وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA

جامعة باجي مختار - عنابة -

Année : 2021

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT

RESOLUTION DE PROBLEMES ELLIPTIQUES

Option : Equations Différentielles et Applications

Présentée Par :

ZITOUNI Mohamed

DIRECTEUR DE THÈSE :	**DJELLIT Ali**	Prof.	U.B.M. ANNABA
CO-DIRECTEUR :	**GHANNAM Lahcen**	Prof.	U.P.S. TOULOUSE

Devant le jury :

PRÉSIDENT:	**DJELLIT Ilham**	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	**AÏSSAOUI Med Zine**	Prof.	U. GUELMA
EXAMINATEUR :	**DJEBABLA Abdelhak**	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	**NOURI Fatma Zohra**	Prof.	U.B.M. ANNABA

Dédicace

Je dédie ce travail à :

ma **mère** et mon **père**.
Ma **femme**.
A mes **frères**
et mes **soeurs**, et toute la famille **ZITOUNI.**
A mes **chers amis**.

Remerciements

Ce travail a été accompli au sein du **Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation (LMDM)** de l'université de Annaba, sous la direction de Monsieur **Ali Djellit**, Professeur à l'université d'Annaba, que je tiens à lui exprimer ici ma gratitude , le remercier vivement pour m'avoir proposé le sujet de recherche et pour la disponibilité qu'il m'a accordée tout au long de ces années. Je remercie aussi Monsieur **Lahcen Ghannam**, Professeur de l'université Paul Sabatier pour m'avoir bien reçu au sein du laboratoire **MIP** durant mon stage. Ses critiques constructives et ses conseils m'ont été très précieux pour parachever cette thèse.

Mes remerciements vont également à Madame **Djellit Ilham**, Professeur à l'université de Annaba, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

De même je remercie vivement Monsieur **Mohamed Zine Aïssaoui**, Professeur à l'université de Guelma, Monsieur **Djebabla Abdelhak** et Madame **Fatma Zohra Nouri**, tous deux Professeurs à l'université de Annaba pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir examiner ce travail et faire partie du jury.

Enfin, je n'oublie pas de remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation **(LMDM)** de l'université Badji Mokhtar de Annaba.

Résumé

RESOLUTION DE PROBLEMES ELLIPTIQUES

Par

Zitouni Mohamed

Nous étudions des systèmes (équations) elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur p(x)-Laplacien dont la particularité est d'être non homogène. Il s'agit dans la première partie de montrer l'existence d'états fondamentaux (ou solutions radiales) sous certaines conditions d'homogénéité sur les non linéarités. On utilise la technique du blow-up soutenue par l'application du degré topologique de Leray-Schauder. Dans la seconde partie nous considérons une équation elliptique non linéaire avec des conditions de croissance exponentielles sur les non linéarités. L'approche utilisée reste dans la théorie des points critiques. Nous montrons que la fonctionnelle d'énergie associée au problème vérifie les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne, et que ses points critiques sont précisément les solutions à déterminer.

Mots clés :

- Systèmes elliptiques non-linéaires.
- L'opérateur p(x)-Laplacien.
- Degré topologique de Leray-Schauder.
- Théorème de Passe-Montagne.
- Condition de Palais-Smale.
- Norme de Luxemburg.
- Espaces de Sobolev generalises.

Abstract

ELLIPTIC PROBLEM SOLVING

By

Zitouni Mohamed

We study nonlinear elliptic systems (equations) involving the p(x)-Laplacian operator whose particularity is to be nonhomogeneous. In the first part, it is about showing the existence of fundamental states (or radial solutions) under certain conditions of homogeneity on the nonlinearities. We use the blow-up technique supported by the application of the Leray-Schauder topological degree. In the second part we consider a nonlinear elliptic equation with exponential growth conditions on the nonlinearities. The used approach remains in the theory of critical points. We show that the energy functional associated with the problem satisfies the geometric conditions of Mountain Pass Theorem, and that its critical points are precisely the solutions to be determined.

Keywords :

- Nonlinear elliptic systems.
- p(x)-Laplacian operator.
- Leray-Schauder topological degree.
- Mountain-Pass theorem.
- Palais-Smale condition.
- Luxemburg norm.
- generalized Sobolev spaces.

ملخص

حل مسألة إهليليجيه

زيتوني محمد

ندرس أنظمة (معادلات) إهليلجية غير خطية تتضمن P(x) لابلاسي الذي تكون خصوصيته غير متجانسة

الجزء الأول هو إظهار وجود الحالات الأساسية (أو الحلول الشعاعية) في ظل ظروف معينة من التجانس على اللاخطية. نستخدم تقنية التفجير مدعومة بتطبيق الدرجة الطوبولوجية لـ

Leray-Schauder

في الجزء الثاني، نعتبر المعادلة الإهليليجية غير الخطية مع ظروف النمو الأسي على اللاخطية. تبقى النظرية المستخدمة نفسها نظرية النقاط الحرجة. نظهر أن وظيفة الطاقة المرتبطة بالمسألة تفي بالشروط الهندسية لنظرية **Passe-Montagne** وأن نقاطه الحرجة على وجه التحديد هي بالضبط الحلول التي يتعين تحديدها.

الكلمات المفتاحية:

- الأنظمة غير الخطية البيضاوية.

- عامل التشغيل p (x) -Laplacian .

- درجة Leray-Schauder الطوبولوجية.

- نظرية باس مونتاني.

شرط بالي سمال .

- معيار لوكسمبورغ .

- مساحات سوبوليف المعممة.

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$.

$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω.

$x = (x_1, x_2, ..., x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$.

$dx = dx_1 dx_2 ... dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω.

∇u : gradient de u.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ différentiables et à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}^+(\Omega)$: espace des fonctions positives de $\mathcal{D}$.

$C_0(\Omega)$: espace des fonctions continues nulles au bord de Ω.

$C^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω.

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance $p-$ème intégrables sur Ω pour la mesure dx.

$\|u\|_p = \left(\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$

Soit $p(.) : [1, +\infty]$ une fonction mesurable.

$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \int\limits_\Omega |u|^{p(x)} \, dx < +\infty \right\}$.

$\|u\|_{p(x)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$: norme de Luxemburg.

$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) ; \nabla u \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}$

$\|u\|_{1,p(x)} := \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$

$\rho(u) = \int\limits_\Omega |u|^{p(x)} \, dx$: le modulaire.

$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & \text{si } p(x) < N \\ +\infty & \text{si } p(x) \geq N \end{cases}$: exposant critique de $p(x)$.

$p^+ = \sup p(x)$.

$p^- = \inf p(x)$.

B_R : Boule de $\mathbb{R}^N$ de rayon R centrée à l'origine.

$\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \right)$: $p(x)-$Laplacien de u.

$\dfrac{\partial F}{\partial u}$: dérivée partielle de F par rapport à u.

$u_n \to u$: convergence forte de u_n vers u.

$u_n \rightharpoonup u$: convergence faible de u_n vers u.

$u^+ = \max(u, 0)$; $u^- = \max(-u, 0)$.

p.p. : presque partout

Plan de Travail

Dans **le chapitre I,** nous introduisons les espaces $W^{1,p(x)}$ avec quelques unes de leurs propriètés essentielles. On apprend précisément que les inégalités type Poincaré, Hölder et certaines immersions type Sobolev sont conservées. Nous rappelons ensuite certains théorèmes classiques de la théorie des points fixes et celle des points critiques.

Le chapitre II porte sur la résolution d'un système elliptique de la forme :

$$\begin{aligned} -\Delta_{p(x)}u &= a_{11}(|x|)f_{11}(u) + a_{12}(|x|)f_{12}(v) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_{q(x)}v &= a_{21}(|x|)f_{21}(u) + a_{22}(|x|)f_{22}(v) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{S}$$

Ici nous montrons que si les fonctions f_{ij} vérifient certaines conditions d'homogénéité au voisinage de zéro et à l'infini, le système (S) admet des solutions radiales en adaptant la technique du blow-up soutenue par l'application du degré topologique de Leray-Schauder.

Le chapitre III est consacré à la résolution d'une équation elliptique de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u) \quad dans \quad \Omega, \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}. \\ u \geq 0. \end{cases} \tag{P}$$

Nous prouvons que la fonctionnelle d'énergie associée à l'équation (P) satisfait les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne pour établir l'existence de solution non triviale.

Introduction

L'étude des systèmes elliptiques non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u,v) \\ -\Delta_{q(x)}v = g(x,u,v) \end{cases},$$

est une longue évolution qui remonte au problèmes elliptiques faisant intervenir l'opérateur de Laplace Δ, modélisant plusieurs phénomènes à commencer par l'écoulement des fluides newtoniens, les mouvements vibratoires (ou problèmes spectraux), l'optique... . Généralment, la résolution de ces problèmes se fait sur les espaces de sobolev H^m. On utilise souvent le théorème de Riesz, soit la théorie des opérateurs à inverses compacts, soit encore le principe du maximum pour établir l'éxistence de solution, et la formule de Courant-Fischer pour la determination des valeurs spectrales[13],[21], [29], ,... Viennent ensuite les modèles traduisant la dynamique des fluides dits non newtoniens et concernemt les matériaux élastiques et pseudo-plastiques. Les modèles mathématiques correspondants font intervenir l'opérateur homogène Δ_p ($1 \leq p < 2$ ou bien $p > 2$). Le cadre fonctionnel approprié reste les espaces de Sobolev $W^{m,p}$. Les différentes approches utilisées gravitent autour de la théorie des points fixes (théorème de Schauder sur les opérateurs compacts et le degré topologique) et celles des points critiques (théorème de passe-montagne, théorème de la fontaine, théorie de Liujternik-Schnirelmann). voir par exemple les travaux de [18], [20], [23], ...

Il y a presque deux décennies, apparaissent les problèmes d'imagerie, les problèmes électro-rhéologiques qui sont étroitement liés aux matériaux changeant de viscosité lorsque ils sont traversés par des champ électro-magnétiques, la loi de Darcy. Nous voyons alors apparaitre l'opérateur $\Delta_{p(x)}$ dans les modèles mathématiques qui interprétent ces phénomènes. Cet opérateur reste toute fois non homogène et engendre des difficultés supplémentaires de manipulations par rapport à Δ_p. L'introduction des exposants non standards dans les équations représente la principale caractéristique. A lire les travaux de [5], [7], [8], [14], [24], [32], ...

L'étude se fait sur des espaces de Banach $W^{m,p(x)}$, dits espaces de Sobolev-Lebesgue généralisés, qui émanent directement des espaces beaucoup plus larges que sont les espaces de Musielak-Orlicz. Cependant si l'apparition de ces derniers date d'il y a déjà un certain nombre années (1931), leur utilisation s'avère relativement récente. Ceci s'explique par le fait que ces espaces souffrent de deux handicaps majeurs : il n'y a pas de stabilité par translation et le produit de convolution n'a pas lieu. Fondamentalement, nous utilisons soit la théorie des points fixes, soit celle des points critiques pour montrer l'existence de solution. Les systèmes étant non linéaires, l'unicité de la solution si elle existe, reste toujours posée.

Table des matières

Résumé iii

Abstract iv

Introduction ix

1 Notions préliminaires 1

1 Introduction aux espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable . 1

1.1 Les espaces de Musielak-Orlicz 1

2 Espaces de Lebesgue à exposant variable 7

3 Espaces de Lebesgue généralisés 8

4 Espaces de Sobolev généralisés 10

5 Théorie des points fixes 12

5.1 Degré topologique de Brouwer & de Leray-Schauder 12

5.2 Théorème de Passe-Montagne 14

2 Systèmes elliptiques non-linéaire faisant intervenir l'opérateur $(p(x)-q(x))-$Laplacien **17**

1 Introduction 17

2 Préliminaires 18

3 Hypothèses 20

4 Existence de solutions 21

3 P (x) - Laplacien avec croissance polynomiale sous-critique et exponentielle sous-critique **38**

1 Introduction 38
2 Résultats préliminaires 40
3 Hypothèses
41
4 Enoncé du résultat 41
4.1 Croissance polynomiale sous-critique 41
4.2 Croissance exponentielle sous-critique 49

4 Conclusion et Perspectives **55**

Bibliographie **57**

Chapitre 1

Notions préliminaires

1 Introduction aux espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable

Les espaces de Lebesgue-Sobolev sont des cas particuliers des espaces de Musielak-Orlicz. La topologie de ces derniers est gouvernée par des pseudo-normes dits modules qui décrivent de manière rigoureuse la notion de convergence.

1.1 Les espaces de Musielak-Orlicz

L'introduction des espaces de Musielak-Orlicz réeles fait suite à la question de savoir qu'étant donné deux suites x_i et p_i réelles telles que,

$$\sum (x_i)^{p_i} < \infty,$$

comment établir une condition nécéssaire et suffisante sur la suite y_i pour que

$$\sum (x_i y_i)^{p_i} < \infty.$$

Immédiatement, la réponse nous renvoie à l'inégalité de Hölder dans les espaces l^p. Autrement dit la série $\sum (\lambda y_i)^{p'_i}$ doit être convergente pour un certain $\lambda > 0,\ p'_i$

étant le conjugué de Sobolev de p_i. Orlicz a montré que cette inégalité reste valable sur les espaces $L^{p(\cdot)}$.

Définition 1.1 *Soit X un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Une fonction $\varrho : X \to [0, \infty[$ est appelée un semimodule sur X si elle vérifie les propriétés suivantes :*

(**a**) $\varrho(0) = 0$.

(**b**) $\varrho(\lambda x) = \varrho(x)$ *pour tout* $x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$ *avec* $|\lambda| = 1$.

(**c**) ϱ *est convexe.*

(**d**) ϱ *est continue à gauche.*

(**e**) $\varrho(\lambda x) = 0$ *pour tout* $\lambda > 0$ *implique que* $x = 0$.

Le semimodule ϱ est appelé un module si

(**f**) $\varrho(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Un semimodule ϱ est continu si

(**g**) *l'application* $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *pour tout* $x \in X$.

Remarque 1.1

L'application $\lambda \to \varrho(\lambda x)$ est non décroissante sur $[0, +\infty[$ en vertu de la positivité et la convexité de ϱ

De plus

$$\begin{aligned} \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda|\, x) \leq |\lambda|\, \varrho(x) \qquad \textit{pour tout } |\lambda| \leq 1, \\ \varrho(\lambda x) &= \varrho(|\lambda|\, x) \geq |\lambda|\, \varrho(x) \qquad \textit{pour tout } |\lambda| \geq 1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En effet si $|\lambda| \leq 1$, alors $\forall \beta > 0$ tel que $\beta + |\lambda| = 1$, on a $\varrho(\beta.0 + |\lambda|\, x) \leq \beta \varrho\,(0) + |\lambda|\, \varrho(x)$. Par contre si $|\lambda| \geq 1$, on obtient directement de la première inégalité $\varrho(\frac{1}{|\lambda|}x) \leq \frac{1}{|\lambda|}\varrho(x)$. Il suffit ensuite de substituer x par $X = \frac{1}{|\lambda|}x$ pour en déduire le résultat.

Si $1 \leq p < \infty$, alors

$$\varrho_p(f) := \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx,$$

définit un module sur $L^p(\Omega)$.

Définition 1.2 *Si ϱ est un semimodule ou module sur X, alors l'espace*

$$X_\varrho := \left\{ x \in X : \lim_{\lambda \to 0} \varrho(\lambda x) = 0 \right\}$$

est appelé espace semimodulaire ou espace modulaire respectivement.

On peut définir X_ϱ de manière équivalente par :

$$X_\varrho := \{ x \in X : \varrho(\lambda x) < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \} .$$

Théorème 1.1 *Soit ϱ un semimodule sur X, alors X_ϱ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé. Sa norme est appelée norme de Luxemburg. Elle est donnée*

$$\textit{par} \ : \|x\|_\varrho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho(\frac{x}{\lambda}) \leq 1 \right\} .$$

Soit $x, \ y \in X_\varrho$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bien évidemment $\alpha x \in X_\varrho$ et par la convexité de ϱ on a directement :

$$0 \leq \varrho(\lambda(x+y)) \leq \frac{1}{2}\varrho(2\lambda x) + \frac{1}{2}\varrho(2\lambda y) \to 0, \quad \lambda \to 0.$$

En outre, à partir de la définition de X_ϱ :

$$\|x\|_\varrho < \infty \ \ \textit{et} \ \|0\|_\varrho = 0.$$

D'autre part

$$\|\alpha x\|_\varrho := \inf \left\{ \lambda > 0 : \ \varrho(\frac{\alpha x}{\lambda}) \leq 1 \right\} = \inf \left\{ |\alpha| \, \beta > 0 : \ \varrho(\frac{x}{\beta}) \leq 1 \right\} = |\alpha| \, \|x\|_\varrho .$$

Puisque
$\varrho(x/\|x\|_\varrho) \leq 1$ *et* $\varrho(y/\|y\|_\varrho) \leq 1$, *en vertu de la convexité de ϱ on obtient :*

$$\varrho\left(\frac{x+y}{\|x\|_\varrho + \|y\|_\varrho}\right) \leq \frac{\|x\|_\varrho}{\|x\|_\varrho + \|y\|_\varrho}\varrho\left(x/\|x\|_\varrho\right) + \frac{\|y\|_\varrho}{\|x\|_\varrho + \|y\|_\varrho}\varrho\left(y/\|y\|_\varrho\right) \leq 1.$$

C'est-à-dire :

$$\|x+y\|_\varrho \leq \|x\|_\varrho + \|y\|_\varrho .$$

Si $\|x\|_\varrho = 0$ *alors* $\varrho(\alpha x) \leq 1$ *pour tout* $\alpha > 0$.

$$\varrho(\lambda x) \leq \beta \varrho\left(\frac{\lambda x}{\beta}\right) \leq \beta, \qquad \beta \in (0,1] .$$

Lemme 1.1 *Soit* ϱ *un semimodule sur* X *et* $x_k \in X_\varrho$. *Alors* $x_k \to 0$ *pour* $k \to \infty$ *si et seulement si* $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho(\lambda x_k) = 0$ *pour tout* $\lambda > 0$.

Preuve. Supposons que $\|x_k\|_\varrho \to 0$ et $\lambda > 0$. Alors $\|K\lambda x_k\|_\varrho \leq 1$ pour tout $K > 1$ et pour k grand, ainsi $\varrho(K\lambda x_k) \leq 1$ pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand on a :

$$\varrho(\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}\varrho(K\lambda x_k) \leq \frac{1}{K}.$$

Ceci implique que $\varrho(\lambda x_k) \to 0$.

Supposons maintenant que $\varrho(\lambda x_k) \to 0$ pour tout $\lambda > 0$, alors $\varrho(\lambda x_k) \leq 1$ pour tout $k \geq k_0$. En particulier, $\|x_k\|_\varrho \leq \dfrac{1}{\lambda}$ pour tout $k \geq k_0$ pour un certain k_0. Comme $\lambda > 0$ est arbitraire, on obtient $\|x_k\|_\varrho \to 0$. ■

Définition 1.3 *Soit* ϱ *un semimodule sur* X *et* $x_k,\ x \in X_\varrho$. *Alors* x_k *est convergente en module* ($\varrho-$*convergente*) *vers* x *s'il existe* $\lambda > 0$ *tel que* $\varrho(\lambda(x_k - x)) \to 0$. *Notons ceci par* $x_k \to x$ (*en* ϱ).

Lemme 1.2 *Soit* X_ϱ *un espace semimodulaire, alors la convergence modulaire et la convergence en norme sont équivalentes si et seulement si*

$$\varrho(x_k) \to 0 \text{ implique que } \varrho(2x_k) \to 0.$$

Preuve. Soit $\varrho(x_k) \to 0$ avec $x_k \in X_\varrho$. Alors $x_k \to 0$ et par le Lemme (1.1) il s'ensuit que $\varrho(2x_k) \to 0$.

Soit $x_k \in X_\varrho$. avec $\varrho(x_k) \to 0$. Nous devons montrer que $\varrho(\lambda x_k) \to 0$ pour tout $\lambda > 0$. Choisissons $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m \geq \lambda$. Alors par l'application répétée de la supposition on obtient $\lim_{k\to\infty} \varrho(2^m x_k) = 0$. Alors

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \varrho(\lambda x_k) \leq \lambda 2^{-m} \lim_{k\to\infty} \varrho(2^m x_k) = 0.$$

Ceci prouve que $x_k \to 0$. ■

Lemme 1.3 ***(Propriété de la boule unité norme et module)***

Soit ϱ un semimodule sur X. Alors $\|x\|_\varrho \leq 1$ et $\varrho(x) \leq 1$ sont équivalents. Si ϱ est continu alors $\|x\|_\varrho < 1$ et $\varrho(x) < 1$ sont aussi équivalents. De même pour $\|x\|_\varrho = 1$ et $\varrho(x) = 1$.

Preuve. Si $\varrho(x) \leq 1$, alors par la définition de $\|.\|_\varrho$ on a $\|x\|_\varrho \leq 1$. alors $\varrho(x/\lambda) \leq 1$. Comme ϱ est continue à gauche il s'en suit que $\varrho(x) \leq 1$.

Puisque ϱ est continue alors si $\|x\|_\varrho < 1$ alors il existe $\lambda < 1$ pour lequel $\varrho(x/\lambda) \leq 1$.

Donc par (1.1) il vient que

$$\varrho(x) \leq \lambda \varrho(x/\lambda) \leq \lambda < 1.$$

D'autre part si $\varrho(x) < 1$ alors par la continuité de ϱ il existe $\gamma > 1$ avec $\varrho(\gamma x) < 1$.

Donc $\|\gamma x\|_\varrho < 1$ et $\|x\|_\varrho < 1/\gamma < 1$. L'équivalence de $\|x\|_\varrho = 1$ et $\varrho(x) = 1$ est une. ■

Corollaire 1.1 *Soit ϱ un semimodule sur X et $x \in X_\varrho$.*

(**a**) *Si $\|x\|_\varrho \leq 1$ alors $\varrho(x) \leq \|x\|_\varrho$.*

(**b**) *Si $1 > \|x\|_\varrho$ alors $\|x\|_\varrho \leq \varrho(x)$.*

(**c**) $\|x\|_\varrho \leq \varrho(x) + 1$.

Preuve. (a) Le résultat est évident pour $x = 0$. Supposons que $0 < \|x\|_\varrho \leq 1$.

Par la propriété de la boule unité (Lemme (1.3)) et le fait que $\left\| x/\|x\|_\varrho \right\|_\varrho = 1$ on obtient que $\varrho(x/\|x\|_\varrho) \leq 1$. Donc $\|x\|_\varrho \leq 1$ et il résulte de (1.1) que $\varrho(x)/\|x\|_\varrho \leq 1$

(b) Supposons que $\|x\|_\varrho > 1$ alors $\varrho(x/\lambda) > 1$ pour $1 < \lambda < \|x\|_\varrho$ et par (1.1) il s'en suit que $1 < \varrho(x)/\lambda$. Comme λ est arbitraire alors $\varrho(x) \geq \|x\|_\varrho$.

(c) Ce point résulte immédiatement de (b). ■

Il est intéressant de noter que la notion de module reste intimement à la notion de $\Phi - fonction$, que nous allons immédiatement définir.

Définition 1.4 *Une fonction convexe semi- continue inférieurement* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *telle que* $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ *et* $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = 0$ *est dite une* $\Phi - fonction$*. Elle est dite positive si* $\varphi(t) > 0$ *pour tout* $t > 0$.

Lemme 1.4 *Soient* $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *et* φ *son prolongement pair sur* $\mathbb{R}$*, c'est-à-dire* $\varphi(t) = \varphi(|t|)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Alors φ *est une* $\Phi-$*fonction si et seulement si* φ *est un semimodule sur* $\mathbb{R}$ *avec* $X_\varrho = \mathbb{R}$*. De plus,* φ *est positive si et seulement si* φ *est un module sur* $\mathbb{R}$ *avec* $X_\varrho = \mathbb{R}$.

Soit $1 \leq p < \infty$,

$$\varphi_p(t) := \frac{1}{p} t^p.$$

Définition 1.5 *Soit* $(A, \sum, \mu)$ *un espace complet de mesure* $\sigma - finie$*. Une fonction réelle* $\varphi : A \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *est dite une* $\Phi-$*fonction généralisée sur* $(A, \sum, \mu)$ *si :*

(a) $\varphi(y, .)$ *est une* $\Phi - fonction$ *pour tout* $y \in A$.

(b) $y \to \varphi(y,t)$ *est mesurable pour tout* $t \geq 0$.

Dans la suite, on écrit $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ pour dire que φ est une $\Phi-$fonction généralisée sur $(A, \sum, \mu)$.

On désigne par $L^0(A, \mu)$ l'espace de fonctions $\mu-$mesurable à valeur dans le corps $\mathbb{K}$.

Définition 1.6 *Soit* $\varphi \in \Phi(A, \mu)$ *et soit* ϱ_φ *donné par*

$$\varrho_\varphi(f) = \int_A \varphi(y, |f(y)|) d\mu(y)$$

pour tout $f \in L^0(A,\mu)$*. Alors l'espace semimodulaire.*

$$\begin{aligned} L^0(A,\mu)_{\varrho_\varphi} &= \left\{ f \in L^0(A,\mu) : \lim_{\lambda \to 0} \varrho_\varphi(\lambda f) = 0 \right\} \\ &= \left\{ f \in L^0(A,\mu) : \varrho_\varphi(\lambda f) < \infty \text{ pour certain } \lambda > 0 \right\} \end{aligned}$$

sera appelé l'espace de Musielak-Orlicz et est désigné par $L^\varphi(A,\mu)$ *où* L^φ *muni de la norme* $\|.\|_{\varrho_\varphi}$ *ou* $\|.\|_\varrho$ *qui est donnée par :*

$$\|f\|_\varrho = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_\varphi(\frac{f}{\lambda}) \le 1 \right\}.$$

L'espace de Musielak-Orlicz est appelé aussi espace d'Orlicz généralisé. On retrouve en particulier de manière analogue les résultats classiques de convergence dans les espaces de Lebesgue.

Lemme 1.5 *Soit* $\varphi \in \Phi(A,\mu)$ *et* $f_k,\ f,\ g \in L^0(A,\mu)$.

(**a**) *Si* $f_k \to f$ $\mu-$*presque partout, alors* $\varrho_\varphi(f) \le \lim_{k\to\infty} \inf \varrho_\varphi(f_k)$.

(**b**) *Si* $|f_k| \nearrow |f|$ $\mu-$*presque partout, alors* $\varrho_\varphi(f) = \lim_{k\to\infty} \inf \varrho_\varphi(f_k)$.

(**c**) *Si* $f_k \to f$ $\mu-$*presque partout et* $|f_k| \le |g|$ $\mu-$*presque partout, et* $\varrho_\varphi(\lambda g) < \infty$ *pour tout* $\lambda > 0$*, alors* $f_k \to f$ *dans* L^φ.

2 Espaces de Lebesgue à exposant variable

Définitions et Propriétés de base

On note $\mathcal{P}(A,\mu)$ l'ensemble de toutes les fonctions $\mu-$mesurable $p : A \to [1,\infty)$. En fait p est dit exposant variable sur A. On pose $p^- := \inf ess_{x\in A} p(x)$ et $p^+ := \sup ess_{x\in A} p(x)$.

Soit $p \in \mathcal{P}(A,\mu)$ et soit $\varphi_{p(x)}(t) = |t|^{p(x)}$(ou bien $\frac{1}{p}|t|^{p(x)}$) ; alors l'expression

$$\varrho_{L^{p(\cdot)}(A)} = \int_A \varphi_{p(x)}(|f(x)|)dx$$

est semimodule.

Définition 2.1 *On définit l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(.)}(A,\mu)$ comme étant l'espace de Musielak-Orlicz $L^{\varphi_{p(x)}}(A,\mu)$ muni de la norme :*

$$|.|_{L^{p(.)}(A,\mu)} = \|.\|_{L^{\varrho_{p(x)}}(A,\mu)}.$$

En particulier, l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}(A,\mu)$ est

$$L^{p(x)}(A,\mu) = \left\{ f \in L^0(A,\mu) : \lim_{\lambda \to 0} \varrho_{L^{p(x)}(A)}(\lambda f) = 0 \right\}.$$

$$L^{p(x)}(A,\mu) = \left\{ f \in L^0(A,\mu) : \varrho_{L^{p(x)}(A)}(\lambda f) < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0 \right\}.$$

muni de la norme

$$|f|_{L^{p(x)}(A,\mu)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \varrho_{L^{p(x)}(A)}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1 \right\}.$$

Si μ est la mesure de Lebesgue, on écrit simplement $L^{p(x)}(\Omega)$.

3 Espaces de Lebesgue généralisés

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue-Sobolev à exposant variable dits communément espaces de Sobolev généralisés (voir par exemple [5], [14], [20] et [24]).

Nous définissons l'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$ par

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \ u \text{ mesurable à valeurs réelles, } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} \, dx < \infty \right\}.$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $p^- \geq 1$.

Nous notons par $L_{+}^{\infty}(\Omega)$ le sous ensemble de $L^{\infty}(\Omega)$, d'expression :

$$L_{+}^{\infty}(\Omega)=\{p\in L^{\infty}(\Omega):\inf ess\ p\geq 1\}.$$

Nous désignons par modulaire (module) ρ la quantité

$$\rho(u)=\int_{\Omega}|u|^{p(x)}\,dx.$$

Soit la quantité définie sur l'espace $L^{p(x)}(\Omega)$ par

$$\|u\|_{p(x)}=\inf\left\{\lambda>0,\ \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right)\leq 1\right\}.$$

Après cette brève présentation, la proposition suivante met en relief le lien entre les normes et les modules.

Proposition 3.1 *Si $u\in L^{p(x)}(\Omega)$ alors,*

(**1**) $\|u\|_{p(x)}<1\,(=1;>1)$ *si et seulement si* $\rho(u)<1\,(=1;>1)$.

(**2**) *Si* $\|u\|_{p(x)}>1$, *alors* $\|u\|_{p(x)}^{p^{-}}\leq\rho(u)\leq\|u\|_{p(x)}^{p^{+}}$.

(**3**) *Si* $\|u\|_{p(x)}<1$, *alors* $\|u\|_{p(x)}^{p^{+}}\leq\rho(u)\leq\|u\|_{p(x)}^{p^{-}}$.

On peut consulter l'ouvrage de Diening [15] pour la démonstration. Maintenant, si $p(x)$ et $p'(x)$ sont tels que $\dfrac{1}{p(x)}+\dfrac{1}{p'(x)}=1$, nous retrouvons presque toutes les propriétés bien connues dans les espaces de Lebesgue classiques ; en premier lieu les propriétés fondamentales de la dualité, à savoir que :

Proposition 3.2 *L'espace dual de $L^{p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est $L^{p'(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$.*

Proposition 3.3 *Si $p^{-}>1$ et $p'\in L_{+}^{\infty}(\Omega)$, on obtient l'équivalent de l'inégalité de Hölder.*

Pour tout $u\in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v\in L^{p'(x)}(\Omega)$, on a :

$$\left|\int_{\Omega}u(x)\,v(x)\,dx\right|\leq\left(\frac{1}{p^{-}}+\frac{1}{p'^{-}}\right)\|u\|_{p(x)}\,\|v\|_{p'(x)}.$$

Preuve. Posons $\|u\|_{p(x)} = a$ et $\|v\|_{p'(x)} = b$. D'après l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \frac{u(x)\, v(x)}{ab} dx \right| &\leq \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \int_\Omega \frac{1}{p'(x)} \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{p'(x)} dx \\
&\leq \frac{1}{p^-} \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{a} \right|^{p(x)} dx + \frac{1}{p'^-} \int_\Omega \left| \frac{v(x)}{b} \right|^{p'(x)} dx \\
&= \frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

4 Espaces de Sobolev généralisés

Ces espaces représentent le cadre fonctionnel dans lequel nous allons chercher les solutions. Ces espaces sont structurellement identiques aux espaces de Sobolev classiques. et sont introduits de manière analogue. En effet, on désigne par $W^{1,p(x)}(\Omega)$, l'espace de toutes les fonctions (classes) appartenant à $L^{p(x)}$ ainsi que leurs dérivées. Autrement dit l'espace

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), \quad j = 1, ..., N \right\}.$$

Ici $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ désigne la dérivée partielle de u et satisfait à l'équation

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \text{ pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nous munissons l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}.$$

En outre, si on note le gradient de u par $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$, on peut définir, de manière équivalente, l'espace $W^{1,p(x)}(\Omega)$ par

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega), |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\right\}$$

et le munir de la norme

$$\|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} .$$

Nous allons suite à la définition ci-dessus énoncer les propriétés de séparabilité, de convexité et d'immerssion dont jouissent ces espaces.

Si on désigne $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ comme la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ alors :

Proposition 4.1 *L'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est aussi un espace de Banach, réflexif et séparable.*

Proposition 4.2 *Si Ω est borné, alors pour tout $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$, $p(x) \leq q(x)$, on a*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset W^{1,q(x)}(\Omega),$$

avec injection continue.

Proposition 4.3 *Si $p, q \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ sont tels que $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, alors*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

avec injection continue et compacte.

En outre si $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ par rapport à la norme de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, on met en evidence l'inégalité de Poincaré.

Pour $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $p^- > 1$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|u\|_{p(x)} \leq C \|\nabla u\|_{p(x)}, \ \forall\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

Ceci nous enmène à dire que les normes $\|u\|, \|\nabla u\|_{p(x)}$ sont équivalentes sur $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

5 Théorie des points fixes

5.1 Degré topologique de Brouwer & de Leray-Schauder

Le degré topologique est un outil très puissant pour établir des résultats d'existence. Selon que les équations opérationnelles sont posées sur des espaces de dimension finie ou infinie, on fait appel soit au degré topologique de Brouwer, soit à celui de Leray-Schauder. Nous allons tout d'abord définir ce qu'est le dégré topologique. Pour cela on se donne un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, de frontière $\partial\Omega$, une fonction continue $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ et un point arbitraire $b \in \mathbb{R}^N$. L'idée du degré topologique consiste à associer au triplet (f, Ω, b) un entier dépendant continûment de f et de b de telle sorte que l'équation :

$$f(x) = b, \quad x \in \Omega,$$

admet une solution si cet entier est non nul.

Définition 5.1 *Soient $N \geq 1$ un entier, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, une fonction $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ et $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $b \notin f(\partial\Omega)$. On considère $0 < \varepsilon < dist(b, f(\partial\Omega))$ et une fonction $\varphi \in C(]0, \infty[, \mathbb{R})$ à support compact contenu dans $]0, \varepsilon[$, et telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1.$$

On appelle degré topologique de Brouwer de f dans Ω par rapport au point cible b le nombre

$$\deg_B(f, \Omega, b) := \int_{\Omega} \varphi(|f(x) - b|)J_f(x)dx.$$

avec $f(x) = b,\ x \in \Omega$, et J_f désigne le jacobien de f.

Bien que le degré topologique de Brouwer est décrit par une expression intégrale, sa valeur est entière (voir par exemple [22]). Encore une fois, ce degré est d'usage courant lorsque les équations sont définies sur des espaces euclidiens. Il faut observer qu'il n'est pas applicable en dimension infinie.

L'une des propriétés importantes du degré est sa stabilité par rapport à f. Ceci est formulé dans la proposition suivante.

Proposition 5.1 *Si $f_1,\ f_2 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ sont deux fonctions continues telles que $b \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$ et*

$$\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \frac{1}{4} dist\,(b, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega))\,,$$

alors on a

$$\deg_B(f_1,\ \Omega,\ b) = \deg_B(f_2,\ \Omega,\ b).$$

A contrario, le degré topologique de Leray-Schauder est le mieux indiqué en dimension infinie. Bien évidemment, ce dernier est une généralisation du degré topologique de Brouwer et correspond dans une certaine mesure à définir le degré d'une perturbation de l'identité I par un opérateur compact T. La proposition ci-dessus nous aide de manière intuitive à le définir.

Soit Ω un ouvert borné d'un espace de Banach X et $T : \overline{\Omega} \to X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Ceci se traduit par l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout u on ait :

$$\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon.$$

Par conséquent, il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie E_ε de X et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \to E_\varepsilon$ tels que :

$$\begin{array}{lll} \forall u & \in & \overline{\Omega}, \qquad \|T_\varepsilon u - Tu\| \leq \varepsilon, \\ \forall u & \in & \partial\Omega, \qquad \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon. \end{array}$$

Il reste à insérer E_ε dans un sous-espace de dimension finie F de X tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \varnothing$ et de considérer que l'opérateur $I - T_\varepsilon$ est défini de Ω_F dans F. De ce fait on peut parler de son degré topologique au sens de Brouwer.

Définition 5.2 *On définit le degré topologique de Leray-Schauder par :*

$$\deg_{LS}(I-T,\ \Omega,\ 0) = \deg_B(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $b \notin (I-T)(\partial\Omega)$, le degré de $I-T$ dans Ω par rapport à la cible b est défini comme étant :

$$\deg_{LS}(I-T,\ \Omega,\ b) = \deg_{LS}(I-T-b,\ \Omega, 0).$$

Il en résulte de la définition ci-dessus les propriétés analogues à celles du degré topologique de Brouwer.

▷ **Propriété de normalisation**

$$\deg_{LS}(I, \Omega, x) = 1, \quad \forall x \in \Omega.$$

▷ **Propriété d'additivité**

Si $\Omega_1,\ \Omega_2$ sont des ouverts disjoints inclus dans Ω et $T : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to \Omega$ sans point fixe sur $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, alors :

$$\deg_{LS}(I-T,\ \Omega_1 \cup \Omega_2,\ 0) = \deg_{LS}(I-T, \Omega_1,\ 0) + \deg_{LS}(I-T, \Omega_2,\ 0).$$

▷ **Propriété de l'invariance par homotopie**

Soit $b \in X$ et $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ une application compacte telle que pour tout $(u,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$ on ait : $u - H(u,t) \neq b$. Alors le degré

$\deg_{LS}(I - H(.,t), \Omega, b)$ est constant pour $t \in [0,1]$:

$$\deg_{LS}(I - H(.,t), \Omega, b) = \deg_{LS}(I - H(.,0), \Omega, b).$$

Observons que le théorème de Brouwer est un cas particulier du théorème de Leray-Schauder, puisque toute application continue est compacte en dimension finie. On utilise souvent ce dernier pour résoudre des problèmes non variationnels.

5.2 Théorème de Passe-Montagne

Le théorème de passe-montagne appelé aussi théorème du col porte bien son nom. En effet, si on se trouve dans une cuvette à une altitude h_0 et que l'on veuille passer sur l'autre versant à une altitude h_1, il existe un chemin joignant le point de départ et le point d'arrivé et passant par un col. Il tient un peu du théorème bien connu en analyse qu'est le théorème de Roll. Fondamentalement le théorème de passe-montagne s'articule sur la condition de Palais-Smale qu'on va définir immédiatement.

Soient X espace de Banach et Φ une fonctionnelle assez régulière définie sur X et à valeur réelle.

Définition 5.3 *Une suite $u_n \in X$ est appelée suite de Palais–Smale de niveau c notée $(PS)_c$ si $\Phi(u_n) \to c$ et $\|\Phi'(u_n)\|_{X^*} \to 0$.*

On dit que la fonctionnelle $\Phi : X \to \mathbb{R}$ satisfait la condition de Palais-Smale au niveau c si toute suite de $(PS)_c$ possède une sous-suite convergente.

Observons que si $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfait la condition $(PS)_c$, tout point d'accumulation $\overline{u}$ d'une suite u_n de $(\mathrm{PS})_c$ est un point critique de Φ. On a implicitement $\Phi'(\overline{u}) = 0$ et $\Phi(\overline{u}) = c$.

Théorème 5.1 *Supposons que $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ et satisfaisant les trois conditions suivantes :*

i) $\Phi(0) = 0$,

ii) $\exists \rho, \alpha > 0$ *tels que* $\Phi(u) \geq \alpha$ *pour* $\|u\| = \rho$,

iii) $\exists u_0 \in X$ *avec* $\|u_0\| > \rho$ *et tel que* $\Phi(u_0) \leq 0$.

On suppose de plus que Φ satisfait la condition $(PS)_c$, alors c est une valeur critique.

Le théorème de passe-montagne est très pratique lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes elliptiques quasi-linéaires ou non linéaires pour peu que les problèmes soient variationnels.

Inégalité de Moser-Trudinger 5.1 Soit $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, alors $\exp(|u|^{N/(N-1)}) \in L^q(\Omega)$ pour tous $1 \leq q < \infty$. De plus,

$$\sup_{u \in W_0^{1,N}(\Omega),\ \|u\| \leq 1} \int_\Omega \exp(\alpha |u|^{N/(N-1)}) dx \leq C(\Omega) \qquad \textit{pour} \qquad \alpha \leq \alpha_N,$$

avec $\alpha_N = N(N\omega_N)^{\frac{1}{N-1}}$; ω_N étant le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^N$.

Nous achevons le chapitre 1 par une estimation dont jouissent les éléments de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Chapitre 2

Systèmes elliptiques non-linéaire faisant intervenir l'opérateur $(p(x) - q(x))-$Laplacien

1 Introduction

L'objectif de ce travail est d'établir des résultats d'existence de solution pour des systèmes elliptiques non linéaires. Nous nous bornons à montrer que des solutions radiales positives existent ; l'existence de solutions générales fera l'objet d'une recherche ultérieure. Ces systèmes sont dits asymptotiquement homogènes parce que les non linéarités au second membre jouissent de certaines conditions d'homogénéité à l'origine et à l'infini. Précisément, ils font intervenir l'opérateur $p(x)-$laplacien et sont de la forme :

$$\begin{aligned} -\Delta_{p(x)}u &= a_{11}(|x|)f_{11}(u) + a_{12}(|x|)f_{12}(v) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_{q(x)}v &= a_{21}(|x|)f_{21}(u) + a_{22}(|x|)f_{22}(v) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ici $\Delta_{p(x)}$ est l'opérateur non homogène $p(x)-$ Laplacien d'expression $:= \Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$. Les fonctions p et q sont continues à valeurs réelles et telles que $1 < p(x), q(x) < N$ $(N \geq 2)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^N$. Cependant les coefficients $a_{ij}, i, j = 1, 2$, sont des fonctions positives continues. Les non linéarités $f_{ij}, i, j = 1, 2$, appartiennent à une classe de fonctions asymptotiquement homogène. Nous examinerons plus en détail leurs propriétés dans la suite de ce paragraphe.

Ces dernières années, plusieurs auteurs ont utilisé différentes méthodes pour résoudre des systèmes quasi-linéaires (c'est-à-dire que l'opérateur $p-$ Laplacien est présent dans les équations) définis dans des domaines bornés ou non bornés de $\mathbb{R}^N$. Il est d'usage courant d'utiliser la théorie des points critiques pour montrer l'existence de solutions faibles. Il y a beaucoup de travail sur ce sujet (voir [8], [16] ..;). Cette approche variationnelle est notamment utilisée pour traiter des systèmes qui dérivent d'un potentiel, autrement dit les non-linéarités correspondent au gradient de certaines fonctionnelles. On dénombre plusieurs articles rédigés sur l'opérateur $p-$Laplacien. Le lecteur peut facilement se référer à la liste de travaux suivante [2], [12],[14], [24]. A présent la situation est différente car le problème considéré est non variationnel.

Pour résoudre le système (2.1), nous allons utiliser la technique du "Blow-up" de Gidas-Spruck (voir [7]), qui consiste à traiter un cas limite et en déduire des estimations à priori. L'outil principal reste le degré topologique de Leray-Schauder pour établir l'existence d'états fondamentaux. Cette contribution est une extension des travaux réalisés par Djellit et Tas [3]. Ces auteurs considèrent les systèmes de la forme :

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(x,u,v) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta_q v &= \mu g(x,u,v) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où les non-linéarités f et g satisfont les conditions de croissance polynomiale. Les résultats d'existence sont prouvés à l'aide du théorèmes du point fixe.

2 Préliminaires

Tout d'abord, nous allons introduire les notations et les conventions utilisées dans la suite.

Soit l'espace de Banach

$$X = \left\{ (u,v) \in C^0([0,+\infty[) \times C^0([0,+\infty[), \ \lim_{r\to+\infty} u(r) = \lim_{r\to+\infty} v(r) = 0 \right\}$$

muni de la norme usuelle

$$\|(u,v)\|_X = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty, \qquad \|u\|_\infty = \sup_{r\in[0,+\infty[} |u(r)|.$$

Soit $K = \{(u,v) \in X,\ u \geq 0, v \geq 0\}$ un cône positif de X. Pour $h \geq 0$ et $\lambda \in [0,1]$, on définit deux familles d'opérateurs $T_h : X \to X$ et $S_\lambda : X \to X$ par $T_h(u,v) = (w,z)$ tel que (w,z) satisfait le système :

$$\begin{aligned}
-\left(r^{N-1}|w'(r)|^{p(r)-2}w'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{11}(r)f_{11}(|u(r)|) + r^{N-1}a_{12}(r)\left[f_{12}(|v(r)|) + h\right] \\
&\text{dans} \quad [0,+\infty[, \\
-\left(r^{N-1}|z'(r)|^{q(r)-2}z'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{21}(r)f_{21}(|u(r)|) + r^{N-1}a_{22}(r)f_{22}(|v(r)|) \\
&\text{dans} \quad [0,+\infty[, \\
w'(0) = z'(0) = 0, &\qquad \lim_{r\to+\infty} w(r) = \lim_{r\to+\infty} z(r) = 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

et $S_\lambda(u,v) = (w,z)$ tel que (w,z) satisfait le système

$$\begin{aligned}
-\left(r^{N-1}|w'(r)|^{p(r)-2}w'(r)\right)' &= \lambda r^{N-1}a_{11}(r)f_{11}(|u(r)|) + \lambda r^{N-1}a_{12}(r)f_{12}(|v(r)|) \\
&\text{dans} \quad [0,+\infty[, \\
-\left(r^{N-1}|z'(r)|^{q(r)-2}z'(r)\right)' &= \lambda r^{N-1}a_{21}(r)f_{21}(|u(r)|) + \lambda r^{N-1}a_{22}(r)f_{22}(|v(r)|) \\
&\text{dans} \quad [0,+\infty[, \\
w'(0) = z'(0) = 0, &\qquad \lim_{r\to+\infty} w(r) = \lim_{r\to+\infty} z(r) = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Rappelons la notion de fonctions "asymptotiquement homogènes" et certaines de leurs propriétés.

Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie dans un voisinage à l'infini (respect. à l'origine) est dite asymptotiquement homogène à l'infini (respect. à l'origine) d'ordre $\rho > 0$ si pour tout $\sigma > 0$, on a $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{\varphi(\sigma s)}{\varphi(s)} = \sigma^\rho$ (respect. $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\varphi(\sigma s)}{\varphi(s)} = \sigma^\rho$).

A titre d'exemple, nous avons la fonction $\varphi(s) = |s|^{\alpha-2}s(\ln(1+|s|))^\beta$ avec $\alpha > 1$ et $\beta > 1-\alpha$. Il est aisé de voir que φ est asymptotiquement homogène à l'infini d'ordre $\alpha - 1$ et à l'origine d'ordre $\alpha + \beta - 1$.

Proposition 2.1 *[18] Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, impaire, asymptotiquement homogène à l'infini (respect. à l'origine) d'ordre ρ tel que $t\varphi(t) > 0$ pour tous $t \neq 0$ et $\varphi(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$, alors*

(i) Pour tout $\varepsilon \in \,]0, \rho[$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\forall t \geq t_0$(respect. $0 \leq t \leq t_0$), $c_1 t^{\rho-\varepsilon} \leq \varphi(t) \leq c_2 t^{\rho+\varepsilon}$; c_1, c_2 sont des constantes positives. de plus $\forall s \in [t_0, t] : (\rho + 1 - \varepsilon)\varphi(s) \leq (\rho + 1 + \varepsilon)\varphi(t)$.

(ii) Si $(w_n), (t_n)$ sont deux suites réelles telles que $w_n \to w$ et $t_n \to +\infty$ (respect. $t_n \to 0$) alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(t_n w_n)}{\varphi(t_n)} = w^\rho$.

En outre, nous supposons d'une part que les coefficients a_{ij} sont négligeables à l'infini et restent strictement positives dans un voisinage de l'origine ; d'autre part les fonctions f_{ij} doivent vérifier des conditions d'homogénéité asymptotique à l'origine et à l'infini. En résumé nous assumons les hypothèses suivantes :

3 Hypothèses

(H1) Pour $i, j = 1, 2$, $k = \pm$, le coefficient $a_{ij} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est continu et satisfait $\exists\ \theta_{11}, \theta_{12} > p^k$; $\exists\ \theta_{21}, \theta_{22} > q^k$; il existe $R > 0$ tel que $a_{ij}(\xi) = O(\xi^{-\theta_{ij}})$ pour tous $\xi > R$ et $\widetilde{a}_i = \displaystyle\min_{r\in[0,R]} a_{ij}(r) > 0$; $\quad i, j = 1, 2;\ i \neq j$.

(H2) Pour $i, j = 1, 2$, la fonction $f_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, impaire verifiant que :

. $s f_{ij}(s) > 0$ pour tout $s \neq 0$.

. $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} f_{ij}(s) = +\infty$.

(H3) Pour $i, j = 1, 2$ et $k = \pm, f_{ij}$ est asymptotiquement homogène à l'infini de l'ordre δ_{ij} satisfaisant $\dfrac{\delta_{12}\delta_{21}}{(p^k - 1)(q^k - 1)} > 1$, $\alpha_1\delta_{11} - \alpha_1(p^k - 1) - p^k < 0$, $\alpha_2\delta_{22} - \alpha_2(q^k - 1) - q^k < 0$ et $\max(\beta_1, \beta_2) \geq 0$ avec $\alpha_1 = \dfrac{p^k(q^k - 1) + \delta_{12}q^k}{\delta_{12}\delta_{21} - (p^k - 1)(q^k - 1)}$, $\alpha_2 = \dfrac{q^k(p^k - 1) + \delta_{21}p^k}{\delta_{12}\delta_{21} - (p^k - 1)(q^k - 1)}$, $\beta_1 = \alpha_1 - \dfrac{N - p^k}{p^k - 1}$, $\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{N - q^k}{q^k - 1}$.

(H4) Pour $i, j = 1, 2,\ k = \pm,\ f_{ij}$ est asymptotiquement homogène à l'origine de l'ordre $\overline{\delta}_{ij}$ avec $\overline{\delta}_{11}, \overline{\delta}_{12} > p^k - 1, \overline{\delta}_{21}, \overline{\delta}_{22} > q^k - 1$.

Observons qu'une solution radiale positive non triviale (u, v) du système $(T_0) \equiv (S_1)$ est également une solution du système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{11}(r)f_{11}(|u(r)|) + r^{N-1}a_{12}(r)f_{12}(|v(r)|) \\
&\quad \text{dans} \quad [0, +\infty[\,, \\
-\left(r^{N-1}|v'(r)|^{q(r)-2}v'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{21}(r)f_{21}(|u(r)|) + r^{N-1}a_{22}(r)f_{22}(|v(r)|) \\
&\quad \text{dans} \quad [0, +\infty[\,, \\
&\quad u'(0) = v'(0) = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty} u(r) = \lim_{r\to+\infty} v(r) = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Pour prouver son existence, on définit tout d'abord l'opérateur $L : K \to K$ par $L(u, v) = (w, z)$ de sorte que :

$$w(r) = \int_r^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1}(a_{11}(\xi)f_{11}(u(\xi)) + a_{12}(\xi)f_{12}(v(\xi)))d\xi\right)^{\frac{1}{p(\eta)-1}} d\eta,$$

$$z(r) = \int_r^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1}(a_{21}(\xi)f_{21}(u(\xi)) + a_{22}(\xi)f_{22}(v(\xi)))d\xi\right)^{\frac{1}{q(\eta)-1}} d\eta.$$

On voit clairement que cette solution (si elle existe) correspond exactement au point fixe de L. Ce qui nous amène par conséquent à montrer que l'opérateur L admet un point fixe. En tenant compte des hypothèses ci-dessus nous obtenons les résultats suivants :

4 Existence de solutions

Lemme 4.1 *Sous hypothèse $(H1)$, nous avons*
$\int_0^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1} a_{ij}(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{p(\eta)-1}} d\eta$

$\leq \int_0^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta < +\infty \qquad$ *pour* $i=1,\ j=1,2$ *et* $k=\pm$.

$\int_0^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{q(\eta)-1}} d\eta$
$\leq \int_0^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{q^k-1}} d\eta < +\infty \qquad$ *pour* $i=2,\ j=1,2$ *et* $k=\pm$.

Preuve.
$\int_0^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p(\eta)-1}} d\eta$
$\leq \int_0^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta$
$= \int_0^{R} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta + \int_R^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta.$

La première intégrale du membre de droite de l'inégalité est finie puisque a_{ij} est continu. La seconde intégrale est également fini. En effet, en vertu de *(H1)*, nous avons
$\int_R^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta$
$\leq \int_R^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^\eta \xi^{N-1} c_{ij}(\xi) \xi^{-\theta_{ij}} d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta \leq c_{ij} R^{\frac{p^k-\theta_{ij}}{p^k-1}}$

pour $i=1,\ j=1,2$ et $k=\pm$.

Ce dernier terme tend vers zéro pour R suffisamment grand. De même, nous obtenons la même estimation pour $i=2,\ j=1,\ 2$ et $k=\pm$. ■

Lemme 4.2 *Si* $u \in C^1([0,+\infty[) \cap C^2([0,+\infty[)$ *est une solution radiale positive non triviale du problème*

$$-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\right)' \geq 0 \qquad \textit{dans } [0,+\infty[$$

telle que $u(0)>0$ *et* $u'(0)\leq 0$, *alors*

$$u(r)>0 \textit{ et } u'(r)\leq 0 \textit{ pour tous } r>0.$$

Preuve. Soit u une solution radiale positive non triviale du problème

$$-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\right)' \geq 0 \qquad dans\ [0,+\infty[.$$

Supposer que $0 < s < r$. En intégrant de s à r, on obtient

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r) \leq s^{N-1}|u'(s)|^{p(s)-2}u'(s).$$

Si $s \to 0$, on a $u'(r) \leq 0$. Si $u'(r) = 0$ alors $u'(s) = 0$ pour tout $0 \leq s \leq r$. Ceci signifie que u est soit constante dans $[0,+\infty[$ soit il existe $r_0 \geq 0$ tel que $u'(r) < 0$ pour $r > r_0$ et $u'(r) = 0,\ u(r) = u(0)$ pour $0 \leq r \leq r_0$; alors u est décroissante et $u(0) > 0$. ■

Lemme 4.3 *Soit* $u \in C^1([0,+\infty[) \cap C^2([0,+\infty[)$ *une solution positive du problème*

$$-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)' \geq 0 \quad en \quad [0,+\infty[$$

telle que $u(0) > 0$ *et* $u'(0) \leq 0$, *alors la fonction* M_p *défini par* $M_p(r) = ru'(r) + \frac{N-p}{p-1}u(r),\ r \geq 0$, *est non négative et non croissante.*

En particulier, la fonction $r \to r^{\frac{N-p}{p-1}}u(r)$ *est non décroissante sur* $[0,+\infty[$.

Preuve. Puisque u est une solution positive du problème

$$-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)' \geq 0 \qquad \text{en} \qquad [0,+\infty[\,,$$

nous avons $-r^{N-1}(p-1)|u'(r)|^{p-2}u''(r) - (N-1)r^{N-2}|u'(r)|^{p-2}u'(r) \geq 0$. En d'autres termes $ru''(r) + \frac{N-1}{p-1}u'(r) \leq 0$, ou bien $(ru'(r))' + \frac{N-p}{p-1}u'(r) \leq 0$. La fonction M_p est donc non croissante. Par contraposition, nous montrons que $M_p(r) \geq 0$ pour tout $r \geq 0$. En effet, supposons qu'il existe $r_1 > 0$ tel que $M_p(r_1) < 0$. Dans ce cas $M_p(r) \leq M_p(r_1)$ pour tout $r > r_1$;autrement dit $u'(r) + \frac{N-p}{p-1}\frac{u(r)}{r} \leq \frac{M_p(r_1)}{r}$ ou plus simplement $u'(r) \leq \frac{M_p(r_1)}{r}$ car $u(r) > 0$. Par conséquent, $u(r) - u(r_1) \leq M_p(r_1)\ln(\frac{r}{r_1}),\ r > r_1$. Il s'ensuit immédiatement que $\lim\limits_{r\to+\infty} u(r) = -\infty$. Cela contredit le fait que u est positive. En particulier

$$\frac{M_p(r)}{ru(r)} \geq 0 \qquad \forall r > 0.$$

Enfin, on obtient $\dfrac{u'(r)}{u(r)} + \dfrac{N-p}{p-1}\dfrac{1}{r} \geq 0$. En d'autres termes,

$$\left(\ln r^{\frac{N-p}{p-1}} u(r)\right)' \geq 0.$$

Cela implique que la fonction $r \to r^{\frac{N-p}{p-1}} u(r)$ n'est pas décroissante. L'étude de la fonction M_p est essentielle et nous aide à estimer $u(r)$. ■

Lemme 4.4 *Si (H1) est satisfait, l'opérateur L est compact*

Preuve. L'opérateur L est bien défini. En effet

$w(r) \leq c_{11} \int_r^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1} a_{11}(\xi)(u(\xi))^{\delta_{11}+\varepsilon} d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta$

$+c_{12} \int_r^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1} a_{12}(\xi)(u(\xi))^{\delta_{12}+\varepsilon} d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta$

$\leq c_{11}c_1 \left(\|u\|_\infty\right)^{\frac{\delta_{11}+\varepsilon}{p^k-1}} + c_{12}c_2 \left(\|v\|_\infty\right)^{\frac{\delta_{12}+\varepsilon}{p^k-1}} < +\infty.$

En vertu du Lemme (4.1), on a

$c_j = \int_r^{+\infty} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta < +\infty;$ pour $i = 1, j = 1,2$ et $k = \pm$.

Pour les mêmes raisons, on a également

$z(r) \leq c_{21}b_1 \left(\|u\|_\infty\right)^{\frac{\delta_{21}+\varepsilon}{q^k-1}} + c_{22}b_2 \left(\|v\|_\infty\right)^{\frac{\delta_{22}+\varepsilon}{q^k-1}}$

$b_j = \int_r^{+\infty} (\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1} a_{ij}(\xi) d\xi)^{\frac{1}{q^k-1}} d\eta < +\infty;$ pour $i = 2, j = 1,2$ et $k = \pm$.

Bien évidemment, $\sup\limits_{r\in[0,+\infty[} |w(r)| < +\infty$ et $\sup\limits_{r\in[0,+\infty[} |z(r)| < +\infty$.

De plus, nous avons $w \geq 0$, $z \geq 0$ et $\lim\limits_{r\to+\infty} w(r) = \lim\limits_{r\to+\infty} z(r) = 0$.

Maintenant, nous montrons que L est compact. En effet, soit (u_n, v_n) une suite bornée de X. A partir de la relation

$$L(u_n, v_n) = (w_n, z_n),$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
-\left(r^{N-1}|w_n'(r)|^{p(r)-2}w_n'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{11}(r)f_{11}(u_n(r)) + r^{N-1}a_{12}(r)f_{12}(v_n(r)) \\
&\quad \text{dans} \quad [0,+\infty[\,, \\
-\left(r^{N-1}|z_n'(r)|^{q(r)-2}z_n'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{21}(r)f_{21}(u_n(r)) + r^{N-1}a_{22}(r)f_{22}(v_n(r)) \\
&\quad \text{dans} \quad [0,+\infty[\,, \\
w'(0) = z'(0) = 0, &\qquad \lim_{r\to+\infty} w(r) = \lim_{r\to+\infty} z(r) = 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour $R > 0$ fixe, soit $r \in [0, R]$ et posant $\varphi(t) = |t|^{p(r)-1}$. Par substitution on obtient à partir de la première équation du système ci-dessus, l'expression :

$$\frac{d}{dr}\varphi(w_n'(r) + \frac{N-1}{r}|w_n'(r)|^{p(r)-1} - a_{11}(r)f_{11}(u_n(r)) - a_{12}(r)f_{12}(v_n(r)) = 0.$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dr}\varphi(w_n'(r) - a_{11}(r)f_{11}(u_n(r)) - a_{12}(r)f_{12}(v_n(r)) \leq 0.$$

En tenant compte du point (i) de la Proposition (2.1), il en résulte que :

$$\frac{d}{dr}\varphi(w_n'(r) \leq a_{11}(r)(u_n(r))^{\delta_{11}+\varepsilon} + a_{12}(r)(v_n(r))^{\delta_{12}+\varepsilon}.$$

Puisque la suite (u_n, v_n) une suite bornée, il en découle que :

$$\frac{d}{dr}\varphi(w_n'(r) \leq c_1 a_{11}(r) + c_2 a_{12}(r).$$

Maintenant en intégrant les deux membres de l'inégalité de 0 à R, nous obtenons

$$\varphi(w_n'(R)) \leq c,$$

ou bien

$$|(w_n'(R))|^{p(R)-1} \leq c. \tag{2.7}$$

Ceci signifie qu'à distance finie, w_n' est borné.

De la même manière, en substituant q à p, nous pouvons montrer également que $z_n'(r)$ est borné sur $[0, R]$. Par conséquent, (w_n) et (z_n) sont équicontinus . D'aprés le théorème d'Ascoli-Arzilà voir [11], [25], il existe deux sous-suites, notées encore (w_n) et (z_n), telles que $w_n \to w$; $z_n \to z$ dans $C^0([0, R])$; $\forall\ R > 0$.

Prouvons maintenant que (w_n, z_n) est une suite de Cauchy dans X. En effet,

$$\sup_{r\in[0,+\infty[} |w_n(r) - w_m(r)| \leq \sup_{r\in[0,R[} |w_n(r) - w_m(r)| + \sup_{r\in[R,+\infty[} |w_n(r) - w_m(r)|.$$

Cependant

$$\begin{aligned}
\sup_{r\in[R,+\infty[} |w_n(r) - w_m(r)| &\leq \sup_{r\in[R,+\infty[} |w_n(r)| + \sup_{r\in[R,+\infty[} |w_m(r)| \\
&\leq c_{11}c_1(\|u_n\|_\infty)^{\frac{\delta_{11}+\varepsilon}{p^k-1}} + c_{12}c_2(\|v_n\|_\infty)^{\frac{\delta_{12}+\varepsilon}{p^k-1}} \\
&\quad + c_{11}c_1(\|u_m\|_\infty)^{\frac{\delta_{11}+\varepsilon}{p^k-1}} + c_{12}c_2(\|v_m\|_\infty)^{\frac{\delta_{12}+\varepsilon}{p^k-1}}.
\end{aligned}$$

Les constantes c_1 et c_2 sont telles que $c_1 + c_2 < \varepsilon$ pour R suffisamment grand. D'autre part (w_n) est une suite de Cauchy dans $C^0([0, R])$ car elle convergente. De la même manière, (z_n) est aussi une suite de Cauchy dans $C^0([0, R])$. Par conséquent (u_n, v_n) est une suite de Cauchy dans X. L'opérateur L est donc compact. ■

Dans la suite nous allons étudier un cas limite pour en déduire certaines estimations.

Théorème 4.1 *Si les hypothèses (H1)-(H3) sont satisfaites le système*

$$\begin{aligned} -\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{12}(r)(v(r))^{\delta_{12}} \qquad \textit{dans } [0,+\infty[\\ -\left(r^{N-1}|v'(r)|^{q-2}v'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{21}(r)(u(r))^{\delta_{21}} \qquad \textit{dans } [0,+\infty[\\ u'(0) = \ v'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

n'a pas de solutions positives radiales non triviales.

Preuve. Ici on fait un raisonnement par l'absurde. En effet, soit $(u;v)$ une solution radiale positive du système (2.8) ; alors (u,v) satisfait le système différentiel

$$\begin{aligned} -\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{12}(r)(v(r))^{\delta_{12}} \qquad \text{dans } [0,+\infty[\\ -\left(r^{N-1}|v'(r)|^{q-2}v'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{21}(r)(u(r))^{\delta_{21}} \qquad \text{dans } [0,+\infty[\\ u'(0) = \ v'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Par conséquent,

$$-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r)\right)' \geq r^{N-1}\widetilde{a}_1 v^{\delta_{12}} \tag{2.10}$$

$$-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{q-2}u'(r)\right)' \geq r^{N-1}\widetilde{a}_2 v^{\delta_{21}} \tag{2.11}$$

avec $v^{\delta_{ij}} = \min\limits_{[0,r]} v(r)^{\delta_{ij}} \qquad$ pour $i \neq j$.
Considérons d'abord le cas $\beta_1 > 0$ ou $\beta_2 > 0$ dans (H3). En intégrant à la fois (2.10) et (2.11) de 0 à r et en tenant compte du fait que $u'(r) < 0,\ v'(r) < 0$ pour tout $r > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} -u'(r) &\geq \left(\frac{\widetilde{a}_1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} r^{\frac{1}{p-1}} v^{\frac{\delta_{12}}{p-1}}, \\ -v'(r) &\geq \left(\frac{\widetilde{a}_2}{N}\right)^{\frac{1}{q-1}} r^{\frac{1}{q-1}} u^{\frac{\delta_{21}}{q-1}}. \end{aligned}$$

En vertu du Lemme (4.3), nous obtenons $M_p \geq 0,\ M_q \geq 0$; en conséquence on a :

$$0 \geq -ru'(r) - \frac{N-p}{p-1}u(r) \geq \left(\frac{\widetilde{a}_1}{N}\right)^{\frac{1}{p-1}} r^{\frac{p}{p-1}} v^{\frac{\delta_{12}}{p-1}} - \frac{N-p}{p-1}u(r),$$
$$0 \geq -rv'(r) - \frac{N-q}{q-1}v(r) \geq \left(\frac{\widetilde{a}_2}{N}\right)^{\frac{1}{q-1}} r^{\frac{q}{q-1}} u^{\frac{\delta_{21}}{q-1}} - \frac{N-q}{q-1}v(r).$$

Il vient alors :

$$u(r) \geq Cr^{\frac{p}{p-1}} v^{\frac{\delta_{12}}{p-1}}, \tag{2.12}$$
$$v(r) \geq Cr^{\frac{q}{q-1}} u^{\frac{\delta_{21}}{q-1}}. \tag{2.13}$$

En combinant ces deux inégalités, nous obtenons :

$$u(r) \leq Cr^{-\alpha_1}, \tag{2.14}$$
$$v(r) \leq Cr^{-\alpha_2}. \tag{2.15}$$

Puisque $r^{\frac{N-p}{p-1}}u(r)$ et $r^{\frac{N-q}{q-1}}v(r)$ sont non décroissants, pour tout $r > r_0 > 0$, on en déduit que :

$$u(r) \geq Cr^{-\frac{N-p}{p-1}}, \tag{2.16}$$
$$v(r) \geq Cr^{-\frac{N-q}{q-1}}. \tag{2.17}$$

Les inégalités (2.14)$-$(2.17) impliquent soit $r^{\beta_1} \leq C$ soit $r^{\beta_2} \leq C$. Ce qui est absurde.

Supposons maintenant sans perte de généralité que $\beta_1 = 0$. En intégrant par rapport à r la première équation du Système (2.9) de r_0 à r, on obtient :

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} - r_0^{N-1}|u'(r_0)|^{p-1} \geq \widetilde{a}_1 \int_{r_0}^{r} s^{N-1} v^{\delta_{12}}(s) ds.$$

D'autre part, compte tenu de (2.13) on a :

$$v^{\delta_{12}}(s) \geq C s^{\frac{\delta_{12} q}{q-1}} u^{\frac{\delta_{12}\delta_{21}}{q-1}}(s).$$

Par conséquent,

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} \geq C \int_{r_0}^{r} s^{N-1+\frac{\delta_{12} q}{q-1}} u^{\frac{\delta_{12}\delta_{21}}{q-1}}(s) ds.$$

En vertu encore une fois de l'inégalité (2.16) et du fait que $\beta_1 = 0$, on a :

$$r^{N-1}|u'(r)|^{p-1} \geq C \int_{r_0}^{r} s^{N-1+\frac{\delta_{12} q}{q-1} - \frac{N-p}{p-1}\frac{\delta_{12}\delta_{21}}{q-1}} ds = C \int_{r_0}^{r} s^{-1} ds = C \ln \frac{r}{r_0}.$$

Puisque $M_p(r) \geq 0$ pour $r > 0$, nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1} u^{p-1}(r) \geq r^{p-1}|u'(r)|^{p-1}.$$

Par conséquent

$$u^{p-1}(r) \geq C r^{p-1}|u'(r)|^{p-1} \geq C r^{p-N} \ln \frac{r}{r_0}.$$

$$r^{\frac{N-p}{p-1}} u(r) \geq C(\ln \frac{r}{r_0})^{\frac{1}{p-1}},$$

d'où la contradiction avec (2.14).

Nous montrons maintenant que les éventuelles solutions positives radiales de System (2.3) sont bornées pour pouvoir utiliser les propriétés du degré topologique de Leray-Schauder. ■

Théorème 4.2 *Supposons (H1)-(H4) vérifiées. Si (u, v) est un état fondamental de(2.3), alors il existe une constante $C > 0$ (indépendante de u et v) telle que $\|(u, v)\|_X \leq C$.*

Preuve. Soit (u, v) un état fondamental de (2.3) pour $h = 0$, alors (u, v) satisfait le système

$$\begin{aligned}
-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{11}(r)f_{11}(u(r)) + r^{N-1}a_{12}(r)f_{12}(v(r)) \\
&\quad \text{dans} \quad [0,+\infty[\,, \\
-\left(r^{N-1}|v'(r)|^{q(r)-2}v'(r)\right)' &= r^{N-1}a_{21}(r)f_{21}(u(r)) + r^{N-1}a_{22}(r)f_{22}(v(r)) \\
&\quad \text{dans} \quad [0,+\infty[\,, \\
&\quad u'(0) = v'(0) = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty} u(r) = \lim_{r\to+\infty} v(r) = 0,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Supposons maintenant qu'il existe une suite (u_n, v_n) de solutions positives de (2.18) telle que $\|u_n\|_\infty \to \infty$ quand $n \to \infty$ (ou bien $\|v_n\|_\infty \to \infty$ avec n). Posons $\gamma_n = \|u_n\|_\infty^{\frac{1}{\alpha_1}} + \|v_n\|_\infty^{\frac{1}{\alpha_2}}$. Il est aisé de voir en vertu de (*H3*) que $\gamma_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$.

Soient alors les transformations suivantes :

$$y = \gamma_n r, \qquad w_n(y) = \frac{u_n(r)}{\gamma_n^{\alpha_1}}, \qquad z_n(y) = \frac{v_n(r)}{\gamma_n^{\alpha_2}}.$$

Observons que pour tout $y \in [0,+\infty[$, on a :
$0 \le w_n(y) \le 1,\ 0 \le z_n(y) \le 1.$
De plus, pour tout n le couple (w_n, z_n) est une solution du système

$$\begin{aligned}
&-\left(\gamma_n^{\alpha_1(p(\frac{y}{\gamma_n})-1)+p(\frac{y}{\gamma_n})} y^{N-1}|w_n'(y)|^{p(\frac{y}{\gamma_n})-2}w_n'(y)\right)' \\
&= y^{N-1}a_{11}(\frac{y}{\gamma_n})f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(y)) + y^{N-1}a_{12}(\frac{y}{\gamma_n})f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(y)) \qquad \text{dans} \quad [0,+\infty[\,, \\
&-\left(\gamma_n^{\alpha_2(q(\frac{y}{\gamma_n})-1)+q(\frac{y}{\gamma_n})} y^{N-1}|z_n'(y)|^{q(\frac{y}{\gamma_n})-2}z_n'(y)\right)' \\
&= y^{N-1}a_{21}(\frac{y}{\gamma_n})f_{21}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(y)) + y^{N-1}a_{22}(\frac{y}{\gamma_n})f_{22}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(y)) \qquad \text{dans} \quad [0,+\infty[\,, \\
&\qquad w_n'(0) = z_n'(0) = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty} w_n(r) = \lim_{r\to+\infty} z_n(r) = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Soit $R > 0$ fixé. On peut énoncer que (w_n') et (z_n') sont bornées dans $C([0,R])$. En effet, supposons en passant à une sous-suite de (w_n') (notée encore (w_n')) que

$\|w'_n\|_{([0,R])} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Il existe alors une suite (y_n) dans $[0,R]$ telle pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|w'_n(y_n)| > A$.

En intégrant par rapport à y la première équation de Système (2.19) on obtient :

$$\begin{aligned}
|w'_n(y_n)|^{p(\frac{y_n}{\gamma_n})-1} = & \quad \frac{1}{y_n^{N-1}\gamma_n^{\alpha_1(p(\frac{y_n}{\gamma_n})-1)+p(\frac{y_n}{\gamma_n})}} \times \\
& \quad \int_0^{y_n} \left(y^{N-1}a_{11}(\frac{y}{\gamma_n})f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(y)) + y^{N-1}a_{12}(\frac{y}{\gamma_n})f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(y)) \right) dy. \\
|w'_n(y_n)|^{p(\frac{y_n}{\gamma_n})-1} \leq & \\
& \quad \frac{1}{y_n^{N-1}} \int_0^{y_n} \left(y^{N-1}a_{11}(\frac{y}{\gamma_n})\frac{f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(y))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} + y^{N-1}a_{12}(\frac{y}{\gamma_n})\frac{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(y))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} \right) dy.
\end{aligned}$$

Du fait que $f_{1j},\ j = 1,2$, sont asymptotiquement homogènes à l'infini et en tenant compte du point (i) de la Proposition (2.1), on peut dire que : pour tout $\varepsilon \in [0, \delta_{1j}[$, il existe $c^1_{1j}, c^2_{1j} > 0,\ s_0 > 0$ tels que pour tout $s \geq s_0$

$$c^1_{1j}s^{\delta_{1j}-\varepsilon} \leq f_{1j}(s) \leq c^2_{1j}s^{\delta_{1j}+\varepsilon}.$$

Puisque (w_n) et (z_n) sont bornées, il en résulte que :

$$\begin{aligned}
c^1_{11}\gamma_n^{\alpha_1(\delta_{11}-\varepsilon)-\alpha_1(p^k-1)-p^k} &\leq \frac{f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(y))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} \leq c^2_{11}\gamma_n^{\alpha_1(\delta_{11}+\varepsilon)-\alpha_1(p^k-1)-p^k}, \\
c^1_{12}\gamma_n^{\alpha_2(\delta_{12}-\varepsilon)-\alpha_1(p^k-1)-p^k} &\leq \frac{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(y))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} \leq c^2_{12}\gamma_n^{\alpha_2(\delta_{12}+\varepsilon)-\alpha_1(p^k-1)-p^k}.
\end{aligned}$$

En choisissant ε suffisamment petit, on peut vérifier tenant compte de l'hypothèse $(H3)$ que :

$$\frac{f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(y))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(y))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} \to c_1 \qquad \text{quand} \ \ n \to +\infty,$$

oú c_1 est une constante positive.

Il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a

$$|w_n'(y_n)|^{p(\frac{y_n}{\gamma_n})-1} \leq \frac{a_{12}(0)}{y_n^{N-1}} c_1 \int_0^{y_n} y^{N-1} dy = \frac{c_1}{N} a_{12}(0) y_n \leq \frac{Rc_1}{N} a_{12}(0) \equiv c.$$

En posant $n \geq \max(n_0, n_1)$, nous avons $A < |w_n'(y_n)| \leq c$. Ceci contredit le fait que A peut être infiniment grand. De manière analogue nous prouvons que (z_n') est borné dans $(C[0, R])$. Par conséquent (w_n) et (z_n) sont équicontinus dans $C([0, R])$. A l'aide du théorème d'Arzélà-Ascoli on peut dire qu'il existe une sous-suite de (w_n) notée encore (w_n) (respect. (z_n)) telle que $w_n \to w$ (respect. $z_n \to z$) dans $C([0, R])$.

D'autre part,

$$\|w_n\|_\infty^{\frac{1}{\alpha_1}} + \|z_n\|_\infty^{\frac{1}{\alpha_2}} = 1,$$

c'est-à-dire que les suites réelles $(\|w_n\|_\infty)$ et $(\|z_n\|_\infty)$ sont bornées. Il existe donc des sous-suites notées encore $(\|w_n\|_\infty)$ et $(\|z_n\|_\infty)$ telles que $\|w_n\|_\infty \to w_0$, $\|z_n\|_\infty \to z_0$ et $w_0^{\frac{1}{\alpha 1}} + z_0^{\frac{1}{\alpha 2}} = 1$. Compte tenu de l'unicité de la limite en $C([0, R])$, on obtient $\|w\|_\infty^{\frac{1}{\alpha 1}} + \|z\|_\infty^{\frac{1}{\alpha 2}} = 1$. Ceci implique que (w, z) n'est pas identiquement nul. En intégrant de 0 à $y \in [0, R]$, la première et la deuxième équation du système (3.14), on obtient :

$$w_n(0) - w_n(y) = \int_0^y (g_n(t))^{\frac{1}{p(\frac{t}{\gamma_n})-1}} dt, \tag{2.20}$$

$$z_n(0) - z_n(y) = \int_0^y (h_n(t))^{\frac{1}{q(\frac{t}{\gamma_n})-1}} dt, \tag{2.21}$$

Clairement $g_n(y)$ et $h_n(y)$ sont définis par

$g_n(y) =$
$\frac{1}{y^{N-1}\gamma_n^{\alpha_1(p(\frac{y}{\gamma_n})-1)+p(\frac{y}{\gamma_n})}} \int_0^y \left(t^{N-1} a_{11}(\frac{t}{\gamma_n}) f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1} w_n(t)) + t^{N-1} a_{12}(\frac{t}{\gamma_n}) f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2} z_n(t)) \right) dt.$
$g_n(y) \leq \frac{1}{y^{N-1}} \int_0^y \left(t^{N-1} a_{11}(\frac{t}{\gamma_n}) \frac{f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1} w_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} + t^{N-1} a_{12}(\frac{t}{\gamma_n}) \frac{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2} z_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} \right) dt.$
$h_n(y) =$

$\frac{1}{y^{N-1}\gamma_n^{\alpha_2(q(\frac{y}{\gamma_n})-1)+q(\frac{y}{\gamma_n})}} \int_0^y \left(t^{N-1}a_{21}(\frac{t}{\gamma_n})f_{21}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(t)) + t^{N-1}a_{22}(\frac{t}{\gamma_n})f_{22}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(t))\right) dt.$

$h_n(y) \leq \frac{1}{y^{N-1}} \int_0^y \left(t^{N-1}a_{21}(\frac{t}{\gamma_n})\frac{f_{21}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_2(q^k-1)+q^k}} + t^{N-1}a_{22}(\frac{t}{\gamma_n})\frac{f_{22}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_2(q^k-1)+q^k}}\right) dt.$

En combinant la proposition (2.1) avec *(H3)*, on obtient :

$$\frac{f_{11}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} \to 0, \qquad \frac{f_{22}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_2(q^k-1)+q^k}} \to 0,$$
$$\frac{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}} = \frac{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2})}{\gamma_n^{\alpha_1(p^k-1)+p^k}}\frac{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2}z_n(t))}{f_{12}(\gamma_n^{\alpha_2})} \to cz^{\delta_{12}}(t),$$
$$\frac{f_{21}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(t))}{\gamma_n^{\alpha_2(q^k-1)+q^k}} = \frac{f_{21}(\gamma_n^{\alpha_1})}{\gamma_n^{\alpha_2(q^k-1)+q^k}}\frac{f_{21}(\gamma_n^{\alpha_1}w_n(t))}{f_{21}(\gamma_n^{\alpha_1})} \to cw^{\delta_{21}}(t),$$

quand $n \to \infty$. Par application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue , il s'ensuit que :

$$g_n(y) \to \frac{c}{y^{N-1}} \int_0^y t^{N-1}a_{12}(0)z^{\delta_{12}}(t)dt,$$
$$h_n(y) \to \frac{c}{y^{N-1}} \int_0^y t^{N-1}a_{21}(0)w^{\delta_{21}}(t)dt,$$

quand $n \to \infty$. En passant à la limite en (2.20) et (2.21), il vient :

$$w(0) - w(y) = c\int_0^y \left(\frac{1}{\xi^{N-1}} \int_0^\xi t^{N-1}a_{12}(0)z^{\delta_{12}}(t)dt\right)^{\frac{1}{p(0)-1}} d\xi,$$
$$z(0) - z(y) = c\int_0^y \left(\frac{1}{\xi^{N-1}} \int_0^\xi t^{N-1}a_{21}(0)w^{\delta_{21}}(t)dt\right)^{\frac{1}{q(0)-1}} d\xi.$$

Dans ce cas, $w \geq 0, z \geq 0$. De plus $w,\ z \in C^1([0,R]) \cap C^2([0,R])$ et satisfont le système

$$\begin{aligned} -(y^{N-1}|w'(y)|^{p-2}w'(y))' &= ca_{12}(0)y^{N-1}(z(y))^{\delta_{12}} \qquad \text{dans } [0,R] \\ -(y^{N-1}|z'(y)|^{q-2}z'(y))' &= ca_{21}(0)y^{N-1}(w(y))^{\delta_{21}} \qquad \text{dans } [0,R] \\ w'(0) &= z'(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Si on utilise les mêmes arguments sur $[0,R^*]$ avec $R^* > R$, on obtient une solution (w^*,z^*) du Système (2.22) (sous entendu que R est remplacé par R^*), qui coïncide avec (w,z) dans $[0,R]$. On étend alors indéfiniment (w,z) à $[0,+\infty[$. En vertu du lemme (4.2) on a $w(y) > 0$, $z(y) > 0$, pour tout $y \geq 0$. Le couple (w, z) satisfait également le Système (2.22). En d'autres termes (w, z) est une solution radiale positive de (2.9). Ceci est en contradiction avec le théorème (4.1). ■

Lemme 4.5 *Sous les hypothèses (H1)-(H4), il existe $h_0 > 0$ tel que le problème $(u, v) = T_h(u, v)$ n'a pas de solution pour $h \geq h_0$.*

Preuve. Supposons par contradiction qu'il existe une solution $(u, v) \in X$ du problème ci-dessus. Alors (u, v) satisfait le système

$$\begin{aligned}
&-\left(r^{N-1}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\right)' = r^{N-1}a_{11}(r)f_{11}(|u(r)|) + r^{N-1}a_{12}(r)\left[f_{12}(|v(r)|) + h\right] \\
&\qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad [0, +\infty[, \\
&-\left(r^{N-1}|v'(r)|^{q(r)-2}v'(r)\right)' = r^{N-1}a_{21}(r)f_{21}(|u(r)|) + r^{N-1}a_{22}(r)f_{22}(|v(r)|) \\
&\qquad\qquad\qquad \text{dans} \quad [0, +\infty[, \\
&\qquad\qquad\qquad u'(0) = v'(0) = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty} u(r) = \lim_{r\to+\infty} v(r) = 0,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Assumons qu'il existe une suite $(h_n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et telle que (2.23) admette une solutions (u_n, v_n) . Conformément au lemme(4.2), on a $u_n(r) > 0$, $v_n(r) > 0$, $u_n'(r) \leq 0$ et $v_n'(r) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En intégrant la première équation du Système (2.23), de R à $2R$, $R > 0$, on obtient :

$$u_n(R) \geq \int_R^{2R} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1} a_{12}(\xi)\, h_n d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}} d\eta \geq cRh_n^{\frac{1}{p^k-1}}.$$

Ici

$$c = \left(\frac{1}{(2R)^{N-1}} \int_0^R \xi^{N-1} a_{12}(\xi) d\xi\right)^{\frac{1}{p^k-1}}.$$

Par conséquent $u_n(R) \geq cRh_n^{\frac{1}{p^k-1}}$. Par passage à la limite nous obtenons $u_n(R) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, en intégrant la deuxième équation de (2.23), de R à $2R$, on obtient :

$$v_n(R) \geq \int_R^{2R} \left(\eta^{1-N} \int_0^{\eta} \xi^{N-1} a_{21}(\xi) f_{21}(u_n(\xi)) d\xi \right)^{\frac{1}{q^k-1}} d\eta \geq cR(f_{21}(u_n(R)))^{\frac{1}{q^k-1}}.$$

Il résulte de l'hypothèse *(H3)* et de la proposition (2.1) l'estimation suivante :

$$v_n(R) \geq c(u_n(R))^{\frac{\delta_{21}-\varepsilon}{q^k-1}}.$$

De manière similaire, nous obtenons :

$$u_n(R) \geq c(v_n(R))^{\frac{\delta_{12}-\varepsilon}{p^k-1}}.$$

On en déduit des deux dernières inégalités, que :

$$(u_n(R))^{\frac{(\delta_{12}-\varepsilon)(\delta_{21}-\varepsilon)-(p^k-1)\left(q^k-1\right)}{(p^k-1)(q^k-1)}} \leq \frac{1}{c}.$$

C'est la contradiction souhaitée puisque $u_n(R)$ croit à l'infini.

Il reste maintenant à montrer que la solution si elle existe n'est pas triviale. Pour cela il suffit de considérer un voisinage de l'origine pour lequel il n'y a pas de solution non triviales. Cette situation se traduit par le lemme suivant : ■

Lemme 4.6 *Il existe $\overline{\rho} > 0$ tel que pour tous $\rho \in]0, \overline{\rho}[$ et tout $(u, v) \in X$ satisfaisant $\|(u, v)\| = \rho$, l'équation $(u, v) = S_\lambda(u, v)$ n'admet pas de solution.*

Preuve. Supposons qu'il existe $(\rho_n) \in \mathbb{R}_+$, $\rho_n \to 0$; $(\lambda_n) \subset [0, 1]$ et $(u_n, v_n) \in X$ tel que $(u_n, v_n) = S_{\lambda_n}(u_n, v_n)$ avec $\|(u_n, v_n)\| = \rho_n$. Compte tenu de *(H4)*,

$$\|u_n\|_\infty \leq c\lambda_n^{\frac{1}{p^k-1}} \left(\|u_n\|_\infty^{\frac{\overline{\delta}_{11}+\varepsilon}{p^k-1}} + \|v_n\|_\infty^{\frac{\overline{\delta}_{12}+\varepsilon}{p^k-1}} \right),$$
$$\|v_n\|_\infty \leq c\lambda_n^{\frac{1}{q^k-1}} \left(\|u_n\|_\infty^{\frac{\overline{\delta}_{21}+\varepsilon}{q^k-1}} + \|v_n\|_\infty^{\frac{\overline{\delta}_{22}+\varepsilon}{q^k-1}} \right).$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$\|(u_n, v_n)\| \leq C \left(\|(u_n, v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{11}+\varepsilon}{p^k-1}} + \|(u_n, v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{12}+\varepsilon}{p^k-1}} + \|(u_n, v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{21}+\varepsilon}{q^k-1}} + \|(u_n, v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{22}+\varepsilon}{q^k-1}} \right).$$

Ceci implique que :

$$1 \leq C\left(\|(u_n,v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{11}+\varepsilon}{p^k-1}-1}+\|(u_n,v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{12}+\varepsilon}{p^k-1}-1}+\|(u_n,v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{21}+\varepsilon}{q^k-1}-1}+\|(u_n,v_n)\|^{\frac{\overline{\delta}_{22}+\varepsilon}{q^k-1}-1}\right).$$

L'inégalité ci-dessus contredit le fait que $\|(u_n,v_n)\| = \rho_n \to 0$ quand $n \to +\infty$

■

Théorème 4.3 *Sous les hypothèses* $(H1)-(H4)$, *le système* (2.1) *a une solution radiale positive.*

Preuve. Pour montrer l'existence d'états fondamentaux pour (2.1) (ou (2.3) avec $h = 0$), il suffit de montrer que l'opérateur compact T_0 admet un point fixe. En vertu du Théorème (4.2), les éventuels points fixes (u,v) de T_0 sont bornés ; il existe explicitement $C > 0$ tel que $\|(u,v)\|_X \leq C$. Choisissons $R_1 > C$ et désignons par B_{R_1} la boule de X, centrée à l'origine de rayon R_1. A cette fin, le degré de Leray-Schauder $\deg_{LS}(I - T_h, B_{R_1}, 0)$ est bien défini. Etant entendu que I dénote l'application identité dans X. De plus, par le Lemme (4.5), on a $\deg_{LS}(I - T_h, B_{R_1}, 0) = 0$ pour tout $h \geq h_0$. Il résulte de l'invariance homotopique du degré de Leray-Schauder que

$$\deg_{LS}(I - T_0, B_{R_1}, 0) = \deg_{LS}(I - T_h, B_{R_1}, 0) = 0.$$

En outre, compte tenu du Lemme (4.6), il existe $0 < \rho < \overline{\rho} < R_1$ tel que $\deg_{LS}(I - S_\lambda, B_\rho, 0)$ soit bien défini. Une fois encore, l'invariance homotopique du degré de Leray-Schauder donne

$$\begin{aligned} 1 &= \deg_{LS}(I, B_\rho, 0) \\ &= \deg_{LS}(I - S_\lambda, B_\rho, 0) \\ &= \deg_{LS}(I - S_1, B_\rho, 0) \\ &= \deg_{LS}(I - T_0, B_\rho, 0). \end{aligned}$$

En utilisant la propriété d'excision du degré Leray-Schauder, on obtient :

$$\deg_{LS}(I - T_0, B_{R_1} \setminus B_\rho, 0) = \deg_{LS}(I - T_0, B_{R_1}, 0) - \deg_{LS}(I - T_0, B_\rho, 0) = -1.$$

Ceci implique que T_0 a un point fixe dans $B_{R_1} \setminus B_\rho$. Par conséquent, il existe une solution radiale non triviale. ■

Le travail de ce chapitre a fait l'objet d'une publication (dans la presse) voir [17]

Chapitre 3

P (x) - Laplacien avec croissance polynomiale sous-critique et exponentielle sous-critique

1 Introduction

Nous considérons ici une équation elliptique non linéaire faisant intervenir l'opérateur $p(x)-$Laplacien défini sur un domaine Ω borné régulier de $\mathbb{R}^N$de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = f(x,u) \quad dans \quad \Omega, \\ u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}, \\ u \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N \quad (N \geq 3)$.

Nous pouvons vérifier facilement que la solution du problème (3.1) correspond aux points critiques de la fonctionnelle d'énergie d'expression :

$$\Phi(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \qquad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega). \tag{3.2}$$

La littérature qui traite ces problèmes est assez riche et relativement récente. Cet intérêt grandissant est justifié par les nombreuses applications qu'on rencontre en dynamique des fluides (fluides électro-rhéologiques), loi de Darcy, restauration d'image, en calcul des variations... Lorsque p est constant, l'opérateur $p-$Laplacien traduit les phénomènes physiques en pseudo-plasticité et en pseudo-élasticité. Les non linéarités sont souvent soumises à des conditions de croissance (polynomiale) sous-critique. En d'autres termes le degré du polynôme est soit inférieur à $p-1$, soit supérieur à $p-1$ ou bien égal à p^*-1.

Dans cette étude, les non linéarités f vérifient soit des conditions de croissance polynomiale soit des conditions de croissance exponentielle. Il faut noter que ces dernières conditions sont d'introduction récente. Le problème (3.1) étant variationnel, nous allons utiliser la théorie des points critiques, à savoir le théorème de passe-montagne, pour prouver l'existence de solutions non triviales.

Cette étude est scindée en deux parties, selon les conditions de croissance citées ci-dessus. Dans la première partie on suppose que : $p(x) \leq p^+ < N$. Dans ce cas les conditions de croissance polynomiale sous-critiques sont plus appropriées. Ainsi on va assumer que :

$$(C_1) : \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p^*(x)-1}} = 0,$$

Suite à ces conditions, nous pouvons affirmer que le problème (3.1) admet des solutions non triviales.

Cependant pour le second cas on a $p(x) \geq p^- \geq N$ et par conséquent $p(x)^* \to +\infty$. Ce qui rend absurde la condition (C_1). Néanmoins des conditions de croissance exponentielle à l'infini sur la non linéarité f permet de prouver l'existence de solution non triviale. Le comportement asymptotique s'exprime comme suit :

$$(C_2) : \lim_{u \to +\infty} \frac{|f(x,u)|}{\exp\left(\alpha |u|^{p^-/(p^- -1)}\right)} = 0, \qquad \forall\, \alpha > 0.$$

Là encore le problème (3.1) admet une solution non triviale.

2 Résultats préliminaires

De prime abord, nous allons nous familiariser avec les définitions et les notations utilisées dans cette partie.

Soit la fonctionnelle d'énergie associée au problème (3.1) d'expression :

$$\Phi(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} \, dx - \int_\Omega F(x,u) dx, \qquad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

où $F(x,u) = \int_0^u f(x,s) ds$.

La fonctionnelle Φ est bien définie et régulière c'est-à-dire qu'elle appartient à l'espace $C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$, dont la dérivée est formulée par :

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx, \qquad \forall\ u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

On rapelle que l'espace $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est équipé de la norme :

$$\|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)},$$

Il faut savoir que la première valeur propre de l'opérateur $\triangle_{p(x)}$ a pour expression voir[1] :

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx}{\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |u|^{p(x)} dx}.$$

D'autre part, les points critiques de Φ sont bien évidemment les solutions faibles du problème (3.1). Il est donc déterminant d'étudier les propriétés géométriques de la fonctionnelle Φ et de prouver qu'elle possède des points selles à l'aide du théorème de Passe-Montagne. Pour celà quelques conditions sur les non linéarités sont à prendre en considération.

3 Hypothèses

(H1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continu, et vérifie les données suivantes :

- ► $f(x, u) \geq 0, \forall (x, u) \in \Omega \times [0, +\infty)$,
- ► $f(x, u) = 0, \forall (x, u) \in \Omega \times (-\infty, 0]$.

(H2) $\lim_{u \to +\infty} \frac{F(x, u)}{u^{p^-}} = +\infty$ uniformément pour tout $x \in \Omega$.

Ici $F(x, u) = \int_0^u f(x, t)dt$.

(H3) Il existe $C_* \geq 0$, $\theta \geq 1$ tels que $H(x, t) \leq \theta H(x, s) + C_*$ pour tout $t \in]0, s[$, $\forall x \in \Omega$.

La fonctionnelle H est d'expression :

$$H(x, u) = uf(x, u) - p^- F(x, u).$$

(H4) $\limsup_{u \to 0^+} \frac{p^+ F(x, u)}{|u|^{p(x)}} < \lambda_1 (\Omega)$ uniformément pour tout $x \in \Omega$.

(H5) On suppose que la condition (C_1) est satisfaite pour $p(x) < N$. La condition (C_2) se rapporte au cas $p(x) \geq p^- \geq N$.

4 Enoncé du résultat

4.1 Croissance polynomiale sous-critique

Dans cette section, nous étudions le problème (3.1) dans le cas $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < N$. Une riche bibliographie traite de l'existence de solutions non négatives non triviales sous la condition (AR) dans le cas d'une croissance polynomiale sous-critique. Dans [28], les auteurs ont obtenu un résultat d'existence en tenant compte d'une condition dite de Nehari pour substituer la condition (AR). Ici, nous montrerons que la condition (C_1) est suffisante pour obtenir le résultat souhaité.

Théorème 4.1 *Supposons que f satisfait $(H1)-$ $(H5)$, alors le problème* (3.1) *admet une solution non triviale.*

Comme cité plus haut, il faut vérifier que la fonctionnelle Φ satisfait certaines propriétés géométriques.

Lemme 4.1 *Il existe* $u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\backslash\{0\},\ \|u_0\| > \rho$ *tel que* $\Phi(u_0) < 0$.

Preuve. Soit $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\backslash\{0\},\ u \geq 0$. En vertu de l'hypothèse $(H2)$ il résulte que pour tout A, il existe r (r étant le rayon de la plus grande boule ouverte $\subset \Omega$) tel que pour tout $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$

$$F(x,s) \geq As^{p(x)} - r.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\Phi(tu) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla tu|^{p(x)}\, dx - \int_\Omega F(x,tu)dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\frac{t^{p(x)}}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} - At^{p(x)} |u|^{p(x)}\right] dx + O(1) \\
&\leq t^{p^i} \left[\frac{1}{p^-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} - A\int_\Omega |u|^{p(x)}\right] dx + O(1) \\
&\leq t^{p^i} \left[\frac{\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^i}}{p^-} - A \|u\|_{p(x)}^{p^i}\right] + O(1),
\end{aligned}$$

$$i = \pm\ si\ \ \|u\|_{p(x)} \gtreqless 1.$$

Maintenant, si nous choisissons $A > \dfrac{\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^i}}{p^- \|u\|_{p(x)}^{p^i}}$, nous voyons aisement que $\Phi(tu) \to -\infty$ quand $t \to +\infty$; par conséquent il existe bien u_0 tel que $\Phi(u_0) < 0$. ∎

Lemme 4.2 *Soit f satisfaisant* $(H1), (H2), (H4)$ *et* $(H5)$. *Alors il existe* $\delta, \rho > 0$ *tel que*

$$\Phi(u) \geq \delta\ si\ \ \|u\| = \rho.$$

Preuve. Tenant de compte de $(H5)$, il existe $C,\ \tau > 0$ tels que

$$f(x,s) \leq C|s|^{p^*(x)-1} \leq C|s|^{p^{*i}-1}, \qquad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

En intégrant membre à membre, on obtient :

$$\int_0^u f(x,s)ds \leq C\int_0^u |s|^{p^{*i}-1}ds, .$$

Autrement dit :

$$F(x,u) \leq C|u|^{p^{*i}}$$

L'inégalité ci-dessus combinée avec $(H4)$ entraine :

$$\begin{aligned}
F(x,u) &\leq \frac{1}{p^+}(\lambda_1(\Omega)-\tau)|u|^{p(x)} + C\int_\Omega |u|^{p^{*i}}dx,\\
\int_\Omega F(x,u)dx &\leq \frac{1}{p^+}(\lambda_1(\Omega)-\tau)\int_\Omega |u|^{p(x)}dx + C\|u\|_{p(x)}^{p^{*i}}\\
&\leq \frac{1}{p^+}(\lambda_1(\Omega)-\tau)\|u\|_{p(x)}^{p^i} + C\|u\|_{p^*(x)}^{p^{*i}}\\
&\leq \frac{1}{p^+}\left(\frac{\lambda_1(\Omega)-\tau}{\lambda_1(\Omega)}\right)\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^i} + C\|u\|_{p^*(x)}^{p^{*i}}
\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\Phi(u) \geq\ & \frac{1}{p^+}\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^i} - \frac{1}{p^+}(\frac{\lambda_1(\Omega)-\tau}{\lambda_1(\Omega)})\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^i} - C\|u\|_{p^*(x)}^{p^{*i}} \quad ,\\
\geq\ & \frac{1}{p^+}\left(1-\frac{\lambda_1(\Omega)-\tau}{\lambda_1(\Omega)}\right)\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^i} - C\|u\|_{p^*(x)}^{p^{*i}}.\\
\geq\ & \frac{1}{p^+}\left(1-\frac{\lambda_1(\Omega)-\tau}{\lambda_1(\Omega)}\right)\|u\|^{p^i} - C\|u\|_{p^*(x)}^{p^{*i}}.
\end{aligned}$$

On voit facilement que pour tout $\tau > 0$, $p^{*-} > p^{+}$ et $\|u\| = \rho$ assez petit, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\Phi(u) \geq \delta > 0.$$

■

Il reste à vérifier que la fonctionnelle Φ satisfait la condition $(PS)_c$ au niveau c. Ceci est formulé par le lemme suivant :

Lemme 4.3 *Sous les hypothèses* $(H1), (H4)$ *et* $(H5)$ *la fonctionnelle* Φ *satisfait la condition* $(PS)_c$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit $\{u_n\}$ une suite (de Cerami) dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} (1 + \|u_n\|) \, \|\Phi'(u_n)\| &\to 0, \\ \Phi(u_n) &\to c; \end{aligned}$$

c'est-à-dire.

$$\begin{aligned} &(1 + \|u_n\|) \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega f(x, u_n) v dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\| \quad \text{quand } \varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\to} 0. \\ &\tfrac{1}{p^-} \|u_n\|^{p^i} - \int_\Omega F(x, u_n) dx \geq \int_\Omega \tfrac{1}{p(x)} |\nabla u_n|^{p(x)} dx - \int_\Omega F(x, u_n) dx \to c \end{aligned} \tag{3.3}$$

Montrons d'abord que $\{u_n\}$ est borné. En effet, supposons que

$$\|u_n\| \to \infty. \tag{3.4}$$

On pose

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ceci implique que $\|v_n\| = 1$. Par conséquent elle admet une suite faiblement convergente vers v. On peut montrer que $v_n^+ \rightharpoonup v^+$ dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Grace aux théorèmes d'immersion de Sobolev on a :

$$\begin{cases} v_n^+ \to v^+ \ dans\ L^{q(x)}(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ < p^*(x), \\ \qquad v_n^+(x) \to v^+(x)\ p.p.\ sur\ \Omega. \end{cases}$$

La fonction v^+est nulle presque partout sur Ω. En effet, si $\Omega^+ = \{x \in \Omega : v^+(x) > 0\}$ a une mesure positive, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^+(x) = \lim_{n\to+\infty} v_n^+(x)\,\|u_n\| = +\infty\ sur\ \Omega^+,$$

et donc en vertu de $(H2)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x, u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^{p(x)}} = +\infty \quad p.p.\ sur\ \Omega^+$$

Cela signifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x, u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^{p(x)}} \left|v_n^+(x)\right|^{p(x)} = +\infty \quad p.p.\ sur\ \Omega^+. \tag{3.5}$$

Autrement dit

$$\int_{\Omega^+} \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{F(x, u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^{p(x)}} \left|v_n^+(x)\right|^{p(x)} dx = +\infty \quad p.p.\ sur\ \Omega^+. \tag{3.6}$$

D'autre part, en tenant compte de (3.3) on déduit que :

$$\|u_n\|^{p^i} \geq p^- c + p^- \int_{\Omega} F(x, u_n^+(x))dx. \tag{3.7}$$

Il en résulte que :

$$F(x, u_n^+(x))dx \to +\infty.$$

Maintenant, par le lemme de Fatou, (3.5),(3.6) et (3.7) on a :

$$
\begin{aligned}
+\infty = & \int\limits_{\Omega^+} \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{F(x,u_n^+(x))}{|u_n^+(x)|^{p(x)}} \left|v_n^+(x)\right|^{p(x)} dx \\
\leq & \lim_{n\to+\infty} \inf \int\limits_{\Omega^+} \frac{F(x,u_n^+(x))}{|u_n^+|^{p(x)}} \left|v_n^+(x)\right|^{p(x)} dx \\
\leq & \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{\int\limits_{\Omega^+} F(x,u_n^+(x))}{\|u_n\|^{p^i}} dx \\
\leq & \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{\int\limits_{\Omega^+} F(x,u_n^+(x))dx}{p^-c + p^- \int\limits_{\Omega} F(x,u_n^+(x))dx} \\
= & \frac{1}{p^-}.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Ce qui est absurde. Par conséquent v^+est nulle presque partout sur Ω.
Soit $t_n \in [0,1]$ tel que

$$
\Phi(t_n u_n) = \max_{t\in[0,1]} \Phi\left(t u_n\right).
$$

L'hypothèse $(H5)$ entraine qu'il existe $C > 0$ pour tout $R > 0$ tel que

$$
F(x,s) \leq C\,|s| + \frac{1}{R^{p^{*i}}} s^{p^{*i}}, \qquad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.9}
$$

D'autre part, si n est suffisamment grand on a :

$$
\Phi(t_n u_n) \geq \Phi\left(\frac{R}{\|u_n\|} u_n\right) = \Phi(R v_n). \tag{3.10}
$$

Compte tenu de (3.9) il vient :

$$
\begin{aligned}
p^+\Phi(Rv_n) &\geq R^{p^i} - p^+CR\int\limits_{\Omega} \left|v_n^+(x)\right| dx - \frac{p^+}{R^{p^{*i}}} \int\limits_{\Omega} \left|Rv_n^+\right|^{p^{*i}} dx \qquad (3.11) \\
&\geq R^{p^i} - p^+CR\int\limits_{\Omega} \left|v_n^+(x)\right| dx - p^+ \int\limits_{\Omega} \left|v_n^+\right|^{p^{*i}} dx
\end{aligned}
$$

Puisque $v_n^+ \rightharpoonup 0$ (faiblement) dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, alors $\int_\Omega |v_n^+|^{p^{*i}}\, dx$ reste borné dans $L^{p(x)^*}$ par une constante notée $C(\Omega) > 0$ tandis que $\int_\Omega |v_n^+(x)|\, dx \to 0$. Maintenant, il est facile de constater que

$$\Phi(t_n u_n) \to \infty, \quad \text{quand} \;\; R \to \infty. \tag{3.12}$$

D'une part $\Phi(0) = 0$, $\Phi(u_n) \to c$ et $\langle \Phi'(t_n u_n), t_n u_n \rangle = 0$, c'est-à-dire,

$$\int_\Omega |\nabla t_n u_n|^{p(x)}\, dx = \int_\Omega f(x, t_n u_n) t_n u_n dx.$$

D'autre part compte tenu de (3.3) , on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[f(x, u_n) u_n - p^- F(x, u_n) \right] dx &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx + p^- c - \|u_n\|^{p^i} + o(1) \\
&\leq \|u_n\|^{p^i} + p^- c - \|u_n\|^{p^i} + o(1) \\
&\leq p^- c + o(1).
\end{aligned}$$

Il vient alors en vertu de $(H3)$ que :

$$\begin{aligned}
\Phi(t_n u_n) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla t_n u_n|^{p(x)}\, dx - \int_\Omega F(x, t_n u_n) dx \\
\Phi(t_n u_n) &\leq \frac{1}{p^-} \int_\Omega |\nabla t_n u_n|^{p(x)}\, dx - \int_\Omega F(x, t_n u_n) dx \\
p^- \Phi(t_n u_n) &\leq \int_\Omega |\nabla t_n u_n|^{p(x)}\, dx - p^- \int_\Omega F(x, t_n u_n) dx \\
&\leq \int_\Omega \left[f(x, t_n u_n) t_n u_n - p^- F(x, t_n u_n) \right] dx \\
&\leq \theta \int_\Omega \left[f(x, u_n) u_n - p^- F(x, u_n) \right] dx + O(1) \\
&\leq O(1),
\end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction avec (3.12). En conséquence la suite u_n est bornée dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Sans perte de généralité, supposons que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \ dans \ W_0^{1,p(x)}(\Omega), \\ u_n \to u \ dans \ L^{q(x)}(\Omega), \ \forall\ 1 \leq q(x) \leq q^+ < p^*(x), \\ u_n(x) \to u(x) \ p.p. \ \Omega. \end{cases}$$

Maintenant, puisque f vérifie la condition $(H5)$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$f(x,s) \leq C(\varepsilon) + \varepsilon \left|s\right|^{P^{*i}-1} \quad \forall\ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx \right| \\ &\leq C(\varepsilon)\int_\Omega \left|(u_n-u)\right| dx + \varepsilon \int_\Omega \left|(u_n-u)\right| . \left|u_n\right|^{P^{*i}-1}\ dx \\ &\leq C(\varepsilon)\int_\Omega \left|(u_n-u)\right| dx + \varepsilon \left(\int_\Omega \left(\left|u_n\right|^{P^{*i}-1} \right)^{P^{*i}/\left(P^{*i}-1\right)}\ dx \right)^{\left(P^{*i}-1\right)/P^{*i}} \left(\int_\Omega \left|(u_n-u)\right|^{p^{*i}}\ dx \right)^{1/p^{*i}} \\ &\leq C(\varepsilon)\int_\Omega \left|(u_n-u)\right| dx + \varepsilon C(\Omega). \end{aligned}$$

On voit clairement que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0 quand on fait tendre ε vers 0 pour n suffisament grand. Il en résulte que :

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx \to 0.$$

Bien évidemment :

$$\int_{\Omega} \left(f(x,u_n) - f(x,u)\right)(u_n - u)dx \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3.13}$$

D'autre part, en vertu de (3.3) nous avons :

$$\langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), (u_n - u)\rangle \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3.14}$$

On en déduit de (3.13) et (3.14), que :

$$\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0.$$

L'utilisation de l'inégalité élémentaire suivante :

$$2^{2-p(x)} |b-a|^{p(x)} \leq \left\langle |b|^{p(x)-2} b - |a|^{p(x)-2} a, b-a \right\rangle, \forall a, b \in \mathbb{R}^N,$$

nous ramène au résultat ci-après :

$$\nabla u_n \to \nabla u \ dans\ L^{p(x)}(\Omega).$$

On a donc $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ fortement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ qui montre bien que Φ satisfait $(PC)c$. ∎

Les conditions géométriques étant vérifiées par Φ, on peut alors appliquer le théorème de Passe Montagne et affirmer qu'il existe au moins un point critique différent de zéro, qui est précisément une solution du problème (3.1).

4.2 Croissance exponentielle sous-critique

Dans cette section, nous étudierons le problème (3.1) dans le cas où $N \geq p^- \geq 3$ et f satisfait la condition (C_2). La difficulté provient du fait que la non linéarité vérifie des conditions de croissance exponentielle au voisinage de l'infini. Certaines estimations s'articulent essentiellement sur l'inégalité de Moser-Trudinger. Nous reprenons point par point toutes les étapes enteprises lors du précédant paragraphe.

Nous arrivons à prouver également l'existence de solution en usant encore une fois du théorème de Passe Montagne.

Théorème 4.2 *Si f satisfait $(H1)-(H5)$, alors le problème (3.1) admet une solution non triviale.*

Lemme 4.4 *La fonctionnelle Φ peut prendre des valeurs négatives c'est-à-dire que $\Phi(tu) \to -\infty$ quand $t \to \infty$ pour toute fonction non négative $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$.*

Nous nous reférons à la démonstration du lemme (4.1).

Lemme 4.5 *Il existe $\delta,\ \rho > 0$ tels que*

$$\Phi(u) \geq \delta \ si \ \ \|u\| = \rho.$$

Preuve. Suite à l'hypothèse $(H4)$ et la condition (C_2) , on peut dire qu'il existe $\kappa, \tau > 0$ et $q(x) > N$ tels que

$$F(x,s) \leq \frac{1}{p^+}(\lambda_1 - \tau)\,|s|^{p(x)} + Cexp(\kappa|s|^{p^-/(p^- -1)})\,|s|^{q(x)} \qquad ,\forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et celle de Moser-Trudinger, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega exp(\kappa|u|^{p^-/(p^- -1)})\,|u|^{q(x)}\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega exp\left(\kappa r\,\|u\|_{p(x)}^{p^-/(p^- -1)}\left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^{p^-/(p^- -1)}\right)dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_\Omega |u|^{r' q(x)}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq C\,\|u\|_{q(x)}^{q^i}\,; \qquad\qquad \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,
\end{aligned}$$

si on prend $\|u\|_{p(x)} \leq \sigma$, r proche de 1 tels que $\kappa r \sigma^{P^-/(p^- -1)} < \alpha_N$.

En vertu de la caractérisation variationnelle de la première valeur propre λ_1 et de l'inclusion de Sobolev, on obtient :

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{p^+}\left(1 - \frac{\lambda_1(\Omega) - \tau}{\lambda_1(\Omega)}\right)\|u\|^{p^i} - C\|u\|_{q(x)}^{q^i},$$

Puisque $\tau > 0$ et $q(x) > q^- > N$, on peut donc choisir $\delta,\ \rho > 0$ tels que

$$\Phi(u) \geq \delta \ si\ \|u\| = \rho.$$

■

Encore une fois, on va vérifier que Φ satisfait la condition $(PS)_c$ pour tous les nombres réels c.

Lemme 4.6 *Supposons que $(H1)-(H5)$ sont vérifiées, alors Φ satisfait $(PS)_c$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

Preuve. On suit pas à pas ce qui a été développé au lemme (4.3) Ainsi compte tenu de l'hypothèse $(H5)$, il existe, pour tout $R > 0$, une constante $C = C(R) > 0$ telle que

$$F(x,s) \leq C|s| + \exp\left(\frac{\alpha_N}{R^{p^-/(p^--1)}} s^{p^-/(p^--1)}\right), \qquad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

D'autre part en considérant la suite v_n définie au paragraphe précédent il vient que :

$$\Phi(t_n u_n) \geq \Phi\left(\frac{R}{\|u_n\|}u_n\right) = \Phi(Rv_n). \tag{3.16}$$

Ceci entraine l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} p^-\Phi(Rv_n) &\geq R^{p^i} - p^-CR\int_\Omega \left|v_n^+(x)\right| dx - p^-\int_\Omega \exp\left(\alpha_N \left|v_n^+(x)\right|^{p^-/(p^--1)}\right) dx \\ &\geq R^{p^i} - p^-CR\int_\Omega \left|v_n^+(x)\right| dx - p^-\int_\Omega \exp\left(\alpha_N \left|v_n(x)\right|^{p^-/(p^--1)}\right) dx \end{aligned} \tag{3.17}$$

Puisque $\|v_n\| = 1$, on a alors en vertu de l'inégalité de Moser-Trudinger :

$$\int_\Omega \exp\left(\alpha_N |v_n(x)|^{p^-(p^--1)}\right) dx \leq C(\Omega).$$

On en déduit également comme au paragraphe précédent que :

$$\int_{\Omega} \left|v_n^+(x)\right| dx \to 0,$$

et par conséquent

$$\Phi(t_n u_n) \to \infty, \qquad n \to \infty,\ R \to \infty. \tag{3.18}$$

Bien au contraire, grâce à l'hypothèse $(H3)$ on obtient :

$$\Phi(t_n u_n) \le O(1),$$

qui est une contraduction de (3.18). Cela prouve que $\{u_n\}$ est borné dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$; on peut extraire une sous suite faiblement convergente vers u dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, donc fortement convergente vers u dans $L^{p(x)}(\Omega)$; $p(x) \ge 1$ et par conséquent $u_n(x) \to u(x)$ p.p. dans Ω.

Mais puisque f a la croissance sous-critique (C_2) sur Ω, on peut trouver une constante $b_R > 0$ telle que :

$$f(x,s) \le b_R \exp\left(\frac{\alpha_N}{2R^{p^-/(p^--1)}} |s|^{p^-/(p^--1)}\right), \quad \forall\ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

En faisant appel encore une fois à l'inégalité Moser-Trudinger on obtient :

$$\left|\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-u)dx\right| \le \int_\Omega |f(x,u_n)(u_n-u)|\,dx$$

$$\le \left(\int_\Omega |f(x,u_n)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_n-u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\left(\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha_N}{R^{p^-/(p^--1)}}\,|s|^{p^-/(p^--1)}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \|u_n-u\|_2$$

$$\le C\left(\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha_N}{R^{p^-/(p^--1)}}\,\|u\|^{p^-/(p^--1)}\left|\frac{u_n}{\|u\|}\right|^{p^-/(p^--1)}\right)dx\right)^{1/2} \|u_n-u\|_2$$

$$\le C\,\|u_n-u\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

De manière similaire on démontre que :

$$\int_\Omega f(x,u)(u_n-u)dx \to 0.$$

On peut donc conclure que

$$\int_\Omega \left(f(x,u_n)-f(x,u)\right)(u_n-u)dx \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3.19}$$

A cette fin, tenant compte de (3.17) nous avons :

$$\langle \Phi'(u_n)-\Phi'(u),(u_n-u)\rangle \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3.20}$$

De (3.19) et (3.20), nous obtenons

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p(x)-2}\,\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u)(\nabla u_n-\nabla u) \to 0.$$

En utilisant encore une fois l'inégalité élémentaire citée au paragraphe précédent on peut en déduire que :

$$\nabla u_n \to \nabla u \ dans \ L^{p(x)}(\Omega).$$

On a donc $u_n \overset{n\to\infty}{\to} u$ fortement dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$; ceci montre que Φ satisfait $(PC)c$. ■

Le problème (3.1) admet donc une solution faible non triviale.

Chapitre 4

Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié deux problèmes elliptiques non linéaires, le premier non variationnel et le second variationnel.

Pour le premier cas, la recherche de solution faible a généré beaucoup de difficultés. L'idée de chercher une solution radiale s'est posée d'elle même. ainsi il fallait transformer le système donné en un système différentiel ordinaire à l'aide de la polaire de l'opérateur p(x)-Laplacien. Ensuite on applique la méthode du blow-up qui consiste à étudier un cas limite ; ceci nous a permis d'isoler la solution triviale et une estimation à priori de la solution. Enfin on fait appel au degré topologique de Leray-Schauder pour montrer l'existence des états fondamentaux. L'unicité de la solution reste à prouver ainsi que l'existence de solution général.

Dans le dexième cas, il s'agit de résoudre l'équation d'Euler-Lagrange. L'approche est classique. On construit la fonctionnelle d'energie associée au système, et de montrer que cette fonctionnelle vérifie les conditions géométriques du théorème de Passe-Montagne (théorie de points critiques). La plus grande difficulté s'est posée au niveau de la condition de Palais-Smale. Encore une fois le problème de l'unicité de la soulution reste posé.

Les difficultés rencontrées sont d'ordre techniques et se rapportent essentiellement à prouver des résultats de compacité.

Nous pensons également que ces resultats obtenus pour l'opérateur $p(x)$-Laplacien demeurent vrais pour l'opérateur bi $p(x)$-Laplacien. Ces questions vont étre traitées dans un futur proche.

Bibliographie

[1] A. R. El Amrouss, F. Kissi : *Multiplicity of solutions for a general p(x)-Laplacian Dirichlet problem,* Arab J Math Sci, $19(2)(2013), 205 - 216$.

[2] A. Djellit, M. Moussaoui, S. Tas : *Existence of radial positive solutions vanishing at infinity for asymptotically homogeneous systems, Electronic J. Diff. Eqns.* $54, 1 - 10$, (2010).

[3] A. Djellit, S. Tas : *On some nonlinear elliptic systems, Nonlinear Analysis,* 59, $695 - 706, (2004)$.

[4] A. Ahammou, K. Iskafi : *Singular radial positive solutions for nonlinear elliptic systems. Adv. Dyn. Syst. Appl.* $4(1), 1 - 17, (2009)$.

[5] A. Bahri ; *Topological results on a certain class of functionals and application,* Funct. Anal. J. 41 (1981), $397 - 427$.

[6] B. Abdelmalek, A. Djellit, L. Ghannem : Existence of solution for an elliptic problem involving $p(x)-$Laplacian in $\mathbb{R}^N$; GJPAM Volume 12, Number 5(2016), pp. $3873 - 388$.

[7] B. Gidas, J. Spruck : *A priori Bounds for Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations, Comm. in PDE,* $6(8), 883 - 901, (1981)$.

[8] do O, J.M.B. : *Solutions to perturbed eigenvalue problems of the $p-$Laplacian in $\mathbb{R}^N$, Eur. J. Differential Equations* $11, 1 - 15, (1997)$.

[9] G. Cerami : *On the existence of eigenvalues for a nonlinear boundary value problem (Italian) Ann.* Mat. Pura Appl. $(4)124(1980), 161 - 179$.

[10] G. Cerami : *An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds (Italian),* Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A 112(1978), no. $2, 332 - 336(1979)$.

[11] J. Collins, J. Zimmer, An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem, Topology and its Applications $154(2007)2312 - 2322$.

[12] J. Marcos do Ó, S. Lorca, P. Ubilla : *Three positive solutions for elliptic equations in a ball. Appl. Math. Lett.* $18, 1163 - 1169, (2005)$.

[13] J. F. Zhao : *Structure theory of Banach spaces,* Wuhan Univ. Press, Wuhan, 1991 (in Chinese).

[14] L. Wei, Z. Feng : *Existence and nonexistence of solutions for quasilinear elliptic systems. Dyn. PDE.* $10(1), 25 - 42, (2013)$.

[15] L. Diening : *Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev $L^{P(.)}$ and $W^{k,p(.)}$*, Matrh. Nachr. 268 (2004), $31 - 43$.

[16] L.S. Yu : *Nonlinear p-Laplacian problems on unbounded domains, Proc. Amer. Math. Soc.* $115(4), 1037 - 1045, (1992)$.

[17] M. Zitouni, A. Djellit, L. Ghannam : Radial Positive Solutions for $(p(x), q(x))$-Laplacian Systems, Boletim da Sociedade Paranaense de Mathemàtica, in press doi :10.5269/bspm.51625.

[18] M. Garcia-Huidobro, I. Guerra, R. Manasevich : *Existence of positive radial solutions for a weakly coupled system via Blow up, Abstract Appl. Anal.* $3, 105 - 131$, (1998).

[19] M. Garcia-Huidobro, R. Manasevich, K. Schmitt : *Some bifurcation results for a class of p-Laplacian like operators, Differential and Integral Equations* $10, 51 - 66, (1997)$.

[20] M. Willem : Minimax theorems, Birkhäuser, Boston, 1996.

[21] M. Garcia-Huidobro, R. Manasevich, P. Ubilla : *Existence of positive solutions for some Dirichlet problems with an asymptotically homogeneous operator, Electron. J. Diff. Equ.*$10, 1 - 22, (1995)$.

[22] O. Kavian **:** *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et applications, vol. 13, Springer-Verlag, 1993.

[23] Ph. Clément, R. Manasevich, E. Mitidieri : *Positive solutions for a quasilinear system via Blow up, Comm. Partial Differential Equations* $18(12), 2071 - 2106, (1993)$.

[24] Souto, M.A.S. : *A priori estimates and existence of positive solutions of non-linear cooperative elliptic systems. Diff Int. Equ.* $8(5), 1245-1258, (1995)$.

[25] S. Laurent, Analyse, topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, Paris, 1970.

[26] T. Barstch, M. Willem : *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities,* Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), $3555-3561$.

[27] T. Bartsch : *Infinitely many solutions of a symmetric Dirichlet problem,* Non-linear Anal. 20 (1993), $1205-1216$.

[28] W. Cohn, N. Lam, G. Lu, Y. Yang : *The Moser-Trudinger in equality in unbounded domains of Heisenberg group and sub-elliptic equations,* Nonlinear Analysis-Theory, Methods and Applications, 75(2012), no. $12, 4483-4495$.

[29] X. Fan & D. Zhao : *On the space* $L^{P(.)}(\Omega)$ *and* $W^{k,p(.)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), $424-446$.

[30] X. Fan, J. Shen & D. Zhao : *Sobolev embedding theorems for spaces* $W^{k,p(.)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), $749-760$.

[31] X. L. Fan and Q. H. Zhang : *Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problems,* Nonlinear Anal. 52 (2003), $1843-1852$.

[32] X. L. Fan and X. Han : Existence et multiplicity of solutions for $p(x)-$Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Analysis TMA, 59 (2004), $173-188$.