وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2020

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

SUR DES PROBLEMES AUX LIMITES AVEC DES DERIVEES FRACTIONNAIRES MIXTES

Option

Mathématiques Appliquées

Présentée par

Ibtissem Merzoug

DIRECTRICE DE THÈSE :	Assia Guezane-Lakoud	Prof	U.B.M. ANNABA
CO-DIRECTEUR:	Rabah khaldi	Prof	U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT:	Abdelhak Djebabla	Prof	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Mostapha Yarou	Prof	U. JIJEL
EXAMINATEUR :	Khaled Boukerrioua	M.C. A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Assia Frioui	M.C. A	U. GUELMA

Dédicace

Je dédie ce manuscrit :

A mes parents, qui avec leurs sacrifices m'ont permis de donner le meilleur de moi-même.
A mon mari qui a partagé avec moi les moments les plus douloureux.
A mes enfants, mon cœur, Muhammad Abd El Djalil et Sirine Jouri, qui je vous souhaite tout le bonheur du monde.
A mes soeurs et mes frères.
Sans oublier ma grand-mère et mes beaux-parents.
A toute ma famille, et mes amis et surtout à mon amie proche et ma sœur Meriem

Remerciements

De prime abord, je tiens à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a données pour mener à son terme ce travail.

En tout premier lieu, mes remerciements et ma gratitude sont destinés à ma directrice de thèse Mme **Assia Guezane-Lakoud**, c'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements que j'ai pu mener à bien ce travail. Elle m'a toujours accordé généreusement le temps nécessaire pour partager avec moi ses idées et sa grande expérience. J'ai particulièrement apprécié sa très grande ouverture face à ma condition de mère étudiante et la confiance qu'elle a su garder en ma capacité à rendre ce projet à terme. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail de recherche.

Je tiens à adresser mes vifs remerciements à mon co-encadreur le professeur **Rabah Khaldi** qui a su me faire profiter de ses connaissances et ses compétences scientifiques. Je lui témoigne ma sincère reconnaissance.

Je remercie ensuite l'ensemble des membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier avec attention mon travail :

Monsieur **Abdelhak Djebabla,** pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider ce jury, ainsi que **Mostapha Yarou, Khaled Boukerrioua et Assia Frioui** qui ont accepté de faire partie d'examiner cette thèse.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie mes amies qui étaient présentes à mes côtés lorsque j'en avais besoin.

Merci à toute ma famille. A tous ceux et celles qui ont contribué par leurs conseils, leurs suggestions et par leurs encouragements, à la réalisation de ce travail.

Merci à tous...

ملخص

تتناول هذه الاطروحة دراسة المسائل الحدية التي تحتوي على كل من المشتقات الكسرية اليسرى لريمان- ليوفيل واليمنى لكابوتو.
في الجزء الأول، ندرس معادلة تفاضلية غير خطية بمشتقات جزئية مختلطة وشروط حدية غير محلية، باستخدام نظرية النقطة الثابتة لشاودر، وطريقة الحلول السفلية العلوية حيث تم تحديد وجود الحلول و موقعها.

في الجزء الثاني، نهتم بدراسة معادلة تفاضلية بمشتقات جزئية مختلطة تحتوي على العامل ب- لابلاسيان بشروط حدية غير محلية. النتائج المتحصل عليها تعتمد على نظرية النقطة الثابتة وطريقة الحدود السفلية و العلوية

الكلمات المفتاحية: المشتق الكسري، مسألة ذات الشروط الحدية، الوجود، طريقة الحلول السفلية والعلوية.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude des problèmes aux limites pour des équations différentielles contenant à la fois des dérivées fractionnaires à gauche et à droite de types Riemann-Liouville et Caputo.

Dans la première partie, on a étudié une équation différentielle non linéaire avec des dérivées fractionnaires mixtes et des conditions aux limites non locales. En utilisant le théoreme du point fixe de Schauder et la méthode des sous et sur solutions, l'existence et la localisation des solutions sont établies.

Dans la deuxième partie, on s'est intéressé à l'étude d'une équation différentielle contenant l'opérateur p-Laplacien et les dérivées fractionnaires mixtes avec des conditions aux limites non locales. Les résultats obtenus sont basés sur le théorème du point fixe et la méthode des sous et sur solutions.

Mots-clés : Dérivée fractionnaire, Problème aux limites, Existence de solution, Méthode des sous et sur solutions.

Abstract

This thesis deals with the study of boundary problems for differential equations containing both left and right fractional derivatives of Riemann-Liouville and Caputo types.

In the first part, we study a nonlinear differential equation with mixed fractional derivatives and nonlocal boundary conditions. Using the Schauder fixed point theorem and the upper and lower solutions method, the existence and localisation of solutions are established.

In the second part, we are interested in the study of a differential equation containing the p-Laplacian operator and mixed fractional derivatives with nonlocal boundary conditions. The results obtained are based on the fixed point theorems and the method of upper and lower solutions.

Keywords : Fractional Derivative, Boundary value Problems, Existence, Method of upper and lower solutions.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est l'une des généralisations du calcul classique, il a été introduit le 30 septembre 1695. Ce jour-là, **Leibniz** a écrit une lettre à **L'Hôpital**, dans laquelle il mentionnait la possibilité de généraliser la signification des dérivées d'ordre entier en dérivées d'ordre non entier. L'Hôpital a voulu connaître le résultat pour la dérivée d'ordre $n = \frac{1}{2}$. Leibniz a répondu «qu' un jour, des conséquences utiles seront tirées » et, en fait, sa vision est devenue réalité. Cependant, l'étude des dérivées d'ordre non entier n'est apparue dans la littérature qu'en 1819, lorsque **Lacroix** a présenté une définition de dérivée fractionnaire basée sur l'expression habituelle de la dérivée $n^{ième}$ de la fonction puissance. En quelques années, le calcul fractionnaire est devenu un sujet attractif pour les mathématiciens, et de nombreuses formes d'opérateurs différentiels fractionnaires ont été introduites, on peut citer les derivées fractionnaires de type Grunwald-Letnikow, Riemann-Liouville, Hadamard, Caputo, Riesz (Hilfer 2000 ; Kilbas et al. 2006 ; Podlubny 1999 ; Samko et al.1993) et les notions récentes de Cresson (2007), Katugampola (2011), Klimek (2005), Kilbas et Saigo (2004) où des opérateurs fractionnaires d'ordre variable introduits par Samko et Ross (1993). Pour plus de détails historiques, voir [69, 72, 73, 75, 76].

Un intérêt considérable est accordé aux applications des dérivées fractionnaires d'ordre non entier dans différents domaines de recherche. Plusieurs applications de la différenciation et de l'intégration fractionnaires sont déjà bien établies, d'autres viennent de démarrer. On cite quelques exemples sur ce sujet :

- Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans les modèles mathématiques des phénomènes viscoélastiques. L'avantage de l'introduction des dérivées fractionnaires en théorie de la viscoélasticité est qu'elle offre des possibilités d'obtenir des équations constitutives pour le module complexe élastique des matériaux viscoélastiques avec seulement quelques paramètres déterminés expérimentalement. Les dérivées fractionnaires ont également été utilisées dans l'étude des modules complexes et des résistances [6, 74, 81].
- Dans la physico-chimie, le courant est proportionnel aux dérivées fractionnaires du voltage quand l'interface fractale est mise entre un métal et un milieu ionique [47, 84].
- Électricité : Dans les lignes de transmission électrique. En 1892, **Heaviside** a introduit l'idée de dérivées fractionnaires dans son étude des lignes de transmission électriques [5].
- En biologie, les processus de relaxation distribués semblent être courants dans les cellules et les tissus. Par conséquent, il ne devrait pas être surprenant de voir que le calcul fractionnaire peut jouer un rôle important dans la description du comportement entrée-sortie des systèmes biologiques [17, 66].
- D'autres applications du calcul fractionnaire ont été signalées dans plusieurs domaines tels que : Le traitement d'image [47], le traitement du signal [83], la commande automatique et robotique [65], et analyse de systèmes dynamiques avec les modèles d'ordre fractionnaire.

L'étude de l'existence et l'unicité de solutions des équations différentielles a été un domaine de recherche très actif en mathématiques. De nombreuses méthodes sont utilisées pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution, telles que la méthode des sur et sous solutions, la théorie de Mawhin, les théorèmes du point fixe, voir [3, 20, 22, 40, 41, 42, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 32, 54, 53, 50, 51, 60, 80]. La théorie des points fixes est un outil nécessaire pour avoir des résultats d'existence dans de nombreux problèmes non linéaires.

Un des objectifs de cette thèse est d'appliquer la méthode du point fixe de Schauder pour établir l'existence de solutions de certaines équations différentielles fractionnaires mixtes. Le théorème du point fixe de Schauder est une extension de Brouwer en dimension infinie. Il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est donc pas nécessaire d'établir des majorations sur la fonction mais simplement sa continuité.

la méthode des sous et sur solutions joue un rôle très important dans l'étude de l'existence de solutions des problèmes aux limites [29, 30, 38, 39, 52, 70, 78, 85, 89]. Cette méthode a été introduite pour la première fois par **Picard** en 1893, développée plus tard par **G. Scorza Dragoni** en 1931 et depuis lors, un grand nombre de contributions ont enrichi la théorie. Fondamentalement, la méthode des sous et sur solutions traite des résultats d'existence pour les problèmes aux limites. Ces sous et sur solutions peuvent être considérées comme des approximations numériques des solutions qui satisfont les équations jusqu'à un terme d'erreur de signe constant. [9, 15, 21, 26, 39, 48, 49, 52].

Dans [39], **Guezane-Lakoud, Khaldi et Torres** ont démontré l'existence de solutions pour l'équation fractionnaire d'oscillation non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \omega^2 u(t) -^C D_{1^-}^p D_{0^+}^q u(t) = f(t, u(t)),\ 0 \leq t \leq 1,\ \omega \in \mathbb{R},\ \omega \neq 0, \\ u(0) = 0, \\ D_{0^+}^q u(1) = 0, \end{cases}$$

où $0 < p$, $q < 1$, ${}^C D_{1^-}^p$ est la dérivée fractionnaire à droite de Caputo, $D_{0^+}^q$ est la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville, et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Les démonstrations sont basées sur une transformation du problème en un problème aux limites fractionnaire d'ordre inférieur équivalent et l'application de la méthode des sous et sur solutions.

Dans [49], **Khaldi et Guezane-Lakoud** ont établi des résultats d'existence de la solution en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et la méthode des sous et sur solutions du problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^q u(t) + \omega u(t) = f(t, u(t), D_{0^+}^{q-1} u(t)),\ 0 < t < 1,\ \omega > 0, \\ u(0) = 0, \\ D_{0^+}^{q-1} u(0) = 0, \end{cases}$$

où $1 < q < 2$, $D_{0^+}^q$ désigne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Les problèmes faisant intervenir le p-Laplacien proviennent de plusieurs branches de mathématiques aussi bien que des différents problèmes de la physique mathématique, notamment l'écoulement des fluides non-Newtoniens. Cependant, il existe peu d'études sur l'existence et l'unicité de solution des équations différentielles fractionnaires avec l'opérateur p-Laplacien, voir [10, 14, 18, 55, 59, 82, 85, 90].

Dans [82], **Su et al** ont étudié l'existence des solutions positives des équations différentielles fractionnaires p-Laplaciennes non linéaires :

$$\begin{cases} \phi_p({}^C D_t^\alpha u(t)) = \phi_p(\lambda) f(t, u(t), u'(t)),\ t \in (0,1), \\ k_0 u(0) - k_1 u(1) = 0, \\ m_0 u(0) - m_1 u(1) = 0, \\ u^{(r)}(0) = 0,\ r = 2, 3, ..., [\alpha], \end{cases}$$

en utilisant les théorèmes du point fixe tels que l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le théorème de Guo-Krasnoselskii et le théorème de Banach. Où $\phi_p(.)$ est l'opérateur p-Laplacien, c'est-à-dire. $\phi_p(s) = |s|^{p-2} s$, $p > 1$, et $\phi_p^{-1} = \phi_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ${}^C D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo et la fonction $f : [0,1] \times [0, \infty) \times (-\infty, +\infty) \to [0, \infty)$ satisfait des conditions de type Carathéodorie.

Zhang et al. [90] ont discuté le problème fractionnaire p-Laplacien suivant impliquant les conditions aux limites intégrales de Riemann-Stieltjes :

$$\begin{cases} -D_t^\beta \phi_p(D_t^\alpha x(t)) = \lambda f(t, x(t)),\ t \in (0,1) \\ x(0) = 0,\ D_t^\alpha x(0) = 0 \\ x(1) = \int_0^1 x(s) dA(s), \end{cases}$$

où D_t^β et D_t^α sont les dérivées de Riemann-Liouville, avec $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$, $\phi_p(.)$ est l'opérateur p-Laplacien, A est une fonction de variation et $\int_0^1 x(s)dA(s)$ est l'intégrale standard de Riemann-Stieltjes. Dans cette étude, les résultats sont basés sur la méthode des sous et sur solutions et sur le théorème du point fixe de Schauder.

Dans [18], **Chen et Liu** ont étudié l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\begin{cases} D_{0^+}^\beta \phi_p\left(D_{0^+}^\alpha u(t)\right) = f(t, u(t)),\ 0 \leq t \leq 1, \\ u(0) = -u(1) = 0,\ D_{0^+}^\alpha u(0) = -\ D_{0^+}^\alpha u(1), \end{cases}$$

où $0 < \beta,\ \alpha \leq 1,\ 1 < \alpha + \beta \leq 2,\ D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $\phi_p(.)$ est l'opérateur p-Laplacien, et la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Les auteurs ont présenté certaines conditions pour prouver l'existence de la solution, leurs arguments sont basés sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Organisation de la thèse

Cette thèse est structurée comme suit :

Dans le premier chapitre, on donne quelques notions fondamentales qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. On commence par donner un rappel sur les espaces fonctionnels, on définit les fonctions auxiliaires Gamma et Beta, on cite certaines propriétés de ces fonctions qui permettent d'obtenir des solutions aux problèmes fractionnaires, puis on donne quelques notions sur la théorie du point fixe. On termine ce chapitre par les définitions et les propriétés principales des intégrales et dérivées fractionnaires, on s'intéresse en particulier à celles de Riemann-Liouville et Caputo. On conclut ce chapitre par la notion de dualité entre les opérateurs différentiels à gauche et à droite.

Dans le deuxième chapitre, on étudie l'existence de la solution du problème aux limites fractionnaire mixte (P) suivant :

$$\begin{cases} -{}^{C}D_{1^-}^{\alpha} D_{0^+}^{\beta} u(t) + f(t, u(t)) = 0, \ 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, \ D_{0^+}^{\beta} u(1) = 0, \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1,\ 1 < \beta < 2;\ {}^{C}D_{1^-}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire à droite au sens de Caputo, $D_{0^+}^{\beta}$ est la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour résoudre ce problème, on le transforme en un problème équivalent de type Caputo, puis on utilise la méthode des sous et sur solutions et le théorème du point fixe de Schauder, pour prouver l'existence de solutions du problème (P).

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème aux limites fractionnaire p-Laplacien $(P1)$ suivant :

$$\begin{cases} -{}^{C}D_{1^-}^{\beta} \left(\phi_p \left(D_{0^+}^{\alpha} u\left(t\right)\right)\right) + f\left(t, u\left(t\right)\right) = 0, \ 0 \leq t \leq 1, \\ u\left(0\right) = u'\left(0\right) = 0, \\ D_{0^+}^{\alpha} u(1) = 0, \end{cases}$$

où $1 < \alpha < 2$, $0 < \beta < 1$; ${}^{C}D_{1^-}^{\beta}$ est la dérivée fractionnaire à droite au sens de Caputo, D_{0+}^{α} est la dérivée fractionnaire à gauche au sense de Riemann-Liouville, ϕ_p est l'opérateur p-laplacien, $\phi_p(s) = |s|^{p-2}\, s$, $p \geq 2, \phi_p^{-1} = \phi_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sous certaines conditions sur le terme non linéaire f, on applique la méthode des sous et sur solutions pour montrer l'existence d'au moins une solution du problème $(P1)$. De plus, on donne l'expression explicite des sous et sur solutions.

On termine cette thèse par une conclusion générale et les perspectives.

CHAPITRE 1
Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on introduit les notions nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit. Il est divisé en quatre sections. La première section comporte un bref rappel sur les espaces fonctionnels. La deuxième section est consacrée à la présentation de quelques fonctions spéciales qui jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire. La section troisième est réservée aux différents théorèmes du point fixe utilisés dans ce travail. On conclut le chapitre par des définitions et des propriétés des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo qui sont les plus utilisées dans les applications.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions intégrales

Les espaces L^p sont des espaces de fonctions mesurables dont la puissance P-ième est intégrable, au sens de Lebesgue.

Définition 1.1.1 *[72] Soit $\Omega = [a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telle que f est mesurable et*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \ sur \ \Omega \}.$$

1.1.2 Espaces des fonctions absolument continues

On désigne par $C^n(\Omega)$, $n \in N = 0, 1, ...$, l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à n continues sur Ω, muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in \Omega} \left| f^{(k)}(x) \right|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme

$$\|f\|_C := \max |f(x)|.$$

Définition 1.1.2 *On note par $AC([a,b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur un intervalle $[a,b]$, constitué des fonctions f qui sont des primitives de* *fonctions Lebesgue-sommables :*

$$f \in AC([a,b]) \Longleftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a,b]) \text{ telle que } f = c + \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Définition 1.1.3 *On note par $AC^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions absolument continues sur $[a,b]$ constitué des fonctions f à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui ont des dérivées continues sur $[a,b]$ jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et telle que $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$, c'est à dire :*

$$AC^n([a,b]) := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\; : f^{(k)} \in C([a,b]), k = 0...n-1, \;\; f^{(n-1)} \in AC([a,b]) \right\}.$$

Remarque 1.1.1 *En particulier $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$.*

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.1 *Une fonction $f \in AC^n([a,b])$, $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si elle est représentée sous la forme*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Théorème 1.1.1 *[56] Soit $\alpha > 0$ et soit n donné par*

$$n = [\alpha] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N} \text{ et } n = \alpha \text{ si } \alpha \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Si $f \in AC^n([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α existe presque partout sur $[a,b]$.

Théorème 1.1.2 *[56] Si $f \in AC^n([a,b])$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe presque partout sur $[a,b]$ et elle est représentée sous la forme*

$$D_a^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1} d^n f(s)}{\Gamma(n-\alpha) dt^n} ds + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)(t-a)^{k-a}.$$

1.2 Fonctions spéciales

Les fonctions spéciales sont des fonctions mathématiques particulières qui ont des noms et des notations plus ou moins établis en raison de leur importance dans l'analyse mathématique, l'analyse fonctionnelle et la physique. Elles sont introduites pour la première fois comme nouvelles transcendantes par **L. Euler**.

Les plus importantes fonctions spéciales étudiées sont les fonctions Gamma et Bêta. L'étude de ces fonctions et de leurs propriétés a donné un élan considérable à l'étude des aspects fondamentaux de l'analyse mathématique.

1.2.1 La fonction Gamma

Définition 1.2.1 *[56] La fonction Gamma, notée par* Γ *est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \;\; Re(\alpha) > 0. \tag{1.2}$$

Propriétés

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha); \;\; Re(\alpha) > 0. \tag{1.3}$$

En utilisant l'intégration par parties, on montre la propriété (1.3)

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = [-e^{-t}t^{\alpha}]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction Gamma, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 \tag{1.4}$$

et

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}.$$

La propriété (1.3) donne la relation suivante entre la fonction Gamma et la factorielle qui est :

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

On peut représenter $\Gamma(\alpha)$ par la limite :

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^{\alpha}}{(\alpha+1)...(\alpha+n)},\ Re(\alpha) > 0.$$

1.2.2 La fonction Bêta

Définition 1.2.2 *[56] La fonction* ***Bêta*** *ou intégrale eulerienne de première espèce est définie pour tous α et β par :*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt,\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0. \tag{1.6}$$

Remarque 1.2.1 *On peut exprimer le lien entre l'intégrale eulérienne de première et seconde espèce grâce à la relation suivante :*

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\ \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \ \mathrm{Re}(\beta) > 0. \tag{1.7}$$

Propriétés

1. La fonction Bêta est symétrique i.e. :

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \ \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

2.

$$\alpha B(\alpha, \beta + 1) = B(\alpha + 1, \beta).$$

3. Si $n = \beta + 1$ est un entier, cela donne une relation de récurrence

$$B(\alpha, \beta) = \frac{n-1}{\alpha} B(\alpha + 1, n - 1).$$

4.

$$B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta) \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right).$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

L'origine de la théorie du point fixe réside dans la méthode d'approximations successives utilisée pour prouver l'existence de solutions des équations différentielles introduites indépendamment par **Joseph Liouville** en 1837 et **Charles Emile Picard** en 1890. Mais formellement, elle a été lancée au début du $20^{ième}$ siècle comme une partie importante de l'analyse. Les théorèmes du point fixe sont des résultats qui permettent d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes sont extrêmement utiles pour résoudre les équations différentielles.

Dans cette section on rappelle quelques théorèmes célèbres du point fixe.

1.3.1 Théorème du point fixe de type Schauder

Le théorème du point fixe de **Schauder** est l'un des résultats les plus célèbres de la théorie du point fixe et il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.3.1 *[88]*

Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Théorème 1.3.2 *[88]*

Soit F un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach X et soit $T : F \to F$ une application continue telle que $T(F)$ soit un sous-ensemble relativement compact de F. Alors T admet un point fixe.

Théorème 1.3.3 *[23]* ***(L'alternative non linéaire de Leray-Schauder).***

Soit X un espace de Banach, Ω un sous ensemble ouvert borné de X, avec $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to X$ une application compacte. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié :

(i) T *a un point fixe sur* $\overline{\Omega}$.

(ii) *il existe* $\lambda \in (0,1)$ *et* $u \in \partial\Omega$ *tel que* $x = \lambda T(x)$.

1.3.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Définition 1.3.1 *[4] **(Théorème du point fixe de Krasnoselskii).***

Soit F un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach X. T_1 et T_2 sont deux applications de F dans X telles que :

1. $T_1x + T_2y \in F$, $\forall x, y \in F$,
2. T_1 *est une contraction,*
3. T_2 *est compacte et continue.*

   Alors $T_1 + T_2$ admet un point fixe dans F, autrement dit, il existe $x \in F$ te que $T_1x + T_2x = x$.

Définition 1.3.2 ***(Opérateur complètement continu).***

Soient E un espace de Banach et Ω une partie de E. On dit que l'opérateur $T : \Omega \to E$ est complètement continu s'il est continu et si pour toute partie bornée B de Ω, $T(B)$ est relativement compact dans E.

1.3.3 Théorème d'Ascoli-Arzela

Le théorème d'Arzelà – Ascoli est un résultat fondamental de l'analyse mathématique donnant des conditions nécessaires et suffisantes de compacité dans certains espaces fonctionnels. Ce théorème est démontré par les mathématiciens italiens **Giulio Ascoli** et **Cesare Arzelà**.

Théorème 1.3.4 *Soit $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{a \le t \le b} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si M est un sous ensemble de X tel que :*

(i) M *est uniformément borné, i.e.* $\exists r > 0$, $\|u\| < r$, $\forall u \in M$.

(ii) M *est équicontinu, i.e.*

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in [a, b]$ *tel que* $|t_1 - t_2| < \delta$ *et* $u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon$.

Alors, M est relativement compact.

1.4 Intégration et dérivation fractionnaires

1.4.1 Aperçu historique

Les premiers travaux sur la dérivée d'ordre non entier sont dus à **Liouville** entre 1832 et 1837. Indépendamment, **Riemann** propose une approche qui s'est avérée celle de **Liouville** essentiellement. Depuis, cette théorie porte le nom de théorie de Riemann-Liouville. Plus tard d'autres théories ont fait leur apparition comme celles de **Grunwald-Leitnikov**, de **Weyl** et de **Caputo**. On peut consulter [27, 62] pour de plus amples informations sur les différentes approches et les liens qui existent entre elles.

Les premières applications ont commencé à voir le jour dans les années 1990, en particulier en contrôle et en géométrie fractale. Les ingénieurs ont trouvé dans la dérivée fractionnaire un outil commode pour proposer des modèles qui décrivent d'une façon plus précise les phénomènes physiques.

Dans cette section, on donne les définitions et les propriétés des intégrales fractionnaires et des dérivées considérées. On va citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.Voir [56, 58, 73, 76, 77].

1.4.2 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par :

$$If(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{1.8}$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$I^2 f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du.$$

Le théorème de Fubini ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$I^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt. \tag{1.9}$$

Plus généralement, l'intégration successive de la fonction $f(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt, \; n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. En généralisant cette relation, l'intégrale d'ordre non entier de la fonction $f(x)$ peut être définie en utilisant la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$, donc, on peut définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.4.1 *Si $f \in C[a,b]$, $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, les intégrales fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville $I^{\alpha}_{a^+} f$ et $I^{\alpha}_{b^-} f$ d'ordre α sont définies respectivement par :*

$$I^{\alpha}_{a^+} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{(1-\alpha)}}, \; (x > a), \tag{1.11}$$

$$I^{\alpha}_{b^-} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{(1-\alpha)}}, \; (x < b), \tag{1.12}$$

Lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$, les définitions (1.11) *et* (1.12) *coïncident avec les intégrales* *n-ième de la forme :*

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 ... \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Théorème 1.4.1 *Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f \in L^p([a,b])$, $p \geq 1$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante*

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x). \tag{1.15}$$

Proposition 1.4.1 *[56, 57] Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. On a :*

$$I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-a)^{\alpha+\beta-1},$$

et

$$I_{b^-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

Preuve Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$. Alors

$$I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt,$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, il s'ensuit que

$dt = (x-a)d\tau$, d'où

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^{\beta-1}(x-a)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\alpha}(x-a)^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau.
\end{aligned}$$

Utilisant l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction bêta d'Euler), on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas où $\alpha = 1$, on a

$$\begin{aligned}
I^{1}_{a^+}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1)}(x-a)^{\beta} = \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{\beta\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta} \\
&= \frac{(\beta-1)\Gamma(\beta-1)}{(\beta-1)\beta\Gamma(\beta-1)}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\beta}(x-a)^{\beta}.
\end{aligned}$$

grâce à la relation bien connue (1.3).

De la même manière, on montre que

$$I^{\alpha}_{b^-}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

■

1.4.3 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

On note $[\alpha]$ la partie entière de $\alpha > 0$.

Définition 1.4.2 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha]+1$*. Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Riemann-Liouville* $D^{\alpha}_{a^+}f$ *et* $D^{\alpha}_{b^-}f$ *d'ordre* α *sont définies respectivement par :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}f(x) \quad &: = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a^+}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\ x > a, \end{aligned} \tag{1.16}$$

et

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{b^-}f(x) \quad &: = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{b^-}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\ x < b. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Proposition 1.4.2 *[56, 57] Soit* $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ *et soit* $\beta > 0$*, on a :*

1-

$$D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1},$$

2-

$$D^{\alpha}_{b^-}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

Preuve Posons $f(x) = (x-a)^{\beta}$. On aura

$$D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{a^+}f(x)).$$

Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta-1} &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{\beta+n-\alpha-1}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Où on a utilisé la formule

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{\lambda} &= \lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)(x-a)^{\lambda-n} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-n)}(x-a)^{\lambda-n}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}(x-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} \\ &= \frac{d}{dx}(x-a)^{\beta}. \end{aligned}$$

Dans l'exemple précédent si on prend $\beta = 0$, on obtient le résultat suivant :

$$D^{\alpha}_{a^+}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

De même manière on montre que

$$D^{\alpha}_{b^-}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

■

Lemme 1.4.1 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in C[a,b]$. Alors l'équation différentielle fractionnaire*

$$D^{\alpha}_{0^+}f(t) = 0,$$

admet la solution

$$f\,(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + ... + c_n t^{\alpha-n}, \tag{1.18}$$

où, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ *et* $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 1.4.2 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in C[a, b]$. *Alors*

$$I_{0^+}^{\alpha} D_{0^+}^{\alpha} f(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + ... + c_n t^{\alpha-n}, \tag{1.19}$$

où, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ *et* $n = [\alpha] + 1$.

1.4.4 Dérivées fractionnaires de Caputo

La définition de la différenciation fractionnaire du type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire et son application dans les mathématiques appliquées.

Cependant, certaines modélisations mathématiques comme celles en rhéologiques nécessitent la formulation des conditions initiales. Ainsi, **Caputo** dans [13] propose une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire qui porte d'ailleurs son nom et qui incorpore les conditions initiales de la fonction à traiter, ainsi que ses dérivées entières. Cette approche a été adoptée par **Caputo et Mainardi** [12] dans leurs travaux en viscoélasticité.

Donc on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

Définition 1.4.3 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$. *Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite de Caputo* ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f$ *et* ${}^{C}D_{b^-}^{\alpha} f$ *d'ordre* α *sont définies respectivement par :*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(t) \quad &: \; = I_{a^+}^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(x) \qquad (1.20) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^C D_{b^-}^{\alpha} f(t) \quad : & = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(x) \\ & = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Proposition 1.4.3 *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et soit $[\beta] > 0$. Alors les résultats suivants sont satisfaits*

$$\begin{aligned} {}^C D_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} & = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \\ {}^C D_{b^-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} & = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

1.4.5 Propriétés générales des opérateurs fractionnaires

Linéarité

Parmi les avantages du calcul fractionnaire, on généralise certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques, par exemple la linéarité des opérateurs d'intégration et de dérivation usuelle s'étend au cas fractionnaire.

$$D^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^{\alpha} f(t) + \mu D^{\alpha} g(t). \tag{1.22}$$

Compositions entre opérateurs

▶ Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^p([a,b])$, $p \geq 1$. Alors :

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f = f, \quad D_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\alpha} f = f$$

▶ Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC^n([a,b])$. Alors :

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} {}^C D_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

$$\left(I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k (t-a)^{\alpha-k},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$.

► Soit $0 < \alpha < \beta$ et $f \in L^p([a,b])$, $p \geq 1$. Alors :

$$D_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} f) = I_{a^+}^{\beta-\alpha} f.$$

► Soit $\alpha > 0$ et $f \in AC^n([a,b])$. Alors :

$${}^{C}D_{a^+}^{\alpha} f(t) = 0 \quad \text{a une solution } f(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + ... + c_n t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ et $n = [\alpha] + 1$.

CHAPITRE 2

Existence de solutions pour un problème aux limites aux dérivées fractionnaires mixtes.

On discute l'existence de solutions d'un problème aux limites fractionnaire non linéaire impliquant à la fois les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo, les résultats présentés sont basés sur la méthode des sous et sur solutions et la monotonicité de la dérivée fractionnaire à droit de Caputo. De plus, on donne l'expression explicite des sous et sur solutions.

Ce travail est considéré comme un cas particulier du problème aux limites étudié par **Khaldi et Guezane-Lakoud** [49] :

R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud : Higher ordre fractional boundry value problems for mixed type derivatives, J. Nonlinear Funct. Article ID 30 (2017).

2.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Ils peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science, de l'ingénierie, de la physique et de l'économie. On peut trouver de nombreuses applications dans la viscoélasticité, l'électrochimie, les réseaux électriques, la théorie du contrôle, les biosciences, électromagnétiques, des processus de signalisation, la mécanique et dans les procédés de diffusion.

En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut voir les références [7, 8, 28, 39, 56, 61, 73]. Cependant, peu de travaux existent dans la littérature concernant les problèmes aux limites fractionnaires non linéaires avec des dérivées fractionnaires mixtes.

Dans [8], **Blaszczyk** a étudié numériquement une équation fractionnaire d'oscillation d'ordre $\alpha \in (0,1)$ suivante :

$$\begin{cases} -^{C}D^{\alpha}_{b^-}D^{\alpha}_{0^+}f(t) + \omega^2 f(t) = Ag(t), \ 0 \leq t \leq b, \\ D^{\alpha}_{0^+}f(b) = 0, \end{cases}$$

La forme discrète de cette équation a été présentée comme un système d'équations algébriques linéaires. Le système d'équations obtenu a été résolu numériquement.

Dans [39], **Guezane-Lakoud, Khaldi et Torres** ont prouvé, en utilisant la méthode des sous et sur solutions et les théorèmes de point fixe, l'existence de solutions pour une équation fractionnaire non linéaire d'oscillation suivante :

$$\omega^2 u(t) -^{C} D^{p}_{1^-}D^{q}_{0^+}u(t) = f(t,u(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \ \omega \in \mathbb{R}, \ \omega \neq 0,$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 0$$

et la condition naturelle

$$D^{q}_{0^+}u(1) = 0$$

où $0 < p,\ q < 1$, $D^q_{0^+}$ désigne la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville et ${}^C D^P_{1^-}$ désigne la dérivée fractionnaire à droite au sens de Caputo.

Dans ce chapitre, on étudie l'existence de solutions du problème fractionnaire $(P1)$ suivant

$$\begin{cases} -{}^C D^{\alpha}_{1^-} D^{\beta}_{0^+} u(t) + f(t, u(t)) = 0, \ 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, \ D^{\beta}_{0^+} u(1) = 0, \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1, 1 < \beta < 2$; ${}^C D^{\alpha}_{1^-}$ est la dérivée fractionnaire à droite au sens de Caputo, $D^{\beta}_{0^+}$ est la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville, et $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En utilisant la méthode des sous et sur solutions et le théorème du point fixe de Schauder, on démontre l'existence de solutions du problème $(P1)$.

La présence des dérivées fractionnaires à droit de Caputo et à gauche de Riemann-Liouville dans l'équation du problème $(P1)$ cause des difficultés dans la démonstration de l'existence de solutions. Pour surmonter ces difficultés, on transforme le problème $(P1)$ à un problème équivalent de Caputo d'ordre r, $0 < r < 1$; r sera spécifié plus tard. Ensuite, on construit les sous et sur solutions du problème $(P1)$. De plus, on utilise un nouveau résultat sur le monotonicité des dérivées fractionnaires à droit de Caputo.

La méthode des sous et sur solutions est un outil puissant dans l'analyse non linéaire pour résoudre les problèmes aux limites. En utilisant cette méthode on obtient l'existence et la localisation de la solution en présence d'un couple de fonctions, appelées sous solution et sur solution. A la fin de ce chapitre on donne deux exemples illustratifs.

2.2 Monotonicité de la dérivée fractionnaire de Caputo

Théorème 2.2.1 *[24]* ***(Monotonicité de la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo).***

Supposons que $f \in C^1[0,1]$. *Si* ${}^C D^r_{0+} f(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$ *et pour tout* $r \in [\beta, 1)$ *avec* $\beta \in (0,1)$, *alors* f *est monotone croissante.*

De même, si ${}^C D^r_{0+} f(t) \leq 0$, $\forall t \in [0,1]$ *et pour tout* $r \in [\beta, 1)$ *avec* $\beta \in (0,1)$, *alors* f *est monotone décroissante.*

Grâce aux résultats obtenus dans [24], on montre la monotonicité de la dérivée fractionnaire à droite de Caputo.

Théorème 2.2.2 *[39]* ***(Monotonicité de la dérivée fractionnaire à droite de Caputo).***

Supposons que $f \in C^1[0,1]$. *Si* ${}^C D^r_{1-} f(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,1]$ *et pour tout* $r \in [\beta, 1)$ *avec* $\beta \in (0,1)$, *alors* f *est monotone décroissante.*

De même, si ${}^C D^r_{1-} f(t) \leq 0$, $\forall t \in [0,1]$ *et pour tout* $r \in [\beta, 1)$ *avec* $\beta \in (0,1)$, *alors* f *est monotone croissante.*

Preuve La preuve est basée sur la propriété

$$0 \leq \lim_{r \to 1^-} {}^C D^r_{0+} f(t) = \lim_{r \to 1^-} I^{1-r}_{0+} f'(t) = f'(t).$$

En utilisant la théorie de la dualité entre les dérivées fractionnaires à gauche et à droit, on trouve

$$0 \leq \lim_{r \to 1^-} {}^C D^r_{1-} f(t) = \lim_{r \to 1^-} -I^{1-r}_{1-} f'(t) = -f'(t)$$

donc f' est négative et par suite f est décroissante.

De même, Si ${}^{C}D_{1^-}^{r} f(t) \leq 0$ on a

$$-f'(t) = \lim_{r \to 1^-} -I_{1^-}^{1-r} f'(t) = \lim_{r \to 1^-} {}^{C}D_{1^-}^{r} f(t) \leq 0,$$

ce qui implique que f' est positive. On conclut alors que f est monotone croissante.
■

2.3 Existence des solutions

Soit $E = C[0,1]$, muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$.

On commence par résoudre le problème fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre β suivant :

$$(P2) = \begin{cases} D_{0^+}^{\beta} u(t) = v(t), \ 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases}$$

Lemme 2.3.1 *Soit $1 < \beta < 2$. Le problème $(P2)$ a une solution unique donnée par*

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} v(s) ds. \tag{2.1}$$

Preuve En utilisant les propriétés du calcul fractionnaire, on a

$$u(t) = I_{0^+}^{\beta} v(t) + c_1 t^{\beta-1} + c_2 t^{\beta-2}. \tag{2.2}$$

La condition $u(0) = 0$ implique que $c_2 = 0$.

En dérivant les deux membres de (2.2) et en utilisant la condition initiale $u'(0) = 0$; on trouve $c_1 = 0$.

En remplaçant c_1 et c_2 par leurs valeurs dans (2.2), on obtient

$$u(t) = I_{0^+}^{\beta} v(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} v(s) ds.$$

■

Maintenant, on définit l'opérateur intégral $T : E \to E$ par

$$Tv(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} v(s) ds = I_{0^+}^{\beta} v(t). \tag{2.3}$$

Ainsi $u(t) = Tv(t)$. En utilisant la condition naturelle $D_{0^+}^{\beta} u(1) = 0$ du problème $(P1)$, on obtient $v(1) = 0$.

Alors le problème aux limites $(P1)$ est équivalent au problème d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, on le note par $(P3)$,

$$(P3) \begin{cases} -{}^{C}D_{1^-}^{\alpha} v(t) + f(t, Tv(t)) = 0, \ 0 \leq t \leq 1 \\ v(1) = 0. \end{cases}$$

2.3.1 Existence des sous et sur solutions

Définition 2.3.1 *Les fonctions $\underline{\delta}, \overline{\delta} \in AC^2[0,1]$ s'appellent les sous et sur solutions du problème $(P1)$ respectivement, si*

1. $-{}^{C}D_{1^-}^{r} D_{0^+}^{\beta} \underline{\delta}(t) + f(t, \underline{\delta}(t)) \leq 0$, $\forall t \in [0,1]$ *et* $r \in [\alpha, 1)$,
   $\underline{\delta}(0) \geq 0$, $\underline{\delta}'(0) \geq 0$, $D_{0^+}^{\beta} \underline{\delta}(1) \geq 0$.
2. $-{}^{C}D_{1^-}^{r} D_{0^+}^{\beta} \overline{\delta}(t) + f(t, \overline{\delta}(t)) \geq 0$, $\forall\ t \in [0,1]$ *et* $r \in [\alpha, 1)$,
   $\overline{\delta}(0) \leq 0$, $\overline{\delta}'(0) \leq 0$, $D_{0^+}^{\beta} \overline{\delta}(1) \leq 0$.

Afin d'établir l'existence des sous et sur solutions du problème $(P1)$, on impose les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe une constante positive A telle que

$$f(t, x) \leq A(1-t)^{1-r}, \ \forall \ \ 0 \leq t \leq 1,$$

$$0 \leq x \leq \frac{A}{\Gamma(\beta+1)} \text{ pour tout } r \in [\alpha, 1),$$

(H2) Il existe une constante $B \leq 0$ telle que $|B| \leq A$ et

$$f(t, x) \geq B(1-t)^{1-r}, \ \forall \ \ 0 \leq t \leq 1,$$

$$\frac{B}{\Gamma(\beta+1)} \leq x \leq 0 \text{ pour tout } \ r \in [\alpha, 1).$$

Lemme 2.3.2 *Si les hypothèses* $(H1) - (H2)$ *sont satisfaites, alors le problème* $(P1)$ *a des sous et sur solutions.*

Preuve On pose $\varphi(t) = A(1-t)$, $A > 0$ et soit $\underline{\delta}(t) = T\varphi(t)$

Pour $t \in [0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\underline{\delta}(t) &= T\varphi(t) = I_{0^+}^{\beta}\varphi(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}\varphi(s)ds \\
&= \frac{A}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1}(1-s)ds \\
&= \frac{At^{\beta}(\beta+1-t)}{\Gamma(\beta+2)} \leq \frac{A}{\Gamma(\beta+1)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $(H1)$, on trouve pour tout $r \in [\beta, 1)$

$$\begin{aligned}
-{}^{C}D_{1^-}^{r}\varphi(t) + f(t, T\varphi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-r)} \int_t^1 (s-t)^{-r}\varphi'(s)ds + f(t, T\varphi(t)) \\
&= \frac{-A}{\Gamma(1-r)} \int_t^1 (s-t)^{-r}ds + f(t, T\varphi(t)) \\
&= \frac{-A}{\Gamma(2-r)}(1-t)^{1-r} + f(t, T\varphi(t)) \\
&\leq -A(1-t)^{1-r} + f(t, T\varphi(t)) \leq 0
\end{aligned}$$

De plus, on a aussi $\underline{\delta}(0) = T\varphi(0) = 0$ et $D_{0^+}^{\beta}\underline{\delta}(1) = \varphi(1) = 0$. Alors $\underline{\delta}(t)$ est la sous solution du problème $(P1)$.

De même, si on pose $\psi(t) = B(1-t)$, $B \leq 0$, alors $\overline{\delta}(t) = T\psi(t)$ est une sur solution du problème $(P1)$. Vu l'hypothèse $(H2)$, on obtient pour tout $r \in [\alpha, 1]$

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}(t) &= T\psi(t) = I_{0^+}^{\beta}\psi(t)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}\psi(s)ds\\
&= \frac{B}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(1-s)ds\\
&= \frac{Bt^{\beta}(\beta+1-t)}{\Gamma(\beta+2)} \geq \frac{B}{\Gamma(\beta+1)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-{}^{C}D_{1^-}^{r}\psi(t) + f(t, T\psi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-r)}\int_t^1 (s-t)^{-r}\psi'(s)ds + f(t, T\psi(t))\\
&= \frac{-B}{\Gamma(1-r)}\int_t^1 (s-t)^{-r}ds + f(t, T\psi(t))\\
&= -\frac{B}{\Gamma(2-\alpha)}(1-t)^{1-r} + f(t, T\psi(t))\\
&\geq -B(1-t)^{1-r} + f(t, T\psi(t)) \geq 0.
\end{aligned}$$

De plus, $\overline{\delta}(0) = T\psi(0) = 0$ et $D_{0^+}^{\beta}\overline{\delta}(1) = \psi(1) = 0$.

On remarque que les sous et sur solutions sont dans l'ordre inverse c'est à dire $\overline{\delta}(t) \leq \underline{\delta}(t)$,

$$\overline{\delta}(t) = \frac{B}{\Gamma(\beta+1)} \leq \underline{\delta}(t) = \frac{A}{\Gamma(\beta+1)}.$$

■

2.3.2 Localisation et existence de solutions

On définit la suite de problèmes modifiés $((P4)_r)$, $r \in [\alpha, 1]$ par :

$$((P4)_r)\begin{cases} {}^{C}D_{1^-}^{r}v(t) = Fv(t),\ 0 \leq t \leq 1\\ v(1) = 0.\end{cases}$$

où l'opérateur $F : E \to E$ est défini par

$$Fv(t) = f((t, T\min[\varphi, \max(v, \psi)])(t)), \ 0 \leq t \leq 1. \tag{2.4}$$

On montre si v_r est une solution de $((P4)_r)$ pour $r \in [\alpha, 1]$, alors

$$\psi(t) \leq v_r(t) \leq \varphi(t), \ 0 \leq t \leq 1. \tag{2.5}$$

On pose $w(t) = v_r(t) - \varphi(t)$. Alors la condition initiale implique $w(1) = 0$.

En supposant le contraire, on voit qu'il existe $t_1 \in [0, 1[$ tel que $w(t_1) > 0$. Par la continuité de w, on conclut l'existence de deux points t_2 et t_3 au voisinage de t_1 tels que $w(t_2) = 0$ et $w(t) \geq 0$, $\forall t \in [t_3, t_2]$.

Maintenant, en appliquant la dérivée fractionnaire à droite de Caputo et en tenant compte de la définition de la sous solution et que $\varphi(t) = D^{\beta}_{0^+}\underline{\delta}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} {}^C D^r_{1^-} w(t) &= {}^C D^r_{1^-} v_r(t) - {}^C D^r_{1^-}\varphi(t) \\ &= f(t, (T\min[\varphi, (\max(v_r, \psi))])(t)) - {}^C D^r_{1^-}\varphi(t) \leq 0, \end{aligned}$$

pour $t \in [t_3, t_2]$ et pour tout $r \in [\alpha, 1]$. Du théorème (2.2.2), on déduit que w est croissante sur $[t_3, t_2]$.

Comme $w(t_2) = 0$, on conclut que $w(t) \leq 0$, $\forall t \in [t_3, t_2]$, ce qui conduit à une contradiction.

De la même facon, on montre que $\psi(t) \leq v_r(t)$ pour $t \in [0, 1]$.

Maintenant, à partir de (2.5), on voit que si $v = v_r$ est une solution de $((P4)_r)$, alors

$$-{}^C D^r_{1^-} v(t) + f(t, Tv(t)) = 0,$$

Il en résulte que $u = Tv$ est une solution de $(P1)$.

Enfin, en appliquant l'opérateur T aux inégalités dans (2.5),

$$T\psi(t) \leq Tv_r(t) \leq T\varphi(t), \ 0 \leq t \leq 1,$$

on trouve

$$\overline{\delta}(t) \leq u(t) \leq \underline{\delta}(t), \ 0 \leq t \leq 1, \tag{2.6}$$

et

$$D_{0^+}^{\beta}\overline{\delta}(t) \leq D_{0^+}^{\beta}u(t) \leq D_{0^+}^{\beta}\underline{\delta}(t), \ 0 \leq t \leq 1. \tag{2.7}$$

Théorème 2.3.1 *Si les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont vérifiées. Alors, le problème* $(P1)$ *a au moins une solution* u *telle que*

$$\overline{\delta}(t) \leq u(t) \leq \underline{\delta}(t),$$

où $\underline{\delta}(t)$, $\overline{\delta}(t)$ *sont respectivement les sous et sur solutions du problème* $(P1)$.

Preuve On définit l'opérateur G sur $E = (C[0,1], \mathbb{R})$ par

$$Gv(t) = I_{1^-}^{r} Fv(t), \ 0 \leq t \leq 1.$$

Alors v est une solution de $((P4)_r)$, si et seulement si v est un point fixe de l'opérateur G.

On définit l'ensemble Ω par

$$\Omega = \{v \in C[0,1], \ \psi(t) \leq v(t) \leq \varphi(t), \ 0 \leq t \leq 1\},$$

et puisque la fonction f est continue alors il existe une constante M telle que

$$M = \max\left\{|f(t,x)|, \ \overline{\delta}(t) \leq x \leq \underline{\delta}(t), \ 0 \leq t \leq 1\right\}.$$

De la continuité de f on déduit celle de G. On démontre à présent que G est complètement continu.

Étape 1 : Soit $v \in \Omega$, sachant que

$$\overline{\delta}(t) \leq T(\min[\varphi, \max(v, \psi)]) \leq \underline{\delta}(t),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
|Gv(t)| &= |I_{1^-}^r Fv(t)| \leq I_{1^-}^r |Fv(t)| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_t^1 |f(s, T(\min[\varphi, \max(v, \psi)])(s))| (s-t)^{r-1} ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(r+1)} (1-t)^r \leq \frac{M}{\Gamma(r+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur G est uniformément borné et $G(\Omega) \subset \Omega$.

Étape 2 : Pour tout t_1, $t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, $v \in \Omega$.

On a

$$\begin{aligned}
|Gv(t_1) - Gv(t_2)| &\leq |I_{1^-}^r Fv(t_1) - I_{1^-}^r Fv(t_2)| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_1}^{t_2} |f(s, T(\min[\varphi, \max(v, \psi)])(s))| (s-t_1)^{r-1} ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{t_2}^{1} |f(s, T(\min[\varphi, \max(v, \psi)])(s))| \times \\
&\quad ((s-t_1)^{r-1} - (s-t_2)^{r-1}) ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(r+1)} \left[(1-t_1)^r - (1-t_2)^r\right].
\end{aligned}$$

Cela donne

$$|Gv(t_1) - Gv(t_2)| \to 0 \text{ uniformément qd } t_1 \to t_2.$$

Par conséquent $G(\Omega)$ est equicontinu. En appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli, on conclut que G est complètement continu.

De plus, en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, on conclut que G a un point fixe $v \in \Omega$. Donc $u = Tv$ est une solution de $(P1)$ vérifiant $\overline{\delta}(t) \leq u(t) \leq \underline{\delta}(t)$ et $D_{0^+}^{\beta} \overline{\delta}(t) \leq D_{0^+}^{\beta} u(t) \leq D_{0^+}^{\beta} \underline{\delta}(t)$, $t \in [0,1]$. ■

2.4 Exemples

Exemple 2.4.1 *On considère le problème aux limites fractionnaire suivant*

$$-{}^{C}D_{1^-}^{\frac{2}{3}}D_{0^+}^{\frac{4}{3}}u(t) = u(t)(1-t)^{\frac{1}{3}} = 0,\ 0 \le t \le 1.$$

où $\alpha = \frac{2}{3}$ *et* $\beta = \frac{4}{3}$. *En choisissant* $A = 0.1$ *et* $B = -0.1$, *on voit que les hypothèses* $(H1)$ *et* $(H2)$ *sont satisfaites. Effectivement*

$$\begin{aligned} f(t,u(t)) &= u(t)(1-t)^{\frac{1}{3}} \le A(1-t)^{1-r},\ r \in [\frac{2}{3},1), \\ \forall\ 0 &\le t \le 1,\ 0 \le u(t) \le \frac{A}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{0.1}{\Gamma(\frac{7}{3})}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(t,u(t)) &= u(t)(1-t)^{\frac{1}{3}} \ge B(1-t)^{1-r},\ r \in [\frac{2}{3},1), \\ \forall\ 0 &\le t \le 1,\ \frac{-0.1}{\Gamma(\frac{7}{3})} = \frac{B}{\Gamma(\beta+1)} \le u(t) \le 0. \end{aligned}$$

Les expressions des sous et sur solutions sont respectivement

$$\begin{aligned} \underline{\delta}(t) &= \frac{At^{\beta}(\beta+1-t)}{\Gamma(\beta+2)} = \frac{t^{\frac{4}{3}}(\frac{7}{3}-t)}{10\Gamma(\frac{10}{3})}, \\ \overline{\delta}(t) &= \frac{Bt^{\beta}(\beta+1-t)}{\Gamma(\beta+2)} = \frac{-t^{\frac{4}{3}}(\frac{7}{3}-t)}{10\Gamma(\frac{10}{3})}. \end{aligned}$$

Exemple 2.4.2 *En prenant la fonction* f *dans l'exemple* (2.4.1) *comme*

$$f(t,u(t)) = \frac{-(1-t)^{\frac{1}{3}}}{10},\ 0 \le t \le 1.$$

Alors $(H1)$*et* $(H2)$ *sont satisfaites.*

$$
\begin{aligned}
f(t,u(t)) &= \frac{-(1-t)^{\frac{1}{3}}}{10} \leq \frac{(1-t)^{1-r}}{10},\ r \in [\frac{2}{3},1), \\
\forall\ 0 &\leq t \leq 1,\ 0 \leq u(t) \leq \frac{A}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{0.1}{\Gamma(\frac{7}{3})},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
f(t,u(t)) &= \frac{-(1-t)^{\frac{1}{3}}}{10} \geq \frac{-(1-t)^{1-r}}{10},\ r \in [\frac{2}{3},1), \\
\forall\ 0 &\leq t \leq 1,\ \frac{-0.1}{\Gamma(\frac{7}{3})} = \frac{B}{\Gamma(\beta+1)} \leq u(t) \leq 0.
\end{aligned}
$$

De plus, l'expression de la solution est donnée par :

$$
u(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) t^{\frac{7}{3}}(1-\frac{3}{10}t)}{10\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)}.
$$

CHAPITRE 3

Existence de solutions pour un problème aux limites fractionnaire p-Laplacien

Notre objectif principal est de démontrer l'existence de solutions d'un problème aux limites fractionnaire avec l'opérateur p-Laplacien et contenant à la fois des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo. Les démonstrations sont basées sur la méthode des sous et sur solutions et sur le théorème du point fixe de Schauder.

Le travail effectué dans ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale [68].

I. Merzoug, A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi : Existence of solutions for a nonlinear fractional p-Laplacian boundary value problem. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, part of Springer Nature 2019.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence de solutions du problème aux limites fractionnaire p-Laplacien suivant :

$$(P1)\begin{cases} -{}^{C}D_{1^-}^{\beta}\left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u\left(t\right)\right)\right)+f\left(t,u\left(t\right)\right)=0,\ 0\leq t\leq 1,\\ u\left(0\right)=u'\left(0\right)=0,\ D_{0^+}^{\alpha}u(1)=0,\end{cases}$$

où $1<\alpha<2$, $0<\beta<1$; ${}^{C}D_{1^-}^{\beta}$ est la dérivée fractionnaire à droite de Caputo d'ordre β, $D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α, $\phi_p(.)$ est l'opérateur p-Laplacien, $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p\geq 2, \phi_p^{-1}=\phi_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et $f\in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Il existe peu de travaux traitant les équations différentielles fractionnaires avec l'opérateur p-Laplacien, malgré leur importance dans la théorie et leurs applications dans divers domaines tels que en mathématiques, en mécanique, en physique..., voir [1, 2, 14, 16, 44, 45, 46, 49, 63, 64, 67, 78, 86, 87].

Pour étudier l'écoulement turbulent dans un milieu poreux, Leibenson [63] a introduit pour la première fois une équation différentielle p-Laplacienne, modélisant ce problème de mécanique fondamentale et prouvant l'existence de solutions de l'équation différentielle p-Laplacienne suivante :

$$(\phi_p(u'(t)))'=f(t,u(t)),\ 0\leq t\leq 1,$$

où $\phi_p(s)$ est l'opérateur p-Laplacien.

Dans [87], Xu et O'Regan ont étudié l'existence de solutions positives du problème aux limites fractionnaire p-Laplacien suivant, en utilisant la méthode itérative monotone et le théorème du point fixe sur le cône,

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}\left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u\left(t\right)\right)\right)=f\left(t,u\left(t\right)\right),\ 0\leq t\leq 1\\ u\left(0\right)=u'\left(0\right)=0,\ u'(1)=au'(\xi),\\ D_{0^+}^{\alpha}u(0)=0,\ D_{0^+}^{\alpha}u(1)=bD_{0^+}^{\alpha}u(\eta),\end{cases}$$

où $2<\alpha<3, 1<\beta<2$; $D_{0^+}^{\alpha}$, $D_{0^+}^{\beta}$ sont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α et β respectivement, $\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$, $0<\xi,\ \eta<1$, $0\leq a<\xi^{2-\alpha}$, $0\leq b<\eta^{\frac{1-\beta}{p-1}}$ et $f\in C([0,1]\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$.

Chai [14] a étudié l'existence et la multiplicité des solutions du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}\left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u\left(t\right)\right)\right)+f\left(t,u\left(t\right)\right)=0,\ 0\leq t\leq 1 \\ u\left(0\right)=0,\ u(1)+\sigma D_{0^+}^{\gamma}u(1)=0, \\ D_{0^+}^{\alpha}u(0)=0, \end{cases}$$

à l'aide du théorème du points fixe sur le cône.

En appliquant la méthode des sous et sur solutions et le théorème du point fixe de Schauder, **Khaldi et Guezane-Lakoud** [49] ont démontré l'existence de solutions de ce problème fractionnaire

$$(-1)^{m\,C}D_{1^-}^{\alpha}D_{0^+}^{\beta}u(t)+f(t,u(t))=0,\ 0\leq t\leq 1,$$

avec les conditions initiales :

$$u(0)=u^{(i)}(0)=0,\ i=1,...,m+n-2,$$

et la condition naturelle

$$D_{0^+}^{\beta+m-1}u(1)=0,$$

où $m-1<\alpha<m$, $n-1<\beta<n$, $m,n\geq 2$, ${}^{C}D_{1^-}^{\alpha}$est la dérivée fractionnaire à droite de caputo, $D_{0^+}^{\beta}$ est la dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville et $f\in C([0,1]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

En utilisant la méthode variationnelle sur des espaces réflexifs de Banach, **Heidarkhani et al** [46] ont résolu le problème aux limites fractionnaire impulsif non linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_{T^-}^{\alpha}({}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u(t))+a(t)u(t)=\lambda f(t,u(t))+h(u(t)),\ t\neq t_j, \\ \Delta(D_{T^-}^{\alpha-1}({}^{C}D_{0^+}^{\alpha}u))(t_j)=\mu I_j u(t_j),\ j=1,...,n \\ u(0)=u(T)=0, \end{cases}$$

où $\alpha\in(1/2,1]$, $a\in C[0,T]$, $\lambda\geq 0$, $\mu\geq 0$, f est une fonction Carathéodory, h est une fonction continue de Lipschitz et les I_j sont des fonctions réelles continues.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, on transforme le problème $(P1)$ en un problème équivalent de Caputo d'ordre β, puis on construit explicitement les sous et sur solutions du problème $(P1)$, sous certaines conditions sur le terme non linéaire f. Ensuite, on utilise le théorème du point fixe de Schauder pour prouver l'existence de solutions du problème $(P1)$. On conclut cette section par un exemple illustratif.

3.2 Existence et localisation des solutions

L'espace de base utilisé est $AC^2\,[0,1]$ défini par

$$AC^2[0,1] = \{u \in C^2[0,1],\ u' \text{ absolument continues sur } [0,1]\}.$$

Définition 3.2.1 *Les fonctions* $\underline{\delta}$, $\overline{\delta} \in AC^2[0,1]$ *telles que* $\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}\underline{\delta}\,(t)\right), \phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}\overline{\delta}\,(t)\right) \in AC[0,1]$, *sont appelées respectivement la sous solution et la sur solution du problème* $(P1)$ *, si elles vérifient :*

1. $-{}^{C}D_{1^-}^{r}\left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}\underline{\delta}\,(t)\right)\right) + f\left(t, \underline{\delta}\,(t)\right) \leq 0,\ \forall\ t \in [0,1]$ et $r \in [\beta, 1)$,
   avec, $\underline{\delta}(0) \leq 0$, $\underline{\delta}'(0) \leq 0$ et $D_{0^+}^{\alpha}\underline{\delta}(1) \leq 0$.
2. $-{}^{C}D_{1^-}^{r}\left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}\overline{\delta}\,(t)\right)\right) + f\left(t, \overline{\delta}\,(t)\right) \geq 0,\ \forall\ t \in [0,1]$ et $r \in [\beta, 1)$,

avec, $\overline{\delta}(0) \geq 0$, $\overline{\delta}'(0) \geq 0$ et $D_{0^+}^{\alpha}\overline{\delta}(1) \geq 0$.
La sous et la sur solutions sont dans l'ordre inverse si $\overline{\delta}(t) \leq \underline{\delta}(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Lemme 3.2.1 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\phi_p(x) = |x|^{p-2}\,x$ *est un homéomorphisme sur* $\mathbb{R}$ *et strictement monotone croissant .*

De plus, son opérateur inverse $\phi_p^{-1} = \phi_q$, *ou* $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, *est défini par*

$$\begin{cases} \phi_p^{-1}(x) = |x|^{\frac{2-p}{p-1}}\,x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \phi_p^{-1}(x) = 0, & x = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Preuve On prouve la monotonicité de l'opérateur p-Laplacien ϕ_p.

1. Si $x > 0$, $\phi_p(x) = x^{p-1}$ alors
$$\phi_p'(x) = (p-1)x^{p-2} > 0,\ \forall p \geq 2.$$
2. Si $x < 0$, $\phi_p(x) = (-1)^{p-2}x^{p-1}$ alors
$$\phi_p'(x) = (p-1)\,(-x)^{p-2} > 0, \forall p \geq 2,$$

   on conclut donc que ϕ_p est monotone croissante sur $\mathbb{R}$.

■

Tout d'abord, on résout le problème fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α qu'on note par $(P2)$:

$$(P2)\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}u(t)=\phi_q v(t), & 0\leq t\leq 1\\ u(0)=u'(0)=0. \end{cases}$$

Lemme 3.2.2 *Le problème aux limites fractionnaire de Riemann-Liouville* $(P2)$ *a une solution unique donnée par*

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q v(s)ds. \tag{3.2}$$

Preuve En appliquant $I_{0^+}^{\alpha}$ aux deux membres de l'équation du problème $(P2)$, on obtient

$$u(t)=I_{0^+}^{\alpha}\phi_q v(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}.$$

En utilisant la condition initiale $u(0)=0$; on trouve $c_2=0$, et la condition $u'(0)=0$ implique que $c_1=0$. Par conséquent :

$$u(t)=I_{0^+}^{\alpha}\phi_q v(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q v(s)ds.$$

■

Soit $E=C[0,1]$, muni de la norme $\|u\|=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|u(t)|$.
On définit l'opérateur intégral $T:E\to E$ par

$$Tv(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q v(s)ds. \tag{3.3}$$

Alors $u(t)=Tv(t)$. Remarquant que la condition aux limites $D_{0^+}^{\alpha}u(1)=0$, est équivalente à

$$D_{0^+}^{\alpha}u(1)=\phi_q v(1)=0$$

Grâce aux propriétés de l'opérateur p-Laplacien on trouve

$$v(1) = 0.$$

Par conséquent, le problème $(P1)$ équivaut au problème aux limites d'ordre β avec $0 < \beta < 1$ que l'on note par $(P3)$:

$$(P3)\begin{cases} -{}^{C}D_{1^-}^{\beta} v\,(t) + f\,(t, Tv\,(t)) = 0,\; 0 \leq t \leq 1 \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

Le premier résultat sur l'existence des sous et sur solutions du problème $(P1)$ est le suivant.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(H1) *Il existe une constante positive A telle que*

$$f(t, x) \leq A(1-t)^{p-1-r},$$

$\forall\ 0 \leq t \leq 1$ *et* $0 \leq x \leq \frac{A^{\frac{1}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+1)}$, *et pour tout* $r \in [\beta, 1)$,

(H2) *Il existe une constante $B \leq 0$ telle que $A \geq |B|$ et*

$$f(t, x) \geq B(1-t)^{p-1-r},$$

$\forall\ 0 \leq t \leq 1$ *et* $\frac{B|B|^{\frac{2-p}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+1)} \leq x \leq 0$. *Et pour tout* $r \in [\beta, 1)$.

Alors le problème fractionnaire $(P1)$ a des sous et sur solutions qui sont en ordre inverse.

Preuve On choisit $\varphi(t) = A(1-t)^{P-1}$, alors $\underline{\delta}(t) = T\varphi(t)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \underline{\delta}(t) = T\varphi(t) = I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\varphi(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\varphi(s)ds \\
&= \frac{A^{\frac{1}{p-1}}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(1-s)ds \\
&= \frac{A^{\frac{1}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha}(\alpha+1-t) \leq \frac{A^{\frac{1}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

On utilise également l'hypothèse $(H1)$, on trouve pour tout $r \in [\beta, 1)$ et pour $p \geq 2$

$$\begin{aligned}
-{}^{C}D_{1^-}^{r}\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}\underline{\delta}\,(t)\right) + f(t, \underline{\delta}\,(t)) &= -{}^{C}D_{1^-}^{r}\varphi(t) + f(t, T\varphi(t)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-r)}\int_t^1 (s-t)^{-r}\varphi'(s)ds + f(t, T\varphi(t)) \\
&= \frac{-A(p-1)}{\Gamma(1-r)}\int_t^1 (s-t)^{-r}(1-s)^{p-2}ds + f(t, T\varphi(t)) \\
&= -A(p-1)I_{1^-}^{1-r}(1-t)^{p-2} + f(t, T\varphi(t)) \\
&= -\frac{A\Gamma(p)}{\Gamma(p-r)}(1-t)^{p-1-r} + f(t, T\varphi(t)) \\
&\leq -A(1-t)^{p-1-r} + f(t, T\varphi(t)) \leq 0.
\end{aligned}$$

De plus, on a $\underline{\delta}(0) = \underline{\delta}'(0) = 0$ et $D_{0^+}^{\alpha}\underline{\delta}(1) = \phi_q\varphi(1) = 0$. Donc, on conclut que $\underline{\delta}(t)$ est une sous solution du problème $(P1)$.

Des calculs similaires montrent que, $\overline{\delta}(t) = T\psi(t)$ est une sur solution du problème $(P1)$, où $\psi(t) = B(1-t)^{p-1}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
0 \geq \overline{\delta}(t) &= T\psi(t) = I_{0^+}^{\alpha}\phi_q\psi(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\psi(s)ds \\
&= \frac{B\,|B|^{\frac{2-p}{p-1}}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(1-s)ds \\
&= \frac{B\,|B|^{\frac{2-p}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha}(\alpha+1-t) \geq \frac{B\,|B|^{\frac{2-p}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse $(H2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
-{}^cD_{1^-}^r\psi(t) + f(t, T\psi(t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-r)}\int_t^1 (s-t)^{-r}\psi'(s)ds + f(t, T\psi(t)) \\
&= -B(p-1)I_{1^-}^{1-r}(1-t)^{p-2} + f(t, T\psi(t)) \\
&= -\frac{B\Gamma(p)}{\Gamma(p-r)}(1-t)^{p-1-r} + f(t, T\psi(t)) \\
&\geq -B(1-t)^{p-1-r} + f(t, T\psi(t)) \geq 0.
\end{aligned}$$

De plus, $\overline{\delta}(0) = \overline{\delta}'(0) = 0$ et $D_{0^+}^{\alpha}\overline{\delta}(1) = \psi(1) = 0$,

Comme $\psi(t) = B(1-t)^{p-1} \leq \varphi(t) = A(1-t)^{P-1}$, alors

$$\underline{\delta}(t) = T\varphi(t) = \frac{A^{\frac{1}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha}(\alpha+1-t) \geq \overline{\delta}(t) \ = T\psi(t) = \frac{B\,|B|^{\frac{2-p}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha}(\alpha+1-t),$$

ce qui implique que la sous et la sur solutions sont en ordre inverse. ■

Maintenant, on définit une suite de problèmes modifiés $((P4)_r)$, pour tout $r \in [\beta, 1)$ par :

$$((P4)_r)\begin{cases} {}^CD_{1^-}^r v(t) = f((t, T\min[\varphi, \max(v, \psi)])(t)),\ 0 \leq t \leq 1, \\ v(1) = 0. \end{cases}$$

Lemme 3.2.3 *Si v_r est une solution du problème modifié $((P4)_r)$ pour tout $r \in [\beta, 1)$, alors*

$$\psi(t) \leq v_r(t) \leq \varphi(t),\ 0 \leq t \leq 1. \tag{3.4}$$

Preuve En supposant le contraire et en notant $z(t) = v_r(t) - \varphi(t)$, alors, il existe $t_1 \in [0,1)$ tel que $z(t_1) > 0$ $(v_r(t_1) > \varphi(t_1))$. Puisque z est continu et $z(1) = 0$, on conclut qu'il existe $t_2 \in [0, t_1)$ et $t_3 \in (t_1, 1]$ tels que $z(t_3) = 0$ et $z(t) > 0$, pour $t \in [t_2, t_3)$. Maintenant, en appliquant la dérivée fractionnaire de Caputo à z et selon la définition de la sous solution, on obtient

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{r}_{1^-}z(t) &= {}^{C}D^{r}_{1^-}v_r(t) - {}^{C}D^{r}_{1^-}\varphi(t) \\ &= f(t, T\varphi(t)) - {}^{C}D^{r}_{1^-}\varphi(t) \\ &= f(t, \underline{\delta}(t)) - {}^{C}D^{r}_{1^-}(\phi_p(D^{\alpha}_{0^+}\underline{\delta}(t))) \leq 0, \end{aligned}$$

pour $t \in [t_2, t_3]$ et pout tout $r \in [\beta, 1)$.

D'après le théorème (2.2.2), on en déduit que z est croissante sur $[t_2, t_3]$. Comme $z(t_3) = 0$, on conclut que $z(t) \leq 0$, $t \in [t_2, t_3]$, ce qui conduit à une contradiction. De même, on montre que $\psi(t) \leq v_r(t)$ sur $[0, 1]$. ■

Théorème 3.2.2 *Supposons que les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ soient vérifiées. Alors, le problème $(P1)$ a au moins une solution u telle que pour tout $0 \leq t \leq 1$*

$$\overline{\delta}(t) \leq u(t) \leq \overline{\delta}(t),$$

et

$$D^{\alpha}_{0^+}\overline{\delta}(t) \leq D^{\alpha}_{0^+}u(t) \leq D^{\alpha}_{0^+}\underline{\delta}(t).$$

Pour prouver le théorème (3.2.2), on applique le théorème du point fixe de Schauder.

Preuve On définit l'opérateur S sur E par :

$$Sv(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^1 (s-t)^{\beta-1} f(s, T\min[\varphi, \max(v, \psi)])(s)ds,\ 0 \leq t \leq 1,$$

On remarque que si v est un point fixe de l'opérateur S alors v est une solution de problèmes modifiés $((P4)_\beta)$, ceci implique que v est une solution du problème $(P3)$ et donc $u = Tv$ est une solution de $(P1)$.

Tout d'abord, on montre que le problème modifié $((P4)_\beta)$ a au moins une solution v. On définit l'ensemble Ω par

$$\Omega = \left\{ v \in E, \ \ \|v\| \leq \frac{M}{\Gamma(\beta+1)} \right\}$$

où

$$M = \max \left\{ |f(t,x)| \, , \ \overline{\delta}(t) \leq x \leq \underline{\delta}(t), \ 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

Soit $v \in \Omega$, comme ϕ_q est croissant sur $\mathbb{R}$, alors

$$\overline{\delta}(t) \leq T(\min[\varphi, \max(v,\psi)])(t) \leq \underline{\delta}(t), \ 0 \leq t \leq 1$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
|Sv(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^1 (s-t)^{\beta-1} f(s, T\min[\varphi, \max(v,\psi)])(s) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^1 \left| (s-t)^{\beta-1} f(s, T\min[\varphi, \max(v,\psi)])(s) \right| ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\beta+1)} (1-t)^\beta \leq \frac{M}{\Gamma(\beta+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S(\Omega)$ est uniformément borné et $S(\Omega) \subset \Omega$.

On montre maintenant que $S(\Omega)$ est equicontinu. Pour tout $t_1,\ t_2 \in [0,1]$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}
|Sv(t_1) - Sv(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left| \int_{t_1}^{1} (s-t_1)^{\beta-1} f(s, T\min[\varphi, \max(v,\psi)])(s)ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{t_2}^{1} (s-t_2)^{\beta-1} f(s, T\min[\varphi, \max(v,\psi)])(s)ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left|(s-t_1)^{\beta-1} f(s, T\min[\varphi, \max(v,\psi)])(s)\right| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_2}^{1} \left| \left[(s-t_1)^{\beta-1} - (s-t_2)^{\beta-1}\right] f(s, T\min[\varphi, \max(v,\psi)])(s) \right| ds \right) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\beta)} \left(\int_{t_1}^{t_2} (s-t_1)^{\beta-1} ds + \int_{t_2}^{1} \left[(s-t_1)^{\beta-1} - (s-t_2)^{\beta-1}\right] ds \right) \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\beta+1)} \left[(1-t_1)^{\beta} - (1-t_2)^{\beta}\right] \to 0 \text{ quand } t_1 \to t_2
\end{aligned}$$

Par conséquent $S(\Omega)$ est equicontinu. Par le théorème d'Arzela-Ascoli, on déduit que S est complètement continu. Par application du théorème du point fixe de Schauder, on conclut que S a un point fixe $v \in \Omega$ qui est une solution du problème modifié $((P4)_\beta)$. D'après les inégalités (3.4) on voit que si v est une solution de $((P4)_\beta)$, alors

$$-{}^{C}D_{1^-}^{\beta} v(t) + f(t, Tv(t)) = 0,$$

et comme $v(1) = 0$, alors v est une solution du problème $(P3)$ et donc $u = Tv$ est une solution de $(P1)$. Etant donnée que ϕ_q est croissante sur $\mathbb{R}$, alors de (3.4) on a

$$\phi_q\psi(t) \leq \phi_q v(t) \leq \phi_q\varphi(t),\ t \in [0,1], \tag{3.5}$$

Ce qui implique

$$D_{0^+}^{\alpha}\overline{\delta}(t) \leq D_{0^+}^{\alpha} u(t) \leq D_{0^+}^{\alpha}\underline{\delta}(t),\ t \in [0,1].$$

Maintenant, la monotonie de l'opérateur $I_{0^+}^{\alpha}$ avec (3.5) donne

$$T\psi(t) \leq Tv(t) \leq T\varphi(t), \ t \in [0,1],$$

par conséquent

$$\overline{\delta}(t) \leq u(t) \leq \underline{\delta}(t), \ t \in [0,1].$$

■

Corollaire 3.2.1 *Supposons que la condition* $(H1)$ *soit vérifiée et que* $f(t,0) > 0$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors le problème* $(P1)$ *a au moins une solution positive.*

Preuve d'après la condition $f(t,0) > 0$, $0 \leq t \leq 1$, on en déduit que la condition $(H2)$ est vérifiée avec $B = 0$. On conclut par le théorème (3.2.2) que le problème $(P1)$ a au moins une solution telle que

$$0 = \overline{\delta}(t) \leq u(t) \leq \underline{\delta}(t), \ 0 \leq t \leq 1.$$

Puisque $f(t,0) > 0$, $0 \leq t \leq 1$, alors la solution est positive, d'où

$$0 < u(t) \leq \underline{\delta}(t), \ 0 \leq t \leq 1.$$

■

3.3 Exemple

On considère le problème aux limites suivant (P) :

$$(P)\begin{cases} {}^{C}D_{1^-}^{1/2}\left(\phi_2\left(D_{0^+}^{3/2}u\left(t\right)\right)\right)=u(t)(1-t)^{\frac{2}{3}},\ 0\leq t\leq 1\\ x\left(0\right)=x'\left(0\right)=0,\ D_{0^+}^{3/2}x(1)=0\end{cases}$$

où $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{1}{3}$, $p=2$.

Si on choisit $A=1$ alors pour $0\leq t\leq 1$, $0\leq x\leq \frac{A^{\frac{1}{p-1}}}{(\alpha+1)}$ et pour tout $r\in[\frac{1}{3},1)$,

$$f(t,x)=x(1-t)^{\frac{2}{3}}\leq A(1-t)^{p-1-r}=(1-t)^{1-r}.$$

Et, si on choisit $B=-1$, on voit que pour $0\leq t\leq 1$, $\frac{B|B|^{\frac{2-p}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+1)}\leq x\leq 0$ et pour tout $r\in[\frac{1}{3},1)$

$$f(t,x)=x(1-t)^{\frac{2}{3}}\geq B(1-t)^{p-1-r}\geq -(1-t)^{1-r}$$

Par conséquent, le problème (P) a au moins une solution u telle que

$$\overline{\delta}(t)\leq u(t)\leq \underline{\delta}(t).$$

où les expressions des sous et sur solutions sont respectivement

$$\begin{aligned}\underline{\delta}(t) &= \frac{A^{\frac{1}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha}(\alpha+1-t)=\frac{1}{\Gamma(\frac{7}{2})}t^{\frac{3}{2}}(\frac{5}{2}-t),\\ \overline{\delta}(t) &= \frac{B\left|B\right|^{\frac{2-p}{p-1}}}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha}(\alpha+1-t)=\frac{-1}{\Gamma(\frac{7}{2})}t^{\frac{3}{2}}(\frac{5}{2}-t).\end{aligned}$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, on a étudié l'existence de la solution d'une classe d'équations différentielles fractionnaires impliquant en même temps les dérivées à droite et à gauches de type Riemann-Liouville et Caputo.

Les résultats d'existence de solutions sont obtenus grâce au théorème de point fixe de Schauder et la méthode des sous et sur solutions.

Cette étude peut être étendue aux équations différentielles fractionnaires p-Laplaciennes avec d'autre type de dérivée. Il serait intéressant d'établir la stabilité des solutions et les conditions sous lesquelles la positivité de la solution est assurée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **B. Ahmad, J. J. Nieto** : Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations, Abstract and applied analysis, 2009, ID 494720, 9 pages, doi :10.1155/2009/494720.

[2] **B. Ahmad, J. J. Nieto :** The monotone iterative technique for three-point second-order integrodifferential boundary value problems with p-Laplacian. Bound. Value Problems 2007, Article ID 57481 (2007).

[3] **R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan :** Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, 141, 2001.

[4] **R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He :** Existence of fractional neutral functional differential équations, Comput. Math. Appl. 59 (3) (2010), 1095-1100.

[5] **W. Allegretto, Y. Lin and A. Zhou :** A box scheme for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems, Dynam. Contin. Discete Impuls. Systems., V 5 (1999), 573-578.

[6] **R. L. Bagley, R. A. Calico :** Fractional order state equations for the control of visco-elastically damped structures, J. Guidance Control Dyn, 14 ; pp : 304 - 311 ; (1991).

[7] **K. Balachandran, J. J. Trujillo :** The nonlocal Cauchy problem for nonlinear fractional integro differential equations in Banach spaces, Nonlinear Anal. 72 (2010), 4587–4593.

[8] **T. Blaszczyk :** A numerical solution of a fractional oscillator equation in a non-resisting medium with natural boundary conditions, Romanian Reports in Phys. 67 (2015), 350-358.

[9] **A. Cabada :** An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions, Bound. Value Probl. 2011, Art. ID 893753, 18 pp (2011).

[10] **A. Cabada, P. Habets and R. Pouso :** Optimal existence conditions for p-Laplacian equations with upper and lower solutions in the reversed order, J. Differential Equations 166 (2000), 385-401.

[11] **M. Caputo and D. F. M. Torres :** Duality for the left and right fractional derivatives, Signal Process. 107, 265–271 (2015).

[12] **M. Caputo and F. Mainardi :** Linear models of dissipation in anelastic solids, Rivista del Nuovo Cimento (Ser.II), Vol. 1, pp. 161-198(1971].

[13] **M. Caputo :** Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13 pp. 529-539, 1967.

[14] **G. Chai :** Positive solutions for boundary value problem of fractional differential equationwith p-Laplacian operator, Bound. Value Problems 2012, Article ID 18 (2012).

[15] **K. C. Chang :** Variational methods and sub- and super-solutions, Scientia Sinica (Series A) 26 (1983), 1256-1265.

[16] **R. Chaudhary :** Monotone iterative technique for Sobolev type fractional integro-differential equations with fractional nonlocal conditions. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (in press).

[17] **G. Chen, G. Friedman :** An RLC interconnect model based on Fourier analysis, IEEE Trans. Comput. Aided Des. Integr. Circuits Syst. 24 (2) (2005) 170-183.

[18] **T. Chen, W. Liu :** An anti-periodic boundary value problem for the fractional differential equation with a p-Laplacian operator, Appl. Math. Lett. 25 (2012), 1671-1675.

[19] **T. Chen, W. Liu, C. Yang,** Antiperiodic solutions for Liénard-type differential equation with p-Laplacian operator, Bound. Value Probl. 2010

(2010) 1–12. Article ID 194824.

[20] **J. Cronin :** Fixed Points and Topological Degree in nonlinear Analysis, Mathematical Surveys, no. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1964.

[21] **C. De Coster and P. Habets :** Two-point boundary value problems : lower and upper solutions, Mathematics in Science and Engineering, 205, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

[22] **CT. Cremins :** A fixed-point index and existence theorems for semilinear equations in cones. Nonlinear Anal. 42, 789-806 (2001).

[23] **K. Deimling :** Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, Germany, 1985.

[24] **K. Diethelm :** Monotonicity of functions and sign changes of their Caputo derivatives, Fract. Calc. Appl. Anal. 19 (2), 561–566 (2016).

[25] **K. Diethelm :** The analysis of fractional differential equations, Lecture Notes in Mathematics, 2004, Springer, Berlin, 2010.

[26] **D. Franco, J. J. Nieto and D. O'Regan :** Upper and lower solutions for first order problems with nonlinear boundary conditions, Extracta Math. 18 (2), 153–160 (2003).

[27] **R. Gorenflo, F. Mainardi :** Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order, in : A. Carpinteri, F. Mainardi (Eds.), Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, CISM Courses and Lectures, vol. 378, Springer-Verlag, New York, (1997), pp. 277–290.

[28] **A. Guezane-Lakoud** : Initial value problem of fractional order. Cogent Math. 2(1) (2015).

[29] **A. Guezane-Lakoud, R. Rodríguez-López,** On a fractional boundary value problem in a weighted space, SeMA (2018) 75 :435–443.

[30] **A. Guezane-Lakoud and R. Khaldi,** Solutions for a nonlinear fractional Euler-Lagrange type equation,. SeMA (2018). https ://doi.org/10.1007/s40324-018-0170-4

[31] **A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi, D. Boucenna, Juan J. Nieto,** On a multipoint fractional boundary value problem in a fractional

Sobolev space, Differential Equations and Dynamical Systems, DOI https ://doi.org/10.1007/s12591-018-0431-9

[32] **A. Guezane-Lakoud, A. Ashyralyev,** Fixed point theorem applied to a fractional boundary value problem, Pure and Applied Mathematics Letters 2(2014)1-5. http ://www.pamletters.org/

[33] **A. Guezane Lakoud, A. Souahi, R. Khaldi,** On a fractional higher order initial value problem, J. Appl. Math. Comput. (2018) 56 : 289. https ://doi.org/10.1007/s12190-016-1074-z

[34] **A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi and D. F. M. Torres,** Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem with natural conditions, SeMA J.(2018) 75 : 157. https ://doi.org/10.1007/s40324-017-0124-2

[35] **A. Guezane Lakoud, R. Khaldi, A. Kılıçman,** Solvability of a boundary value problem at resonance, SpringerPlus (2016) 5 :1504, DOI 10.1186/s40064 016 3172 7

[36] **A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi,** Existence results for a fractional boundary value problem with fractional Lidstone conditions, Journal of Applied Mathematics and Computing, Volume 49, Issue 1, pp 261-268, 2015, https ://doi.org/10.1007/s12190-014-0837-7

[37] **A. Guezane-Lakoud, A. Kilickman,** Unbounded solution for a fractional boundary value problem, Advances in Difference Equations 2014, 154.https ://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-154

[38] **A. Guezane Lakoud, R. Khaldi and A. Kiliçman :** Existence of solutions for a mixed fractional boundary value problem. Adv Differ Equ. 2017.

[39] **A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi and D. F. M. Torres :** On a fractional oscillator equation with natural boundary conditions, Prog. Frac. Diff. Appl. in press, https ://arxiv.org/pdf/1701.08962.2017

[40] **A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi** : Positive solutions for multi-order nonlinear fractional systems. Int J Anal Appl. 2017 ; 15 :18–22.

[41] **A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi** : Solvability of a three-point fractional nonlinear boundary value problem, Differ Equ Dyn Syst 20(4) (2012), 395–403.

[42] **A. Guezane-Lakoud, R. Khaldi** : Successive approximations to solve higher order fractional differential equations, J. Nonlinear Funct. Anal. 2016 (2016), Article ID 29.

[43] **Z. Han, H. Lu and C. Zhang :** Positive solutions for eigenvalue problems of fractional differential equation with generalized p-Laplacian, Appl. Math. Comput. 257 (2015), 526-536.

[44] **Z. Han, H. Lu, S. Sun and D. Yang :** Positive solutions to boundary-value problems of p-Laplacian fractional differential equations with a parameter in the boundary. Electron. J. Differ. Equ. 2012, Article ID 213 (2012).

[45] **Z. Han, H. Lu, S. Sun and J. Liu :** Existence on positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations with p-Laplacian. Adv. Differ. Equ. 2013, Article ID 30 (2013).

[46] **S. Heidarkhani, M. Ferrara, G. Caristi and A. Salari :** Existence of three solutions for impulsive nonlinear fractional boundary value problems. Opusc. Math. 37(2), 281–301 (2017).

[47] **R. Hilfer :** Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Pub,Co, Singapore, (2000).

[48] **D. Jiang, Y. Yang, J. Chu and D. O'Regan :** The monotone method for Neumann functional differential equations with upper and lower solutions in the reverse order, Nonlinear Anal. 67 (10), 2815–2828 (2007).

[49] **R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud :** Higher ordre fractional boundry value problems for mixed type derivatives, J. Nonlinear Funct. Article ID 30 (2017).

[50] **R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud :** On a generalized Lyapunov inequality for a mixed fractional boundary value problem. AIMS Mathematics, 2019, 4(3) : 506-515. doi : 10.3934/math.2019.3.506.

[51] **R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud :** Lyapunov inequality for a boundary value problem involving conformable derivative, Prog. Frac. Diff. Appl., 3 (2017), 323-329.

[52] **R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud :** Upper and lower solutions method for higher order boundary value problems, Progr. Fract. Differ. Appl. 3 (1), 53–57 (2017).

[53] **R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud,** Solvability of a boundary value problem with a Nagumo Condition, Journal of Taibah university for science, (2018). DOI : 10.1080/16583655.2018.1489025

[54] **R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud,** Minimal and maximal solutions for a fractional boundary value problem at resonance on the half line, Fractional Differential Calculus, Volume 8, Number 2 (2018), 299–307.

[55] **RA. Khan, A. Khan, A. Samad and H. Khan,** On existence of the solution for fractional differential equation with p-Laplacian operator. J. Fract. Calc. Appl. 5(2), 28-37 (2014).

[56] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo :** Theory and applications of fractional differential equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[57] **A. A. Kilbas, J. J. Trujillo :** Diferential equations of fractional order, methods, results and problems II, Appl.Anal. 81 (2002) ; 435-493.

[58] **M. Klimek** : On solutions of linear fractional differential equations of a variational type. The Publishing Office of Czestochowa University of Technology, Czestochowa (2009).

[59] **X. Kong, D. Wang and H. Li :** Existence of unique positive solution to a two-point boundary value problem of fractional-order switched system with p-Laplacian operator. J. Fract. Calc. Appl. 5(2), 9-16 (2014).

[60] **M. A. Krasnoselskii :** Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen 1964.

[61] **V. Lakshmikantham, A. S. Vatsala :** Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis, vol. 69, no. 8, pp. 2677-2682, 2008.

[62] **J. L. Lavoie, T. J. Osler and R. Tremblay :** Fractional derivatives and special functions, SIAM Review Vol. 18, n 2 (1976) pp 240-268.M. C.

[63] **L. S. Leibenson :** General problem of the movement of a compressible fluid in a porous medium. Izv. Akad. Nauk Kirg. SSR, Ser. Biol. Nauk 9, 7–10 (1983).

[64] **X. Liu, M. Jia and X. Xiang :** On the solvability of a fractional differential equation model involving the p-Laplacian operator.Comput. Math. Appl. 64, 3267-32777 (2012).

[65] **H. Linares, Ch. Baillot, A. Oustaloup and Ch. Ceyral :** Generation of a fractal ground : Application in robotics, in : International Congress in IEEE-SMC CESA'96 IMACS Multiconf., Lille, July (1996).

[66] **R. L. Magin :** Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional
Calculus Journal of Vibration and Control, Vol. 14, No. 9-10, 1431-1442 (2008)

[67] **L. M. Mérida, R. E. Vidal :** The obstacle problem for the infinity fractional Laplacian. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 67(1), 7–15 (2018).

[68] **I. Merzoug, A. Guezane-Lakoud and R. Khaldi :** Existence of solutions for a nonlinear fractional p-Laplacian boundary value problem. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, https ://doi.org/10.1007/s12215-019-00459-4 (2019).

[69] **K. S. Miller, B. Ross :** An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons Inc., New York, (1993).

[70] **S. Al Mosa and P. Eloe :** Upper and lower solution method for boundary value problems at resonance, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, Paper No. 40, 13 pp (2016).

[71] **K. Nishimoto :** Fractional calculus and its applications, Nihon University, Koriyama, 1990.

[72] **K. B. Oldam, J. Spanier :** The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[73] **I. Podlubny :** Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

[74] **Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova :** Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system, Acta Mech, (1997).

[75] **B. Ross :** Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus, vol 457; pp. 1 - 36. Springer-Verlag, New York, (1975).

[76] **S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Maritchev :** Intégrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their application, Nouka,Technika, Minsk, (1987).

[77] **S. G. Samko, B. Ross :** Integration and differentiation to a variable fractional order. Integral Transform Spec Funct 1(4) : 277–300, (1993).

[78] **A. Shi, S. Zhang :** Upper and lower solutions method and a fractional differential equation boundary value problem. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 30, 1–13 (2009).

[79] **X. Shu, Y. Xu :** Triple positive solutions for a class of boundary value problem of second-order functional differential equations. Nonlinear Anal. TMA 61, 1401-1411 (2005).

[80] **D. R. Smart :** Fixed point theory, Cambridge Uni. Press, Cambridge 1974.

[81] **E. Soczkiewicz**, Application of fractional calculus in the theory of viscoelasticity Molecular and Quantum Acoustics Vol.23,397-404(2002).

[82] **Y. Su , Q. Li and X. Liu :** Existence criteria for positive solutions of p-Laplacian fractional differential equations with derivative terms. Adv. Differ. Equ. 2013, 119 (2013).

[83] **J. C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier, and A. Oustaloup :** A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. Signal Processing, 91 ;pp. 437 - 445 ; (2011).

[84] **V. V. Uchaikin :** Fractional Derivatives for Physicists and Engineers : Volume I Background and Theory Volume II Applications. Springer Science & Business Media, 2013.

[85] **J, Wang and H, Xiang :** Upper and lower solutions method for a class of singular fractional boundary value problems with p-Laplacian operator. Abstr. Appl. Anal. 2010, 971824 (2010).

[86] **Y. Wang :** Existence and nonexistence of positive solutions for mixed fractional boundary value problem with parameter and p-Laplacian operator. J. Funct. Spaces 2018, Article ID 1462825 (2018).

[87] **J. Xu and D. O'Regan :** Positive Solutions for a Fractional p-Laplacian Boundary Value Problem, Faculty of Sciences and Mathematics, Filomat 31 : 6 (2017), 1549–1558.

[88] **E. Zeidler :** Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.

[89] **S. Zhang and X. Su :** The existence of a solution for a frational differential equation with nonlinear boundary conditions considered using upper and lower solutions in reversed order, Compu. Math. Appl. 62 (2011) 1269-1274. [59]

[90] **X. Zhang, L. Liu, B. Wiwatanapataphee and Y. Wu :** The eigenvalue for a class of singular p-Laplacian fractional differential equations involving the Riemann-Stieltjes integral boundary condition, Appl. Math. Comput. 235, 412-422 (2014).