

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA  
UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2021

Département de Mathématiques



## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option

Mathématiques Appliquées

### Etude des cycles limites de quelques systèmes différentiels polynomiaux perturbés

Présentée par:

**ROUBACHE AHLEM**

<b>DIRECTEUR DE THÈSE:</b>	Hadidi Elbahi	Prof.	Univ. Annaba
	<b>Devant le jury</b>		
<b>PRESIDENT:</b>	Makhlouf Ammar	Prof.	Univ. Annaba
<b>EXAMINATEUR:</b>	Ferchichi Mohamed Reda	Prof.	Univ. Annaba
<b>EXAMINATEUR:</b>	Ghanem Radouen	Prof.	Univ. Annaba
<b>EXAMINATEUR:</b>	Khemis Rabah	M.C.A	Univ. Skikda

---

# Dédicace

Je dédie ce travail à

Mes très chers parents

Mon cher mari

À mes chères enfants Idris et Ishak

Mes chers frères

Toute ma famille

Et mes amis

Merci à tous...

---

## Remerciements

Avant tout je tiens à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a donné pour pouvoir achever ce modeste travail.

Mes sincères remerciements à mon directeur de thèse professeur **Hadidi Elbahi** pour la confiance qu'il m'a accordé, ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, son aide et ses conseils. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce travail.

Je tiens également à remercier monsieur **Makhlouf Ammar**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ainsi que monsieur **Ferchichi Mohamed Reda**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, monsieur **Ghanem Radouen**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba et monsieur **Khemis Rabeh**, Maître de conférences A à l'université 20 août 1955 - Skikda qui ont accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie chaleureusement mes chers parents et mon mari qui m'ont toujours encouragé tout au long de mon voyage.

Je remercie aussi tous les miens et toutes personnes qui m'ont soutenu à terminer cette thèse.

Merci à tous...

---

## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions l'existence des solutions périodiques de deux problèmes de systèmes différentiels ordinaires perturbés.

Premièrement, nous étudions la bifurcation zéro-Hopf en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, et de l'appliquer au système de **Rössler** généralisé dans  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + kx, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cz + xz, \end{cases} \quad (\text{i})$$

où  $a, b, c$  et  $k$  sont des paramètres réels.

Deuxièmement, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions les points d'équilibre zéro-Hopf et les bifurcations zéro-Hopf des cycles limites qui se produisent en ces points d'équilibre dans certains systèmes de **Michelson** généralisés

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = a + by + cz + kx - \frac{x^2}{2}, \end{cases} \quad (\text{ii})$$

où  $a, b, c$  et  $k$  sont des paramètres réels.

**Mots-clés :** théorie de moyennisation, bifurcation zéro-Hopf, solution périodiques, système de **Rössler**, système de **Michelson**.

---

# Abstract

In this thesis, we study the existence of periodic solutions of two perturbed ordinary differential system problems.

Firstly, we study the zero-Hopf bifurcation using first-order averaging theory, and apply it to the generalized **Rössler** system in  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + kx, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cz + xz, \end{cases} \quad (1)$$

where  $a, b, c$  and  $k$  are real parameters.

Secondly, by using the first-order averaging theory, we study the zero-Hopf equilibrium points and the zero-Hopf bifurcations of the limit cycles that occur at these equilibria in some generalized **Michelson** system

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = a + by + cz + kx - \frac{x^2}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

where  $a, b, c$  and  $k$  are real parameters.

**Keywords:** averaging theory, zero-Hopf bifurcation, periodic solutions, **Rössler** system, **Michelson** system.

## ملخص

في هذه الرسالة ، ندرس وجود حلول دورية لمشكلتين من مشاكل الأنظمة التفاضلية العادية.

أولاً ، ندرس التشعب هوبف الصفري باستخدام نظرية المتوسط من الدرجة الأولى ، ونطبقها على نظام روسلر المعمم في  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + kx, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cz + xz, \end{cases} \quad (i)$$

حيث  $a, b, c, k$  هي معاملات حقيقية.

ثانياً ، باستخدام نظرية المتوسط من الدرجة الأولى ، نقوم بدراسة نقاط توازن صفر-هوبف وتشعبات هوبف الصفرية لدورات الحد التي تحدث عند هذه التوازنات في بعض أنظمة ميكلسون المعممة.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = a + by + cz + kx - \frac{x^2}{2}, \end{cases} \quad (ii)$$

حيث  $a, b, c, k$  هي معاملات حقيقية.

الكلمات المفتاحية: نظرية المتوسط ، تشعب هوبف صفري ، حلول دورية ، نظام روسلر ، نظام ميكلسون.

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Problème à valeur initiale . . . . .	5
1.2 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales . . . . .	6
1.3 Stabilité de la solution . . . . .	6
1.4 Systèmes différentiels polynomiaux . . . . .	8
1.5 Solution d'un système différentiel . . . . .	8
1.6 Système dynamique . . . . .	8
1.7 Notion du flot . . . . .	10
1.8 Points d'équilibre et linéarisation . . . . .	10
1.8.1 Point d'équilibre . . . . .	10
1.8.2 Linéarisation des systèmes . . . . .	11
1.8.3 Classification et nature des points d'équilibre . . . . .	12
1.8.4 Stabilité des points d'équilibre . . . . .	13
1.9 Portrait de phase et cycles limites . . . . .	19
1.9.1 Plan et portrait de phase . . . . .	19
1.9.2 Orbite périodique . . . . .	19
1.9.3 Cycle limite . . . . .	19
1.10 Stabilité des cycles limites . . . . .	20
1.11 Existence et non-existence des cycles limites . . . . .	26
1.12 Bifurcation de Hopf . . . . .	27
1.12.1 Bifurcation de Hopf dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	28

---

1.12.2	Bifurcation de Hopf dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	33
1.12.3	Bifurcation de Hopf dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Théorie de moyennisation</b> . . . . .	<b>42</b>
2.1	Introduction . . . . .	42
2.2	Théorie de moyennisation du premier ordre . . . . .	43
2.3	Un autre théorème de moyennisation du premier ordre . . . . .	49
<b>3</b>	<b>La bifurcation zero-Hopf du système de Rössler généralisé</b> . . . . .	<b>56</b>
3.1	Introduction . . . . .	56
3.2	Résultats principaux . . . . .	57
<b>4</b>	<b>La bifurcation zero-Hopf du système de Michelson généralisé</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Introduction . . . . .	71
4.2	Résultats principaux . . . . .	72
	<b>Conclusion et perspectives</b> . . . . .	<b>85</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>86</b>



La théorie des systèmes dynamiques est très large et très active en termes de recherche. Elle dépend aussi substantiellement de la plupart des principaux domaines des mathématiques. Généralement, un système est dit dynamique lorsqu'il évolue au cours du temps. Ainsi, l'étude des systèmes dynamiques traite donc l'évolution temporelle des systèmes chimiques, physiques, biologiques ou économiques. On représente cette évolution par des équations différentielles ou des applications.

Le terme « système dynamique » est apparu au début du  $XX^{\text{ème}}$  siècle entre la publication du **Henri-Poincaré** [24] « Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste » en 1892, et celle, en 1927, de la monographie de **Birkhoff** [2] justement intitulée « Dynamical systems ». Le premier objectif des chercheurs est l'étude des systèmes dynamiques, c'est à dire l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires.

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. En général, on utilise les équations différentielles (d'évolution) dans les sciences qui utilisent la modélisation mathématique.

On remonte le début de l'histoire des équations différentielles au début de l'analyse avec **Ferma**, **Newton** et **Leibniz**. D'après **Encyclopédie des mathématiques**, le terme " équation différentielle " est dû à **G. Leibniz** (1646-1716) en 1676. Le concept d'équation différentielle pendant les deux premiers siècles de son apparition a fait l'objet d'études afin d'arriver à une résolution algébrique. Jusqu'au  $19^{\text{ème}}$  siècle et depuis l'arrivée en scène de **J. Liouville** (1809-1882), les mathématiciens ne s'arrêtaient pas de chercher une méthode de résolution applicable à toute sorte d'équations différentielles.

Un des plus importants problèmes de la théorie des équations différentielles est l'étude des orbites périodiques, leur existence, leur nombre et leur stabilité. Un cycle limite est

---

une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques de l'équation différentielle. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par **H. Poincaré** [25] en 1881 dans son "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle". Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire des points d'équilibre, des cycles limites et de leur stabilité. Ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié. A la fin des années 1920, **Van Der Pol**, **Liénard** et **Andronov** ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de tube vide était un cycle limite.

Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de **Poincaré-Bendixson** qui affirme que dans une région compacte et bornée du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un point d'équilibre ou un cycle limite. Le critère de **Dulac** donne une méthode de non existence des solutions périodiques.

Un nouveau terme a été introduit en 1892 par **Poincaré** qui est la bifurcation. La théorie de la bifurcation est un aspect fondamental des systèmes dynamiques. Elle décrit le changement qualitatif des points d'équilibre d'une équation différentielle, obtenue selon une faible variation d'un paramètre. La bifurcation de Hopf est un outil important pour détecter l'existence d'une solution périodique d'un système autonome qui dépend d'un paramètre  $\lambda$ .

Ces dernières années, plusieurs articles ont étudié les cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux planaires. La raison principale de cette étude est le seizième problème non résolu de **Hilbert**. En particulier, un grand nombre d'articles ont étudié les cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire.

Il y a cinq méthodes pour analyser le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodiques ayant un centre.

- La première méthode est basée sur l'application de retour de **Poincaré**.
- La deuxième méthode est basée sur l'intégrale de **Poincaré Melnikov**.
- La troisième est basée sur l'intégrale **Abélienne**.
- La quatrième est la méthode du facteur intégrant inverse.
- La cinquième est la méthode de la moyennisation (*Averaging Theory*). Celle-ci donne la forme des cycles limites bifurqués.

Les chercheurs ont étudié plusieurs équations différentielles planaires en utilisant les méthodes précédentes pour la détermination des cycles limites.

En général, obtenir des solutions périodiques est un problème difficile et souvent impossible. La méthode de la moyennisation réduit ce problème difficile des systèmes différentiels à la recherche des racines positives d'un système algébrique non linéaire. Cette méthode est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées ac-

---

tuellement dans l'étude des solutions périodiques des systèmes dynamiques, elle est la base de notre travail. Elle a été introduite par **Krylov** et **Bogoliubov** en 1934 [4] et **Bogoliubov** et **Mitropolskii** (1961) [5]. Elle a été ensuite développée par **Verhulst** [30], **Sanders** et **Verhulst** [29], **Roseau** (1985) [27], **Libre et Buica** (2004) [6]...

L'idée de base est de considérer une équation différentielle perturbée mise sous la forme standard suivante

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \quad (3)$$

où  $t \in I \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$  un paramètre suffisamment petit et  $f$  est  $T$ -périodique en  $t$ , et de déterminer l'équation moyennée associée de cette équation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F(x),$$

où

$$F(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt,$$

et de chercher les solutions périodiques de l'équation (3).

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels ordinaire dans  $\mathbb{R}^3$  en appliquant la méthode de moyennisation du premier ordre.

La suite du travail est organisée comme suit

- **Le premier chapitre** présente quelques rappels et des notions préliminaires sur les systèmes différentiels ordinaires dans  $\mathbb{R}^n$ . On citera aussi un théorème de la bifurcation de Hopf.
- Dans **le deuxième chapitre**, on utilise la théorie de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre des orbites périodiques d'un système différentiel. On utilise aussi un autre théorème de la moyennisation du premier ordre pour étudier les cycles limites d'un système différentiel.
- Dans **le troisième chapitre**, on s'intéresse à l'étude de la bifurcation zéro-Hopf pour le système de **Rössler** généralisé

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z - kx, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cz + xz, \end{cases}$$

où  $a, b, c$  et  $k$  sont des paramètres réels.

On donne le nombre de cycles limites qui bifurquent d'un point d'équilibre zéro-Hopf,

---

on a utilisé la théorie de moyennisation du premier ordre. Cette étude a fait l'objet d'une publication "**A. Roubache** and **E. Hadidi**, Zero-Hopf bifurcation of periodic orbits in the generalized **Rossler** system, journal **MATHEMATICA**." [26].

**Le quatrième chapitre**, consiste en l'étude de la bifurcation zéro-Hopf pour le système de **Michelson** généralisé

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = a + by - cz + kx - \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

où  $a, b, c$  et  $k$  sont des paramètres réels, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. Ce travail est soumis pour une publication.

# CHAPITRE 1

## Notions préliminaires

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires.

### 1.1 Problème à valeur initiale

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue.

#### Définition 1.1.1

i) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur  $U$  est une relation de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ où } \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.1)$$

ii) Pour  $(t_0, x_0)$  donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) est donné sous la forme

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.2)$$

**Définition 1.1.2 i)** La fonction  $x(t)$  est dite solution de l'équation (1.1) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  si elle est définie et continûment dérivable sur  $I$ , si  $(t, x(t)) \in U$  pour tout  $t \in I$  et si  $x(t)$  satisfait la relation (1.1) sur  $I$ .

- ii) Soit  $(t_0, x_0) \in U$  donné, la fonction  $x(t)$  est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  tel que  $x$  est une solution de l'équation (1.1) sur  $I$  et vérifie  $x(t_0) = x_0$ .

## 1.2 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeurs initiales

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t_0 < t \leq t_0 + T$ ,  $x \in D$  et  $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2.1** On dit que  $f$  satisfait la condition de Lipschitz par rapport à  $x$  si

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

où  $x_1, x_2 \in D$ , et  $L$  est une constante.

Nous pouvons maintenant formuler un théorème bien connu d'existence et d'unicité pour des problèmes à valeur initiale.

**Théorème 1.2.1 (existence et unicité)** On considère le problème à valeur initiale

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

où  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 < t \leq t_0 + T$ . On suppose que

i)  $f(t, x)$  est continue par rapport à  $t$ ,  $x$  sur  $G = [t_0, t_0 + T] \times D$ .

ii)  $f(t, x)$  satisfait la condition de Lipschitz en  $x$ .

Alors le problème à valeur initiale admet une solution unique.

## 1.3 Stabilité de la solution

La question de la stabilité d'une solution ou d'un mouvement est une question fondamentale de la théorie qualitative des équations différentielles. Cette question a été étudiée en détail par l'éminent mathématicien russe **Lypunov** (1857 – 1918).

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

On suppose que  $f$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

**Théorème 1.3.1** Une solution  $\varphi(t)$  du système (1.3) telle que  $\varphi(t_0) = \varphi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov, si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  telle que pour toute solution  $x(t)$  de (1.3) dont la valeur initial  $x(t_0)$  vérifie

$$\|x(t_0) - \varphi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si en plus, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0,$$

alors la solution  $\varphi(t)$  est dite asymptotiquement stable.

**Exemple 1.3.1** Soit le système différentielle de premier ordre

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 1, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

La solution telle que  $x(0) = x_0$  est

$$x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1.$$

La solution  $\varphi(t)$  telle que  $\varphi(0) = 1$  est  $\varphi(t) = 1$ , donc

$$|x(t) - \varphi(t)| = |(x_0 - 1)e^{-t}| < |x_0 - 1|, \forall t \geq 0,$$

il suffit de prendre  $\delta \leq \varepsilon, \delta = \varepsilon \Rightarrow \varphi(t)$  est stable.

On a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - \varphi(t)| = \lim_{t \rightarrow +\infty} |(x_0 - 1)e^{-t}| = 0,$$

alors la solution  $\varphi(t)$  est asymptotiquement stable.

**Remarque 1.3.1** Une solution qui n'est pas stable est dite instable.





$$4. U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposition 1.6.1** *Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels.*

**Exemple 1.6.1** *Soit le système différentiel*

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad (1.5)$$

où  $A$  est une matrice constante,  $x \in \mathbb{R}^n$ . La solution de (1.5) est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Le système (1.5) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad U(t, x) = e^{At}x.$$

*En effet*

*Nous allons montrer que  $U$  possède les quatre propriétés précédentes,  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$  et  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*

1. *On a*

$$\begin{aligned} \|U(t + s, x) - U(t, x)\| &= \left\| e^{A(t+s)}x - e^{At}x \right\| = \|e^{At}x(e^{As} - I)\| \\ &\leq e^{\|A\|t} \|x\| (e^{\|A\|s} - 1) \rightarrow 0 \text{ quand } s \rightarrow 0, \end{aligned}$$

*d'où  $U(\cdot, x)$  est continue.*

2. *On a*

$$\|U(t, x) - U(t, y)\| = \|e^{At}x - e^{At}y\| = \|e^{At}(x - y)\| = \|e^{At}\| \|x - y\| \leq M \|x - y\|,$$

*où  $M$  constante et puisque  $t$  est fixé on obtient la continuité de  $U(t, \cdot)$ .*

2. *On a*

$$U(0, x) = e^0x = I.x = x.$$

3. On a

$$U(t+s, x) = e^{A(t+s)}x = e^{At} \cdot e^{As} \cdot x = e^{At} \cdot U(s, x) = U(t, U(s, x)).$$

D'où le résultat.

**Remarque 1.6.1** Un système dynamique  $U$  sur  $\mathbb{R}^n$  est linéaire si

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

## 1.7 Notion du flot

**Définition 1.7.1** Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.6)$$

avec la condition initiale  $x(0) = x_0$ ,  $x_0 \in E$ ,  $E$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(E)$ . Soit  $\Phi(t, x_0)$  la solution de (1.6). L'ensemble des applications  $\Phi_t$  définies par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentielle (1.6).

**Remarque 1.7.1** Le flot est dit autonome si  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , si non il est dit non autonome.

## 1.8 Points d'équilibre et linéarisation

### 1.8.1 Point d'équilibre

Les points d'équilibre ont un rôle important à l'étude des systèmes différentiels non linéaires. **Henri Poincaré** (1854 - 1912) a montré qu'il suffit de savoir le comportement de la solution à travers l'étude des points d'équilibre au lieu de résoudre ces systèmes différentiels.

**Définition 1.8.1** On appelle point d'équilibre, point critique, point singulier ou point fixe du système (1.6), tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  vérifiant

$$f(x_0) = 0.$$

**Remarque 1.8.1** *Un point qui n'est pas d'équilibre est dit régulier.*

### 1.8.2 Linéarisation des systèmes

La majorité des systèmes qui modélisent des phénomènes naturels sont non linéaires. Pour étudier le comportement des trajectoires de ces systèmes, au voisinage d'un point d'équilibre  $x_0$ , on se ramène à l'étude de ces systèmes linéarisés associés. Considérons le système différentiel non linéaire (1.6).

**Définition 1.8.2** *Le système*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{où } A = Df(x_0) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{(1 \leq i, j \leq n)}, \quad (1.7)$$

*est appelé système linéarisé associé au système (1.6) en  $x_0$ .*

*La matrice  $A$  est dite matrice jacobienne associée au système (1.6).*

**Exemple 1.8.1** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y), \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \quad (1.8)$$

*alors les points d'équilibre sont*

$$(0, 0) \text{ et } (1, 1).$$

*Le système linéarisé est*

$$A = Df(x) = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

*donc*

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

*et*

$$Df(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

*les systèmes linéarisés du système (1.8) sont*

a) au point  $(0, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$$

b) au point  $(1, 1)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

**Remarque 1.8.2** On utilise la linéarisation pour étudier la nature des points d'équilibre.

**Définition 1.8.3** On appelle point d'équilibre hyperbolique de (1.6) tout point d'équilibre  $x_0$  tel qu'aucune des valeurs propres de la matrice  $A$  n'a une partie réelle nulle.

### 1.8.3 Classification et nature des points d'équilibre

#### Cas des systèmes linéaires

Soit le système

$$\dot{x} = Ax,$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  une matrice constante inversible, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

1. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution  $x = x_0$  est appelée selle.
2. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont réelles, non nulles et de même signe, la solution  $x = x_0$  est appelée nœud.
3. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = x_0$  est appelée foyer.
4. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  et  $\text{Im}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = x_0$  est appelée centre.

#### Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non-linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.9}$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $f = (f_1, \dots, f_n)$  et le système linéarisé associé

$$\dot{x} = Ax,$$

le point d'équilibre  $x_0$  est appelé

Puits si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelle négatives.

Source si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelle positives.

Selle s'il est hyperbolique et si la matrice  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec la partie réelle négative et au moins une valeur propre avec la partie réelle positive.

#### 1.8.4 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité des solutions d'un système différentiel amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ces solutions.

**Théorème 1.8.1** *Soit  $x_0$  un point d'équilibre pour le système (1.9).*

*i) Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre  $x_0$  est asymptotiquement stable.*

*ii) S'il existe au moins une valeur propre de  $Df(x_0)$  avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre  $x_0$  est instable.*

*iii) Si  $Df(x_0)$  a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre  $x_0$ .*

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax,$$

où  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  est une matrice constante inversible, et  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de la matrice  $A$  qui sont les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

*i) Si les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles, non nulles*

1) Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 < 0$ , alors le point d'équilibre  $x = x_0$  est un point selle, il est toujours instable (voir Fig. 1.1).

2) Si  $\lambda_1 \times \lambda_2 > 0$ , on a trois cas

*i)* Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , le point d'équilibre  $x = x_0$  est un noeud stable (voir Fig. 1.2).

*ii)* Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , le point d'équilibre  $x = x_0$  est un noeud instable (voir Fig. 1.3).

*iii)* Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , le point d'équilibre  $x = x_0$  est un noeud propre, il est stable si  $\lambda < 0$  (voir Fig. 1.4) et instable si  $\lambda > 0$  (voir Fig. 1.5).

*ii)* Si les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$$

1) Si  $\alpha \neq 0$  on a

*i)*  $\alpha < 0$ , le point d'équilibre  $x = x_0$  est un foyer stable (voir Fig. 1.6).

*ii)*  $\alpha > 0$ , le point d'équilibre  $x = x_0$  est un foyer instable (voir Fig. 1.7).

2) Si  $\alpha = 0$ , le point d'équilibre  $x = x_0$  est un centre. Il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Fig. 1.8).

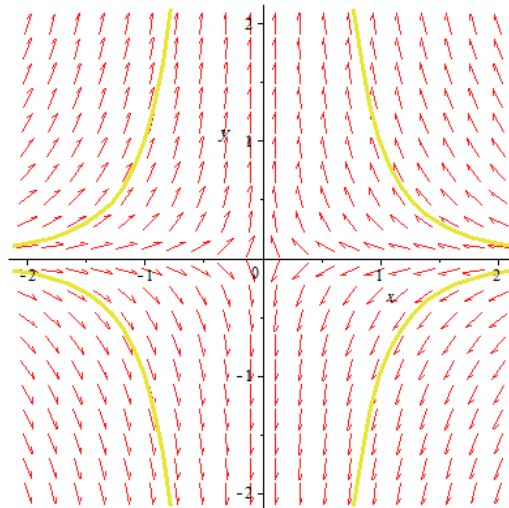


FIG. 1.1 –  $(0,0)$  est un point selle.

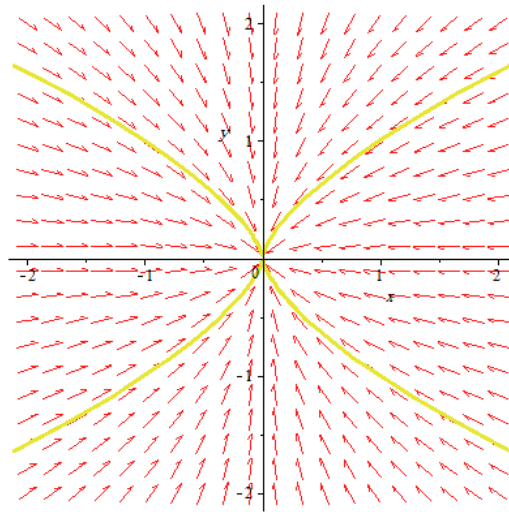


FIG. 1.2 –  $(0,0)$  est un noeud stable.

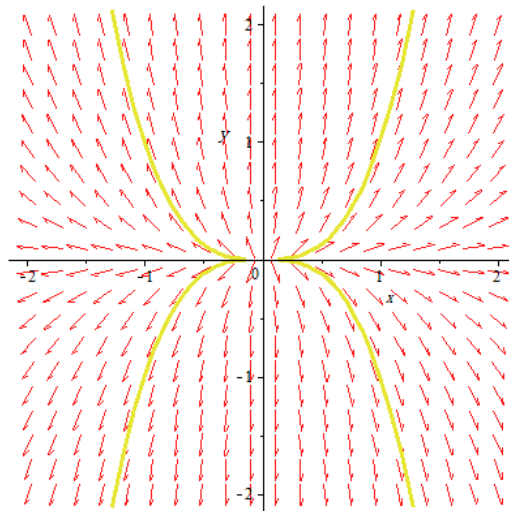


FIG. 1.3 –  $(0,0)$  est un noeud instable.

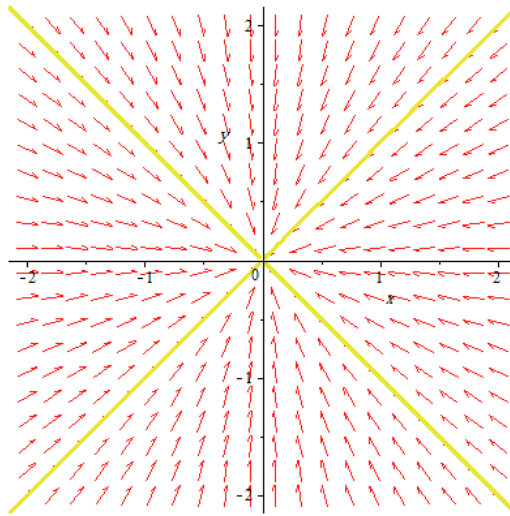


FIG. 1.4 –  $(0,0)$  est un noeud propre stable.

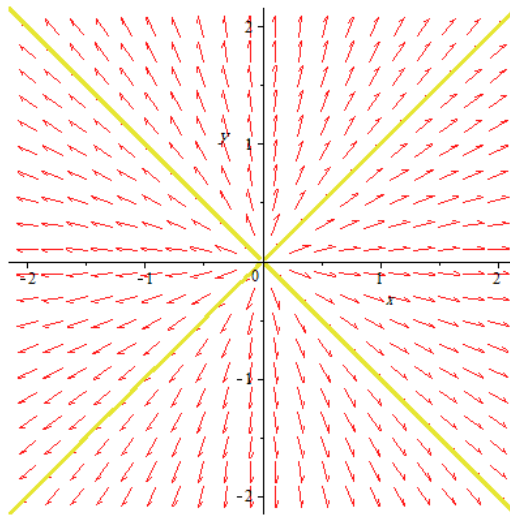


FIG. 1.5 –  $(0,0)$  est un noeud propre instable.



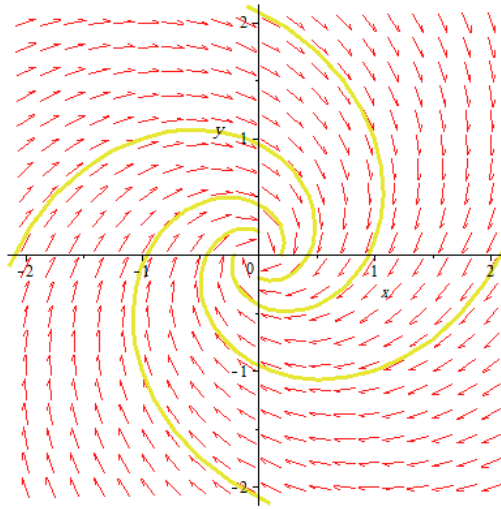


FIG. 1.6 –  $(0,0)$  est un foyer stable.

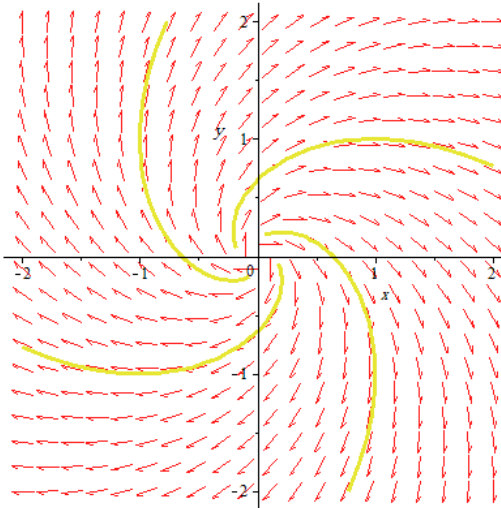


FIG. 1.7 –  $(0,0)$  est un foyer instable.

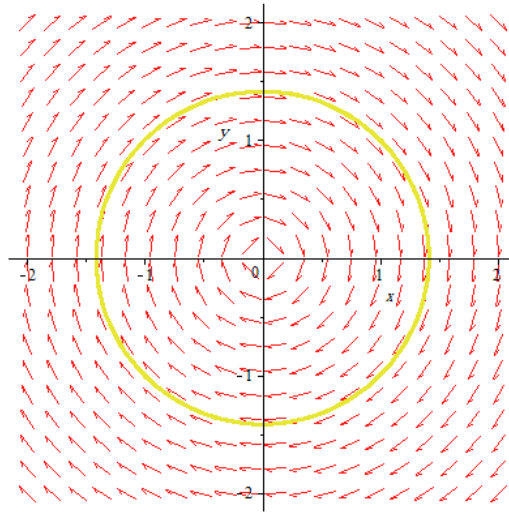


FIG. 1.8 –  $(0,0)$  est un centre.

## 1.9 Portrait de phase et cycles limites

### 1.9.1 Plan et portrait de phase

**Définition 1.9.1** Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.10)$$

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.10) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites.

Les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points d'équilibre représentent le portrait de phase et le plan  $(x, y)$  est appelé le plan de phase.

### 1.9.2 Orbite périodique

**Définition 1.9.2** On appelle orbite périodique toute trajectoire  $\phi(t, x)$  de (1.10) telle qu'il existe un nombre  $T > 0$ , vérifiant

$$\Phi(t + T, x) = \Phi(t, x). \quad (1.11)$$

Le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie (1.11) est appelé période.

**Proposition 1.9.1** Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

### 1.9.3 Cycle limite

**Définition 1.9.3** Un cycle limite  $C$  du système (1.10) est une trajectoire (orbite périodique) fermée isolée dans l'espace de phases, c'est à dire qu'il existe un voisinage de  $C$  dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

**Définition 1.9.4** L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  du cycle limite.

## 1.10 Stabilité des cycles limites

**Théorème 1.10.1** *C étant la trajectoire correspondante au cycle limite, et soit toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C s'enroulent en spirales autour de C pour  $t \rightarrow +\infty$  ou pour  $t \rightarrow -\infty$ .*

1. *Le cycle limite est dit stable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers C.*
2. *Le cycle limite est dit instable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de C.*
3. *Le cycle limite est dit semi-stable, si les trajectoires voisines de C sont attirées d'un côté et refoulées de l'autre côté.*

**Exemple 1.10.1** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - \alpha x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \alpha y - \alpha y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (1.12)$$

où  $\alpha$  est un paramètre réel. Effectuons le changement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Les coordonnées polaires sont définies par les relations suivantes

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2, \\ \tan \theta = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad (1.13)$$

Dérivons la première de équation (1.13) par rapport au temps, il vient

$$2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y},$$

donc

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

Dérivons maintenant la seconde équation (1.13) par rapport au temps

$$\frac{d \tan \theta}{dt} = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2},$$

on a aussi

$$\frac{d \tan \theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta},$$

donc

$$\frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{x^2},$$

alors

$$r^2 \dot{\theta} = xy - y\dot{x}.$$

Enfin, en coordonnées polaires, le système (1.12) s'écrit sous la forme des deux équations découplées suivantes

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

$r = 1$  correspond à l'orbite périodique est un cycle limite stable pour  $\alpha > 0$  et instable pour  $\alpha < 0$ .

Si  $\alpha = 0$  le système a une infinité de nombres des orbites périodiques et il n'y a pas des cycles limites.

1. Prenons un exemple  $\alpha = 3$ , le système (1.12) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - 3x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 3y - 3y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

la solution périodique est un cycle limite stable (voir Fig. 1.9).

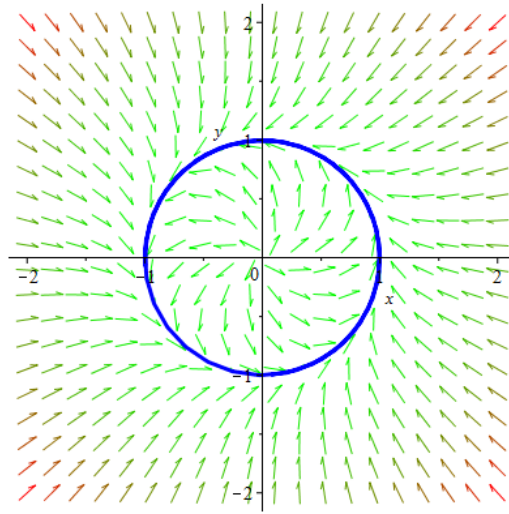


FIG. 1.9 – Cycle limite stable.

2. Si  $\alpha = -5$ , le système (1.12) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y + 5x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - 5y + 5y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

la solution périodique est un cycle limite instable (voir Fig. 1.10).

3. Si  $\alpha = 0$ , le système (1.12) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

le système a une infinité de nombres des orbites périodiques (voir Fig. 1.11).

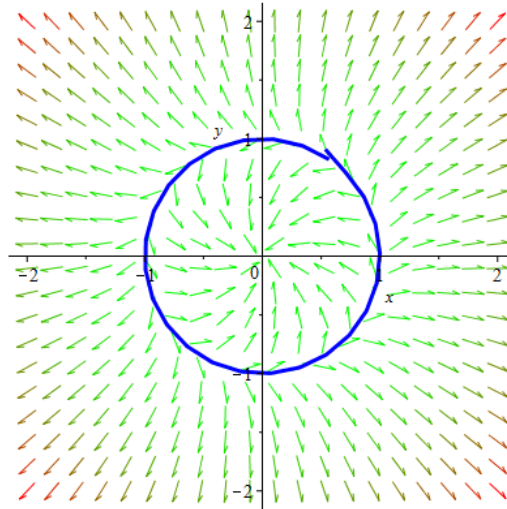


FIG. 1.10 – Cycle limite instable.

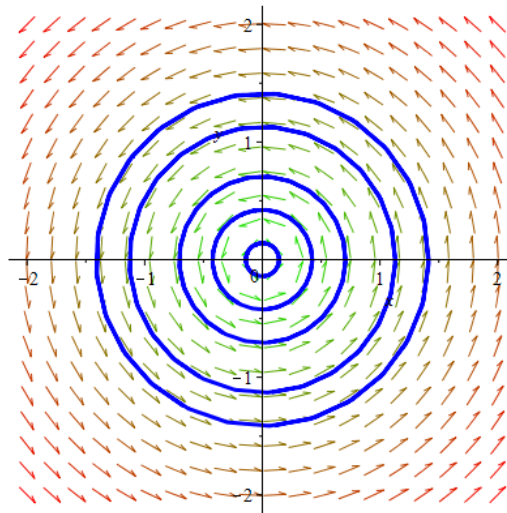


FIG. 1.11 – Orbites périodiques.

**Remarque 1.10.1** *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

**Proposition 1.10.1 (Cycle limite hyperbolique)** *Supposons que le système (1.10) a une orbite périodique  $(x(t), y(t))$  de période  $T$ . Soit l'exposant caractéristique donné par*

$$s = \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

*Si  $s > 0$  (respectivement  $s < 0$ ), alors l'orbite périodique  $(x(t), y(t))$  est un cycle limite instable (respectivement stable). L'orbite périodique  $(x(t), y(t))$  est dite un cycle limite hyperbolique si  $s \neq 0$ .*

**Exemple 1.10.2** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.14)$$

*En coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système précédent devient*

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

*d'où*

$$\dot{r} = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = 1,$$

*pour  $r = 1$ , on a*

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$



$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos(t), \sin(t)) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos^2(t) - \sin^2(t)) + (1 - \cos^2(t) - 3 \sin^2(t)) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2(t) - 4 \sin^2(t)) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0. \end{aligned}$$

Donc, le système (1.12) a un cycle limite hyperbolique  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$  qui est stable (voir Fig. 1.12).

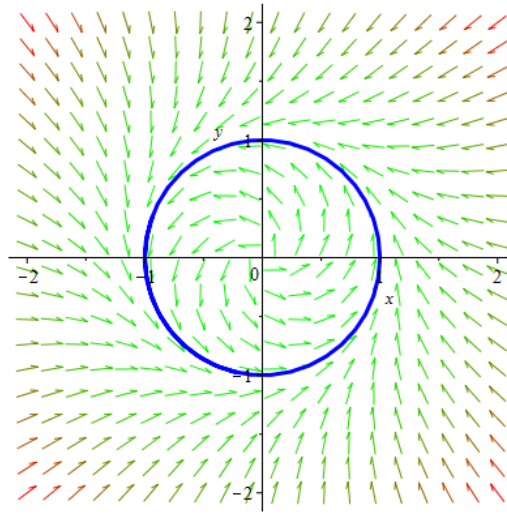


FIG. 1.12 – Cycle limite hyperbolique stable.

## 1.11 Existence et non-existence des cycles limites

Nous donnons des résultats intéressants concernant l'existence et non existence des cycles limites.

**Théorème 1.11.1 (Poincaré-Bendixson) [23]** *Soit le système planaire suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.15)$$

*Supposons que  $f$  et  $g$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $E$ , où  $E$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , le système (1.15) a une orbite  $\gamma$  telle que l'orbite positive*

$$\gamma_+(p) = \{\Phi(p, t), t \geq 0\}$$

*passant par le point  $p$  est contenue dans un sous ensemble compact  $F$  de  $E$ . Alors on est dans l'un des trois cas suivants*

- Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers un point d'équilibre.
- Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers une orbite périodique.
- Soit  $\gamma_+(p)$  est une orbite périodique.

Si  $F$  ne contient pas de points d'équilibre alors il existe une orbite périodique du système (1.15).

**Théorème 1.11.2 (Critère de Bendixson) [23]** Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et soit  $F = (f, g)^T \in C^1(E)$  où  $E$  est une région simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$ . Si la divergence du champ de vecteur  $F$  (notée  $\nabla F$ ) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $E$ , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans  $E$ .

**Exemple 1.11.1** Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4 - x, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit

$$F = (2xy - 2y^4 - x, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T.$$

On calcule la divergence du champ de vecteur  $F$ , on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \nabla F = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2y^4 - x) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 1 - 2y - 3x^2y^2 = -1 - 3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.12 Bifurcation de Hopf

Le terme de bifurcation a été introduit par **Poincaré** pour décrire les transformations des points d'équilibre d'une famille de systèmes, obtenue en faisant varier un paramètre. Si la nature du point d'équilibre subit un changement soudain lorsque le paramètre varie, on dit que le système subit une bifurcation. Ceci implique que la bifurcation de Hopf est pour les systèmes de dimension  $n \geq 2$ .

Pour un tour d'horizon plus général sur les bifurcations de Hopf et leurs applications notamment en physique et en électronique, voir [[11],[12],[13],[15]].

### 1.12.1 Bifurcation de Hopf dans $\mathbb{R}^2$

Le théorème de **Poincaré-Bendixson** n'est pas toujours facilement applicable. Aussi, le théorème de **Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H)** permet de démontrer plus aisément l'existence de solutions périodiques correspondant à un cycle limite. De plus, contrairement au théorème de **Poincaré-Bendixson** qui n'est valable que dans le plan, le théorème de **P-A-H** est applicable en dimension supérieure à deux.

#### Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H)

**Théorème 1.12.1** [1],[16] *Soit le système dynamique suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu), \\ \dot{y} = g(x, y, \mu), \end{cases}$$

où  $\mu$  est une paramètre.

Supposons que le système admet un point d'équilibre  $(x_0(\mu), y_0(\mu))$ .

Soit  $A(x_0(\mu), y_0(\mu))$  la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre.

Supposons que les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$  avec  $\alpha(\mu)$  la partie réelle et  $\beta(\mu)$  la partie imaginaire.

Supposons que pour une certaine valeur de  $\mu : \mu = \mu_0$ , les conditions suivantes sont satisfaites

i)  $\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) = \omega \neq 0$  où  $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}[(\frac{\partial g}{\partial x})|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)]$ . (Condition de non-hyperbolicité).

ii)  $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$ . (Condition de transversalité).

iii)  $a \neq 0$

$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy})$ .

avec  $f_{xy} = (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$ , etc (Condition de généricité).

Alors

1. Il y a une seule orbite périodique qui bifurque de l'origine pour  $\mu > \mu_0$  si  $ad < 0$  ou  $\mu < \mu_0$  si  $ad > 0$ .

2. Le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est stable pour  $\mu > \mu_0$  (respectivement  $\mu < \mu_0$ ) et instable pour  $\mu < \mu_0$  (respectivement  $\mu > \mu_0$ ) si  $d < 0$  (respectivement  $d > 0$ ).

3. La solution périodique est stable (respectivement instable) si le point d'équilibre est instable (resp stable), du côté  $\mu = \mu_0$  où les solution périodiques existent.

4. L'amplitude de orbite périodique  $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$ .
5. La période de l'orbite périodique est  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ .

**Remarque 1.12.1** 1. Il existe trois cas de bifurcations de Hopf possibles

(a) Bifurcation de Hopf dégénérée

Si une des conditions du théorème de la Bifurcation de Hopf n'est pas satisfaite, on peut avoir bifurcation de solution périodique, on dit que la bifurcation est dégénérée.

(b) Bifurcation de Hopf super-critique

i) La bifurcation est dite super-critique (super critical) si l'orbite périodique est stable.

ii) Si  $a < 0$  alors la bifurcation est super-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est stable.

(c) Bifurcation de Hopf sous-critique

i) Elle est sous-critique (subcritical) si l'orbite périodique est instable.

ii) Si  $a > 0$  alors la bifurcation est sous-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est instable.

2. Pour une bifurcation super-critique au sous-critique, le point d'équilibre  $(x(\mu_0), y(\mu_0))$  est un foyer.

3. Quand  $\mu_0$  est une valeur telle que  $\alpha(\mu_0) = 0$  et  $\beta(\mu_0) \neq 0$ , le point d'équilibre  $(x(\mu_0), y(\mu_0))$  correspond à un centre.

**Exemple 1.12.1** Considérons l'équation de **Van Der Pol**

$$\ddot{x} - (\mu - x^2)\dot{x} + x = 0. \quad (1.16)$$

On pose

$$\dot{x} = y.$$

L'équation devient un système du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + (\mu - x^2)y, \end{cases} \quad (1.17)$$

Calculer les points d'équilibre du système (1.17)

$$\begin{cases} y = 0, \\ -x + (\mu - x^2)y = 0, \end{cases}$$

$$(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Le système linéarisé en  $(0, 0)$  est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases}$$

Calculer les valeurs propres du système (1.17)

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0,$$

$$\Delta = \mu^2 - 4,$$

$\Delta < 0$  si  $\mu \in ]-2, 2[$ , donc

$$\Delta = i^2(4 - \mu^2).$$

Alors

$$\lambda(\mu) = \frac{\mu}{2} + i \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2},$$

$$\bar{\lambda}(\mu) = \frac{\mu}{2} - i \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2}.$$

Donc les valeurs propres sont

$$\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \frac{\mu}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2},$$

où

$$\alpha(\mu) = \frac{\mu}{2}, \beta(\mu) = \pm \frac{\sqrt{4 - \mu^2}}{2}.$$

Vérifions les conditions du théorème (1.12.1)

1.

$$\alpha(\mu_0) = 0 \Rightarrow \frac{\mu}{2} = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\omega) &= \operatorname{sgn}\left[\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x}\right)\Big|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)\right] \\ &= \operatorname{sgn}\left[\left(\frac{\partial(-x + (\mu - x^2)y)}{\partial x}\right)\Big|_{\mu=0}(0, 0)\right] = -1, \end{aligned}$$

donc

$$\beta(\mu_0) = -1 = \omega \neq 0.$$

2.

$$\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu}\Big|_{\mu=0} = \frac{1}{2} = d \neq 0.$$

3.

$$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}).$$

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & f_{xyy} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ g_{xxy} &= \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}\Big|_{\mu=0}(0,0) = -2, & g_{yyy} &= \frac{\partial^3 g}{\partial y^3}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & g_{xy} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \\ g_{xx} &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, & g_{yy} &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\Big|_{\mu=0}(0,0) = 0, \end{aligned}$$

On remplace dans  $a$  on obtient

$$a = \frac{1}{16}(-2) = -\frac{1}{8}.$$

Puisque

$$ad = -\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{16} < 0,$$

il y a une solution périodique qui bifurque de l'origine  $(0,0)$  pour  $\mu > 0$ .

Puisque  $d = \frac{1}{2} > 0$  donc

i) Si  $\mu < 0$  (c'est à dire  $\mu \in ]-2, 0[$ ), le point d'équilibre  $(0,0)$  est un foyer stable (voir Fig. 1.13).

ii) Si  $\mu > 0$  (c'est à dire  $\mu \in ]0, 2[$ ), le point d'équilibre est un foyer instable (voir Fig. 1.14).

La solution périodique pour  $\mu > 0$  est stable et instable pour  $\mu < 0$ .

L'amplitude du cycle limite est  $\sqrt{|\mu|}$  de période  $\frac{2\pi}{|\omega|} = 2\pi$ , le cycle limite est stable,

donc la bifurcation est super critique (ou puis que  $a = -\frac{1}{8} < 0$  alors la bifurcation est super-critique ce qui signifie que l'orbite périodique est stable).

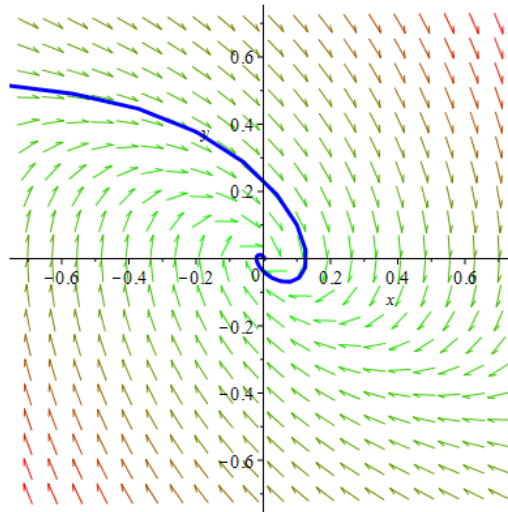


FIG. 1.13 –  $(0,0)$  est un foyer stable pour  $\mu = -1$  .

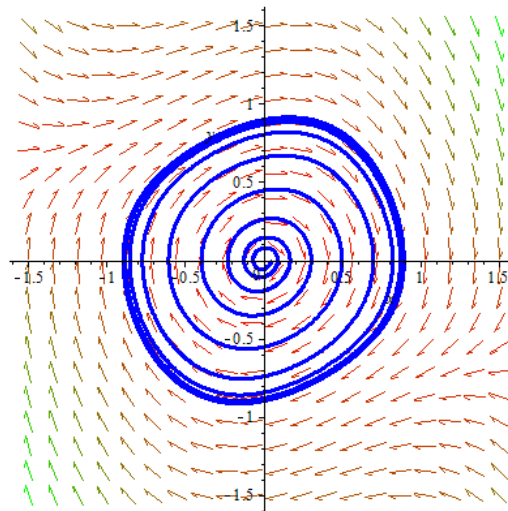


FIG. 1.14 – Cycle limit stable pour  $\mu = 1$ .



### 1.12.2 Bifurcation de Hopf dans $\mathbb{R}^3$

**Théorème 1.12.2** *Soit le système dynamique tridimensionnel autonome non-linéaire suivant*

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (1.18)$$

où  $\mu$  est un paramètre réel pour le système (1.18),  $F(x, \mu)$  est une fonction analytique avec  $x_0$  comme point d'équilibre du système (1.18), de sorte que

$$F(x_0, \mu) = 0,$$

et supposant que la matrice jacobienne

$$A(\mu) = \left( \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \end{array} \right]_{x=x_0} \right)_{1 \leq i, j \leq 3},$$

à trois valeurs propres avec une paire de valeurs propres conjuguées complexe

$$\lambda_1(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu),$$

$$\lambda_2(\mu) = \alpha(\mu) - i\beta(\mu),$$

qui satisfont les conditions

$$\alpha(0) = 0, \alpha'(0) > 0 \text{ et } \beta(0) > 0. \quad (1.19)$$

Supposons également que la valeur propre réelle

$$\lambda_3(\mu) = \delta(\mu),$$

satisfait à la condition

$$\delta(0) < 0. \quad (1.20)$$

D'après le théorème de la bifurcation de Hopf, lorsque le paramètre de contrôle  $\mu$  franchit la valeur critique 0, un cycle limite stable du système (1.18) émerge et maintient au voisinage du point d'équilibre  $x_0$ .

**Exemple 1.12.2** Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - xz, \\ \dot{y} = x + \mu y, \\ \dot{z} = -z + x^2 z + y^2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Cherchons les points d'équilibre

$$\begin{cases} \mu x - y - xz = 0 \\ x + \mu y = 0 \\ -z + x^2 z + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0.$$

L'origine  $(0, 0, 0)$  est l'unique point d'équilibre.

Le système linéarisé en  $(0, 0, 0)$  est

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y, \\ \dot{y} = x + \mu y, \\ \dot{z} = -z. \end{cases} \quad (1.22)$$

Le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \mu - \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)(-\lambda^2 + 2\mu\lambda - \mu^2 - 1). \end{aligned}$$

Les valeurs propres du système (1.22)

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i \text{ et } \lambda_3 = -1,$$

avec

$$\alpha(\mu) = \mu, \quad \beta(\mu) = 1 \text{ et } \delta(\mu) = -1.$$

Vérifions les conditions (1.19) et (1.20) du théorème (1.12.2)

$$\begin{cases} \alpha(\mu) = \mu \Rightarrow \alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = 1 > 0. \\ \beta(0) = 1 > 0. \\ \delta(0) = -1 < 0. \end{cases}$$

Donc il existe un cycle limite stable du système (1.21) qui bifurque de l'origine  $(0, 0, 0)$ .

### 1.12.3 Bifurcation de Hopf dans $\mathbb{R}^n$

**Théorème 1.12.3** Soit le système dynamique suivant

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  être une famille à un paramètre analytique des champs de vecteur et  $\mu$  est une paramètre réel.

Supposons que le système admet un point d'équilibre  $x_0$  telle que  $F(x_0, \mu) = 0$  et que  $A(\mu)$  la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre

$$A(\mu) = \left( \left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{x=x_0} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

possède une paire des valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_1, \lambda_2$

$$\lambda_1(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu),$$

$$\lambda_2(\mu) = \alpha(\mu) - i\beta(\mu),$$

telles que

1) Pour une certaine valeur  $\mu = \mu_0$

$$\alpha(\mu_0) = 0, \beta(\mu_0) \neq 0 \text{ et } \frac{d\alpha}{d\mu}(\mu_0) \neq 0 .$$

2) Les  $(n - 2)$  autres valeurs propres de la matrice  $A(\mu)$  ont leur partie réelle strictement négative.

Alors, lorsque  $\mu$  passe par  $\mu_0$ ,  $x_0$  change de stabilité et un cycle limite en découle. De plus, la période du cycle limite se rapproche de  $\frac{2\pi}{\beta(\mu_0)}$  lorsque  $\mu \rightarrow \mu_0$ .

**Exemple 1.12.3** Soit le système de **Lorenz**

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

où  $\delta$ ,  $b$  et  $r$  sont trois paramètres strictement positifs, le paramètre de contrôle est  $r$ .

### 1. Points d'équilibre

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta(y - x) = 0, \\ rx - y - xz = 0, \\ xy - bz = 0, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x = y, \\ x = 0 \text{ ou } z = r - 1, \end{cases}$$

a) Pour  $x = 0$  donc  $y = 0$  et  $z = 0$ , donc  $(0, 0, 0)$  est un point d'équilibre.

b) Pour  $z = r - 1$ , on a

$$xy - bz = 0 \Rightarrow x^2 = bz \Rightarrow x = \pm\sqrt{bz}.$$

i) Si  $r < 1$  alors on a un seul point d'équilibre est l'origine  $(0, 0, 0)$ .

ii) Si  $r > 1$  alors on a un trois points d'équilibre

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0); (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1)); \\ &(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1)). \end{aligned}$$

### 2. Système linéarisé

On a la matrice jacobienne  $A$  au point  $(x, y, z)$

$$A = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

a) Stabilité de l'équilibre  $(0, 0, 0)$ . La matrice jacobienne  $A$  au point  $(0, 0, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \delta)\lambda + (1 - r)\delta),$$

donc les valeurs propres

$$\begin{cases} \lambda + b = 0, \\ \lambda^2 + (1 + \delta)\lambda + (1 - r)\delta = 0, \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -b, \\ \Delta = (1 + \delta)^2 - 4(1 - r)\delta. \end{cases}$$

i) Si

$$\begin{aligned} r < 1 &\Rightarrow 1 - r > 0 \\ &\Rightarrow -4(1 - r)\delta < 0 \text{ (car } \delta > 0), \end{aligned}$$

donc

$$\Delta > 0,$$

alors

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{-(1 + \delta) + \sqrt{\Delta}}{2} < 0 \text{ car } \sqrt{(1 + \delta)^2 - 4(1 - r)\delta} < (1 + \delta), \\ \lambda_3 = \frac{-(1 + \delta) - \sqrt{\Delta}}{2} < 0. \end{cases}$$

Il y a trois racines réelles négatives, le point d'équilibre  $(0, 0, 0)$  est stable.

ii) Si

$$\begin{aligned} r > 1 &\Rightarrow 1 - r < 0 \\ &\Rightarrow -4(1 - r)\delta > 0, \end{aligned}$$

donc

$$\Delta > 0,$$

alors

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{-(1 + \delta) + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \text{ car } \sqrt{(1 + \delta)^2 - 4(1 - r)\delta} > (1 + \delta), \\ \lambda_3 = \frac{-(1 + \delta) - \sqrt{\Delta}}{2} < 0. \end{cases}$$

Une des valeurs propres est positive, le point d'équilibre  $(0, 0, 0)$  est instable.

Donc il y a une bifurcation quand  $r = 1$ .

b) Stabilité des l'équilibre pour  $r > 1$ .

Pour les deux autres points d'équilibre, les valeurs propres de la jacobienne de l'équa-

tion en  $\lambda$

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\delta + b + 1)\lambda^2 + (r + \delta)\lambda + 2b\delta(r - 1).$$

Selon les valeurs du paramètre  $r$ , ce polynôme de degré trois peut avoir des racines réelles négatives (les équilibre sont donc stables) ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

En effet

On a la matrice jacobienne  $A$  au point  $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$  est

$$A = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix},$$

et de plus

$$\begin{cases} \operatorname{tr} A = -(1 + \delta + b) < 0, \\ \det A = -2b\delta(r - 1). \end{cases}$$

Comme  $r > 1$  donc  $\det A < 0$ .

Puisque  $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$  et  $\det A = \prod_{i=1}^3 \lambda_i$ ,

donc

$$\begin{cases} \det A = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 < 0, \\ \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \text{ et } \lambda_3 < 0, \\ \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2, \lambda_3 = \alpha \pm i\beta. \end{cases}$$

On peut donc chercher s'il existe une valeur critique de  $r$  pour laquelle les points d'équilibre deviennent instables.

La déstabilisation de ces équilibre par changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si  $\lambda = 0$  alors

$$\det A = 0 \Rightarrow -2b\delta(r - 1) = 0 \Rightarrow r = 1$$

car  $b, \delta \neq 0$ .

On peut donc rechercher pour quelles valeurs de  $r$  on peut obtenir deux racines  $i\omega$  et  $-i\omega$  avec partie réelle nulle.

On a

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\delta + b + 1)\lambda^2 + (r + \delta)\lambda + 2b\delta(r - 1).$$

Posons  $\lambda = iw$ , donc

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (iw)^3 + (\delta + b + 1)(iw)^2 + (r + \delta)(iw) + 2b\delta(r - 1) \\ &= -iw^3 + i(\delta + r)bw - (\delta + b + 1)w^2 + 2\delta b(r - 1). \end{aligned}$$

On a  $p(\lambda) = 0$ , donc

$$-iw^3 + i(\delta + r)bw - (\delta + b + 1)w^2 + 2\delta b(r - 1) = 0,$$

alors

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \operatorname{Re}(p(\lambda)) = 0, \\ \operatorname{Im}(p(\lambda)) = 0, \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} -(\delta + b + 1)w^2 + 2\delta b(r - 1) = 0, \\ -w^3 + (\delta + r)bw = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(p(\lambda)) &= 0 \Rightarrow w(-w^2 + (\delta + r)b) = 0 \\ &\Rightarrow -w^2 + (\delta + r)b = 0 \quad (\text{car } w \neq 0), \end{aligned}$$

donc

$$w^2 = (\delta + r)b.$$

On a

$$\operatorname{Im}(p(\lambda)) = 0, \text{ et } w^2 = (\delta + r)b,$$

implique que

$$-(\delta + b + 1)w^2 + 2\delta b(r - 1) = -(\delta + b + 1)(\delta + r)b + 2\delta br - 2\delta b = 0,$$

donc

$$r = r_c = \frac{\delta(\delta + b + 3)}{\delta - b - 1},$$

$r_c$  est une valeur critique.

Donc pour  $r = r_c$ , on a

$$\begin{aligned} w^2 &= (\delta + r)b = \left(\delta + \frac{\delta(\delta + b + 3)}{\delta - b - 1}\right)b \\ &= \left(\frac{2\delta b(\delta + 1)}{\delta - b - 1}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$w = \pm \sqrt{\frac{2\delta b(\delta + 1)}{\delta - b - 1}},$$

alors

$$\lambda_1 = -(\delta + b + 1),$$

et

$$\lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\frac{2\delta b(\delta + 1)}{\delta - b - 1}}.$$

On a  $\lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\frac{2\delta b(\delta + 1)}{\delta - b - 1}}$  et  $2\delta b(\delta + 1) > 0$  donc

$$\delta - b - 1 > 0 \Rightarrow \delta > b + 1.$$

1. Si

$$r = r_c \text{ et } \delta > b + 1,$$

deux valeurs propres sont imaginaires pures, et ceci correspond à une bifurcation de Hopf. La solution périodique qui est créée à cette valeur de  $r$  peut être instable donc la bifurcation est sous-critique.

2. Si

$$r = r_c \text{ et } \delta < b + 1,$$

on peut trouver toutes les valeurs propres sont réelles, inclure au moins une valeur propre positive, c'est instable.

3. Nous trouvons également l'instabilité si  $r > r_c$

a. Si

$$r > r_c \text{ et } \delta > b + 1,$$

nous pouvons trouver une valeur propre réelle négative et deux valeurs propres complexes avec parties réelles positives, par conséquent, c'est instable.

b. Si

$$r > r_c \text{ et } \delta < b + 1,$$



nous pouvons trouver trois valeurs propres réelles, avec au moins une positive, c'est instable.

4. Pour

$$1 < r < r_c \text{ et } \delta < b + 1,$$

nous trouvons trois valeurs propres réelles, dont une est positive, c'est instable.

5. Pour la stabilité, nous pouvons prendre

$$1 < r < r_c \text{ et } \delta > b + 1,$$

dans ce cas, nous pouvons trouver une valeur propre réelle négative et deux valeurs propres (qui pourraient être réel ou complexes) avec parties réelles négatives, par conséquent, c'est stable.

$x = y = -\sqrt{b(r-1)}$ ,  $z = (r-1)$ . L'analyse de ce point d'équilibre est essentiellement identique à celle du point  $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$ .

## 2.1 Introduction

La théorie de moyennisation est l'une des plus importantes théories perturbatives utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. L'idée de base de cette méthode peut être datée de la fin du 18<sup>ème</sup> siècle avec les travaux de **Lagrange** et **Laplace** en 1788 qui ont donné une justification intuitive de la méthode. Ils ont utilisé la procédure de la moyennisation pour étudier le problème des perturbations séculaires dans le système solaire.

Ensuite, **Fatou** a donné la preuve de la validité asymptotique de la méthode en 1928. Après des recherches systématiques faites en 1934 par **Bogoliobov** et **Krylov** [4], En 1945 par **Bogoliobov** [3] et en 1961 par **Bogoliobov** et **Mitropolsky** [5]. Elle a été ensuite développée par **Verhulst** [30], **Sanders** et **Verhulst** [29], **Roseau** [27]...

## 2.2 Théorie de moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

où  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  un domaine borné et  $t \geq 0$ . On suppose que  $F(t, x)$  et  $G(t, x, \varepsilon)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques en  $t$ .

Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.2)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibre du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

**Théorème 2.2.1** [29] *Considérons le système (2.1) et supposons que*

1. *Les fonctions vectorielles  $F$ ,  $G$ ,  $D_x F$ ,  $D_x^2 F$  et  $D_x G$  sont continues et bornées par une constante  $M$  indépendante de  $\varepsilon$  dans  $[0, +\infty) \times D$ , avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .*
2. *Les fonctions  $F$  et  $G$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ , avec  $T$  indépendante de  $\varepsilon$ .*

*alors on a*

**(a)** Si le point  $p \in D$  est un point d'équilibre pour le système moyenné (2.2) telle que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0, \quad (2.4)$$

alors pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.1) telle que  $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**(b)** Si le point d'équilibre  $y = p$  du système moyenné (2.2) est hyperbolique, alors pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même stabilité que  $p$ .

**Exemple 2.2.1** *Soit l'équation de Van Der Pol*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le système non perturbé du système différentiel (2.6) est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

les orbites de ce système sont des cercles dans le plan de phases ( $xoy$ ).

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$ , le système perturbé (2.6) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta, \end{cases} \quad (2.7)$$

En divisant  $\dot{r}$  par  $\dot{\theta}$ , on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)}{-1 + \varepsilon \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin(\theta)},$$

on a

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + o(x^2), \text{ puisque } |x| \prec 1,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)(1 + \varepsilon \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin(\theta) + o(x^2)) \\ &= -\varepsilon[r(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)] - \varepsilon^2[r \cos(\theta)(1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^3(\theta)] + o(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

le système (2.7) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2). \quad (2.8)$$

On note que l'équation (2.8) est sous la forme standard (2.1) donc on peut appliquer la théorie de moyennisation avec

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \text{ et } F(t, x) = F(\theta, r) = -r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta.$$

Remarquons que  $F$  est  $2\pi$ -périodique en  $\theta$  et d'après l'équation (2.3), on obtient

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{1}{8} r(r^2 - 4).$$

$f^0(r)$  a une unique racine positive  $r = 2$ .

Comme

$$\left( \frac{df^0}{dr} \right) (2) = 1 \neq 0,$$

donc d'après le théorème 2.2.1 l'équation de **Van Der Pol** (2.5) a pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique du rayon  $r = 2$  du système non perturbé (2.6) avec  $\varepsilon = 0$ .

De plus, comme

$$\left( \frac{df^0}{dr} \right) (2) = 1 > 0,$$

ce cycle limite est instable (voir Fig. 2.1).

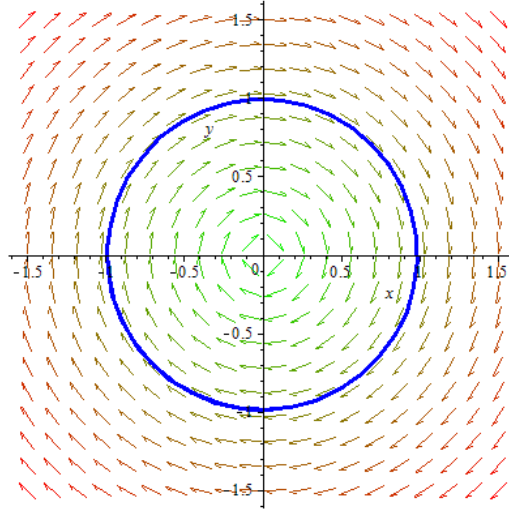


FIG. 2.1 – Cycle limite instable pour  $\varepsilon = 0.001$ .

**Exemple 2.2.2** Soit le système de **Liénard** suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(a_1 x + \dots + a_n x^n), \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $a_n \neq 0$ , le système (2.9) admet au plus  $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$  cycles limites.

En utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$ , le système (2.9) devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon r(a_1 \cos^2 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta(a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta), \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r(a_1 \cos^2 \theta + a_2 \cos^3 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) \\ &\quad + \varepsilon^2 r \sin \theta \cos \theta(a_1 \cos \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^n \theta)^2 + o(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

En prenant

$$\begin{aligned} x &= r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \\ \text{et } F(\theta, r) &= r(a_1 \cos^2 \theta + a_2 \cos^3 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta). \end{aligned}$$

Le système différentiel précédent est sous la forme standard (2.1), ainsi on peut appliquer la théorie de moyennisation décrite dans le théorème 2.2.1. On obtient

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2 \theta + a_2 \cos^3 \theta + \dots + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) d\theta, \end{aligned}$$

on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon f^0(r), \quad (2.10)$$

D'où

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 \cos^2 \theta + a_2 \cos^3 \theta + \dots + a_{n-1} r^{n-2} \cos^n \theta + a_n r^{n-1} \cos^{n+1} \theta) d\theta,$$

comme  $\int_0^{2\pi} \cos^m \theta d\theta = 0$  si  $m$  est impair.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + a_3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta + \dots \\ &\quad + a_{n-1} r^{n-2} \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta + a_n r^{n-1} \int_0^{2\pi} \cos^{n+1} \theta d\theta). \end{aligned}$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} I_2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta, \\ I_3 = \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta, \\ \vdots \\ I_n = \int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta, \\ I_{n+1} = \int_0^{2\pi} \cos^{n+1} \theta d\theta. \end{array} \right.$$

i) Si  $n$  est impair

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \dots + a_n r^{n-1} I_{n+1}).$$

On cherche les points d'équilibre de  $f^0(r)$ ,  $r > 0$ , on pose

$$X = r^2 \Rightarrow r = X^{\frac{1}{2}}$$

$$f^0(X) = 0 \Rightarrow (a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \dots + a_n I_{n+1} X^{\frac{n-1}{2}}) = 0.$$

Ce polynôme possède au plus  $\frac{n-1}{2}$  racines positives car  $r > 0$ .

ii) Si  $n$  est pair

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r}{2\pi} (a_1 I_2 + a_3 r^2 I_4 + \dots + a_n r^{n-2} I_n).$$

On cherche les points d'équilibre de  $f^0(r)$ ,  $r > 0$ , on pose

$$X = r^2 \Rightarrow r = X^{\frac{1}{2}}$$

$$f^0(X) = 0 \Rightarrow (a_1 I_2 + a_3 I_4 X + \dots + a_n I_n X^{\frac{n-2}{2}}) = 0.$$

Ce polynôme possède au plus  $\frac{n-2}{2}$  racines positives car  $r > 0$ .

Alors le système (2.9) possède au plus  $\left[ \frac{n-1}{2} \right]$  cycles limites.

**Remarque 2.2.1** Si  $f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds = 0$ , on passe à la méthode de la moyennisation de deuxième ordre.



## 2.3 Un autre théorème de moyennisation du premier ordre

**Théorème 2.3.1** *On considère le problème de bifurcation des solutions  $T$ -périodiques du système différentiel de la forme*

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon), \quad (2.11)$$

où  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  pour  $\varepsilon_0$  suffisamment petit. Les fonctions  $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions de classe  $C^2$ ,  $T$ -périodique en  $t$  et  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x), \quad (2.12)$$

a une sous variété des solutions périodiques de dimension  $k$ .

Soit  $x(t, z)$  la solution du système non perturbé (2.12) telle que

$$x(0, z) = z.$$

La linéarisation du système non perturbé (2.12) le long de la solution périodique  $x(t, z)$  s'écrit

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z))y. \quad (2.13)$$

Notons par  $M_z(t)$  la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.13). Supposons qu'il existe un ensemble ouvert  $V$  avec  $CL(V) \subset \Omega$ , tel que pour chaque  $z \in CL(V)$ ,  $x(t, z, 0)$  est  $T$ -périodique, où  $x(t, z, 0)$  est la solution du système non perturbé (2.12) avec

$$x(0, z, 0) = z.$$

L'ensemble  $CL(V)$  est isochrone pour le système (2.11), c'est à dire il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.

On note par  $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur ses  $k$  premières coordonnées, c'est à dire

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k),$$

et par  $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur ses  $n-k$  dernières coordonnées, c'est à dire

$$\xi^\perp(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Alors, on a les résultats suivants

**Théorème 2.3.2** [22] Soit  $V$  un ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^k$ , et soit  $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une fonction de classe  $C^2$ . supposons que

- (i)  $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$  et pour chaque  $z_\alpha \in Z$  la solution  $x(t, z_\alpha)$  de (2.12) est  $T$ -périodique.
- (ii) Pour chaque  $z_\alpha \in Z$ , il existe une matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  de (2.13) telle que la matrice  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  a dans le coin supérieur droit une matrice  $k \times (n-k)$  nulle, et dans le coin inférieur droit la matrice  $\Delta_\alpha(n-k) \times (n-k)$  avec  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ .

On considère la fonction  $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.14)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et

$$\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0,$$

alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.11) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Nous donnons maintenant un résultat quand  $n = k$ .

**Théorème 2.3.3** [22] Soit  $V$  un ensemble ouvert et borné avec  $CL(V) \subset \Omega$  tel que pour chaque  $z_\alpha \in CL(V)$  et pour chaque  $z_\alpha \in Z$ , la solution  $x(t, z_\alpha)$  est  $T$ -périodique. Considérons la fonction  $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt. \quad (2.15)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et

$$\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0,$$

alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.11) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 2.3.4** [22] Supposons que  $n = 2m$ . Soit  $V$  un ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^m$  et soit  $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $C^2$ . supposons que

- (i)  $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$  et pour chaque  $z_\alpha \in Z$  la solution  $x(t, z_\alpha)$  de (2.12) est  $T$ -périodique.
- (ii) Pour chaque  $z_\alpha \in Z$ , il existe une matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  de (2.13) telle que la matrice  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  a dans le coin supérieur droit la matrice  $\Delta_\alpha(m \times m)$  avec  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ , et dans le coin inférieur droit une matrice  $m \times m$  nulle.

On considère la fonction  $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi^\perp \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.16)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et

$$\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0,$$

alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.11) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 2.3.1** On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3), \quad (2.17)$$

On écrit l'équation différentielle du troisième ordre (2.17) comme le système différentiel du premier ordre suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3). \end{cases} \quad (2.18)$$

L'origine est l'unique point d'équilibre du système (2.18) lorsque  $\varepsilon = 0$ .

La partie linéaire du système (2.18) avec  $\varepsilon = 0$  à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice sont  $\pm i$  et 1.

Sa forme normale de **Jordan** de la matrice  $A$  est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant un changement de variables linéaire

$$(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T,$$

On a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0, \quad (2.19)$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire  $(X, Y, Z)^T = B(x, y, z)^T$ , c'est à dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \quad (2.20)$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

on remplace (2.18) et (2.21) dans (2.20), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \end{cases} \quad (2.22)$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t).$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , la solution du système (2.22) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

On utilise la notion introduite dans le théorème 2.3.1, et d'après le système (2.22), on a

$$x = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_0(x, t) = \begin{pmatrix} -Y \\ X \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_1(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F} \\ \tilde{F} \end{pmatrix} \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$  la solution du système (2.22) telle que

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Il est clair que, le système non perturbé (2.22) avec  $\varepsilon = 0$  admet un centre à l'origine dans le plan  $(X, Y)$ . Les solutions périodique de ce centre sont

$$x(t; X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t)),$$

telle que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période  $2\pi$ .

1. Pour notre système,  $V$  et  $\alpha$  du théorème 2.3.2 sont

$$V = \{(X, Y, 0), 0 < X^2 + Y^2 < \rho\},$$

pour certains  $\rho$  arbitraires et  $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ .

2. La matrice fondamentale  $M(t)$  du système non perturbé (2.22) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un calcul simple donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

d'où

$$1 - e^{-2\pi} \neq 0.$$

Nous avons montré que toutes les hypothèses du théorème 2.3.2 sont vérifiées.

Par conséquent, nous allons étudier les zéros  $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$  des deux premiers composants de la fonction  $\mathcal{F}(\alpha)$  donnée par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right), \quad \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c'est à dire

$$\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha)),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt. \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F}\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

On pose  $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ .

On intègre (2.23) et (2.24), on obtient

$$\begin{cases}
 \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{8}Y_0X_0 - \frac{3}{4}Y_0^2X_0 - \frac{3}{4}Y_0X_0^2 - \frac{3}{4}Y_0^3 - \frac{3}{4}X_0^3 + \frac{1}{8}Y_0^2 + \frac{1}{8}X_0^2, \\
 \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{1}{16}(X_0 - Y_0)(12X_0^2 - X_0 + 12Y_0^2 - Y_0).
 \end{cases}$$

Si  $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ , on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

On a

$$\det \left( \frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(r_0, V_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \right) = \frac{3}{8192} \neq 0.$$

Alors, pour  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  avec  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit, il y a une solution isolée  $2\pi$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  de l'équation différentielle (2.17) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{8}, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## CHAPITRE 3

### La bifurcation zero-Hopf du système de Rössler généralisé

#### 3.1 Introduction

L'un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles ordinaires est l'étude de leurs cycles limites, de leur existence, de leur nombre et de leur stabilité. Les cycles limites apparaissent généralement à une bifurcation de Hopf dans les systèmes non linéaires à paramètres variables. Une bifurcation de Hopf générique est une bifurcation locale où un cycle limite bifurque à partir d'un point d'équilibre lorsqu'une paire de valeurs propres complexes croise l'axe imaginaire. Il existe de nombreuses autres bifurcations de Hopf non génériques ou dégénérées. L'une d'entre elles est appelée bifurcation zéro-Hopf.

Un équilibre zero-Hopf est un point d'équilibre d'un système différentiel autonome à trois dimensions, qui a une valeur propre zéro et une paire des valeurs propres purement imaginaires (c-à-d les valeurs propres sont  $\pm iw \neq 0$  et 0). Pour un tel équilibre, il n'y a pas une théorie générale pour savoir si de cet équilibre bifurque une orbite périodique de faible amplitude quand les paramètres du système changent.

Dans [19], **J. Llibre** a étudié la bifurcation zero-Hopf en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, et l'a appliquée au système de **Rössler**

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cz + xz, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres réels.



Cette méthode peut être appliquée à tout système différentiel dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . Récemment, elle a été appliquée avec succès pour d'autres modèles intéressants (voir par exemple [[7], [10], [8], [9], [14], [17], [18], [20], [21]] et leurs références).

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la bifurcation zéro-Hopf en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, et de l'appliquer au système de **Rössler** généralisé dans  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + kx, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - cz + xz, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $a, b, c$  et  $k$  sont des paramètres réels. Nous utilisons le logiciel MAPLE pour effectuer les calculs fastidieux. Cette étude a fait l'objet d'une publication intitulée "**A. Roubache** and **E. Hadidi**, Zero-Hopf bifurcation of periodic orbits in the generalized **Rössler** system, journal **MATHEMATICA**." [26].

## 3.2 Résultats principaux

Nos résultats principaux sont les suivants

**Proposition 3.2.1** *Il existe une famille à deux paramètres du système de **Rössler** généralisé (3.2) pour lesquelles l'origine des coordonnées est un point d'équilibre zéro-Hopf, a savoir*

$$c = a + k, \quad b = \frac{(a+k)(1+ak)}{a}, \quad \frac{-a^3 + 2a + k}{a} > 0 \text{ et } a \neq 0.$$

– **Preuve du proposition 3.2.1** Le système (3.2) possède les points d'équilibre

$$p_1 = (0, 0, 0),$$

et

$$p_2 = \left( \frac{c + ack - ab}{1 + ak}, -\frac{c + ack - ab}{a(1 + ak)}, \frac{c + ack - ab}{a} \right),$$

où  $c + ack - ab \neq 0$  et  $a(1 + ak) \neq 0$ .

La matrice jacobienne du système (3.2) à l'origine est

$$\begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ b & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la partie linéaire du système (3.2) à l'origine est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (a + k - c)\lambda^2 + (ac + ck - ak - 1 - b)\lambda + ab - c - ack.$$

Afin d'étudier la bifurcation zéro-Hopf, nous imposons que

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + w^2).$$

Cela se produit si et seulement si nous avons

$$\begin{cases} a + k - c = 0, \\ ac + ck - ak - 1 - b + w^2 = 0, \\ ab - c - ack = 0. \end{cases}$$

Nous obtenons

$$1. c = a + k,$$

$$2. b = \frac{(a + k)(1 + ak)}{a},$$

$$3. \frac{-a^3 + 2a + k}{a} = w^2 \text{ et } a \neq 0. \text{ Ceci complète la preuve de la proposition.}$$

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes pour la bifurcation d'un cycle limite à partir de l'origine lorsqu'il s'agit d'un équilibre zéro-Hopf.

**Théorème 3.2.1** *Soit*

$$(a, b, c, k) = \left( \bar{a} + \varepsilon\alpha, \frac{(a + k)(1 + ak)}{a} + \varepsilon\beta, a + k + \varepsilon\gamma, aw^2 + a^3 - 2a + \varepsilon\delta \right),$$

avec  $a \neq 0$ ,  $w \neq 0$  et  $\varepsilon$  un paramètre suffisamment petit, si

$$\bar{a}(\bar{a}^2 + w^2 - 1)(2\bar{a}^4 + (2w^2 - 4)\bar{a}^2 - w^2 + 2) > 0 \text{ et } \Gamma > 0, \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma = & (\bar{a}^8\gamma + (2w^2 - 4)\gamma\bar{a}^6 - \beta\bar{a}^5 + \gamma(w^4 - 4w^2 + 6)\bar{a}^4 \\ & + (-\beta w^2 + 2\beta)\bar{a}^3 + (2w^2 - 4)\gamma\bar{a}^2 + (\beta w^2 - \beta)\bar{a} + \gamma) \\ & (\bar{a}^4\gamma + \gamma(w^2 - 2)\bar{a}^2 - \beta\bar{a} + (-w^2 + 1)\gamma). \end{aligned}$$

Alors, le système (3.2) a une bifurcation zéro-Hopf au point d'équilibre localisé à l'origine des coordonnées, et une orbite périodique existe à cet équilibre lorsque  $\varepsilon = 0$ ,

et elle existe pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. De plus, la stabilité ou l'instabilité de cette orbite périodique est donnée par les valeurs propres

$$\frac{L \pm \sqrt{N}}{4w((\bar{a}^2 - \frac{1}{2})w^2 + (\bar{a}^2 - 1)^2)}, \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} L &= (-\gamma\bar{a}^2w^2 + (-\bar{a}^4\gamma + 2\gamma\bar{a}^2 - \beta\bar{a} - \gamma))w^2, \\ N &= -8\bar{a}^4\gamma^2(\bar{a}^4 - \frac{3}{2}\bar{a}^2 + \frac{3}{8})w^8 - 32\bar{a}(\bar{a}(\bar{a}^4 - \frac{9}{8}\bar{a}^2 + \frac{3}{16})(\bar{a} + 1)^2 \\ &\quad (\bar{a} - 1)^2\gamma - \frac{\beta}{2}(\bar{a}^6 - \frac{3}{2}\bar{a}^4 + \frac{9}{8}\bar{a}^2 - \frac{1}{4}))\gamma w^6 + ((-48\bar{a}^{12} + 228\bar{a}^{10} \\ &\quad - 435\bar{a}^8 + 420\bar{a}^6 - 210\bar{a}^4 + 48\bar{a}^2 - 3)\gamma^2 + 48\beta\bar{a}(\bar{a} + 1)^2(\bar{a} - 1)^2 \\ &\quad \gamma(\bar{a}^4 - \bar{a}^2 + \frac{3}{8}) - 8\beta^2\bar{a}^2(\bar{a}^4 - \frac{3}{2}\bar{a}^2 + \frac{3}{8}))w^4 - 32(\gamma(\bar{a}^4 - 2\bar{a}^2 + 1) \\ &\quad - \beta\bar{a})(\bar{a} + 1)^2((\bar{a} - \frac{3}{8})(\bar{a} + 1)^2(\bar{a} - 1)^2\gamma - \frac{\beta\bar{a}}{2}(\bar{a}^2 - \frac{3}{4})) \\ &\quad (\bar{a} - 1)^2w^2 - 8((\bar{a}^4 - 2\bar{a}^2 + 1)\gamma - \beta\bar{a})^2(\bar{a} + 1)^4(\bar{a} - 1)^4. \end{aligned}$$

– **Preuve du théorème 3.2.1** Si

$$(a, b, c, k) = (\bar{a} + \varepsilon\alpha, \frac{(a+k)(1+ak)}{a} + \varepsilon\beta, a+k + \varepsilon\gamma, aw^2 + a^3 - 2a + \varepsilon\delta),$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  et  $\varepsilon$  un paramètre suffisamment petit, alors le système de **Rössler** généralisé (3.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - z + (\bar{a}^3 + (w^2 - 2)\bar{a} + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha + 3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 \\ \quad + \varepsilon^2\alpha^3 - 2\alpha + \delta))x, \\ \dot{y} = x + (\bar{a} + \varepsilon\alpha)y, \\ \dot{z} = \frac{(\bar{a}^3 + (w^2 - 1)\bar{a} + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha + 3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha^3 - \alpha \\ \quad + \delta))(1 + (\bar{a} + \varepsilon\alpha))(\bar{a}^3 + \frac{\bar{a} + \varepsilon\alpha}{(w^2 - 2)\bar{a} + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha \\ \quad + \frac{\bar{a} + \varepsilon\alpha}{\bar{a} + \varepsilon\alpha} \\ \quad + \frac{3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha^3 - 2\alpha + \delta))}{\bar{a} + \varepsilon\alpha} + \varepsilon\beta)x - (\bar{a}^3 + (w^2 - 1)\bar{a} \\ \quad + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha + 3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha^3 - \alpha + \delta + \gamma))z + xz. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Soit le changement de variables linéaire

$$(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z),$$

le système (3.5) dans les nouvelles variables  $(X, Y, Z)$  s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -Y - Z + (\bar{a}^3 + (w^2 - 2)\bar{a})X + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha + 3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 \\ \quad + \varepsilon^2\alpha^3 - 2\alpha + \delta)X, \\ \dot{Y} = X + \bar{a}Y + \varepsilon\alpha Y, \\ \dot{Z} = \left( \frac{(\bar{a}^3 + (w^2 - 1)\bar{a})\bar{a} + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha + 3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha^3)}{\bar{a} + \varepsilon\alpha} \right. \\ \quad + \frac{-\alpha + \delta)(1 + (\bar{a} + \varepsilon\alpha)(\bar{a}^3 + (w^2 - 2)\bar{a} + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha \\ \quad + \frac{3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha^3 - 2\alpha + \delta))}{\bar{a} + \varepsilon\alpha} + \varepsilon\beta)X - (\bar{a}^3 + (w^2 - 1)\bar{a}) \\ \quad \left. + \varepsilon(\alpha w^2 + 3\bar{a}^2\alpha + 3\bar{a}\varepsilon\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha^3 - \alpha + \delta + \gamma) \right) Z + \varepsilon XZ. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Maintenant, nous allons écrire le système linéaire à l'origine du système différentiel (3.6) quand  $\varepsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -Y - Z + (\bar{a}^3 + (w^2 - 2)\bar{a})X, \\ \dot{Y} = X + \bar{a}Y, \\ \dot{Z} = \frac{(\bar{a}^3 + (w^2 - 1)\bar{a})(1 + (\bar{a}^4 + (w^2 - 2)\bar{a}^2))}{\bar{a}} X - (\bar{a}^3 + (w^2 - 1)\bar{a})Z, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

alors

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}^3 + (w^2 - 2)\bar{a} & -1 & -1 \\ 1 & \bar{a} & 0 \\ \frac{(\bar{a}^3 + (w^2 - 1)\bar{a})(1 + (\bar{a}^4 + (w^2 - 2)\bar{a}^2))}{\bar{a}} & 0 & -\bar{a}^3 - (w^2 - 1)\bar{a} \end{pmatrix}.$$

Donc le polynôme caractéristique du système (3.7) est

$$p(\lambda) = \lambda^3 + w^2\lambda,$$

les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \pm iw, \quad \lambda_3 = 0,$$

sa forme normale de Jordan s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Afin de faciliter l'application de la théorie de moyennisation du premier ordre, donnée dans le théorème ( 2.2.1), nous effectuons un changement de variables linéaire

$$(X, Y, Z) \rightarrow (u, v, s),$$

c'est à dire

$$(u, v, s)^T = B(X, Y, Z)^T,$$

on a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0, \quad (3.8)$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} -w & -\bar{a}w & 0 \\ \bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2) & \bar{a}^2 - 1 & -1 \\ -\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2) & 1 - w^2 - \bar{a}^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire  $(u, v, s)^T = B(X, Y, Z)^T$ , c'est à dire

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{u} = -w\dot{X} - \bar{a}w\dot{Y}, \\ \dot{v} = \bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)\dot{X} + (\bar{a}^2 - 1)\dot{Y} - \dot{Z}, \\ \dot{s} = -\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)\dot{X} + (1 - w^2 - \bar{a}^2)\dot{Y} + \dot{Z}. \end{cases} \quad (3.9)$$

On a

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix},$$

où

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{w} & \frac{\bar{a}}{w^2} & \frac{\bar{a}}{w^2} \\ 0 & \frac{-1}{w^2} & \frac{-1}{w^2} \\ \frac{-\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)}{w} & \frac{-2\bar{a}^2 + \bar{a}^2w^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2}{w^2} & \frac{-2\bar{a}^2 + \bar{a}^2w^2 + \bar{a}^4 + 1}{w^2} \end{pmatrix}.$$

on obtient

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{w^2} \begin{pmatrix} -wu + \bar{a}v + \bar{a}s \\ -v - s \\ -\bar{a}w(-1 + w^2 + \bar{a}^2)u + (-2\bar{a}^2 + \bar{a}^2w^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2)v + (-2\bar{a}^2 + \bar{a}^2w^2 + \bar{a}^4 + 1)s \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

on remplace (3.6) et (3.10) dans (3.9), on trouve

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -w((\bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 - 2\bar{a} - 2\varepsilon\alpha \\ &\quad + \varepsilon\delta)\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2}\right) + \frac{v}{w^2} + \frac{s}{w^2} + \bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)\frac{u}{w} \\ &\quad - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2)\frac{v}{w^2} - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1)\frac{s}{w^2}) \\ &\quad - \bar{a}w\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2} + \bar{a}\left(-\frac{v}{w^2} - \frac{s}{w^2}\right) + \varepsilon\alpha\left(-\frac{v}{w^2} - \frac{s}{w^2}\right)\right), \\ \dot{v} &= (\bar{a}^3 - \bar{a} + \bar{a}w^2)((\bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 \\ &\quad - 2\bar{a} - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon\delta)\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2}\right) + \frac{v}{w^2} + \frac{s}{w^2} \\ &\quad + \bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)\frac{u}{w} - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2)\frac{v}{w^2} \\ &\quad - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1)\frac{s}{w^2}) + (\bar{a}^2 - 1)\left(\frac{-u}{w} \right. \\ &\quad \left. + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2} - \bar{a}\left(\frac{v}{w^2} + \frac{s}{w^2}\right) - \varepsilon\alpha\left(\frac{v}{w^2} + \frac{s}{w^2}\right)\right) - ((-\bar{a} - \varepsilon\alpha \\ &\quad + \bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 + \varepsilon\delta)(1 + w^2\bar{a}^2 \\ &\quad + 2\bar{a}w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^4 + 4\bar{a}^3\varepsilon\alpha + 6\bar{a}^2\varepsilon^2\alpha^2 + 4\bar{a}\varepsilon^3\alpha^3 - 2\bar{a}^2 \\ &\quad - 4\bar{a}\varepsilon\alpha + \bar{a}\varepsilon\delta + \varepsilon^2\alpha^2w^2 + \varepsilon^4\alpha^4 - 2\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha\delta) \\ &\quad \frac{1}{\bar{a} + \varepsilon\alpha} + \varepsilon\beta)\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2}\right) + (-\bar{a} - \varepsilon\alpha + \bar{a}w^2 \\ &\quad + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 + \varepsilon\delta \\ &\quad + \varepsilon\gamma)(-\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)\frac{u}{w} + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 \\ &\quad + \bar{a}^4 + 1 - w^2)\frac{v}{w^2} + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1)\frac{s}{w^2}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2}\right)(-\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2))\frac{u}{w} \\
 & + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2)\frac{v}{w^2} + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 \\
 & + \bar{a}^4 + 1)\frac{s}{w^2}), \\
 \dot{s} = & -\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)((\bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 \\
 & + \varepsilon^3\alpha^3 - 2\bar{a} - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon\delta)\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2}\right) + \frac{v}{w^2} + \frac{s}{w^2} \\
 & + \bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)\frac{u}{w} - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2)\frac{v}{w^2} \\
 & - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1)\frac{s}{w^2} + (1 - w^2 - \bar{a}^2)\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} \right. \\
 & \left. + \bar{a}\frac{s}{w^2} - \bar{a}\left(\frac{v}{w^2} + \frac{s}{w^2}\right) - \varepsilon\alpha\left(\frac{v}{w^2} + \frac{s}{w^2}\right)\right) + ((-\bar{a} - \varepsilon\alpha \\
 & + \bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 + \varepsilon\delta)(1 + w^2\bar{a}^2 \\
 & + 2\bar{a}w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^4 + 4\bar{a}^3\varepsilon\alpha + 6\bar{a}^2\varepsilon^2\alpha^2 + 4\bar{a}\varepsilon^3\alpha^3 \\
 & - 2\bar{a}^2 - 4\bar{a}\varepsilon\alpha + \bar{a}\varepsilon\delta + \varepsilon^2\alpha^2w^2 + \varepsilon^4\alpha^4 - 2\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha\delta)\frac{1}{\bar{a} + \varepsilon\alpha} \\
 & + \varepsilon\beta)\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2}\right) - (-\bar{a} - \varepsilon\alpha + \bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 \\
 & + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 + \varepsilon\delta + \varepsilon\gamma)(-\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2))\frac{u}{w} \\
 & + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2)\frac{v}{w^2} + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 \\
 & + 1)\frac{s}{w^2} + \varepsilon\left(\frac{-u}{w} + \bar{a}\frac{v}{w^2} + \bar{a}\frac{s}{w^2}\right)(-\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2))\frac{u}{w} + (-2\bar{a}^2 \\
 & + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2)\frac{v}{w^2} + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1)\frac{s}{w^2}).
 \end{aligned}$$

Considérons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, s)$  définies par  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$  et  $s = s$ . Alors, le système différentiel (3.11) devient

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = & \frac{1}{r} \left( \frac{r \cos(\theta)}{w} (-r \sin(\theta) w^2 - w^2 \varepsilon \alpha \bar{a} r \sin(\theta) + 3\bar{a}^2 \varepsilon \alpha r \cos(\theta) w \right. & (3.12) \\
 & + 3\bar{a} \varepsilon^2 \alpha^2 r \cos(\theta) w - 3\bar{a}^3 \varepsilon \alpha s - 3\bar{a}^2 \varepsilon^2 \alpha^2 s - \bar{a} \varepsilon^3 \alpha^3 s + 3\bar{a} \varepsilon \alpha s \\
 & - \bar{a} \varepsilon \delta s + w^3 \varepsilon \alpha r \cos(\theta) - w^2 \varepsilon \alpha \bar{a} s - 3\bar{a}^3 \varepsilon \alpha r \sin(\theta) - 3\bar{a}^2 \varepsilon^2 \alpha^2 r \sin(\theta) \\
 & + \varepsilon^3 \alpha^3 r w \cos(\theta) - \bar{a} \varepsilon^3 \alpha^3 r \sin(\theta) - 2\varepsilon \alpha r w \cos(\theta) + 3\varepsilon \alpha \bar{a} r \sin(\theta) \\
 & + \varepsilon \delta r w \cos(\theta) - \varepsilon \delta \bar{a} r \sin(\theta) \left. \right) + r \sin(\theta) ((\bar{a}^3 - \bar{a} + \bar{a} w^2) ((\bar{a} w^2 + w^2 \varepsilon \alpha \\
 & + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2 \varepsilon \alpha + 3\bar{a} \varepsilon^2 \alpha^2 + \varepsilon^3 \alpha^3 - 2\bar{a} - 2\varepsilon \alpha + \varepsilon \delta) \left( \frac{-r \cos(\theta)}{w} \right. \\
 & + \frac{\bar{a} r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{\bar{a} s}{w^2} \left. \right) + \frac{r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{s}{w^2} + \bar{a} (-1 + w^2 + \bar{a}^2) r \frac{\cos(\theta)}{w} \\
 & - (-2\bar{a}^2 + w^2 \bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2) r \frac{\sin(\theta)}{w^2} - (-2\bar{a}^2 + w^2 \bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1) \frac{s}{w^2} \\
 & + (\bar{a}^2 - 1) \left( \frac{-r \cos(\theta)}{w} + \frac{\bar{a} r \sin(\theta)}{w^2} + \bar{a} \frac{s}{w^2} + c \left( -r \frac{\sin(\theta)}{w^2} - \frac{s}{w^2} \right) \right. \\
 & + \varepsilon \alpha \left( -r \frac{\sin(\theta)}{w^2} - \frac{s}{w^2} \right) \left. \right) - ((-\bar{a} - \varepsilon \alpha + \bar{a} w^2 + w^2 \varepsilon \alpha + \bar{a}^3 \\
 & + 3\bar{a}^2 \varepsilon \alpha + 3\bar{a} \varepsilon^2 \alpha^2 + \varepsilon^3 \alpha^3 + \varepsilon \delta) (1 + w^2 \bar{a}^2 + 2\bar{a} w^2 \varepsilon \alpha + \bar{a}^4 \\
 & + 4\bar{a}^3 \varepsilon \alpha + 6\bar{a}^2 \varepsilon^2 \alpha^2 + 4\bar{a} \varepsilon^3 \alpha^3 - 2\bar{a}^2 - 4\bar{a} \varepsilon \alpha + \bar{a} \varepsilon \delta + \varepsilon^2 \alpha^2 w^2 \\
 & + \varepsilon^4 \alpha^4 - 2\varepsilon^2 \alpha^2 + \varepsilon^2 \alpha \delta) \frac{1}{\bar{a} + \varepsilon \alpha} + \varepsilon \beta) \left( \frac{-r \cos(\theta)}{w} + \frac{\bar{a} r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{\bar{a} s}{w^2} \right) \\
 & + (-\bar{a} - \varepsilon \alpha + \bar{a} w^2 + w^2 \varepsilon \alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2 \varepsilon \alpha + 3\bar{a} \varepsilon^2 \alpha^2 + \varepsilon^3 \alpha^3 + \varepsilon \delta + \varepsilon \gamma) \\
 & (-\bar{a} (-1 + w^2 + \bar{a}^2) \frac{r \cos(\theta)}{w} + (-2\bar{a}^2 + w^2 \bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2) \frac{r \sin(\theta)}{w^2} \\
 & + (-2\bar{a}^2 + w^2 \bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1) \frac{s}{w^2} - \varepsilon \left( \frac{-r \cos(\theta)}{w} + \frac{\bar{a} r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{\bar{a} s}{w^2} \right) \\
 & (-\bar{a} (-1 + w^2 + \bar{a}^2) \frac{r \cos(\theta)}{w} + (-2\bar{a}^2 + w^2 \bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2) \frac{r \sin(\theta)}{w^2} \\
 & + (-2\bar{a}^2 + w^2 \bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1) \frac{s}{w^2} \left. \right)),
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} = & \frac{1}{r^2} (r \cos(\theta)) ((\bar{a}^3 - \bar{a} + \bar{a}w^2) ((\bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha \\
 & + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 - 2\bar{a} - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon\delta) (\frac{-r \cos(\theta)}{w} + \frac{\bar{a}r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{\bar{a}s}{w^2}) \\
 & + \frac{r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{s}{w^2} + \bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2)r \frac{\cos(\theta)}{w} - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 \\
 & + \bar{a}^4 + 1 - w^2)r \frac{\sin(\theta)}{w^2} - (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1) \frac{s}{w^2}) \\
 & + (\bar{a}^2 - 1) (\frac{-r \cos(\theta)}{w} + \frac{\bar{a}r \sin(\theta)}{w^2} + \bar{a} \frac{s}{w^2} + c(-r \frac{\sin(\theta)}{w^2} - \frac{s}{w^2}) \\
 & + \varepsilon\alpha(-r \frac{\sin(\theta)}{w^2} - \frac{s}{w^2})) - ((-\bar{a} - \varepsilon\alpha + \bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 \\
 & + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 + \varepsilon\delta)(1 + w^2\bar{a}^2 + 2\bar{a}w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^4 \\
 & + 4\bar{a}^3\varepsilon\alpha + 6\bar{a}^2\varepsilon^2\alpha^2 + 4\bar{a}\varepsilon^3\alpha^3 - 2\bar{a}^2 - 4\bar{a}\varepsilon\alpha + \bar{a}\varepsilon\delta + \varepsilon^2\alpha^2w^2 \\
 & + \varepsilon^4\alpha^4 - 2\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^2\alpha\delta) \frac{1}{\bar{a} + \varepsilon\alpha} + \varepsilon\beta) (\frac{-r \cos(\theta)}{w} \\
 & + \frac{\bar{a}r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{\bar{a}s}{w^2}) + (-\bar{a} - \varepsilon\alpha + \bar{a}w^2 + w^2\varepsilon\alpha + \bar{a}^3 \\
 & + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 + \varepsilon^3\alpha^3 + \varepsilon\delta + \varepsilon\gamma) (-\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2) \frac{r \cos(\theta)}{w} \\
 & + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2) \frac{r \sin(\theta)}{w^2} + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1) \frac{s}{w^2}) \\
 & - \varepsilon (\frac{-r \cos(\theta)}{w} + \frac{\bar{a}r \sin(\theta)}{w^2} + \frac{\bar{a}s}{w^2}) (-\bar{a}(-1 + w^2 + \bar{a}^2) \frac{r \cos(\theta)}{w} \\
 & + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1 - w^2) \frac{r \sin(\theta)}{w^2} + (-2\bar{a}^2 + w^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 + 1) \frac{s}{w^2})) \\
 & - \frac{1}{w} (r \sin(\theta) (-r \sin(\theta)w^2 - w^2\varepsilon\alpha\bar{a}r \sin(\theta) + 3\bar{a}^2\varepsilon\alpha r w \cos(\theta) \\
 & + 3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 r w \cos(\theta) - 3\bar{a}^3\varepsilon\alpha s - 3\bar{a}^2\varepsilon^2\alpha^2 s - \varepsilon^3\alpha^3\bar{a}s + 3\varepsilon\alpha\bar{a}s - \varepsilon\delta\bar{a}s \\
 & + w^3\varepsilon\alpha r \cos(\theta) - w^2\varepsilon\alpha\bar{a}s - 3\bar{a}^3\varepsilon\alpha r \sin(\theta) - 3\bar{a}^2\varepsilon^2\alpha^2 r \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\varepsilon^3\alpha^3rw\cos(\theta) - \varepsilon^3\alpha^3\bar{a}r\sin(\theta) - 2\varepsilon\alpha rw\cos(\theta) + 3\varepsilon\alpha\bar{a}r\sin(\theta) \\
 & +\varepsilon\delta rw\cos(\theta) - \varepsilon\delta\bar{a}r\sin(\theta)), \\
 \dot{s} = & -\bar{a}(-1+w^2+\bar{a}^2)((\bar{a}w^2+w^2\varepsilon\alpha+\bar{a}^3+3\bar{a}^2\varepsilon\alpha+3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2 \\
 & +\varepsilon^3\alpha^3-2\bar{a}-2\varepsilon\alpha+\varepsilon\delta)\left(\frac{-r\cos(\theta)}{w}+\frac{\bar{a}r\sin(\theta)}{w^2}+\frac{\bar{a}s}{w^2}\right) \\
 & +\frac{r\sin(\theta)}{w^2}+\frac{s}{w^2}+\bar{a}(-1+w^2+\bar{a}^2)\frac{r\cos(\theta)}{w}-(-2\bar{a}^2+w^2\bar{a}^2 \\
 & +\bar{a}^4+1-w^2)\frac{r\sin(\theta)}{w^2}-(-2\bar{a}^2+w^2\bar{a}^2+\bar{a}^4+1)\frac{s}{w^2}) \\
 & +(1-w^2-\bar{a}^2)\left(\frac{-r\cos(\theta)}{w}+\frac{\bar{a}r\sin(\theta)}{w^2}+\frac{\bar{a}s}{w^2}\right) \\
 & +\bar{a}\left(-\frac{r\sin(\theta)}{w^2}-\frac{s}{w^2}\right)+\varepsilon\alpha\left(-\frac{v}{w^2}-\frac{s}{w^2}\right)+((-\bar{a}-\varepsilon\alpha \\
 & +\bar{a}w^2+w^2\varepsilon\alpha+\bar{a}^3+3\bar{a}^2\varepsilon\alpha+3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2+\varepsilon^3\alpha^3+\varepsilon\delta)(1+w^2\bar{a}^2 \\
 & +2\bar{a}w^2\varepsilon\alpha+\bar{a}^4+4\bar{a}^3\varepsilon\alpha+6\bar{a}^2\varepsilon^2\alpha^2+4\bar{a}\varepsilon^3\alpha^3-2\bar{a}^2-4\bar{a}\varepsilon\alpha \\
 & +\bar{a}\varepsilon\delta+\varepsilon^2\alpha^2w^2+\varepsilon^4\alpha^4-2\varepsilon^2\alpha^2+\varepsilon^2\alpha\delta)\frac{1}{\bar{a}+\varepsilon\alpha} \\
 & +\varepsilon\delta)\left(\frac{-r\cos(\theta)}{w}+\frac{\bar{a}r\sin(\theta)}{w^2}+\frac{\bar{a}s}{w^2}\right)-(-\bar{a}-\varepsilon\alpha+\bar{a}w^2 \\
 & +w^2\varepsilon\alpha\bar{a}^3+3\bar{a}^2\varepsilon\alpha+3\bar{a}\varepsilon^2\alpha^2+\varepsilon^3\alpha^3+\varepsilon\alpha+\varepsilon\delta)(-\bar{a}(-1 \\
 & +w^2+\bar{a}^2)\frac{r\cos(\theta)}{w}+(-2\bar{a}^2+w^2\bar{a}^2+\bar{a}^4+1-w^2)\frac{r\sin(\theta)}{w^2} \\
 & +(-2\bar{a}^2+w^2\bar{a}^2+\bar{a}^4+1)\frac{s}{w^2})+\varepsilon\left(\frac{-r\cos(\theta)}{w}+\frac{\bar{a}r\sin(\theta)}{w^2}\right) \\
 & +\frac{\bar{a}s}{w^2})(-\bar{a}(-1+w^2+\bar{a}^2)\frac{r\cos(\theta)}{w}+(-2\bar{a}^2+w^2\bar{a}^2 \\
 & +\bar{a}^4+1-w^2)\frac{r\sin(\theta)}{w^2}+(-2\bar{a}^2+w^2\bar{a}^2+\bar{a}^4+1)\frac{s}{w^2}).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, en prenant  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante du système différentiel (3.11), ses solutions dans la région  $\dot{\theta} > 0$  peuvent être étudiées en analysant

la solution du système différentiel

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \left( \frac{-1}{w^5 \bar{a}} (-2r \sin \theta \cos \theta w^3 \bar{a}^3 s - 2r \sin \theta \cos \theta w \bar{a}^5 s \right. & (3.13) \\
 &\quad - r \sin \theta \cos \theta w \bar{a} s - \sin \theta w^3 \bar{a}^2 \gamma r \cos(\theta) + \sin \theta \bar{a}^2 w^5 \gamma r \cos \theta + \\
 &\quad + \sin \theta \bar{a}^4 w^3 \gamma r \cos \theta + 2\bar{a}^2 sr + 2\bar{a}^3 w^2 \gamma r - \bar{a} w^2 \gamma r - \sin \theta r^2 w^2 \bar{a}^2 \\
 &\quad + \sin \theta r^2 w^2 \bar{a}^4 + w^2 \beta \bar{a}^2 r + 2\bar{a}^4 r w^2 s + w^6 \bar{a} \alpha r + 3w^4 \bar{a}^3 \alpha r \\
 &\quad + w^4 \bar{a} \delta r - 2w^4 \bar{a} \alpha r + \sin \theta \bar{a}^4 s^2 w^2 + \cos^3 \theta \bar{a} r^2 w \\
 &\quad - 3 \cos^3 \theta r^2 w \bar{a}^3 - \cos^3 \theta r^2 w^3 \bar{a} + 2 \cos^3 \theta r^2 w^3 \bar{a}^3 + 2 \cos^3 \theta r^2 w \bar{a}^5 \\
 &\quad - 2\bar{a}^6 r s \cos^2 \theta + 4\bar{a}^4 r s \cos^2 \theta - 2\bar{a}^2 sr \cos^2 \theta + r^2 \bar{a} w^3 \cos \theta \\
 &\quad - r^2 \bar{a} w \cos \theta - w^4 \bar{a}^3 \gamma r - \bar{a}^5 w^2 \gamma r + w^4 \bar{a} \gamma r - \bar{a}^6 r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \\
 &\quad - \bar{a}^2 r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + 2\bar{a}^4 r^2 \sin \theta \cos^2 \theta - 2r^2 \cos \theta w^3 \bar{a}^3 \\
 &\quad + 3r^2 w \bar{a}^3 \cos \theta - 2r^2 w \bar{a}^5 \cos \theta + 6 \cos \theta w^2 \bar{a}^4 \alpha r \sin \theta \\
 &\quad + 2 \cos \theta w^3 \bar{a}^2 \delta r \sin \theta - 6 \cos \theta w^3 \bar{a}^2 \alpha r \sin \theta - \sin \theta w^3 \beta \bar{a} r \cos \theta \\
 &\quad + 3 \sin \theta \cos \theta r w \bar{a}^3 s - w^2 \beta \bar{a}^2 r \cos^2 \theta - 2\bar{a}^4 r w^2 s \cos^2 \theta \\
 &\quad + \bar{a}^2 sr w^2 \cos^2 \theta + \bar{a}^5 w^2 \gamma r \cos^2 \theta - w^4 \bar{a} \gamma r \cos^2 \theta \\
 &\quad + \bar{a} w^2 \gamma r \cos^2 \theta - 2\bar{a}^3 w^2 \gamma r \cos^2 \theta + w^4 \bar{a}^3 \gamma r \cos^2 \theta \\
 &\quad - 2 \cos^2 \theta w^6 \bar{a} \alpha r + \cos \theta w^5 \bar{a}^2 \alpha s - 6 \cos^2 \theta w^4 \bar{a}^3 \alpha r \\
 &\quad + 3 \cos \theta w^3 \bar{a}^4 \alpha s - 2 \cos^2 \theta w^4 \bar{a} \delta r + \cos \theta w^3 \bar{a}^2 \delta s \\
 &\quad + 4 \cos^2 \theta w^4 \bar{a} \alpha r - 3 \cos \theta w^3 \bar{a}^2 \alpha s + 2 \sin \theta \bar{a}^3 w^2 \gamma s \\
 &\quad - \sin \theta \bar{a}^5 w^2 \gamma s - \sin \theta w^3 \delta r \cos \theta + \sin \theta w^2 \beta \bar{a}^2 s \\
 &\quad - \sin \theta w^4 \alpha \bar{a} s + \sin \theta r^2 \cos^2 \theta w^4 \bar{a}^2 - \sin \theta \bar{a}^3 w^4 \gamma s \\
 &\quad - \sin \theta \bar{a} w^2 \gamma s + 2 \cos \theta w^5 \bar{a}^2 \alpha r \sin \theta - \bar{a}^2 sr w^2 \\
 &\quad - 2 \sin \theta \bar{a}^4 s^2 + \sin \theta \bar{a}^6 s^2 + \sin \theta \bar{a}^2 s^2 + 2\bar{a}^6 r s - 4\bar{a}^4 r s \\
 &\quad \left. + \bar{a}^6 r^2 \sin \theta + \bar{a}^2 r^2 \sin \theta - 2\bar{a}^4 r^2 \sin \theta \right) + O(\varepsilon^2), \\
 &= \varepsilon F_1(\theta, r, s) + O(\varepsilon^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{d\theta} &= \varepsilon \left( -\frac{1}{w^5 \bar{a}} (\bar{a}^3 w^4 \gamma s - \bar{a}^6 s^2 - \bar{a}^2 s^2 + 2\bar{a}^4 r^2 + 2\bar{a}^4 s^2 \right. \\
 &\quad - r^2 w^2 \bar{a}^4 - \bar{a}^4 s^2 w^2 + r^2 w^2 \bar{a}^2 + \bar{a}^5 w^2 \gamma s + 2r \cos \theta w \bar{a}^5 s \\
 &\quad + \bar{a} r \cos \theta w s + \bar{a}^2 w^3 \gamma r \cos \theta - \bar{a}^2 w^5 \gamma r \cos \theta - \bar{a}^4 w^3 \gamma r \cos \theta) \\
 &\quad - r^2 \sin \theta \bar{a} w^3 \cos \theta - 3\bar{a}^3 w^4 \alpha r \sin \theta - w^2 \beta \bar{a}^2 r \sin \theta + w^4 \alpha \bar{a} r \sin \theta \\
 &\quad - 3r^2 \cos \theta w \bar{a}^3 \sin \theta + 2r^2 \cos \theta w^3 \bar{a}^3 \sin \theta + 2r^2 \cos \theta w \bar{a}^5 \sin \theta \\
 &\quad - 2\bar{a}^4 r \sin \theta w^2 s + \bar{a}^2 r \sin \theta s w^2 + \bar{a} r^2 \cos \theta w \sin \theta + \bar{a}^3 w^4 \gamma r \sin \theta \\
 &\quad - \bar{a} w^6 \alpha r \sin \theta - \bar{a} w^4 \delta r \sin \theta - 2\bar{a}^3 w^2 \gamma r \sin \theta + \bar{a}^5 w^2 \gamma r \sin \theta \\
 &\quad - \bar{a} w^4 \gamma r \sin \theta + \bar{a} w^2 \gamma r \sin \theta + 3\bar{a}^2 w^3 \alpha r \cos \theta - 3\bar{a}^4 w^3 \alpha r \cos \theta \\
 &\quad - \bar{a}^2 w^3 \delta r \cos \theta - \bar{a}^2 w^5 \alpha r \cos \theta + w^3 \beta \bar{a} r \cos \theta - 3r \cos \theta w \bar{a}^3 \varpi \\
 &\quad + 2r \cos \theta w^3 \bar{a}^3 s + \bar{a}^2 r^2 \cos^2 \theta + \bar{a}^6 r^2 \cos^2 \theta - 2\bar{a}^4 r^2 \cos^2 \theta \\
 &\quad + 4\bar{a}^4 r \sin \theta s - 2\bar{a}^3 w^2 \gamma s - \bar{a}^6 r^2 - \bar{a}^2 r^2 - 2\bar{a}^6 r \sin \theta s \\
 &\quad \left. - w^2 \beta \bar{a}^2 s + w^3 \delta r \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta w^4 \bar{a}^2 - 2\bar{a}^2 r \sin \theta s + \bar{a} w^2 \gamma s \right) + O(\varepsilon^2) \\
 &= \varepsilon F_2(\theta, r, s) + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Nous allons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre décrite dans le théorème (2.2.1) au système différentiel (3.13). Nous avons

$$\begin{aligned}
 t &= \theta, \quad T = 2\pi, \quad X = (r, s)^T, \\
 F(\theta, r, s) &= \begin{pmatrix} F_1(\theta, r, s) \\ F_2(\theta, r, s) \end{pmatrix}, \quad \text{et } f(r, s) = \begin{pmatrix} f_1(r, s) \\ f_2(r, s) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que le système (3.13) satisfait à toutes les hypothèses du théorème (2.2.1).

Maintenant, nous calculons les intégrales (2.3), c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, s) d\theta \\ \quad = \frac{1}{2w^5} (4\bar{a}^3 s - 2\bar{a} s - 2\bar{a}^5 s + \bar{a}^4 w^2 \gamma + \bar{a} w^2 s \\ \quad \quad - w^4 \gamma - w^2 \beta \bar{a} + w^2 \gamma + \bar{a}^2 w^4 \gamma - 2\bar{a}^2 w^2 \gamma - 2\bar{a}^3 w^2 s) \\ f_2(r, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r, s) d\theta \\ \quad = -\frac{1}{2w^5} (2\bar{a} r^2 w^2 - 2\bar{a}^3 s^2 w^2 - 2\bar{a}^3 r^2 w^2 + 2\gamma s w^2 \\ \quad \quad - \bar{a}^5 r^2 + 4\bar{a}^3 s^2 + 2\bar{a}^3 r^2 - 2\bar{a} s^2 - 2\bar{a}^5 s^2 - \bar{a} r^2 w^4 \\ \quad \quad + 2\bar{a}^4 \gamma s w^2 + 2\bar{a}^2 \gamma s w^4 - 4\bar{a}^2 \gamma s w^2 - 2\bar{a} \beta s w^2 - \bar{a} r^2) \end{array} \right.$$

Le système  $f_1(r, s) = f_2(r, s) = 0$  a une solution unique  $(r^*, s^*)$  avec  $r^* > 0$ , donnée par

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{2w^2 \sqrt{\Gamma}}{\sqrt{2\bar{a}(\bar{a}^2 + w^2 - 1)(2\bar{a}^4 + (2w^2 - 4)\bar{a}^2 - w^2 + 2)}}, \\ s^* &= \frac{w^2(\bar{a}^4 \gamma + \gamma(w^2 - 2)\bar{a}^2 - \beta \bar{a} + (-w^2 + 1)\gamma)}{\bar{a}(2\bar{a}^4 + (2w^2 - 4)\bar{a}^2 - w^2 + 2)}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma &= (\bar{a}^8 \gamma + (2w^2 - 4)\gamma \bar{a}^6 - \beta \bar{a}^5 + \gamma(w^4 - 4w^2 + 6)\bar{a}^4 \\ &\quad + (-\beta w^2 + 2\beta)\bar{a}^3 + (2w^2 - 4)\gamma \bar{a}^2 + (\beta w^2 - \beta)\bar{a} + \gamma) \\ &\quad (\bar{a}^4 \gamma + \gamma(w^2 - 2)\bar{a}^2 - \beta \bar{a} + (-w^2 + 1)\gamma), \end{aligned}$$

si  $\Gamma > 0$  et  $\bar{a}(\bar{a}^2 + w^2 - 1)(2\bar{a}^4 + (2w^2 - 4)\bar{a}^2 - w^2 + 2) > 0$ .

On note que le jacobien (2.4) en  $(r^*, s^*)$  prend la valeur

$$\begin{aligned} &\frac{1}{w^6(2\bar{a}^4 + (2w^2 - 4)\bar{a}^2 - w^2 + 2)} (\bar{a}^8 \gamma + (2w^2 - 4)\gamma \bar{a}^6 - \beta \bar{a}^5 \\ &\quad + \gamma(w^4 - 4w^2 + 6)\bar{a}^4 + (-\beta w^2 + 2\beta)\bar{a}^3 + (2w^2 - 4)\gamma \bar{a}^2 \\ &\quad + (\beta w^2 - \beta)\bar{a} + \gamma) (\bar{a}^4 \gamma + \gamma(w^2 - 2)\bar{a}^2 - \beta \bar{a} + (-w^2 + 1)\gamma), \end{aligned}$$

qui est non nulle par hypothèse.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, s)} \Big|_{(r,s)=(r^*,s^*)}$$

sont celles données dans (3.4) .

Le reste de la preuve du théorème (3.2.1) résulte immédiatement du théorème (2.2.1) si on montre que la solution périodique correspondant à  $(r^*, s^*)$  fournit une orbite périodique bifurquant de l'origine des coordonnées du système différentiel (3.5) en  $\varepsilon = 0$ .

Le théorème (2.2.1) garantit, pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit, l'existence d'une solution périodique  $(r(\theta, \varepsilon), s(\theta, \varepsilon))$  du système (3.13) telle que

$$(r(\theta, \varepsilon), s(\theta, \varepsilon)) \rightarrow (r^*, s^*) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

C'est-à-dire que le système (3.11) a une solution périodique

$$(u(\theta, \varepsilon), v(\theta, \varepsilon), s(\theta, \varepsilon)) = (r(\theta, \varepsilon) \cos \theta, r(\theta, \varepsilon) \sin \theta, s(\theta, \varepsilon)), \quad (3.14)$$

pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. Par conséquent, le système (3.6) a la solution périodique  $(X(\theta), Y(\theta), Z(\theta))$  obtenue à partir de (3.14) par le changement de variables

$$(X, Y, Z)^T = B^{-1}(u, v, s)^T.$$

Enfin, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, le système (3.5) a une solution périodique

$$(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) = (\varepsilon X(\theta), \varepsilon Y(\theta), \varepsilon Z(\theta)),$$

qui tend vers l'origine des coordonnées lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il s'agit donc d'une solution périodique partant du point d'équilibre zéro-Hopf, situé à l'origine des coordonnées lorsque  $\varepsilon = 0$ . Ceci complète la preuve du théorème (3.2.1).

**Remarque 3.2.1** *Notons que nous pouvons obtenir des résultats similaires pour l'équilibre  $p_2$ .*

## CHAPITRE 4

### La bifurcation zero-Hopf du système de Michelson généralisé

#### 4.1 Introduction

Dans [17], **J. Llibre** et **A.Makhlouf** ont étudié la bifurcation zéro-Hopf dans le système de **Michelson** généralisé

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = a + by + cz - \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres réels, ils ont fourni des conditions suffisantes pour l'existence de deux solutions périodiques bifurquant d'un équilibre zéro-Hopf pour un tel système.

Dans ce chapitre, nous étudions les points d'équilibre zéro-Hopf et les bifurcations zéro-Hopf des cycles limites qui se produisent en ces points d'équilibre dans certains systèmes de **Michelson** généralisés

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = a + by + cz + kx - \frac{x^2}{2}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $a, b, c$  et  $k$  sont des paramètres réels, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. Ce chapitre est soumis pour une publication.

## 4.2 Résultats principaux

Le résultat principal de ce travail est le suivant

Dans la proposition suivante, nous caractérisons quand le point d'équilibre du système de **Michelson** généralisé (4.1) est un point d'équilibre zero-Hopf.

**Proposition 4.2.1** *Il existe une famille à deux paramètres du système de **Michelson** généralisé (4.1) pour laquelle l'origine des coordonnées est un point d'équilibre zéro-Hopf, à savoir*

$$a = \frac{-k^2}{2}, b = -w^2, c = 0.$$

**Preuve du proposition 4.2.1** Déterminons les points d'équilibre du système de **Michelson** généralisé (4.1)

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 0, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \\ a + by + cz + kx - \frac{x^2}{2} = 0, \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \\ a + kx - \frac{x^2}{2} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$x_1 = k + \sqrt{k^2 + 2a},$$

et

$$x_2 = k - \sqrt{k^2 + 2a},$$

si  $k^2 + 2a > 0$ .

Alors le système (4.1) possède des points d'équilibre

$$p_{\pm} = (k \pm \sqrt{k^2 + 2a}, 0, 0), \text{ si } k^2 + 2a > 0.$$

Système linéaire du système de **Michelson** généralisé (4.1) à les points d'équilibre  $p_{\pm}$  est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = \mp \sqrt{k^2 + 2a} + by - cz. \end{cases} \quad (4.2)$$



Donc le polynôme caractéristique du système (4.2) est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda \mp \sqrt{k^2 + 2a}.$$

Afin d'étudier la bifurcation zéro-Hopf, nous imposons que

$$p(\lambda) = -(\lambda - \varepsilon)(\lambda^2 + w^2).$$

Donc

$$-\lambda^3 + \varepsilon\lambda^2 - w^2\lambda + \varepsilon w^2 = -\lambda^3 + c\lambda^2 + b\lambda \mp \sqrt{k^2 + 2a},$$

nous trouvons que

$$\begin{cases} \mp \sqrt{k^2 + 2a} - \varepsilon w^2 = 0, \\ b = -w^2, \\ c = \varepsilon, \end{cases}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{i) } a &= \frac{-k^2}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 w^4, \\ \text{ii) } b &= -w^2, \end{aligned}$$

et

$$\text{iii) } c = \varepsilon.$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , on obtient

$$a = \frac{-k^2}{2}, b = -w^2 \text{ et } c = 0.$$

Ceci complète la preuve de la proposition (4.2.1).

Dans ce qui suit, nous allons étudier quand le système de **Michelson** généralisé (4.1) ayant un point d'équilibre zéro-Hopf à l'origine des coordonnées a une bifurcation zéro-Hopf produisant une certaine orbite périodique.

**Théorème 4.2.1** *Supposons que dans le système de **Michelson** généralisé (4.1), nous avons*

$$a = \frac{-k^2}{2} + \varepsilon^2\left(\alpha + \frac{w^4}{2}\right), b = -w^2 + \varepsilon\beta, c = \varepsilon, k = \bar{k} + \varepsilon\gamma, \quad (4.3)$$

avec  $\alpha > \frac{3}{8}$  et  $w > 0$ , alors pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit le système (4.1) a deux solutions périodiques

$$(x_i(t, \varepsilon), y_i(t, \varepsilon), z_i(t, \varepsilon)), \text{ pour } i = 1, 2,$$

bifurquant de l'équilibre zéro-Hopf de la proposition (4.2.1), à savoir

$$\varepsilon \left( \frac{R^* \sin wt + wV_i^*}{w}, R^* \cos wt, -wR^* \sin wt \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.4)$$

où

$$R^* = w\sqrt{w^8 + 4\alpha w^4 - 2w^4 + 4\alpha^2},$$

$$V_i^* = -w^2 + (-1)^i \sqrt{w^4 + 2\alpha} \text{ pour } i = 1, 2.$$

De plus, ces deux solutions périodiques sont instables.

#### Preuve du théorème 4.2.1

Si

$$(a, b, c, k) = \left( \frac{-(\bar{k} + \varepsilon\gamma)^2}{2} + \varepsilon^2\left(\alpha + \frac{w^4}{2}\right), -w^2 + \varepsilon\beta, \varepsilon, \bar{k} + \varepsilon\gamma \right),$$

avec  $\alpha > \frac{3}{8}$ ,  $w > 0$  et  $\varepsilon$  un paramètre suffisamment petit .

Le système différentiel (4.1) satisfaisant (4.3) a deux points d'équilibre

$$p_{\pm} = (k \pm \sqrt{k^2 + 2a}, 0, 0),$$

donc

$$p_{\pm} = (\bar{k} + \varepsilon\gamma \pm \sqrt{(\bar{k} + \varepsilon\gamma)^2 + 2\left(\frac{-(\bar{k} + \varepsilon\gamma)^2}{2} + \varepsilon^2\left(\alpha + \frac{w^4}{2}\right)\right)}, 0, 0),$$

alors

$$p_{\pm} = (\bar{k} + \varepsilon\gamma \pm \varepsilon\sqrt{2\alpha + w^4}, 0, 0).$$

Nous étudions d'abord les solutions périodiques bifurquant de l'équilibre zéro-Hopf près de l'équilibre  $p_-$ .

Le système différentiel (4.1) satisfaisant (4.3) est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = \frac{-(\bar{k} + \varepsilon\gamma)^2}{2} + \varepsilon^2\left(\alpha + \frac{w^4}{2}\right) + (-w^2 + \varepsilon\beta)y + \varepsilon z + (\bar{k} + \varepsilon\gamma)x - \frac{x^2}{2}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pour appliquer la théorie de moyennisation décrite au système (4.1) satisfaisant (4.3), nous translatons le point d'équilibre  $p_-$  vers l'origine en faisant le changement de variables

$$(x, y, z) = (x_1 + \bar{k} + \varepsilon\gamma - \varepsilon\sqrt{2\alpha + w^4}, y_1, z_1).$$

Le système différentiel (4.5) dans les nouvelles variables  $(x_1, y_1, z_1)$  est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = z_1, \\ \dot{z}_1 = -w^2 y_1 - \frac{1}{2} x_1^2 + \varepsilon(\sqrt{w^4 + 2\alpha} x_1 + \beta y_1 + z_1 + (\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (\frac{w^4}{2} + \alpha)\varepsilon). \end{cases} \quad (4.6)$$

Le système (4.6) possède le point d'équilibre est

$$p = (0, 0, 0).$$

La première étape afin d'écrire notre système différentiel (4.6) sous la forme normale pour appliquer la théorie de moyennisation (2.2.1) est d'écrire le système linéaire à l'origine du système différentiel (4.6) lorsque  $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = z_1, \\ \dot{z}_1 = -w^2 y_1. \end{cases}$$

La forme normale de jordan s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous appliquons le changement de variables linéaire

$$(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (X, Y, Z),$$

c'est à dire

$$(X, Y, Z)^T = B(x_1, y_1, z_1)^T,$$

on a

$$BAB^{-1} = J \Rightarrow BA - JB = 0, \quad (4.7)$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{w} \\ 1 & 0 & \frac{1}{w^2} \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire  $(X, Y, Z)^T = B(x_1, y_1, z_1)^T$ , c'est à dire

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{y}_1, \\ \dot{Y} = \frac{-1}{w} \dot{z}_1, \\ \dot{Z} = \dot{x}_1 + \frac{1}{w^2} \dot{z}_1. \end{cases} \quad (4.8)$$

On a

$$(x_1, y_1, z_1)^T = B^{-1}(X, Y, Z)^T,$$

où

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{w} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$\begin{cases} x_1 = \frac{Y}{w} + Z, \\ y_1 = X, \\ z_1 = -wY, \end{cases} \quad (4.9)$$

on remplace (4.6) et (4.9) dans (4.8), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -wY, \\ \dot{Y} = wX + \frac{1}{2w} \left( \frac{Y}{w} + Z \right)^2 - \frac{\varepsilon}{w} \left[ \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right)^2 + \beta X + \left( \frac{Y}{w} + Z \right) \sqrt{w^4 + 2\alpha} - wY - \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right) \varepsilon \right], \\ \dot{Z} = -\frac{1}{2w^2} \left( \frac{Y}{w} + Z \right)^2 + \frac{\varepsilon}{w^2} \left[ \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right)^2 + \beta X + \left( \frac{Y}{w} + Z \right) \sqrt{w^4 + 2\alpha} - wY - \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right) \varepsilon \right]. \end{cases} \quad (4.10)$$

Considérons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, Z)$  définies par  $X = r \cos \theta$  et  $Y =$

$r \sin \theta$ , et  $Z = Z$ . Alors, le système différentiel (4.10) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{-\sin \theta}{2w^3} [r \cos \theta (r \cos \theta + 2\beta w^2 \varepsilon) + 2rw \sin \theta (-Z + \varepsilon(\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2)) \\ -r^2 + w^2(Z(-Z + 2\varepsilon\sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2\varepsilon(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - \varepsilon^2(w^4 + 2\alpha))], \\ \dot{\theta} = w - \frac{1}{2rw^3} [\cos \theta (r \cos \theta (r \cos \theta + 2\varepsilon\beta w^2) - r^2 + w^2(Z(-Z + 2\varepsilon\sqrt{w^4 + 2\alpha}) \\ + 2\varepsilon(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - \varepsilon^2(w^4 + 2\alpha))) + 2wr \cos \theta \sin \theta (-Z + \varepsilon(\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2))], \\ \dot{Z} = \frac{1}{2w^4} [r \cos \theta (r \cos \theta + 2\varepsilon\beta w^2) + 2rw \sin \theta (-Z + \varepsilon(\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2)) \\ -r^2 + w^2(Z(-Z + 2\varepsilon\sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2\varepsilon(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - \varepsilon^2(w^4 + 2\alpha))]. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

En effectuant le changement de variables  $(r, Z) = (\varepsilon R, \varepsilon V)$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R} = \frac{-\varepsilon \sin \theta}{2w^3} [R \cos \theta (R \cos \theta + 2\beta w^2) + 2Rw \sin \theta (-V + \sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2) \\ -R^2 + w^2(V(-V + 2\sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (w^4 + 2\alpha))], \\ \dot{\theta} = w - \frac{\varepsilon}{2Rw^3} [\cos \theta (R \cos \theta (R \cos \theta + 2\beta w^2) - R^2 + w^2(V(-V + 2\sqrt{w^4 + 2\alpha}) \\ + 2(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (w^4 + 2\alpha))) + 2wR \cos \theta \sin \theta (-V + (\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2))], \\ \dot{V} = \frac{\varepsilon}{2w^4} [R \cos \theta (R \cos \theta + 2\varepsilon\beta w^2) + 2Rw \sin \theta (-V + (\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2)) \\ -R^2 + w^2(V(-V + 2\sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (w^4 + 2\alpha))]. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Dans le système (4.12), nous prenons  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, et nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, R, V) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{ds}{d\theta} = \varepsilon F_2(\theta, R, V) + O(\varepsilon^2), \end{array} \right. \quad (4.13)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(\theta, R, V) = \frac{\sin \theta}{2w^4} [(-2w^2V - 2Rw \sin \theta)\sqrt{w^4 + 2\alpha} + 2Rw \sin \theta(w^2 + V) \\ - \cos \theta (R^2 \cos \theta + 2\beta w^2) - w^6(\frac{1}{2}w^4 + 2\alpha) + w^2(V^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha) + R^2], \\ F_2(\theta, R, V) = \frac{1}{4w^5} [R \cos \theta (2R \cos \theta + 4\beta w^2) + 4Rw \sin \theta (-w^2 + \sqrt{w^4 + 2\alpha} - V) + w^6(w^4 \\ + 4\alpha - 2) + w^2(4V\sqrt{w^4 + 2\alpha} - 2V^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha) - 2R^2]. \end{array} \right.$$

Nous allons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre (2.2.1) au système

différentiel (4.13). Nous avons

$$t = \theta, T = 2\pi, X = (R, V)^T \text{ et}$$

$$F(\theta, R, V) = \begin{pmatrix} F_1(\theta, R, V) \\ F_2(\theta, R, V) \end{pmatrix}, \text{ et } f(R, V) = \begin{pmatrix} f_1(R, V) \\ f_2(R, V) \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que le système (4.13) satisfait à toutes les hypothèses du théorème (2.2.1).

Maintenant, nous calculons les intégrales (2.3), c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(R, V) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, R, V) d\theta \\ \quad = \frac{-R}{2w^3} (-w^2 + \sqrt{w^4 + 2\alpha} - V), \\ f_2(R, V) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, R, V) d\theta \\ \quad = \frac{1}{4w^5} (w^6(w^4 + 4\alpha - 2) + 2w^2(2V\sqrt{w^4 + 2\alpha} - V^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha - R^2)). \end{array} \right.$$

Le système  $f_1(R, V) = f_2(R, V) = 0$  a une solution unique  $(R^*, V^*)$  avec  $R^* > 0$ , à savoir

$$R^* = w\sqrt{w^8 + 4\alpha w^4 - 2w^4 + 4\alpha^2},$$

$$V^* = -w^2 + \sqrt{w^4 + 2\alpha}, \text{ si } \alpha > \frac{3}{8}.$$

Le jacobien (2.4) en  $(R^*, V^*)$  prend la valeur

$$\det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(R, V)} \Big|_{(R, V) = (R^*, V^*)} = \frac{1}{4w^6} (w^8 + 4\alpha w^4 - 2w^4 + 4\alpha^2) > 0,$$

qui est non nulle par hypothèse.

Le théorème (2.2.1) garantit pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit l'existence d'une solution périodique  $(R(\theta, \varepsilon), V(\theta, \varepsilon))$  du système (4.13) telle que

$$(R(\theta, \varepsilon), V(\theta, \varepsilon)) \rightarrow (R^*, V^*)$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Autrement dit, le système (4.13) a la solution périodique suivante

$$(R(\theta, \varepsilon), V(\theta, \varepsilon)) = (R^* + O(\varepsilon), V^* + O(\varepsilon)).$$

Cette solution périodique s'écrit dans le système (4.12) sous la forme suivante

$$(R(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), V(t, \varepsilon)) = (R^* + O(\varepsilon), wt + O(\varepsilon), V^* + O(\varepsilon)).$$

Dans le système (4.11), il devient

$$(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) = (\varepsilon R^* + O(\varepsilon^2), wt + O(\varepsilon), \varepsilon V^* + O(\varepsilon^2)).$$

En passant à la solution périodique du système (4.10), on a  $X = r \cos \theta$  et  $Y = r \sin \theta$ , on obtient

$$(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) = (\varepsilon R^* \cos wt + O(\varepsilon^2), \varepsilon R^* \sin wt + O(\varepsilon^2), \varepsilon V^* + O(\varepsilon^2)).$$

Dans le système (4.6), nous avons effectué un changement des variables linéaire

$$(X, Y, Z)^T = B(x_1, y_1, z_1)^T,$$

donc on a

$$(x_1, y_1, z_1)^T = B^{-1}(X, Y, Z)^T,$$

alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{w} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon R^* \cos wt + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon R^* \sin wt + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon V^* + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix},$$

donc la solution périodique s'écrit

$$(x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon)) = \left( \varepsilon \frac{R^* \sin wt + wV^*}{w} + O(\varepsilon^2), \varepsilon R^* \cos wt + O(\varepsilon^2), -\varepsilon w R^* \sin wt + O(\varepsilon^2) \right).$$

Enfin pour le système (4.1) la solution périodique devient la solution (4.4) pour  $i = 2$  de l'énoncé du théorème (4.2.1).

De plus les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(R, V)} \right|_{(R, V) = (R^*, V^*)}$$

sont données par

$$\frac{1}{2w} \pm \frac{i}{2w^3} \sqrt{w^8 + 4\alpha w^4 - 3w^4 + 4\alpha^2}, \text{ et } \alpha > \frac{3}{8}.$$

Donc, la solution périodique associée au zéro  $(R^*, V^*)$  est instable, car la partie réelle des deux valeurs propres est toujours positive.

Maintenant, nous étudions les solutions périodiques bifurquant de l'équilibre zéro-Hopf près de l'équilibre  $p_+$ .

Nous translatons à l'origine le point d'équilibre  $p_+$  en faisant le changement de variables

$$(x, y, z) = (x_1 + \bar{k} + \varepsilon\gamma + \varepsilon\sqrt{2\alpha + w^4}, y_1, z_1).$$

Le système différentiel (4.5) dans les nouvelles variables  $(x_1, y_1, z_1)$  est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = z_1, \\ \dot{z}_1 = -w^2 y_1 - \frac{1}{2} x_1^2 + \varepsilon(-\sqrt{w^4 + 2\alpha} x_1 + \beta y_1 + z_1 + (\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (\frac{w^4}{2} + \alpha)\varepsilon). \end{cases} \quad (4.14)$$

La première étape afin d'écrire notre système différentiel (4.14) sous la forme normale pour appliquer la théorie de moyennisation (2.2.1) est d'écrire le système linéaire à l'origine du système différentiel (4.14) lorsque  $\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = z_1, \\ \dot{z}_1 = -w^2 y_1. \end{cases}$$

La forme normale de Jordan s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 \\ w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous appliquons le changement linéaire de variables

$$(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (X, Y, Z),$$

c'est à dire

$$(X, Y, Z)^T = B(x_1, y_1, z_1)^T,$$



d'où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{w} \\ 1 & 0 & \frac{1}{w^2} \end{pmatrix}.$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = y_1, \\ \dot{Y} = \frac{-1}{w} z_1, \\ \dot{Z} = x_1 + \frac{1}{w^2} z_1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Le système différentiel (4.14) dans les nouvelles variables  $(X, Y, Z)$  est

$$\begin{cases} \dot{X} = -wY, \\ \dot{Y} = wX + \frac{1}{2w} \left( \frac{Y}{w} + Z \right)^2 - \frac{\varepsilon}{w} \left[ \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right)^2 + \beta X - \left( \frac{Y}{w} + Z \right) \sqrt{w^4 + 2\alpha} - wY - \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right) \varepsilon \right], \\ \dot{Z} = -\frac{1}{2w^2} \left( \frac{Y}{w} + Z \right)^2 + \frac{\varepsilon}{w^2} \left[ \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right)^2 + \beta X - \left( \frac{Y}{w} + Z \right) \sqrt{w^4 + 2\alpha} - wY - \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right) \varepsilon \right]. \end{cases} \quad (4.16)$$

Considérons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, Z)$  définies par  $X = r \cos \theta$  et  $Y = r \sin \theta$ , et  $Z = Z$ . Alors, le système différentiel (4.16) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{-\sin \theta}{2w^3} [r \cos \theta (r \cos \theta + 2\beta w^2 \varepsilon) + 2rw \sin \theta (-Z + \varepsilon(-\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2)) \\ -r^2 + w^2 (Z(-Z - 2\varepsilon \sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2\varepsilon \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right)^2 - \varepsilon^2 (w^4 + 2\alpha))], \\ \dot{\theta} = w - \frac{1}{2rw^3} [\cos \theta (r \cos \theta (r \cos \theta + 2\varepsilon \beta w^2) - r^2 + w^2 (Z(-Z - 2\varepsilon \sqrt{w^4 + 2\alpha}) \\ + 2\varepsilon \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right)^2 - \varepsilon^2 (w^4 + 2\alpha))) + 2wr \cos \theta \sin \theta (-Z + \varepsilon(-\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2))], \\ \dot{Z} = \frac{1}{2w^4} [r \cos \theta (r \cos \theta + 2\varepsilon \beta w^2) + 2rw \sin \theta (-Z + \varepsilon(-\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2)) \\ -r^2 + w^2 (Z(-Z - 2\varepsilon \sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2\varepsilon \left( \frac{w^4}{2} + \alpha \right)^2 - \varepsilon^2 (w^4 + 2\alpha))]. \end{cases} \quad (4.17)$$

En effectuant le changement de variables  $(r, Z) = (\varepsilon R, \varepsilon V)$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R} = \frac{-\varepsilon \sin \theta}{2w^3} [R \cos \theta (R \cos \theta + 2\beta w^2) + 2Rw \sin \theta (-V - \sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2) \\ -R^2 + w^2 (V(-V - 2\sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (w^4 + 2\alpha))], \\ \dot{\theta} = w - \frac{\varepsilon}{2Rw^3} [\cos \theta (R \cos \theta (R \cos \theta + 2\beta w^2) - R^2 + w^2 (V(-V - 2\sqrt{w^4 + 2\alpha}) \\ + 2(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (w^4 + 2\alpha))) + 2wR \cos \theta \sin \theta (-V + (-\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2))], \\ \dot{V} = \frac{\varepsilon}{2w^4} [R \cos \theta (R \cos \theta + 2\varepsilon\beta w^2) + 2Rw \sin \theta (-V + (-\sqrt{w^4 + 2\alpha} - w^2)) \\ -R^2 + w^2 (V(-V - 2\sqrt{w^4 + 2\alpha}) + 2(\frac{w^4}{2} + \alpha)^2 - (w^4 + 2\alpha))]. \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Dans le système (4.18), nous prenons  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, et nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{ds} = \varepsilon F_1(\theta, R, V) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{d\theta}{ds} = \varepsilon F_2(\theta, R, V) + O(\varepsilon^2), \end{array} \right. \quad (4.19)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(\theta, R, V) = \frac{\sin \theta}{2w^4} [-(2w^2V + 2Rw \sin \theta)\sqrt{w^4 + 2\alpha} + 2Rw \sin \theta (w^2 + V) \\ -\cos \theta (R^2 \cos \theta + 2\beta w^2) - w^6 (\frac{1}{2}w^4 + 2\alpha) + w^2 (V^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha) + R^2], \\ F_2(\theta, R, V) = \frac{1}{4w^5} [R \cos \theta (2R \cos \theta + 4\beta w^2) + 4Rw \sin \theta (-w^2 - \sqrt{w^4 + 2\alpha} - V) + w^6 (w^4 \\ + 4\alpha - 2) + w^2 (-4V\sqrt{w^4 + 2\alpha} - 2V^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha) - 2R^2]. \end{array} \right.$$

Nous allons appliquer la théorie de moyennisation du premier ordre (2.2.1) au système différentiel (4.19). Nous avons

$$t = \theta, \quad T = 2\pi, \quad X = (R, V)^T \text{ et} \\ F(\theta, R, V) = \begin{pmatrix} F_1(\theta, R, V) \\ F_2(\theta, R, V) \end{pmatrix}, \quad \text{et } f(R, V) = \begin{pmatrix} f_1(R, V) \\ f_2(R, V) \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que le système (4.19) satisfait à toutes les hypothèses du théorème (2.2.1).

Maintenant, nous calculons les intégrales (2.3), c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(R, V) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, R, V) d\theta \\ \quad = \frac{R}{2w^3} (w^2 - \sqrt{w^4 + 2\alpha} + V), \\ f_2(R, V) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, R, V) d\theta \\ \quad = \frac{1}{4w^5} (w^6(w^4 + 4\alpha - 2) + 2w^2(-2V\sqrt{w^4 + 2\alpha} - V^2 + 2\alpha^2 - 4\alpha - R^2)). \end{array} \right.$$

Le système  $f_1(R, V) = f_2(R, V) = 0$  a une solution unique  $(R^*, V^*)$  avec  $R^* > 0$ , à savoir

$$\begin{aligned} R^* &= w\sqrt{w^8 + 4\alpha w^4 - 2w^4 + 4\alpha^2}, \\ V^* &= -w^2 - \sqrt{w^4 + 2\alpha}, \text{ et si } \alpha > \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Le jacobien (2.4) en  $(R^*, V^*)$  prend la valeur

$$\det \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(R, V)} \Big|_{(R, V) = (R^*, V^*)} = \frac{1}{4w^6} (w^8 + 4\alpha w^4 - 2w^4 + 4\alpha^2) > 0,$$

qui est non nulle par hypothèse.

Le théorème (2.2.1) garantit pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit l'existence d'une solution périodique  $(R(\theta, \varepsilon), V(\theta, \varepsilon))$  du système (4.19) telle que

$$(R(\theta, \varepsilon), V(\theta, \varepsilon)) \rightarrow (R^*, V^*)$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Autrement dit, le système (4.19) a la solution périodique suivante

$$(R(\theta, \varepsilon), V(\theta, \varepsilon)) = (R^* + O(\varepsilon), V^* + O(\varepsilon)).$$

Cette solution périodique s'écrit dans le système (4.18) sous la forme suivante

$$(R(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), V(t, \varepsilon)) = (R^* + O(\varepsilon), wt + O(\varepsilon), V^* + O(\varepsilon)).$$

Dans le système (4.17), il devient

$$(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) = (\varepsilon R^* + O(\varepsilon^2), wt + O(\varepsilon), \varepsilon V^* + O(\varepsilon^2)).$$

En passant à la solution périodique du système (4.16), on a  $X = r \cos \theta$  et  $Y = r \sin \theta$ ,

on obtient

$$(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) = (\varepsilon R^* \cos wt + O(\varepsilon^2), \varepsilon R^* \sin wt + O(\varepsilon^2), \varepsilon V^* + O(\varepsilon^2)).$$

Dans le système (4.15), nous avons effectué un changement linéaire des variables

$$(X, Y, Z)^T = B(x_1, y_1, z_1)^T,$$

donc on a

$$(x_1, y_1, z_1)^T = B^{-1}(X, Y, Z)^T,$$

alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{w} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon R^* \cos wt + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon R^* \sin wt + O(\varepsilon^2) \\ \varepsilon V^* + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix},$$

donc la solution périodique s'écrit

$$(x_1(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), z_1(t, \varepsilon)) = \left( \varepsilon \frac{R^* \sin wt + wV^*}{w} + O(\varepsilon^2), \varepsilon R^* \cos wt + O(\varepsilon^2), -\varepsilon w R^* \sin wt + O(\varepsilon^2) \right).$$

Enfin pour le système (4.1) la solution périodique devient la solution (4.4) pour  $i = 1$  de l'énoncé du théorème (4.2.1).

De plus les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$\left. \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(R, V)} \right|_{(R, V) = (R^*, V^*)}$$

sont données par

$$\frac{1}{2w} \pm \frac{i}{2w^3} \sqrt{w^8 + 4\alpha w^4 - 3w^4 + 4\alpha^2}, \text{ et } \alpha > \frac{3}{8}.$$

Donc, la solution périodique associée au zéro  $(R^*, V^*)$  est instable, car la partie réelle des deux valeurs propres est toujours positive.

Dans cette thèse nous avons utilisé l'une des plus importantes méthodes perturbatives pour étudier l'existence des solutions périodiques de certains systèmes différentiels polynomiaux de dimension trois.

Nous continuerons nos recherches des solutions périodiques des équations différentielles perturbées par un paramètre suffisamment petit, en utilisant la théorie de moyennisation.

- [1] M.R. Alecea, Introduction to Bifurcations and The Hopf Bifurcation Theorem for Planar Systems, Dynamics at the Horsetooth, M640 , 2011.
- [2] G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, AMS, New-York, 1927.
- [3] N.N. Bogoliubov, On some statistical methods in mathematical physics, Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [4] N.N. Bogoliubov and N. Krylov, The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations, Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [5] N.N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolsky, Asymtotic methods in the theory of non-linear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.
- [6] A. Buică and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. Math., 128 (2004), 7–22.
- [7] C. Buzzzi, J. Llibre, and J. Medrado, Hopf and zero-Hopf bifurcations in the Hindmarsh-Rose system, Nonlinear Dynam, 83 (2016), 1549–1556.
- [8] P.T. Cardin and J. Llibre, Transcritical and zero-Hopf bifurcations in the Genesisio system, Nonlinear Dynam, 88 (2017), 547–553.
- [9] V. Castellanos, J. Llibre, and I. Quilantan, Simultaneous periodic orbits bifurcating from two zero-Hopf equilibria in a tritrophic food chain model, J. Appl. Math. Phys, 7 (2013), 31–38.
- [10] L. Cid-Montiel, J. Llibre and C. Stoica, Zero-Hopf bifurcation in a hyperchaotic Lorenz system, Nonlinear Dynam, 75 (2014), 561–568.
- [11] J. Guckenheimer, M. Myers and B. Sturmfels, Computing Hopf Bifurcations I, SIAM Journal on Numerical Analysis, 1997.

- [12] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner, Solving ordinary differential equations I : nonstiff problems, New York, Springer-Verlag, 1993.
- [13] J. Hale et H. Koçak, Dynamics and Bifurcations, vol. 3, New York, Springer-Verlag, coll. Texts in Applied Mathematics, 1991.
- [14] S. Kassa, J. Llibre, and A. Makhlof. N-Dimensional Zero-Hopf Bifurcation of Polynomial Differential Systems via Averaging Theory of Second Order, *J. Dyn. Control. Syst*, 27 (2021), 283–291.
- [15] Yu.A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, 3rd edition, Springer, 2004.
- [16] T. Kumar Dutta, A. Kr.Jain and D.Nabajyoti, Analytical process for determination of Hopf bifurcations, *Journal of Global Research in Mathematical Archives*, Volume 1, No. 8, August 2013.
- [17] J. Llibre and A. Makhlof, Zero-Hopf bifurcation in the generalized Michelson system, *Chaos, Solitons & Fractals*, 89 (2016), 228–231.
- [18] J. Llibre and A. Makhlof, Zero-Hopf periodic orbits for a Rössler differential system, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 30, No. 12 (2020).
- [19] J. Llibre, Periodic orbits in the zero-Hopf bifurcation of the Rössler system, *Romanian Astron. J.*, 24 (2014) 49–60.
- [20] J. Llibre, R.D.S. Oliveira and C. Valls, On the integrability and the zero-Hopf bifurcation of a Chen-Wang differential system, *Nonlinear Dynam*, 80 (2015), 353–361.
- [21] J. Llibre and Rodrigo D.Euzébio, Zero-Hopf bifurcation in a Chua system, *Nonlinear Analysis*, 37 :31-40, 2017.
- [22] I.G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956 (in Russian).
- [23] L. Perko , *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, (2001).
- [24] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1892–1899.
- [25] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, (première partie), *Journal Mathématique*, 1881.
- [26] A. Roubache and E. Hadidi, Zero-Hopf bifurcation of periodic orbits in the generalized Rossler system, *MATHEMATICA*,124-133, 2021.
- [27] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer, New York, 1985.

- [28] O.E. Rössler, Continuous chaos-four prototype equations, *Ann. New York Acad. Sci.*, 316 (1979), 376–392.
- [29] J.A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, *Applied Mathematical Sciences* 59, Springer, 1985.
- [30] F. Verhulst, *nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, Springer, New York, 1996.