0)$ est un point d'équilibre du système (1.12.a) qui dépend de μ .

Soient $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ les valeurs propres du système linéarisé au voisinage de (x_0, y_0) . Supposons que pour une certaine valeur de $\mu = \mu_0$, les conditions suivantes sont satisfaites

$$1) \alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = w \neq 0 \text{ où } \text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \Big|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)\right),$$

$$2) \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0,$$

$$3) a \neq 0 \text{ où}$$

$$a = \frac{1}{16} (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + \frac{1}{16w} (f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}),$$

$$\text{avec } f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0).$$

Alors une orbite périodique bifurque du point d'équilibre pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou pour $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$.

Le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu_0$ (respectivement pour $\mu < \mu_0$) si $d < 0$ (respectivement si $d > 0$).

L'orbite périodique est stable (respectivement instable) si le point d'équilibre est instable (respectivement stable).

L'amplitude de l'orbite périodique est égale à $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$ et la période est de $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ quand $\mu \rightarrow \mu_0$.

La bifurcation est dite super-critique si l'orbite périodique est stable et sous-critique si l'orbite périodique est instable.

Exemple 1.5 On considère le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = -x + y(\mu - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (1.12.b)$$

le système (1.12.b) admet un point d'équilibre unique qui est l'origine $(0, 0)$.

Les valeurs propres de la matrice Jacobienne calculées au point d'équilibre $(0, 0)$ sont complexes conjuguées et égales à $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$.

Alors $\alpha(\mu) = \mu$ et $\beta(\mu) = 1$.

On a $\alpha(\mu) = 0 \iff \mu_0 = 0$, $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}[-1]$, $\beta(\mu_0) = -1 = \omega \neq 0$, $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Big|_{\mu_0=0} = 1 = d \neq 0$ et $a = -1$.

Donc on a une bifurcation de Hopf et la valeur de la bifurcation est $\mu_0 = 0$. D'après le Théorème (1.14), on a $ad = -1 < 0$, donc il existe un cycle limite pour $\mu > 0$. Comme $d = 1 > 0$, l'origine est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$.

Pour $\mu > 0$ le cycle limite est stable d'amplitude $\sqrt{\mu}$. On dit alors qu'on a une bifurcation de Hopf super-critique.

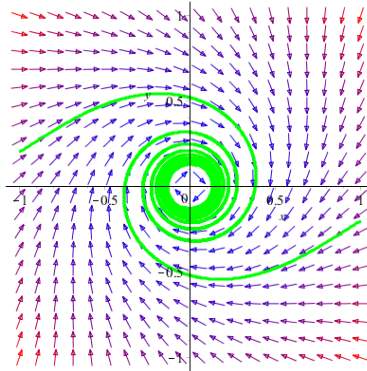


FIGURE 1.12 – Portrait de phase pour $\mu = 0$.

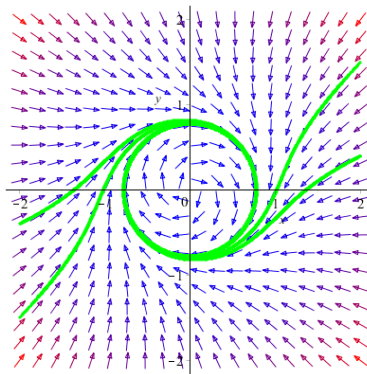


FIGURE 1.13 – Portrait de phase pour $\mu = 0,6$.

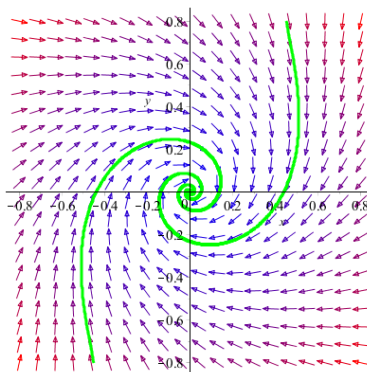


FIGURE 1.14 – Portrait de phase pour $\mu = -0,3$.

1.13 Théorème de Bezout

Théorème 1.15 Soient P_j , $j = 1, \dots, n$ des polynômes en ces variables (x_1, x_2, \dots, x_d) de degré d_j , $j = 1, \dots, n$. Considérons le système polynomial suivant

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ P_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ P_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \end{cases}$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par

$$d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n.$$

1.14 Théorème de Descartes

Théorème 1.16 Considérons le polynôme réel $p(r) = a_{i_1} r^{i_1} + a_{i_2} r^{i_2} + \dots + a_{i_n} r^{i_n}$ avec $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$ et $a_{i_j} \neq 0$ des constantes réelles pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Si $a_{i_j} a_{i_{j+1}} < 0$, on dit que a_{i_j} et $a_{i_{j+1}}$ ont une variation de signe. Si le nombre des variations des signes égal m , alors $p(r)$ a au plus m racines réelles positives. En outre, il est toujours possible de choisir les coefficients de $p(r)$ de telle sorte que $p(r)$ ait exactement $n - 1$ racine réelles strictement positives.

1.15 Système Hamiltonien

Soit E un ouvert de \mathbb{R}^{2n} et $H \in C^2(E)$ tel que $H = H(x, y)$ avec $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T, \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T, \end{aligned}$$

est dit système Hamiltonien à n degré de liberté sur E .

1.16 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^n , $t_0 < t \leq t_0 + T$, x et $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 1.15 On dit que f satisfait la condition de Lipschitz par rapport à x si

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

où $x_1, x_2 \in D$, et L est une constante.

Nous pouvons maintenant formuler un théorème bien connu d'existence et d'unicité pour des problèmes à valeur initiale.

Théorème 1.17 (existence et unicité). On considère le problème à valeur initiale

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t_0 < t \leq t_0 + T$. On suppose que :

- a) $f(t, x)$ est continue par rapport à t, x sur $G = [t_0, t_0 + T] \times D$.
- b) $f(t, x)$ satisfait la condition de Lipschitzienne en x .

Alors le problème à valeur initiale admet une solution unique.

THÉORIE DE MOYENNISATION



Sommaire

2.1	Théorie de moyennisation du premier ordre	24
2.2	Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre	27
2.3	Théorie de moyennisation du second ordre	31
2.4	Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer	34

La méthode de moyennisation est l'une des plus importantes méthodes perturbatives utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette méthode a une longue histoire qui commence avec les travaux classiques de Lagrange et Laplace en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode. La première démonstration de la validité asymptotique de cette méthode a été introduite en 1928 par **Fatou**, en 1934 par **Bogoliobov** et **Krylov** [3], en 1961 par **Bogoliobov** et **Mitropolsky** [4]. Ensuite plusieurs développements ont eu lieu de cette méthode par **Verhulst** [52], **Sanders** et **Verhulst** [48], **Malkin** [36] et **Roseau** [41], **Buicã** et **Llibre** [7]. **Giné**, **Grau** et **Llibre** [19]. **Llibre**, **Novaes** et **Teixeira** [29].

Dans ce chapitre, on présente des différents théorèmes de la théorie de moyennisation.

2.1 Théorie de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.1.a)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D est un domaine borné et $t \geq 0$. Supposons que $F(t, x)$ et $R(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (2.1.a) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.1.b)$$

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.1.c)$$

Théorème 2.1 [46] *Soit le système (2.1.a), on suppose que F , R , $D_x F$, $D_x^2 F$ et $D_x R$ sont continues et bornées par une constante M dans $[0, \varepsilon) \times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Supposons aussi que F et R sont T -périodiques en t , où T est indépendante de ε . Alors*

1) Si p est un point critique pour le système (2.1.b) tel que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (2.1.d)$$

Alors pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.1.a) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2) Si le point critique $y = p$ du système moyenné (2.1.b) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x(t, \varepsilon)$ du système (2.1.a) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .

Preuve. Voir [46]. ■

Exemple 2.1 (L'équation de Van Der Pol).

Soit

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.1.e)$$

L'équation (2.1.e) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases}$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ avec $r > 0$, ce système devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)). \end{cases} \quad (2.1.f)$$

Le système (2.1.f) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r \sin^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) + O(\varepsilon^2). \quad (2.1.g)$$

On note que l'équation (2.1.g) est sous la forme standard (2.1.a) pour appliquer la théorie de moyennisation si on prend

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(t, x) = -r \sin^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)).$$

On calcule l'équation (2.1.c), on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \sin^2(\theta)(1 - r^2 \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

$f^0(y)$ a une unique racine positive $r = 2$. Puisque $df^0/dr(r = 2) = 1$, par l'hypothèse 1 du théorème (2.1) l'équation de Van Der Pol (2.1.e) a pour $|\varepsilon| \neq 0$ une orbite périodique d'amplitude $r = 2$ du système non perturbé avec $\varepsilon = 0$. De plus, puisque $df^0/dr(r = 2) = 1 > 0$ par l'hypothèse 2 du théorème (2.1), ce cycle limite est instable. Voir la figure (2.1).

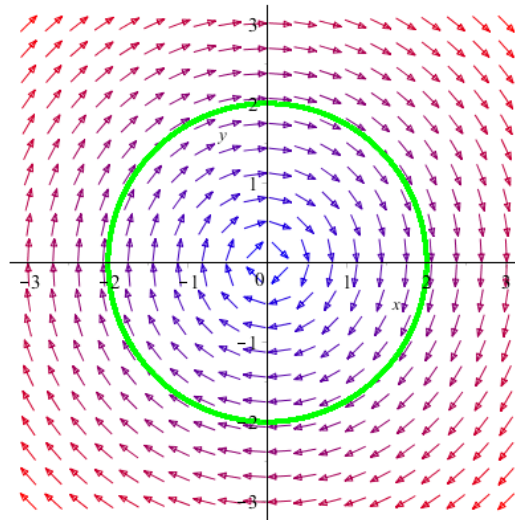


FIGURE 2.1 – Cycle limite instable de l'équation (2.1.e) pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exemple 2.2 (Système de Liénard).

Soit le système de Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \sum_{i=1}^n a_i x^i, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (2.1.h)$$

le système (2.1.h) s'écrit en coordonnées polaires

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \sum_{i=1}^n a_i r^i \cos^{i+1} \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \sum_{i=1}^n a_i r^{i-1} \cos^i \theta, \end{cases} \quad (2.1.i)$$

le système (2.1.i) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \sum_{i=1}^n a_i r^i \cos^{i+1} \theta + O(\varepsilon^2).$$

On calcule l'équation (2.1.c), on obtient

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n a_i r^i \cos^{i+1} \theta d\theta,$$

on aura

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2i+2} \theta d\theta.$$

Ce polynôme peut avoir au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ racines positives. Donc le système (2.1.h) peut avoir au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ cycles limites.

2.2 Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

Théorème 2.2 On considère le problème de bifurcation des solutions T -périodiques du système différentiel de la forme

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon), \quad (2.2.a)$$

où $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ pour ε_0 suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2 , T -périodique en t et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x), \quad (2.2.b)$$

a une sous variété des solutions périodiques de dimension k .

Soit $x(t, z)$ la solution du système non perturbé (2.2.b) telle que $x(0, z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (2.2.b) le long de la solution périodique $x(t, z)$ s'écrit

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z))y. \quad (2.2.c)$$

Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.2.c) supposons qu'il existe un ensemble ouvert V avec $CL(V) \subset \Omega$, tel que pour chaque $z \in CL(V)$, $x(t, z, 0)$ est T -périodique, où $x(t, z, 0)$ est la solution du système non perturbé (2.2.b) avec $x(0, z, 0) = z$. L'ensemble $CL(V)$ est isochrone pour le système (2.2.a); c'est à dire il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.

On note par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées, c'est à dire

$$\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_k),$$

et par $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses $n - k$ dernières coordonnées, c'est à dire

$$\xi^\perp(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Alors, on a les résultats suivants :

Théorème 2.3 [36] Soit V un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^k , et soit $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2 . supposons que :

- i) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (2.2.b) est T -périodique.
- ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.2.c) telle que la matrice $M_{z_\alpha}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit une matrice $k \times (n - k)$ nulle, et dans le coin inférieur droit la matrice $\Delta_\alpha(n - k) \times (n - k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.2.d)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.2.a) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous donnons maintenant un résultat quand $n = k$.

Théorème 2.4 [36] Soit V un ensemble ouvert et borné avec $CL(V) \subset \Omega$ tel que pour chaque $z_\alpha \in CL(V)$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$, la solution $x(t, z_\alpha)$ est T -périodique.

Considérons la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt. \quad (2.2.e)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.2.a) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 2.5 [36] Supposons que $n = 2m$. Soit V un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^m et soit $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^2 . supposons que :

i) $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (2.2.b) est T -périodique.

ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.2.c) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit la matrice $\Delta_\alpha(m \times m)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$, et dans le coin inférieur droit une matrice $m \times m$ nulle.

On considère la fonction $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi^\perp \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.2.f)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.2.a) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.3 On considère l'équation suivante :

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3), \quad (2.2.g)$$

On écrit l'équation différentielle du troisième ordre (2.2.g) comme le système différentiel du premier ordre suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3). \end{cases} \quad (2.2.h)$$

L'origine est l'unique point singulier du système (2.2.h) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (2.2.h) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\pm i$ et 1. On va faire un changement de variables linéaire

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T,$$

telle que dans les nouvelles variables (X, Y, Z) , le système (2.2.h) avec $\varepsilon = 0$ a sa partie linéaire

égale à sa forme normale de Jordan, c.à.d. $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T$, la forme normale réelle de Jordan de la matrice A est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0.$$

D'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$, c.à.d.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \quad (2.2.i)$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}, \quad (2.2.j)$$

On remplace (2.2.h) et (2.2.j) dans (2.2.i), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \end{cases} \quad (2.2.k)$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t).$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution du système (2.2.k) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

On utilise la notion introduite dans le théorème (2.3) d'après le système (2.2.k), on a

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, F_0(x, t) = \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ Z \end{pmatrix}, F_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F} \\ \tilde{F} \end{pmatrix} \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0)$ la solution du système (2.2.k) telle que

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Il est clair que, le système non perturbé (2.2.k) avec $\varepsilon = 0$ admet un centre à l'origine dans le plan (X, Y) . Les solutions périodique de ce centre sont $x(t, X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$ telle que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période 2π .

1. Pour notre système, V et α du théorème (2.2) sont $V = \{(X, Y, 0), 0 < x^2 + y^2 < \rho\}$ pour certains ρ arbitraires et $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$.
2. La matrice fondamentale $M(t)$ du système non perturbé (2.2.k) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

d'où $1 - e^{-2\pi} \neq 0$ Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème (2.3) sont vérifiées.

Par conséquent, nous allons étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premiers composantes de la fonction donnée par \mathcal{F}

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right), \quad \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c.à.d.

$$\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha)),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F \left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t \right) dt. \end{aligned} \quad (2.2.l)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F} \left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t \right) dt. \end{aligned} \quad (2.2.m)$$

On pose $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$.

On intègre (2.2.l) et (2.2.m), on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{8} Y_0 X_0 - \frac{3}{4} Y_0^2 X_0 - \frac{3}{4} Y_0 X_0^2 - \frac{3}{4} Y_0^3 - \frac{3}{4} X_0^3 + \frac{1}{8} Y_0^2 + \frac{1}{8} X_0^2, \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{1}{16} (X_0 - Y_0) (12X_0^2 - X_0 + 12Y_0^2 - Y_0). \end{cases} \quad (2.2.n)$$

Si $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$, on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

On a

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(r_0, V_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \right) = \frac{3}{8192} \neq 0.$$

Alors, pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il y a une solution isolée 2π -périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation différentielle (2.2.g) telle que

$$x(0, \varepsilon) \longrightarrow 0, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \longrightarrow -\frac{1}{8}, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

2.3 Théorie de moyennisation du second ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions de certains systèmes différentiels périodiques.

Théorème 2.6 [47] *On considère les deux problèmes de Cauchy*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.3.a)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 [f^{10}(y) + g^0(y)], \quad y(0) = x_0, \quad (2.3.b)$$

où $F_1, F_2 : [0, +\infty) \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $G : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues T -périodique en la première variable t , et D un ouvert de \mathbb{R}^n . f^0, f^{10} et g^0 sont des fonctions moyennées correspondantes à F_1, F_2 et G respectivement.

Soit

$$f_1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y_1(t, x) - \frac{\partial y_1}{\partial x} f^0(x),$$

où

$$y_1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x),$$

et $z(x)$ est une fonction différentiable de moyenne nulle. Supposons que

- $\frac{\partial F_1}{\partial x}, F_2$ et G sont Lipschitziennes relativement à x et continues dans leur domaine de définition.
- $|G(t, x, \varepsilon)|$ est bornée par une constante M positive dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}] \times D \times (0, \varepsilon_0]$.
- T est indépendante de ε .
- $y(t) \in D$ pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y_1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.7 [47] *Si les hypothèses du théorème (2.6) sont satisfaites, et de plus*

$$f^0(y) = 0.$$

Alors

1. Si p est un point d'équilibre du système moyenné (2.3.b) tel que

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))_{y=p} \neq 0, \quad (2.3.c)$$

alors, il existe une solution T -périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.3.a) telle que $\phi(0, \varepsilon) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Si (2.3.c) est négative, la solution périodique $\phi(t, \varepsilon)$ du système (2.3.a) asymptotiquement stable pour ε suffisamment petit. Si (2.3.c) est positive, cette solution est instable.

Exemple 2.4 *On considère le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon x - \varepsilon^2 x, \\ \dot{y} = x + \varepsilon(x^2 - y - 8xy) - \varepsilon^2 y. \end{cases} \quad (2.3.d)$$

En passant aux coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ Alors on aura

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon^2 r + (8r^2 \cos^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 2r \cos^2 \theta - 8r^2 \cos \theta - r) \varepsilon, \\ \dot{\theta} = 1 + (r \cos^3 \theta - 8r \sin \theta \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta) \varepsilon. \end{cases}$$

D'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \quad (2.3.e)$$

telle que

$$F_1(r, \theta) = 8r^2 \cos^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 2r \cos^2 \theta - 8r^2 \cos \theta - r,$$

et

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) &= -16r^3 \cos^6 \theta + 63r^3 \cos^5 \theta \sin \theta - 4r^2 \cos^5 \theta \\ &\quad + 32r^2 \cos^4 \theta \sin \theta + 16r^3 \cos^4 \theta - 64r^3 \cos^3 \theta \sin \theta \\ &\quad + 4r \cos^3 \theta \sin \theta + 3r^2 \cos^3 \theta - 24r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\ &\quad - 2r \cos \theta \sin \theta - r. \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème (2.6), on calcule la fonction moyennée

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (8r^2 \cos^3 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 2r \cos^2 \theta - 8r^2 \cos \theta - r) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Puisque $f^0(r) = 0$, on peut passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux, on calcule f^1 telle que

$$f^1(r, s) = \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(s, r),$$

où

$$y^1 = \int_0^s F_1(\theta, r) d\theta = -\frac{1}{3}r^2 \cos^3(s) + \frac{8}{3}r^2 \cos^2(s) \sin(s) - \frac{8}{3}r^2 \sin(s) + r \cos(s) \sin(s) + \frac{1}{3}r^2,$$

donc

$$\begin{aligned} f^1(r, s) &= \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(s, r) = \frac{\partial F_1}{\partial r} \int_0^s F_1(\theta, r) d\theta \\ &= (2 \sin(s) r (\cos(s))^2 + 16 (\cos(s))^3 r + 2 (\cos(s))^2 - 1 - 16 r \cos(s)) y^1(r, s). \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule la fonction $f_2(r)$ telle que

$$\begin{aligned} f_2(r) &= f^{10}(r) + g^0(r) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(s, r) + F_2(s, r)) ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f^1(s, r) + F_2(s, r) &= -\frac{1}{3}r(-315r^2 \sin(s) (\cos(s))^5 - 160r (\cos(s))^4 \sin(s) \\ &\quad - 18 (\cos(s))^3 \sin(s) + 448r^2 (\cos(s))^3 \sin(s) \\ &\quad + 144r \sin(s) (\cos(s))^2 - 2r^2 \sin(s) (\cos(s))^2 \\ &\quad - 128r^2 \cos(s) \sin(s) + 9 \cos(s) \sin(s) - 8r \sin(s) + 3 \\ &\quad + r + 16r^2 \cos(s) - 96r^2 (\cos(s))^4 - 16r (\cos(s))^3 \\ &\quad + 80r^2 (\cos(s))^6 - 16r^2 (\cos(s))^3 - 2r (\cos(r))^2 \\ &\quad + 20r (\cos(s))^5 + 16r^2 (\cos(s))^2). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$f_2(r) = r^3 - r.$$

L'équation $f_2(r) = 0$ a une seule racine positive $r = 1$ et on a $\left[\frac{\partial}{\partial r} (f^2(r)) \right]_{r=1} = 2 > 0$. Donc d'après le corollaire (2.7), le système (2.3.e) pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit, a un seul cycle limite instable d'amplitude $r = 1$. (Voir fig (2.4)).

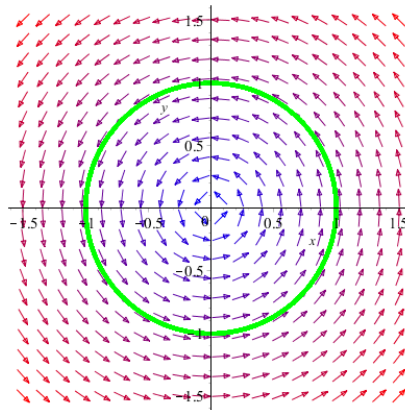


FIGURE 2.2 – Cycle limite instable de l'équation (2.3.d) pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

2.4 Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

Dans cette section, on s'intéresse à la théorie de moyennisation pour la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel suivant le degré de Brouwer.

Définition 2.1 (Degré de Brouwer). Soit D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et V un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n tel que $V \subset D$, et soit $f : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $0 \notin f(\partial V, \varepsilon)$ pour un certain ε . Nous appelons $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ le degré de Brouwer de la fonction $f(\cdot, \varepsilon)$ par rapport à l'ensemble V et le point 0.

Proposition 2.1 Si $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) \neq 0$ alors l'équation $f(\cdot, \varepsilon) = 0$ a une solution dans V .

Définition 2.2 (Degré de Brouwer pour des fonctions de classe C^1). Soit $g \in C^1(t)$, $\bar{V} \subset D$ et $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. Supposons aussi que $J_g(z) \neq 0$ pour tout $z \in Z_g$ où $J_g(z)$ est le déterminant jacobien de g en z . Ce qui assure que Z_g est fini, alors

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)),$$

(Voir le théorème 1.1.2 de [32]).

Remarque 2.1 Soit $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 , avec $g(a) = 0$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in D$. Si $J_g(a) \neq 0$, il existe un voisinage V de a tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et on a

$$d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}.$$

Exemple 2.5 Soit la fonction $f(z) = z^2$, le degré de Brouwer de f est égale à 0. Cette fonction a une seule racine $z = 0$ et $f'(0) = 0$.

Pour calculer le degré de Brouwer de f , on considère une constante $\lambda > 0$, l'intervalle $V = (-2\lambda, 2\lambda)$ et la fonction

$$g(z) = z^2 - \lambda^2.$$

Alors, la fonction g a deux racines dans V qui sont $z_1 = \lambda$ et $z_2 = -\lambda$. La matrice jacobienne en z_1 est $g'(z_1) = 2\lambda > 0$ et en z_2 est $g'(z_2) = -2\lambda < 0$. Donc, $d_B(g, V, 0) = 0$.

Lemme 2.1 [7] On considère les fonctions continues : $f_i : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour $i = 0, \dots, k$ et $f, g, r : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ données par

$$g(\cdot, \varepsilon) = f_0(\cdot) + \varepsilon f_1(\cdot) + \varepsilon^2 f_2(\cdot) + \dots + \varepsilon^k f_k(\cdot),$$

et

$$f(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(\cdot, \varepsilon).$$

Supposons que

$$g(\cdot, \varepsilon) \neq 0 \text{ pour tout } z \in \partial V, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}.$$

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ est bien défini et de plus

$$d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \varepsilon), V, 0).$$

Pour la démonstration voir [7].



LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DANS \mathbb{R}^4

Sommaire

3.1	Introduction et résultats principaux	35
3.2	Preuve du théorème 3.1	36
3.3	Applications	43

3.1 Introduction et résultats principaux

Dans ce chapitre nous intéressons à l'existence des solutions périodiques bifurquant de l'origine des coordonnées des systèmes différentiels polynomiaux dans \mathbb{R}^4 non-linéaires homogènes quadratique, c.à.d pour le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z - (b + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (b + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2)z + (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right. \quad (3.1.a)$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) = & a_{j,0}x^2 + a_{j,1}xy + a_{j,2}xz + a_{j,3}xw + a_{j,4}y^2 + a_{j,5}yz + a_{j,6}yw \\ & + a_{j,7}z^2 + a_{j,8}zw + a_{j,9}w^2, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$, $Z_j(x, y, z, w)$ et $W_j(x, y, z, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, w)$ en remplaçant a_{ji} respectivement par b_{ji} , c_{ji} et d_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 9$. Les coefficients $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ sont des paramètres réels avec $b \neq 0$. Notons que pour $\varepsilon = 0$, à l'origine, le système (3.1.a) a les valeurs propres $\pm bi$ avec multiplicité 2. Ainsi que l'origine est un point d'équilibre zéro-Hopf.

Théorème 3.1 *En appliquant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, le système (3.1.a) a au plus 300 cycles limites qui bifurquent de l'origine lorsque $\varepsilon = 0$.*

3.2 Preuve du théorème 3.1

Nous faisons le changement de variables (x, y, z, w) aux nouvelles variables $\theta, \rho_1, \rho_2, s$ donné par $x = \varepsilon \rho_1 \cos \theta$, $y = \varepsilon \rho_1 \sin \theta$, $z = \varepsilon \rho_2 \cos(\theta + s)$, $w = \varepsilon \rho_2 \sin(\theta + s)$, nous prenons l'angle θ comme nouvelle variable indépendante. Le système (3.1.a) devient

$$\begin{cases} \frac{d\rho_1}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, \rho_1, \rho_2, s) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho_1, \rho_2, s) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\rho_2}{d\theta} = \varepsilon F_{12}(\theta, \rho_1, \rho_2, s) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho_1, \rho_2, s) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{ds}{d\theta} = \varepsilon F_{13}(\theta, \rho_1, \rho_2, s) + \varepsilon^2 F_{23}(\theta, \rho_1, \rho_2, s) + O(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (3.2.a)$$

Les fonctions F_{1i} et F_{2i} pour $i = 1, 2, 3$ sont données dans l'Appendice-A. Le système (3.2.a) est écrit dans la forme normale comme

$$\begin{aligned} F_1(t, x) &= (F_{11}(\theta, \rho_1, \rho_2, s), F_{12}(\theta, \rho_1, \rho_2, s), F_{13}(\theta, \rho_1, \rho_2, s)), \\ F_2(t, x) &= (F_{21}(\theta, \rho_1, \rho_2, s), F_{22}(\theta, \rho_1, \rho_2, s), F_{23}(\theta, \rho_1, \rho_2, s)), \\ T &= 2\pi. \end{aligned}$$

Nous calculons la fonction moyennée du premier ordre $f_1 = (f_{11}, f_{12}, f_{13})$ telle que

$$f_{1i}(\rho_1, \rho_2, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{1i}(\theta, \rho_1, \rho_2, s) d\theta.$$

On obtient

$$\begin{cases} f_{11}(\rho_1, \rho_2, s) = \frac{a_1 \rho_1}{b}, \\ f_{12}(\rho_1, \rho_2, s) = \frac{c_1 \rho_2}{b}, \\ f_{13}(\rho_1, \rho_2, s) = -\frac{b_1 - d_1}{b}. \end{cases}$$

La solution de système des fonctions suivant

$$\begin{cases} f_{11}(\rho_1, \rho_2, s) = 0, \\ f_{12}(\rho_1, \rho_2, s) = 0, \\ f_{13}(\rho_1, \rho_2, s) = 0. \end{cases}$$

est $(\rho_1^*, \rho_2^*, s^*) = (0, 0, s)$. Alors la théorie de la moyennisation du premier ordre ne peut pas fournir d'informations sur l'existence des solutions périodiques. Pour passer au deuxième ordre, nous rendons la première fonction moyennée identiquement nulle, c.à.d nous prenons $a_1 = c_1 = 0, b_1 = d_1$. En calculant la fonction moyennée du deuxième ordre, nous obtenons $f_2 = (f_{21}, f_{22}, f_{23}) = (f_{21}(\rho_1, \rho_2, s), f_{22}(\rho_1, \rho_2, s), f_{23}(\rho_1, \rho_2, s))$,

où

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{21} = \frac{1}{24b^2} (I_0 \cos^2 s \rho_1 \rho_2^2 + I_1 \cos s \sin s \rho_1 \rho_2^2 + I_2 \cos s \rho_1^2 \rho_2 + I_3 \cos s \rho_2^3 + \\ I_4 \sin s \rho_1^2 \rho_2 + I_5 \sin s \rho_2^3 + I_6 \rho_1^3 + I_7 \rho_1 \rho_2^2 + I_8 \rho_1), \\ f_{22} = \frac{1}{24b^2} (J_0 \cos^2 s \rho_1^2 \rho_2 + J_1 \cos s \sin s \rho_1^2 \rho_2 + J_2 \cos s \rho_1^3 + J_3 \cos s \rho_1 \rho_2^2 + \\ J_4 \sin s \rho_1^3 + J_5 \sin s \rho_1 \rho_2^2 + J_6 \rho_1^2 \rho_2 + J_7 \rho_2^3 + J_8 \rho_2), \\ f_{23} = \frac{1}{24b^2 \rho_1 \rho_2} (K_0 \cos^2 s \rho_1^3 \rho_2 + K_1 \cos^2 s \rho_1 \rho_2^3 + K_2 \cos s \sin s \rho_1^3 \rho_2 + K_3 \times \\ \cos s \sin s \rho_1 \rho_2^3 + K_4 \cos s \rho_1^4 + K_5 \cos s \rho_1^2 \rho_2^2 + K_6 \cos s \rho_2^4 + K_7 \times \\ \sin s \rho_1^4 + K_8 \sin s \rho_1^2 \rho_2^2 + K_9 \sin s \rho_2^4 + K_{10} \rho_1^3 \rho_2 + K_{11} \rho_1 \rho_2^3 + K_{12} \rho_1 \rho_2), \end{array} \right. \quad (3.2.b)$$

et

$$\begin{aligned} I_0 = & (a_{00}(-8a_{08} + 4b_{07} - 4b_{09}) + a_{01}(2a_{07} - 2a_{09} - 2b_{08}) + a_{02}(6a_{05} - 6b_{02} - 4c_{08} + \\ & 2d_{07} - 2d_{09}) + a_{03}(-6a_{06} + 6b_{03} - 2c_{07} + 2c_{09} - 4d_{08}) + a_{04}(-4a_{08} + 8b_{07} - 8b_{09}) \\ & + a_{05}(12a_{06} - 6b_{05} + 4c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) + a_{06}(6b_{06} - 2c_{08} + 4d_{07} - 4d_{09}) \\ & + a_{07}(8b_{00} + 4b_{04} - 12d_{02} - 12d_{06}) + a_{08}(2b_{01} + 6c_{02} + 6c_{06} + 6d_{03} - 6d_{05}) \\ & + a_{09}(-8b_{00} - 4b_{04} - 12c_{03} + 12c_{05}) + 4b_{00}b_{08} + b_{01}(2b_{07} - 2b_{09}) \\ & + b_{02}(-12b_{03} + 6b_{05} + 4c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) + b_{03}(-6b_{06} - 2c_{08} + 4d_{07} - 4d_{09}) + \\ & 8b_{04}b_{08} + b_{05}(4c_{08} - 2d_{07} + 2d_{09}) + b_{06}(2c_{07} - 2c_{09} + 4d_{08}) + b_{07}(-12d_{03} + 12d_{05}) \\ & + b_{08}(6c_{03} - 6c_{05} - 6d_{02} - 6d_{06}) + b_{09}(12c_{02} + 12c_{06})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 = & (a_{00}(8a_{07} - 8a_{09} + 4b_{08}) + a_{01}(2a_{08} + 2b_{07} - 2b_{09}) + a_{02}(6a_{06} - 6b_{03} + 4c_{07} - 4c_{09} \\ & + 2d_{08}) + a_{03}(6a_{05} - 6b_{02} - 2c_{08} + 4d_{07} - 4d_{09}) + a_{04}(4a_{07} - 4a_{09} + 8b_{08}) \\ & + a_{05}(-6a_{05} - 6b_{06} + 4c_{08} - 2d_{07} + 2d_{09}) + a_{06}(6a_{06} - 6b_{05} + 2c_{07} - 2c_{09} + 4d_{08}) \\ & + a_{07}(-2b_{01} - 12d_{03} + 12d_{05}) + a_{08}(8b_{00} + 4b_{04} + 6c_{03} - 6c_{05} - 6d_{02} - 6d_{06}) \\ & + a_{09}(2b_{01} + 12c_{02} + 12c_{06}) + b_{00}(-4b_{07} + 4b_{09}) + 2b_{01}b_{08} + b_{02}(6b_{02} + 6b_{06} + 4c_{08} \\ & - 2d_{07} + 2d_{09}) + b_{03}(-6b_{03} + 6b_{05} + 2c_{07} - 2c_{09} + 4d_{08}) + b_{04}(-8b_{07} + 8b_{09}) \\ & + b_{05}(-4c_{07} + 4c_{09} - 2d_{08}) + b_{06}(2c_{08} - 4d_{07} + 4d_{09}) + b_{07}(12d_{02} + 12d_{06}) \\ & + b_{08}(-6c_{02} - 6c_{06} - 6d_{03} + 6d_{05}) + b_{09}(12c_{03} - 12c_{05}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & (a_{00}(-2a_{03} + a_{05} - 8b_{02} - 7b_{06}) + a_{01}(5a_{02} + 4a_{06} + b_{03} - 2b_{05}) + a_{02}(-b_{00} + 7b_{04} \\ & - 2c_{03} - 2c_{05} - 5d_{02} - 7d_{06}) + a_{03}(-4a_{04} + 2b_{01} + 5c_{02} + 7c_{06} - 2d_{03} - 2d_{05}) \\ & + a_{04}(5a_{05} + 2b_{02} + b_{06}) + a_{05}(-b_{01} + 2c_{02} - 2c_{06} + d_{03} + d_{05}) + a_{06}(-2b_{00} + 8b_{04} \\ & - c_{03} - c_{05} + 2d_{02} - 2d_{06}) + a_{07}(-4c_{01} - 10d_{00} - 14d_{04}) + a_{08}(7c_{00} + 5c_{04} - d_{01}) \\ & + a_{09}(-2c_{01} + 4d_{00} - 4d_{04}) + b_{00}(-5b_{03} + 4b_{05}) + b_{01}(-4b_{02} - 5b_{06}) + b_{02}(2c_{02} \\ & - 2c_{06} + d_{03} + d_{05}) + b_{03}(-b_{04} - c_{03} - c_{05} + 2d_{02} - 2d_{06}) + 2b_{04}b_{05} + b_{05}(2c_{03} + \\ & 2c_{05} - 7d_{02} - 5d_{06}) + b_{06}(7c_{02} + 5c_{06} + 2d_{03} + 2d_{05}) + b_{07}(4c_{00} - 4c_{04} + 2d_{01}) + \\ & b_{08}(c_{01} - 5d_{00} - 7d_{04}) + b_{09}(14c_{00} + 10c_{04} + 4d_{01})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 = & (a_{02}(-2a_{08} - 5b_{07} - 7b_{09}) + a_{03}(2a_{07} - 2a_{09} + b_{08}) + a_{05}(5a_{07} + 7a_{09} - 2b_{08}) \\ & + a_{06}(-a_{08} + 2b_{07} - 2b_{09}) + a_{07}(2b_{02} + 7b_{06} - 4c_{08} - 10d_{07} - 14d_{09}) + a_{08}(2b_{03} \\ & - b_{05} + 7c_{07} + 5c_{09} - d_{08}) + a_{09}(-2b_{02} + 5b_{06} - 2c_{08} + 4d_{07} - 4d_{09}) + b_{02}b_{08} \end{aligned}$$

$$+ b_{03}(-7b_{07} - 5b_{09}) + b_{05}(2b_{07} - 2b_{09}) + 2b_{06}b_{08} + b_{07}(4c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) \\ + b_{08}(c_{08} - 5d_{07} - 7d_{09}) + b_{09}(14c_{07} + 10c_{09} + 4d_{08}),$$

$$I_4 = (a_{00}(2a_{02} + a_{06} - 8b_{03} + 7b_{05}) + a_{01}(5a_{03} - 4a_{05} - b_{02} - 2b_{06}) + a_{02}(4a_{04} - 2b_{01} \\ + 2c_{02} - 2c_{06} - 5d_{03} + 7d_{05}) + a_{03}(-b_{00} + 7b_{04} + 5c_{03} - 7c_{05} + 2d_{02} - 2d_{06}) \\ + a_{04}(5a_{06} + 2b_{03} - b_{05}) + a_{05}(2b_{00} - 8b_{04} + 2c_{03} + 2c_{05} - d_{02} + d_{06}) \\ + a_{06}(-b_{01} + c_{02} - c_{06} + 2d_{03} + 2d_{05}) + a_{07}(-4c_{00} + 4c_{04} - 2d_{01}) + a_{08}(-c_{01} \\ - 7d_{00} - 5d_{04}) + a_{09}(10c_{00} + 14c_{04} - 4d_{01}) + b_{00}(5b_{02} + 4b_{06}) + b_{01}(-4b_{03} \\ + 5b_{05}) + b_{02}(b_{04} + 2c_{03} + 2c_{05} - d_{02} + d_{06}) + b_{03}(c_{02} - c_{06} + 2d_{03} + 2d_{05}) + \\ 2b_{04}b_{06} + b_{05}(-2c_{02} + 2c_{06} - 7d_{03} + 5d_{05}) + b_{06}(7c_{03} - 5c_{05} - 2d_{02} + 2d_{06}) \\ + b_{07}(-4c_{01} + 14d_{00} + 10d_{04}) + b_{08}(-5c_{00} - 7c_{04} - d_{01}) + b_{09}(-2c_{01} + 4d_{00} - \\ 4d_{04})),$$

$$I_5 = (a_{02}(2a_{07} - 2a_{09} + b_{08}) + a_{03}(2a_{08} - 7b_{07} - 5b_{09}) + a_{05}(-a_{08} + 2b_{07} - 2b_{09}) \\ + a_{06}(7a_{07} + 5a_{09} + 2b_{08}) + a_{07}(-2b_{03} - 5b_{05} + 4c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) \\ + a_{08}(2b_{02} + b_{06} + c_{08} - 5d_{07} - 7d_{09}) + a_{09}(2b_{03} - 7b_{05} + 14c_{07} + 10c_{09} + \\ 4d_{08}) + b_{02}(5b_{07} + 7b_{09}) - b_{03}b_{08} + 2b_{05}b_{08} + b_{06}(-2b_{07} + 2b_{09}) + b_{07}(4c_{08} + \\ 10d_{07} + 14d_{09}) + b_{08}(-7c_{07} - 5c_{09} + d_{08}) + b_{09}(2c_{08} - 4d_{07} + 4d_{09}),$$

$$I_6 = (a_{00}(3a_{01} - 6b_{00}) + 3a_{01}a_{04} + a_{02}(-2c_{01} - 5d_{00} - 7d_{04}) + a_{03}(5c_{00} + 7c_{04} - \\ 2d_{01}) + 6a_{04}b_{04} + a_{05}(2c_{00} - 2c_{04} + d_{01}) + a_{06}(-c_{01} + 2d_{00} - 2d_{04}) - 3b_{00}b_{01} \\ - 3b_{01}b_{04} + b_{02}(2c_{00} - 2c_{04} + d_{01}) + b_{03}(-c_{01} + 2d_{00} - 2d_{04}) + b_{05}(2c_{01} - 7d_{00} \\ - 5d_{04}) + b_{06}(7c_{00} + 5c_{04} + 2d_{01}),$$

$$I_7 = (a_{00}(4a_{08} - 14b_{07} - 10b_{09}) + a_{01}(5a_{07} + 7a_{09} + b_{08}) + a_{02}(-3a_{05} + 3b_{02} + 2c_{08} \\ - 7d_{07} - 5d_{09}) + a_{03}(3a_{06} - 3b_{03} + 7c_{07} + 5c_{09} + 2d_{08}) + a_{04}(2a_{08} - 4b_{07} + 4b_{09}) \\ + a_{05}(-6a_{06} + 3b_{05} - 2c_{07} + 2c_{09} - d_{08}) + a_{06}(-3b_{06} + c_{08} - 2d_{07} + 2d_{09}) \\ + a_{07}(-4b_{00} + 10b_{04} - 4c_{03} - 4c_{05} + 2d_{02} - 2d_{06}) + a_{08}(-b_{01} + c_{02} - c_{06} - 7d_{03} \\ + 5d_{05}) + a_{09}(4b_{00} + 14b_{04} + 10c_{03} - 14c_{05} + 4d_{02} - 4d_{06}) - 2b_{00}b_{08} + b_{01}(-7b_{07} \\ - 5b_{09}) + b_{02}(6b_{03} - 3b_{05} - 2c_{07} + 2c_{09} - d_{08}) + b_{03}(3b_{06} + c_{08} - 2d_{07} + 2d_{09}) - \\ 4b_{04}b_{08} + b_{05}(-2c_{08} - 5d_{07} - 7d_{09}) + b_{06}(5c_{07} + 7c_{09} - 2d_{08}) + b_{07}(4c_{02} - 4c_{06} + \\ 14d_{03} - 10d_{05}) + b_{08}(-5c_{03} + 7c_{05} + d_{02} - d_{06}) + b_{09}(2c_{02} - 2c_{06} + 4d_{03} + 4d_{05}),$$

$$I_8 = 24a_2b,$$

$$I_0 = (a_{00}(4c_{03} - 2c_{05} + 4d_{02} + 2d_{06}) + a_{01}(-4c_{02} - 2c_{06} + 4d_{03} - 2d_{05}) + a_{02}(6c_{01} + \\ 12d_{04}) + a_{03}(12c_{04} - 6d_{01}) + a_{04}(-4c_{03} + 2c_{05} - 4d_{02} - 2d_{06}) + a_{05}(-12c_{04} + \\ 6d_{01}) + a_{06}(6c_{01} + 12d_{04}) + b_{00}(2c_{02} + 4c_{06} - 2d_{03} + 4d_{05}) + b_{01}(2c_{03} - 4c_{05} + 2d_{02} \\ + 4d_{06}) + b_{02}(-12c_{00} - 6d_{01}) + b_{03}(-6c_{01} + 12d_{00}) + b_{04}(-2c_{02} - 4c_{06} + 2d_{03} \\ - 4d_{05}) + b_{05}(6c_{01} - 12d_{00}) + b_{06}(-12c_{00} - 6d_{01}) + c_{00}(2c_{08} + 8d_{07} + 4d_{09}) \\ + c_{01}(-8c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) + c_{02}(6c_{03} - 6d_{02}) + c_{03}(12c_{06} - 6d_{03}) + c_{04}(-2c_{08} - \\ 8d_{07} - 4d_{09}) + c_{05}(-6c_{06} + 6d_{05}) + 6c_{06}d_{06} + c_{07}(4d_{00} - 4d_{04}) - 2c_{08}d_{01} + c_{09}(8d_{00}$$

$$-8d_{04}) + 2d_{00}d_{08} + d_{01}(4d_{07} + 8d_{09}) + d_{02}(6d_{03} - 12d_{05}) - 2d_{04}d_{08} - 6d_{05}d_{06}),$$

$$\begin{aligned} J_1 = & (a_{00}(-4c_{02} - 2c_{06} + 4d_{03} - 2d_{05}) + a_{01}(-4c_{03} + 2c_{05} - 4d_{02} - 2d_{06}) + a_{02}(-12c_{04} \\ & + 6d_{01}) + a_{03}(6c_{01} + 12d_{04}) + a_{04}(4c_{02} + 2c_{06} - 4d_{03} + 2d_{05}) + a_{05}(-6c_{01} - 12d_{04}) \\ & + a_{06}(-12c_{04} + 6d_{01}) + b_{00}(2c_{03} - 4c_{05} + 2d_{02} + 4d_{06}) + b_{01}(-2c_{02} - 4c_{06} + 2d_{03} - \\ & 4d_{05}) + b_{02}(6c_{01} - 12d_{00}) + b_{03}(-12c_{00} - 6d_{01}) + b_{04}(-2c_{03} + 4c_{05} - 2d_{02} - 4d_{06}) \\ & + b_{05}(12c_{00} + 6d_{01}) + b_{06}(6c_{01} - 12d_{00}) + c_{00}(-8c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) + c_{01}(-2c_{08} - \\ & 8d_{07} - 4d_{09}) + c_{02}(-6c_{06} + 6d_{05}) + c_{03}(6c_{03} - 6c_{05} + 6d_{06}) + c_{04}(8c_{07} + 4c_{09} - 2d_{08}) \\ & + 6c_{05}d_{02} + c_{06}(-6c_{06} + 6d_{03}) - 4c_{07}d_{01} + c_{08}(-2d_{00} + 2d_{04}) - 8c_{09}d_{01} + d_{00}(4d_{07} + \\ & 8d_{09}) - 2d_{01}d_{08} + d_{02}(-6d_{02} - 6d_{06}) - 6d_{03}d_{05} + d_{04}(-4d_{07} - 8d_{09}) + 6d_{05}^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 = & (a_{00}(7c_{01} + 4d_{00} + 14d_{04}) + a_{01}(-4c_{00} - 2c_{04} + d_{01}) + a_{04}(5c_{01} - 4d_{00} + 10d_{04}) + \\ & b_{00}(-10c_{00} + 4c_{04} - 5d_{01}) + b_{01}(-c_{01} + 2d_{00} + 4d_{04}) + b_{04}(-14c_{00} - 4c_{04} - 7d_{01}) + \\ & c_{00}(5c_{03} + 2c_{05} + 2d_{02} + 7d_{06}) + c_{01}(-2c_{02} - c_{06} - d_{03} + 2d_{05}) + c_{02}(-5d_{00} - 7d_{04}) \\ & + c_{03}(7c_{04} - 2d_{01}) + c_{04}(-2c_{05} - 2d_{02} + 5d_{06}) + c_{05}d_{01} + c_{06}(2d_{00} - 2d_{04}) + d_{00}(2d_{03} \\ & - 7d_{05}) + d_{01}(d_{02} + 2d_{06}) - 2d_{03}d_{04} - 5d_{04}d_{05}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 = & (a_{02}(2c_{03} + 5c_{05} + 2d_{02} + 7d_{06}) + a_{03}(-2c_{02} - c_{06} + 2d_{03} - d_{05}) + a_{05}(-2c_{02} - c_{06} \\ & + 2d_{03} - d_{05}) + a_{06}(-2c_{03} + 7c_{05} - 2d_{02} + 5d_{06}) + a_{07}(7c_{01} + 4d_{00} + 14d_{04}) + \\ & a_{08}(-4c_{00} - 2c_{04} + d_{01}) + a_{09}(5c_{01} - 4d_{00} + 10d_{04}) + b_{02}(-5c_{02} + 2c_{06} - 7d_{03} + 2d_{05}) \\ & + b_{03}(c_{03} - 2c_{05} + d_{02} + 2d_{06}) + b_{05}(c_{03} - 2c_{05} + d_{02} + 2d_{06}) + b_{06}(-7c_{02} - 2c_{06} - \\ & 5d_{03} - 2d_{05}) + b_{07}(-10c_{00} + 4c_{04} - 5d_{01}) + b_{08}(-c_{01} + 2d_{00} + 4d_{04}) + b_{09}(-14c_{00} - \\ & 4c_{04} - 7d_{01}) + c_{02}(5c_{08} - d_{07} + 7d_{09}) + c_{03}(c_{07} + 5c_{09} - d_{08}) + c_{05}(-2c_{07} - 4c_{09} + \\ & 2d_{08}) + c_{06}(4c_{08} - 2d_{07} + 8d_{09}) + c_{07}(-8d_{02} - 7d_{06}) + c_{08}(-2d_{03} + d_{05}) + c_{09}(2d_{02} \\ & + d_{06}) - 4d_{02}d_{08} + d_{03}(4d_{07} + 2d_{09}) + d_{05}(-5d_{07} - d_{09}) - 5d_{06}d_{08}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4 = & (a_{00}(-4c_{00} - 14c_{04} + 7d_{01}) + a_{01}(-c_{01} - 4d_{00} - 2d_{04}) + a_{04}(4c_{00} - 10c_{04} + 5d_{01}) \\ & + b_{00}(5c_{01} - 10d_{00} + 4d_{04}) + b_{01}(-2c_{00} - 4c_{04} - d_{01}) + b_{04}(7c_{01} - 14d_{00} - 4d_{04}) \\ & + c_{00}(-2c_{02} - 7c_{06} + 5d_{03} + 2d_{05}) + c_{01}(c_{03} - 2c_{05} - 2d_{02} - d_{06}) + c_{02}(2c_{04} - d_{01}) \\ & + c_{03}(-2d_{00} + 2d_{04}) + c_{04}(-5c_{06} + 7d_{03} - 2d_{05}) + c_{05}(7d_{00} + 5d_{04}) - 2c_{06}d_{01} \\ & + d_{00}(-5d_{02} + 2d_{06}) + d_{01}(-2d_{03} + d_{05}) - 7d_{02}d_{04} - 2d_{04}d_{06}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_5 = & (a_{02}(-2c_{02} - c_{06} + 2d_{03} - d_{05}) + a_{03}(-2c_{03} + 7c_{05} - 2d_{02} + 5d_{06}) + a_{05}(-2c_{03} - \\ & 5c_{05} - 2d_{02} - 7d_{06}) + a_{06}(2c_{02} + c_{06} - 2d_{03} + d_{05}) + a_{07}(4c_{00} - 10c_{04} + 5d_{01}) \\ & + a_{08}(c_{01} + 4d_{00} + 2d_{04}) + a_{09}(-4c_{00} - 14c_{04} + 7d_{01}) + b_{02}(c_{03} - 2c_{05} + d_{02} + \\ & 2d_{06}) + b_{03}(-7c_{02} - 2c_{06} - 5d_{03} - 2d_{05}) + b_{05}(5c_{02} - 2c_{06} + 7d_{03} - 2d_{05}) + \\ & b_{06}(-c_{03} + 2c_{05} - d_{02} - 2d_{06}) + b_{07}(7c_{01} - 14d_{00} - 4d_{04}) + b_{08}(2c_{00} + 4c_{04} + d_{01}) \\ & + b_{09}(5c_{01} - 10d_{00} + 4d_{04}) + c_{02}(-2c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) + c_{03}(4c_{08} - 2d_{07} + 8d_{09}) \\ & + c_{05}(-5c_{08} + d_{07} - 7d_{09}) + c_{06}(-c_{07} - 5c_{09} + d_{08}) + c_{07}(-7d_{03} + 8d_{05}) + \\ & c_{08}(d_{02} + 2d_{06}) + c_{09}(d_{03} - 2d_{05}) + d_{02}(-5d_{07} - d_{09}) - 5d_{03}d_{08} + 4d_{05}d_{08} + \\ & d_{06}(-4d_{07} - 2d_{09})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_6 = & (a_{00}(-2c_{03} + 7c_{05} - 2d_{02} + 5d_{06}) + a_{01}(2c_{02} + c_{06} - 2d_{03} + d_{05}) + a_{02}(c_{01} + 4d_{00} \\
& + 2d_{04}) + a_{03}(-4c_{00} - 14c_{04} + 7d_{01}) + a_{04}(2c_{03} + 5c_{05} + 2d_{02} + 7d_{06}) + a_{05}(-4c_{00} \\
& + 10c_{04} - 5d_{01}) + a_{06}(-c_{01} - 4d_{00} - 2d_{04}) + b_{00}(-7c_{02} - 2c_{06} - 5d_{03} - 2d_{05}) + \\
& b_{01}(-c_{03} + 2c_{05} - d_{02} - 2d_{06}) + b_{02}(2c_{00} + 4c_{04} + d_{01}) + b_{03}(5c_{01} - 10d_{00} + 4d_{04}) \\
& + b_{04}(-5c_{02} + 2c_{06} - 7d_{03} + 2d_{05}) + b_{05}(-7c_{01} + 14d_{00} + 4d_{04}) + b_{06}(-2c_{00} - \\
& 4c_{04} - d_{01}) + c_{00}(5c_{08} - 4d_{07} + 10d_{09}) + c_{01}(4c_{07} + 2c_{09} - d_{08}) + c_{02}(-3c_{03} + 3d_{02}) \\
& + c_{03}(-6c_{06} + 3d_{03}) + c_{04}(7c_{08} + 4d_{07} + 14d_{09}) + c_{05}(3c_{06} - 3d_{05}) - 3c_{06}d_{06} + \\
& c_{07}(-14d_{00} - 10d_{04}) + c_{08}d_{01} + c_{09}(-4d_{00} + 4d_{04}) - 7d_{00}d_{08} + d_{01}(-2d_{07} - 4d_{09}) + \\
& d_{02}(-3d_{03} + 6d_{05}) - 5d_{04}d_{08} + 3d_{05}d_{06}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_7 = & a_{07}(2c_{03} + 5c_{05} + 2d_{02} + 7d_{06}) + a_{08}(-2c_{02} - c_{06} + 2d_{03} - d_{05}) + a_{09}(-2c_{03} + 7c_{05} \\
& - 2d_{02} + 5d_{06}) + b_{07}(-5c_{02} + 2c_{06} - 7d_{03} + 2d_{05}) + b_{08}(c_{03} - 2c_{05} + d_{02} + 2d_{06}) \\
& + b_{09}(-7c_{02} - 2c_{06} - 5d_{03} - 2d_{05}) + c_{07}(3c_{08} - 6d_{07}) + 3c_{08}c_{09} + 6c_{09}d_{09} - 3d_{07}d_{08} \\
& - 3d_{08}d_{09}),
\end{aligned}$$

$$J_8 = 24bc_2,$$

$$\begin{aligned}
K_0 = & (a_{00}(-4c_{02} - 2c_{06} + 4d_{03} - 2d_{05}) + a_{01}(-4c_{03} + 2c_{05} - 4d_{02} - 2d_{06}) + a_{02}(-12c_{04} \\
& + 6d_{01}) + a_{03}(6c_{01} + 12d_{04}) + a_{04}(4c_{02} + 2c_{06} - 4d_{03} + 2d_{05}) + a_{05}(-6c_{01} - 12d_{04}) \\
& + a_{06}(-12c_{04} + 6d_{01}) + b_{00}(2c_{03} - 4c_{05} + 2d_{02} + 4d_{06}) + b_{01}(-2c_{02} - 4c_{06} + 2d_{03} - \\
& 4d_{05}) + b_{02}(6c_{01} - 12d_{00}) + b_{03}(-12c_{00} - 6d_{01}) + b_{04}(-2c_{03} + 4c_{05} - 2d_{02} - 4d_{06}) \\
& + b_{05}(12c_{00} + 6d_{01}) + b_{06}(6c_{01} - 12d_{00}) + c_{00}(-8c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) + c_{01}(-2c_{08} - \\
& 8d_{07} - 4d_{09}) + c_{02}(-6c_{06} + 6d_{05}) + c_{03}(6c_{03} - 6c_{05} + 6d_{06}) + c_{04}(8c_{07} + 4c_{09} - \\
& 2d_{08}) + 6c_{05}d_{02} + c_{06}(-6c_{06} + 6d_{03}) - 4c_{07}d_{01} + c_{08}(-2d_{00} + 2d_{04}) - 8c_{09}d_{01} + \\
& d_{00}(4d_{07} + 8d_{09}) - 2d_{01}d_{08} + d_{02}(-6d_{02} - 6d_{06}) - 6d_{03}d_{05} + d_{04}(-4d_{07} - 8d_{09}) \\
& + 6d_{05}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1 = & (a_{00}(8a_{07} - 8a_{09} + 4b_{08}) + a_{01}(2a_{08} + 2b_{07} - 2b_{09}) + a_{02}(6a_{06} - 6b_{03} + 4c_{07} - \\
& 4c_{09} + 2d_{08}) + a_{03}(6a_{05} - 6b_{02} - 2c_{08} + 4d_{07} - 4d_{09}) + a_{04}(4a_{07} - 4a_{09} + 8b_{08}) \\
& + a_{05}(-6a_{05} - 6b_{06} + 4c_{08} - 2d_{07} + 2d_{09}) + a_{06}(6a_{06} - 6b_{05} + 2c_{07} - 2c_{09} + 4d_{08}) \\
& + a_{07}(-2b_{01} - 12d_{03} + 12d_{05}) + a_{08}(8b_{00} + 4b_{04} + 6c_{03} - 6c_{05} - 6d_{02} - 6d_{06}) + \\
& a_{09}(2b_{01} + 12c_{02} + 12c_{06}) + b_{00}(-4b_{07} + 4b_{09}) + 2b_{01}b_{08} + b_{02}(6b_{02} + 6b_{06} + 4c_{08} - \\
& 2d_{07} + 2d_{09}) + b_{03}(-6b_{03} + 6b_{05} + 2c_{07} - 2c_{09} + 4d_{08}) + b_{04}(-8b_{07} + 8b_{09}) + \\
& b_{05}(-4c_{07} + 4c_{09} - 2d_{08}) + b_{06}(2c_{08} - 4d_{07} + 4d_{09}) + b_{07}(12d_{02} + 12d_{06}) + \\
& b_{08}(-6c_{02} - 6c_{06} - 6d_{03} + 6d_{05}) + b_{09}(12c_{03} - 12c_{05})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 = & (a_{00}(-4c_{03} + 2c_{05} - 4d_{02} - 2d_{06}) + a_{01}(4c_{02} + 2c_{06} - 4d_{03} + 2d_{05}) + a_{02}(-6c_{01} - \\
& 12d_{04}) + a_{03}(-12c_{04} + 6d_{01}) + a_{04}(4c_{03} - 2c_{05} + 4d_{02} + 2d_{06}) + a_{05}(12c_{04} - 6d_{01}) \\
& + a_{06}(-6c_{01} - 12d_{04}) + b_{00}(-2c_{02} - 4c_{06} + 2d_{03} - 4d_{05}) + b_{01}(-2c_{03} + 4c_{05} - \\
& 2d_{02} - 4d_{06}) + b_{02}(12c_{00} + 6d_{01}) + b_{03}(6c_{01} - 12d_{00}) + b_{04}(2c_{02} + 4c_{06} - 2d_{03} + 4d_{05}) \\
& + b_{05}(-6c_{01} + 12d_{00}) + b_{06}(12c_{00} + 6d_{01}) + c_{00}(-2c_{08} - 8d_{07} - 4d_{09}) + c_{01}(8c_{07} \\
& + 4c_{09} - 2d_{08}) + c_{02}(-6c_{03} + 6d_{02}) + c_{03}(-12c_{06} + 6d_{03}) + c_{04}(2c_{08} + 8d_{07} + 4d_{09})
\end{aligned}$$

$$+ c_{05}(6c_{06} - 6d_{05}) - 6c_{06}d_{06} + c_{07}(-4d_{00} + 4d_{04}) + 2c_{08}d_{01} + c_{09}(-8d_{00} + 8d_{04}) - 2d_{00}d_{08} + d_{01}(-4d_{07} - 8d_{09}) + d_{02}(-6d_{03} + 12d_{05}) + 2d_{04}d_{08} + 6d_{05}d_{06},$$

$$\begin{aligned} K_3 = & (a_{00}(8a_{08} - 4b_{07} + 4b_{09}) + a_{01}(-2a_{07} + 2a_{09} + 2b_{08}) + a_{02}(-6a_{05} + 6b_{02} + 4c_{08} - \\ & 2d_{07} + 2d_{09}) + a_{03}(6a_{06} - 6b_{03} + 2c_{07} - 2c_{09} + 4d_{08}) + a_{04}(4a_{08} - 8b_{07} + 8b_{09}) + \\ & a_{05}(-12a_{06} + 6b_{05} - 4c_{07} + 4c_{09} - 2d_{08}) + a_{06}(-6b_{06} + 2c_{08} - 4d_{07} + 4d_{09}) + \\ & a_{07}(-8b_{00} - 4b_{04} + 12d_{02} + 12d_{06}) + a_{08}(-2b_{01} - 6c_{02} - 6c_{06} - 6d_{03} + 6d_{05}) + \\ & a_{09}(8b_{00} + 4b_{04} + 12c_{03} - 12c_{05}) - 4b_{00}b_{08} + b_{01}(-2b_{07} + 2b_{09}) + b_{02}(12b_{03} - 6b_{05} - \\ & 4c_{07} + 4c_{09} - 2d_{08}) + b_{03}(6b_{06} + 2c_{08} - 4d_{07} + 4d_{09}) - 8b_{04}b_{08} + b_{05}(-4c_{08} + 2d_{07} - \\ & 2d_{09}) + b_{06}(-2c_{07} + 2c_{09} - 4d_{08}) + b_{07}(12d_{03} - 12d_{05}) + b_{08}(-6c_{03} + 6c_{05} + 6d_{02} + \\ & 6d_{06}) + b_{09}(-12c_{02} - 12c_{06})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4 = & (a_{00}(-4c_{00} - 14c_{04} + 7d_{01}) + a_{01}(-c_{01} - 4d_{00} - 2d_{04}) + a_{04}(4c_{00} - 10c_{04} + 5d_{01}) \\ & + b_{00}(5c_{01} - 10d_{00} + 4d_{04}) + b_{01}(-2c_{00} - 4c_{04} - d_{01}) + b_{04}(7c_{01} - 14d_{00} - 4d_{04}) \\ & + c_{00}(-2c_{02} - 7c_{06} + 5d_{03} + 2d_{05}) + c_{01}(c_{03} - 2c_{05} - 2d_{02} - d_{06}) + c_{02}(2c_{04} - d_{01}) \\ & + c_{03}(-2d_{00} + 2d_{04}) + c_{04}(-5c_{06} + 7d_{03} - 2d_{05}) + c_{05}(7d_{00} + 5d_{04}) - 2c_{06}d_{01} \\ & + d_{00}(-5d_{02} + 2d_{06}) + d_{01}(-2d_{03} + d_{05}) - 7d_{02}d_{04} - 2d_{04}d_{06}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_5 = & (a_{00}(6a_{02} + 3a_{06} - 3b_{05}) + a_{01}(3a_{03} - 3b_{02} - 6b_{06}) + a_{02}(12a_{04} - 6b_{01} - 9c_{06} + \\ & 3d_{03} + 6d_{05}) + a_{03}(-3b_{00} - 3b_{04} - 3c_{03} - 3d_{06}) + a_{04}(15a_{06} + 6b_{03} - 3b_{05}) + \\ & a_{05}(6b_{00} + 3c_{05} - 9d_{02} - 6d_{06}) + a_{06}(-3b_{01} + 9c_{02} + 9d_{05}) + a_{07}(-18c_{04} + 9d_{01}) + \\ & a_{08}(-9d_{00} - 9d_{04}) + a_{09}(18c_{00} + 9d_{01}) + b_{00}(15b_{02} + 12b_{06}) + 3b_{01}b_{05} + b_{02}(3b_{04} + \\ & 9c_{03} + 9d_{06}) + b_{03}(-6c_{02} - 9c_{06} + 3d_{03}) + 6b_{04}b_{06} + b_{05}(-3c_{02} - 3d_{05}) + b_{06}(6c_{03} + \\ & 3c_{05} - 9d_{02}) + b_{07}(9c_{01} + 18d_{04}) + b_{08}(-9c_{00} - 9c_{04}) + b_{09}(9c_{01} - 18d_{00}) + \\ & c_{02}(-6c_{07} - 12c_{09} + 6d_{08}) - 6c_{03}d_{07} + c_{05}(-3c_{08} + 3d_{07} + 3d_{09}) + c_{06}(-3c_{07} - \\ & 15c_{09} + 3d_{08}) + 3c_{07}d_{03} + c_{08}(3d_{02} + 6d_{06}) + c_{09}(3d_{03} - 6d_{05}) + d_{02}(-15d_{07} - \\ & 3d_{09}) - 3d_{03}d_{08} + d_{06}(-12d_{07} - 6d_{09})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_6 = & (a_{02}(2a_{07} - 2a_{09} + b_{08}) + a_{03}(2a_{08} - 7b_{07} - 5b_{09}) + a_{05}(-a_{08} + 2b_{07} - 2b_{09}) + \\ & a_{06}(7a_{07} + 5a_{09} + 2b_{08}) + a_{07}(-2b_{03} - 5b_{05} + 4c_{07} - 4c_{09} + 2d_{08}) + a_{08}(2b_{02} + \\ & b_{06} + c_{08} - 5d_{07} - 7d_{09}) + a_{09}(2b_{03} - 7b_{05} + 14c_{07} + 10c_{09} + 4d_{08}) + b_{02}(5b_{07} + \\ & 7b_{09}) - b_{03}b_{08} + 2b_{05}b_{08} + b_{06}(-2b_{07} + 2b_{09}) + b_{07}(4c_{08} + 10d_{07} + 14d_{09}) + \\ & b_{08}(-7c_{07} - 5c_{09} + d_{08}) + b_{09}(2c_{08} - 4d_{07} + 4d_{09})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_7 = & (a_{00}(-7c_{01} - 4d_{00} - 14d_{04}) + a_{01}(4c_{00} + 2c_{04} - d_{01}) + a_{04}(-5c_{01} + 4d_{00} - 10d_{04}) \\ & + b_{00}(10c_{00} - 4c_{04} + 5d_{01}) + b_{01}(c_{01} - 2d_{00} - 4d_{04}) + b_{04}(14c_{00} + 4c_{04} + 7d_{01}) \\ & + c_{00}(-5c_{03} - 2c_{05} - 2d_{02} - 7d_{06}) + c_{01}(2c_{02} + c_{06} + d_{03} - 2d_{05}) + c_{02}(5d_{00} + \\ & 7d_{04}) + c_{03}(-7c_{04} + 2d_{01}) + c_{04}(2c_{05} + 2d_{02} - 5d_{06}) - c_{05}d_{01} + c_{06}(-2d_{00} + 2d_{04}) \\ & + d_{00}(-2d_{03} + 7d_{05}) + d_{01}(-d_{02} - 2d_{06}) + 2d_{03}d_{04} + 5d_{04}d_{05}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_8 = & (a_{00}(6a_{03} - 3a_{05} - 3b_{06}) + a_{01}(-3a_{02} - 3b_{03} + 6b_{05}) + a_{02}(3b_{00} + 3b_{04} + 3c_{05} - \\ & 3d_{02}) + a_{03}(12a_{04} - 6b_{01} + 3c_{02} - 6c_{06} + 9d_{05}) + a_{04}(-15a_{05} - 6b_{02} - 3b_{06}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + a_{05}(3b_{01} + 9c_{06} - 9d_{03}) + a_{06}(6b_{00} + 9c_{03} - 6c_{05} + 3d_{06}) + a_{07}(-9c_{01} + 18d_{00}) \\
 & + a_{08}(-9c_{00} - 9c_{04}) + a_{09}(-9c_{01} - 18d_{04}) + b_{00}(15b_{03} - 12b_{05}) + 3b_{01}b_{06} \\
 & + b_{02}(-3c_{02} + 6d_{03} - 9d_{05}) + b_{03}(3b_{04} + 9c_{05} - 9d_{02}) - 6b_{04}b_{05} + b_{05}(-9c_{03} + \\
 & 6d_{02} - 3d_{06}) + b_{06}(3c_{06} - 3d_{03}) + b_{07}(18c_{00} + 9d_{01}) + b_{08}(9d_{00} + 9d_{04}) + \\
 & b_{09}(-18c_{04} + 9d_{01}) + c_{02}(-3c_{08} + 3d_{07} + 3d_{09}) + c_{03}(-3c_{07} - 15c_{09} + 3d_{08}) + \\
 & c_{05}(6c_{07} + 12c_{09} - 6d_{08}) + 6c_{06}d_{07} - 3c_{07}d_{06} + c_{08}(6d_{03} - 3d_{05}) + c_{09}(-6d_{02} - \\
 & 3d_{06}) + d_{03}(-12d_{07} - 6d_{09}) + d_{05}(15d_{07} + 3d_{09}) + 3d_{06}d_{08}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_9 = & (a_{02}(2a_{08} + 5b_{07} + 7b_{09}) + a_{03}(-2a_{07} + 2a_{09} - b_{08}) + a_{05}(-5a_{07} - 7a_{09} + 2b_{08}) \\
 & + a_{06}(a_{08} - 2b_{07} + 2b_{09}) + a_{07}(-2b_{02} - 7b_{06} + 4c_{08} + 10d_{07} + 14d_{09}) \\
 & + a_{08}(-2b_{03} + b_{05} - 7c_{07} - 5c_{09} + d_{08}) + a_{09}(2b_{02} - 5b_{06} + 2c_{08} - 4d_{07} + 4d_{09}) \\
 & - b_{02}b_{08} + b_{03}(7b_{07} + 5b_{09}) + b_{05}(-2b_{07} + 2b_{09}) - 2b_{06}b_{08} + b_{07}(-4c_{07} + 4c_{09} - \\
 & 2d_{08}) + b_{08}(-c_{08} + 5d_{07} + 7d_{09}) + b_{09}(-14c_{07} - 10c_{09} - 4d_{08})),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{10} = & (a_{00}(4a_{00} + 10a_{04} - 5b_{01} + 2c_{02} - 5c_{06} - 2d_{03} + 7d_{05}) + a_{01}(a_{01} - b_{00} - 5b_{04} + \\
 & 2c_{03} - c_{05} + 2d_{02} + d_{06}) + a_{02}(-2c_{00} - 4c_{04} + 2d_{01}) + a_{03}(-8c_{01} - 2d_{00} - 16d_{04}) \\
 & + a_{04}(10a_{04} - b_{01} - 2c_{02} - 7c_{06} + 2d_{03} + 5d_{05}) + a_{05}(7c_{01} - 11d_{00} + 5d_{04}) \\
 & + a_{06}(11c_{00} + 7c_{04} + d_{01}) + b_{00}(10b_{00} + 10b_{04} + 5c_{03} + 2c_{05} - 7d_{02} - 2d_{06}) + \\
 & b_{01}(b_{01} + c_{02} + 2c_{06} - d_{03} + 2d_{05}) + b_{02}(c_{01} + 7d_{00} + 11d_{04}) + b_{03}(5c_{00} - \\
 & 11c_{04} + 7d_{01}) + b_{04}(4b_{04} + 7c_{03} - 2c_{05} - 5d_{02} + 2d_{06}) + b_{05}(-16c_{00} - 2c_{04} - 8d_{01}) \\
 & + b_{06}(2c_{01} - 4d_{00} - 2d_{04}) + c_{00}(4c_{07} - 10c_{09} + 5d_{08}) + c_{01}(c_{08} + 4d_{07} + 2d_{09}) + \\
 & c_{02}(-2c_{02} + c_{06} + 4d_{03} - 5d_{05}) + c_{03}(-5c_{03} + 5c_{05} - 4d_{02} - 5d_{06}) + c_{04}(-4c_{07} - \\
 & 14c_{09} + 7d_{08}) + c_{05}(-2c_{05} - d_{02} + 4d_{06}) + c_{06}(c_{06} - d_{03} - 4d_{05}) + 2c_{07}d_{01} + \\
 & c_{08}(7d_{00} + 5d_{04}) + 4c_{09}d_{01} + d_{00}(-14d_{07} - 4d_{09}) + d_{01}d_{08} + d_{02}(d_{02} + d_{06}) + \\
 & d_{03}(-2d_{03} + 5d_{05}) + d_{04}(-10d_{07} + 4d_{09}) - 5d_{05}^2 - 2d_{06}^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{11} = & (a_{00}(-4a_{07} + 4a_{09} - 2b_{08}) + a_{01}(-a_{08} - 7b_{07} - 5b_{09}) + a_{02}(2a_{02} - a_{06} + 5b_{03} - \\
 & 4b_{05} - 2c_{07} + 2c_{09} - d_{08}) + a_{03}(2a_{03} - 5a_{05} + b_{02} - 4b_{06} + c_{08} - 2d_{07} + 2d_{09}) + \\
 & a_{04}(10a_{07} + 14a_{09} - 4b_{08}) + a_{05}(5a_{05} + 4b_{02} + 5b_{06} - 2c_{08} - 5d_{07} - 7d_{09}) + \\
 & a_{06}(-a_{06} + 4b_{03} + b_{05} + 5c_{07} + 7c_{09} - 2d_{08}) + a_{07}(-5b_{01} + 2c_{02} - 11c_{06} + 16d_{03} - \\
 & 5d_{05}) + a_{08}(-4b_{00} - 2b_{04} - 7c_{03} + 8c_{05} - d_{02} - 2d_{06}) + a_{09}(-7b_{01} + 4c_{02} - 7c_{06} + \\
 & 2d_{03} + 11d_{05}) + b_{00}(14b_{07} + 10b_{09}) - b_{01}b_{08} + b_{02}(-b_{02} - b_{06} - 2c_{08} + 7d_{07} + 5d_{09}) \\
 & + b_{03}(5b_{03} - 5b_{05} - 7c_{07} - 5c_{09} - 2d_{08}) + b_{04}(4b_{07} - 4b_{09}) + b_{05}(2b_{05} + 2c_{07} - 2c_{09} \\
 & + d_{08}) + b_{06}(2b_{06} - c_{08} + 2d_{07} - 2d_{09}) + b_{07}(11c_{03} + 2c_{05} - 7d_{02} + 4d_{06}) + \\
 & b_{08}(-2c_{02} - c_{06} + 8d_{03} - 7d_{05}) + b_{09}(-5c_{03} + 16c_{05} - 11d_{02} + 2d_{06}) + c_{07}(-4c_{07} - \\
 & 10c_{09} + 5d_{08}) + c_{08}(-c_{08} + d_{07} + 5d_{09}) + c_{09}(-10c_{09} + d_{08}) + d_{07}(-10d_{07} - 10d_{09}) \\
 & - d_{08}^2 - 4d_{09}^2),
 \end{aligned}$$

$$K_{12} = (24b(-b_2 + d_2)).$$

En remplaçant $C = \text{coss}$ et $S = \text{sins}$ dans (3.2.b), et en ajoutant à ce système l'équation $C^2 + S^2 - 1 = 0$ qui nous donne les points de singularité (ρ_1, ρ_2, C, S) .

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{21} = \frac{1}{24b^2} (I_0 C^2 \rho_1 \rho_2^2 + I_1 C S \rho_1 \rho_2^2 + I_2 C \rho_1^2 \rho_2 + I_3 C \rho_2^3 + I_4 S \rho_1^2 \rho_2 + I_5 S \rho_2^3 + \\ I_6 \rho_1^3 + I_7 \rho_1 \rho_2^2 + I_8 \rho_1), \\ f_{22} = \frac{1}{24b^2} (J_0 C^2 \rho_1^2 \rho_2 + J_1 C S \rho_1^2 \rho_2 + J_2 C \rho_1^3 + J_3 C \rho_1 \rho_2^2 + J_4 S \rho_1^3 + J_5 S \rho_1 \rho_2^2 + \\ J_6 \rho_1^2 \rho_2 + J_7 \rho_2^3 + J_8 \rho_2), \\ f_{23} = \frac{1}{24b^2 \rho_1 \rho_2} (K_0 C^2 \rho_1^3 \rho_2 + K_1 C^2 \rho_1 \rho_2^3 + K_2 C S \rho_1^3 \rho_2 + K_3 C S \rho_1 \rho_2^3 + K_4 C \rho_1^4 + \\ K_5 C \rho_1^2 \rho_2^2 + K_6 C \rho_2^4 + K_7 S \rho_1^4 + K_8 S \rho_1^2 \rho_2^2 + K_9 S \rho_2^4 + K_{10} \rho_1^3 \rho_2 + K_{11} \rho_1 \rho_2^3 + \\ K_{12} \rho_1 \rho_2), \\ f_{24} = C^2 + S^2 - 1. \end{array} \right. \quad (3.2.c)$$

D'après le théorème de Bezout's, le nombre maximum de cycles limites du système (3.2.c) peut être au plus le produit des degrés de ces quatre équations polynomiales c-à-d $2 \times 5^2 \times 6 = 300$. On ne peut prendre que la solution positive des variables ρ_1 et ρ_2 .

3.3 Applications

Dans cette section, on donne un exemple qui correspond au système (3.1.a)

Exemple 3.1 Nous considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 x + y + \frac{1}{2} x^2, \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 y, \\ \dot{z} = w - 3x^2, \\ \dot{w} = -z + y^2. \end{array} \right. \quad (3.3.a)$$

En faisant le changement de variables $(x, y, z, w) = (\varepsilon \rho_1 \cos \theta, \varepsilon \rho_1 \sin \theta, \varepsilon \rho_2 \cos(\theta + s), \varepsilon \rho_2 \sin(\theta + s))$ et en prenant θ en tant que nouvelle variable indépendante, nous obtenons $F_1(\rho_1, \rho_2, s) = (F_{11}, F_{12}, F_{13})$ et $F_2(\rho_1, \rho_2, s) = (F_{21}, F_{22}, F_{23})$, où

$$\begin{aligned} F_{11}(\rho_1, \rho_2, s) &= -\frac{1}{6} \rho_1 (3 \cos^3 \theta \rho_1 + 2 \cos^2 \theta \sin \theta \rho_1), \\ F_{21}(\rho_1, \rho_2, s) &= \frac{3}{2} \rho_1 - \frac{1}{6} \rho_1^2 \cos^2 \theta (3 \cos \theta + 2 \sin \theta) \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta \rho_1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin \theta \rho_1 \right), \\ F_{12}(\rho_1, \rho_2, s) &= -\rho_1^2 (-\sin(\theta + s) \cos^2 \theta - 3 \cos(\theta + s) \cos^2 \theta + \sin(\theta + s)), \\ F_{22}(\rho_1, \rho_2, s) &= \rho_1^2 (\sin(\theta + s) \cos^2 \theta + 3 \cos(\theta + s) \cos^2 \theta - \sin(\theta + s)) \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta \rho_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin \theta \rho_1 \right), \\ F_{13}(\rho_1, \rho_2, s) &= -\frac{1}{\rho_2} (3 \sin(\theta + s) \cos^2 \theta \rho_1^2 - \cos(\theta + s) \cos^2 \theta \rho_1^2 + \cos(\theta + s) \rho_1^2) + \\ &\quad \frac{1}{3} \cos^3 \theta \rho_1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin \theta \rho_1, \end{aligned}$$

$$F_{23}(\rho_1, \rho_2, s) = -\frac{\rho_1}{6\rho_2} \left(18 \sin(\theta + s) \cos^2 \theta \rho_1 - 2 \cos^3 \theta \rho_2 - 6 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) \rho_1 + \right. \\ \left. 3 \cos^2 \theta \sin \theta \rho_2 + 6 \cos(\theta + s) \rho_1 \right) \left(\frac{1}{3} \cos^3 \theta \rho_1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin \theta \rho_1 \right).$$

Nous appliquons le théorème de moyennisation du second ordre, on obtient

$$\begin{cases} f_{21}(\rho_1, \rho_2, C, S) = -\frac{1}{24} \rho_1 (\rho_1^2 - 36), \\ f_{22}(\rho_1, \rho_2, C, S) = \frac{1}{72} \rho_1^3 (51C + 22S), \\ f_{23}(\rho_1, \rho_2, C, S) = \frac{1}{216\rho_2} \rho_1^2 (66\rho_1 C - 153\rho_1 S + 19\rho_2), \\ f_{24}(\rho_1, \rho_2, C, S) = C^2 + S^2 - 1. \end{cases} \quad (3.3.b)$$

La racine du système (3.3.b) avec $\rho_i > 0$ pour $i = 1, 2$ est $(6, \frac{18}{19} \sqrt{3085}, -\frac{22}{\sqrt{3085}}, \frac{51}{\sqrt{3085}})$.

Le déterminant de la matrice jacobienne en ce point est égal à $\frac{361}{6}$, et les valeurs propres de cette matrice jacobienne sont

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4.144775867 - 5 \times 10^{-9}i \\ -2.789004689 - 1.730127020 \times 10^{-9}i \\ 1.734939767 + 6.930127020 \times 10^{-9}i \end{bmatrix}.$$

De là, nous concluons que le cycle limite du système (3.3.a) est instable.

CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PLANAIRES



Sommaire

4.1	Introduction et résultats principaux	45
4.2	Preuves des résultats	46
4.3	Applications	54

4.1 Introduction et résultats principaux

Dans [38] Mathieu considère l'équation différentielle du second ordre

$$\ddot{x} + b(1 + \cos t)x = 0, \quad (4.1.a)$$

où b est une constante réelle. L'équation (4.1.a) est plus générale et la plus simple d'un système excité dépendant d'un paramètre. De plus l'équation générale d'Emarkov-Pinney est l'équation de type Mathieu-Duffing

$$\ddot{x} + b(1 + \cos t)x - x^\beta = 0, \quad (4.1.b)$$

où β est un entier et $b > 0$. Ces équations décrivent la dynamique d'un système à excitation paramétrique harmonique avec terme non linéaire correspondant à une force de rappel, voir [55, 51].

En 2019, Chen et al [9] ont étudié par la méthode de la moyennisation le nombre maximum des cycles limites d'une équation différentielle ordinaire perturbée du second ordre

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)Q(x, y) + x = 0, \quad (4.1.c)$$

où $\varepsilon > 0$ est un petite paramètre, $Q(x, y)$ est un polynôme de degré n et m est un entier arbitraire non négative.

Dans ce chapitre, on considère le problème de la recherche du nombre maximum de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels planaires qui peut être obtenu en perturbant le centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(1 + \sin^n \theta)xP(x, y), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(1 + \cos^m \theta)yQ(x, y), \end{cases} \quad (4.1.d)$$

où n et m sont des entiers positifs, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2 respectivement et ε est un petit paramètre.

Nos résultats sont les suivants.

Théorème 4.1 Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, on trouve le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (4.1.d) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ comme suit

(1) Si m impair et n impair

$$\max\{n_1, n_2\},$$

(2) Si m pair et n pair

$$\max\left\{\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor\right\},$$

(3) Si m impair et n pair

$$\max\left\{n_2, n_2 + \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor\right\},$$

(4) Si m pair et n impair

$$\max\left\{n_1, n_1 + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor\right\},$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

4.2 Preuves des résultats

Dans cette preuve, on utilise la théorie de moyennisation d'ordre un. Supposons que

$$\begin{cases} P(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} x^i y^j, \\ Q(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} x^i y^j. \end{cases}$$

En coordonnées polaires (r, θ) , où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $r > 0$ le système (4.1.d) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} (\cos^{i+2} \theta \sin^j \theta + \cos^{i+2} \theta \sin^{j+n} \theta) r^{i+j+1} \right. \\ \quad \left. + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} (\cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{j+2} \theta) r^{i+j+1} \right), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} (\cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \cos^{i+m+1} \theta \sin^{j+1} \theta) r^{i+j} \right. \\ \quad \left. - \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} (\cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta + \cos^{i+1} \theta \sin^{j+n+1} \theta) r^{i+j} \right). \end{cases} \quad (4.2.a)$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, le système (4.2.a) s'écrit sous la forme standard du théorème de moyennisation d'ordre un

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} (\cos^{i+2} \theta \sin^j \theta + \cos^{i+2} \theta \sin^{j+n} \theta) r^{i+j+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} \left(\cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{j+2} \theta \right) r^{i+j+1} \Big) + O(\varepsilon^2) \\
 & = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2),
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 F(r, \theta) & = F_1(r, \theta) + F_2(r, \theta), \\
 F_1(r, \theta) & = \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} \left(\cos^{i+2} \theta \sin^j \theta + \cos^{i+2} \theta \sin^{j+n} \theta \right) r^{i+j+1}, \\
 F_2(r, \theta) & = \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} \left(\cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \cos^{i+m} \theta \sin^{j+2} \theta \right) r^{i+j+1}.
 \end{aligned}$$

Maintenant, on calcule la fonction moyennée

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta. \quad (4.2.b)$$

Pour calculer l'expression exacte de $F_{10}(r)$, nous utilisons les formules suivantes

$$\int_0^{2\pi} \sin^p \theta \cos^{2q} \theta d\theta = \frac{(2q-1)!!}{(2q+p)(2q+p-2)\dots(p+2)} \int_0^{2\pi} \sin^p \theta d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2q} \theta d\theta = \frac{(2q-1)!!}{(2q+p)(2q+p-2)\dots(p+2)} \int_0^{2\pi} \cos^p \theta d\theta.$$

Ces formules sont applicables pour un réel p arbitraire et un entier positif arbitraire q , sauf pour les entiers pairs négatifs suivants $p = -2, -4, \dots, -2n$.

Si p est un nombre naturel et $q = 0$ nous avons

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2l} \theta d\theta = \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2l+1} \theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2l} \theta d\theta = \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2l+1} \theta d\theta = 0.$$

Nous avons aussi

$$\int_0^{2\pi} \sin^p \theta \cos^{2q+1} \theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^p \theta \sin^{2q+1} \theta d\theta = 0.$$

Ces formules sont applicables pour un réel p arbitraire et un entier non négatif q , sauf les entiers impairs négatifs suivants $p = -1, -3, \dots, -(2n + 1)$.

Pour plus de détails sur ces intégrales et autres voir [57].

Maintenant nous déterminons $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta$, dans les cas suivants

(1) Si n impair et n_1 pair

$$\begin{aligned}
 f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_1} [a_{i,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{i+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{2q+j=2}^{n_1+2} [a_{2q-2,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{2q} \theta] r^{2q+j-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2q+2l+1=3}^{n_1+1} a_{2q-2,2l+1} r^{2q+2l} \int_0^{2\pi} \sin^{2l+n+1} \theta \cos^{2q} \theta d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2l+2q=2}^{n_1+2} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \int_0^{2\pi} \sin^{2l} \theta \cos^{2q} \theta d\theta \right] \\
 &= \sum_{l+q=1}^{n_1/2} a_{2q-2,2l+1} r^{2l+2q} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \frac{(2l+n)!!}{2^{\frac{2l+n+1}{2}} (\frac{2l+n+1}{2})!} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{(n_1+2)/2} a_{2q-2,2l} r^{2l+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2l)(2q+2l-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \\
 &= \sum_{l+q=1}^{n_1/2} a_{2q-2,2l+1} r^{2q+2l} \frac{(2l+n)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2l+n+1}{2}} (\frac{2l+n+1}{2})! (2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{(n_1+2)/2} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \frac{(2q-1)!!(2l-1)!!}{2^{l+q} l! (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n_1+1} A_k r^k.
 \end{aligned}$$

(2) Si n impair et n_1 impair

$$\begin{aligned}
 f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_1} [a_{i,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{i+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{2q+j=2}^{n_1+2} [a_{2q-2,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{2q} \theta] r^{2q+j-1} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2q+2l+1=3}^{n_1+2} a_{2q-2,2l+1} r^{2q+2l} \int_0^{2\pi} \sin^{2l+n+1} \theta \cos^{2q} \theta d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2l+2q=2}^{n_1+1} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \int_0^{2\pi} \sin^{2l} \theta \cos^{2q} \theta d\theta \right] \\
 &= \sum_{l+q=1}^{(n_1+1)/2} a_{2q-2,2l+1} r^{2q+2l} \frac{(2l+n)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2l+n+1}{2}} \left(\frac{2l+n+1}{2}\right)!(2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{(n_1+1)/2} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \frac{(2q-1)!!(2l-1)!!}{2^{l+q} l!(q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n_1+1} \tilde{A}_k r^k.
 \end{aligned}$$

(3) Si n pair et n_1 pair

$$\begin{aligned}
 f_3(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_1} [a_{i,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{i+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{2q+j=2}^{n_1+2} [a_{2q-2,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{2q} \theta] r^{2q+j-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+2q=2}^{n_1+2} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \int_0^{2\pi} (\sin^{2l} \theta + \sin^{2l+n} \theta) \cos^{2q} \theta d\theta \right] \\
 &= \sum_{l+q=1}^{(n_1+2)/2} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \left[\frac{(2l-1)!!}{2^l l!} + \frac{(2l+n-1)!!}{2^{\frac{2l+n}{2}} \left(\frac{2l+n}{2}\right)!} \right] \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1+1} \bar{A}_k r^k.
 \end{aligned}$$

(4) Si n pair et n_1 impair

$$\begin{aligned}
 f_4(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_1} [a_{i,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{i+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{2q+j=2}^{n_1+2} [a_{2q-2,j} (\sin^j \theta + \sin^{j+n} \theta) \cos^{2q} \theta] r^{2q+j-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+2q=2}^{n_1+1} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \int_0^{2\pi} (\sin^{2l} \theta + \sin^{2l+n} \theta) \cos^{2q} \theta d\theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l+q=1}^{(n_1+1)/2} a_{2q-2,2l} r^{2q+2l-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q(q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \left[\frac{(2l-1)!!}{2^l l!} + \frac{(2l+n-1)!!}{2^{\frac{2l+n}{2}} \left(\frac{2l+n}{2}\right)!} \right] \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1} \bar{A}_k r^k.
 \end{aligned}$$

Et nous déterminons $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta$ dans les cas suivants

(5) Si m impair et n_2 pair

$$\begin{aligned}
 f_5(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_2} [b_{i,j} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n_2+2} [b_{i,2q-2} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+1+2q=3}^{n_2+1} b_{2l+1,2q-2} r^{2l+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2l+m+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2l+2q=2}^{n_2+2} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2l} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right] \\
 &= \sum_{l+q=1}^{n_2/2} b_{2l+1,2q-2} r^{2l+2q} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \frac{(2l+m)!!}{2^{\frac{2l+m+1}{2}} \left(\frac{2l+m+1}{2}\right)!} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{(n_2+2)/2} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{(2q+2l)(2q+2l-2)\dots(2l+2)} \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \\
 &= \sum_{l+q=1}^{n_2/2} b_{2l+1,2q-2} r^{2l+2q} \frac{(2l+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2l+m+1}{2}} \left(\frac{2l+m+1}{2}\right)! (2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{(n_2+2)/2} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \frac{(2l-1)!!(2q-1)!!}{2^{l+q} l! (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n_2+1} B_k r^k.
 \end{aligned}$$

(6) Si m impair et n_2 impair

$$\begin{aligned}
 f_6(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_2} [b_{i,j} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n_2+2} [b_{i,2q-2}(\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+1+2q=3}^{n_2+2} b_{2l+1,2q-2} r^{2l+2q} \int_0^{2\pi} \cos^{2l+m+1} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{2l+2q=2}^{n_2+1} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} \cos^{2l} \theta \sin^{2q} \theta d\theta \right] \\
 &= \sum_{l+q=1}^{(n_2+1)/2} b_{2l+1,2q-2} r^{2l+2q} \frac{(2l+m)!!(2q-1)!!}{2^{\frac{2l+m+1}{2}} \left(\frac{2l+m+1}{2}\right)!(2q+2l+1)(2q+2l-1)\dots(2l+3)} \\
 &\quad + \sum_{l+q=1}^{(n_2+1)/2} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \frac{(2l-1)!!(2q-1)!!}{2^{l+q} l!(q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n_2+1} \tilde{B}_k r^k.
 \end{aligned}$$

(7) Si m pair et n_2 pair

$$\begin{aligned}
 f_7(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_2} [b_{i,j}(\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n_2+2} [b_{i,2q-2}(\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta] r^{i+2q-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+2q=2}^{n_2+2} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} (\cos^{2l} \theta + \cos^{2l+m} \theta) \sin^{2q} \theta d\theta \right] \\
 &= \sum_{l+q=1}^{(n_2+2)/2} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \left[\frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2l+m-1)!!}{2^{\frac{2l+m}{2}} \left(\frac{2l+m}{2}\right)!} \right] \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2+1} \bar{B}_k r^k.
 \end{aligned}$$

(8) Si m pair et n_2 impair

$$\begin{aligned}
 f_8(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{n_2} [b_{i,j}(\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{j+2} \theta] r^{i+j+1} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+2q=2}^{n_2+2} \left[b_{i,2q-2} (\cos^i \theta + \cos^{i+m} \theta) \sin^{2q} \theta \right] r^{i+2q-1} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{2l+2q=2}^{n_2+1} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \int_0^{2\pi} (\cos^{2l} \theta + \cos^{2l+m} \theta) \sin^{2q} \theta d\theta \right] \\
 &= \sum_{l+q=1}^{(n_2+1)/2} b_{2l,2q-2} r^{2l+2q-1} \frac{(2q-1)!!}{2^q (q+l)(q+l-1)\dots(l+1)} \left[\frac{(2l-1)!!}{2^l l!} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(2l+m-1)!!}{2^{\frac{2l+m}{2}} \left(\frac{2l+m}{2}\right)!} \right] \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ odd}}}^{n_2} \bar{B}_k r^k.
 \end{aligned}$$

On revient à l'équation (4.2.b), et on distingue les cas et sous-cas suivants

(a) Si m impair et n impair

(a.1) n_1 pair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} A_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} B_k r^k,$$

(a.2) n_1 impair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} \tilde{A}_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} \tilde{B}_k r^k,$$

(a.3) n_1 impair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} \tilde{A}_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} B_k r^k,$$

(a.4) n_1 pair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} A_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} \tilde{B}_k r^k.$$

On obtient le polynôme F_{10} en fonction de r , alors d'après le théorème de Descartes F_{10} à au plus $\max\{n_1, n_2\}$ cycles limites, ceci complète la preuve du cas (1) du théorème 4.1.

(b) Si m pair et n pair.

(b.1) n_1 pair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1+1} \bar{A}_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2+1} \bar{B}_k r^k,$$

(b.2) n_1 impair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1} \bar{A}_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2} \bar{B}_k r^k,$$

(b.3) n_1 impair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1} \bar{A}_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2+1} \bar{B}_k r^k,$$

(b.4) n_1 pair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1+1} \bar{A}_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2} \bar{B}_k r^k.$$

On obtient le polynôme F_{10} en fonction de r^2 , alors d'après le théorème de Descartes F_{10} à au plus $\max\{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor\}$ cycles limites, ceci complète la preuve du cas (2) du théorème 4.1.

(c) Si m impair et n pair.

(c.1) n_1 pair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1+1} \bar{A}_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} B_k r^k,$$

(c.2) n_1 impair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1} \bar{A}_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} \bar{B}_k r^k,$$

(c.3) n_1 impair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1} \bar{A}_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} B_k r^k,$$

(c.4) n_1 pair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_1+1} \bar{A}_k r^k + \sum_{k=1}^{n_2+1} \bar{B}_k r^k.$$

Alors F_{10} est la somme de deux polynômes, un en r et l'autre en r^2 , d'après le théorème de Descartes F_{10} à au plus $\max\{n_2, n_2 + \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor\}$ cycles limites, ceci complète la preuve du cas (3) du théorème 4.1.

(d) Si n impair et m pair.

(d.1) n_1 pair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} A_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2+1} \bar{B}_k r^k,$$

(d.2) n_1 impair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} \tilde{A}_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2} \bar{B}_k r^k,$$

(d.3) n_1 impair et n_2 pair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} \tilde{A}_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2+1} \bar{B}_k r^k,$$

(d.4) n_1 pair et n_2 impair

$$F_{10}(r) = \sum_{k=1}^{n_1+1} A_k r^k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n_2} \bar{B}_k r^k,$$

Alors F_{10} est la somme de deux polynômes, un en r et l'autre en r^2 , d'après le théorème de Descartes F_{10} à au plus $\max\{n_1, n_1 + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor\}$ cycles limites, ceci complète la preuve du cas (4) du théorème 4.1.

4.3 Applications

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(1 + \sin^2 \theta)x \left(\frac{1}{84}x^2 - \frac{23}{240} \right), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(1 + \cos^3 \theta)y \left(\frac{1}{8}x^2y^2 - \frac{23}{18}xy^2 + \frac{1}{12}y^2 - \frac{13}{48}x + \frac{1}{8} \right). \end{cases} \quad (4.3.a)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$ le système (4.3.a) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left(\left(\frac{1}{84}r^3 \cos^4 \theta - \frac{23}{240}r \cos^2 \theta \right) (1 + \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{8}r^5 \sin^4 \theta \cos^2 \theta - \frac{23}{18}r^4 \sin^4 \theta \cos \theta + \frac{1}{12}r^3 \sin^4 \theta - \frac{13}{48}r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{8}r \sin^2 \theta \right) (1 + \cos^3 \theta) \right), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \left(\left(-\frac{1}{84}r^2 \cos^3 \theta \sin \theta + \frac{23}{240} \sin \theta \cos \theta \right) (1 + \sin^2 \theta) + \left(-\frac{23}{18}r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \frac{1}{12}r^2 \sin^3 \theta \cos \theta + \frac{1}{8}r^4 \cos^3 \theta \sin^3 \theta - \frac{13}{48}r \cos \theta + \frac{1}{8} \cos \theta \sin \theta \right) \right). \end{cases}$$

D'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F(r, \theta) + O(\varepsilon^2).$$

où

$$F(r, \theta) = \left(\frac{1}{84} r^3 \cos^4 \theta - \frac{23}{240} r \cos^2 \theta \right) (1 + \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{8} r^5 \sin^4 \theta \cos^2 \theta - \frac{23}{18} r^4 \sin^4 \theta \times \right. \\ \left. \cos \theta + \frac{1}{12} r^3 \sin^4 \theta - \frac{13}{48} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1}{8} r \sin^2 \theta \right) (1 + \cos^3 \theta).$$

L'équation moyennée du premier ordre est

$$F_{10} = \frac{1}{768} r (6r^4 - 23r^3 + 28r^2 - 13r + 2),$$

qui a exactement quatre racines positives $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = 1$ et $r_4 = 2$. satisfaisant

$$\begin{aligned} \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{5}{10368} \neq 0, \\ \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_2} &= \frac{1}{2048} \neq 0, \\ \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_3} &= -\frac{1}{384} \neq 0, \\ \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_4} &= \frac{5}{128} \neq 0. \end{aligned}$$

Nous concluons donc que le système (4.3.a) a deux cycles limites stables pour $r_1 = \frac{1}{3}$ et $r_3 = 1$, en plus de deux autres cycles limites instables pour $r_2 = \frac{1}{2}$ et $r_4 = 2$ (Voir la figure (4.1)).

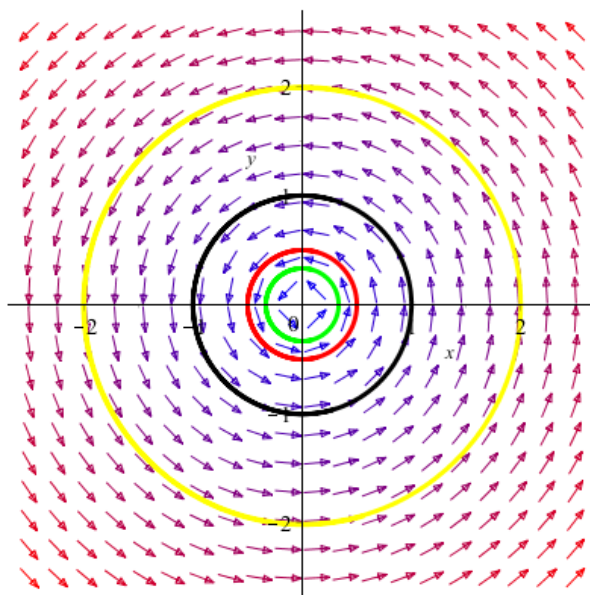


FIGURE 4.1 – Les quatre cycles limites pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

CYCLES LIMITES POUR LE SYSTÈME DE KUKLES GÉNÉRALISÉ



Sommaire

5.1	Introduction et résultat principaux	56
5.2	Preuves des résultats	57
5.2.1	Preuve du théorème 5.1	57
5.2.2	Preuve du Corollaire 5.2	60

5.1 Introduction et résultat principaux

Dans [26] J. Llibre et A. Makhlouf ont étudié, en utilisant la méthode de la moyennisation, le nombre maximal de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2p-1}, \\ \dot{y} = x^{2q-1} - \varepsilon f(x)y^{2\alpha}, \end{cases}$$

où f est un polynôme de degré n et p, α et q sont des entiers positifs.

Dans [40], les auteurs ont étudié, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre, le nombre maximal de cycles limites du système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2p-1}, \\ \dot{y} = x^{2mp-1} + \varepsilon(px^{2mp} + mpy^{2p})(g(x, y) - A), \end{cases}$$

où $g(x, y)$ avec $g(0, 0) = 0$ est un polynôme de degré $n \geq 1$, p et m sont des entiers positifs et $A > 0$.

Dans ce chapitre, on considère le problème de la recherche du nombre maximal de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels polynômiaux qui peut être obtenu en perturbant le centre non linéaire $\dot{x} = y^{2p-1}$, $\dot{y} = -x^{2q-1}$, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2p-1}, \\ \dot{y} = -x^{2q-1} - \varepsilon(f(x, y) + g(x, y)y + h(x, y)y^2 + l(x, y)y^3), \end{cases} \quad (5.1.a)$$

où p et q sont des entiers positifs, $f(x, y), g(x, y), h(x, y), l(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre.

Nos résultats sont les suivants.

Théorème 5.1 Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du système différentiel de Kukles (5.1.a) qui bifurquent d'un centre non linéaire $\dot{x} = y^{2p-1}$, $\dot{y} = -x^{2q-1}$ en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre est

$$\max \left\{ \left[\frac{o(n_1).M - q}{2} \right], \left[\frac{e(n_2).M}{2} \right], \left[\frac{o(n_3).M + q}{2} \right], \left[\frac{e(n_4).M}{2} \right] + q \right\},$$

où $M = \max(p, q)$, $e(i)$ est le plus grand nombre pair inférieur ou égal à i , $o(i)$ est le plus grand nombre impair inférieur ou égal à i , et $[.]$ désigne la partie entière.

Corollaire 5.2 Considérons le système (5.1.a) avec $n_1 = n_3 = 3$, $n_2 = n_4 = 2$ et $p = 1, q = 2$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - \varepsilon(a_{01}y + a_{03}y^3 + (b_{20}x^2)y + (c_{21}x^2y)y^2 + (d_{02}y^2)y^3), \end{cases} \quad (5.1.b)$$

où

$$\begin{aligned} a_{01} &= 5.672101630, & a_{03} &= 24.34233128, & b_{20} &= -46.96722786, \\ c_{21} &= -38.50861204, & d_{02} &= 2.076507516. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le système (5.1.b) a quatre cycles limites qui bifurquent d'un centre non linéaire $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x^3$ en utilisant la méthode de la moyennisation du premier ordre.

5.2 Preuves des résultats

5.2.1 Preuve du théorème 5.1

Le système (5.1.a) avec $\varepsilon = 0$ est un système Hamiltonien avec la fonction Hamiltonien

$$H(x, y) = \frac{1}{2q}x^{2q} + \frac{1}{2p}y^{2p}.$$

Notons que le système (5.1.a) avec $\varepsilon = 0$ a un centre global, c'est l'origine $(0,0)$. Nous rappelons les fonctions (p, q) -trigonométriques

$$z(\theta) = Cs\theta, \quad w(\theta) = Sn\theta,$$

comme étant des solutions du problème à valeur initiale

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -w^{2p-1}, & \dot{w} &= z^{2q-1}, \\ z(0) &= p^{-\frac{1}{2q}}, & w(0) &= 0. \end{aligned}$$

On peut démontrer que $Cs\theta$ et $Sn\theta$ vérifient la relation

$$pCs^{2q}\theta + qSn^{2p}\theta = 1,$$

et que $Cs\theta$ et $Sn\theta$ sont des fonctions T -périodique avec

$$T = 2p^{-\frac{1}{2q}} q^{-\frac{1}{2p}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2p})\Gamma(\frac{1}{2q})}{\Gamma(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q})},$$

où Γ est la fonction Gamma.

En écrivant le système (5.1.a) en les coordonnées polaires de Lyapunov

$$x = r^p Cs\theta, \quad y = r^q Sn\theta.$$

D'où le système (5.1.a) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \left(r^{1-q} Sn^{2p-1} \theta f(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) + r Sn^{2p} \theta g(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) \right. \\ \quad \left. + r^{1+q} Sn^{2p+1} \theta h(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) + r^{1+2q} Sn^{2p+2} \theta l(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) \right), \\ \dot{\theta} = -r^{2pq-p-q} - \varepsilon \left(pr^{-q} Cs\theta f(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) + pCs\theta Sn\theta g(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) \right. \\ \quad \left. + pr^q Cs\theta Sn^2 \theta h(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) + pr^{2q} Cs\theta Sn^3 \theta l(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) \right). \end{cases}$$

En considérant θ comme une variable indépendante, le système précédent devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2),$$

où

$$F_1(r, \theta) = r^{-2pq+p+1} \left(Sn^{2p-1} \theta f(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) + r^q Sn^{2p} \theta g(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) \right. \\ \left. + r^{2q} Sn^{2p+1} \theta h(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) + r^{3q} Sn^{2p+2} \theta l(r^p Cs\theta, r^q Sn\theta) \right). \quad (5.2.a)$$

On écrit les polynômes $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ et $l(x, y)$ apparaissant dans (5.2.a) comme

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} x^i y^j, & g(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} x^i y^j, \\ h(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_3} c_{ij} x^i y^j, & l(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_4} d_{ij} x^i y^j. \end{aligned}$$

Par conséquent (5.2.a) devient

$$F_1(r, \theta) = r^{-2pq+p+1} \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} r^{pi+qj} Cs^i \theta Sn^{2p+j-1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} r^{pi+qj+q} Cs^i \theta Sn^{2p+j} \theta \right. \\ \left. + \sum_{i+j=0}^{n_3} c_{ij} r^{pi+qj+2q} Cs^i \theta Sn^{2p+j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} d_{ij} r^{pi+qj+3q} Cs^i \theta Sn^{2p+j+2} \theta \right).$$

Soit F_{10} l'équation moyennée du premier ordre associée au système (5.1.a)

$$F_{10}(r) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(r, \theta) d\theta,$$

alors

$$F_{10}(r) = \frac{r^{-2pq+p+1}}{T} \int_0^T \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij} r^{pi+qj} C s^i \theta S n^{2p+j-1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij} r^{pi+qj+q} C s^i \theta S n^{2p+j} \theta \right. \\ \left. + \sum_{i+j=0}^{n_3} c_{ij} r^{pi+qj+2q} C s^i \theta S n^{2p+j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} d_{ij} r^{pi+qj+3q} C s^i \theta S n^{2p+j+2} \theta \right) d\theta.$$

On sait que

$$\int_0^T C s^i \theta S n^{2p+j-1} \theta d\theta = \begin{cases} \alpha_{i,2p+j-1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^T C s^i \theta S n^{2p+j} \theta d\theta = \begin{cases} \beta_{i,2p+j} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^T C s^i \theta S n^{2p+j+1} \theta d\theta = \begin{cases} \delta_{i,2p+j+1} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

$$\int_0^T C s^i \theta S n^{2p+j+2} \theta d\theta = \begin{cases} \mu_{i,2p+j+2} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\ 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

on obtient

$$F_{10}(r) = \frac{r^{-2pq+p+1}}{T} \left(\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{o(n_1)} a_{ij} r^{pi+qj} \alpha_{i,2p+j-1} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{e(n_2)} b_{ij} r^{pi+qj+q} \beta_{i,2p+j} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{o(n_3)} c_{ij} r^{pi+qj+2q} \delta_{i,2p+j+1} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{e(n_4)} d_{ij} r^{pi+qj+3q} \mu_{i,2p+j+2} \right),$$

$$= \frac{r^{-2pq+p+q+1}}{T} \left(\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{o(n_1)} a_{ij} r^{pi+q(j-1)} \alpha_{i,2p+j-1} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{e(n_2)} b_{ij} r^{pi+qj} \beta_{i,2p+j} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{o(n_3)} c_{ij} r^{pi+q(j+1)} \delta_{i,2p+j+1} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{e(n_4)} d_{ij} r^{pi+q(j+2)} \mu_{i,2p+j+2} \right).$$

Le nombre de racines positives de $F_{10}(r)$ est égal au nombre de l'expression

$$F_{10}^*(r) = \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{o(n_1)} a_{ij} r^{pi+q(j-1)} \alpha_{i,2p+j-1} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{e(n_2)} b_{ij} r^{pi+qj} \beta_{i,2p+j} \\ + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{o(n_3)} c_{ij} r^{pi+q(j+1)} \delta_{i,2p+j+1} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{e(n_4)} d_{ij} r^{pi+q(j+2)} \mu_{i,2p+j+2}. \quad (5.2.b)$$

Le degré de $F_{10}^*(r)$ est lié au maximum de $pi + qj$ avec $i + j \leq n_l, l = 1 \dots 4$. et on a

$$\begin{aligned} pi + qj &\leq \max(p, q).i + \max(p, q).j \\ &\leq \max(p, q)(i + j) \\ &\leq n_l \max(p, q), \quad l = 1 \dots 4. \end{aligned}$$

Remarquons que la variable r apparait dans l'équation (5.2.b) en fonction r^2 car $pi + q(j - 1), pi + qj, pi + q(j + 1)$ et $pi + q(j + 2)$ sont paires. Et si $\bar{r} \neq 0$ est une solution de l'équation (5.2.b) alors $-\bar{r}$ est aussi une solution. On prend uniquement les solutions positives, alors le nombre de solutions de l'équation (5.2.b) est borné par

$$\max \left\{ \left[\frac{o(n_1). \max(p, q) - q}{2} \right], \left[\frac{e(n_2). \max(p, q)}{2} \right], \left[\frac{o(n_3). \max(p, q) + q}{2} \right], \left[\frac{e(n_4). \max(p, q)}{2} \right] + q \right\},$$

Remarque 5.1 Pour $p = q = 1$, les (1,1)-trigonométriques fonctions ne sont que les fonctions classiques $Cs\theta = \cos\theta, Sn\theta = \sin\theta, T = 2\pi$, et le système (5.1.a) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(f(x, y) + g(x, y)y + h(x, y)y^2 + l(x, y)y^3). \end{cases} \quad (5.2.c)$$

Alors le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (5.2.c) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est

$$\max \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{n_3 + 1}{2} \right], \left[\frac{n_4}{2} \right] + 1 \right\},$$

5.2.2 Preuve du Corollaire 5.2

D'après le Théorème (5.1) le système (5.1.b) avec $n_1 = n_3 = 3, n_2 = n_4 = 2$ et $p = 1, q = 2$, peut avoir au maximum

$$\max \left\{ \left[\frac{2 \times 3 - 2}{2} \right], \left[\frac{2 \times 2}{2} \right], \left[\frac{2 \times 3 + 2}{2} \right], \left[\frac{2 \times 2 + 4}{2} \right] \right\} = 4 \text{ cycles limites.}$$

Selon Liapunov [23], $Cs\theta$ et $Sn\theta$ sont les fonctions elliptiques avec

$$Cs\theta = cn(\theta), \quad Sn\theta = sn(\theta)dn(\theta) \text{ du module } \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et

$$T = 2 \times (1)^{-\frac{1}{4}} \times (2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})} = 7.416298714.$$

Alors l'équation moyennée du premier ordre (5.2.b) est

$$F_{10}(r) = a_{01}\alpha_{02} + b_{20}\beta_{22}r^2 + a_{03}\alpha_{04}r^4 + c_{21}\delta_{24}r^6 + d_{02}\mu_{06}r^8,$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{02} &= 2.472099570, \quad \alpha_{04} = 1.059471244, \quad \beta_{22} = 0.6777704678, \\ \delta_{24} &= 0.2259234893, \quad \mu_{06} = 0.4815778383. \end{aligned}$$

F_{10} a quatre racines positives qui sont $r_1 = 1.095445117$, $r_2 = 1.224744865$, $r_3 = 1.378404883$, et $r_4 = 2.024845669$.

Vérifiant

$$\left. \frac{dF_{10}(r)}{dr} \right|_{r=r_1} = -1.33425210 \neq 0,$$

$$\left. \frac{dF_{10}(r)}{dr} \right|_{r=r_2} = 0.76424075 \neq 0,$$

$$\left. \frac{dF_{10}(r)}{dr} \right|_{r=r_3} = -1.69819502 \neq 0,$$

$$\left. \frac{dF_{10}(r)}{dr} \right|_{r=r_4} = 67.176278 \neq 0.$$

Nous concluons donc que le système (5.1.b) a deux cycles limites stables pour $r_1 = 1.095445117$, et $r_3 = 1.378404883$. En plus deux autres cycles limites instables pour $r_2 = 1.224744865$, $r_4 = 2.024845669$. (Voir la figure (5.1)).

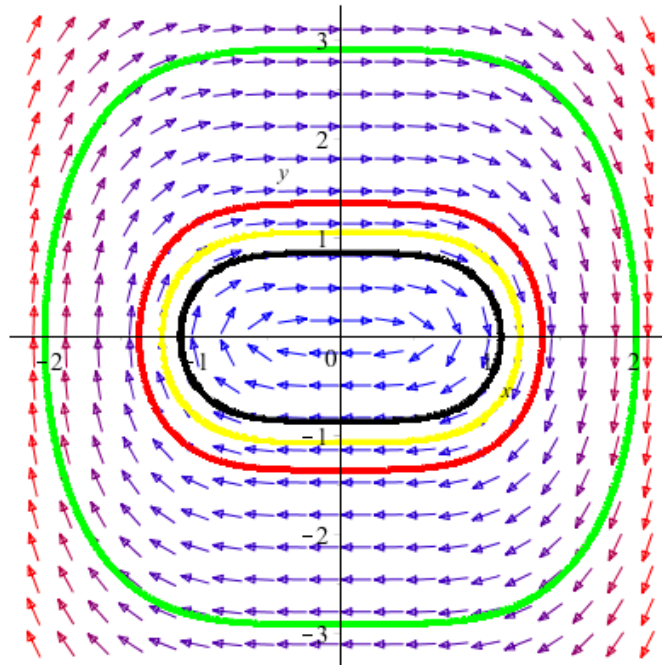


FIGURE 5.1 – Les quatre cycles limites pour $\varepsilon = 10^{-6}$.



ESTIMATION DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DES SYSTÈMES DE KUKLES GÉNÉRALISÉS

Sommaire

6.1	Introduction et résultats principaux	62
6.2	Preuves des résultats	63
6.2.1	Preuve du théorème 6.1	63
6.2.2	Preuve du théorème 6.2	65
6.3	Applications	81

6.1 Introduction et résultats principaux

En 2019, Boulfoul et al [6] ont étudié par la méthode de la moyennisation le nombre des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$, du système différentiel polynômial de Kukles de type :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - f(x) - g(x)y - h(x)y^2 - l(x)y^3, \end{cases} \quad (6.1.a)$$

où $f(x) = \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x), g(x) = \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x), h(x) = \varepsilon h_1(x) + \varepsilon^2 h_2(x)$ et $l(x) = \varepsilon l_1(x) + \varepsilon^2 l_2(x)$ sont de degrés n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre. Ils ont prouvé que le système (6.1.a) peut avoir $\lambda_1 = \max\left\{\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1\right\}$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre et $\lambda_2 = \max\left\{\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_4-1}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_1-1}{2} \right\rfloor + \mu, \left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_4-1}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{n_3-1}{2} \right\rfloor + \mu + 1\right\}$, cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre.

Dans ce chapitre, nous intéressons au nombre maximum de cycles limites d'une classe de systèmes différentiels de Kukles de type :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y^{2p} - g(x)y^{2p+1} - h(x)y^{2p+2} - l(x)y^{2p+3}, \end{cases} \quad (6.1.b)$$

où $f(x) = \varepsilon f^1(x) + \varepsilon^2 f^2(x), g(x) = \varepsilon g^1(x) + \varepsilon^2 g^2(x), h(x) = \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$, et $l(x) = \varepsilon l^1(x) + \varepsilon^2 l^2(x)$, où $f^k(x), g^k(x), h^k(x)$ et $l^k(x)$ sont de degrés n_1, n_2, n_3, n_4 respectivement pour $k = 1, 2$, p est un nombre positive, ε est un petit paramètre.

A la fin du chapitre nous donnons quelques exemples. Nos résultats sont les suivants.

Théorème 6.1 Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (6.1.b) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est

$$\max \left\{ \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1 \right\}.$$

Théorème 6.2 Pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (6.1.b) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre est

$$\max \left\{ \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \right\rfloor + p, \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_4 - 1}{2} \right\rfloor + p + 1, \right.$$

$$\left. \left\lfloor \frac{n_1 - 1}{2} \right\rfloor + \mu + p, \left\lfloor \frac{n_2 - 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + p + 1, \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_4 - 1}{2} \right\rfloor + p + 2, \right.$$

$$\left. \left\lfloor \frac{n_3 - 1}{2} \right\rfloor + \mu + p + 1 \right\},$$

$$\text{où } \mu = \min \left\{ \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1 \right\}.$$

6.2 Preuves des résultats

6.2.1 Preuve du théorème 6.1

Dans le but d'appliquer la méthode de la moyennisation du premier ordre, on écrit le système (6.1.b) avec $k = 1$, en coordonnées polaires (r, θ) , où $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r > 0$. Si on prend les polynômes

$$f^1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i, g^1(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i, h^1(x) = \sum_{i=0}^{n_3} c_i x^i \text{ et } l^1(x) = \sum_{i=0}^{n_4} d_i x^i. \quad (6.2.a)$$

Le système (6.1.b) peut être écrit comme suit :

$$\dot{r} = -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2p} \cos^i \theta \sin^{2p+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+2p+1} \cos^i \theta \sin^{2p+2} \theta \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2p+2} \cos^i \theta \sin^{2p+3} \theta + \sum_{i=0}^{n_4} d_i r^{i+2p+3} \cos^i \theta \sin^{2p+4} \theta \right),$$

$$\dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2p} \cos^{i+1} \theta \sin^{2p} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+2p+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{2p+1} \theta \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2p+2} \cos^{i+1} \theta \sin^{2p+2} \theta + \sum_{i=0}^{n_4} d_i r^{i+2p+3} \cos^{i+1} \theta \sin^{2p+3} \theta \right). \quad (6.2.b)$$

Si on prend θ comme une variable indépendante, le système (6.2.b) devient

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \left(\sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2p} \cos^i \theta \sin^{2p+1} \theta + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+2p+1} \cos^i \theta \sin^{2p+2} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2p+2} \cos^i \theta \sin^{2p+3} \theta + \sum_{i=0}^{n_4} d_i r^{i+2p+3} \cos^i \theta \sin^{2p+4} \theta \right) + O(\varepsilon^2), \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Soit F_{10} l'équation moyennée du premier ordre associée au système (6.1.b).

En utilisant la notation introduite dans le chapitre 2, on calcule F_{10}

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta,$$

Lemme 6.1 Soit $A_{i,j}(\theta) = \cos^i \theta \sin^j \theta$ et $\theta \xi_{i,j}(\theta) = \int_0^\theta A_{i,j}(s) ds$, avec

$$\int_0^{2\pi} A_{i,j}(\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair,} \\ 2\pi \xi_{i,j}(2\pi) & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont pair,} \end{cases}$$

et

$$\xi_{2i,2j+4}(2\pi) = \frac{2j+3}{2i+2j+4} \xi_{2i,2j+2}(2\pi).$$

En utilisant le lemme (6.1), on obtient l'intégrale de la fonction $F_{10}(r)$ suivante

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n_2} b_i r^{i+2p+1} A_{i,2p+2}(\theta) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{n_4} d_i r^{i+2p+3} A_{i,2p+4}(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i+2p+1} A_{2i,2p+2}(\theta) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2p+3} A_{2i,2p+4}(\theta) \right) d\theta \\ &= r^{2p+1} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i} \xi_{2i,2p+2}(2\pi) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} d_{2i} r^{2i+2} \xi_{2i,2p+4}(2\pi) \right) \\ &= r^{2p+1} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} b_{2i} r^{2i} \xi_{2i,2p+2}(2\pi) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} \frac{2p+3}{2i+2p+4} d_{2i} r^{2i+2} \xi_{2i,2p+2}(2\pi) \right). \quad (6.2.c) \end{aligned}$$

Alors le polynôme $F_{10}(r)$ peut avoir au plus $\max\left\{\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1\right\}$ racines positives. Par conséquent, le système différentiel (6.1.b) peut avoir au plus $\max\left\{\left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1\right\}$ cycles limites.

6.2.2 Preuve du théorème 6.2

Ainsi pour appliquer la théorie de la moyennisation du second ordre, on prend les même polynômes de (6.2.a), ainsi que les suivants

$$f^2(x) = \sum_{i=0}^{n_1} \bar{a}_i x^i, g^2(x) = \sum_{i=0}^{n_2} \bar{b}_i x^i, h^2(x) = \sum_{i=0}^{n_3} \bar{c}_i x^i \text{ et } l^2(x) = \sum_{i=0}^{n_4} \bar{d}_i x^i. \quad (6.2.d)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$ le système différentielle (6.1.b) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon G_1(r, \theta) - \varepsilon^2 H_1(r, \theta), \\ \dot{\theta} = -1 - \frac{\varepsilon}{r} G_2(r, \theta) - \frac{\varepsilon^2}{r} H_2(r, \theta). \end{cases} \quad (6.2.e)$$

Considérons maintenant θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (6.2.e) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F_1(r, \theta) = G_1, \quad F_2(r, \theta) = H_1 - \frac{1}{r} G_1 G_2. \quad (6.2.f)$$

Et

$$\begin{aligned} G_1 &= \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2p} A_{i,2p+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+2p+1} A_{i,2p+2}(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2p+2} A_{i,2p+3}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_4} d_i r^{i+2p+3} A_{i,2p+4}(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= \sum_{i=0}^{n_1} \bar{a}_i r^{i+2p} A_{i,2p+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} \bar{b}_i r^{i+2p+1} A_{i,2p+2}(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n_3} \bar{c}_i r^{i+2p+2} A_{i,2p+3}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_4} \bar{d}_i r^{i+2p+3} A_{i,2p+4}(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{i=0}^{n_1} a_i r^{i+2p} A_{i+1,2p}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} b_i r^{i+2p+1} A_{i+1,2p+1}(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n_3} c_i r^{i+2p+2} A_{i+1,2p+2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_4} d_i r^{i+2p+3} A_{i+1,2p+3}(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{i=0}^{n_1} \bar{a}_i r^{i+2p} A_{i+1,2p}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} \bar{b}_i r^{i+2p+1} A_{i+1,2p+1}(\theta) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n_3} \bar{c}_i r^{i+2p+2} A_{i+1,2p+2}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_4} \bar{d}_i r^{i+2p+3} A_{i+1,2p+3}(\theta). \end{aligned} \quad (6.2.g)$$

Dans le but d'appliquer la théorie de la moyennisation du second ordre, F_{10} doit être identiquement nulle.

D'après la formule (6.2.c), F_{10} est identiquement nulle si et seulement si

$$\begin{cases} b_{2i} = -\frac{2p+3}{2i-1}d_{2i-2} & 1 \leq i \leq \mu, \\ b_0 = b_{2i} = d_{2i-2} = 0 & \mu + 1 \leq i \leq \lambda, \end{cases} \quad (6.2.h)$$

où $\lambda = \max\left\{\left[\frac{n_2}{2}\right], \left[\frac{n_4}{2}\right] + 1\right\}$.

Soit F_{20} l'équation moyennée du seconde ordre associée au système (6.1.b).

Maintenant, on détermine F_{20} par

$$F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r),$$

où

$$F_{20}^1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y(r, \theta) d\theta, \quad F_{20}^2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta.$$

D'après la relation (6.2.h), on a

$$\begin{aligned} F_1(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} a_{2i+1} A_{2i+1, 2p+1}(\theta) r^{2i+2p+1} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]} a_{2i} A_{2i, 2p+1}(\theta) r^{2i+2p} + \\ & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} b_{2i+1} A_{2i+1, 2p+2}(\theta) r^{2i+2p+2} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} c_{2i+1} A_{2i+1, 2p+3}(\theta) r^{2i+2p+3} + \\ & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]} c_{2i} A_{2i, 2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_4-1}{2}\right]} d_{2i+1} A_{2i+1, 2p+4}(\theta) r^{2i+2p+4} + \\ & \sum_{i=1}^{\mu} \left(A_{2i-2, 2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i, 2p+2}(\theta) \right) d_{2i-2} r^{2i+2p+1}. \end{aligned}$$

Pour calculer F_{20}^1 , il faut dériver F_1 , donc

$$\begin{aligned} \frac{dF_1(r, \theta)}{dr} = & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1-1}{2}\right]} (2i+2p+1) a_{2i+1} A_{2i+1, 2p+1}(\theta) r^{2i+2p} + \\ & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_1}{2}\right]} (2i+2p) a_{2i} A_{2i, 2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} + \\ & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2}\right]} (2i+2p+2) b_{2i+1} A_{2i+1, 2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} + \\ & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2}\right]} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1, 2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} + \\ & \sum_{i=0}^{\left[\frac{n_3}{2}\right]} (2i+2p+2) c_{2i} A_{2i, 2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4)d_{2i+1}A_{2i+1,2p+4}(\theta)r^{2i+2p+3} + \\ & \sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1)d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1}A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p}. \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\begin{aligned} y(r, \theta) &= \int_0^\theta F_1(r, t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} r^{2i+2p+1} \left(\beta_{i,p,0} + \sum_{l=1}^{i+p+1} \beta_{i,p,l} \cos(2l)\theta \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2i} r^{2i+2p} \left(\tilde{\beta}_{i,p,0} + \sum_{l=1}^{i+p+1} \tilde{\beta}_{i,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} r^{2i+2p+2} \sum_{l=0}^{i+p+1} \bar{\beta}_{i,p,l} \sin(2l+1)\theta \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} r^{2i+2p+3} \left(\gamma_{i,p,0} + \sum_{l=1}^{i+p+2} \gamma_{i,p,l} \cos(2l)\theta \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2i} r^{2i+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{i,p,0} + \sum_{l=1}^{i+p+2} \tilde{\gamma}_{i,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} r^{2i+2p+4} \sum_{l=0}^{i+p+2} \bar{\gamma}_{i,p,l} \sin(2l+1)\theta \\ &+ \sum_{i=1}^{\mu} d_{2i-2} r^{2i+2p+1} \sum_{l=1}^{i+p+1} \delta_{i,p,l} \sin(2l)\theta, \end{aligned}$$

où $\beta_{i,p,l}, \tilde{\beta}_{i,p,l}, \bar{\beta}_{i,p,l}, \gamma_{i,p,l}, \tilde{\gamma}_{i,p,l}, \bar{\gamma}_{i,p,l}$ et $\delta_{i,p,l}$ sont des constantes.

Maintenant nous définissons

$$F_{20}^1(r) = \Upsilon_1(r) + \Upsilon_2(r) + \Upsilon_3(r) + \Upsilon_4(r) + \Upsilon_5(r) + \Upsilon_6(r) + \Upsilon_7(r),$$

où

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1)a_{2i+1}A_{2i+1,2p+1}(\theta)r^{2i+2p} \right) y(r, \theta) d\theta, \\ \Upsilon_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p)a_{2i}A_{2i,2p+1}(\theta)r^{2i+2p-1} \right) y(r, \theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_3(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2)b_{2i+1}A_{2i+1,2p+2}(\theta)r^{2i+2p+1} \right) y(r,\theta)d\theta, \\ \Upsilon_4(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3)c_{2i+1}A_{2i+1,2p+3}(\theta)r^{2i+2p+2} \right) y(r,\theta)d\theta, \\ \Upsilon_5(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2)c_{2i}A_{2i,2p+3}(\theta)r^{2i+2p+1} \right) y(r,\theta)d\theta, \\ \Upsilon_6(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4)d_{2i+1}A_{2i+1,2p+4}(\theta)r^{2i+2p+3} \right) y(r,\theta)d\theta, \\ \Upsilon_7(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1)d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1}A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) y(r,\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Les intégrales $\Upsilon_1(r) - \Upsilon_7(r)$ seront calculées dans les lemmes suivants

Lemme 6.2 *L'intégrale $\Upsilon_1(r)$ est le polynôme en fonction de r suivant*

$$\Upsilon_1(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\mu} \frac{(2i+2p+1)}{2} a_{2i+1} d_{2s-2} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} D_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+1}. \quad (6.2.i)$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'Appendice-B, nous obtenons

$$\begin{aligned} &(a_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1)a_{2i+1}A_{2i+1,2p+1}(\theta)r^{2i+2p} \right) \times \\ &\quad \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2s+1}r^{2s+2p+1} \left(\beta_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\ &(b_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1)a_{2i+1}A_{2i+1,2p+1}(\theta)r^{2i+2p} \right) \times \\ &\quad \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2s}r^{2s+2p} \left(\tilde{\beta}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\ &(c_1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1)a_{2i+1}A_{2i+1,2p+1}(\theta)r^{2i+2p} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2s+1} r^{2s+2p+2} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
 (d_1) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1) a_{2i+1} A_{2i+1,2p+1}(\theta) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2s+1} r^{2s+2p+3} \left(\gamma_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
 (e_1) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1) a_{2i+1} A_{2i+1,2p+1}(\theta) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2s} r^{2s+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
 (f_1) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1) a_{2i+1} A_{2i+1,2p+1}(\theta) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2s+1} r^{2s+2p+4} \sum_{l=0}^{s+p+2} \bar{\gamma}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
 (g_1) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} (2i+2p+1) a_{2i+1} A_{2i+1,2p+1}(\theta) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=1}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+2p+1} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \sin(2l)\theta \right) d\theta = \\
 & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\mu} \frac{(2i+2p+1)}{2} a_{2i+1} d_{2s-2} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} D_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+1}.
 \end{aligned}$$

Donc la somme des intégrales $(a_1) - (g_1)$ est le polynôme (6.2.i). Cela termine la preuve du lemme (6.2). ■

Lemme 6.3 *L'intégrale $\Upsilon_2(r)$ est le polynôme en fonction de r suivant*

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_2(r) = & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (i+p) a_{2i} b_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} C_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+1} + \\
 & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (i+p) a_{2i} d_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+2} \bar{\gamma}_{s,p,l} C_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3}. \quad (6.2.j)
 \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'Appendice-B, nous obtenons

$$(a_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p) a_{2i} A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} \right) \times \\ \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2s+1} r^{2s+2p+1} \left(\beta_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0,$$

$$(b_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p) a_{2i} A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} \right) \times \\ \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2s} r^{2s+2p} \left(\tilde{\beta}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0,$$

$$(c_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p) a_{2i} A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} \right) \times \\ \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2s+1} r^{2s+2p+2} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (i+p) a_{2i} b_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} C_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+1},$$

$$(d_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p) a_{2i} A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} \right) \times \\ \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2s+1} r^{2s+2p+3} \left(\gamma_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0,$$

$$(e_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p) a_{2i} A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} \right) \times \\ \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2s} r^{2s+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0,$$

$$(f_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p) a_{2i} A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} \right) \times \\ \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2s+1} r^{2s+2p+4} \sum_{l=0}^{s+p+2} \bar{\gamma}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta =$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (i+p)a_{2i}d_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} C_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3},$$

$$(g_2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (2i+2p)a_{2i}A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p-1} \right) \times$$

$$\left(\sum_{s=1}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+2p+1} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \sin(2l)\theta \right) d\theta = 0.$$

Donc la somme des intégrales $(a_2) - (g_2)$ est le polynôme (6.2.j). Cela termine la preuve du lemme (6.3). ■

Lemme 6.4 *L'intégrale $\Upsilon_3(r)$ est le polynôme en fonction de r suivant*

$$\Upsilon_3(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (i+p+1)b_{2i+1}a_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} E_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+1} +$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (i+p+1)b_{2i+1}c_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} E_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3}. \quad (6.2.k)$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'Appendice-B, nous obtenons

$$(a_3) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2)b_{2i+1}A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times$$

$$\left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2s+1} r^{2s+2p+1} \left(\beta_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0,$$

$$(b_3) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2)b_{2i+1}A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times$$

$$\left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2s} r^{2s+2p} \left(\tilde{\beta}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta =$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (i+p+1)b_{2i+1}a_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} E_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+1},$$

$$(c_3) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2)b_{2i+1}A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2s+1} r^{2s+2p+2} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
 (d_3) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2) b_{2i+1} A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2s+1} r^{2s+2p+3} \left(\gamma_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
 (e_3) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2) b_{2i+1} A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2s} r^{2s+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = \\
 & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (i+p+1) b_{2i+1} c_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} E_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3}, \\
 (f_3) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2) b_{2i+1} A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2s+1} r^{2s+2p+4} \sum_{l=0}^{s+p+2} \bar{\gamma}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
 (g_3) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (2i+2p+2) b_{2i+1} A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=1}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+2p+1} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \sin(2l)\theta \right) d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Donc la somme des intégrales $(a_3) - (g_3)$ est le polynôme (6.2.k). Cela termine la preuve du lemme (6.4). ■

Lemme 6.5 *L'intégrale $\Upsilon_4(r)$ est le polynôme en fonction de r suivant*

$$\Upsilon_4(r) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\mu} \frac{(2i+2p+3)}{2} c_{2i+1} d_{2s-2} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \tilde{D}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3}. \quad (6.2.1)$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'Appendice-B, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(a_4) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2s+1} r^{2s+2p+1} \left(\beta_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(b_4) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2s} r^{2s+2p} \left(\tilde{\beta}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(c_4) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2s+1} r^{2s+2p+2} \sum_{l=0}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
(d_4) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2s+1} r^{2s+2p+3} \left(\gamma_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(e_4) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2s} r^{2s+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(f_4) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2s+1} r^{2s+2p+4} \sum_{l=0}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_4) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} & \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} (2i+2p+3) c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=1}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+2p+1} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \sin(2l)\theta \right) d\theta = \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{s=1}^{\mu} \frac{(2i+2p+3)}{2} c_{2i+1} d_{2s-2} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \bar{D}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3}.
\end{aligned}$$

Donc la somme des intégrales $(a_4) - (g_4)$ est le polynôme (6.2.l). Cela termine la preuve du lemme (6.5). ■

Lemme 6.6 *L'intégrale $\Upsilon_5(r)$ est le polynôme en fonction de r suivant*

$$\begin{aligned}
\Upsilon_5(r) = & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (i+p+1) c_{2i} b_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} \tilde{C}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3} + \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (i+p+1) c_{2i} d_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+2} \bar{\gamma}_{s,p,l} \tilde{C}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+5}. \quad (6.2.m)
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'Appendice-B, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(a_5) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} & \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2) c_{2i} A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2s+1} r^{2s+2p+1} \left(\beta_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(b_5) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} & \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2) c_{2i} A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2s} r^{2s+2p} \left(\tilde{\beta}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(c_5) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} & \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2) c_{2i} A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2s+1} r^{2s+2p+2} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} (i+p+1)c_{2i}b_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} \tilde{C}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3}, \\
 (d_5) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2)c_{2i}A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2s+1} r^{2s+2p+3} \left(\gamma_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
 (e_5) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2)c_{2i}A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2s} r^{2s+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
 (f_5) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2)c_{2i}A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2s+1} r^{2s+2p+4} \sum_{l=0}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = \\
 & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (i+p+1)c_{2i}d_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \tilde{C}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+5}, \\
 (g_5) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (2i+2p+2)c_{2i}A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+1} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=1}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+2p+1} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \sin(2l)\theta \right) d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Donc la somme des intégrales (a₅) – (g₅) est le polynôme (6.2.m). Cela termine la preuve du lemme (6.6). ■

Lemme 6.7 *L'intégrale $\Upsilon_6(r)$ est le polynôme en fonction de r suivant*

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_6(r) = & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (i+p+2)d_{2i+1}a_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \tilde{E}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3} + \\
 & \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (i+p+2)d_{2i+1}c_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \tilde{E}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+5}. \quad (6.2.n)
 \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'Appendice-B, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(a_6) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4) d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+3} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2s+1} r^{2s+2p+1} \left(\beta_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(b_6) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4) d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+3} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2s} r^{2s+2p} \left(\tilde{\beta}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} (i+p+2) d_{2i+1} a_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \tilde{E}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+3}, \\
(c_6) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4) d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+3} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2s+1} r^{2s+2p+2} \sum_{l=0}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
(d_6) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4) d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+3} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2s+1} r^{2s+2p+3} \left(\gamma_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
(e_6) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4) d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+3} \right) \times \\
& \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2s} r^{2s+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} (i+p+2) d_{2i+1} c_{2s} \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \tilde{E}_{i,p,l} r^{2i+2s+4p+5},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f_6) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4) d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+3} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2s+1} r^{2s+2p+4} \sum_{l=0}^{s+p+2} \bar{\gamma}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
 (g_6) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} (2i+2p+4) d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+3} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=1}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+2p+1} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \sin(2l)\theta \right) d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Donc la somme des intégrales $(a_6) - (g_6)$ est le polynôme (6.2.n). Cela termine la preuve du lemme (6.7). ■

Lemme 6.8 *L'intégrale $\Upsilon_7(r)$ est le polynôme en fonction de r suivant*

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_7(r) &= \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{(2i+2p+1)}{2} d_{2i-2} a_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \left(\tilde{F}_{i,p,l} - \frac{2p+3}{2i-1} F_{i,p,l} \right) \times \\
 & r^{2i+2s+4p+1} + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \frac{(2i+2p+1)}{2} d_{2i-2} c_{2s+1} \times \\
 & \sum_{l=0}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \left(\tilde{F}_{i,p,l} - \frac{2p+3}{2i-1} F_{i,p,l} \right) r^{2i+2s+4p+3}. \tag{6.2.o}
 \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant les intégrales de l'Appendice-B, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (a_7) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1) d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2s+1} r^{2s+2p+1} \left(\beta_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = \\
 & \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \frac{(2i+2p+1)}{2} d_{2i-2} a_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+1} \beta_{s,p,l} \left(\tilde{F}_{i,p,l} - \frac{2p+3}{2i-1} F_{i,p,l} \right) r^{2i+2s+4p+1}, \\
 (b_7) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1) d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2s} r^{2s+2p} \left(\tilde{\beta}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+1} \tilde{\beta}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (c_7) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1) d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\left[\frac{n_2-1}{2} \right]} b_{2s+1} r^{2s+2p+2} \sum_{l=0}^{s+p+1} \bar{\beta}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
 (d_7) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1) d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2} \right]} c_{2s+1} r^{2s+2p+3} \left(\gamma_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \cos(2l)\theta \right) \right) d\theta = \\
 & \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n_3-1}{2} \right]} \frac{(2i+2p+1)}{2} d_{2i-2} c_{2s+1} \sum_{l=0}^{s+p+2} \gamma_{s,p,l} \left(\tilde{F}_{i,p,l} - \frac{2p+3}{2i-1} F_{i,p,l} \right) r^{2i+2s+4p+3}, \\
 (e_7) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1) d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\left[\frac{n_3}{2} \right]} c_{2s} r^{2s+2p+2} \left(\tilde{\gamma}_{s,p,0} + \sum_{l=1}^{s+p+2} \tilde{\gamma}_{s,p,l} \cos(2l-1)\theta \right) \right) d\theta = 0, \\
 (f_7) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1) d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=0}^{\left[\frac{n_4-1}{2} \right]} d_{2s+1} r^{2s+2p+4} \sum_{l=0}^{s+p+2} \bar{\gamma}_{s,p,l} \sin(2l+1)\theta \right) d\theta = 0, \\
 (g_7) & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{\mu} (2i+2p+1) d_{2i-2} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) r^{2i+2p} \right) \times \\
 & \left(\sum_{s=1}^{\mu} d_{2s-2} r^{2s+2p+1} \sum_{l=1}^{s+p+1} \delta_{s,p,l} \sin(2l)\theta \right) d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Donc la somme des intégrales (a₇) – (g₇) est le polynôme (6.2.o). Cela termine la preuve du lemme (6.8). ■

Des lemmes (6.2)-(6.8), on obtient $F_{20}^1(r) = r^{1+4p} P_1(r^2)$, où $P_1(r^2)$ un polynôme de degré

$$\begin{aligned}
 & \max \left\{ \left[\frac{n_1}{2} \right] + \left[\frac{n_2-1}{2} \right], \left[\frac{n_1}{2} \right] + \left[\frac{n_4-1}{2} \right] + 1, \left[\frac{n_1-1}{2} \right] + \mu, \right. \\
 & \left. \left[\frac{n_2-1}{2} \right] + \left[\frac{n_3}{2} \right] + 1, \left[\frac{n_3}{2} \right] + \left[\frac{n_4-1}{2} \right] + 2, \left[\frac{n_3-1}{2} \right] + \mu + 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

En substituant (6.2.h) dans (6.2.g) et (6.2.f), on obtient

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta) = & \sum_{i=0}^{n_1} \bar{a}_i r^{i+2p} A_{i,2p+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_2} \bar{b}_i r^{i+2p+1} A_{i,2p+2}(\theta) + \\
& \sum_{i=0}^{n_3} \bar{c}_i r^{i+2p+2} A_{i,2p+3}(\theta) + \sum_{i=0}^{n_4} \bar{d}_i r^{i+2p+3} A_{i,2p+4}(\theta) - \\
& \frac{1}{r} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2i+1} A_{2i+1,2p+1}(\theta) r^{2i+2p+1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2i} A_{2i,2p+1}(\theta) r^{2i+2p} + \right. \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2i+1} A_{2i+1,2p+2}(\theta) r^{2i+2p+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2i+1} A_{2i+1,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+3} + \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2i} A_{2i,2p+3}(\theta) r^{2i+2p+2} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2i+1} A_{2i+1,2p+4}(\theta) r^{2i+2p+4} + \\
& \left. \sum_{i=1}^{\mu} \left(A_{2i-2,2p+4}(\theta) - \frac{2p+3}{2i-1} A_{2i,2p+2}(\theta) \right) d_{2i-2} r^{2i+2p+1} \right) \times \\
& \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} a_{2k+1} A_{2k+2,2p}(\theta) r^{2k+2p+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} a_{2k} A_{2k+1,2p}(\theta) r^{2k+2p} + \right. \\
& \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} b_{2k+1} A_{2k+2,2p+1}(\theta) r^{2k+2p+2} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} c_{2k+1} A_{2k+2,2p+2}(\theta) r^{2k+2p+3} + \\
& \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} c_{2k} A_{2k+1,2p+2}(\theta) r^{2k+2p+2} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} d_{2k+1} A_{2k+2,2p+3}(\theta) r^{2k+2p+4} + \\
& \left. \sum_{k=1}^{\mu} \left(A_{2k-1,2p+3}(\theta) - \frac{2p+3}{2k-1} A_{2k+1,2p+1}(\theta) \right) d_{2k-2} r^{2k+2p+1} \right).
\end{aligned}$$

Pour une expression explicite de $F_{20}^2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta$, on utilise le lemme (6.1), alors

$$\begin{aligned}
F_{20}^2(r) = & \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor} \bar{b}_{2i} r^{2i} \xi_{2i,2p+2}(2\pi) + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4}{2} \rfloor} \bar{d}_{2i} r^{2i+2} \xi_{2i,2p+4}(2\pi) \right) r^{2p+1} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\mu} a_{2i+1} d_{2k-2} \left(\xi_{2i+2k,4p+4}(2\pi) - \frac{2p+3}{2k-1} \xi_{2i+2k+2,4p+2}(2\pi) \right) r^{2i+2k+4p+1} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} a_{2i} b_{2k+1} \xi_{2i+2k+2,4p+2}(2\pi) r^{2i+2k+4p+1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} a_{2i} d_{2k+1} \xi_{2i+2k+2, 4p+4}(2\pi) r^{2i+2k+4p+3} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} b_{2i+1} a_{2k} \xi_{2i+2k+2, 4p+4}(2\pi) r^{2i+2k+4p+1} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} b_{2i+1} c_{2k} \xi_{2i+2k+2, 4p+4}(2\pi) r^{2i+2k+4p+3} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\mu} c_{2i+1} d_{2k-2} \left(\xi_{2i+2k, 4p+6}(2\pi) - \frac{2p+3}{2k-1} \xi_{2i+2k+2, 4p+4}(2\pi) \right) r^{2i+2k+4p+3} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_2-1}{2} \rfloor} c_{2i} b_{2k+1} \xi_{2i+2k+2, 4p+4}(2\pi) r^{2i+2k+4p+3} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} c_{2i} d_{2k+1} \xi_{2i+2k+2, 4p+6}(2\pi) r^{2i+2k+4p+5} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor} d_{2i+1} a_{2k} \xi_{2i+2k+2, 4p+4}(2\pi) r^{2i+2k+4p+3} - \\
& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n_4-1}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3}{2} \rfloor} d_{2i+1} c_{2k} \xi_{2i+2k+2, 4p+6}(2\pi) r^{2i+2k+4p+5} - \\
& \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_1-1}{2} \rfloor} d_{2i-2} a_{2k+1} \left(\xi_{2i+2k, 4p+4}(2\pi) - \frac{2p+3}{2i-1} \xi_{2i+2k+2, 4p+2}(2\pi) \right) r^{2i+2k+4p+1} - \\
& \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n_3-1}{2} \rfloor} d_{2i-2} c_{2k+1} \left(\xi_{2i+2k, 4p+6}(2\pi) - \frac{2p+3}{2i-1} \xi_{2i+2k+2, 4p+4}(2\pi) \right) r^{2i+2k+4p+3} \\
& = r^{1+2p} (P_2(r^2) + r^{2p} P_3(r^2)).
\end{aligned}$$

Où $P_2(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\max \left\{ \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_4}{2} \right\rfloor + 1 \right\},$$

et $P_3(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_4-1}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_1-1}{2} \right\rfloor + \mu, \right. \\
& \left. \left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_4-1}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{n_3-1}{2} \right\rfloor + \mu + 1 \right\}.
\end{aligned}$$

Finalement, $F_{20}(r)$ devient sous la forme suivante

$$F_{20}(r) = F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r) = r^{1+2p} (r^{2p} P_1(r^2) + P_2(r^2) + r^{2p} P_3(r^2)),$$

Par conséquent, $F_{20}(r)$ a au plus

$$\max \left\{ \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{n_4}{2} \right] + 1, \left[\frac{n_1}{2} \right] + \left[\frac{n_2 - 1}{2} \right] + p, \left[\frac{n_1}{2} \right] + \left[\frac{n_4 - 1}{2} \right] + p + 1, \right. \\ \left. \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right] + \mu + p, \left[\frac{n_2 - 1}{2} \right] + \left[\frac{n_3}{2} \right] + p + 1, \left[\frac{n_3}{2} \right] + \left[\frac{n_4 - 1}{2} \right] + p + 2, \right. \\ \left. \left[\frac{n_3 - 1}{2} \right] + \mu + p + 1 \right\},$$

racines positives, ce qui prouve le Théorème (6.2).

6.3 Applications

Exemple 6.1 On considère un exemple qui correspond au théorème (6.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon(2xy^{10} + (\frac{256}{231} - \frac{2560}{33}x^2)y^{11} + x^3y^{12} + (\frac{32768}{429}x^2)y^{13}), \end{cases} \quad (6.3.a)$$

où $f^1(x), g^1(x), h^1(x), l^1(x)$ sont de degrés $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3$ et $n_4 = 2$ respectivement. L'équation moyennée du premier ordre est

$$F_{10}(r) = r^{15} - \frac{5}{4}r^{13} + \frac{1}{4}r^{11},$$

qui a exactement $\left[\frac{n_4}{2} \right] + 1 =$ deux racines positives $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 1$. satisfaisant

$$\frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} = -\frac{3}{8192} \neq 0, \quad \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_2} = \frac{3}{2} \neq 0,$$

Nous concluons donc que le système (7.3.a) a un cycle limite instable pour $r_2 = 1$, et un cycle limite stable pour $r_1 = \frac{1}{2}$. (Voir la figure (6.1)).

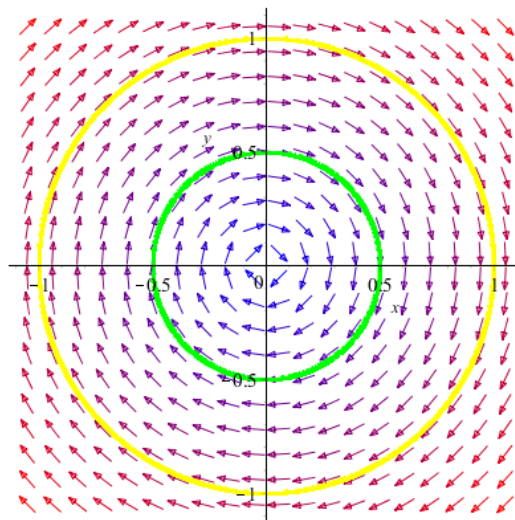


FIGURE 6.1 – Les deux cycles limites pour $\varepsilon = 10^{-5}$.

Exemple 6.2 On considère un exemple qui correspond au théorème (6.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y^4 - g(x)y^5 - l(x)y^6 - h(x)y^7, \end{cases} \quad (6.3.b)$$

où

$$\begin{aligned} f(x) &= \varepsilon \left(\frac{341}{321888} + 6x \right) + \varepsilon^2 (-1 - 3x), \\ g(x) &= \varepsilon \left(\frac{429184}{675}x + \frac{182773472}{1395}x^3 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{4500} + 2x^3 \right), \\ h(x) &= \varepsilon(x^2) + \varepsilon^2(5x - 3x^2), \\ l(x) &= \varepsilon \left(-\frac{155357728}{3069}x \right) + \varepsilon^2 \left(-x + \frac{22}{1575} \right), \end{aligned}$$

et $f(x), g(x), h(x), l(x)$ sont de degrés $n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 2$ et $n_4 = 1$ respectivement. Puisque nous avons F_{10} égal à zéro, alors il faut résoudre l'équation $F_{20} = 0$

$$r^{15} - \frac{5269}{3600}r^{13} + \frac{1529}{2880}r^{11} - \frac{341}{4800}r^9 + \frac{11}{2880}r^7 - \frac{1}{14400}r^5 = 0.$$

qui a exactement $\left\lfloor \frac{n_2-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_3}{2} \right\rfloor + p + 1 =$ cinq racines positives, $r_1 = \frac{1}{5}, r_2 = \frac{1}{4}, r_3 = \frac{1}{3}, r_4 = \frac{1}{2}$ et $r_5 = 1$. Ces dernières racines vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{dF_{20}}{dr} \Big|_{r=r_1} &= \frac{252}{6103515625} \neq 0, & \frac{dF_{20}}{dr} \Big|_{r=r_2} &= -\frac{63}{671088640} \neq 0, \\ \frac{dF_{20}}{dr} \Big|_{r=r_3} &= \frac{28}{23914845} \neq 0, & \frac{dF_{20}}{dr} \Big|_{r=r_4} &= -\frac{21}{163840} \neq 0, \\ \frac{dF_{20}}{dr} \Big|_{r=r_5} &= \frac{6}{5} \neq 0. \end{aligned}$$

Nous concluons donc que le système (7.3.b) a trois cycles limites instables pour $r_1 = \frac{1}{5}, r_3 = \frac{1}{3}$ et $r_5 = 1$. En plus de deux autres cycles limites stables pour $r_2 = \frac{1}{4}$ et $r_4 = \frac{1}{2}$. (Voir la figure (6.2)).

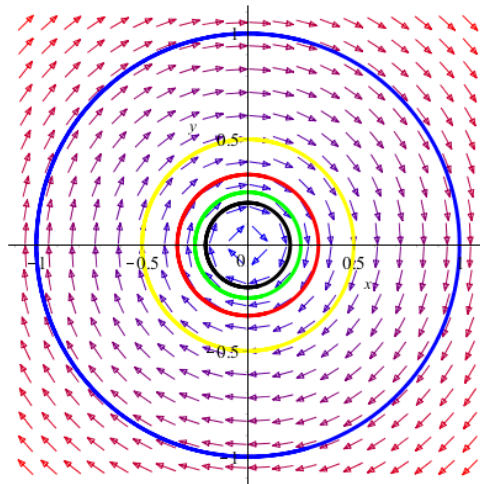


FIGURE 6.2 – Les cinq cycles limites pour $\varepsilon = 10^{-9}$.

LE NOMBRE MAXIMUM DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DES SYSTÈMES DE KUKLES GÉNÉRALISÉS



Sommaire

7.1	Présentation du problème et résultats principaux	83
7.2	Preuves des résultats	84
7.2.1	Preuve du cas (a) du théorème 7.1	84
7.2.2	Preuve du cas (b) du théorème 7.1	86
7.3	Applications	97

7.1 Présentation du problème et résultats principaux

Dans l'article [1] les auteurs ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(x)y, \\ \dot{y} = -x - g_2(x) - f_2(x, y)y, \end{cases} \quad (7.1.a)$$

où $f_1(x) = \varepsilon f_{11}(x) + \varepsilon^2 f_{12}(x)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$, et $g_2(x) = \varepsilon g_{21}(x) + \varepsilon^2 g_{22}(x)$ sont des polynômes de degrés l, n et m respectivement, et ε est un petit paramètre. Ils ont prouvé que le système (7.1.a) peut avoir $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre et $\max \left\{ O(n) - 1, \left\lfloor \frac{O(n)+E(m)-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{O(n)+O(l)-2}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{E(n)}{2} \right\rfloor \right\}$ cycles limites en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre. $O(i)$ est le plus grand nombre impair inférieur ou égal à i , $E(i)$ est le plus grand nombre pair inférieur ou égal à i et $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.

Dans ce chapitre, on considère le problème de la recherche du nombre maximal de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f_1(x, y) - f_2(x, y)y - g_1(x, y)y^2 - g_2(x, y)y^3, \end{cases} \quad (7.1.b)$$

où $f_1(x, y) = \varepsilon f_{11}(x, y) + \varepsilon^2 f_{12}(x, y)$, $f_2(x, y) = \varepsilon f_{21}(x, y) + \varepsilon^2 f_{22}(x, y)$, $g_1(x, y) = \varepsilon g_{11}(x, y) + \varepsilon^2 g_{12}(x, y)$ et $g_2(x, y) = \varepsilon g_{21}(x, y) + \varepsilon^2 g_{22}(x, y)$ sont des polynômes de degré n_1, n_2, n_3 et n_4 respectivement, et ε est un petit paramètre. De plus nous faisons quelques applications.

Notre résultat est le suivant :

Théorème 7.1 Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, le nombre maximal de cycles limites du système différentiel (7.1.b) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ en utilisant la méthode de la moyennisation

(a) Du premier ordre est

$$\max \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{n_3 + 1}{2} \right], \left[\frac{n_4 + 2}{2} \right] \right\}.$$

(b) Du deuxième ordre est

$$\lambda = \max \{ \lambda_1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 2, \lambda_4 + 3 \},$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max \left\{ \left[\frac{E(n_1) + O(n_2) - 1}{2} \right], E(n_1) - 1, \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right] \right\}, \\ \lambda_2 &= \max \left\{ E(n_1) - 2, \left[\frac{E(n_1) + O(n_2) - 3}{2} \right], \left[\frac{E(n_1) + E(n_3) - 2}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. O(n_2) - 1, \left[\frac{E(n_1) + O(n_4) - 1}{2} \right], \left[\frac{O(n_2) + E(n_3) - 1}{2} \right], \left[\frac{n_3 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_4}{2} \right] \right\}, \\ \lambda_3 &= \max \left\{ E(n_3) - 1, \left[\frac{E(n_1) + E(n_3) - 4}{2} \right], \left[\frac{E(n_1) + O(n_4) - 3}{2} \right], \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{O(n_2) + E(n_3) - 3}{2} \right], \left[\frac{O(n_2) + O(n_4) - 2}{2} \right], \left[\frac{E(n_3) + O(n_4) - 1}{2} \right] \right\}, \\ \lambda_4 &= \max \left\{ O(n_4) - 1, \left[\frac{E(n_3) + O(n_4) - 3}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

et $O(i)$ est le plus grand nombre impair inférieur ou égal à i , $E(i)$ est le plus grand nombre pair inférieur ou égal à i et $[\cdot]$ désigne la partie entière.

7.2 Preuves des résultats

7.2.1 Preuve du cas (a) du théorème 7.1

Pour utiliser la méthode de moyennisation d'ordre un nous écrivons le système en coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, $r > 0$. On écrit les polynômes $f_{11}(x, y)$, $f_{21}(x, y)$, $g_{11}(x, y)$, $g_{21}(x, y)$ apparaissant dans (7.1.b) comme :

$$f_{11}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} x^i y^j, \quad f_{21}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} x^i y^j,$$

$$g_{11}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} x^i y^j, \quad g_{21}(x, y) = \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} x^i y^j.$$

Par conséquent, le système (7.1.b) devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \right), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r} \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+3} \theta \right). \end{aligned}$$

Considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante, alors

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \right) + O(\varepsilon^2), \\ &= \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Soit F_{10} l'équation moyennée du premier ordre associée au système (7.1.b). En utilisant la notation introduite dans le chapitre 2, on calcule F_{10} ,

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta,$$

alors

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \right). \end{aligned}$$

Avec

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \alpha_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \beta_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \delta_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta d\theta = \begin{cases} \pi \gamma_{ij} & \text{si } i \text{ pair et } j \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on obtient

$$F_{10}(r) = \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} & \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_1} a_{ij,1} \alpha_{ij} r^{i+j} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_2} b_{ij,1} \beta_{ij} r^{i+j+1} \\ & + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_3} a_{ij,2} \delta_{ij} r^{i+j+2} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_4} b_{ij,2} \gamma_{ij} r^{i+j+3} \end{aligned} \right). \quad (7.2.a)$$

On peut choisir les coefficients de F_{10} de cette manière

$$\begin{cases} a_{ij,1} & i \text{ pair, } j \text{ impair,} \\ b_{ij,1} & i \text{ pair, } j \text{ pair,} \\ a_{ij,2} & i \text{ pair, } j \text{ impair,} \\ b_{ij,2} & i \text{ pair, } j \text{ pair,} \end{cases}$$

tel que F_{10} a exactement

$$\max \left\{ \left[\frac{n_1 - 1}{2} \right], \left[\frac{n_2}{2} \right], \left[\frac{n_3 + 1}{2} \right], \left[\frac{n_4 + 2}{2} \right] \right\},$$

racines positives simples.

7.2.2 Preuve du cas (b) du théorème 7.1

Pour prouver l'énoncé (b) du théorème (7.1), on utilise la théorie de la moyennisation du second ordre. Soit

$$\begin{aligned} f_{11}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} x^i y^j, & f_{12}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_1} \bar{a}_{ij,1} x^i y^j, \\ f_{21}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} x^i y^j, & f_{22}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_2} \bar{b}_{ij,1} x^i y^j, \\ g_{11}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} x^i y^j, & g_{12}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_3} \bar{a}_{ij,2} x^i y^j, \\ g_{21}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} x^i y^j, & g_{22}(x, y) &= \sum_{i+j=0}^{n_4} \bar{b}_{ij,2} x^i y^j. \end{aligned}$$

Alors le système (7.1.b) en coordonnées polaires (r, θ) , $(r > 0)$ devient

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon(A_1 + \varepsilon B_1), \\ \dot{\theta} &= -1 - \frac{\varepsilon}{r}(A_2 + \varepsilon B_2), \end{aligned} \quad (7.2.b)$$

où

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \\
&\quad + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta, \\
B_1 &= \sum_{i+j=0}^{n_1} \bar{a}_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} \bar{b}_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \\
&\quad + \sum_{i+j=0}^{n_3} \bar{a}_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} \bar{b}_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta, \\
A_2 &= \sum_{i+j=0}^{n_1} a_{ij,1} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} b_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \\
&\quad + \sum_{i+j=0}^{n_3} a_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} b_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+3} \theta, \\
B_2 &= \sum_{i+j=0}^{n_1} \bar{a}_{ij,1} r^{i+j} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} \bar{b}_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+1} \theta \\
&\quad + \sum_{i+j=0}^{n_3} \bar{a}_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+2} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} \bar{b}_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^{i+1} \theta \sin^{j+3} \theta.
\end{aligned}$$

Prenant θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (7.2.b) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F_1(r, \theta) = A_1, \quad F_2(r, \theta) = B_1 - \frac{1}{r} A_1 A_2.$$

Afin d'appliquer la théorie de la moyennisation du second ordre, F_{10} doit être égal à zéro. D'après la formule, (7.2.a), F_{10} est égal à zéro si on prend $a_{01} = -b_{00}$ et

$$\begin{cases}
a_{ij,1} = 0 & i \text{ pair, } j \text{ impair } i+j = 3 \dots O(n_1) \\
b_{ij,1} = 0 & i \text{ pair, } j \text{ pair } i+j = 2 \dots E(n_2) \\
a_{ij,2} = 0 & i \text{ pair, } j \text{ impair } i+j = 1 \dots O(n_3) \\
b_{ij,2} = 0 & i \text{ pair, } j \text{ pair } i+j = 0 \dots E(n_4).
\end{cases}$$

Soit F_{20} l'équation moyennée du second ordre associée au système (7.1.b).

En utilisant la notation introduite dans le chapitre 2, on calcule F_{20} ,

$$F_{20}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{d}{dr} F_1(r, \theta) y_1(r, \theta) + F_2(r, \theta) \right] d\theta.$$

Pour calculer F_{20} , nous devons dériver F_1 , donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}F_1(r, \theta) &= \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_1} (i+j)a_{ij,1}r^{i+j-1} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta \\
&+ \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_2} (i+j+1)b_{ij,1}r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \\
&+ \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_3} (i+j+2)a_{ij,2}r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta \\
&+ \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_4} (i+j+3)b_{ij,2}r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta,
\end{aligned}$$

et nous avons

$$\begin{aligned}
y_1(r, \theta) &= \int_0^\theta F_1(r, t) dt \\
&= a_{00,1}(\alpha_{100} + \alpha_{200} \cos(\theta)) + a_{02,1}r^2(\alpha_{102} + \alpha_{202} \cos(\theta) + \alpha_{302} \cos(3\theta)) + \\
&\dots + a_{p_1 e_1, 1} r^{p_1 + e_1} (\alpha_{1 p_1 e_1} + \alpha_{2 p_1 e_1} \cos(\theta) + \alpha_{3 p_1 e_1} \cos(3\theta) + \dots + \alpha_{(\frac{p_1 + e_1}{2} + 2) p_1 e_1} \\
&\times \cos((p_1 + e_1 + 1)\theta)) + a_{10,1} r (\alpha_{110} + \alpha_{210} \cos(2\theta)) + \dots + a_{c_1 e_1, 1} r^{c_1 + e_1} \times \\
&(\alpha_{1 c_1 e_1} + \alpha_{2 c_1 e_1} \cos(2\theta) + \dots + \alpha_{(\frac{c_1 + e_1 + 1}{2} + 1) c_1 e_1} \cos((c_1 + e_1 + 1)\theta)) + a_{11,1} r^2 \\
&\times (\alpha_{111} \sin(\theta) + \alpha_{211} \sin(3\theta)) + \dots + a_{c_1 q_1, 1} r^{c_1 + q_1} (\alpha_{1 c_1 q_1} \sin(\theta) + \alpha_{2 c_1 q_1} \times \\
&\sin(3\theta) + \dots + \alpha_{(\frac{c_1 + q_1}{2} + 1) c_1 q_1} \sin((c_1 + q_1 + 1)\theta)) + b_{10,1} r^2 (\tilde{\alpha}_{110} \sin(\theta) + \\
&\tilde{\alpha}_{210} \sin(3\theta)) + \dots + b_{c_2 e_2, 1} r^{c_2 + e_2 + 1} (\tilde{\alpha}_{1 c_2 e_2} \sin(\theta) + \tilde{\alpha}_{2 c_2 e_2} \sin(3\theta) + \dots + \\
&\tilde{\alpha}_{(\frac{c_2 + e_2 + 1}{2} + 1) c_2 e_2} \sin((c_2 + e_2 + 2)\theta)) + b_{01,1} r^2 (\tilde{\alpha}_{101} + \tilde{\alpha}_{201} \cos(\theta) + \tilde{\alpha}_{301} \times \\
&\cos(3\theta)) + \dots + b_{p_2 q_2, 1} r^{p_2 + q_2 + 1} (\tilde{\alpha}_{1 p_2 q_2} + \tilde{\alpha}_{2 p_2 q_2} \cos(\theta) + \tilde{\alpha}_{3 p_2 q_2} \cos(3\theta) + \dots \\
&+ \tilde{\alpha}_{(\frac{p_2 + q_2 + 1}{2} + 2) p_2 q_2} \cos((p_2 + q_2 + 2)\theta)) + b_{11,1} r^3 (\tilde{\alpha}_{111} + \tilde{\alpha}_{211} \cos(2\theta) + \\
&\tilde{\alpha}_{311} \cos(4\theta)) + \dots + b_{c_2 q_2, 1} r^{c_2 + q_2 + 1} (\tilde{\alpha}_{1 c_2 q_2} + \tilde{\alpha}_{2 c_2 q_2} \cos(2\theta) + \tilde{\alpha}_{3 c_2 q_2} \cos(4\theta) \\
&+ \dots + \tilde{\alpha}_{(\frac{c_2 + q_2}{2} + 2) c_2 q_2} \cos((c_2 + q_2 + 2)\theta)) + a_{00,2} r^2 (\hat{\alpha}_{100} + \hat{\alpha}_{200} \cos(\theta) + \\
&\hat{\alpha}_{300} \cos(3\theta)) + \dots + a_{p_3 e_3, 2} r^{p_3 + e_3 + 2} (\hat{\alpha}_{1 p_3 e_3} + \hat{\alpha}_{2 p_3 e_3} \cos(\theta) + \hat{\alpha}_{3 p_3 e_3} \cos(3\theta) \\
&+ \dots + \hat{\alpha}_{(\frac{p_3 + e_3}{2} + 3) p_3 e_3} \cos((p_3 + e_3 + 3)\theta)) + a_{10,2} r^3 (\hat{\alpha}_{110} + \hat{\alpha}_{210} \cos(2\theta) + \\
&\hat{\alpha}_{310} \cos(4\theta)) + \dots + a_{c_3 e_3, 2} r^{c_3 + e_3 + 2} (\hat{\alpha}_{1 c_3 e_3} + \hat{\alpha}_{2 c_3 e_3} \cos(2\theta) + \hat{\alpha}_{3 c_3 e_3} \cos(4\theta) \\
&+ \dots + \hat{\alpha}_{(\frac{c_3 + e_3 + 1}{2} + 2) c_3 e_3} \cos((c_3 + e_3 + 3)\theta)) + a_{11,2} r^4 (\hat{\alpha}_{111} \sin(\theta) + \hat{\alpha}_{211} \times \\
&\sin(3\theta) + \hat{\alpha}_{311} \sin(5\theta)) + \dots + a_{c_3 q_3, 2} r^{c_3 + q_3 + 2} (\hat{\alpha}_{1 c_3 q_3} \sin(\theta) + \hat{\alpha}_{2 c_3 q_3} \sin(3\theta) + \\
&\dots + \hat{\alpha}_{(\frac{c_3 + q_3}{2} + 2) c_3 q_3} \sin((c_3 + q_3 + 3)\theta)) + b_{10,2} r^4 (\tilde{\alpha}_{110} \sin(\theta) + \tilde{\alpha}_{210} \sin(3\theta) \\
&+ \tilde{\alpha}_{310} \sin(5\theta)) + \dots + b_{c_4 e_4, 2} r^{c_4 + e_4 + 3} (\tilde{\alpha}_{1 c_4 e_4} \sin(\theta) + \tilde{\alpha}_{2 c_4 e_4} \sin(3\theta) + \dots + \\
&\tilde{\alpha}_{(\frac{c_4 + e_4 + 1}{2} + 2) c_4 e_4} \sin((c_4 + e_4 + 4)\theta)) + b_{01,2} r^4 (\tilde{\alpha}_{101} + \tilde{\alpha}_{201} \cos(\theta) + \tilde{\alpha}_{301} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(3\theta) + \bar{\alpha}_{401} \cos(5\theta) + \dots + b_{p_4 q_4, 2} r^{p_4 + q_4 + 3} (\bar{\alpha}_{1 p_4 q_4} + \bar{\alpha}_{2 p_4 q_4} \cos(\theta) + \\ & \bar{\alpha}_{3 p_4 q_4} \cos(3\theta) + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{p_4 + q_4 + 1}{2} + 3\right) p_4 q_4} \cos((p_4 + q_4 + 4)\theta)) + b_{11, 2} r^5 (\bar{\alpha}_{111} \\ & + \bar{\alpha}_{211} \cos(2\theta) + \bar{\alpha}_{311} \cos(4\theta) + \bar{\alpha}_{411} \cos(6\theta)) + \dots + b_{c_4 q_4, 2} r^{c_4 + q_4 + 3} (\bar{\alpha}_{1 c_4 q_4} \\ & + \bar{\alpha}_{2 c_4 q_4} \cos(2\theta) + \bar{\alpha}_{3 c_4 q_4} \cos(4\theta) + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{c_4 + q_4}{2} + 3\right) c_4 q_4} \cos((c_4 + q_4 + 4)\theta)), \end{aligned}$$

où p_i et e_i sont les plus grands entiers pairs, c_i et q_i sont les plus grands entiers impairs tel que

$$\begin{aligned} p_i + e_i &\leq n_i, \quad c_i + e_i \leq n_i \text{ et } c_i + q_i \leq n_i, \text{ pour } i \in \{1, 3\}, \\ c_i + e_i &\leq n_i, \quad p_i + q_i \leq n_i \text{ et } c_i + q_i \leq n_i, \text{ pour } i \in \{2, 4\}, \end{aligned}$$

et $\alpha_{ijk}, \tilde{\alpha}_{ijk}, \hat{\alpha}_{ijk}, \bar{\alpha}_{ijk}$ sont les constantes réelles qui apparaissent durant le calcul de $\int_0^\theta F_1(r, t) dt$. Maintenant en utilisant les intégrales dans Appendice-C, on calcule

$$\begin{aligned} F_{20}^1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dF_1(r, \theta)}{dr} y(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij, 1} r^{i+j-1} \left[a_{00, 1} (\alpha_{200} B_{ij}^1) + a_{02, 1} r^2 (\alpha_{202} B_{ij}^1 + \alpha_{302} B_{ij}^3) \right. \right. \\ & \left. \left. + \dots + a_{p_1 e_1, 1} r^{p_1 + e_1} \left(\alpha_{2 p_1 e_1} B_{ij}^1 + \alpha_{3 p_1 e_1} B_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{p_1 + e_1}{2} + 2\right) p_1 e_1} B_{ij}^{p_1 + e_1 + 1} \right) \right] \right. \\ & + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij, 1} r^{i+j-1} \left[a_{11, 1} r^2 (\alpha_{111} A_{ij}^1 + \alpha_{211} A_{ij}^3) + \dots + \right. \\ & \left. a_{c_1 q_1, 1} r^{c_1 + q_1} \left(\alpha_{1 c_1 q_1} A_{ij}^1 + \alpha_{2 c_1 q_1} A_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1 + q_1}{2} + 1\right) c_1 q_1} A_{ij}^{c_1 + q_1 + 1} \right) \right] \\ & + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij, 1} r^{i+j-1} \left[b_{10, 1} r^2 (\tilde{\alpha}_{110} \tilde{A}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{210} \tilde{A}_{ij}^3) + \dots + \right. \\ & \left. b_{c_2 e_2, 1} r^{c_2 + e_2 + 1} \left(\tilde{\alpha}_{1 c_2 e_2} \tilde{A}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{2 c_2 e_2} \tilde{A}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2 + e_2 + 1}{2} + 1\right) c_2 e_2} \tilde{A}_{ij}^{c_2 + e_2 + 2} \right) \right] \\ & + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij, 1} r^{i+j-1} \left[b_{01, 1} r^2 (\tilde{\alpha}_{201} \tilde{B}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{301} \tilde{B}_{ij}^3) + \dots + \right. \\ & \left. b_{p_2 q_2, 1} r^{p_2 + q_2 + 1} \left(\tilde{\alpha}_{2 p_2 q_2} \tilde{B}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{3 p_2 q_2} \tilde{B}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2 + q_2 + 1}{2} + 2\right) p_2 q_2} \tilde{B}_{ij}^{p_2 + q_2 + 2} \right) \right] \\ & + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij, 1} r^{i+j-1} \left[a_{00, 2} r^2 (\hat{\alpha}_{200} \hat{B}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{300} \hat{B}_{ij}^3) + \dots + \right. \\ & \left. a_{p_3 e_3, 2} r^{p_3 + e_3 + 2} \left(\hat{\alpha}_{2 p_3 e_3} \hat{B}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{3 p_3 e_3} \hat{B}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3 + e_3}{2} + 3\right) p_3 e_3} \hat{B}_{ij}^{p_3 + e_3 + 3} \right) \right] \\ & + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij, 1} r^{i+j-1} \left[a_{11, 2} r^4 (\hat{\alpha}_{111} \hat{A}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{211} \hat{A}_{ij}^3 + \hat{\alpha}_{311} \hat{A}_{ij}^5) + \dots \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{c_3q_3,2} r^{c_3+q_3+2} \left(\hat{\alpha}_{1c_3q_3} \hat{A}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{2c_3q_3} \hat{A}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3+q_3}{2}+2\right)c_3q_3} \hat{A}_{ij}^{c_3+q_3+3} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij,1} r^{i+j-1} \left[b_{10,2} r^4 \left(\bar{\alpha}_{110} \bar{A}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{210} \bar{A}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{310} \bar{A}_{ij}^5 \right) + \right. \\
& \left. \dots + b_{c_4e_4,2} r^{c_4+e_4+3} \left(\bar{\alpha}_{1c_4e_4} \bar{A}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{2c_4e_4} \bar{A}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{c_4+e_4+1}{2}+2\right)c_4e_4} \bar{A}_{ij}^{c_4+e_4+4} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_1} (i+j) a_{ij,1} r^{i+j-1} \left[b_{01,2} r^4 \left(\bar{\alpha}_{201} \bar{B}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{301} \bar{B}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{401} \bar{B}_{ij}^5 \right) + \dots \right. \\
& \left. + b_{p_4q_4,2} r^{p_4+q_4+3} \left(\bar{\alpha}_{2p_4q_4} \bar{B}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{3p_4q_4} \bar{B}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{p_4+q_4+1}{2}+3\right)p_4q_4} \bar{B}_{ij}^{p_4+q_4+4} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_2} (i+j+1) a_{ij,1} r^{i+j} \left[a_{00,1} \left(\alpha_{200} D_{ij}^1 \right) + a_{02,1} r^2 \left(\alpha_{202} D_{ij}^1 + \alpha_{302} D_{ij}^3 \right) + \right. \\
& \left. \dots + a_{p_1e_1,1} r^{p_1+e_1} \left(\alpha_{2p_1e_1} D_{ij}^1 + \alpha_{3p_1e_1} D_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{p_1+e_1}{2}+2\right)p_1e_1} D_{ij}^{p_1+e_1+1} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} (i+j+1) a_{ij,1} r^{i+j} \left[a_{11,1} r^2 \left(\alpha_{111} C_{ij}^1 + \alpha_{211} C_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \left. a_{c_1q_1,1} r^{c_1+q_1} \left(\alpha_{1c_1q_1} C_{ij}^1 + \alpha_{2c_1q_1} C_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1+q_1}{2}+1\right)c_1q_1} C_{ij}^{c_1+q_1+1} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} (i+j+1) b_{ij,1} r^{i+j} \left[b_{10,1} r^2 \left(\tilde{\alpha}_{110} \tilde{C}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{210} \tilde{C}_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \left. b_{c_2e_2,1} r^{c_2+e_2+1} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2e_2} \tilde{C}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{2c_2e_2} \tilde{C}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2+e_2+1}{2}+1\right)c_2e_2} \tilde{C}_{ij}^{c_2+e_2+2} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_2} (i+j+1) b_{ij,1} r^{i+j} \left[b_{01,1} r^2 \left(\tilde{\alpha}_{201} \tilde{D}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{301} \tilde{D}_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \left. b_{p_2q_2,1} r^{p_2+q_2+1} \left(\tilde{\alpha}_{2p_2q_2} \tilde{D}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{3p_2q_2} \tilde{D}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2+q_2+1}{2}+2\right)p_2q_2} \tilde{D}_{ij}^{p_2+q_2+2} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_2} (i+j+1) b_{ij,1} r^{i+j} \left[a_{00,2} r^2 \left(\hat{\alpha}_{200} \hat{D}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{300} \hat{D}_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \left. a_{p_3e_3,2} r^{p_3+e_3+2} \left(\hat{\alpha}_{2p_3e_3} \hat{D}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{3p_3e_3} \hat{D}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3+e_3}{2}+3\right)p_3e_3} \hat{D}_{ij}^{p_3+e_3+3} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} (i+j+1) b_{ij,1} r^{i+j} \left[a_{11,2} r^4 \left(\hat{\alpha}_{111} \hat{C}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{211} \hat{C}_{ij}^3 + \hat{\alpha}_{311} \hat{C}_{ij}^5 \right) + \right. \\
& \left. \dots + a_{c_3q_3,2} r^{c_3+q_3+2} \left(\hat{\alpha}_{1c_3q_3} \hat{C}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{2c_3q_3} \hat{C}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3+q_3}{2}+2\right)c_3q_3} \hat{C}_{ij}^{c_3+q_3+3} \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} (i+j+1) b_{ij,1} r^{i+j} \left[b_{10,2} r^4 \left(\bar{\alpha}_{110} \bar{C}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{210} \bar{C}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{310} \bar{C}_{ij}^5 \right) + \dots \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_{c_4e_4,2} r^{c_4+e_4+3} \left(\bar{\alpha}_{1c_4e_4} \bar{C}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{2c_4e_4} \bar{C}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{c_4+e_4+1}{2}+2\right)c_4e_4} \bar{C}_{ij}^{c_4+e_4+4} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=1}^{n_2} (i+j+1) b_{ij,1} r^{i+j} \left[b_{01,2} r^4 \left(\bar{\alpha}_{201} \bar{D}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{301} \bar{D}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{401} \bar{D}_{ij}^5 \right) + \dots \right. \\
& \quad \left. i \text{ impair, } j \text{ pair} \right. \\
& + b_{p_4q_4,2} r^{p_4+q_4+3} \left(\bar{\alpha}_{2p_4q_4} \bar{D}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{3p_4q_4} \bar{D}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{p_4+q_4+1}{2}+3\right)p_4q_4} \bar{D}_{ij}^{p_4+q_4+4} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=2}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[a_{00,1} \left(\alpha_{200} F_{ij}^1 \right) + a_{02,1} r^2 \left(\alpha_{202} F_{ij}^1 + \alpha_{302} F_{ij}^3 \right) + \dots \right. \\
& \quad \left. i \text{ impair, } j \text{ impair} \right. \\
& \dots + a_{p_1e_1,1} r^{p_1+e_1} \left(\alpha_{2p_1e_1} F_{ij}^1 + \alpha_{3p_1e_1} F_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{p_1+e_1}{2}+2\right)p_1e_1} F_{ij}^{p_1+e_1+1} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=0}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[a_{11,1} r^2 \left(\alpha_{111} E_{ij}^1 + \alpha_{211} E_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \quad \left. i \text{ pair, } j \text{ pair} \right. \\
& a_{c_1q_1,1} r^{c_1+q_1} \left(\alpha_{1c_1q_1} E_{ij}^1 + \alpha_{2c_1q_1} E_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1+q_1}{2}+1\right)c_1q_1} E_{ij}^{c_1+q_1+1} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=0}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[b_{10,1} r^2 \left(\tilde{\alpha}_{110} \tilde{E}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{210} \tilde{E}_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \quad \left. i \text{ pair, } j \text{ pair} \right. \\
& b_{c_2e_2,1} r^{c_2+e_2+1} \left(\tilde{\alpha}_{1c_2e_2} \tilde{E}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{2c_2e_2} \tilde{E}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2+e_2+1}{2}+1\right)c_2e_2} \tilde{E}_{ij}^{c_2+e_2+2} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=2}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[b_{01,1} r^2 \left(\tilde{\alpha}_{201} \tilde{F}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{301} \tilde{F}_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \quad \left. i \text{ impair, } j \text{ impair} \right. \\
& b_{p_2q_2,1} r^{p_2+q_2+1} \left(\tilde{\alpha}_{2p_2q_2} \tilde{F}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{3p_2q_2} \tilde{F}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2+q_2+1}{2}+2\right)p_2q_2} \tilde{F}_{ij}^{p_2+q_2+2} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=2}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[a_{00,2} r^2 \left(\hat{\alpha}_{200} \hat{F}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{300} \hat{F}_{ij}^3 \right) + \dots + \right. \\
& \quad \left. i \text{ impair, } j \text{ impair} \right. \\
& a_{p_3e_3,2} r^{p_3+e_3+2} \left(\hat{\alpha}_{2p_3e_3} \hat{F}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{3p_3e_3} \hat{F}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3+e_3}{2}+3\right)p_3e_3} \hat{F}_{ij}^{p_3+e_3+3} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=0}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[a_{11,2} r^4 \left(\hat{\alpha}_{111} \hat{E}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{211} \hat{E}_{ij}^3 + \hat{\alpha}_{311} \hat{E}_{ij}^5 \right) + \dots \right. \\
& \quad \left. i \text{ pair, } j \text{ pair} \right. \\
& \dots + a_{c_3q_3,2} r^{c_3+q_3+2} \left(\hat{\alpha}_{1c_3q_3} \hat{E}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{2c_3q_3} \hat{E}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3+q_3}{2}+2\right)c_3q_3} \hat{E}_{ij}^{c_3+q_3+3} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=0}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[b_{10,2} r^4 \left(\bar{\alpha}_{110} \bar{E}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{210} \bar{E}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{310} \bar{E}_{ij}^5 \right) + \dots \right. \\
& \quad \left. i \text{ pair, } j \text{ pair} \right. \\
& \dots + b_{c_4e_4,2} r^{c_4+e_4+3} \left(\bar{\alpha}_{1c_4e_4} \bar{E}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{2c_4e_4} \bar{E}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{c_4+e_4+1}{2}+2\right)c_4e_4} \bar{E}_{ij}^{c_4+e_4+4} \right) \Big] \\
& + \sum_{i+j=2}^{n_3} (i+j+2) a_{ij,2} r^{i+j+1} \left[b_{01,2} r^4 \left(\bar{\alpha}_{201} \bar{F}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{301} \bar{F}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{401} \bar{F}_{ij}^5 \right) + \dots \right. \\
& \quad \left. i \text{ impair, } j \text{ impair} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + b_{p_4q_4,2} r^{p_4+q_4+3} \left(\bar{\alpha}_{2p_4q_4} \bar{F}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{3p_4q_4} \bar{F}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{p_4+q_4+1}{2}+3\right)p_4q_4} \bar{F}_{ij}^{p_4+q_4+4} \right) \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair, } j \text{ impair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[a_{00,1} (\alpha_{200} H_{ij}^1) + a_{02,1} r^2 (\alpha_{202} H_{ij}^1 + \alpha_{302} H_{ij}^3) + \right. \\
& \left. \dots + a_{p_1e_1,1} r^{p_1+e_1} (\alpha_{2p_1e_1} H_{ij}^1 + \alpha_{3p_1e_1} H_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{p_1+e_1}{2}+2\right)p_1e_1} H_{ij}^{p_1+e_1+1}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[a_{11,1} r^2 (\alpha_{111} G_{ij}^1 + \alpha_{211} G_{ij}^3) + \dots + \right. \\
& \left. a_{c_1q_1,1} r^{c_1+q_1} (\alpha_{1c_1q_1} G_{ij}^1 + \alpha_{2c_1q_1} G_{ij}^3 + \dots + \alpha_{\left(\frac{c_1+q_1}{2}+1\right)c_1q_1} G_{ij}^{c_1+q_1+1}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[b_{10,1} r^2 (\tilde{\alpha}_{110} \tilde{G}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{210} \tilde{G}_{ij}^3) + \dots + \right. \\
& \left. b_{c_2e_2,1} r^{c_2+e_2+1} (\tilde{\alpha}_{1c_2e_2} \tilde{G}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{2c_2e_2} \tilde{G}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{c_2+e_2+1}{2}+1\right)c_2e_2} \tilde{G}_{ij}^{c_2+e_2+2}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair, } j \text{ pair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[b_{01,1} r^2 (\tilde{\alpha}_{201} \tilde{H}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{301} \tilde{H}_{ij}^3) + \dots + \right. \\
& \left. b_{p_2q_2,1} r^{p_2+q_2+1} (\tilde{\alpha}_{2p_2q_2} \tilde{H}_{ij}^1 + \tilde{\alpha}_{3p_2q_2} \tilde{H}_{ij}^3 + \dots + \tilde{\alpha}_{\left(\frac{p_2+q_2+1}{2}+2\right)p_2q_2} \tilde{H}_{ij}^{p_2+q_2+2}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair, } j \text{ pair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[a_{00,2} r^2 (\hat{\alpha}_{200} \hat{H}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{300} \hat{H}_{ij}^3) + \dots + \right. \\
& \left. a_{p_3e_3,2} r^{p_3+e_3+2} (\hat{\alpha}_{2p_3e_3} \hat{H}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{3p_3e_3} \hat{H}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{p_3+e_3}{2}+3\right)p_3e_3} \hat{H}_{ij}^{p_3+e_3+3}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[a_{11,2} r^4 (\hat{\alpha}_{111} \hat{G}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{211} \hat{G}_{ij}^3 + \hat{\alpha}_{311} \hat{G}_{ij}^5) \right. \\
& \left. + \dots + a_{c_3q_3,2} r^{c_3+q_3+2} (\hat{\alpha}_{1c_3q_3} \hat{G}_{ij}^1 + \hat{\alpha}_{2c_3q_3} \hat{G}_{ij}^3 + \dots + \hat{\alpha}_{\left(\frac{c_3+q_3}{2}+2\right)c_3q_3} \hat{G}_{ij}^{c_3+q_3+3}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[b_{10,2} r^4 (\bar{\alpha}_{110} \bar{G}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{210} \bar{G}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{310} \bar{G}_{ij}^5) + \right. \\
& \left. \dots + b_{c_4e_4,2} r^{c_4+e_4+3} (\bar{\alpha}_{1c_4e_4} \bar{G}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{2c_4e_4} \bar{G}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{c_4+e_4+1}{2}+2\right)c_4e_4} \bar{G}_{ij}^{c_4+e_4+4}) \right] \\
& + \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair, } j \text{ pair}}}^{n_4} (i+j+3) b_{ij,2} r^{i+j+2} \left[b_{01,2} r^4 (\bar{\alpha}_{201} \bar{H}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{301} \bar{H}_{ij}^3 + \bar{\alpha}_{401} \bar{H}_{ij}^5) + \right. \\
& \left. \dots + b_{p_4q_4,2} r^{p_4+q_4+3} (\bar{\alpha}_{2p_4q_4} \bar{H}_{ij}^1 + \bar{\alpha}_{3p_4q_4} \bar{H}_{ij}^3 + \dots + \bar{\alpha}_{\left(\frac{p_4+q_4+1}{2}+3\right)p_4q_4} \bar{H}_{ij}^{p_4+q_4+4}) \right] \Big].
\end{aligned}$$

Nous avons défini $F_2(r, \theta)$ par

$$\begin{aligned}
F_2(r, \theta) = & \sum_{i+j=0}^{n_1} \bar{a}_{ij,1} r^{i+j} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_2} \bar{b}_{ij,1} r^{i+j+1} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \\
& + \sum_{i+j=0}^{n_3} \bar{a}_{ij,2} r^{i+j+2} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta + \sum_{i+j=0}^{n_4} \bar{b}_{ij,2} r^{i+j+3} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_1} a_{ij,1} a_{hk,1} r^{i+j+h+k-1} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+1} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_2} a_{ij,1} b_{hk,1} r^{i+j+h+k} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+2} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_3} a_{ij,1} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+1} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+3} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_4} a_{ij,1} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+2} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+4} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_1} b_{ij,1} a_{hk,1} r^{i+j+h+k} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+2} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_2} b_{ij,1} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+1} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+3} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_3} b_{ij,1} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+2} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+4} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_4} b_{ij,1} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+3} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+5} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_1} a_{ij,2} a_{hk,1} r^{i+j+h+k+1} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+3} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_2} a_{ij,2} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+2} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+4} \theta \\
- & \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_3} a_{ij,2} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+3} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+5} \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ impair ou } j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_4} a_{ij,2} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+4} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+6} \theta \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_1} b_{ij,2} a_{hk,1} r^{i+j+h+k+2} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+4} \theta \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_2} b_{ij,2} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+3} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+5} \theta \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ impair ou } k \text{ pair}}}^{n_3} b_{ij,2} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+4} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+6} \theta \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair ou } j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair ou } k \text{ impair}}}^{n_4} b_{ij,2} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+5} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+7} \theta
\end{aligned}$$

Maintenant, on calculent F_{20}^2

$$\begin{aligned}
F_{20}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_1} \bar{a}_{ij,1} r^{i+j} \alpha_{ij} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_2} \bar{b}_{ij,1} r^{i+j+1} \beta_{ij} \right. \\
&+ \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair, } j \text{ impair}}}^{n_3} \bar{a}_{ij,2} r^{i+j+2} \delta_{ij} + \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_4} \bar{b}_{ij,2} r^{i+j+3} \gamma_{ij} \\
&- \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair, } k \text{ impair}}}^{n_1} a_{ij,1} a_{hk,1} r^{i+j+h+k-1} M_{ijhk} \\
&- \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair, } j \text{ impair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair, } k \text{ pair}}}^{n_1} a_{ij,1} a_{hk,1} r^{i+j+h+k-1} M_{ijhk} \\
&- \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair, } j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair, } k \text{ pair}}}^{n_2} a_{ij,1} b_{hk,1} r^{i+j+h+k} N_{ijhk} \\
&- \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair, } j \text{ impair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair, } k \text{ impair}}}^{n_2} a_{ij,1} b_{hk,1} r^{i+j+h+k} N_{ijhk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair}, k \text{ impair}}}^{n_3} a_{ij,1} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+1} P_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair}, k \text{ pair}}}^{n_3} a_{ij,1} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+1} P_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair}, k \text{ pair}}}^{n_4} a_{ij,1} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_1} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair}, k \text{ impair}}}^{n_4} a_{ij,1} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair}, k \text{ pair}}}^{n_1} b_{ij,1} a_{hk,1} r^{i+j+h+k} N_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair}, k \text{ impair}}}^{n_1} b_{ij,1} a_{hk,1} r^{i+j+h+k} N_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair}, k \text{ pair}}}^{n_2} b_{ij,1} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+1} P_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair}, k \text{ impair}}}^{n_2} b_{ij,1} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+1} P_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair}, k \text{ pair}}}^{n_3} b_{ij,1} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair}, k \text{ impair}}}^{n_3} b_{ij,1} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair}, k \text{ pair}}}^{n_4} b_{ij,1} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+3} R_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_2} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair}, k \text{ impair}}}^{n_4} b_{ij,1} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+3} R_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair}, k \text{ impair}}}^{n_1} a_{ij,2} a_{hk,1} r^{i+j+h+k+1} P_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair}, k \text{ pair}}}^{n_1} a_{ij,2} a_{hk,1} r^{i+j+h+k+1} P_{ijhk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair}, k \text{ pair}}}^{n_2} a_{ij,2} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair}, k \text{ impair}}}^{n_2} a_{ij,2} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair}, k \text{ impair}}}^{n_3} a_{ij,2} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+3} R_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair}, k \text{ pair}}}^{n_3} a_{ij,2} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+3} R_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=0 \\ i \text{ pair}, j \text{ pair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair}, k \text{ pair}}}^{n_4} a_{ij,2} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+4} S_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \text{ impair}, j \text{ impair}}}^{n_3} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair}, k \text{ impair}}}^{n_4} a_{ij,2} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+4} S_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair}, k \text{ pair}}}^{n_1} b_{ij,2} a_{hk,1} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair}, k \text{ impair}}}^{n_1} b_{ij,2} a_{hk,1} r^{i+j+h+k+2} Q_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair}, k \text{ pair}}}^{n_2} b_{ij,2} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+3} R_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair}, k \text{ impair}}}^{n_2} b_{ij,2} b_{hk,1} r^{i+j+h+k+3} R_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=0 \\ h \text{ pair}, k \text{ pair}}}^{n_3} b_{ij,2} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+4} S_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=2 \\ h \text{ impair}, k \text{ impair}}}^{n_3} b_{ij,2} a_{hk,2} r^{i+j+h+k+4} S_{ijhk} \\
& - \sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ pair}, j \text{ impair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ impair}, k \text{ pair}}}^{n_4} b_{ij,2} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+5} T_{ijhk}
\end{aligned}$$

$$- \left[\sum_{\substack{i+j=1 \\ i \text{ impair}, j \text{ pair}}}^{n_4} \sum_{\substack{h+k=1 \\ h \text{ pair}, k \text{ impair}}}^{n_4} b_{ij,2} b_{hk,2} r^{i+j+h+k+5} T_{ijhk} \right].$$

Pour trouver les racines positives de F_{20} nous devons trouver les racines du polynôme $F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r)$ en fonction r^2 , où

$$F_{20}^1(r) + F_{20}^2(r) = r[p_1(r^2) + r^2 p_2(r^2) + r^4 p_3(r^2) + r^6 p_4(r^2)],$$

et $P_1(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\lambda_1 = \max \left\{ \left\lceil \frac{E(n_1) + O(n_2) - 1}{2} \right\rceil, E(n_1) - 1, \left\lceil \frac{n_1 - 1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_2}{2} \right\rceil \right\},$$

$P_2(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\lambda_2 = \max \left\{ E(n_1) - 2, \left\lceil \frac{E(n_1) + O(n_2) - 3}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{E(n_1) + E(n_3) - 2}{2} \right\rceil, \right. \\ \left. O(n_2) - 1, \left\lceil \frac{E(n_1) + O(n_4) - 1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{O(n_2) + E(n_3) - 1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_3 - 1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_4}{2} \right\rceil \right\},$$

$P_3(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\lambda_3 = \max \left\{ E(n_3) - 1, \left\lceil \frac{E(n_1) + E(n_3) - 4}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{E(n_1) + O(n_4) - 3}{2} \right\rceil, \right. \\ \left. \left\lceil \frac{O(n_2) + E(n_3) - 3}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{O(n_2) + O(n_4) - 2}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{E(n_3) + O(n_4) - 1}{2} \right\rceil \right\},$$

$P_4(r^2)$ est un polynôme de degré

$$\lambda_4 = \max \left\{ O(n_4) - 1, \left\lceil \frac{E(n_3) + O(n_4) - 3}{2} \right\rceil \right\},$$

Nous concluons que F_{20} a au plus $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 2, \lambda_4 + 3\}$ racines positives simples.

De plus, nous pouvons choisir les Coefficients $a_{ij,1}, b_{ij,1}, a_{ij,2}, b_{ij,2}, \bar{a}_{ij,1}, \bar{b}_{ij,1}, \bar{a}_{ij,2}$, et $\bar{b}_{ij,2}$ de telle façon que F_{20} admet exactement λ racines positives simples.

7.3 Applications

Dans cette section, on donne des exemples qui correspondent aux cas (a) et (b) du théorème 7.1,

Exemple 7.1 On considère un exemple qui correspond au cas (a) du théorème 7.1

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \varepsilon \left(\frac{37}{9} x^4 y + y + (1 - 9x^2)y + (11y^3 - 4y)y^2 + \left(-\frac{128}{5} x^2 y^2 - \frac{77}{27}\right) y^3 \right), \end{cases} \quad (7.3.a)$$

L'équation moyennée du premier ordre (7.2.a) est

$$F_{10}(r) = -r^7 + \frac{133}{36} r^5 - \frac{133}{36} r^3 + r,$$

qui a exactement trois racines positives $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 1$, et $r_3 = \frac{3}{2}$. Satisfaisant

$$\begin{aligned} \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_1} &= -\frac{650}{729} \neq 0, \\ \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_2} &= \frac{25}{18} \neq 0, \\ \frac{dF_{10}(r)}{dr} \Big|_{r=r_3} &= -\frac{325}{32} \neq 0, \end{aligned}$$

nous concluons donc que le système (7.3.a) a deux cycles limites stable pour $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_3 = \frac{3}{2}$, et un cycle limite instable pour $r_2 = 1$ (Voir la figure (7.1)).

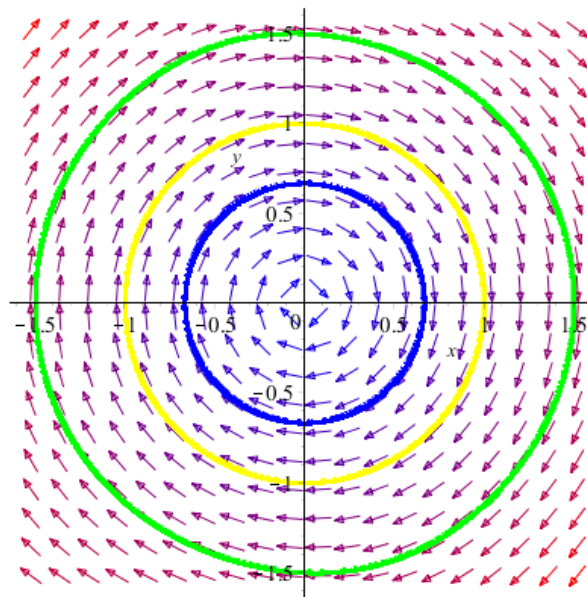


FIGURE 7.1 – Les trois cycles limites pour $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exemple 7.2 On considère un exemple qui correspond au cas (b) du théorème 7.1

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f_1(x, y) - f_2(x, y)y - g_1(x, y)y^2 - g_2(x, y)y^3, \end{cases} \quad (7.3.b)$$

où

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \varepsilon\left(\frac{45037}{3840}x^2 + 6xy^2\right) + \varepsilon^2\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1225}{4096}y\right), \\ f_2(x, y) &= \varepsilon(-xy) + \varepsilon^2\left(\frac{82951}{27648}y^2 + 2x\right), \\ g_1(x, y) &= \varepsilon\left(-\frac{10145}{1512}xy + 9x^3\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{153432049}{2322432}x^2y\right), \\ g_2(x, y) &= \varepsilon\left(\frac{32}{3}y^3 - \frac{32}{3}x^3\right) + \varepsilon^2\left(-\frac{153432049}{2322432}x^2 + 2y^3\right). \end{aligned}$$

Puisque nous avons F_{10} égal à zéro, alors il faut résoudre l'équation $F_{20} = 0$, c.à.d

$$r^{11} - \frac{2029}{576}r^9 + \frac{45037}{9216}r^7 - \frac{123119}{36864}r^5 + \frac{82951}{73728}r^3 - \frac{1225}{8192}r = 0,$$

qui a exactement cinq racines positives, $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $r_2 = \frac{3}{4}$, $r_3 = \frac{5}{6}$, $r_4 = \frac{7}{8}$ et $r_5 = 1$. Ces dernières racines vérifiant

$$\begin{aligned} \left.\frac{dF_{20}(r)}{dr}\right|_{r=r_1} &= \frac{119}{73728} \neq 0, \\ \left.\frac{dF_{20}(r)}{dr}\right|_{r=r_2} &= -\frac{1729}{2097152} \neq 0, \\ \left.\frac{dF_{20}(r)}{dr}\right|_{r=r_3} &= \frac{1499575}{1934917632} \neq 0, \\ \left.\frac{dF_{20}(r)}{dr}\right|_{r=r_4} &= -\frac{2219945}{1610612736} \neq 0, \\ \left.\frac{dF_{20}(r)}{dr}\right|_{r=r_5} &= \frac{385}{12288} \neq 0. \end{aligned}$$

Nous concluons donc que le système (7.3.b) a trois cycles limites instables pour $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $r_3 = \frac{5}{6}$ et $r_5 = 1$. En plus deux autres cycles limites stables pour $r_2 = \frac{3}{4}$ et $r_4 = \frac{7}{8}$, (Voir la figure (7.2)).

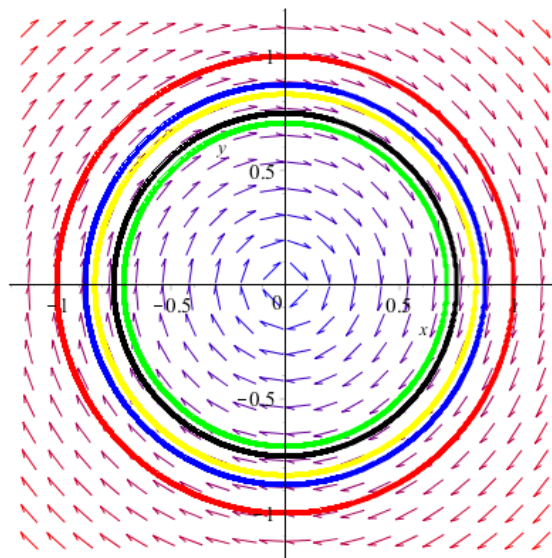


FIGURE 7.2 – Les cinq cycles limites pour $\varepsilon = 10^{-5}$.

APPENDICE

Dans cet Appendice, nous définissons certaines formules écrites dans le chapitre (3), (6) et (7).

Appendice-A

Les fonctions $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}$ et F_{23} mentionnées dans le système (3.2.a) sont

$$F_{11} = \frac{1}{b}(a_{00}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{01}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta + a_{02}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + a_{03}\rho_1\rho_2 \times \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - a_{04}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{05}\rho_1\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + a_{06}\rho_1\rho_2 \times \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) + a_{07}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + a_{08}\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \times \sin(\theta + s) - a_{09}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + b_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{01}\rho_1^2 \cos^3 \theta + b_{02}\rho_1\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + b_{03}\rho_1\rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{04}\rho_1^2 \times \cos^2 \theta \sin \theta - b_{05}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - b_{06}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + b_{07}\rho_2^2 \times \cos^2(\theta + s) \sin \theta + b_{08}\rho_2^2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{09}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + a_{04}\rho_1^2 \cos \theta + a_{09}\rho_2^2 \cos \theta + b_{01}\rho_1^2 \cos \theta + b_{04}\rho_1^2 \sin \theta + b_{05}\rho_1\rho_2 \cos(\theta + s) + b_{06}\rho_1\rho_2 \sin(\theta + s) + b_{09}\rho_2^2 \sin \theta + a_1\rho_1),$$

$$F_{21} = \frac{1}{b\rho_1}((a_{10}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{11}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta + a_{12}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + a_{13}\rho_1\rho_2 \times \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - a_{14}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{15}\rho_1\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + a_{16}\rho_1\rho_2 \times \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) + a_{17}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + a_{18}\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \times \sin(\theta + s) - a_{19}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + b_{10}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{11}\rho_1^2 \cos^3 \theta + b_{12}\rho_1\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + b_{13}\rho_1\rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{14}\rho_1^2 \cos^2 \theta \times \sin \theta - b_{15}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - b_{16}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + b_{17}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \times \sin \theta + b_{18}\rho_2^2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{19}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + a_{14}\rho_1^2 \cos \theta + a_{19}\rho_2^2 \cos \theta + b_{11}\rho_1^2 \cos \theta + b_{14}\rho_1^2 \sin \theta + b_{15}\rho_1\rho_2 \cos(\theta + s) + b_{16}\rho_1\rho_2 \times \sin(\theta + s) + b_{19}\rho_2^2 \sin \theta + a_2\rho_1)\rho_1 + \frac{1}{b}((a_{00}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{01}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta + a_{02}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + a_{03}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - a_{04}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{05}\rho_1\rho_2 \times \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta) + a_{06}\rho_1\rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) + a_{07}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + a_{08}\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - a_{09}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + b_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{01}\rho_1^2 \cos^3 \theta + b_{02}\rho_1\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + b_{03}\rho_1\rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{05}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - b_{06}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) +$$

$$\begin{aligned}
& b_{07}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + b_{08}\rho_2^2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{09}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta \\
& + a_{04}\rho_1^2 \cos \theta + a_{09}\rho_2^2 \cos \theta + b_{01}\rho_1^2 \cos \theta + b_{04}\rho_1^2 \sin \theta + b_{05}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) + \\
& b_{06}\rho_1 \rho_2 \sin(\theta + s) + b_{09}\rho_2^2 \sin \theta + a_1 \rho_1)(a_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{01}\rho_1^2 \cos^3 \theta + \\
& a_{02}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + a_{03}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \times \\
& \sin \theta - a_{05}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - a_{06}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + a_{07}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \times \\
& \sin \theta + a_{08}\rho_2^2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{09}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta - b_{00}\rho_1^2 \cos^3 \theta \\
& - b_{01}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{02}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - b_{03}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) \\
& + b_{04}\rho_1^2 \cos^3 \theta - b_{05}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta - b_{06}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) \\
& - b_{07}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - b_{08}\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + b_{09}\rho_2^2 \cos \theta \times \\
& \cos^2(\theta + s) + a_{01}\rho_1^2 \cos \theta + a_{04}\rho_1^2 \sin \theta + a_{05}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) + a_{06}\rho_1 \rho_2 \sin(\theta + s) \\
& + a_{09}\rho_2^2 \sin \theta - b_{04}\rho_1^2 \cos \theta - b_{09}\rho_2^2 \cos \theta - b_1 \rho_1)), \\
F_{12} = & \frac{1}{b}(c_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + c_{01}\rho_1^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + c_{02}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \times \\
& \cos^2(\theta + s) + c_{03}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - c_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + \\
& c_{05}\rho_1 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + c_{06}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) + c_{07}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) \\
& + c_{08}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - c_{09}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + d_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + \\
& d_{01}\rho_1^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) + d_{02}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{03}\rho_1 \rho_2 \times \\
& \cos \theta \cos^2(\theta + s) - d_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + d_{05}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) \\
& - d_{06}\rho_1 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + d_{07}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{08}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) - \\
& d_{09}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + c_{04}\rho_1^2 \cos(\theta + s) + c_{09}\rho_2^2 \cos(\theta + s) + d_{03}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \\
& + d_{04}\rho_1^2 \sin(\theta + s) + d_{06}\rho_1 \rho_2 \sin \theta + d_{08}\rho_2^2 \cos(\theta + s) + d_{09}\rho_2^2 \sin(\theta + s) + c_1 \rho_2), \\
F_{22} = & \frac{1}{b\rho_1}((c_{10}\rho_1^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + c_{11}\rho_1^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + c_{12}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \times \\
& \cos^2(\theta + s) + c_{13}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - c_{14}\rho_1^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + \\
& c_{15}\rho_1 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + c_{16}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) + c_{17}\rho_2^2 \times \\
& \cos^3(\theta + s) + c_{18}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - c_{19}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + d_{10}\rho_1^2 \cos^2 \theta \times \\
& \sin(\theta + s) + d_{11}\rho_1^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) + d_{12}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) \\
& - d_{13}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - d_{14}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + d_{15}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) \times \\
& \sin \theta \sin(\theta + s) - d_{16}\rho_1 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + d_{17}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - \\
& d_{18}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) - d_{19}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + c_{14}\rho_1^2 \cos(\theta + s) + c_{19}\rho_2^2 \times \\
& \cos(\theta + s) + d_{13}\rho_1 \rho_2 \cos \theta + d_{14}\rho_1^2 \sin(\theta + s) + d_{16}\rho_1 \rho_2 \sin \theta + d_{18}\rho_2^2 \cos(\theta + s) \\
& + d_{19}\rho_2^2 \sin(\theta + s) + c_2 \rho_2) \rho_1 + \frac{1}{b}((c_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + c_{01}\rho_1^2 \cos \theta \times \\
& \cos(\theta + s) \sin \theta + c_{02}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + c_{03}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \times \\
& \sin(\theta + s) - c_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + c_{05}\rho_1 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + c_{06}\rho_1 \rho_2 \times \\
& \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) + c_{07}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + c_{08}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - \\
& c_{09}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + d_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + d_{01}\rho_1^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) + \\
& d_{02}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{03}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - d_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \times \\
& \sin(\theta + s) + d_{05}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - d_{06}\rho_1 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + \\
& d_{07}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{08}\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) - d_{09}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + \\
& c_{04}\rho_1^2 \cos(\theta + s) + c_{09}\rho_2^2 \cos(\theta + s) + d_{03}\rho_1 \rho_2 \cos \theta + d_{04}\rho_1^2 \sin(\theta + s) + \\
& d_{06}\rho_1 \rho_2 \sin \theta + d_{08}\rho_2^2 \cos(\theta + s) + d_{09}\rho_2^2 \sin(\theta + s) + c_1 \rho_2)(a_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_{01}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{02}\rho_1\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + a_{03}\rho_1\rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) \\
& -a_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{05}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - a_{06}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + \\
& a_{07}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + a_{08}\rho_2^2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{09}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \times \\
& \sin \theta - b_{00}\rho_1^2 \cos^3 \theta - b_{01}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{02}\rho_1\rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - b_{03}\rho_1 \times \\
& \rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + b_{04}\rho_1^2 \cos^3 \theta - b_{05}\rho_1\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta - b_{06}\rho_1\rho_2 \times \\
& \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{07}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - b_{08}\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \times \\
& \sin(\theta + s) + b_{09}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + a_{01}\rho_1^2 \cos \theta + a_{04}\rho_1^2 \sin \theta + a_{05}\rho_1\rho_2 \times \\
& \cos(\theta + s) + a_{06}\rho_1\rho_2 \sin(\theta + s) + a_{09}\rho_2^2 \sin \theta - b_{04}\rho_1^2 \cos \theta - b_{09}\rho_2^2 \cos \theta - \\
& b_1\rho_1)), \\
F_{13} = & \frac{1}{b\rho_1\rho_2} (a_{00}\rho_1^2\rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{01}\rho_1^2\rho_2 \cos^3 \theta + a_{02}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta \\
& + a_{03}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{04}\rho_1^2\rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{05}\rho_1\rho_2^2 \cos^2 \theta \times \\
& \cos(\theta + s) - a_{06}\rho_1\rho_2^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + a_{07}\rho_2^3 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + a_{08}\rho_2^3 \times \\
& \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{09}\rho_2^3 \cos^2(\theta + s) \sin \theta - b_{00}\rho_1^2\rho_2 \cos^3 \theta - \\
& b_{01}\rho_1^2\rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{02}\rho_1\rho_2^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - b_{03}\rho_1\rho_2^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) \\
& + b_{04}\rho_1^2\rho_2 \cos^3 \theta - b_{05}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta - b_{06}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \sin \theta \times \\
& \sin(\theta + s) - b_{07}\rho_2^3 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - b_{08}\rho_2^3 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + \\
& b_{09}\rho_2^3 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - c_{00}\rho_1^3 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - c_{01}\rho_1^3 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) \\
& - c_{02}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + c_{03}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + c_{04}\rho_1^3 \times \\
& \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - c_{05}\rho_1^2\rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) + c_{06}\rho_1^2\rho_2 \cos^2(\theta + s) \times \\
& \sin \theta - c_{07}\rho_1\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + c_{08}\rho_1\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + c_{09}\rho_1\rho_2^2 \times \\
& \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + d_{00}\rho_1^3 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + d_{01}\rho_1^3 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta \\
& + d_{02}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + d_{03}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{04}\rho_1^3 \times \\
& \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + d_{05}\rho_1^2\rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + d_{06}\rho_1^2\rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \times \\
& \sin(\theta + s) + d_{07}\rho_1\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + d_{08}\rho_1\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{09}\rho_1\rho_2^2 \times \\
& \cos^3(\theta + s) + a_{01}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta + a_{04}\rho_1^2\rho_2 \sin \theta + a_{05}\rho_1\rho_2^2 \cos(\theta + s) + a_{06}\rho_1\rho_2^2 \times \\
& \sin(\theta + s) + a_{09}\rho_2^3 \sin \theta - b_{04}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta - b_{09}\rho_2^3 \cos \theta - c_{03}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta - \\
& c_{04}\rho_1^3 \sin(\theta + s) - c_{06}\rho_1^2\rho_2 \sin \theta - c_{08}\rho_1\rho_2^2 \cos(\theta + s) - c_{09}\rho_1\rho_2^2 \sin(\theta + s) + \\
& d_{04}\rho_1^3 \cos(\theta + s) + d_{09}\rho_1\rho_2^2 \cos(\theta + s) - b_1\rho_1\rho_2 + d_1\rho_1\rho_2), \\
F_{23} = & \frac{1}{b\rho_1} \left(\frac{1}{\rho_2} (a_{10}\rho_1^2\rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{11}\rho_1^2\rho_2 \cos^3 \theta + a_{12}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \times \right. \\
& \sin \theta + a_{13}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{14}\rho_1^2\rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{15}\rho_1\rho_2^2 \times \\
& \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - a_{16}\rho_1\rho_2^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + a_{17}\rho_2^3 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + \\
& a_{18}\rho_2^3 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{19}\rho_2^3 \cos^2(\theta + s) \sin \theta - b_{10}\rho_1^2\rho_2 \cos^3 \theta - \\
& b_{11}\rho_1^2\rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{12}\rho_1\rho_2^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - b_{13}\rho_1\rho_2^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + \\
& b_{14}\rho_1^2\rho_2 \cos^3 \theta - b_{15}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta - b_{16}\rho_1\rho_2^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) \\
& - b_{17}\rho_2^3 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - b_{18}\rho_2^3 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + b_{19}\rho_2^3 \cos \theta \times \\
& \cos^2(\theta + s) - c_{10}\rho_1^3 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - c_{11}\rho_1^3 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - c_{12}\rho_1^2\rho_2 \times \\
& \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + c_{13}\rho_1^2\rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + c_{14}\rho_1^3 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) \\
& - c_{15}\rho_1^2\rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) + c_{16}\rho_1^2\rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta - c_{17}\rho_1\rho_2^2 \times \\
& \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + c_{18}\rho_1\rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + c_{19}\rho_1\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_{10}\rho_1^3 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + d_{11}\rho_1^3 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + d_{12}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \times \\
& \cos^2(\theta + s) + d_{13}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{14}\rho_1^3 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + \\
& d_{15}\rho_1^2 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + d_{16}\rho_1^2 \rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) + d_{17}\rho_1 \rho_2^2 \times \\
& \cos^3(\theta + s) + d_{18}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{19}\rho_1 \rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + a_{11}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \\
& + a_{14}\rho_1^2 \rho_2 \sin \theta + a_{15}\rho_1 \rho_2^2 \cos(\theta + s) + a_{16}\rho_1 \rho_2^2 \sin(\theta + s) + a_{19}\rho_2^3 \sin \theta - \\
& b_{14}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta - b_{19}\rho_2^3 \cos \theta - c_{13}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta - c_{14}\rho_1^3 \sin(\theta + s) - c_{16}\rho_1^2 \rho_2 \sin \theta \\
& - c_{18}\rho_1 \rho_2^2 \cos(\theta + s) - c_{19}\rho_1 \rho_2^2 \sin(\theta + s) + d_{14}\rho_1^3 \cos(\theta + s) + d_{19}\rho_1 \rho_2^2 \cos(\theta + s) \\
& - b_2 \rho_1 \rho_2 + d_2 \rho_1 \rho_2) + \frac{1}{b \rho_1 \rho_2} ((a_{00}\rho_1^2 \rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{01}\rho_1^2 \rho_2 \cos^3 \theta + \\
& a_{02}\rho_1 \rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + a_{03}\rho_1 \rho_2^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{04}\rho_1^2 \rho_2 \times \\
& \cos^2 \theta \sin \theta - a_{05}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - a_{06}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + \\
& a_{07}\rho_2^3 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + a_{08}\rho_2^3 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{09}\rho_2^3 \cos^2(\theta + s) \times \\
& \sin \theta - b_{00}\rho_1^2 \rho_2 \cos^3 \theta - b_{01}\rho_1^2 \rho_2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{02}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - \\
& b_{03}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + b_{04}\rho_1^2 \rho_2 \cos^3 \theta - b_{05}\rho_1 \rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta - \\
& b_{06}\rho_1 \rho_2^2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{07}\rho_2^3 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - b_{08}\rho_2^3 \cos \theta \times \\
& \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + b_{09}\rho_2^3 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - c_{00}\rho_1^3 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - \\
& c_{01}\rho_1^3 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - c_{02}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + \\
& c_{03}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + c_{04}\rho_1^3 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) - c_{05}\rho_1^2 \rho_2 \cos(\theta + s) \sin \theta \times \\
& \sin(\theta + s) + c_{06}\rho_1^2 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta - c_{07}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + \\
& c_{08}\rho_1 \rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + c_{09}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) + d_{00}\rho_1^3 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + \\
& d_{01}\rho_1^3 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + d_{02}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + d_{03}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \times \\
& \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) - d_{04}\rho_1^3 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) + d_{05}\rho_1^2 \rho_2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + d_{06}\rho_1^2 \rho_2 \times \\
& \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) + d_{07}\rho_1 \rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + d_{08}\rho_1 \rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin(\theta + s) - \\
& d_{09}\rho_1 \rho_2^2 \cos^3(\theta + s) + a_{01}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta + a_{04}\rho_1^2 \rho_2 \sin \theta + a_{05}\rho_1 \rho_2^2 \cos(\theta + s) + \\
& a_{06}\rho_1 \rho_2^2 \sin(\theta + s) + a_{09}\rho_2^3 \sin \theta - b_{04}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta - b_{09}\rho_2^3 \cos \theta - c_{03}\rho_1^2 \rho_2 \cos \theta \\
& - c_{04}\rho_1^3 \sin(\theta + s) - c_{06}\rho_1^2 \rho_2 \sin \theta - c_{08}\rho_1 \rho_2^2 \cos(\theta + s) - c_{09}\rho_1 \rho_2^2 \sin(\theta + s) + \\
& d_{04}\rho_1^3 \cos(\theta + s) + d_{09}\rho_1 \rho_2^2 \cos(\theta + s) - b_1 \rho_1 \rho_2 + d_1 \rho_1 \rho_2)(a_{00}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - \\
& a_{01}\rho_1^2 \cos^3 \theta + a_{02}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin \theta + a_{03}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) \\
& - a_{04}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - a_{05}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \cos(\theta + s) - a_{06}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) \\
& + a_{07}\rho_2^2 \cos^2(\theta + s) \sin \theta + a_{08}\rho_2^2 \cos(\theta + s) \sin \theta \sin(\theta + s) - a_{09}\rho_2^2 \times \\
& \cos^2(\theta + s) \sin \theta - b_{00}\rho_1^2 \cos^3 \theta - b_{01}\rho_1^2 \cos^2 \theta \sin \theta - b_{02}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \times \\
& \cos(\theta + s) - b_{03}\rho_1 \rho_2 \cos^2 \theta \sin(\theta + s) + b_{04}\rho_1^2 \cos^3 \theta - b_{05}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \times \\
& \cos(\theta + s) \sin \theta - b_{06}\rho_1 \rho_2 \cos \theta \sin \theta \sin(\theta + s) - b_{07}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) - \\
& b_{08}\rho_2^2 \cos \theta \cos(\theta + s) \sin(\theta + s) + b_{09}\rho_2^2 \cos \theta \cos^2(\theta + s) + a_{01}\rho_1^2 \cos \theta + \\
& a_{04}\rho_1^2 \sin \theta + a_{05}\rho_1 \rho_2 \cos(\theta + s) + a_{06}\rho_1 \rho_2 \sin(\theta + s) + a_{09}\rho_2^2 \sin \theta - b_{04}\rho_1^2 \cos \theta \\
& - b_{09}\rho_2^2 \cos \theta - b_1 \rho_1)).
\end{aligned}$$

Appendice-B

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \sin(2l+1)\theta d\theta &\neq 0, \text{ si } i \text{ pair et } j \text{ impair,} \\
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \sin(2l+1)\theta d\theta &= \begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ impair ou } j \text{ pair,} \\ \pi C_{i,p,l}, i = 2k, j = 2p+1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{C}_{i,p,l}, i = 2k, j = 2p+3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \sin(2l)\theta d\theta &\neq 0, \text{ si } i \text{ impair et } j \text{ impair,} \\
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \sin(2l)\theta d\theta &= \begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ pair ou } j \text{ pair,} \\ \pi D_{i,p,l}, i = 2k+1, j = 2p+1 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{D}_{i,p,l}, i = 2k+1, j = 2p+3 \text{ et } l \geq 0, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \cos(2l-1)\theta d\theta &\neq 0, \text{ si } i \text{ impair et } j \text{ pair,} \\
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \cos(2l-1)\theta d\theta &= \begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ pair ou } j \text{ impair,} \\ \pi E_{i,p,l}, i = 2k+1, j = 2p+2 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{E}_{i,p,l}, i = 2k+1, j = 2p+4 \text{ et } l \geq 0, \end{cases} \\
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \cos(2l)\theta d\theta &\neq 0, \text{ si } i \text{ pair et } j \text{ pair,} \\
\int_0^{2\pi} A_{i,j} \cos(2l)\theta d\theta &= \begin{cases} 0 \text{ si } i \text{ impair ou } j \text{ impair,} \\ \pi F_{i,p,l}, i = 2k, j = 2p+2 \text{ et } l \geq 0, \\ \pi \tilde{F}_{i,p,l}, i = 2k, j = 2p+4 \text{ et } l \geq 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

où $C_{i,p,l}, \tilde{C}_{i,p,l}, D_{i,p,l}, \tilde{D}_{i,p,l}, E_{i,p,l}, \tilde{E}_{i,p,l}, F_{i,p,l}$ et $\tilde{F}_{i,p,l}$ sont des constantes non nulles.

Appendice-C

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta \sin((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi A_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{A}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{A}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{A}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta \cos((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi B_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{B}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{B}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{B}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \sin((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi C_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{C}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{C}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{C}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+2} \theta \cos((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi D_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{D}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{D}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{D}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta \sin((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi E_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{E}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{E}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{E}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+3} \theta \cos((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi F_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{F}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{F}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{F}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \sin((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi G_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{G}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{G}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{G}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+4} \theta \cos((2h+1)\theta) d\theta = \begin{cases} \pi H_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_1, \\ \pi \tilde{H}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_2, \\ \pi \hat{H}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_3, \\ \pi \bar{H}_{ij}^{2h+1} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, n_4, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+1}(\theta) \cos((2h)\theta) &= 0 \quad \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+2}(\theta) \cos((2h)\theta) &= 0 \quad \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+3}(\theta) \cos((2h)\theta) &= 0 \quad \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ pair, } h = 0, 1, 2, \dots, \\ \int_0^{2\pi} \cos^i(\theta) \sin^{j+4}(\theta) \cos((2h)\theta) &= 0 \quad \text{si } i \text{ impair ou } j \text{ impair, } h = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+1} \theta d\theta = \begin{cases} \pi M_{ijhk} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h \text{ impair, } k \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h \text{ pair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h \text{ impair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h \text{ pair, } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+2} \theta d\theta = \begin{cases} \pi N_{ijhk} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h \text{ pair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h \text{ impair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h \text{ pair, } k \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h \text{ impair, } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+3} \theta d\theta = \begin{cases} \pi P_{ijhk} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h \text{ impair, } k \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h \text{ pair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h \text{ impair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h \text{ pair, } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+4} \theta d\theta = \begin{cases} \pi Q_{ijhk} & \text{si } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h \text{ pair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h \text{ impair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h \text{ pair, } k \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h \text{ impair, } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+5} \theta d\theta = \begin{cases} \pi R_{ijhk} & \text{si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h \text{ impair, } k \text{ impair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h \text{ pair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h \text{ impair, } k \text{ pair,} \\ & \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h \text{ pair, } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+6} \theta d\theta = \begin{cases} \pi S_{ijhk} \text{ si } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h \text{ pair, } k \text{ pair,} \\ \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h \text{ impair, } k \text{ pair,} \\ \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h \text{ pair, } k \text{ impair,} \\ \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h \text{ impair, } k \text{ impair} \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{i+h+1} \theta \sin^{j+k+7} \theta d\theta = \begin{cases} \pi T_{ijhk} \text{ si } i \text{ pair, } j \text{ pair, } h \text{ impair, } k \text{ impair,} \\ \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ impair, } h \text{ pair, } k \text{ pair,} \\ \text{ou } i \text{ pair, } j \text{ impair, } h \text{ impair, } k \text{ pair,} \\ \text{ou } i \text{ impair, } j \text{ pair, } h \text{ pair, } k \text{ impair} \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \delta_{ij}, \gamma_{ij}, A_{ij}^{2h+1}, \tilde{A}_{ij}^{2h+1}, \hat{A}_{ij}^{2h+1}, \bar{A}_{ij}^{2h+1}, B_{ij}^{2h+1}, \tilde{B}_{ij}^{2h+1}, \hat{B}_{ij}^{2h+1}, \bar{B}_{ij}^{2h+1}, C_{ij}^{2h+1}, \tilde{C}_{ij}^{2h+1}, \hat{C}_{ij}^{2h+1}, \bar{C}_{ij}^{2h+1}, D_{ij}^{2h+1}, \tilde{D}_{ij}^{2h+1}, \hat{D}_{ij}^{2h+1}, \bar{D}_{ij}^{2h+1}, E_{ij}^{2h+1}, \tilde{E}_{ij}^{2h+1}, \hat{E}_{ij}^{2h+1}, \bar{E}_{ij}^{2h+1}, F_{ij}^{2h+1}, \tilde{F}_{ij}^{2h+1}, \hat{F}_{ij}^{2h+1}, \bar{F}_{ij}^{2h+1}, G_{ij}^{2h+1}, \tilde{G}_{ij}^{2h+1}, \hat{G}_{ij}^{2h+1}, \bar{G}_{ij}^{2h+1}, H_{ij}^{2h+1}, \tilde{H}_{ij}^{2h+1}, \hat{H}_{ij}^{2h+1}, \bar{H}_{ij}^{2h+1}, M_{ijhk}, N_{ijhk}, P_{ijhk}, Q_{ijhk}, R_{ijhk}, S_{ijhk}, T_{ijhk}$ sont des constantes non nulles.



CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse nous avons utilisé la méthode de moyennisation d'ordre un et d'ordre deux pour étudier le nombre maximum des cycles limites de certains systèmes différentiels polynômiaux de dimension deux et quatre.

L'importance de déterminer le nombre de cycles limites fait l'objet de la deuxième partie du 16^{ème} problème de Hilbert.

Les résultats obtenus dans ce travail nous laissent entrevoir d'autres recherches à développer pour les systèmes de Kukles généralisés, et la possibilité d'appliquer la méthode de la moyennisation d'ordre un et deux pour d'autres systèmes perturbés .



BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Badi, E. Bendib and A. Makhlof ; On the maximum number of limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems via averaging theory, *J. Pu. App. Math.* **12**(4) (2016), 2971-2985.
- [2] T.R. Blows and N.G. Llyod ; The number of small-amplitude limit cycles of Liénard equation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **95** (1984), 359-366.
- [3] N.N. Bogoliubov and N. Krylov ; The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations. Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev. (1934).
- [4] N.N. Bogoliubov and Yu.A. Mitropolsky ; Asymtotic methods in the theory of non-linear oscillations, Gordon and Breach, New York, (1961).
- [5] A. Boulfoul and A. Makhlof ; Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equation, *Ann. Differ. Equa.* **28**(2) (2012), 127-131.
- [6] A. Boulfoul, A. Makhlof and N. Mellahi ; On the limit cycles for a class of generalized Kukles differential systems, *J. App. Anal. Comp.* **9**(3) (2019), 864-883.
- [7] A. Buică and J. Llibre ; Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, *Bull. Sci. Math.* **128** (2004), 7-22.
- [8] J. Chavarriga, E. Saez, I. Szanto and M. Grau ; Coexistence of limit cycles and invariant algebraic curves for a Kukles system, *Nonlinear. Anal. Theo. Meth. Appl.* **59**(5) (2004), 673-693.
- [9] T. Chen and J. Llibre ; Limit cycles of a second-order differential equation, *App. Math. Lett.* **88** (2019), 111-117.
- [10] C.J. Christopher and N.G. Lloyd ; On the paper of X. Jin and D. Wang concerning the conditions for a centre in certain cubic systems, *Bull. Lon. Math. Soc.* **22** (1990), 5-12.
- [11] C.J. Christopher and S. Lynch ; Small amplitude limit cycle bifurcations for Liénard systems with quadratic or cubic damping and restoring forces, *Nonlinearity.* **12** (1999), 1099-1112.
- [12] W.A. Coppel ; Some quadratic systems with at most one limit cycles, *Dynamics reported*, Wiley, New York **2** (1998).
- [13] F. Dumortier and C. Li ; On the uniqueness of limit cycles surrounding one or more singularities for Liénard equations, *Nonlinearity.* **9** (1996), 1489-1500.
- [14] F. Dumortier and C. Li ; Quadratic Liénard equations with quadratic damping, *J. Differ. Equ.* **139** (1997), 41-59.
- [15] F. Dumortier and C. Rousseau ; Cubic Liénard equations with linear dapimg, *Nonlinearity.* **3** (1990), 1015-1039.

-
- [16] J. Frédéric ; Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique, Notes de cours, (2011/2012).
- [17] A. Gasull and J. Torregrosa ; Small-Amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity, *J. Differ. Equ.* **159** (1998), 186-211.
- [18] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano ; On the nonexistence, existence, and uniquenesses of limit cycles, *Nonlinearity*. **9** (1996), 501-516.
- [19] J. Giné, M. Grau and J. Llibre ; Averaging theory at any order for computing periodic orbits, *Phys. D.* **250** (2013), 58-65.
- [20] B. Green, J. Poincaré and the three body problem ; *History of mathematics, Amer. Math. soci, Lon. Math. soci.* **11** (1997).
- [21] I.S. Kukles ; Sur quelques cas de distinction entre un foyer et un centre, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS(N. S.)*, **42** (1944), 208-211 (French).
- [22] C. Li and J. Llibre ; Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four, *J. Differ. Equa.* **252** (2012), 3142-3162.
- [23] A.M. Liapunov ; *Stability of motion in Mathematics in science and engineering, Academic Press*, **30** (1966).
- [24] A. Liénard ; Étude des oscillations entretenues, *Revue générale de l'électricité.* **23** (1928), 946-954.
- [25] A. Lins, W. de Melo and C.C. Pugh ; *Lecture notes in Mathematics, Springer*, **597** (1977), 335-357.
- [26] J. Llibre and A. Makhlouf ; Limit cycles of a class of generalized Liénard polynomial equations, *J. Dyn. Cont. Syst.* **12(2)** (2015), 189-192.
- [27] J. Llibre and A.C. Mereu ; Limit cycles for generalized Kukles polynomial differential systems , *Nonlin. Anal. Theo. Meth. Appl.* **74(4)** (2011), 1261-1271.
- [28] J. Llibre, A.C. Mereu and M.A. Teixeira ; Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **148** (2010), 363-383.
- [29] J. Llibre, D.D. Novaes and M.A. Teixeira ; Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree, *Lon. Math. Soc.* **27** (2014), 563-583.
- [30] J. Llibre and C. Valls ; Limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems, *Cha. Sol. Fract.* **46** (2013), 65-74.
- [31] J. Llibre and C. Valls ; On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems, *Proc. R. Soc. A.* **468** (2012), 2347-2360.
- [32] N.G. Lloyd ; *Degree Theory, Cambridge University Press*, (1978).
- [33] N.G. Lloyd and S. Lynch ; Small-Amplitude limit cycles of certain Liénard systems, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.* **418** (1988), 199-208.
- [34] S. Lynch ; Limit cycles of generalized Liénard equations, *Appl. Math. Lett.* **8** (1995), 15-17.
- [35] S. Lynch and C. Christopher ; Limit cycles in highly non-linear differential equations, *J. Sound. Vib.* **224(3)** (1999), 505-517.
- [36] I.G. Malkin ; Some problems of the theory of nonlinear oscillations, *Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit. Moscow*, (1956) (in Russian).
- [37] J.E. Marsden and M. McKracken ; *The Hopf bifurcation and its applications, Springer Verlag*, (1976).
- [38] É. Mathieu ; Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique, *J. Math. Pur. Appl.* **13** (1868), 137-203.

- [39] L. Perko ; Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition, Springer, New York (2001).
- [40] J. Qiao and S. Shui ; Limit cycles for a class of polynomial differential systems, Elec. J. Qua. The. Diff. Equa. **9** (2016), 1-9.
- [41] M. Roseau ; Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer, New York, **8** (1985).
- [42] C. Rousseau, D. Schlomiuk and P. Thibaudeau ; The centres in the reduced Kukles system, Nonlinearity. **8**(4) (1995), 541-569.
- [43] C. Rousseau and B. Toni ; Local bifurcations of critical periods in the reduced Kukles system, Can. j. Math. **49**(2) (1997), 338-358.
- [44] G.S. Rychkov ; The maximum number of limit cycle of the system $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5, \dot{y} = -x$ is two, Differ. Uravn. **11** (1975), 380-391.
- [45] A.P. Sadovski ; Cubic systems of nonlinear oscillations with seven limit cycles , J. Differ. Equ, **39**(4) (2003), 505-516.
- [46] J.A. Sanders and F. Verhulst ; Averaging methods in nonlinear dynamical systems, App. Math. Sci, New York, Springer-Verlag, (1985).
- [47] J.A. Sanders and F. Verhulst ; Averaging methods in nonlinear dynamical systems, App. Math. Sci. New York, Springer-Verlag, (1985).
- [48] J. A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock ; Averaging method in nonlinear dynamical systems, Appl. Math. Sci. Springer, New York, **59** (2007).
- [49] G. Sansone and R. Conti ; Nonlinear differential equations. New York, NY. (1964).
- [50] S. Smale ; Mathematical problems for the next century, Math. Inte. **20** (1998), 7-15.
- [51] P.J. Torres ; Non-trivial periodic solutions of a non-linear Hill's equation with positively homogeneous term, Nonl. Anal. **65** (2006), 841-844.
- [52] F. Verhulst ; Nonlinear differential equations and dynamical systems, Universitex, Berlin, Springer-Verlag, (1990).
- [53] Z. Xianwu ; Remarks on the uniqueness of limit cycles, Kexue Tongbao. **28**(4) (1983), 452-455.
- [54] P. Yu and M. Han ; Limit cycles in generalized Liénard systems, Cha. Solu. Fract. **30** (2006), 1048-1068.
- [55] M. Zamora ; A note on the periodic solutions of a Mathieu-Duffing type equations, Math. Nachr. **290** (2017), 1113-1118.
- [56] H. Zang, T. Zhang, Y.-C. Tian and M.O. Tadé ; Limit cycles for the Kukles system, J. Dyna. Cont. Syst. **14**(2) (2008), 283-298.
- [57] D. Zwillinger ; Table of Integrals, Series, and Products, ISBN : 978-0-12-384933-5, (2014).