

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2020/2021

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat

Mesure et gestion des risques en finance

Spécialité
Modélisation Mathématique
Option
Actuariat

Par

Khalfallah Mohammed El-arbi

DIRECTEUR DE THÈSE : Dr Hadji Mohammed Lakhdar M.C.A U.B.M. ANNABA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE : Pr Vives Josep Prof U. BARCELONE

Devant le jury

PRESIDENT: Chadli Assia Prof U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Merzougui Mouna M.C.A U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Benatia Fateh Prof U. BISKRA
EXAMINATEUR : Kimouche Karima M.C.A U. SKIKDA

Remerciements

Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour
pour terminer cette thèse.

Ce travail de recherche a été accompli au laboratoire de probabilités et statistique(LaPS) de
l'Université Badji Mokhtar Annaba, je remercie sincèrement mon directeur de thèse Dr.
Hadji Mohammed Lakhdar, pour son enthousiasme, sa gentillesse, et sa rigueur scientifique,
ainsi que ses précieux conseils.

J'adresse mes sincères et chaleureux remerciements à mon co-directeur de thèse le
Professeur Josep Vives de l'université de Barcelone pour sa rigueur scientifique et son
extrême patience au cours de ces années.

Je suis extrêmement reconnaissant aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter,
d'examiner et d'évaluer ce travail. J'exprime ma profonde gratitude au Pr. Chadli Assia de
l'Université Badji Mokhtar Annaba, qui a l'honneur de présider mon jury de soutenance.
Mes sincères remerciements au Pr. Benatia Fateh de l'Université de Biskra, Dr. Kimouche
Karima de l'Université de Skikda et au Dr. Merzougui Mouna de l'Université Badji
Mokhtar Annaba de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'expertiser ma thèse de Doctorat.

Je me permets de remercier mes parents pour leur encouragement tout au long de mes
études. Merci, mon cher frère Abd el Nasser, et mes chers soeurs Rahima, Souad, Samira et
Nadira qui m'ont toujours soutenu et encouragé pendant mes études.

Un merci spécial à ma femme Mezigheche Mouna pour son soutien moral, ses
encouragements et son attention bienveillante dans ce travail, et merci aussi à ma fille
Salsabil.

J'adresse mes sincères et chaleureux remerciements à mes amis Djamel, Badi, Cherif, Saleh,
Hamid, Azzedine pour leur soutien moral et leur encouragement.

Je voudrais également remercier mes amis et collègues de l'Université d'Annaba, Dr Metiri
Farouk et Mr Haddari ALLA-EDINE pour leurs judicieux conseils scientifiques.

Merci à tous les membres du département de Mathématiques et Faculté des Sciences de
l'université Badji Mokhtar Annaba.

Résumé

Ce travail se veut une contribution aux mesure et gestion des risques financiers et ses applications. L'objectif de ce travail est de trouver et développer des modèles de mesure et gestion des risques, notamment dans le domaine de la finance. Notre contribution a été d'avoir développer des formules des mesures de risque parmi ells l'expected shortfall, et aussi des formules pour calculer les prix d'un outil de gestion des risques, exemple le contrat stop-loss, en utilisant la formule d'intégration par parties basée sur les techniques de calcul de Malliavin-Skorohod pour les processus additifs qui aident à calculer des quantités comme $\mathbb{E}(L_T h(L_T))$, ou plus généralement $\mathbb{E}(H(L_T))$, pour différentes fonctions appropriées h ou H et les différents modèles pour le processus de perte cumulée L , ces quantités apparaissent dans le calcul de l'expected shortfall et les prix des contrats stop-loss.

Mots-clés : Value-at-Risk, Processus de Lévy, Processus additifs, Expected shortfall, Contrat Stop-Loss, Calcul de Malliavin-Skorohod, Dérivés d'assurance, Average Value-at-Risk, Mesures de risque, Comité de Bâle.

Abstract

This work is intended to be a contribution to the measurement and management of financial risks and their applications. The objective of this work is to find and develop models for measuring and managing risks, particularly in the field of finance. Our contribution has been to have developed and proven formulas for measures of financial risk among them the expected shortfall, and also formulas to calculate the prices of a risk management tool, for example the stop-loss contract, by the integration by part formula based on Malliavin-Skorohod calculus techniques for additive processes, which helps to compute quantities like $\mathbb{E}(L_T h(L_T))$, or more generally $\mathbb{E}(H(L_T))$, for different suitable functions h or H and different models for the cumulative loss process L , which these quantities appear in the calculation of the expected shortfall and the prices of the stop-loss contracts.

Keywords : Value-at-Risk, Lévy Processes, Additive Processes, Expected shortfall, Stop-Loss Contract, Malliavin-Skorohod calculus, Insurance Derivatives, Average Value-at-Risk, Risk Measures, Basel Committee.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى المساهمة في قياس وإدارة المخاطر المالية وتطبيقاتها. الهدف من هذا العمل هو إيجاد وتطوير نماذج لقياس وإدارة المخاطر، خاصة في مجال التمويل. تمثلت مساهمتنا في تطوير نماذج لتدابير المخاطر المالية من بينها العجز المتوقع، وكذلك نماذج لحساب أسعار أداة إدارة المخاطر، على سبيل المثال عقد وقف الخسارة، باستخدام صيغة التكامل الجزئي على أساس تقنيات *Malliavin-Skorohod* الحسابية للعمليات المضافة التي تساعد في حساب كميات مثل $E(L_T h(L_T))$ أو بشكل عام $E(H(L_T))$ لمختلف الدوال المناسبة h أو H ، ونماذج مختلفة لعملية الخسارة التراكمية L ، وتظهر هذه الكميات في حساب العجز المتوقع وأسعار عقود وقف الخسارة.

الكلمات المفتاحية: القيمة المعرضة للخطر، عملية *Lévy*، العمليات المضافة، العجز المتوقع، عقد وقف الخسارة، حساب *Malliavin-Skorohod*، مشتقات التأمين، متوسط القيمة المعرضة للخطر، مقاييس المخاطر، لجنة بازل.

Notation et abréviations

$\#A$: Nombre d'éléments dans A .
$\mathcal{B}(E)$: Borel σ -algèbre de E .
$\omega \in \Omega$: Scénario d'aléatoire.
Φ_X	: Fonction caractéristique de X .
1_A	: Fonction indicatrice de l'événement A .
Λ_T	: Intensité cumulée.
$Dom\mathcal{S}$: Domaine de l'opérateur \mathcal{S} .
$\mathbb{E}(X)$: Espérance mathématique de X .
$\mathbb{V}(X)$: Variance de X .
<i>(i.i.d)</i>	: Indépendantes et identiquement distribuées.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$: Espace de probabilité filtré.
VaR	: Value at Risk.
$AVaR$: Average Value at Risk.
ES	: Expected shortfall.
TVE	: Théorie des valeurs extrêmes.
GPD	: Distribution de Pareto généralisée.
POT	: Peaks-Over-Threshold.
$p.s.$: presque sûrement

Table des matières

Introduction	12
1 Processus de Sauts	14
1.1 Préliminaires et Notations	14
1.2 Processus de Poisson	14
1.2.1 Processus de Poisson Compensés	16
1.2.2 Mesures Aléatoires de Poisson	16
1.2.3 Mesure Aléatoire de Poisson Compensée	18
1.2.4 Intégrale par Rapport à une Mesure Aléatoire de Poisson	18
1.3 Processus de Poisson composé	20
1.4 Processus de Lévy	21
2 Calculs de Malliavin pour les Processus des Sauts	23
2.1 Processus de Lévy de saut pur	23
2.2 Extension Chaotiques de Wiener – Itô	25
2.2.1 Intégrales Itérées de Itô	25
2.2.2 L’extension du Chaos de Wiener – Itô	26
2.3 Opérateurs de Malliavin et Skorohod	28
2.3.1 L’intégrale de Skorohod	28
2.3.2 La Dérivée de Malliavin	29
3 Les Outils de Mesure et Gestion des Risques	32
3.1 Evaluation de Risque	32
3.2 Comité de Bâle	33
3.2.1 Les Missions du Comité de Bâle	33

3.2.2	Différents Comités de Bâle	34
3.3	Marché Financier	34
3.3.1	Rôle du Marché Financier	35
3.4	Mesure de Risque	35
3.5	Value at Risk	37
3.5.1	Utilisation de la Value at Risk	39
3.5.2	Types de Risques Mesurés par la <i>VaR</i>	39
3.5.3	Adaptation de la <i>VaR</i> en Assurance	40
3.6	Les Méthodes de Calcul de la <i>VaR</i>	40
3.6.1	Les Méthodes non Paramétriques	40
3.6.2	Les Méthodes Semi-Paramétriques	42
3.6.3	Les Méthodes Paramétriques	42
3.7	Average Value at Risk	43
3.8	Expected Shortfall	43
3.9	Contrat Stop-Loss (Limitation des pertes)	43
3.10	Application Numérique	44
3.10.1	VaR Normale (Gaussienne)	44
3.10.2	VaR TVE (Théorie des Valeurs Extrêmes)	44
3.10.3	L'indice boursier S&P500	45
3.10.4	Codes et Graphes	45
4	Tarification des Dérivés à Perte Cumulée sous Modèles Additifs	54
4.1	Introduction	54
4.2	Modèles pour le processus de perte cumulée	57
4.2.1	Processus additifs de saut pur	57
4.2.2	Processus intégraux de Poisson	61
4.2.3	Modélisation du processus de perte cumulée	63
4.3	Formule d'intégration pour les processus additifs de sauts purs	65
4.4	Résultats : formules de tarification des dérivés de perte cumulée	68
4.4.1	Les arrivées de sinistre avec intensité déterministe	68
4.4.2	Les arrivées de sinistre avec intensité aléatoire	71

Conclusion Générale

77

Bibliographie

78

Table des figures

3.1	<i>Représentation graphique du cours de l'indice boursier S&P500.</i>	47
3.2	<i>Rendement de l'indice boursier S&P500.</i>	48
3.3	<i>L'histogramme des Rendements du S&P500.</i>	49
3.4	<i>Courbe de fonction d'excès moyenne.</i>	50
3.5	<i>Histogramme des excès et des données complètes du S&P500.</i>	51
3.6	<i>Histogramme et courbe de fréquence des excès du S&P500.</i>	52

Liste des tableaux

3.1	<i>Les paramètres estimés ξ et β de GPD.</i>	51
3.2	<i>l'estimation de la VaR par la méthode de la TVE.</i>	52
3.3	<i>l'estimation de la VaR normale.</i>	53

Introduction

La mesure et gestion des risques en finance est au coeur des recherches et des préoccupations du monde de la finance, notamment dans les institutions financières et les compagnies d'assurances. Parmi les risques aux quels ces institutions peuvent être soumises lors des fluctuations des transactions, ce qui est souvent très dramatiques et entraînent de grosses pertes pour ces institutions, on a, premièrement les risques de marché, qui sont les pertes éventuelles liées aux changements de la valeur d'un titre suite aux variations des facteurs qui déterminent son prix, deuxièmement les risques de crédit traduisant les risques qu'une contrepartie ne peut satisfaire ses engagement contractuels (à cause par exemple d'une faillite), troisièmement les risques opérationnels, qui sont les risques qui comportent l'ensemble des pertes liées à une erreur interne des institutions financières et les compagnies d'assurances. L'étude de mesures des risques financiers est un domaine en pleine croissance, sa conception et ses propriétés ont fait l'objet de travaux assez abondants au cours des dernières années : Harry Markowitz en 1954 dans sa thèse de doctorat portant sur un modèle de diversification efficiente des portefeuilles, a proposé de mesurer le risque d'un portefeuille efficient en utilisant l'écart-type, cependant cette mesure ne peut être appliquée dans le cas d'un titre unique [12]. William Sharpe en 1964 propose le MEDAF, un Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers, en anglais Capital Asset Pricing Model (CAPM) dans un article paru dans le Journal of Finance [40]. Stephen A Ross en 1976 donne l'idée du MEA, un Modèle d'Evaluation par Arbitrage dans un article intitulé "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing" [42] , ce modèle revendique le principe de la loi du prix unique c-à-d les portefeuilles ou les actifs présentant les mêmes risques doivent s'échanger au même prix [12]. La banque JP Morgan en 1993, suite aux différentes crises financières dans le monde, a introduit un nouveau modèle de mesure du risque, la Value at Risk (VaR) qui représente la perte potentielle maximale que peut subir un portefeuille à un niveau de probabilité préalablement fixé sur une période de temps bien

déterminée, elle est devenue incontournable en 1997 à travers les accords de Comité Bâle II [12], et pour mesurer le risque de marché.

La présente thèse est une synthèse des travaux de recherches concernant la mesure et gestion des risques en finance avec une contribution au niveau de l'expected shortfall et le contrat Stop-Loss. Elle est constituée de quatre chapitres, dans le premier, on a étudié les processus de sauts, plus précisément les processus de Poisson composés et processus de Lévy et on a illustré le rôle important de ces processus dans la mesure et la gestion des risques financiers, ce qui représente un atout dans le développement d'un meilleur modèle pour les risques associés aux variations soudaines des prix de marché, on se réfère aux ouvrages [16], [38], [39]. Dans le deuxième chapitre on a présenté et expliqué les techniques de calcul de Malliavin pour les processus avec sauts et leur intérêt dans les applications en mathématiques financières [20], [31], particulièrement pour le processus de Lévy de saut pur, ce qui est utilisé dans la modélisation financière pour bien décrire les données empiriques et aussi effectuer des calculs analytiques [22], [43]. Le troisième chapitre a été consacré aux outils de Mesure et gestion des risques, on a présenté d'abord le Comité de Bâle avec ces différents types et leurs missions [12], on a défini le marché financier et son rôle [6], puis on a présenté l'outil de calcul du risque la Value-at-Risk et ses modèles développés [13], [14], tels que l'Expected Shortfall et l'Average Value at Risk, ensuite on a expliqué le contrat Stop-Loss qui est un outil très important dans la gestion des risques financiers d'une compagnie d'assurance [26]. Dans le dernier chapitre on a modélisé un processus de perte cumulée, en utilisant la formule d'intégration par parties basée sur les techniques de calcul de Malliavin-Skorohod pour les processus additifs [45] et on a trouvé des résultats principaux sur les formules de tarification des dérivés de perte cumulée où les arrivées de sinistre sont avec une intensité déterministe ou aléatoire pour calculer les quantités comme $\mathbb{E}(L_T h(L_T))$, ou plus généralement $\mathbb{E}(H(L_T))$ pour les différentes fonctions appropriées h ou H et différents modèles pour le processus de perte cumulée L . Ces quantités sont importantes en assurance et en finance, par exemple ils apparaissent dans le calcul des mesures et gestion de risque l'expected shortfall ou les prix des contrats stop-loss. Les formules données dans ce chapitre généralisent les formules données dans un article récent de Hillairet, Jiao et Réveillac (HJR) [26]. On termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Processus de Sauts

Dans ce chapitre on a étudié les processus de sauts, particulièrement les processus de Poisson composés et les processus de Lévy. Ces Processus de sauts jouent un rôle important dans la mesure et la gestion des risques financiers, car pour mieux modéliser les risques associés aux variations soudaines des prix de marché, et trouver l'évaluation et la couverture des produits dérivés, on utilise des processus à trajectoires discontinues, c-à-d, des processus de sauts. Voir [1], [16],[33], [38] et [39].

1.1 Préliminaires et Notations

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet, où Ω est un ensemble et \mathcal{F} est une σ -algèbre de sous-ensembles de Ω , muni de la filtration naturelle complétée $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. On note respectivement \mathbb{E} et \mathbb{V} , l'espérance et la variance associées à \mathbb{P} .

On Note \mathcal{B} et \mathcal{B}_0 les σ -algèbre des ensembles de Borel de \mathbb{R}^d et \mathbb{R}_0^d respectivement, sachant que \mathbb{R}^d est l'espace euclidien de dimension d , ses élément sont des vecteurs colonnes $x = (x_i)_{i=1,\dots,d}$ avec d composantes réelles et l'ensemble $\mathbb{R}_0^d := \mathbb{R}^d - \{0\}$.

On définit $\Theta := [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, et on dénote par $\theta = (s, x)$ les éléments de Θ . En conséquence, $d\theta = (ds, dx)$. On définit l'ensemble des séquences finies ou infinies de paires $\theta_i = (s_i, x_i) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. En plus, on définit $\Theta_{\infty,0} := [0, \infty) \times \mathbb{R}_0^d$ et $\Theta_{T,0} := [0, T] \times \mathbb{R}_0^d$.

1.2 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est très utilisé pour modéliser des temps d'arrivée aléatoires, par exemple arrivée de sinistres, de clients, etc. Voir [38].

Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que X est un processus *càdlàg*, si X a des trajectoires continues à droite et admettant des limites à gauche. .

Définition 1.2.1 *Un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage d'intensité λ qui compte le nombre de temps d'arrivées aléatoires $T_n, n \geq 1$ qui se produisent entre 0 et t . On denote $T_0 = 0$. Donc, on a $\forall t \geq 0$,*

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

où les variables aléatoires $T_n - T_{n-1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*) de loi exponentielle de paramètre λ . Notons qu'on peut écrire

$$T_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$$

avec $(\tau_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre λ . Voir [16], [39].

Proposition 1.2.1 *Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson. Alors :*

1. *Pour tout $t > 0$, N_t est presque sûrement fini.*
2. *Les trajectoires de N_t sont continues à droite avec une limite à gauche (càdlàg).*
3. *Les trajectoires de N_t sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille égale à 1.*
4. *Pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1$.*
5. *Pour tout $t \geq 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt avec fonction de probabilité*

$$\mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

En particulier on a $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = \mathbb{V}[N_t]$.

6. *La fonction caractéristique de N_t est donnée par*

$$\mathbb{E}[e^{iuN_t}] = \exp\{\lambda t (e^{iu} - 1)\}, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

7. *Le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.*

8. Les accroissements de N_t sont homogènes c-a-d pour tout $t > s$, $N_t - N_s$ a la même distribution que N_{t-s} .

Pour plus de détails voir [16], [38].

1.2.1 Processus de Poisson Compensés

On définit la version «centrée» du processus de Poisson N_t par

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$$

Sachant que la fonction caractéristique de \tilde{N}_t est

$$\Phi_{\tilde{N}_t}(z) = \exp[\lambda t (e^{iz} - 1 - iz)], \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

comme \tilde{N}_t est à accroissements indépendants car N_t est un processus de Poisson, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t | N_s, s < t] &= \mathbb{E}[N_t - N_s + N_s | N_s] \\ &= \mathbb{E}[N_t - N_s] + N_s \\ &= \lambda(t - s) + N_s \end{aligned}$$

Donc \tilde{N}_t est une martingale, car $\forall t > s$ on a $\mathbb{E}[\tilde{N}_t | \tilde{N}_s, s \leq t] = \tilde{N}_s$.

Le processus $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ est appelé **processus de Poisson compensé** et l'expression déterministe $(\lambda t)_{t \geq 0}$ est dite **le compensateur** de $(N_t)_{t \geq 0}$. Pour plus de détails sur cette sous-section voir [1], [16].

1.2.2 Mesures Aléatoires de Poisson

Un processus de Poisson est un processus de comptage qui permet de définir une mesure aléatoire de Poisson M sur $[0, \infty[$ pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^+$ comme la mesure aléatoire à valeur entière suivante :

$$M(\omega, A) = \#\{i \geq 1, T_i(\omega) \in A\} \tag{1.1}$$

où la mesure $M(\omega, \cdot)$ dépend de ω , qui est une mesure aléatoire à valeur entière positive. L'intensité λ du processus de Poisson détermine la valeur moyenne de la mesure aléatoire M :

$$\mathbb{E}[M(A)] = \lambda|A|$$

où $|A|$ denote la mesure de Lebesgue de A , et donc M est appelée la mesure de saut aléatoire associée au processus de Poisson N , voir [16],[33] et [38].

On peut exprimer le processus de Poisson en termes de mesure aléatoire M de la manière suivante :

$$N_t(\omega) = M(\omega, [0, t]) = \int_{[0, t]} M(\omega, ds)$$

Pour un processus de Poisson compensé \tilde{N}_t , la mesure aléatoire est définie par

$$\tilde{M}_t(\omega, A) = M(\omega, A) - \int_A \lambda dt = M(\omega, A) - \lambda|A|$$

où $|A| = \int_A dx$ est la mesure de Lebesgue de A , et $\tilde{M}(A)$ vérifie que :

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(A)] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[\tilde{M}(A)] = \lambda|A|.$$

Corollaire 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité, on peut étendre la construction de M définie en (1.1) à une mesure aléatoire de Poisson sur \mathbb{R}^d où on remplace $A \subset \mathbb{R}^+$ par un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ et la mesure de Lebesgue $|\cdot|$ par une mesure de Radon μ (positive) sur (E, ξ) :*

$$\begin{aligned} M : \Omega \times \xi &\rightarrow \mathbb{N} \\ (\omega, A) &\rightarrow M(\omega, A) \end{aligned}$$

voir [1], [16]

1.2.3 Mesure Aléatoire de Poisson Compensée

La mesure aléatoire de Poisson compensé \tilde{M} est défini par :

$$\tilde{M}(A) = M(A) - \mu(A)$$

où M est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité μ définie dans la section précédente et pour tous les ensembles compacts disjoints $A_1, \dots, A_n \in \xi$, les variables $\tilde{M}(A_1), \dots, \tilde{M}(A_n)$ sont indépendantes et vérifient

$$\mathbb{E}[\tilde{M}(A_i)] = 0 \quad \mathbb{V}[\tilde{M}(A_i)] = \mu(A_i).$$

Pour plus de détails voir [16].

1.2.4 Intégrale par Rapport à une Mesure Aléatoire de Poisson

On considère une mesure aléatoire de Poisson M sur $\Theta_{T,0}$, elle peut être décrite comme la mesure de comptage associée à une configuration aléatoire des points $(T_n, X_n) \in \Theta_{T,0}$

$$M = \sum_{n \geq 1} \delta_{(T_n, X_n)}$$

où chaque point $(T_n(\omega), X_n(\omega)) \in \Theta_{T,0}$ correspond à une observation faite au temps T_n et décrite par une variable aléatoire $X_n(\omega) \in \mathbb{R}_0^d$. On dira que M est une mesure aléatoire de Poisson adaptée à \mathcal{F}_t si $(T_n)_{n \geq 1}$ sont des temps aléatoires non anticipés et X_n est \mathcal{F}_{T_n} -mesurable.

On prend comme exemple simple la fonction mesurable de la forme

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

où $A_i \in \mathcal{B}(\Theta_{T,0})$ sont des ensembles mesurables disjoints et $a_i \in \mathbb{R}^+$, ces fonction sont parfois appelée fonctions simples. L'intégrale de fonction simple par rapport à la mesure M est définie par

$$M(f) = \sum_{i=1}^n a_i M(A_i)$$

où $M(f)$ est une variable aléatoire d'espérance :

$$\mathbb{E}[M(f)] = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

Après avoir défini l'intégrale pour des fonctions simples, on l'étend à toute fonction mesurable positive $f : \Theta_{T,0} \rightarrow [0, \infty[$, on définit $M(f) = \lim M(f_n)$ où $f_n \uparrow f$ est une séquence de fonctions simples. Par le théorème de convergence monotone, $M(f)$ est une variable aléatoire avec des valeurs dans $[0, \infty \cup \{\infty\}]$ et $\mathbb{E}[M(f)] = \mu(A)$. Pour une fonction mesurable à valeur réelle $f : \Theta_{T,0} \rightarrow \mathbb{R}$, on peut la décomposer en sa partie positive et négative c-a-d $f = f_+ - f_-$. Alors si f vérifie

$$\mu(|f|) = \int_{\Theta_{T,0}} |f(\theta)| \mu(d\theta) < \infty \quad (1.2)$$

alors l'espérance des variables aléatoires positives $M(f_+)$, $M(f_-)$ est finie

$$\mathbb{E}[M(f_+)] = \mu(f_+) \leq \mu(|f|) < \infty$$

En particulier $M(f_+)$, $M(f_-)$ sont presque sûrement finies donc on peut définir

$$M(f) := M(f_+) - M(f_-)$$

et $M(f)$ ainsi définie est une variable aléatoire d'espérance :

$$\mathbb{E}[M(f)] = \mu(f) = \int_{\Theta_{T,0}} f(\theta) \mu(d\theta) < \infty.$$

Si on intègre f par rapport à M jusqu'au temps t , c'est-à-dire restreindre l'intégrale à $\Theta_{T,0}$ elle donne un processus stochastique adapté à \mathcal{F}_t :

$$Y_t = \int_{\Theta_{T,0}} f(\theta) M(d\theta) = \sum_{\{n, T_n \in [0, t]\}} f(T_n, X_n)$$

On peut définir les intégrales de Poisson compensées de la mesure aléatoire compensée :

$$\tilde{M} = M - \mu$$

où M est une mesure aléatoire de Poisson adaptée à \mathcal{F}_t et $f : \Theta_{T,0} \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant la formule (1.2), par :

$$\begin{aligned}
Y_t &= \int_{\Theta_{T,0}} f(\theta) \tilde{M}(d\theta) \\
&= \int_{\Theta_{T,0}} f(\theta) M(d\theta) - \int_{\Theta_{T,0}} f(\theta) \mu(d\theta).
\end{aligned}$$

Pour plus de détails voir [16] ou [33].

1.3 Processus de Poisson composé

Le processus de Poisson n'est pas utilisé pour modéliser les cours d'actifs car la condition que la taille est toujours égale à 1, n'est pas réaliste [1]. C'est pour ça, on va définir le processus de Poisson composé :

Définition 1.3.1 *Un processus de Poisson composé d'intensité $\lambda > 0$ et de loi de saut f est un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ défini par :*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i,$$

où les tailles des sauts $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variable *i.i.d* à valeurs dans \mathbb{R}^d de loi f et N_t est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$, voir [16], [38] et [33].

Dans un autre sens, un processus de Poisson composé est un processus constant par morceaux qui saute aux instants de sauts d'un processus de Poisson standard, et dont les tailles de sauts sont des variables *i.i.d* d'une loi donnée. Le processus de Poisson peut être vu comme un processus de Poisson composé sur $[0, \infty[$ tel que $Z \equiv 1$. Citons quelques exemples de phénomènes susceptibles d'être décrits par des processus de Poisson composés, voir [38] :

- Assurance-sinistre : à chaque sinistre, on associe un coût de réparation des dégâts.
- Arrivées d'avions dans un aéroport : chaque avion transporte un certain nombre de passagers.
- Arrivées de clients aux caisses d'un supermarché : chaque client dépense une certaine somme d'argent.
- Trafic routier : à chaque accident correspond un certain nombre de personnes blessées.

Le processus de Poisson composé X_t à valeurs à \mathbb{R}^d est clairement un processus càdlàg et constant par morceaux, et sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\Phi_{X_t}(u) = \exp \left\{ \lambda t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i(u,y)} - 1) f(dy) \right\}, \forall u \in \mathbb{R}^d$$

1.4 Processus de Lévy

Définition 1.4.1 *Un processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$ prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^d est un processus de Lévy si les conditions suivantes sont remplies, voir [16], [39] :*

1. *Nul à l'origine, c'est-à-dire $X_0 = 0$ presque sûrement.*
2. *Accroissements indépendants, c-à-d, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les vecteurs aléatoires $\{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}; 1 \leq i \leq n-1\}$ sont indépendants.*
3. *Accroissements stationnaires, c-à-d, la loi de $X_{s+t} - X_s$ ne dépend pas de s .*
4. *Le processus X est stochastiquement continu : pour tout $c > 0$ et $t \geq 0$ fixé, et pour $\delta \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}(\|X_{t+\delta} - X_t\| > c) = 0.$$

5. *Le processus est un processus càdlàg presque sûrement.*

La fonction caractéristique d'un processus de Lévy X_t a la représentation de Lévy – Khintchine suivante :

$$\mathbb{E}[\exp(i(u, X_t))] = \exp(t\psi(u)), \quad u \in \mathbb{R}^d$$

où $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue, appelée exposant caractéristique de X , voir [38].

Théorème 1.4.1 Formule de Lévy-Khintchine pour les processus de Lévy

Soit X_t un processus de Lévy. Alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}^d$, une matrice $\Sigma^2 \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et une mesure de Lévy ν tels que $\forall u \in \mathbb{R}^d, \forall t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[e^{i(u, X_t)}] = \exp \left(t \left(i(\gamma, u) - \frac{1}{2} (u, \Sigma^2 u) + \int_{\mathbb{R}_0^d} (e^{i(u,y)} - 1 - i(u, y) \mathbb{1}_{\{|z| \leq 1\}}) \nu(dy) \right) \right).$$

On appelle (γ, Σ^2, ν) le triplet générateur de X_t , voir [38]. On rappelle que ν est une mesure de Lévy de X si c'est une mesure positive nulle à l'origine et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge \|z\|^2) \nu_t(dz) < \infty.$$

Définition 1.4.2 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy dans \mathbb{R}^d . La mesure ν sur \mathbb{R}^d est définie par :

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#\{t : (t, \Delta X_t) \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}$$

et est appelée la mesure de Lévy de X . $\nu(A)$ est le nombre attendu par unité de temps et de sauts dont la taille appartient à A où $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$, voir [16].

Exemple 1.4.1 Un processus de Poisson $N = \{N_t, t \geq 0\}$ a valeurs dans \mathbb{R} et d'intensité λ est un processus de Lévy avec un triplet caractéristique $(0, 0, \nu)$ avec $\nu = \lambda t$, voir [33].

Exemple 1.4.2 Le processus de Poisson composé $\{X_t, t \geq 0\}$ avec une intensité de saut $\lambda > 0$ et une distribution de taille de saut f définie dans la section 1.3 est un processus de Lévy avec triplet caractéristique $(0, 0, \nu)$ avec $\nu = \lambda f$, voir [33].

Chapitre 2

Calculs de Malliavin pour les Processus des Sauts

Le calcul de Malliavin est un calcul différentiel infini-dimensionnel (calcul différentiel mais sur un espace de dimension infinie) ou, en d'autres termes, un calcul des variations stochastique. Le calcul de Malliavin suscite beaucoup d'intérêt depuis quelques années, et les premiers travaux remontent à l'année 1976, par Paul Malliavin, qui a publié "Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators".

Parmi les raisons de l'intérêt pour le calcul de Malliavin, la portée des applications en mathématiques financières, particulièrement aux modèles basés sur le mouvement brownien. Mais des données empiriques ont montré les limites des modèles financiers browniens, cela a suscité un regain d'intérêt pour les processus avec saut, par exemple le processus de Lévy, qui a un essor important dans les modèles du portefeuille d'une compagnie d'assurances, voir [37]. Pour cela, dans ce chapitre on explique les techniques des calculs de Malliavin pour les processus avec sauts, plus particulièrement pour les processus de Lévy de saut pur. Pour plus de détails voir [20],[21], [31],[34] et [39].

2.1 Processus de Lévy de saut pur

Soit $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité, et $X = (X_t; t \geq 0)$ un processus de Lévy à valeurs à \mathbb{R}^d . Pour simplifier, dans ce chapitre on prend $d = 1$, et de même pour \mathcal{B} , \mathcal{B}_0 , Θ , $\Theta_{\infty,0}$ et $\Theta_{T,0}$. On définit la mesure de saut compensé \tilde{N} associée au processus de Lévy $X = \{X_t, t \geq 0\}$, qu'on appelle aussi mesure aléatoire de Poisson compensée :

$$\tilde{N}(dt, dz) := N(dt, dz) - \nu(dz) dt$$

où $\nu = \nu(dz)$, $z \in \mathbb{R}_0$, est une mesure de Lévy \mathcal{B}_0 et N la mesure aléatoire de Poisson associée au processus de Lévy $X = \{X_t, t \geq 0\}$.

Théorème 2.1.1 *La décomposition de Lévy-Itô* Soit X un processus de Lévy. Alors pour un processus standard de Wiener (mouvement brownien) $W = W(t)_{t \geq 0}$ ($W(0) = 0$), $X = (X_t; t \geq 0)$ admet la représentation intégrale suivante :

$$X(t) = \alpha t + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{|z| < 1} z \tilde{N}(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(ds, dz) \quad (2.1)$$

pour certaines constantes $\alpha, \sigma \in \mathbb{R}$. Voir [20] ou [39].

En particulier, on peut voir que si le processus de Lévy a des trajectoires continues alors il est de la forme

$$X(t) = \alpha t + \sigma W(t), \quad t \geq 0.$$

On peut prouver que si

$$\mathbb{E}[|X(t)|^p] < \infty, \quad \text{pour certains } p \geq 1,$$

alors

$$\int_{|z| \geq 1} |z|^p \nu(dz) < \infty,$$

voir [39]. En particulier, si on suppose que

$$\mathbb{E}[X^2(t)] < \infty, \quad t \geq 0,$$

alors on a

$$\int_{|z| \geq 1} |z|^2 \nu(dz) < \infty,$$

et la représentation (2.1) apparaît comme

$$X(t) = \alpha t + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} z \tilde{N}(ds, dz), \quad (2.2)$$

où $a = \alpha + \int_{|z| \geq 1} zv(dz)$. On appelle processus de Lévy de saut pur, le processus de Lévy du type ci-dessus avec $\sigma = 0$.

2.2 Extension Chaotiques de Wiener – Itô

Dans cette section, on explique qu'il est possible d'obtenir une extension du chaos aux processus de Lévy à saut pur $X = (X_t; t \geq 0)$, où $a = \sigma = 0$ en (2.2), voir [20], [31] et [34]. Cependant, dans ce cas, les intégrales itérées correspondantes doivent être prises par rapport à la mesure de Poisson compensée, associée à X :

$$X(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} z \tilde{N}(dt, dz)$$

et non par rapport à X lui-même.

2.2.1 Intégrales Itérées de Itô

Soit $L^2((\eta \times \nu)^n) = L^2([0, T] \times \mathbb{R}_0^n)$ l'espace des fonctions f réelles déterministes telles que :

$$\|f\|_{L^2((\eta \times \nu)^n)} = \left(\int_{([0, T] \times \mathbb{R}_0)^n} f^2(\theta_1, \dots, \theta_n) dt_1 \nu(dz_1) \dots dt_n \nu(dz_n) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

où $\eta(dt) = dt$ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, T]$.

La symétrisation \tilde{f} de f est défini par

$$\tilde{f}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma_1}, z_{\sigma_1}, \dots, t_{\sigma_n}, z_{\sigma_n}),$$

où la symétrisation est sur les n paires $\theta_1 = (t_1, z_1), \dots, \theta_n = (t_n, z_n)$ et non sur les $2n$ variables $t_1, z_1, \dots, t_n, z_n$, et la somme étant prise sur toutes les permutations $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ de $\{1, 2, \dots, n\}$. Une fonction $f \in L^2((\eta \times \nu)^n)$ est appelée symétrique si $f = \tilde{f}$. On note l'espace de toutes les fonctions symétriques dans $L^2((\eta \times \nu)^n)$ par $\tilde{L}^2((\eta \times \nu)^n)$.

On définit

$$G_n := \{(\theta_1, \dots, \theta_n) : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T, z_i \in \mathbb{R}_0, i = 1, \dots, n\}$$

et $L^2(G_n)$, l'ensemble des fonctions réelles g sur G_n , telles que

$$\|g\|_{L^2(G_n)} := \left(\int_{G_n} g^2(\theta_1, \dots, \theta_n) dt_1 \nu(dz_1) \dots dt_n \nu(dz_n) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

pour $f \in \tilde{L}^2((\eta \times \nu)^n)$. On a $f \mathbf{1}_{G_n} \in L^2(G_n)$, voir [20], et

$$\|f\|_{L^2((\eta \times \nu)^n)} = n! \|f\|_{L^2(G_n)}.$$

Définition 2.2.1 *L'intégrale itérée de n fois $J_n(g)$ pour tout $g \in L^2(G_n)$ est la variable aléatoire dans $L^2(P)$ (l'espace des variables aléatoires carrés intégrables) définie comme suit :*

$$J_n(g) := \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \dots \int_0^{t_2^-} \int_{\mathbb{R}_0} g(\theta_1, \dots, \theta_n) \tilde{N}(d\theta_1) \dots \tilde{N}(d\theta_n).$$

En particulier on pose $J_0(g) = g$ pour tout $g \in \mathbb{R}$.

Si $f \in \tilde{L}^2((\eta \times \nu)^n)$, on défini aussi

$$I_n(f) := \int_{([0,T] \times \mathbb{R})^n} f(\theta_1, \dots, \theta_n) \tilde{N}^{\otimes n}(d\theta) := n! J_n(g)$$

où $\tilde{N}^{\otimes n}(d\theta) = \tilde{N}^{\otimes n}(dt, dz) = \tilde{N}(dt_1, dz_1) \cdots \tilde{N}(dt_n, dz_n)$. On appelle aussi $I_n(f)$ l'intégrale itérée de n fois de f .

Pour tout $f \in \tilde{L}^2((\eta \times \nu)^n)$ et $g \in \tilde{L}^2((\eta \times \nu)^m)$, on a les relations suivantes :

$$\mathbb{E}[I_m(g) I_n(f)] = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ (g, f)_{L^2((\eta \times \nu)^n)}, & n = m \end{cases} \quad (n, m = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

où

$$(g, f)_{L^2((\eta \times \nu)^n)} := \int_{([0,T] \times \mathbb{R}_0)^n} g(\theta_1, \dots, \theta_n) f(\theta_1, \dots, \theta_n) dt_1 \nu(dz_1) \dots dt_n \nu(dz_n).$$

Pour plus de détails voir [20].

2.2.2 L'extension du Chaos de Wiener – Itô

Dans cette sous section, on peut maintenant formuler l'extension du chaos par rapport à la mesure aléatoire de Poisson associée au processus de Lévy $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Voir [20], [31].

Théorème 2.2.1 *Extension du chaos de Wiener – Ito pour les mesures aléatoires de Poisson.* Soit $F \in L^2(P)$ une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable. Alors F admet la représentation

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

avec une séquence unique d'éléments $f_n \in \tilde{L}^2((\eta \times \nu)^n)$, $n = 1, 2, \dots$

Ici, on définit $I_0(f_0) := f_0$ pour les valeurs constantes $f_0 \in \mathbb{R}$. De plus, on a

$$\|F\|_{L^2(P)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|_{L^2((\eta \times \nu)^n)}^2. \quad (2.4)$$

Preuve Par le théorème 9.10 de représentation d'Itô dans [20], il existe un processus prévisible $\psi_1(\theta_1)$, $\theta_1 \in \Theta_{T,0}$ tel que

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_{\Theta_{T,0}} \psi_1(\theta_1) \tilde{N}(d\theta_1),$$

où

$$\|F\|_{L^2(P)}^2 = (\mathbb{E}[F])^2 + \mathbb{E} \left[\int_{\Theta_{T,0}} \psi_1^2(\theta_1) dt_1 \nu(dz_1) \right] < \infty.$$

Par conséquent pour presque tout $\theta_1 \in \Theta_{T,0}$, il existe un processus prévisible $\psi_2(\theta_1, \theta_2)$, $(\theta_2) \in \Theta_{t_1,0}$, tel que

$$\psi(\theta_1) = \mathbb{E}[\psi(\theta_1)] + \int_{\Theta_{T,0}} \psi_2(\theta_1, \theta_2) \tilde{N}(d\theta_2).$$

Cela donne

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_{\Theta_{T,0}} \psi_1(\theta_1) \tilde{N}(d\theta_1) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} \int_0^{t_1^-} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_2(\theta_1, \theta_2) \tilde{N}(d\theta_2) \tilde{N}(d\theta_1).$$

On définit

$$g_0 := \mathbb{E}[F]$$

et

$$g_1(\theta_1) := \mathbb{E}[\psi_1(\theta_1)], \quad \theta_1 \in \Theta_{T,0}$$

On fait la même chose pour θ_2 , cela donne

$$F = \sum_{n=0}^{k-1} J(g_n) + \int_{G_K} \int_{\mathbb{R}_0} \psi_k(\theta_1, \dots, \theta_k) \tilde{N}^{\otimes k}(d\theta).$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 1.10 dans [20], on peut voir que le terme résiduel ci-dessus s'annule, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}_0} \psi_k \tilde{N}^{\otimes k}(d\theta) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

Avec la convergence en $L^2(P)$. Cela donne l'extension du chaos

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(g_n).$$

dans $L^2(P)$ avec $g_n \in L^2(P)$, $n = 1, 2, \dots$

On étend la fonction g_n sur l'ensemble $([0, T] \times \mathbb{R}_0)^n$ en mettant $g_n := 0$ sur $([0, T] \times \mathbb{R}_0)^n \setminus G_n$ et défini par $f_n := \tilde{g}_n$, alors

$$I_n(f_n) = n!J_n(f_n) = n!J_n(\tilde{g}_n) = J_n(g_n)$$

Ainsi on obtient

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n).$$

De plus, l'isométrie de la formule (2.4) est obtenue directement à partir de (2.3). \square

2.3 Opérateurs de Malliavin et Skorohod

2.3.1 L'intégrale de Skorohod

Définition 2.3.1 Soit $X = \{X(\theta), \theta \in \Theta_{T,0}\}$ un processus stochastique tel que $X(\theta)$ est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable pour tout $\theta \in \Theta_{T,0}$ et $\mathbb{E}[X^2(\theta)] < \infty$. Alors pour chaque $\theta \in \Theta_{T,0}$ on a la décomposition en chaos

$$X(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, \theta))$$

où

$$f_n(\cdot, \theta) \in \tilde{L}^2((\eta \times \nu)^n)$$

Soit $\tilde{f}_n(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_{n+1})$ la symétrisation de $f_n(\theta_1, \dots, \theta_n, \theta)$ en fonction des $n + 1$ paires $\theta_1, \dots, \theta_n, \theta = \theta_{n+1}$, et tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \left\| \tilde{f}_n \right\|_{L^2((\eta \times \nu)^{n+1})}^2 < \infty.$$

On définit alors l'intégrale de Skorohod $\delta(X)$ de X par rapport à \tilde{N} , avec $X \in \text{Dom}(\delta)$ par :

$$\delta(X) = \int_{\Theta_{T,0}} X(\theta) \tilde{N}(\delta t, dz) := \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n).$$

pour plus de détails, voir [20], [21], [28] et [29].

Théorème 2.3.1 *L'intégrale de Skorohod comme extension de l'Intégral d'Itô*

1. Soit $X = \{X(\theta), \theta \in \Theta_{T,0}\}$ un processus prévisible tel que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0} X^2(\theta) \nu(dz) dt \right] < \infty.$$

Alors X est à la fois, au sens d'Itô et de Skorohod, intégrable par rapport à \tilde{N} et

$$\int_{\Theta_{T,0}} X(\theta) \tilde{N}(d\theta) = \int_{\Theta_{T,0}} X(\theta) \tilde{N}(\delta t, dz).$$

2. Soit $Y = Y(t), t \in [0, T]$, un processus prévisible tel que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T Y^2(t) dt \right] < \infty$$

Alors Y est à la fois d'Itô et de Skorohod, elle est intégrable par rapport à X et

$$\int_{\Theta_{T,0}} Y(t) \delta X(dt) = \int_{\Theta_{T,0}} Y(t) dX(t).$$

Voir [20] pour plus de détails sur ce Théorème.

2.3.2 La Dérivée de Malliavin

Définition 2.3.2 Soit $\mathbb{D}_{1,2}$ l'espace stochastique de Sobolev constitué de toutes les variables aléatoires mesurables $F \in L^2(P)$ avec la décomposition en chaos

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \quad f_n \in \tilde{L}^2((\eta \times \nu)^n),$$

satisfaisant le critère de convergence

$$\|F\|_{\mathbb{D}_{1,2}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} nn! \|f_n\|_{L^2((\eta \times \nu)^n)}^2 < \infty.$$

En comparant la condition sus-mentionnée dans (2.4), on voit que $\mathbb{D}_{1,2}$ est strictement contenu dans l'espace de toutes les variables aléatoires \mathcal{F}_T -mesurable dans $L^2(P)$, voir [20], [21] et [34].

Définition 2.3.3 On définit l'opérateur D :

$$D_\theta : F \in \mathbb{D}_{1,2} \subset L^2(P) \longrightarrow DF \in L^2(\eta \times \nu \times P)$$

par

$$D_\theta F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, \theta)), \quad \theta \in \Theta_{T,0}$$

avec $I_{n-1}(f_n(\cdot, \theta))$ que c'est que l'intégrale itérée $(n-1)$ de f_n . On appelle $D_\theta F$ la dérivé de Malliavin de F en θ , voir [20], [21].

Exemple 2.3.1 Si $F = \int_{\Theta_{T,0}} f(\theta) \tilde{N}(d\theta)$, et si la fonction $f \in L^2(\eta \times \nu)$ c'est déterministe, alors $F = I_1(f)$ et

$$D_\theta F = I_0(f_1(\cdot, \theta)) = f(\theta).$$

En particulier, si $F = X(t) := \int_{\Theta_{T,0}} z \tilde{N}(d\theta)$, alors $D_\theta F = z$.

Théorème 2.3.2 Formule de dualité Soit $X(\theta) = X(t, z), t \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}$ un processus intégrable de Skorohod et $F \in \mathbb{D}_{1,2}$. Alors la relation de dualité est

$$\mathbb{E}[\delta(X)F] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} X(\theta) D_\theta F \nu(dz) dt$$

Preuve Pour la démonstration de ce théorème voir [10], [18], [20], [34], et [36].

Théorème 2.3.3 *Intégration par parties* Soit $X(\theta) = X(t, z)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $z \in \mathbb{R}$ un processus stochastique intégrable au sens de Skorohod et $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ tel que le produit $X(\theta) \cdot (F + D_\infty F)$ est intégrable au sens de Skorohod. Alors

$$\begin{aligned} & F \int_0^T \int_{\mathbb{R}} X(\theta) \tilde{N}(\delta t, dz) \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} X(\theta) (F + D_\theta F) \tilde{N}(\delta t, dz) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} X(\theta) D_\theta F \nu(dz) dt. \end{aligned}$$

Preuve Soit $\mathbb{D}_{1,2}^\varepsilon$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'exponentielles, on suppose d'abord que $F \in \mathbb{D}_{1,2}^\varepsilon$, et $G \in \mathbb{D}_{1,2}^\varepsilon$. Alors, on obtient par le théorème 2.3.2 et le théorème 12.7 de [20] :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[G \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} F X(\theta) \tilde{N}(\delta t, dz) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} F X(\theta) D_\theta G \nu(dz) dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[G F \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} X(\theta) \tilde{N}(\delta t, dz) \right] - \mathbb{E} \left[G \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} X(\theta) D_\theta F \nu(dz) dt \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[G \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} X(\theta) D_\theta F \tilde{N}(\delta t, dz) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[G \left(F \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} X(\theta) \tilde{N}(\delta t, dz) - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} X(\theta) D_\theta F \nu(dz) dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} X(\theta) D_\theta F \tilde{N}(\delta t, dz) \right) \right]. \end{aligned}$$

La preuve suit alors par un argument de densité appliqué à F et G . \square

Chapitre 3

Les Outils de Mesure et Gestion des Risques

La mesure et gestion de risque est devenue un enjeu majeur dans le monde de la finance. Les gestionnaires de risque et les économistes visent à résoudre la problématique de détermination du risque lié à la variation des prix du marché financier. On s'intéresse dans ce chapitre à introduire des techniques fortement recommandées aux gestionnaires et mesures de risque dans les institutions financières et les compagnies d'assurance.

Apparue pour la première fois dans les années 1990, la Value-at-Risk VaR a été introduite par la banque JP Morgan suite aux différentes crises financières que le monde a subi depuis ce temps là. Elle constitue un modèle de mesure de risque très répandu dans le monde de la finance et l'assurance. La VaR est généralement accompagnée par l'Expected Shortfall qui est égal à l'Average Value at Risk dans le cas continu.

3.1 Evaluation de Risque

La notion de risque est difficile à appréhender. Généralement Il y a un risque quand il y a incertitude sur l'issue d'une opération, ou d'une autre façon, on peut dire que c'est une contingence indésirable, relativement anodine et peu probable. Le risque est généralement anodin, mais tout de même suffisamment nuisible pour être indésirable. En ce sens il se distingue notamment du danger qui suppose la possibilité d'un dommage grave voir [7].

Un risque est une contingence peu probable, ce qui constitue une autre différence par rapport au danger. On parle en effet de danger lorsque la probabilité d'occurrence et les conséquences sont importantes, tandis que le risque existe dès lors que sa probabilité d'oc-

currency n'est pas nulle. L'appréciation de ces différents critères est hautement subjective, ce qui peut justifier que dans les domaines scientifiques et techniques on recherche une définition quantifiable et rigoureuse du risque [7].

Le risque est une notion importante notamment dans les domaines de la finance, des assurances, de la santé, et bien sûr de la gestion, ... Dans le domaine financier, on peut assimiler ce risque à une perte probable de valeur. Chacun désire connaître quel montant il peut perdre, qu'il s'agisse d'un trader de Wall Street, d'une banque ...

3.2 Comité de Bâle

Le Comité de Bâle (ville Suisse) ou Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) vise à assurer la stabilité et la fiabilité du système bancaire et financier à travers l'établissement de standards minimaux en matière de contrôle prudentiel, la diffusion et la promotion des meilleures pratiques bancaires, la surveillance et la promotion de la coopération internationale en matière de contrôle prudentiel [12].

Le Comité de Bâle a été créé fin 1974 par les gouverneurs des banques centrales du G-10 plus le pays hôte (onze pays : Allemagne, Belgique, Canada, Etats-Unis, France, Italie, Japon, Pays-Bas, Royaume-Uni, Suède et Suisse).

Le Comité était initialement appelé le « Comité Cooke », du nom de Peter Cooke, directeur de la Banque d'Angleterre qui avait été un des premiers à proposer sa création et fut son premier président. Pour plus de détails consultez [12].

3.2.1 Les Missions du Comité de Bâle

Les missions de ce comité sont [12] :

- Le renforcement de la sécurité et de la fiabilité du système financier.
- L'établissement de standards minimaux en matière de contrôle prudentiel.
- La diffusion et la promotion des meilleures pratiques bancaires et de surveillance.
- La promotion de la coopération internationale en matière de contrôle prudentiel.

3.2.2 Différents Comités de Bâle

Bâle 1

Fait référence à un ensemble de recommandations publiées en 1988 par le Comité de Bâle, un comité rassemblant les banquiers centraux des pays du G-10 sous l'égide de la Banque des règlements internationaux à Bâle. Ces recommandations, également connues sous le nom d'Accord de Bâle de 1988, visaient à assurer la stabilité du système bancaire international en fixant une limite minimale à la quantité de fonds propres des banques.

Ce minimum a été fixé, en émettant en place un ratio minimal de 8% de fonds propres par rapport à l'ensemble des crédits accordés par les banques. Cela signifie que lorsqu'une banque accorde 1000€ à un client, elle doit immobiliser 80€ de fonds propres et utiliser au maximum 920€ d'autres sources de financement [12].

Bâle 2

Le Nouvel Accord prudentiel de Bâle de 2004, ou « Bâle 2 », visait à mieux évaluer les risques bancaires et à imposer un dispositif de surveillance prudentielle et de transparence [?]. L'Accord de Bâle II repose sur 3 piliers : une exigence minimale en fonds propres (ratio de McDonough), une surveillance par les autorités prudentielles et une discipline de marché [12].

Bâle 3

Les Accords de Bâle 3 publiés le 16 décembre 2010 sont des propositions de réglementation bancaire. La réforme Bâle 3 fait partie des initiatives prises pour renforcer le système financier à la suite de la crise financière de 2007 (« Crise des subprimes »), sous l'impulsion du FSB (Financial Stability Board) et du G20, pour garantir un niveau minimum de capitaux propres, afin d'assurer la solidité financière des banques.

3.3 Marché Financier

Le marché financier est un lieu de financement c-à-d rencontre de l'offre et de la demande des capitaux à long terme, il se caractérise par une composition complexe et par des produits

divers et ceci dans le but de s'adapter aux différents motifs de transactions et aux différents choix des acheteurs et vendeurs. On a :

-**Le marché primaire** : c'est un marché des émissions des valeurs mobilières, il met en présence d'une part les agents économique disposant d'un excédent d'épargne et souhaitant le placer, et d'autre part les opérateurs qui ont des besoins de financement, il crée à ce titre différentes valeurs mobilières. Il s'agit des actions et des obligations voir [6].

-**Le marché secondaire** : la plupart des marchés boursiers, c'est le marché sur lequel sont échangées des valeurs mobilières déjà émise sur le marché primaire. Sur ce marché les investisseurs ayant déjà acheté des titres doivent pouvoir liquider rapidement leur position, dans des conditions de sécurités optimales [6].

3.3.1 Rôle du Marché Financier

Le marché financier joue un rôle important sur le plan économique en permettant à l'état (le trésor public), aux entreprises publiques et semi-publiques ainsi qu'aux sociétés privées de trouver les ressources nécessaires au financement de leurs programmes de développement. Le marché primaire joue un rôle de conciliation des besoins des prêteurs et des emprunteurs, ainsi que la procuration de fonds nouveaux aux agents qui ont besoins de financement par l'émission de titres. Le marché secondaire permet d'assurer la liquidité des titres, d'encaisser la rémunération attachée à un placement et réaliser la croissance externe en acquérant des actions suffisantes pour prendre par dans le capital d'autres entreprises [6].

3.4 Mesure de Risque

Les institutions financières sont soumises à plusieurs types de risques, on donne certains exemples, voir [6], [13] et [27].

Risques de marché : Les risques de marché sont les pertes éventuelles liées aux variations du prix d'une position suite au changement des facteurs déterminant son prix. Par exemple, la volatilité, le cours des actifs financiers et les cours de change ou encore les taux d'intérêts.

Risques de crédit : Les risques de crédit proviennent principalement de deux sources. Premièrement, ils traduisent les risques qu'une contrepartie ne respecte pas ses engagements contractuels (par exemple, une faillite). Deuxièmement, les risques de crédit comprennent les

réductions de valeurs d'instruments financiers émis par des tiers.

Risques opérationnels : Les risques opérationnels comportent l'ensemble des pertes liées à une erreur interne des institutions financières.

Les mesures de risques sont des outils de quantification de risque, elles permettent d'évaluer un niveau de dangerosité d'un risque mais également de comparer les différents risques entre eux et de les classer selon le niveau de dangerosité.

Définition 3.4.1 *Une mesure de risque $\rho(X)$ est une fonction $\rho : B(\Omega, A) \rightarrow \mathbb{R}$ de la v.a X dans \mathbb{R} telle que :*

$$- \rho \text{ est croissante : } X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

$$- \text{ invariante par translation : } \rho(X + a) = \rho(X) + a \quad , \forall a \in \mathbb{R}.$$

D'après cette définition, on peut dire que l'espérance, la variance ou l'écart- type, lorsqu'ils existent, sont des mesures de risque. Une mesure de risque doit pouvoir vérifier un certain nombre de propriétés élémentaires, voir [15] [44].

Définition 3.4.2 *Une mesure de risque $\rho(X)$ est dite cohérente si pour deux variables aléatoires X et Y elle satisfait les propriétés suivantes :*

1. Invariance par transformation

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

2. La sous-additivité

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

3. Homogénéité positive

$$\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X) \quad , \quad \forall \alpha > 0.$$

4. 4. Monotonie

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y).$$

La Valeur en Risque, plus connue sous le nom anglais Value-at-Risk ou VaR, est une mesure de risque très répandue dans le monde de la finance et l'assurance, développée dans les milieux financiers, elle est utilisée généralement comme critère de mesure du risque de marché d'un portefeuille. pour plus de détails voir [4],[15].

3.5 Value at Risk

Un événement important a conduit à son adoption, qui est la publication de la méthode et du système RiskMetrics par la banque américaine JP Morgan en 1993.

La *VaR* est une mesure de risque représentant la perte potentielle maximale que peut subir un portefeuille à un niveau de probabilité préalablement fixé sur une période de temps bien déterminée. Considérons :

-La distribution des profits et des pertes du portefeuille ou de l'actif :

Souvent cette distribution est supposée gaussienne, mais beaucoup d'acteurs financiers utilisent des distributions historiques. La difficulté réside alors dans la taille de l'échantillon historique : s'il est trop petit, les probabilités de pertes élevées sont peu précises, et s'il est trop grand, la cohérence temporelle des résultats est perdue, car on compare des résultats non comparables [13].

-Un seuil de confiance $1 - \alpha$: appelé aussi niveau de confiance, qui permet de contrôler la probabilité que l'on obtienne un rendement supérieur ou égale à la *VaR*, sachant que le paramètre α est compris entre 0 et 1.

-Un horizon temporel T : il correspond au temps pendant lequel le portefeuille va subir les fluctuations du marché donnant lieu à des pertes ou des profits. La *VaR* permet de répondre à l'affirmation suivante : « Nous sommes certains à $1 - \alpha$, que nous n'allons pas perdre plus que la *VaR* en euros sur les T prochains jours ».

Exemple 3.5.1 *Si une banque annonce une VaR quotidienne de 1 million d'euros sur son portefeuille pour un niveau de confiance de 99%, cela implique qu'il y a seulement une chance*

sur 100, sous des conditions normales de marché, que la perte associée à la détention de ce portefeuille sur une journée excède 1 million d'euros [13].

Autrement dit :

La VaR au seuil de confiance de 99% à 1 jour, que l'on notera, $VaR(99\%, 1j)$, est égale à 1 million d'euros signifie qu'un sur cent le portefeuille est susceptible d'enregistrer une perte supérieure à cette somme de 1 million d'euros [13].

Le calcul de la VaR est étroitement lié aux valeurs de la fonction de distribution F_X de X . Ceci nous conduit à examiner de plus près les quantiles de F .

Définition 3.5.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire, de fonction de distribution cumulative $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Pour $\alpha \in (0, 1)$:

$$q_X^+(\alpha) = \inf\{x : F_X(x) > \alpha\}$$

est appelé le **upper α -quantile** de X .

$$q_X^-(\alpha) = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$$

est appelé le **lower α -quantile** de X .

Pour tout

$$q \in [q_X^-(\alpha), q_X^+(\alpha)]$$

est appelé un **α -quantile** de X . Voir [14].

Définition 3.5.2 Pour $\alpha \in (0, 1)$, la **Value at Risk** de X est notée $VaR_\alpha(X)$ de niveau de confiance $1 - \alpha$ est définie par :

$$VaR_\alpha(X) = -q_X^+(\alpha) = -\inf\{x : F_X(x) > \alpha\} \quad (3.1)$$

où X est la valeur actualisée de la position de l'investisseur au temps T . On observe que X désigne le gain d'un investissement et $-X$ dénote sa perte [14].

3.5.1 Utilisation de la Value at Risk

La *VaR* est utilisé aussi bien par les institutions financières et les régulateurs que par les entreprises non financières. Les institutions financières ont été les premières à utiliser cet outil. La *VaR* peut donc être utilisé :

- de façon passive : signaler les risques.

La première utilisation de la *VaR* est par la banque JP Morgan avec un objectif de mesurer un risque agrégé car c'est une mesure de risque simple à interpréter, elle s'exprime sous forme d'un montant maximal de perte c-à-d la déclaration des risques potentiels.

- de façon défensive : contrôle des risques.

L'objectif de cette méthode est d'utiliser la *VaR* pour déterminer des positions limites à ne pas dépasser qui seront imposées aux traders (limites individuelles) ou aux business unités (limites collectives) et elle vise aussi à limiter la prise de risque au-delà d'une limite acceptable.

- de façon active : management des risques.

La *VaR* est utilisée dans l'allocation du capital entre les traders, les business lines, les produits et les institutions, voir [13].

3.5.2 Types de Risques Mesurés par la *VaR*

La *VaR* mesure différents risques financiers, généralement classés en quatre grandes catégories voir [13] :

- Risques de marché :

C'est le risque global de perte financière lié à l'évolution des niveaux ou à la volatilité des prix du marché. Il comprend le risque de taux d'intérêt, de change, de l'action et des prix des matières premières. Toute variation de ces données a un impact sur les positions et les portefeuilles détenus. Il s'agit du principal champ d'utilisation de la *VaR*.

- Risques de liquidité :

C'est le risque de liquidité d'actifs ou de liquidité de financement du fait d'un manque de volume de transactions. C'est le risque de ne pouvoir vendre à son prix un titre financier et il est lié au fait que les banques reçoivent majoritairement des dépôts à court terme de leurs

clients et font des prêts à moyen et long terme. Il peut donc se créer un décalage entre les sommes prêtées et les sommes disponibles car ces dernières peuvent être insuffisantes. Dans ce cas on parle de manque de liquidité.

- Risques de crédit :

Ils traduisent les risques qu'une contrepartie ne satisfait pas ses engagements contractuels, donc il résulte de l'incertitude quant à la possibilité ou la volonté des contreparties ou des clients de remplir leurs obligations. Ainsi, la banque se place dans une situation critique où elle attend le flux de fonds du client ou de la contrepartie sur le marché.

- Risques opérationnels :

Le risque opérationnel correspond aux pertes provenant de processus internes inadéquats ou défaillants, commises par les ressources humaines ou matérielles ou bien d'événements externes, par exemple, défaillances des logiciels, les erreurs de frappe, les fraudes, les défaillances des systèmes d'information, les problèmes liés à la gestion du personnel, les litiges commerciaux, les accidents, les catastrophes naturelles, les incendies, les inondations, les pannes systèmes, etc.

3.5.3 Adaptation de la *VaR* en Assurance

La Value at Risk est utilisée dans le domaine de l'assurance comme outil de mesure de risque car l'activité d'assurance repose sur le concept de transfert de risque moyennant une prime, l'assuré se protège d'un aléa financier. Mesurer le risque assuré s'avère donc inévitable puisque cette information est nécessaire dans le cadre de la tarification pour déterminer les chargements de sécurité à ajouter à la prime pure et dans une approche de solvabilité pour déterminer le niveau des réserves et des fonds propres dont doit disposer l'assureur pour être solvable.

3.6 Les Méthodes de Calcul de la *VaR*

3.6.1 Les Méthodes non Paramétriques

Le principe général des méthodes non paramétriques est l'estimation (prévision) de la Value-at-Risk est que l'on impose a priori aucune distribution paramétrique de pertes et

profits [27].

Simulation Historique

L'approche de simulation historique (HS) d'estimation de la *VaR* est une méthode très simple et très pratique d'estimation des mesures de risque fondée sur la distribution empirique des données historiques de rendements. Formellement, la *VaR* est estimée simplement par lecture directe des fractiles empiriques des rendements passés [27].

Le principe général de cette approche consiste à obtenir une distribution des variations des facteurs de risque du portefeuille à partir des données historiques dans une période de temps donnée. De cette distribution, on peut extraire un quantile qui permet de calculer la *VaR* pour un seuil de confiance donné. Cette méthode est relativement simple mais présente un risque de mesure lié au choix de l'échantillon. Si celui-ci est trop court, on est exposé à un risque lié au fait qu'on n'aura pas suffisamment de données pour estimer correctement la *VaR* à 99% (la variance de l'estimateur sera alors très grande). Si, au contraire, on le choisit trop long, on court le risque que la distribution des facteurs change, ce qui induit un risque sur l'estimation de quantile [9].

Simulation Historique de Bootstrap

La méthode de simulation de Bootstrap permet d'estimer la *VaR* à partir de données simulées par Bootstrap, elle est une amélioration simple de la méthode historique, les simulations dans cette méthode sont effectuées directement sur la base de l'échantillon formé par les données historiques. La procédure consiste à ré-échantillonner les données historiques de rendements avec remise où chaque observation est obtenue par tirage au hasard à partir de l'échantillon original [24],[27].

La méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo consiste à estimer la *VaR* à partir de simulations répétitives d'un grand nombre de fois, les comportements futurs possibles des facteurs de risque selon le modèle stochastique qui est adapté pour les différents facteurs de risque (exemple mouvement brownien géométrique), et en déduire les distributions des facteurs de risque des profits

et des pertes ainsi que les paramètres associés. Cette méthode permet de tester des multiples scénarios stochastiques et inclut notamment les queues de distribution épaisses, et elle convient également à tous les types d'instruments, y compris optionnels [24], [27].

3.6.2 Les Méthodes Semi-Paramétriques

Théorie des Valeurs Extrêmes

Parmi les méthodes semi-paramétriques, on a la Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE), qui est une branche de la Statistique apparue grâce à Fréchet (1927), Fisher et Tippet (1928) et Gnedenko (1943). Elle a été développée par Émil Julius Gumbel (1958) [19], qui s'intéresse aux queues de distribution, c-à-d, elle est concerné par les événements extrêmes qui peuvent survenir au-delà d'un seuil donné et qui représentent un risque réel dans le marché, donc la TVE permet d'optimiser le calcul de la *VaR* pour des niveaux très élevés du seuil de confiance [8]. Il y a deux branches principales de cette théorie : l'approche POT (Peaks-Over-Threshold c-à-d Pic au-dessus du seuil) qui consiste à étudier la distribution des pertes excédentaires au-dessus d'un seuil élevé de confiance et l'approche de Valeur Extrême Généralisée qui s'intéresse à la loi du maximum ou du minimum d'un très grand échantillon [8], [27].

3.6.3 Les Méthodes Paramétriques

La détermination de la *VaR* paramétrique d'un portefeuille d'actifs est donnée à partir d'une loi de distribution paramétrique des rendements des actifs (gains/pertes). Cette méthode suit trois approches d'estimation : Premièrement l'approche univariée ce qui signifie qu'on calcule la *VaR* directement sur le rendement agrégé du portefeuille c-à-d on considère que le rendement est celui d'un actif particulier. Deuxièmement l'approche variance-covariance qui à été introduite par la banque JP Morgan et qui repose sur les corrélations entre les actifs du portefeuille et la distribution des pertes et profits suit la loi normale. Troisièmement l'approche RiskMetrics qui a été développé par la banque JP Morgan au début des années 90, celle ci suppose la normalité des lois de probabilité qui régissent les distributions des variations des prix de marché et aussi les instruments présentant un profil de risque linéaire, elle diffère de l'approche précédente au niveau du calcul de la volatilité des

rendements du portefeuille qui utilise ses valeurs passées ainsi que celles des rendements, cela permet de s'adapter facilement aux changements des conditions de marché [11], [13], [27].

3.7 Average Value at Risk

L'Average Value at Risk $AVaR$ (la valeur à risque moyenne) est une mesure de risque cohérente.

Définition 3.7.1 *L'Average Value at Risk de X de niveau de probabilité α , notée $AVaR_\alpha(X)$ est définie pour tout $s \leq \alpha$ par :*

$$AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_s(X) ds = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha q_X^+(s) ds.$$

voir [14].

3.8 Expected Shortfall

L'Expected Shortfall est une mesure d'évaluation des risques, il est cohérent et quantifie le montant du risque de queue d'un portefeuille d'investissement, il est défini comme la moyenne de toutes les pertes supérieures ou égales à la VaR.

Définition 3.8.1 *L'Expected Shortfall de X de niveau de probabilité α , notée $ES_\alpha(X)$, représente la perte attendue sachant que la VaR est dépassée :*

$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}[-X \mid -X > VaR_\alpha(X)] = -\mathbb{E}[X \mid X \leq -VaR_\alpha(X)].$$

Notons que $ES_\alpha(X)$ est égal à $AVaR_\alpha$ si et seulement si $P[X \leq q_X^+(\alpha)] = \alpha$, ceci est satisfait si la fonction de distribution de X est continue [14].

3.9 Contrat Stop-Loss (Limitation des pertes)

Le contrat Stop-Loss est un outil importante dans la gestion des risques d'une compagnie d'assurance. Elle offre une protection contre les pertes supérieures à une certaine quantité grâce à un réassureur qui joue le rôle de contrepartie [26]. Par exemple, dans un type de

contrat, le réassureur paie une somme d'argent $\Phi(L)$ si la perte L dépasse une certaine quantité K mais avec une quantité maximale M ($K \leq M$), elle est donné par :

$$\Phi(L) = \begin{cases} 0, & \text{si } L \leq K \\ L - K, & \text{si } K < L \leq M \\ M - K, & \text{si } L > M. \end{cases} \quad (3.2)$$

3.10 Application Numérique

Dans cette section on calcule la *VaR* pour l'indice boursier S&P500 avec deux méthodes différentes, la *VaR* Normale (Gaussienne) et la *VaR* TVE (Théorie des Valeurs Extrêmes).

3.10.1 VaR Normale (Gaussienne)

Historiquement, le choix du modèle paramétrique se porte sur la loi Normale. On suppose donc que les rendements du portefeuille X sont issues d'une v.a Gaussienne. Alors, soit F la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ comme moyenne des rendements et σ^2 la variance. On obtient ainsi à partir de l'équation (4.1) de [7] :

$$F\left(\frac{VaR_\alpha(X) - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

où F est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite. Alors la *VaR* normale est définie de la manière suivante :

$$VaR_\alpha(X) = \mu + \sigma F^{-1}(1 - \alpha).$$

3.10.2 VaR TVE (Théorie des Valeurs Extrêmes)

La théorie des valeurs extrêmes permet d'optimiser le calcul de la VaR pour des niveaux très élevés du seuil de confiance. Dans cette méthode on utilise l'approche POT qui consiste à étudier la distribution des pertes excédentaires au-dessus d'un seuil élevé de confiance $1 - \alpha$, en utilisant la distribution de Pareto généralisée *GPD* qui joue un rôle essentiel dans la modélisation des excès.

Définition 3.10.1 *On dit que X est une distribution généralisée de Pareto ou bien GPD, si sa fonction de répartition $G_{\xi, \beta}$ est donnée par :*

$$G_{\xi,\beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\beta}) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

cette distribution est définie pour $1 + \xi \frac{y}{\beta} > 0$. La distribution GPD dépend de deux paramètres : $\beta > 0$ qui est un paramètre d'échelle et $\xi \in \mathbb{R}$ un paramètre de forme, voir [7].

3.10.3 L'indice boursier S&P500

Le S&P500 est un l'indice représentatif du marché financier américain, il est basé sur 500 grandes sociétés cotées en bourses aux États-Unis (NYSE : Le New York Stock Exchange est la plus grande des bourses mondiales, on l'appelle souvent Wall Street. NASDAQ : sigle de National Association of Securities Dealers Automated Quotations est une bourse de valeurs ouverte en 1971, actuellement, elle est la deuxième plus importante sur le marché d'actions des États-Unis, en volume traité, derrière le New York Stock Exchange). Le S&P500 a été créé en 1920 par la société Standard and Poor's, l'une des trois principales sociétés de notation financière, pour substituer le Dow Jones Industrial Average car il est l'indice le plus représentatif du marché boursier américain parce qu'il est composé d'un plus grand nombre de compagnies et que sa valeur tient compte de la capitalisation boursière des 500 compagnies contenues dans l'indice [7].

3.10.4 Codes et Graphes

Les simulations ont été faites par le logiciel libre R. On a utilisé les données de l'indice S&P 500 de 13-05-2019 à 11-05-2020 (252 jours).

Représentation graphique du S&P 500

```
# Importer les packages
library(timeDate)
library(timeSeries)
library(data.table)
library(evir)
library(extRemes)
x=fread(file = file.choose())
SP500=as.timeSeries(x$`Adj Close`)
```

```
plot(SP500,at="auto",lwd=2,main="S&P 500")
```

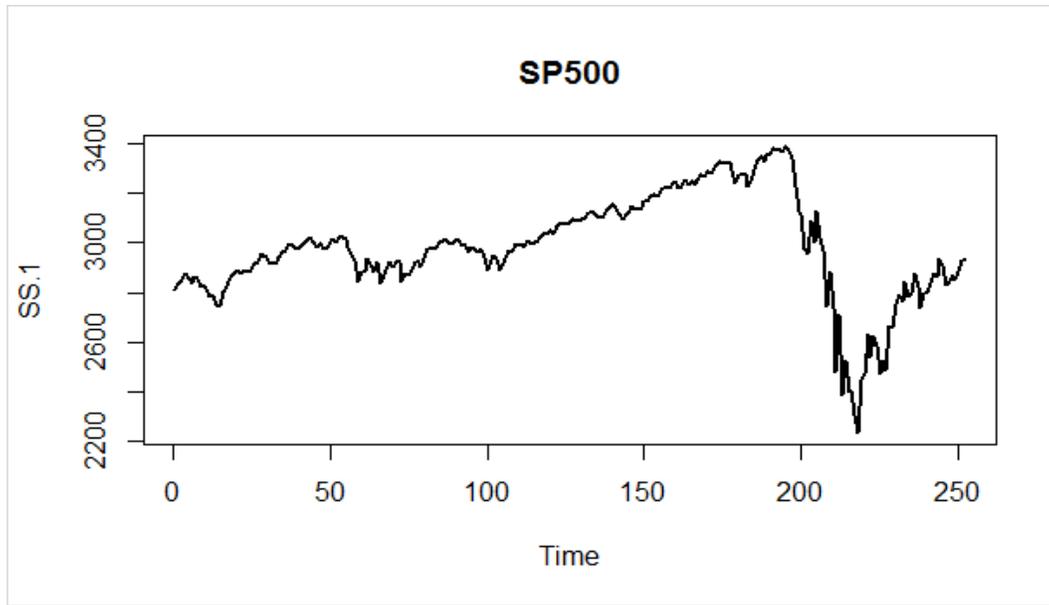


FIGURE 3.1 – Représentation graphique du cours de l'indice boursier S&P500.

Dans la série chronologique de l'indice, on remarque qu'il y a eu une baisse de valeur de celui ci de 200 à 250 jours.

Définition 3.10.2 *Le rendement d'un actif financier (journalier, hebdomadaire, ou mensuel,...) est le gain total procuré par cet actif au cours d'une période donnée. Pour les indices boursiers, le taux de rendement est une mesure de la croissance d'un pays. Il est obtenu en faisant la variation entre l'instant t et $t + 1$, il est définie par la formule suivante :*

$$R_t = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t}$$

avec R_t le rendement de l'indice boursier entre t et $t + 1$ et P_t indique le cours financier à l'instant t , voir [6],[30].

Calcul des Rendements du S&P 500

```
R=c()
for(i in 1 :length(S&P 500)-1){
R[i]=log(SP500[i+1]/S&P 500[i])
}
R
```

```
# Plotter le rendement  
plot(R,type="l",main="Rendement")  
abline(h=0,col=4,lwd=1)  
grid(col="lightgray",lwd=1)
```

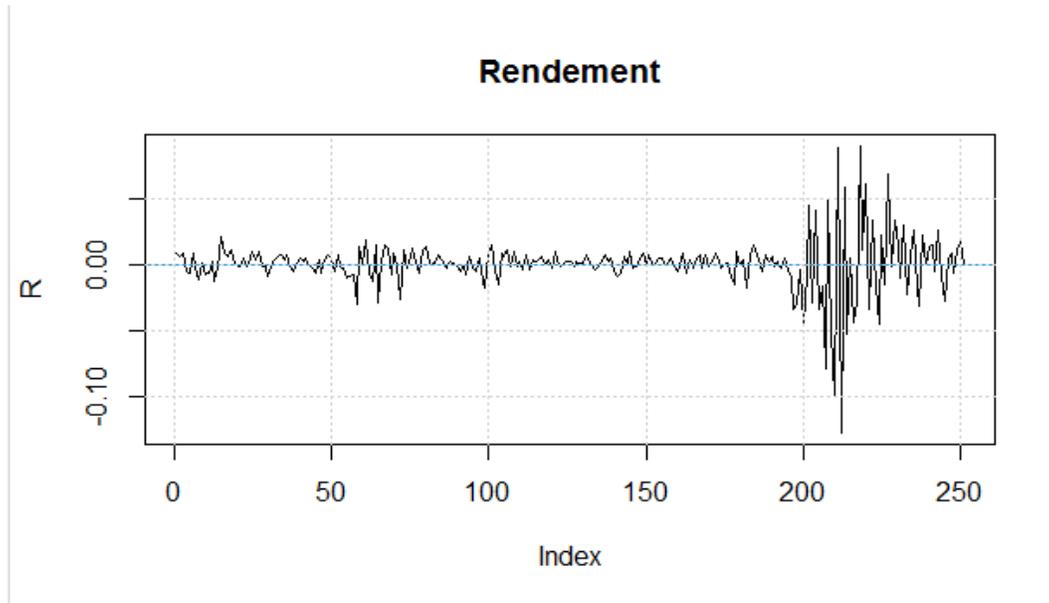


FIGURE 3.2 – Rendement de l'indice boursier S&P500.

On constate que le rendement se fluctue autour de la moyenne, il a une tendance normale.

Histogramme des Rendements du S&P 500

```
hist(R,col="lightblue",main="Rendement du S&P 500",breaks="scott")  
grid(col="lightgray",lwd=1)  
box()
```

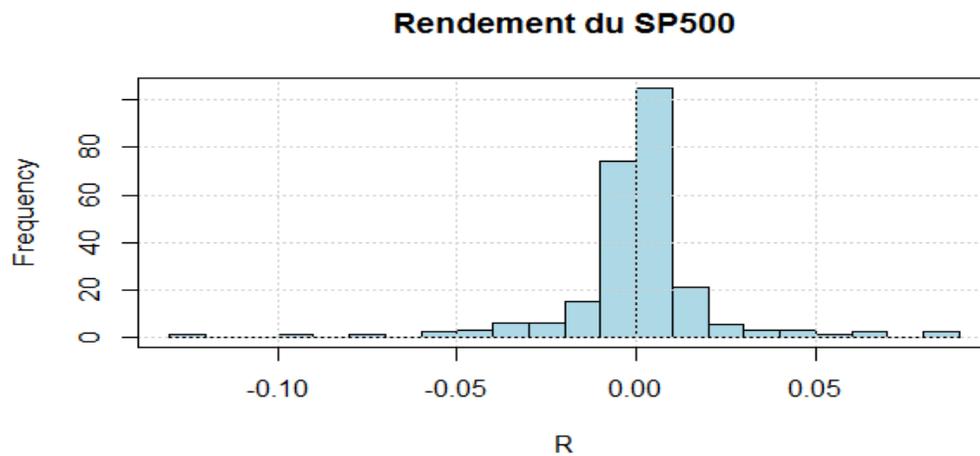


FIGURE 3.3 – *L'histogramme des Rendements du S&P500.*

L'histogramme du rendement de l'indice boursier montre une allure d'une distribution de probabilité normale.

Selection de seuil

```
## me-plot
```

```
meplot(R,col=4,main="Fonction d'excès moyenne")
```

```
abline(v=0.01)
```

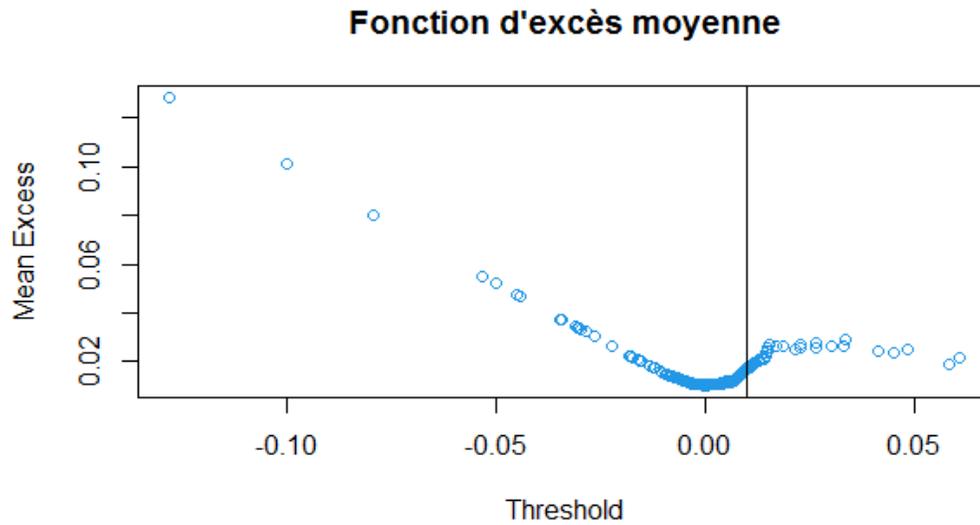


FIGURE 3.4 – *Courbe de fonction d'excès moyenne.*

On observe une stabilité linéaire après la valeur 0.01, on va prendre comme seuil $u = 0.01$.

Histogramme des excès et des données complètes

$u = 0.01$

```
par(mfrow=c(1,2))
```

```
hist(SP500,col="lightblue",main="S&P 500")
```

```
MAX=R[R>u]
```

```
hist(MAX,col="lightblue",main="Histogramme des excès",prob=T)
```

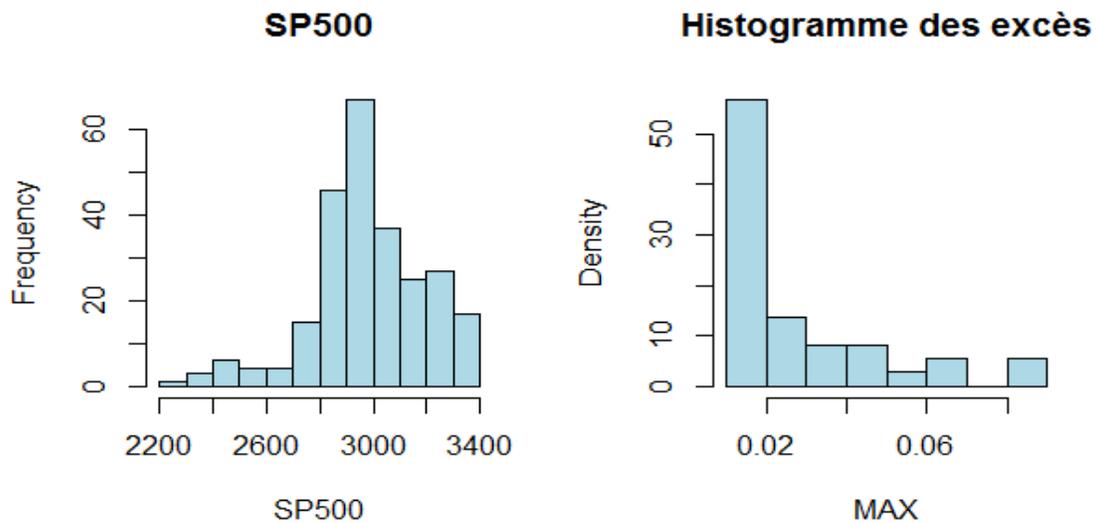


FIGURE 3.5 – *Histogramme des excès et des données complètes du S&P500.*

A vu d’œil, on voit que l’histogramme a une allure d’une GPD.

Histogramme et coudre de fréquence des excès

```
t=gpd(R,u,method= "ml")
hist(t$data,col="lightblue",main="Histogramme des excès",
prob=T,breaks="scott",xlab="excès")
curve(dgpd(x, xi =t$par.ests[1],mu=u,beta = t$par.ests[2]),
add=T,lwd=3,col=2)
grid()
box()
t$par.ests
```

Les paramètres estimés de la distribution de Parto généralisée GPD

ξ	β
0.585518984	0.008667265

TABLE 3.1 – *Les paramètres estimés ξ et β de GPD.*

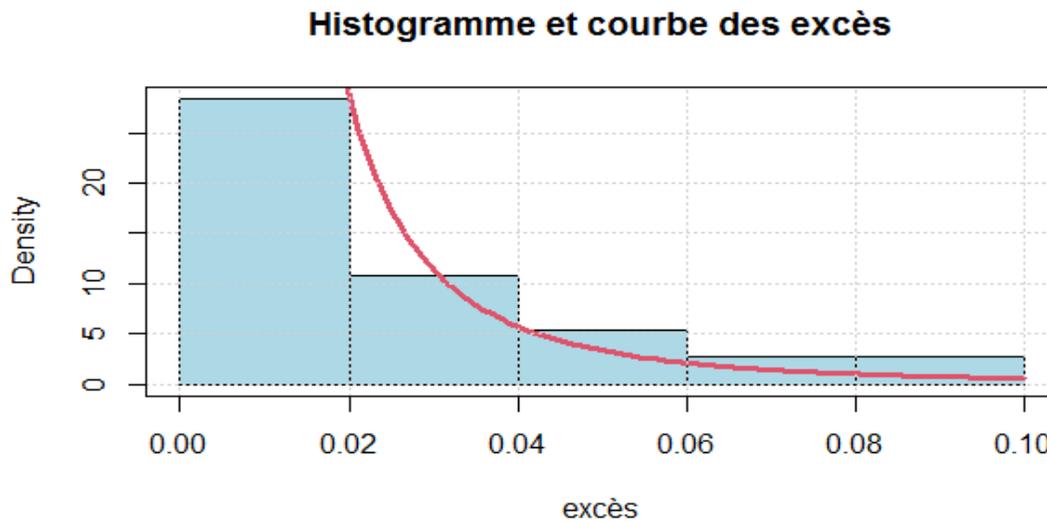


FIGURE 3.6 – *Histogramme et courbe de fréquence des excès du S&P500.*

D'après l'estimation, on a obtenu une $GPD(0.585518984, 0.00867265)$, sur le graphe on voit que cette GPD est la courbe adéquate pour cet échantillon des excès.

VaR de la TVE

```
t=gpd(R,0.01,method="ml")
```

```
v=riskmeasures(t,0.95)
```

```
VaR.Pot=v[2]
```

```
VaR.Pot
```

VaR TVE
0.02307623

TABLE 3.2 – *l'estimation de la VaR par la méthode de la TVE.*

VaR normale

```
N=10000
```

```
x=rnorm(N)
```

```
x0.95=quantile(x,0.95)
```

```
sum=numeric(N)
```

```
sum=0
```

```
sum2=0
for(i in 1 :N){sum=sum+x[i]
sum2=sum2+x[i]^2}
mean=sum/N
S=sum2/N-mean^2
VaR.normale=mean+x0.95*sqrt(S)
VaR.normale = mean(VaR.normale)
VaR.normale
```

VaR normale
1.708422

TABLE 3.3 – *l'estimation de la VaR normale.*

La VaR normale donne un résultat éloigné à la VaR TVE, cela est dû à la loi des excès qui ne suit pas une loi normale.

Chapitre 4

Tarification des Dérivés à Perte Cumulée sous Modèles Additifs

Dans ce chapitre on montre que la formule d'intégration par parties basée sur les techniques de calcul de Malliavin-Skorohod pour les processus additifs aide à calculer des quantités comme $\mathbb{E}(L_T h(L_T))$, ou plus généralement $\mathbb{E}(H(L_T))$, pour différentes fonctions appropriées h ou H et différents modèles pour le processus de perte cumulée L . Ces quantités sont importantes en assurance et en finance, par exemple, ils apparaissent dans le calcul des mesures de risque de l'expected shortfall ou des prix de contrats stop-loss. Les formules données généralisent celles proposées dans un article récent de Hillairet, Jiao et Réveillac (HJR), ils utilisent des modèles avancés, y compris le processus de Cox, le traitement de ces formules est basé uniquement sur les techniques de calcul de Malliavin pour le processus standard de Poisson, un cas particulier de processus additif, des résultats plus généraux sont obtenus et les preuves apparaissent plus courtes.

4.1 Introduction

Le processus de perte cumulée est le processus principal de la modélisation dans le domaine des assurances. Il est décrit comme un processus $L := \{L_t, t \geq 0\}$ tel que $L_0 = 0$ p.s. et

$$L_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où N_t est un processus de comptage qui décrit l'arrivée des sinistres (prétentions) et Y_i sont des variables aléatoires positives qui décrivent la taille ou le montant des sinistres. Ainsi, les processus de perte cumulative sont des processus de sauts purs, nuls à l'origine et avec des

trajectoires croissantes. Des références sur l'importance du processus de perte cumulée en assurance sont par exemple [35], [23], [32], [5] et [3].

Le cas le plus simple de processus de perte cumulée est le modèle dit de Cramér-Lundberg où L est supposé être un processus de Poisson composé homogène dans le temps qui correspond au cas où N_t est un processus de Poisson standard avec intensité $\lambda > 0$ et les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et distribuées de manière identique avec une certaine loi de probabilité définie sur $(0, \infty)$ et indépendantes du processus N_t .

Ces hypothèses peuvent être généralisées, dans notre travail on propose deux généralisations. Tout d'abord, il est habituel de supposer N_t un processus de Poisson non homogène dans le temps avec une intensité non constante donnée par une fonction positive λ défini sur $[0, \infty)$, plus généralement on peut supposer N_t un processus de Cox [17], qui correspond à l'hypothèse que l'intensité est aléatoire et donnée par un processus stochastique à trajectoires positives $\lambda = \{\lambda_s, s \geq 0\}$. D'autre part, le modèle de base de Cramér-Lundberg suppose que la taille des sinistres est indépendante de l'arrivée des sinistres, on inclut ici les dépendances possibles entre le processus d'intensité, les temps de saut et les tailles de saut.

Les différents modèles de processus de perte cumulée qu'on considère sont inclus dans la classe des processus additifs de saut pur ou dans la classe des processus additifs de saut pur conditionnels. L'intégration par parties de ses formules pour ce type de processus peuvent être utile pour calculer les espérances liées au processus de perte cumulée sous différents modèles.

De nombreux contrats d'assurance et de réassurance sont rédigés selon le processus de perte cumulée. En général, le remboursement peut être décrit comme $H(L_T)$ où T désigne le temps de maturité du contrat et H est une fonction mesurable positive. Ainsi, le prix actuel du contrat est donné par $e^{-rT}\mathbb{E}(H(L_T))$ sous une certaine mesure de probabilité et en supposant un taux d'intérêt constant $r \geq 0$. HJR donnent quelques exemples de remboursement de type $H(L_T)$ [26].

Le contrat stop-loss est un outil important dans la gestion des risques d'une compagnie d'assurance, Il protège contre les pertes supérieures à une certaine quantité grâce à un réassureur qui joue le rôle de contrepartie. Par exemple, dans un contrat type, le réassureur paie une somme d'argent si le processus de perte dépasse une certaine quantité K mais avec une quantité maximale $M > K$,

$$H(L_T) = (L_T - K)\mathbb{1}_{(K,M]}(L_T) + (M - K)\mathbb{1}_{(M,\infty)}(L_T).$$

Dans ce cas, le calcul de l'espérance se réduit à

$$\mathbb{E}(H(L_T)) = \mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_{(K,M]}(L_T)] - K\mathbb{P}(L_T \in (K, M]) + (M - K)\mathbb{P}(L_T > M).$$

Ici, le problème principal est de calculer le terme

$$\mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_{(K,M]}(L_T)]$$

c'est un cas particulier de $\mathbb{E}(L_T h(L_T))$ pour une certaine fonction positive h .

Des calculs similaires apparaissent, par exemple, dans le traitement des titres de créance garantis (CDOs), où les tranches sont définies avec différents K_i et M_i .

Les mesures des risques constituent une autre source d'exemples, telle que la Value at Risk VaR_α . Elle est défini comme le α -quantile de $-L_T$ pour un niveau prescrit $\alpha \in (0, 1)$ avec un changement de signe :

$$VaR_\alpha(-L_T) := -\inf\{x : F(x) > \alpha\}$$

où F est la fonction de probabilité cumulative de $-L_T$. On Note que L_T est une quantité positive, cela implique que $VaR_\alpha(-L_T)$ est aussi une quantité positive.

Une mesure du risque très utile dans le contrôle le expected shortfall ES_α (le déficit attendu) [25]. Il est défini comme suit :

$$ES_\alpha(-L_T) := -\mathbb{E}[-L_T \mid -L_T \leq -V_\alpha(-L_T)].$$

On peut écrire aussi :

$$ES_\alpha(-L_T) = \frac{\mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_{\{L_T \geq \beta\}}]}{\mathbb{P}(L_T \geq \beta)},$$

où $\beta = VaR_\alpha(-L_T)$.le calcul d'une quantité comme $\mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_{\{L_T \geq \beta\}}]$ devient crucial.

En général, on peut dire que le calcul d'une quantité comme $\mathbb{E}(L_T h(L_T))$ pour une certaine fonction positive h est d'une importance cruciale dans la gestion des risques en finance et assurance.

Comme il est expliqué dans [26], dans de nombreux cas, une situation plus générale est intéressante. Par exemple, on peut s'intéresser au problème de calcul de $\mathbb{E}(\hat{L}_T h(L_T))$, où $\hat{L}_T := \sum_{i=1}^{N_T} \hat{Y}_i$ et les quantités \hat{Y}_i sont différentes des quantités Y_i , c'est ce qui arrive quand L_T détermine l'activation du contrat mais le véritable sinistre est donnée par les quantités \hat{Y}_i . Dans le CDOs, par exemple, le taux de recouvrement n'est pas nécessairement égal à la perte réelle. Fréquemment, \hat{Y}_i est une fonction déterministe de Y_i , mais pas toujours. Pour couvrir ce type de problème en générale on considère des processus additifs de saut purs prenant des valeurs dans \mathbb{R}^d , malgré que dans la majorité des applications, le cas $d = 1$ sera suffisant.

4.2 Modèles pour le processus de perte cumulée

4.2.1 Processus additifs de saut pur

Dans cette sous-section, on rappelle les éléments de base de la théorie des processus additifs prenant des valeurs en \mathbb{R}^d . Dans la majorité des applications possibles $d = 1$ serait suffisant, mais comme on l'a commenté dans l'introduction, pour traiter certains problèmes, on doit considérer différentes amplitudes de saut pour chaque instant de celui ci afin de décrire différentes sommes d'argent pour le même sinistre. Des résultats généraux sur les processus additifs peuvent être trouvés, par exemple, dans [16] et [39].

Soit $A := \{A_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique prenant des valeurs dans \mathbb{R}^d et défini dans un espace de probabilité filtré complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Rappeler que $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est la filtration naturelle complète associée au processus A . On note par \mathbb{E} et \mathbb{V} respectivement, l'espérance et la variance associées à \mathbb{P} .

L'ensemble $\mathbb{R}_0^d := \mathbb{R}^d - \{0\}$, muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^d et par la norme $|\cdot|$ correspondante pour le cas $d = 1$. Pour toute $\epsilon > 0$ on définit les ensembles

$$S_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| > \epsilon\}$$

On note par \mathcal{B} et \mathcal{B}_0 les σ -algèbres des ensembles de Borel de \mathbb{R}^d et \mathbb{R}_0^d respectivement.

On dit que ce processus A est un processus additif s'il satisfait aux conditions suivantes :

— Il est nul à l'origine, c'est-à-dire, $A_0 = 0$ p.s.

- Il a des incréments indépendants, c'est-à-dire pour tout n et n'importe quel $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ les vecteurs aléatoires $A_{t_i} - A_{t_{i-1}}$ sont indépendants.
- Il a des trajectoires continues à droites avec des limites à gauche, p.s.
- Il est stochastiquement continu, c'est-à-dire pour tout $c > 0$ et $t \geq 0$ fixé, et pour $\delta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}(\|A_{t+\delta} - A_t\| > c) = 0. \quad (4.1)$$

Il est bien connu que tout processus additif peut être caractérisé par le triplet $(\Gamma_t, \Sigma_t^2, \nu_t)$ où :

- Γ_t est une fonction continue nulle à l'origine prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^d .
- Σ_t^2 est une fonction continue nulle à l'origine prenant des valeurs dans l'espace des matrices symétriques définies positives d'ordre d .
- $\{\nu_t, t \geq 0\}$ est un ensemble de mesures de Lévy sur \mathbb{R}^d tel que pour tout ensemble $B \in \mathcal{B}_0$ où $B \subseteq S_\epsilon$ pour un certain ϵ , $\nu_t(B)$ est une fonction continue et croissante nulle à l'origine. On rappelle que ν_t est une mesure de Lévy si c'est une mesure positive nulle à l'origine et $\int_{\mathbb{R}^d} (1 \wedge \|x\|^2) \nu_t(dx) < \infty$.

Si on suppose, en plus, la stationnarité des incréments, A devient un processus de Lévy, et les fonctions du triplet deviennent linéaires, c'est-à-dire que nous avons le triplet $(\gamma_L t, \Sigma_L^2 t, \nu_L t)$ pour un certain triplé $(\gamma_L, \Sigma_L^2, \nu_L)$ qui caractérisent pleinement le processus A . Dans ce cas, γ_L est un vecteur réel, Σ_L est une matrice symétrique définie positive et ν_L est une mesure de Lévy sur \mathbb{R}^d .

Soit $\Theta := [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, on note par $\theta = (s, x)$ les éléments de Θ . Pour tout $T \geq 0$ et $\epsilon > 0$, on introduit les ensembles $\Theta_{T,\epsilon} := [0, T] \times S_\epsilon$ avec ses σ -algèbres de Borel correspondantes $\mathcal{B}_{T,\epsilon}$. On définit : $\Theta_{\infty,0} := [0, \infty) \times \mathbb{R}_0^d$ et $\Theta = \Theta_{\infty,0} \cup ([0, \infty) \times \{0\})$. Lorsque cela est nécessaire, on identifie $[0, \infty)$ avec $[0, \infty) \times \{0\}$.

On introduit une mesure ν sur $\Theta_{\infty,0}$ tel que pour tout $B \in \mathcal{B}_0$ on définit :

$$\nu([0, t] \times B) = \nu_t(B)$$

Les hypothèses sur ν_t garantissent que ν est une σ -algèbre fini et continue, c'est-à-dire $\nu(\{t\} \times B) = 0$ pour toute $t \geq 0$ et $B \in \mathcal{B}_0$. En particulier ν diffuse sur $\Theta_{\infty,0}$ et elle est une mesure de Radon, c'est-à-dire qu'elle est finie sur des sous-ensembles compacts de $\Theta_{\infty,0}$.

De plus, le caractère des mesures de Lévy ν_t garantissent que pour $\delta > 0$

$$\nu([0, t] \times \{\|x\| > \delta\}) < \infty. \quad (4.2)$$

Etant donné $C \in \mathcal{B}_{\infty,0}$, on introduit la mesure de saut N associée à A , définie comme

$$N(C) := c\{t : (t, A_t - A_{t-}) \in C\} \quad (4.3)$$

où c désigne le cardinal des sauts.

Il est bien connu que N est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathcal{B}_{\infty,0}$ avec

$$\mathbb{E}(N(C)) = \mathbb{V}(N(C)) = \nu(C). \quad (4.4)$$

De plus, on définit la mesure de Poisson compensée

$$\tilde{N}(dt, dx) := N(dt, dx) - \nu(dt, dx). \quad (4.5)$$

La décomposition de Lévy-Itô permet d'écrire :

$$A_t = \Gamma_t + G_t + J_t \quad (4.6)$$

où Γ est une fonction continue nulle à l'origine, G et J sont deux processus additifs indépendants avec des triplets $(0, \Sigma_t^2, 0)$ et $(0, 0, \nu_t)$ respectivement. G est un processus gaussien centré avec trajectoires continues et fonction de covariance $\Sigma_{s \wedge t}^2$ et J est un processus additif de saut pur qui peut être représenté comme :

$$J_t = \int_{\Theta_{t,0}-\Theta_{t,1}} x \tilde{N}(ds, dx) + \int_{\Theta_{t,1}} x N(ds, dx), \quad (4.7)$$

où la première intégrale est la limite presque sûrement

$$\int_{\Theta_{t,0}-\Theta_{t,1}} x \tilde{N}(ds, dx) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\Theta_{t,\epsilon}-\Theta_{t,1}} x \tilde{N}(ds, dx).$$

On rappelle que la limite est uniforme par rapport à t sur chaque intervalle borné.

Afin de modéliser les processus de pertes cumulées, on limite notre analyse à la famille des processus additifs avec des trajectoires constantes par morceaux. Cela revient à supposer que $\Sigma \equiv 0$ et

$$\int_{\Theta_{t,0}-\Theta_{t,1}} \|x\| \nu(ds, dx) < \infty$$

avec

$$\Gamma_t = \int_{\Theta_{t,0}-\Theta_{t,1}} x \nu(ds, dx).$$

Dans ce cas :

$$J_t = \int_{\Theta_{t,0}} x N(ds, dx)$$

un processus additif de saut pur, avec des trajectoires constantes par morceaux, définies sur $\Theta_{\infty,0} := [0, \infty) \times \mathbb{R}_0^d$, qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^d et ν mesure déterminée. Ce processus J sera le principal objet d'intérêt dans la suite. On Note qu'il s'agit d'un processus additif de saut pur avec une activité finie ou infinie et des trajectoires à variation finies.

On rappelle que

$$\mathbb{E}(J_t) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} x N(ds, dx)\right) = \int_0^t \int_{(0,\infty)^d} x \nu(ds, dx)$$

et

$$\mathbb{V}(J_t) = \mathbb{V}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} x N(ds, dx)\right) = \int_0^t \int_{(0,\infty)^d} x^2 \nu(ds, dx),$$

à condition que les intégrales de droite soient bien définies. Ces formules décrivent clairement le rôle de la mesure ν .

Un cas particulier et très pertinent est le cas d'activité finie, c'est-à-dire lorsque les mesures ν_t sont finis pour chaque t . Dans ce cas, si on définit $\Lambda_t := \nu([0, t] \times (0, \mathbb{R}_0^d))$, elle est finie, on peut écrire, pour tout $B \in \mathcal{B}_0$,

$$\nu([0, t] \times B) = \Lambda_t Q_t(B)$$

avec

$$Q_t(B) := \frac{\nu([0, t] \times B)}{\nu([0, t] \times (0, \mathbb{R}_0^d))}.$$

On note que $N_{\Lambda_t}(\omega) := N([0, t] \times \mathbb{R}_0^d, \omega)$ calcule le nombre de sauts dans $[0, t]$ et c'est un processus de Poisson d'intensité cumulative Λ_t . Un cas plus particulier est le cas $Q_t = Q$ pour tout $t \geq 0$. Dans ce cas, le processus est un processus de Poisson composé non homogène pour le temps avec une intensité cumulative Λ et les tailles de saut sont données par la loi Q .

En assurance, généralement, les pertes sont positives et le processus de perte cumulée L a des trajectoires croissantes. Cela peut être décrit en supposant que ν est concentré dans $[0, \infty) \times (0, \infty)^d$. Par conséquent, J prend des valeurs dans $[0, \infty)^d$, pour se restreindre dans ce cas, on doit simplement changer \mathbb{R}_0^d par $(0, \infty)^d$ partout dans les explications précédentes. Les processus additifs de sauts purs avec des trajectoires croissantes à variation finie sont également appelés subordonnés dans la littérature. Dans tous les exemples de nos travaux, on suppose J est un subordonné.

4.2.2 Processus intégraux de Poisson

Les processus additifs de saut pur J présenté ci-dessus, peuvent être placé dans un cadre un peu plus général appelé processus intégraux de Poisson. Voir les chapitres 7 et 8 de [32] ou Chapitre 2 de [16] pour plus d'informations sur ce point.

On considère E un espace euclidien de dimension finie avec la σ -algèbre de Borel correspondante $\mathcal{B}(E)$. Typiquement, dans notre cas, $E \subseteq \mathbb{R}^k$ pour un certain $k \geq 1$. Ainsi qu'une mesure diffuse et de radon μ sur E . On note que la mesure ν présentée dans la sous-section 2.1 est une mesure diffuse et de radon sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}_0^d$. Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une mesure μ avec les conditions ci-dessus, on peut définir une mesure aléatoire de Poisson N sur $\Omega \times \mathcal{B}(E)$ c'est une mesure à valeur entière telle que pour tout $C \in \mathcal{B}(E)$ avec $\mu(C) < \infty$, $N(C)$ est une variable aléatoire de Poisson avec moyenne $\mu(C)$ et pour tout C_1, C_2, \dots, C_m ensembles disjoints, les variables aléatoires $N(C_1), \dots, N(C_m)$ sont mutuellement indépendants.

Étant donné une mesure aléatoire de Poisson N avec une mesure moyenne μ et une fonction mesurable g , on peut définir $\int_E g dN$ et fournir des conditions d'intégrabilité appropriées. Dans le cas $E = [0, \infty) \times \mathbb{R}_0^d$ on peut définir le processus intégral de Poisson :

$$J_t(g) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} g(s, x) N(ds, dx).$$

Il est bien connu que cette intégrale est finie i.e. si et seulement si

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} (|g(s, x)| \wedge 1) \mu(ds, dx) < \infty.$$

Un cas particulièrement important est où $g \equiv 1$. Dans ce cas, la généralisation suivante du processus de Poisson est :

$$N_t = J_t(1) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} N(ds, dx)$$

C'est le nombre de sauts de toute taille dans $[0, t]$ qui est bien défini à condition

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} \mu(ds, dx) = \mu([0, t] \times \mathbb{R}_0^d) < \infty.$$

On note que si

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} |g(s, x)| \mu(ds, dx) < \infty,$$

alors,

$$\mathbb{E}(J_t(g)) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} g(s, x) \mu(ds, dx).$$

Et si

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} \max\{|g(s, x)|^2, |g(s, x)|\} \mu(ds, dx) < \infty,$$

alors,

$$\mathbb{V}(J_t(g)) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} g(s, x)^2 \mu(ds, dx).$$

En particulier, si $\mu(E) < \infty$, on peut écrire

$$J(g) := \int_E g(s, x) N(ds, dx) = \sum_{i=1}^M Z_i$$

où M est une variable aléatoire de Poisson d'intensité $\mu(E)$ et Z_i sont des variables aléatoires i.i.d de loi

$$Q(Z \in B) = \frac{\mu\{(s, x) : g(s, x) \in B\}}{\mu(E)}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Le cas $E = [0, T]$ et $\mu = \ell$ où ℓ est la mesure de Lebesgue, le processus est de Poisson standard, et le cas $E = [0, T] \times \mathbb{R}_0$ avec $\mu = \ell \times \rho$ où ρ est une mesure finie sur \mathbb{R}_0 est le processus de Poisson composé homogène avec sauts de loi Q et d'intensité $T\rho(\mathbb{R}_0)$.

On Note également que l'on peut généraliser le cas $\mu([0, t] \times \mathbb{R}_0^d)$ fini pour tout $t \geq 0$, M et Q dépendent de tM où est un processus aléatoire de Poisson d'intensité $\mu([0, t] \times \mathbb{R}_0^d)$ et

$$Q_t(Z \in B) = \frac{\mu\{(s, x) : s \leq t, g(s, x) \in B\}}{\mu([0, t] \times \mathbb{R}_0^d)}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Les cas particuliers vus auparavant correspondent maintenant à $E = [0, \infty)$ et $E = [0, \infty) \times \mathbb{R}_0$.

4.2.3 Modélisation du processus de perte cumulée

Dans cette sous-section, on montre comment le processus additif de saut pur avec variation finie à trajectoires croissantes, ou plus généralement, un processus intégraux de Poisson

$$J_t(g) := \int_0^t \int_{(0, \infty)^d} g(s, x) N(ds, dx)$$

est un cadre approprié pour modéliser le processus de perte cumulé.

On rappelle que N est une mesure aléatoire de Poisson avec une mesure moyenne donnée par ν . On suppose en outre que $\nu([0, t] \times (\delta, \infty)) < \infty$ pour tout $t \geq 0$, $\delta > 0$ et g une fonction non négative.

On Considère un processus de perte cumulé homogène dans le temps dont les arrivées de sinistres suivent un processus de Poisson non homogène avec une intensité cumulée déterministe Λ et les montants des sinistres sont des variables aléatoires *i.i.d* X_i de loi Q . On rappelle qu'il s'agit du modèle de base en assurance présenté par aux chapitres 2 et 7 de [32]. On prend $d = 1$ pour la simplicité. On peut écrire

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_t}} X_i = \int_0^t \int_0^\infty x N(ds, dx)$$

dans ce cas $\nu(ds, dx) = d\Lambda_t \times Q(dx)$.

Un cas particulier

$$\Lambda_t := \int_0^t \lambda(s) ds$$

où le processus d'intensité λ est supposé être presque partout une fonction mesurable strictement positive et localement intégrable définie sur $[0, \infty)$. Si de plus Q a une densité q on peut écrire

$$\nu(ds, dx) = \lambda(s)q(x) ds dx$$

sur $[0, \infty) \times (0, \infty)$.

Concrètement le modèle classique de Cramér-Lundberg correspond au cas $d = 1$ et $\lambda(s) = \lambda$ constante positive.

Une situation plus générale et utile, décrite au chapitre 1 de [32], est

$$L_t = \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_t}} f(T_i, X_i) = \int_0^t \int_{(0, \infty)} f(s, x) N(ds, dx)$$

où f est une fonction déterministe mesurable de $(0, \infty)^2$ à $[0, \infty)$. Un exemple typique et simple où les montants des réclamations dépendent des temps de saut est le processus de perte cumulée actualisée où $f(T_i, X_i) = e^{-rT_i} X_i$. Un autre cas typique est le bruit de tir, voir également le chapitre 1 de [32] :

$$S_t := \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\theta(t-T_i)} X_i = e^{-\theta t} \sum_{i=1}^{N_t} e^{\theta T_i} X_i = e^{-\theta t} \int_0^t \int_0^\infty e^{\theta s} x N(ds, dx)$$

où N est un processus de Poisson standard avec intensité λ et $\nu(ds) = \lambda ds Q(dx)$. Ici $f(T_i, X_i) = e^{\theta T_i} X_i$.

Donc, en général, on considère comme modèle d'un processus de perte cumulée l'intégrale

$$L_t = \int_0^t \int_{(0, \infty)^d} f(s, x) N(ds, dx)$$

N une mesure aléatoire de Poisson avec mesure moyenne ν dans les conditions établies précédemment. On Note que ce modèle est très général et inclut une dépendance entre les temps de sauts et les tailles de sauts.

Une situation plus générale, encore, est de décrire la fonction d'intensité cumulée Λ par un processus stochastique. C'est le cas où N devient un processus de Cox également appelé double processus stochastique de Poisson. Dans ce cas, il est possible de voir le processus de perte cumulée L comme processus additif de saut pur conditionnel ou processus intégral de Poisson conditionnel, la condition est de considéré le processus d'intensité cumulative.

4.3 Formule d'intégration pour les processus additifs de sauts purs

Le calcul de Malliavin-Skorohod pour les processus avec sauts, concrètement pour les processus de Lévy, a été introduit pour la première fois en 1956 par Itô [31]. Une bonne référence pour le calcul de Malliavin-Skorohod pour les processus de Lévy est [20]. Le développement de cette théorie pour les processus additifs a été introduit en 2008 par Yablonski [45]. Dans cette sous-section, on suit de près le point de vue établi dans [21].

On envisage un processus additif de saut pur

$$J_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} x N(ds, dx)$$

avec intensité ν définie précédemment. On peut identifier canoniquement les trajectoires de J comme éléments ω de l'ensemble Ω^J , introduit dans [41], et on définit l'ensemble des séquences finies ou infinies de paires $\theta_i = (s_i, x_i) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}_0^d$ pour tout m un nombre fini d'entre eux appartenant à $\Theta_m := [0, m] \times S_{\frac{1}{m}}^{\perp}$. Cela inclut, en particulier, la trajectoire sans saut, que l'on désigne par α . On rappelle que J est défini sur son espace de probabilité filtré naturel $(\Omega^J, \mathcal{F}^J, \mathbb{F}^J, \mathbb{P}^J)$, une construction détaillée peut être trouvée dans [21]. En particulier les ensembles de \mathcal{F}^J sont les anti-images des projections canoniques sur les ensembles $\Theta_{T,\epsilon}$ d'ensembles de temps symétriques de $\mathcal{B}(\Theta_{T,\epsilon})$.

On peut définir deux familles de transformations sur Ω^J . Ils coïncident avec les transformations introduites dans [36]. Une transformation de la création est

$$\varsigma_{\theta}^{+}\omega := ((s, x), (s_1, x_1), \dots, (s_n, x_n), \dots),$$

qui ajoute un saut $\theta = (s, x)$ à une trajectoire ω et une transformation d'annulation

$$\varsigma_{\theta}^{-}\omega := ((s_1, x_1), (s_s, x_2), \dots) - \{(s, x)\}$$

cela enlève un saut $\theta = (s, x)$ à une trajectoire ω à condition qu'il soit dans la trajectoire.

Ces deux transformations sont bien définies. On Note que ς^{+} est bien défini sauf sur l'ensemble $\{(\theta, \omega) : \theta \in \omega\}$ qui a une mesure nulle $\nu \otimes \mathbb{P}$. Sur cet ensemble on définit $\varsigma^{+}\omega = \omega$.

Dans le cas de ς^{-} , cet opérateur est l'identité sauf sur le même ensemble $\{(\theta, \omega) : \theta \in \omega\}$.

On Considère $L^0(\Omega^J)$ l'ensemble des variables aléatoires sur Ω^J et $L^0(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$ l'ensemble des processus mesurables indexés par $\Theta_{\infty,0}$. Suivant Di Nunno et al [21], on introduit les opérateurs suivants \mathcal{T} et \mathcal{S} .

Définition 4.3.1 *Soit $F \in L^0(\Omega^J)$ on définit*

$$\mathcal{T} : L^0(\Omega^J) \longrightarrow L^0(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$$

tel que

$$(\mathcal{T}F)(\theta, \omega) := F(\varsigma_{\theta}^{+}\omega).$$

L'opérateur \mathcal{T} est linéaire fermé défini sur l'ensemble $L^0(\Omega^J)$. On note que $F = 0$ implique $\mathcal{T}F = 0$.

Définition 4.3.2 *Soit un processus $u \in L^0(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$ on définit*

$$\mathcal{S} : \text{Dom}\mathcal{S} \subseteq L^0(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J) \longrightarrow L^0(\Omega^J)$$

tel que

$$(\mathcal{S}u)(\omega) := \int_{\Theta_{\infty,0}} u_{\theta}(\varsigma_{\theta}^{-}\omega) N(d\theta, \omega) = \sum_i u_{\theta_i}(\varsigma_{\theta_i}\omega)$$

et

$$(\mathcal{S}u)(\alpha) = 0.$$

Le domaine de l'opérateur \mathcal{S} , $Dom\mathcal{S}$, est l'ensemble des processus $u \in L^0(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$ tel que $\sum_i |u_{\theta_i}(\zeta_{\theta_i}\omega)| < \infty$.

On rappelle que $L^1(\Theta_{\infty,0})$, $L^1(\Omega^J)$ et $L^1(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$ désignent respectivement les espaces des fonctions intégrables avec respectivement les mesures ν , \mathbb{P} and $\nu \times \mathbb{P}$.

On peut voir que $L^1(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J) \subseteq Dom\mathcal{S}$. En fait, il est prouvé dans [21] que \mathcal{S} est un opérateur fermé bien défini de $L^1(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$ à $L^1(\Omega^J)$. On a aussi, pour $u \in L^1(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$,

$$\mathbb{E}(\mathcal{S}u) = \mathbb{E} \int_{\Theta_{\infty,0}} u_{\theta}(\omega) \nu(d\theta).$$

De plus, si u est un processus prévisible, on a

$$(\mathcal{S}u)(\omega) = \int_{\Theta_{\infty,0}} u_{\theta}(\omega) N(d\theta, \omega).$$

Le principal résultat en relation avec les opérateurs \mathcal{T} et \mathcal{S} est la relation de dualité qui suit ou la formule d'intégration par parties.

Théorème 4.3.1 *On suppose que $F \in L^0(\Omega^J)$ et $u \in Dom\mathcal{S}$. Alors $F \cdot \mathcal{S}u \in L^1(\Omega^J)$ si et seulement si $\mathcal{T}F \cdot u \in L^1(\Theta_{\infty,0} \times \Omega^J)$ et dans ce cas*

$$\mathbb{E}[F \cdot \mathcal{S}u] = \mathbb{E} \int_{\Theta_{\infty,0}} \mathcal{T}_{\theta}F \cdot u_{\theta} \nu(d\theta).$$

preuve 4.3.1 *Ce théorème est une simple extension du cas d -dimensionnel du théorème 5.6 dans [21]. Mais étant un résultat clé dans non travaux, par souci d'exhaustivité, on répète ici la preuve.*

Soit Ω_m^J l'ensemble des séquences de paires dans Θ_m . On note que toutes ces séquences sont

finies, pour n'importe lequel $\omega = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, et $c_m := e^{-\nu(\Theta_m)}$ où $\theta \in \Theta_m$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F \cdot \mathcal{S}u \cdot \mathbb{1}_{\Omega_m^J}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_m}{n!} \int_{\Theta_m^n} F(\theta_1, \dots, \theta_n) (\mathcal{S}u)(\theta_1, \dots, \theta_n) \nu(d\theta_1) \cdots \nu(d\theta_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_m}{n!} \int_{\Theta_m^n} F(\theta_1, \dots, \theta_n) \sum_{i=1}^n u_{\theta_i}(\zeta_{\theta_i}^- \omega) \nu(d\theta_1) \cdots \nu(d\theta_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{c_m}{n!} \int_{\Theta_m^n} \mathcal{T}_{\theta_i} F(\theta_1, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_n) u_{\theta_i}(\zeta_{\theta_i}^- \omega) \nu(d\theta_1) \cdots \nu(d\theta_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{c_m}{n!} \int_{\Theta_m^{n-1}} \int_{\Theta_m} \mathcal{T}_{\theta_n} F(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) u_{\theta}(\zeta_{\theta_n}^- \omega) \nu(d\theta_1) \cdots \nu(d\theta_n) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\Omega_m^J} \int_{\Theta_m} \mathcal{T}_{\theta} F u_{\theta} \nu(d\theta)).
\end{aligned}$$

En utilisant la convergence dominée, on étend le résultat à Ω^J . \square

Remarque 4.3.1 On note qu'on a supposé que juste cette mesure ν est une mesure fini diffuse et de radon sur $\Theta_{\infty,0}$ pour tout Θ_m , $m \geq 1$. Donc tout processus intégral de Poisson J avec une intensité satisfaisant ces conditions vérifie la formule d'intégration par parties démontrée ci-dessus. On rappelle que pour être un bon modèle de processus de perte cumulée, on doit en outre supposer des trajectoires à variation finie, pour $\delta > 0$:

$$\int_0^t \int_{\|x\| \leq \delta} \|x\| \nu(ds, dx) < \infty, \forall t \geq 0.$$

Dans le cas $d = 1$, si l'on considère uniquement les pertes positives la condition devient

$$\int_0^t \int_0^{\delta} x \nu(ds, dx) < \infty, \forall t \geq 0.$$

4.4 Résultats : formules de tarification des dérivés de perte cumulée

4.4.1 Les arrivées de sinistre avec intensité déterministe

On considère un processus de perte cumulative $\{L_t, t \geq 0\}$ de telle sorte que les sinistres arrivants sont indépendants avec une intensité déterministe cumulative Λ_t et des tailles de sinistres positives. Ce processus peut être vu comme un cas particulier d'un processus additif de saut pur J comme on a vu dans la sous-section 2.3.

On fixe $T > 0$, soit $f \in L^1(\Theta_{T,0})$, on peut écrire

$$L_T := \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_T}} f(s_i, x_i) = \int_0^T \int_{(0,\infty)^d} f(s, x) N(ds, dx).$$

Le théorème suivant donne une formule pour calculer $\mathbb{E}[L_T h(L_T)]$ où h est une fonction positive telle que $L_T h(L_T) \in L^1(\Omega^J)$, cette formule est valable pour $\mathbb{E}[H(L_T)]$ pour toute fonction positive H telle que $\mathbb{E}[H(L_T)] < \infty$, on définit $h(x) := \frac{H(x)}{x}$.

Théorème 4.4.1 *On considère $f \in L^1(\Theta_{T,0})$, on a*

$$\mathbb{E}[L_T h(L_T)] = \int_0^T \int_{(0,\infty)^d} \mathbb{E}[h(L_T + f(s, x))] f(s, x) \nu(ds, dx) \quad (4.8)$$

preuve 4.4.1 *On écrit $L_T = \mathcal{S}f$, on note qu'étant donné f une fonction déterministe, elle est prévisible. On applique la formule de dualité du Théorème 4.3.1 et la définition de \mathcal{T} dans la Définition 4.3.1 on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_T h(L_T)] &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{(0,\infty)^d} \mathcal{T}_{s,x} h(L_T) f(s, x) \nu(ds, dx) \\ &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{(0,\infty)^d} h(\mathcal{T}_{s,x} L_T) f(s, x) \nu(ds, dx) \\ &= \mathbb{E} \int_0^T \int_{(0,\infty)^d} h(L_T + f(s, x)) f(s, x) \nu(ds, dx) \\ &= \int_0^T \int_{(0,\infty)^d} \mathbb{E}[h(L_T + f(s, x))] f(s, x) \nu(ds, dx). \quad \square \end{aligned}$$

h est une fonction indicatrice d'un ensemble $A \subseteq [0, \infty)$, dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}[h(L_T + f(s, x))] = \mathbb{P}(L_T + f(s, x) \in A) = \mathbb{P}(L_T \in A - f(s, x))$$

ça peut être vu comme fonction de (s, x) .

On considère maintenant le cas plus général des différentes tailles de sinistres, mentionné en introduction et en [26]. On veut calculer $\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T)]$ où

$$\hat{L}_T := \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_T}} g(s_i, x_i) = \int_0^T \int_{(0, \infty)^d} g(s, x) N(ds, dx)$$

avec $g \in L^1(\Theta_{\infty, 0})$ et on suppose que $\hat{L}_T h(L_T) \in L^1(\Omega^J)$. On a Le résultats suivant :

Corollaire 4.4.1 *On a,*

$$\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T)] = \int_0^T \int_{(0, \infty)^d} \mathbb{E}[h(L_T + f(s, x))] g(s, x) \nu(ds, dx). \quad (4.9)$$

On donne quelques exemples concrets :

Exemple 4.4.1 *Un premier exemple assez général est le modèle de Cramér-Lundberg d'intensité non homogène. On considère $d = 1$ et $\nu(ds, dx) = \lambda(s) ds Q(dx)$ où λ est p.p. une fonction strictement positive et localement intégrable qui modélise l'intensité des arrivées de sinistres et Q est une loi de probabilité sur $(0, \infty)$ avec une espérance finie, qui décrit le montant des réclamations supposées i.i.d. On prend $f(s, x) = x$. On a donc*

$$\mathbb{E}[L_T h(L_T)] = \int_0^T \int_0^\infty \mathbb{E}[h(L_T + x)] x Q(dx) \lambda(s) ds = \Lambda_T \int_0^\infty \mathbb{E}[h(L_T + x)] x Q(dx)$$

où $\Lambda_T = \int_0^T \lambda(s) ds$ est l'intensité cumulée.

Si h est l'indicatrice d'un intervalle $[K, M] \subseteq [0, \infty)$ on a

$$\mathbb{E}[L_T h(L_T)] = \Lambda_T \int_0^\infty \mathbb{P}(L_T \in [K - x, M - x]) x Q(dx). \quad (4.10)$$

Exemple 4.4.2 *Un autre exemple cité dans l'introduction est le processus de perte cumulée actualisée, dans ce cas $f(s, x) = e^{-rs}x$. On considère le cas général $f(s, x) = a(s)b(x)$, alors*

$$\mathbb{E}[L_T h(L_T)] = \int_0^T a(s) \lambda(s) \left(\int_0^\infty \mathbb{E}[h(L_T + a(s)b(x))] b(x) Q(dx) \right) ds,$$

sous la condition d'intégrabilité

$$\int_0^T \int_0^\infty a(s) b(x) \lambda(s) ds Q(dx) = \left(\int_0^T a(s) \lambda(s) ds \right) \left(\int_0^\infty b(x) Q(dx) \right) < \infty.$$

Cette formule couvre par exemple le cas décrit dans [26] où $f(t, x) = \sqrt{\frac{\Lambda_t}{t}} x$.

Exemple 4.4.3 *Un exemple plus compliqué, également décrit dans [26], est le suivant : on suppose que $d = 2$, les deux processus de perte cumulative L et \hat{L} où les quantités de L sont données par $f(t, x, y)$ et les quantités de \hat{L} sont données par $g(t, x, y)$ avec $(x, y) \in (0, \infty)^2$.*

Alors

$$\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T)] = \int_0^T \int_{(0, \infty)^2} \mathbb{E}[h(L_T + f(s, x, y))] g(s, x, y) \nu(ds, dx, dy).$$

De nombreux cas particuliers sont couverts pour différents choix de f , g et ν . Par exemple le cas traité en [26] donné par $\nu(ds, dx, dy) = Q(dx, dy)\lambda(s)ds$.

Exemple 4.4.4 *Pas seulement des cas sur $[0, \infty) \times (0, \infty)^d$ sont couverts par les formules précédentes, mais également des cas sur $[0, \infty)^k \times (0, \infty)^2$ ou $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_0^d$. Par exemple, le cas où chaque sinistre est marqué par un vecteur (T_i, D_i, X_i) où D est le temps positif entre l'événement et sa déclaration ou bien l'événement et son paiement. Dans d'autres modèles, T_i est le temps d'arrivée et D_i un temps de service, si T , D et X sont indépendants et Q_D est la loi de D , on a $\nu(ds, dr, dx) = Q_D(dr)Q(dx)\lambda(s)ds$. Dans le cas général, on peut considérer une mesure générale ν , voir les chapitres 7 et 8 dans [32] pour des exemples concrets de ces types.*

4.4.2 Les arrivées de sinistre avec intensité aléatoire

En assurance, il est souvent intéressant de supposer une intensité aléatoire dans les arrivées de sauts. On doit donc étendre les formules précédentes aux processus conditionnellement additifs. On suit quelques idées de [46], en relation avec [26], on établit ici un espace de probabilité différent.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet qui sera précisé ci-dessous. On suppose que on a une famille $\{\nu(\omega, \cdot, \cdot), \omega \in \Omega\}$ de mesures aléatoires de radon diffuse sur $\Theta_{\infty, 0}$ avec les conditions de la Remarque 4.3.1. Comme on modélise les processus de pertes cumulées, on considère ici $\Theta_{\infty, 0} = [0, \infty) \times (0, \infty)^d$. Pour tout $B \in \mathcal{B}_{\infty, 0}$, $\nu(\cdot, B)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On peut considérer $\mathcal{F}_{\infty}^{\nu}$, la σ -algèbre complète générée par ces variables aléatoires et \mathbb{F}^{ν} la filtration définie par les σ -algèbres \mathcal{F}_t^{ν} générées pour tout t par la famille $\{\nu(\cdot, B), B \in \mathcal{B}_{t, 0}\}$.

Etant donné $\nu(\omega, \cdot, \cdot)$ on peut construire une mesure aléatoire de Poisson $N(\omega, \cdot, \cdot)$ telle que

$$J_t(\omega) = \int_0^t \int_{(0, \infty)^d} x N(\omega, ds, dx)$$

c'est un processus additif conditionnel de saut pur par rapport à la σ -algèbre \mathcal{F}_∞^ν .

De plus, pour toute $f \in L^1(\Omega \times \Theta_{\infty,0}, \mathcal{F}_\infty^\nu \otimes \mathcal{B}_{\infty,0}, \nu)$ on peut considérer la \mathcal{F}_∞^ν -variable aléatoire mesurable

$$\int_0^\infty \int_{(0, \infty)^d} f(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx)$$

et le processus intégral de Poisson :

$$J_t(f) = \int_0^t \int_{(0, \infty)^d} f(\omega, s, x) N(\omega, ds, dx)$$

telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{(0, \infty)^d} f(\omega, s, x) N(\omega, ds, dx) \middle| \mathcal{F}_\infty^\nu\right] = \int_0^t \int_{(0, \infty)^d} f(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx). \quad p.s$$

De plus, on prend les espérances une autre fois,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{(0, \infty)^d} f(\omega, s, x) N(\omega, ds, dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{(0, \infty)^d} f(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx)\right].$$

On note \mathbb{F}^J la filtration naturelle complète générée par le processus J . On définit \mathbb{F} la filtration générée par les σ -algèbres $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^J \vee \mathcal{F}_t^\nu$. J est adapté à la filtration $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t^J \times \mathcal{F}_t^\nu, t \geq 0\}$, on suppose de plus $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\infty$.

Toutes les affirmations précédentes sont également vraies si l'on considère tous les objets précédents définis sur $\Theta_{T,0}$ et mesurables par rapport à \mathcal{F}_T^ν pour un $T > 0$ fixé.

Pour un tel processus J , si on suppose que $\nu(\omega, \cdot, \cdot)$ sont des mesures finies sur tout $\Theta_{t,0}$, on peut considérer le processus d'intensité cumulée $\Lambda_t = \nu(\omega, [0, t] \times (0, \infty)^d)$ et le processus de Poisson associé $N_{\Lambda_t(\omega)}(\omega)$ qui est un processus de Cox ou un processus de Poisson conditionnel non homogène.

Ainsi, on peut étendre naturellement toute la théorie précédente des processus additifs de saut purs à des processus additifs de saut conditionnellement purs, et toute l'intégration précédente en utilisant les formules par parties, aux formules conditionnées à \mathcal{F}_T^ν pour un

horizon fixe $T > 0$. Le théorème suivant donne une version conditionnelle de la formule (4.9). La formule (4.8) est un cas particulier.

Théorème 4.4.2 *Etant donné*

$$L_T(\omega) := \int_{\Theta_{T,0}} f(\omega, s, x) N(\omega, ds, dx) = \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_T(\omega)}(\omega)} f(\omega, s_i, x_i)$$

et

$$\hat{L}_T(\omega) := \int_{\Theta_{T,0}} g(\omega, s, x) N(\omega, ds, dx) = \sum_{i=1}^{N_{\Lambda_T(\omega)}(\omega)} g(\omega, s_i, x_i)$$

avec f, g et ν , \mathcal{F}_T^ν -mesurable, la version conditionnelle de la formule (4.9) est donné par

$$\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T) | \mathcal{F}_T^\nu] = \int_{\Theta_{T,0}} \mathbb{E}[h(L_T(\omega) + f(\omega, s, x)) | \mathcal{F}_T^\nu] g(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx)$$

On prend les espérances une autre fois, on a :

$$\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T)] = \mathbb{E}\left[\int_{\Theta_{T,0}} h(L_T(\omega) + f(\omega, s, x)) g(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx)\right]. \quad (4.11)$$

preuve 4.4.2 De même que dans la preuve du théorème 4.4.1, on écrit $\hat{L}_T = \mathcal{S}g$ et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T) | \mathcal{F}_T^\nu] &= \mathbb{E}\left[\int_{\Theta_{T,0}} \mathcal{T}_{s,x} h(L_T(\omega)) g(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx) | \mathcal{F}_T^\nu\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\Theta_{T,0}} h(\mathcal{T}_{s,x} L_T(\omega)) g(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx) | \mathcal{F}_T^\nu\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\Theta_{T,0}} h(L_T(\omega) + f(\omega, s, x)) g(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx) | \mathcal{F}_T^\nu\right] \\ &= \int_{\Theta_{T,0}} \mathbb{E}[h(L_T(\omega) + f(\omega, s, x)) | \mathcal{F}_T^\nu] g(\omega, s, x) \nu(\omega, ds, dx). \quad \square \end{aligned}$$

L'exemple suivant montre l'intérêt de ce théorème en assurance :

Exemple 4.4.5 *Supposons que $d = 2$ et*

$$\nu(\omega, ds, dx, dy) = \lambda_s(\omega) Q(dx, dy) ds$$

où Q est défini dans $(0, \infty)^2$, alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T)] &= \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}[h(L_T(\omega) + f(\omega, s, x, y))g(\omega, s, x, y)\lambda_s(\omega)]Q(dx, dy)ds \\
&= \mathbb{E} \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_h(\omega, f(\omega, s, x, y))g(\omega, s, x, y)\lambda_s(\omega)Q(dx, dy)ds
\end{aligned}$$

où

$$\varphi_h(\omega, z) = \mathbb{E}[h(L_T(\omega) + z)|\mathcal{F}_T^\nu],$$

pour tout $z \in \mathbb{R}$. Cela coïncide avec le théorème 3.5 dans [26].

Par conséquent,

$$\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T)] = \mathbb{E} \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{E}[(h(L_T(\omega) + f(\omega, s, x, y)))|\mathcal{F}_T^\nu]g(\omega, s, x, y)\lambda_s(\omega)Q(dx, dy)ds.$$

Si h est une fonction indicatrice d'un ensemble A , comme dans le cas d'un contrat stop-loss ($A = (K, M]$ avec $0 < K < M < \infty$) on a

$$\mathbb{E}[\hat{L}_T h(L_T)] = \mathbb{E} \int_0^T \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}[L_T(\omega) + f(\omega, s, x, y) \in A|\mathcal{F}_T^\nu]g(\omega, s, x, y)\lambda_s(\omega)Q(dx, dy)ds.$$

Dans le calcul de l'expected shortfall ($A = [0, \beta]$ avec $\beta > 0$) et $\hat{L}_T = L_T$, alors la formule se réduit à

$$\mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_A(L_T)] = \mathbb{E} \int_0^T \int_0^\infty \mathbb{P}[L_T(\omega) + f(\omega, s, x) \in A|\mathcal{F}_T^\nu]f(\omega, s, x)\lambda_s(\omega)Q(dx)ds.$$

Dans le cas de Cramér-Lundberg, mais maintenant avec une intensité aléatoire $f(\omega, s, x) = x$, donc la formule devient

$$\mathbb{E}[L_T \mathbb{1}_A(L_T)] = \mathbb{E} \int_0^T \int_0^\infty \mathbb{P}[L_T(\omega) \in A - x|\mathcal{F}_T^\nu]xQ(dx)\lambda_s(\omega)ds.$$

Bien entendu, toutes ces formules ont des applications pratiques lorsque l'on suppose des lois concrètes pour le processus d'intensité cumulée, le temps entre les sauts et les amplitudes des sauts.

Exemple 4.4.6 *On peut considérer les processus*

$$J_t(\omega) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} x \mathbb{1}_{[0, \tau(\omega)]}(s) N(\omega, ds, dx)$$

avec τ un temps d'arrêt par rapport à la filtration \mathbb{F}^ν . Cela permettrait de modéliser des dates d'expiration aléatoires déterminées par ν , et donc d'appliquer le théorème 4.4.2 à cette situation.

Exemple 4.4.7 *On note que dans [26] un exemple typique de L_T a des tailles de saut $f(\Lambda_{s_i}, s_i, x_i)$ où f est une fonction déterministe avec l'indépendance entre x_i et Λ_{s_i} (Hypothèse 3.1). Dans nos travaux, la taille de saut typique est $f(\omega, s_i, x_i)$, c'est-à-dire que, $f(\omega, s_i, x_i)$ peut dépendre de toute la trajectoire de ω jusqu'à T . Un exemple d'application possible est le suivant : étant donné $\nu(\omega, \cdot, \cdot)$, on peut considérer le processus $\{\nu(\omega, [0, t] \times B), t \geq 0\}$ comme l'historique d'un client ou d'un groupe de clients lié à certains aspects d'intérêt donnés par $B = (0, \infty)^d$, $\{\nu(\omega, [0, t] \times (0, \infty)^d), t \geq 0\}$ est le processus $\{\Lambda_t(\omega), t \geq 0\}$, qui peut représenter toute l'histoire d'un client ou d'un groupe de clients. Par conséquent, on permet à L_T de dépendre de l'historique pertinent du client ou du groupe de clients d'une manière très générale, c'est-à-dire que les variables aléatoires $f(\cdot, s_i, x_i)$ sont simplement \mathcal{F}_T^ν -mesurables.*

Exemple 4.4.8 *Supposons les mesures $\{\nu(\omega, B), B \in \mathcal{B}_{t,0}\}$ sont finies pour tout $t \geq 0$. On définit $\Lambda_t(\omega) = \nu(\omega, [0, t] \times (0, \infty))$ et pour tout ensemble de Borel C de $(0, \infty)$, On définit*

$$Q_t(C) = \frac{\nu(\omega, [0, t] \times C)}{\nu(\omega, [0, t] \times (0, \infty))}.$$

Par conséquent,

$$\nu(\omega, [0, t] \times C) = \Lambda_t(\omega) Q_t(\omega, C).$$

Cela signifie que dans ce modèle les arrivées de saut sont choisies par un processus de Cox d'intensité aléatoire Λ_t , et les tailles de saut x_i sont choisies selon la loi Q_{s_i} pour tout i . Cela signifie que la taille du saut dépend du temps et du processus d'intensité aléatoire Λ . Un modèle avec des tailles de saut en fonction du temps est considéré comme exemple dans [17].

Remarque 4.4.1 *On note que les conditions sur le processus Λ qui déterminent le processus de Cox sont très générales. Tout processus avec des trajectoires croissantes telles que*

$\lim_{t \uparrow \infty} \Lambda_t = \infty$, a.s. est inclus. Cette inclusion où Λ est un subordonnateur additif tel que considéré comme exemple dans [2].

Conclusion Générale

Dans cette thèse, on s'est intéressé aux modèles et formules de mesure et gestion des risques et ses applications, notamment dans le domaine de la finance, comme exemples le Comité de Bâle, la Value-at-Risk et ses modèles, et le contrat stop-loss. On a utilisé les techniques de calcul de Malliavin-Skorohod pour un processus de perte cumulée L (processus additif) avec une intensité aléatoire et des tailles de saut données par f . Etant donnée une fonction h , on a trouvé une formule très générale de $\mathbb{E}[L_T h(L_T)]$, c'est une quantité pertinente en finance, elle apparait dans le calcul du modèle de mesure de risque financier à savoir l'expected shortfall ou dans le calcul de prix des contrats stop-loss qui est un outil de gestion des risques. Ici, les montants des sinistres peuvent dépendre de l'instant d'arrivée des sinistres et les deux peuvent dépendre du processus d'intensité aléatoire. Nos résultats sont les conséquences de la formule de dualité de Malliavin-Skorohod c'est une généralisation. La méthodologie appliquée dans cette thèse montre la puissance mathématique du calcul de Malliavin-Skorohod pour les processus additifs développés pour obtenir de très bons résultats en finance.

Comme perspective et extension de ces travaux on pense à l'utilisation de ces techniques de calcul de Malliavin-Skorohod pour le calcul des mesures de sensibilité (les grecques).

Bibliographie

- [1] Abada N. E .H : Mémoire de Magister : Modèles financiers avec sauts, Université de Mentouri - Constantine, (2017).
- [2] Albrecher H, Araujo-Acuna J. C, and Beirlant J : *Fitting non-stationary Cox processes : an application to fire insurance data*. North American Actuarial Journal, DOI : 10.1080/10920277.2019.1703752 (2020).
- [3] Albrecher H, Beirlant J and Teugels J : *Reinsurance : Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley (2017).
- [4] Artzner P, Delbaen F, Eidgeossische J. M, Heath. D : Coherent measures of risk, Mathematical Finance, Vol 9, No 3, 203-228, (1991).
- [5] Asmussen S, Albrecher H : *Ruin probabilities*. World Scientific (2010).
- [6] Azzouz F : Mémoire de Master : La Mesure De Risque Dans Un Marché financier, Université Mohamed Khider Biskra, (2012).
- [7] Bahi O : thèse de doctorat : Théorie des Valeurs Extrêmes : Application au Calcul de Risques, Université des Frères mentouri constantine 1, (2019).
- [8] Bakkar Y : Apports de la Théorie des Valeurs Extrêmes au calcul de la Value-at-Risk "Contributions of the Extreme Values Theory in the calculation of Value-at-Risk", Tallinn University of Technology (2018).
- [9] Benseghir S : Calcul de la VaR selon l'approche historique et la théorie des valeurs extrêmes sur un fond alternatif de Dexia Asset Management, ISUP (2006).
- [10] Benth F. E, Løkka A : Anticipative calculus for Lévy processes and stochastic differential equations. Stoch. Stoch. Rep., 76(3) :191–211, (2004).
- [11] Boiti M : Mémoire de Master : La gestion des risques obligataires. Cas de Médiainance, Université Hassan II, (2010).

- [12] Bostangi H, Fenina M, Guillet B : Value at Risk : Calcul de VaR avec intégration de scénarios de stress-tests, Université de Nice Sophia Antipolis (2012).
- [13] Bruno Portier M : Rapport de PFE Etude Des Méthodes d'estimation de la Value At Risk, (2010).
- [14] Capiński M. J, Kopp E. : Book : Portfolio Theory and Risk Management, Cambridge University Press, (2015).
- [15] Charpentier. A : Mesures de Risque, Université de Rennes 1, (2010).
- [16] Cont R, Tankov P : Book : *Financial Modelling with jump processes*. Chapman-Hall (2004).
- [17] Dassios A, Jang J. W. : *Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the Cox process with shot noise intensity*. Finance and Stochastics 7 : 73-95(2003).
- [18] Davis M.H.A, Johansson M.P : Malliavin Monte Carlo Greeks for jump diffusions. Stochastic Process. Appl., 116(1) :101–129, 2006.
- [19] Diamoutene A : Thèse : Contribution de la Théorie des Valeurs Extrêmes à la gestion et à la santé des systèmes, Université de Toulouse, (2018).
- [20] Di Nunno G , Oksendal B, Proske F : *Malliavin calculus for Lévy processes with applications to Finance*. Springer (2009).
- [21] Di Nunno G, Vives J : *A Malliavin-Skorohod calculus in L^0 and L^1 for additive and Volterra-type processes*. Stochastics 89 (1) : 142-170 (2017).
- [22] Djilali Ait. A : Mémoire de Magister : Quelques contributions à la théorie des processus de Lévy avec sauts et ses applications en finance, HEC MONTRÉAL, (2018).
- [23] Embrechts P, Klüppelberg C, and Mikosch T : *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer (1997).
- [24] Fedor M, and Morel J : Value at Risk en assurance : recherche d'une méthodologie à long terme, (2009).
- [25] Föllmer H, Schied A : *Stochastic Finance : An Introduction in Discrete Time*. Walter De Gruyter (2011).
- [26] Hillairet C , Jiao Y, Réveillac A : *Pricing formulae for derivatives in insurance using the Malliavin calculus*. Probability, uncertainty and Quantitative Risk 3 :7 (2018).

- [27] Hurlin C : Site Value-at-Risk. Master Econométrie et Statistique Appliquée, Université d'Orléans, (2006).
- [28] Kabanov J. M : Extended stochastic integrals. Teor. Veroyatnost. i Primenen., 20(4) :725-737, 1975.
- [29] Kaminsky A. B : Extended stochastic calculus for the Poisson random measures. Nats. Akad. Nauk Ukrain. Inst. Mat. Preprint, 15 :i+16, (1996).
- [30] Khadim Niang : La transmission internationale de la volatilité des rendements boursiers : une étude empirique sur la volatilité réalisée, Université de Sherbrooke, (2011).
- [31] Kiyochi I : *Spectral type of shift transformations of differential processes with stationary increments*. Transactions of the American Mathematical Society 81 : 252-263 (1956).
- [32] Mikosch T : *Non-Life Insurance Mathematics, An Introduction with Stochastic Processes*. Springer (2004).
- [33] Nualart D, Nualart E : Introduction to Malliavin Calculus, Cambridge University Press, (2018).
- [34] Nualart D, Vives J : Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. Séminaire des Probabilités XXIV. Lectures Notes in Mathematics 1426 : 154-165 (1990).
- [35] Panjer H, Willmot G : *Insurance Risk Models*. Society of actuaries, USA (1992).
- [36] Picard J : *Formules de dualité sur l'espace de Poisson*. Annales de l'IHP, section B, 32 (4) (1996).
- [37] Renaud J. F : Calcul de Malliavin, processus de Lévy et applications en finance : quelques contributions, thèse à Université de Montréal (2007).
- [38] Rhodes R : Cours : Processus de Lévy et calcul stochastique, (2010).
- [39] Sato K. I : Book : *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge (1999).
- [40] Sharpe W. F : Capital Asset Prices : A Theory Of Market Equilibrium Under Conditions Of Risk, The Journal Of Finance, 19(3) : 425-442, (1964).
- [41] Solé J. L , Utzet F, Vives J : *Canonical Lévy processes and Malliavin calculus*. Stochastic Processes and their Applications 117 : 165-187 (2007).

-
- [42] Stephen A. R : The arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, 13(3) :341-360, (1976).
- [43] Tankov P : Lévy process in finance : inverse problems and dependence modelling. PhD thesis, École Polytechnique, (2004).
- [44] Therond P. E. : Mesures et comparaison de risques, ISFA, (2005).
- [45] Yablonski A. L : *The Calculus of variation for Processes with Independent Increments*. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 38 (2) : 669-701 (2008).
- [46] Yablonski A. L : *The Malliavin Calculus for Processes with Conditionally Independent Increments*. In F. E. Benth, G. Di Nunno, T. Lindstrøm, B. Øksendal and T. Zhang (editors), *Stochastic Analysis and Applications, Abel Symposium 2005*. Springer (2007).