

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY**

**UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA**



**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

Faculté des Sciences

Année : 2020

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option

Mathématiques Appliquées

Solutions périodiques des systèmes différentiels ordinaires perturbés

Présentée par:

KASSA Sara

DIRECTEUR DE THÈSE: MAKHLOUF Amar Prof. Univ. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT: GHANEM Radouane Prof. Univ. Annaba

EXAMINATEUR: CHAOUI Abderrezak Prof. Univ. 8mai Guelma

EXAMINATEUR: HADIDI Elbahi M.C.A Univ. Annaba

Remerciements

Après avoir rendu grâce à notre Dieu le tout Puissant et le tout Miséricordieux.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse le **Professeur MAKHLOUF Amar** pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, sa rigueur scientifique et son aide. Un grand merci de m'avoir donné la chance de réaliser ce modeste travail.

Je remercie sincèrement **Monsieur GHANEM Radouane**, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, ainsi que **Monsieur CHAOUI Abderrezak**, Professeur à l'université 8 mai 1945 Gulema, et **Monsieur HADIDI Elbahi**, Maître de conférence A à l'université Badji Mokhtar-Annaba, qui ont accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Je remercie chaleureusement mes chers parents, mes soeurs, mes frères et mon mari qui m'ont toujours encouragé au long de mon parcours.

Je remercie tous mes amis de leurs motivations et leur soutien.

Je remercie également tous les miens et toutes les personnes qui m'ont soutenu à terminer cette thèse.

Merci à tous...

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions l'existence des solutions périodiques des systèmes différentiels en utilisant la théorie de moyennisation.

Premièrement, nous étudions l'existence des solutions périodiques qui bifurquent de l'origine des coordonnées des systèmes différentiels polynomiaux cubiques homogènes non linéaires dans \mathbb{R}^3 .

Deuxièmement, nous étudions l'existence des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux cubiques homogènes non linéaires dans \mathbb{R}^5 , en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre.

Troisièmement, nous étudions l'existence des solutions périodiques qui bifurquent de l'origine des coordonnées des systèmes différentiels polynomiaux cubiques homogènes non linéaires dans \mathbb{R}^n de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{z}_k = (c_1^{(k)}\varepsilon + c_2^{(k)}\varepsilon^2)z_k + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \end{array} \right.$$

où $k = 3, \dots, n$. $a_1, a_2, b, b_1, b_2, a_{j,i_1,\dots,i_n}, b_{j,i_1,\dots,i_n}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}$ et $c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)}$ sont des coefficients réels, ε est un paramètre suffisamment petit et $b \neq 0$.

Quatrièmement, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions périodiques d'un système tridimensionnel continu.

Mots-clés : bifurcation de Hopf, méthode de la moyennisation, solutions périodiques, systèmes différentiels polynomiaux cubiques, système différentiel continu.

Abstract

In this thesis, we study the existence of periodic solutions of differential systems by using the averaging theory.

Firstly, we study the existence of periodic solutions bifurcating from the origin of coordinates of the nonlinear homogeneous cubic polynomial differential systems in \mathbb{R}^3 .

Secondly, we study the existence of limit cycles of the nonlinear homogeneous cubic polynomial differential systems in \mathbb{R}^5 , using the averaging theory of second order.

Thirdly, we study the existence of periodic solutions which bifurcate from the origin of coordinates of the nonlinear homogeneous cubic polynomial differential systems in \mathbb{R}^n of the form

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{z}_k = (c_1^{(k)}\varepsilon + c_2^{(k)}\varepsilon^2)z_k + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \end{array} \right.$$

where $k = 3, \dots, n$. $a_1, a_2, b, b_1, b_2, a_{j,i_1,\dots,i_n}, b_{j,i_1,\dots,i_n}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}$ et $c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)}$ real coefficients, ε is a parameter sufficiently small and $b \neq 0$.

Fourthly, we provide necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions of a 3-dimensional continuous differential systems.

Keywords : Hopf bifurcation, averaging theory, periodic solutions, cubic polynomial differential systems, continuous differential systems.

الملخص

ندرس في هذه الأطروحة الحلول الدورية لجمل من المعادلات التفاضلية باستخدام نظرية المتوسط.

أولاً، ندرس الحلول الدورية المتفرعة عن مبدأ الإحداثيات لجمل من المعادلات التفاضلية بكثيرات حدود من الدرجة الثالثة متجانسة غير خطية في R^3 .

ثانياً، ندرس الحلول الدورية المعزولة المتفرعة لجمل من المعادلات التفاضلية بكثيرات حدود من الدرجة الثالثة متجانسة غير خطية في R^5 باستخدام نظرية المتوسط من الدرجة الثانية.

ثالثاً، ندرس الحلول الدورية المتفرعة عن مبدأ الإحداثيات لجمل من المعادلات التفاضلية بكثيرات حدود من الدرجة الثالثة متجانسة غير خطية في R^n .

$$\begin{cases} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{z}_k = (c_1^{(k)}\varepsilon + c_2^{(k)}\varepsilon^2)z_k + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \end{cases}$$

حيث $k = 3, \dots, n$. $a_1, a_2, b_1, b_2, a_{j,i_1,\dots,i_n}, b_{j,i_1,\dots,i_n}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)}$ ثوابت حقيقية، ε وسيط صغير جداً و $b \neq 0$. رابعاً، نعطي شروطاً ضرورية وكافية من أجل وجود حلول دورية لنظام تفاضلي ثلاثي مستمر.

كلمات مفتاحية: تفرع هوف، نظرية المتوسط، حلول دورية، أنظمة تفاضلية بكثيرات حدود من الدرجة الثالثة، نظام تفاضلي مستمر.

Table des matières

Introduction générale	vi
1 Notions Préliminaires	1
1.1 Systèmes différentiels polynomiaux	1
1.2 Solution d'un système différentiel	2
1.3 Problèmes de Cauchy (Problèmes à valeurs initiales)	2
1.4 Existence et unicité	2
1.5 Stabilité de la solution	3
1.6 Systèmes dynamiques	4
1.7 Flot	4
1.8 Flot d'une équation différentielle	5
1.9 Points d'équilibres	5
1.10 Linéarisation des systèmes	6
1.10.1 Nature des points d'équilibre	7
1.11 Stabilité des points d'équilibre	11
1.12 Plan et portrait de phase	12
1.13 Orbites périodiques et cycles limites	12
1.13.1 Orbites périodiques	12
1.13.2 Cycles limites	13
1.14 Stabilité des cycles limites	13
1.15 Existence et non-existence des cycles limites	14
1.16 Ensemble isochrone	15
1.17 Bifurcation de Hopf	16
1.18 Théorème de Bezout	17
2 Théorie de moyennisation	19
2.1 Théorème de moyennisation du premier ordre	19
2.2 Théorie de la moyennisation du second ordre	23
2.3 Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre	27
2.4 Théorème de la moyennisation du premier ordre via le degré du Brouwer	29
2.5 Théorie de moyennisation d'ordre un et deux dans \mathbb{R}^n	31

3	La bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels tridimensionnels	35
3.1	Bifurcation zéro-Hopf tridimensionnelle via la théorie de la moyennisation	35
3.2	Preuve	36
4	La bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux cubiques de dimension 5	41
4.1	Résultats	42
4.2	Application	46
5	La bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux de dimension n	49
5.1	La Bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux de dimension n par la théorie de moyennisation du deuxième ordre . . .	49
6	Cycles limites d'un système différentiel continu tridimensionnel	59
6.1	Cycles limites qui bifurquent d'un point d'équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel tridimensionnel continu	59
6.1.1	Résultats	60
6.2	Preuve	61
	Conclusion et perspectives	64
	Bibliographie	65

Introduction générale

Afin de découvrir des nouvelles connaissances, les chercheurs analysent des phénomènes en physique, mécanique, chimie,...etc par le biais d'expérimentation. Cette expérience doit suivre un schéma logique, pour étudier les différentes variables et pouvoir les dégager. Ce schéma est constitué par les étapes suivantes

1. *Le choix de sujet.*
2. *Isolation des variables.*
3. *Emission des hypothèses.*
4. *Planification de la récolte des données.*
5. *Réalisation de l'expérience avec méthode.*
6. *la Récolte des données.*
7. *Conclusion.*

L'étape finale dépend de l'écriture scientifique des résultats "modélisation de phénomène". Les chercheurs ont choisi les mathématiques comme un moyen d'écrire leurs résultats grâce à sa rigueur. Certaines de ces phénomènes s'évoluent au cours du temps. On appelle cette évolution " **systèmes dynamiques** " qui est représenté par des applications ou des équations différentielles. Ces systèmes peuvent être déterministes ou stochastiques.

Les systèmes dynamiques en question ont évolué à la fin de 19^{ième} siècle et ont contribué grandement à la compréhension de certains phénomènes non linéaires.

L'étude des systèmes dynamiques en mathématiques a été consacré principalement à trouver des solutions analytiques des équations depuis plus de 2 siècles.

Mais les comportements dynamiques d'un système ne peuvent pas être déterminés par des solutions analytiques ou des solutions fermées. De plus, la solution analytique des équations différentielles non linéaires est difficile à obtenir, sauf dans quelques cas particuliers [26].

Une équation différentielle est une relation entre une variable, une fonction inconnue et ses dérivées. Elle est de la forme

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Le terme équation différentielle ou *oeuquatio differentialis* est apparu pour la première fois sous plume de Leibniz en 1776 pour définir la relation entre les différentielles dx et dy de deux variables x et y [12].

Pendant son apparition, la résolution algébrique de ces équations différentielles a pris une importance aux mathématiciens. Ils ne s'arrêtaient pas à chercher une méthode applicable à toute sorte d'équations différentielles. Ils rencontraient un des plus importants problèmes de la théorie des équations différentielles : "***Etude de l'existence et l'unicité des solutions***". C'était là où Cauchy a mis sa tâche en mathématiques en introduisant un théorème résolvant le problème que les mathématiciens passaient leurs temps à résoudre. Il a pensé que l'étude des équations différentielles est une branche de la théorie des fonctions.

Plus tard, Poincaré s'intéresse à l'étude qualitative des équations différentielles. Il a développé les solutions de ces équations en série en faisant trois changements dans la façon d'étude : étudier la solution d'une manière globale, abandonner la variable complexe (étudier des fonctions réelles) et géométriser le problème.

Dans l'étude qualitative des équations différentielles, l'étude de l'existence des cycles limites est l'un des objectifs des chercheurs. Un cycle limite est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques d'une équation différentielle. Cette notion est apparue en 1881, dans le mémoire de H. Poincaré [31] intitulé "sur les courbes définies par une équation différentielles". Van der Pol, Liénard et Andonov ont démontré qu'un cycle limite est une trajectoire. Par conséquent, Poincaré et Bendixon ont introduit un des principaux théorèmes de la dynamique non linéaire. Ce théorème assure que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique.

Lors du deuxième congrès international des mathématiques ([13], 1900), David Hilbert a présenté 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". Le seizième problème avec sa deuxième partie consiste à savoir le nombre maximum des cycles limites noté $H(n)$ du système différentiel polynomial de degré n suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= G(x, y). \end{cases}$$

Plusieurs résultats ont été obtenus sur le nombre de cycles limites en utilisant des techniques différentes. La méthode de moyennisation fait partie de ces techniques. Elle est la base de notre travail.

Un nouveau terme a été introduit en 1892 par Poincaré qui est la bifurcation. La théorie de la bifurcation est un aspect fondamental des systèmes dynamiques. Elle

décrit le changement qualitatif des points d'équilibres d'une équation différentielle, obtenue selon une faible variation d'un paramètre.

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels ordinaire avec des polynômes cubiques dans \mathbb{R}^n en appliquant la méthode de moyennisation du deuxième ordre.

Cette thèse se compose de six chapitres :

- Le chapitre un donne un rappel sur les notions fondamentales aux systèmes dynamiques tels que : système dynamique, portrait de phase et flot d'une équation différentielle, orbite périodique et cycle limites ainsi que des résultats auxiliaires et théorèmes d'existence et non existence des cycles limites. On citera aussi un théorème de la bifurcation de Hopf.
- Le chapitre deux présente les différents théorèmes de la théorie de moyennisation pour chercher les solutions périodiques des équation différentielles.
- Le chapitre trois consiste à l'étude de la bifurcation de zéro-Hopf des systèmes différentiels cubiques dans \mathbb{R}^3 en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre. Ce chapitre est soumis pour une publication.
- Le chapitre quatre est consacré à l'étude de l'existence des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux cubiques homogènes nonlinéaires dans \mathbb{R}^5 .
- Le chapitre cinq s'intéresse à l'étude de la bifurcation de zéro-Hopf pour des champs de vecteurs dans \mathbb{R}^n . On donne le nombre de cycles limites qui bifurquent d'un point d'équilibre zéro-Hopf. On a utilisé la méthode de moyennisation de deuxième ordre pour traité ce problème. Cette étude a fait l'objet d'une publication internationale intitulée "**S. Kassa, J. Llibre and A. Makhlouf**, N-dimensional zero-Hopf bifurcation of polynomial differential systems via averaging theory of second order, Journal of Dynamical and Control Systems, ISSN 1079 – 2724".
- Le chapitre six est consacré à l'étude de l'existence des solutions périodiques d'un système différentiel tridimensionnel lipschitzien de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -a|x| - y + 3y^2 - xz - b. \end{cases}$$

Ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale dans le journal "São Paulo Journal of Mathematical Sciences" intitulée "**S. Kassa, J. Llibre and A. Makhlouf**, Limit cycles bifurcating from a zero-Hopf equilibrium of a 3-Dimensional continuous differential system, ISSN 1982 – 6907".

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des systèmes différentiels polynomiaux.

1.1 Systèmes différentiels polynomiaux

Définition 1.1.1 On appelle un système différentiel polynomial dans \mathbb{R}^n , un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt}(t) = P_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \frac{dx_2}{dt}(t) = P_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = P_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où P_1, P_2, \dots et P_n sont des polynômes à coefficients réels.

- Le système (1.1) est de degré d où $d = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_n)$.
- Si P_1, P_2, \dots, P_n ne dépendent pas de t explicitement, alors le système (1.1) est dit autonome.

1.2 Solution d'un système différentiel

On appelle solution du système (1.1) toute application dérivable

$$\begin{aligned} X &: I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \end{aligned}$$

où I est un intervalle non vide tel que, pour tout $t \in I$, $(X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ satisfait le système.

1.3 Problèmes de Cauchy (Problèmes à valeurs initiales)

Considérons le système (1.1) avec la condition initiale $X(t_0) = X_0 = (X_{10}, X_{20}, \dots, X_{n0})$ où $F = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ est une fonction continue dans un voisinage de X_0 et $t_0 \in I$.

Le problème qui consiste à trouver une solution du système (1.1) satisfaisant la condition initiale X_0 , est appelé problème de Cauchy.

1.4 Existence et unicité

Définition 1.4.1 (Fonction lipschitzienne)

Une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est une application lipschitzienne de rapport k sur U si

$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|, \quad (1.2)$$

pour tout $y_1 \in U$ et tout $y_2 \in U$.

Définition 1.4.2 (Fonction localement lipschitzienne)

Une fonction $F : U \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne sur U si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{x_0} \subset U$ de x_0 tel que $F|_{V_{x_0}}$ soit lipschitzienne sur V_{x_0} .

Définition 1.4.3 Une fonction $F : I \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ est dite continue et lipschitzienne sur U uniformément par rapport à $t \in I$ si

- (i) F est continue sur $I \times U$,
- (ii) Il existe $k > 0$ tel que

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|, \quad (1.3)$$

pour tout $t \in I$, tout $y_1 \in U$ et tout $y_2 \in U$.

Théorème 1.4.1 (Théorème d'existence locale et d'unicité)

Soit $F : I \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ continue sur $I \times U$, localement Lipschitzienne en $x \in U$, uniformément en t . Pour tout $(t_0, X_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy

$$\dot{x} = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (1.4)$$

admet une solution unique (X, I_X) sur I_X .

Remarque 1.4.1 (X, I_X) est une solution du problème de Cauchy (1.4) si et seulement si $X \in C(I_X, \mathbb{R}^n)$ et

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t F(s, X(s)) ds,$$

pour tout $t \in I_X$.

1.5 Stabilité de la solution

La notion de stabilité joue un rôle important à l'étude des équations différentielles et systèmes différentiels. Elle a été introduite par Liapunov (1857 – 1918).

Définition 1.5.1 Considérons le problème de Cauchy (1.4). Supposons que F satisfait les conditions du théorème d'existence locale et d'unicité de la solution. Soit $\phi(t)$ une solution du problème (1.4) telle que $\phi(t_0) = \phi_0$. $\phi(t)$ est dite stable au sens de Liapunov si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que toute solution $x(t)$ de (1.4) vérifie

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Si de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0$, alors la solution est dite asymptotiquement stable.

1.6 Systèmes dynamiques

Définition 1.6.1 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

- (a) $U(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- (b) $U(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- (c) $U(0, x) = x$.
- (d) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.6.1 Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

La solution du système (1.5) est de la forme $x(t) = e^{tA}x_0$ où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice constante.

Le système (1.5) engendre un système dynamique $U(t, x)$ tel que

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ U(t, x) &= e^{tA}x. \end{aligned}$$

Définition 1.6.2 Un système dynamique U sur \mathbb{R}^n est dit linéaire si

$$\begin{aligned} U(t, \alpha x + \beta y) &= \alpha U(t, x) + \beta U(t, y), \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

1.7 Flot

Considérons le système différentiel polynomial (1.1).

Soit $M(x_1, \dots, x_n)$ un point de \mathbb{R}^n , on note $\phi_t(x_1, \dots, x_n)$ la position de M après un déplacement d'une durée t ($t \in I \subseteq \mathbb{R}^+$).

Définition 1.7.1 On appelle flot l'application

$$\phi : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

$$(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto \phi_t(x_1, \dots, x_n)$$

qui vérifie les propriétés suivantes

- i) $\frac{d}{dt}\phi_t(x_1, \dots, x_n) = (P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_n(x_1, \dots, x_n))$,
- ii) $\phi_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$,
- iii) $\phi_{t+s}(x_1, \dots, x_n) = \phi_t(\phi_s(x_1, \dots, x_n))$,

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $t, s \in I$.

1.8 Flot d'une équation différentielle

Définition 1.8.1 Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.8}$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0$, $x_0 \in E$, E est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\phi(t, x_0)$ la solution du système (1.8). L'ensemble des applications ϕ_t définies par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (1.8).

Définition 1.8.2 Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.

1.9 Points d'équilibres

Les points d'équilibres ont un rôle important à l'étude des systèmes différentiels non linéaires. Henri Poincaré (1854 – 1912) a montré qu'il suffit de savoir le comportement de la solution à travers l'étude des points d'équilibres au lieu de résoudre ces systèmes différentiels.

Définition 1.9.1 Considérons le système différentiel (1.8). Un point x_0 est dit singulier ou d'équilibre du système (1.8) si

$$f(x_0) = 0.$$

1.10 Linéarisation des systèmes

La majorité des systèmes qui modélisent des phénomènes naturels sont non linéaires. Pour étudier le comportement des trajectoires de ces systèmes, au voisinage d'un point d'équilibre x_0 , on se ramène à l'étude de ces systèmes linéarisés associés.

Définition 1.10.1 Considérons le système différentiel non linéaire (1.8).

Soit x_0 un point critique du système (1.8).

Le système

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.9)$$

où

$$A = Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (1.10)$$

est dit système linéarisé du système (1.8) au point x_0 .

A est dite matrice jacobienne associée au système (1.8) évaluée en x_0 .

Exemple 1.10.1 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 - 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y^4. \end{cases} \quad (1.11)$$

$X_0 = (0, 0)$ est le seul point singulier du système (1.11).

La matrice jacobienne associée au système (1.11) calculée en $(0, 0)$ est

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système linéarisé du système (1.11) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$$

Définition 1.10.2 Le point critique x_0 du système (1.8) est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $A = Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

1.10.1 Nature des points d'équilibre

Définition 1.9.4 Considérons le système différentiel (1.8) avec $x \in \mathbb{R}^2$. Soit A la matrice jacobienne calculée d'ordre 2 au point $X_0 = (0, 0)$ et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles de signe différent, alors le point critique X_0 est un point selle. Il est toujours instable (voir Fig.(1.1)).

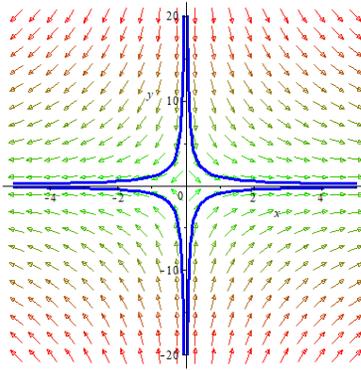


FIGURE 1.1 – $(0, 0)$ est un point selle.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :
 - Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, alors X_0 est un noeud stable (voir Fig.(1.2)).

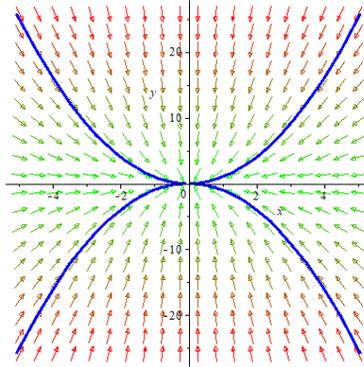


FIGURE 1.2 – $(0, 0)$ est un noeud stable.

- Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, alors X_0 est un noeud instable (voir Fig.(1.3)).

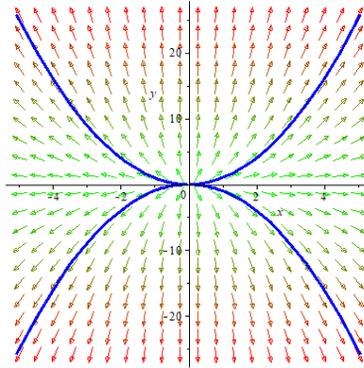
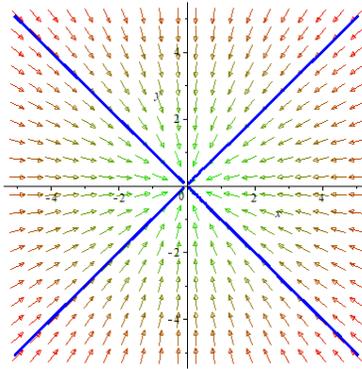
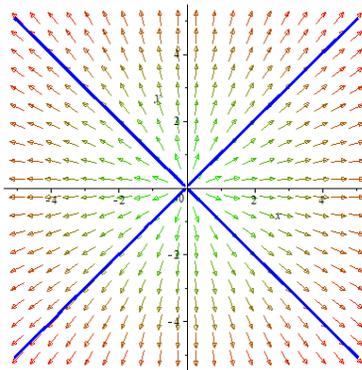


FIGURE 1.3 – $(0, 0)$ est un noeud instable.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors X_0 est un noeud propre. Il est stable si $\lambda < 0$ est instable si $\lambda > 0$ (voir Fig.(1.4) et Fig.(1.5)).

FIGURE 1.4 – $(0, 0)$ est un noeud propre stable.FIGURE 1.5 – $(0, 0)$ est un noeud propre instable.

3. Si λ_1 et λ_2 sont complexes conjuguées avec une partie imaginaire non nulle, alors X_0 est un foyer. Il est stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ (voir Fig.(1.6) et Fig.(1.7)).

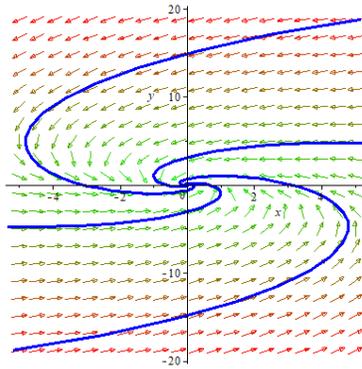


FIGURE 1.6 – $(0, 0)$ est un foyer stable.

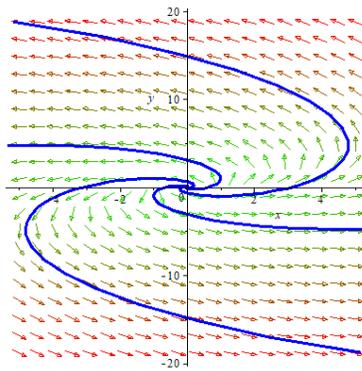


FIGURE 1.7 – $(0, 0)$ est un foyer instable.

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors X_0 est un centre. Il est stable mais n'est pas asymptotiquement stable (voir Fig.(1.8)).

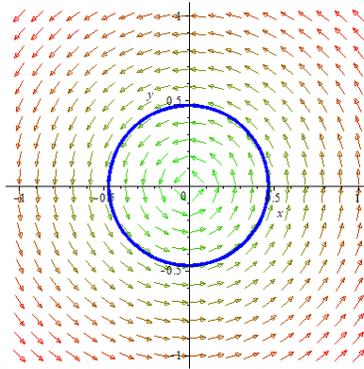


FIGURE 1.8 – $(0,0)$ est un centre.

1.11 Stabilité des points d'équilibre

Un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibre. Ces points peuvent être stables ou instables.

Soit le système

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Soit p un point d'équilibre du système (1.12) et $\phi(t)$ la solution de ce système.

Définition 1.11.1 On dit que

i) p est stable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|\phi(t_0) - p\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

ii) p est asymptotiquement stable si et seulement si p est stable et s'il existe un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p.$$

On peut étudier la stabilité du système (1.12) selon les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(p)$, en utilisant le théorème suivant

Théorème 1.11.1 Soit p le point d'équilibre du système (1.12).

- a) Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(p)$ ont des parties réelles négatives, alors le point d'équilibre p est dit asymptotiquement stable.
- b) S'il existe au moins une valeur propre de $Df(p)$ avec une partie réelle positive, alors le point d'équilibre p est dit instable.
- c) Si $Df(p)$ a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point d'équilibre p .

1.12 Plan et portrait de phase

Définition 1.12.1 Soit le système planaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_1(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = P_2(x(t), y(t)). \end{cases} \quad (1.13)$$

Un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, Les solutions $(x(t); y(t))$ du système (1.13) représentent dans le plan $(x; y)$ des courbes appelées orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan $(x \circ y)$ est appelé le plan de phase.

1.13 Orbites périodiques et cycles limites

1.13.1 Orbites périodiques

Définition 1.13.1 Une trajectoire $\phi(t, x)$ du système (1.1) est dite orbite périodique s'il existe un nombre $T > 0$ tel que

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Le petit réel positif est appelé période.

1.13.2 Cycles limites

Définition 1.13.2 Un cycle limite est une orbite périodique fermée isolée dans un ensemble des orbites périodiques.

Définition 1.13.3 L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.

1.14 Stabilité des cycles limites

Théorème 1.14.1 C étant la trajectoire correspondante au cycle limite, et soit toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C s'enroulent en spirales autour de C pour $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

1. Le cycle limite est dit stable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers C .
2. Le cycle limite est dit instable, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de C .

Exemple 1.14.1 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{2}x - y - x(2x^2 + 2y^2), \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{2}y - y(2x^2 + 2y^2). \end{cases} \quad (1.14)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$, le système (1.14) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \frac{1}{2}r(1 - 4r^2), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

On obtient

$$f(r) = \dot{r} = \frac{1}{2}r(1 - 4r^2).$$

Donc

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = \pm \frac{1}{2}.$$

Comme $r > 0$, on n'accepte que la racine positive $r = \frac{1}{2}$. La solution périodique s'écrit alors sous la forme suivante

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{2} \cos(t + \theta_0), \frac{1}{2} \sin(t + \theta_0) \right),$$

avec $\theta(0) = \theta_0$.

Dans le plan de phase, il y a un seul cycle limite d'équation $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ et d'amplitude $r = \frac{1}{2}$ (voir Fig.(1.9)).

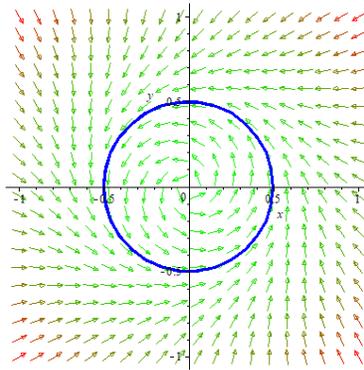


FIGURE 1.9 – Cycle limite du système (1.14).

1.15 Existence et non-existence des cycles limites

L'étude de l'existence des cycles limites joue un rôle important dans l'étude du comportement des trajectoires des systèmes différentiels non linéaires. Nous citons des résultats intéressants à cette étude.

Théorème 1.15.1 (Poincaré-Bendixon). Soit le système planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.16)$$

Supposons que f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 noté par E , le système (1.16) a une orbite γ telle que l'orbite positive

$\gamma_+(p) = \Phi(p, t), t \geq 0$ passant par le point p est contenue dans un sous ensemble compact F de E . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- ★ Soit $\gamma_+(p)$ tend vers un point d'équilibre.
- ★ Soit $\gamma_+(p)$ tend vers une orbite périodique.
- ★ Soit $\gamma_+(p)$ est une orbite périodique.

Si F ne contient pas de points critiques alors il existe une orbite périodique du système (1.16).

Théorème 1.15.2 (Critère de Bendixon). Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{cases}$$

et soit $F = (f, g)^T \in C^1(E)$ où E est une région simplement connexe dans \mathbb{R}^2 . Si la divergence du champs de vecteur F (notée ∇F) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans E , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans E .

Exemple 1.15.1 Considérons le système différentiel planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^3, \\ \dot{y} &= -2xy - x^4y^5. \end{cases}$$

Soit $F = (x^2 + y^3, -2xy - x^4y^5)^T$. On calcule la divergence du champs de vecteur F , on obtient

$$\operatorname{div} F = \nabla F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-2xy - x^4y^5) = (2x - 2x - 5x^4y^4) = -5x^4y^4 < 0.$$

D'où, d'après le critère de Bendixon ce système n'a aucun cycle limite dans \mathbb{R}^2 .

1.16 Ensemble isochrone

L'ensemble isochrone est un ensemble formé uniquement par des solutions périodiques, qui ont la même période.

1.17 Bifurcation de Hopf

Théorème 1.17.1 Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\mu(x, y), \\ \dot{y} = g_\mu(x, y), \end{cases} \quad (1.17)$$

où μ est un paramètre. Supposons que $(x, y) = (x_0, y_0)$ est un point d'équilibre du système (1.17) qui dépend de μ .

Soient $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ et $\bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) - i\beta(\mu)$ les valeurs propres du système linéarisé au voisinage de (x_0, y_0) .

Supposons que pour une certaine valeur de $\mu = \mu_0$, les conditions suivantes sont satisfaites

1. $\alpha(\mu_0) = 0$, $\beta(\mu_0) = w \neq 0$ où $\text{sgn}(w) = \text{sgn}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \Big|_{\mu=\mu_0}((x_0, y_0))\right)$,
2. $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$,
3. $a \neq 0$ où

$$a = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + \frac{1}{16w}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}),$$

avec $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{\mu=\mu_0}(x_0, y_0)$.

Alors une orbite périodique bifurque du point d'équilibre pour $\mu > \mu_0$ si $ad < 0$ ou pour $\mu < \mu_0$ si $ad > 0$.

Le point d'équilibre (x_0, y_0) est stable pour $\mu > \mu_0$ (respectivement pour $\mu < \mu_0$) si $d < 0$ (respectivement si $d > 0$).

L'orbite périodique est stable (respectivement instable) si le point d'équilibre est instable (respectivement stable).

L'amplitude de l'orbite périodique est égale à $\sqrt{|\mu - \mu_0|}$ et la période est de $T = \frac{2\pi}{|w|}$ quand $\mu \rightarrow \mu_0$.

La bifurcation est dite supercritique si l'orbite périodique est stable et sous critique si l'orbite périodique est instable.

Exemple 1.17.1 Soit le système planaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2), \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.18)$$

$(0, 0)$ est le seul point d'équilibre du système (1.18).

Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé calculée au voisinage de $(0, 0)$ sont $\lambda(\mu) = \mu + i$ et $\bar{\lambda}(\mu) = \mu - i$.

Donc $\alpha(\mu) = \mu$ et $\beta(\mu) = 1$.

Le système a une bifurcation de Hopf pour $\mu = 0$. Nous avons $w = 1$, $d = 1$ et $a = -1$. Comme $ad = -1 < 0$, alors il existe une orbite périodique qui bifurque de l'origine pour $\mu > 0$.

Le point $(0, 0)$ est instable pour $\mu > 0$. Donc l'orbite périodique est stable. D'où la bifurcation est supercritique pour $\mu > 0$.

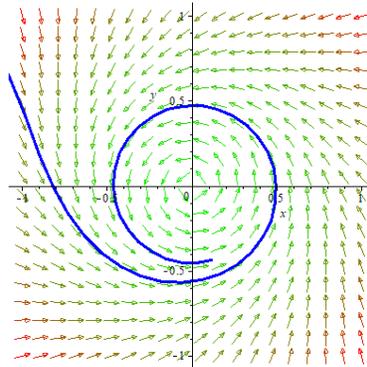


FIGURE 1.10 – portrait de phase pour $\mu = 0.2$.

1.18 Théorème de Bezout

Soient P_j , $j = 1, \dots, n$ des polynômes de variables (x_1, \dots, x_d) de degré d_i où $i = 1, \dots, d$.

Considérons le système polynomial suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ P_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \end{array} \right. \quad (1.19)$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Si le nombre de solutions de ce système est fini alors il est borné par $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_d$.

La théorie de moyennisation est l'une des méthodes classiques qui permet d'étudier l'existence des solutions périodiques des systèmes différentiels. Après les points d'équilibre, les orbites périodiques et leurs type de stabilité fournissent de nombreuses informations sur la dynamique des systèmes différentiels.

La méthode de moyennisation donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre.

L'histoire de cette méthode commence par les travaux classiques de Lagrange et Fatou à la fin du 18^{ième} siècle. La première démonstration de la validité asymptotique de cette méthode a été introduite en 1928 par Fatou, en 1934 par Bogoliobov et Krylov [6], en 1961 par Bogoliobov et Mitropolsky [7]. Ensuite plusieurs développements ont eu lieu de cette méthode par Verhulst [36], Sanders et Verhulst [34], Malkin [30] et Roseau [32].

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie de moyennisation avec ses différents théorèmes.

2.1 Théorème de moyennisation du premier ordre

Considérons le système différentiel à valeur initiale suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x), y(0) = x_0, \quad (2.1)$$

où $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine borné et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, x)$ et $G(t, x, \varepsilon)$ sont des fonctions T -périodiques en t .

Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\dot{y} = \varepsilon f(y), y(0) = x_0, \quad (2.2)$$

où

$$f(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibres du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

Théorème 2.1.1 [34] Considérons le système (2.1) et supposons que

- (i) $F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial G}{\partial x}$ sont des fonctions continues et bornées par une constante M indépendante de ε dans $[0, \infty) \times D$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

- (ii) F et G sont T -périodiques en t (T indépendante de ε).

Alors on a :

- (a) Si le point p est un point d'équilibre pour le système moyenné (2.2) telle que

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{y=p} \neq 0, \quad (2.4)$$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$.

- (b) Si le point d'équilibre $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique du système (2.1) est unique et de même stabilité que p .

Preuve. Voir[34].

Exemple 2.1.1 Soit l'équation de **Van Der Pol**

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (2.5)$$

On écrit l'équation (2.5) sous la forme du système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.6)$$

En coordonnées polaires (r, θ) où $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, le système (2.6) devient

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} &= -1 - \varepsilon(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta. \end{cases} \quad (2.7)$$

Le système (2.7) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2). \quad (2.8)$$

2.1. THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

L'équation (2.8) est sous la forme standard (2.1) donc on peut appliquer le théorie de moyennisation avec

$$x = r, t = \theta, T = 2\pi, F(t, x) = F(\theta, r) = r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta.$$

D'après l'équation (2.3), on obtient la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta, r) d\theta = \frac{1}{8} r(r^2 - 4).$$

$f^0(r) = 0$ a une unique racine positive $r = 2$. D'après le théorème 2.1.1, l'équation de **Van Der Pol** (2.5) admet un cycle limite qui bifurque de la solution périodique du rayon $r = 2$ pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit car

$$\frac{df^0}{dr}(2) = 1 \neq 0.$$

Comme $\frac{df^0}{dr}(2) > 0$, alors ce cycle est instable (voir Fig.(2.1)).

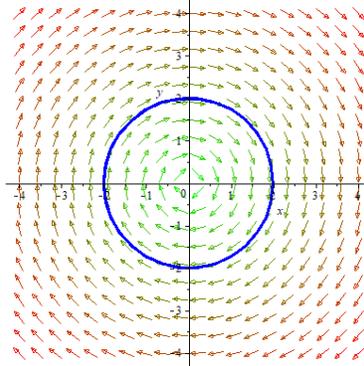


FIGURE 2.1 – Cycle limite instable pour $\varepsilon = 0.001$ du système (2.7).

Exemple 2.1.2 Considérons le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \varepsilon(x + x^3 - x^5), \\ \dot{y} &= x. \end{cases}$$

En utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $r > 0$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta - r^2 \cos^2 \theta - 1), \\ \dot{\theta} &= -1 + \varepsilon \sin \theta \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta - r^4 \cos^4 \theta + 1). \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \dot{\theta} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}. \end{cases}$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta - r^2 \cos^2 \theta - 1)}{-1 + \varepsilon \sin \theta \cos \theta (r^2 \cos^2 \theta - r^4 \cos^4 \theta + 1)}. \quad (2.9)$$

Le système (2.9) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta - r^2 \cos^2 \theta - 1) + O(\varepsilon^2). \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est écrite sous la forme standard (2.1) donc on peut appliquer la théorie de moyennisation avec

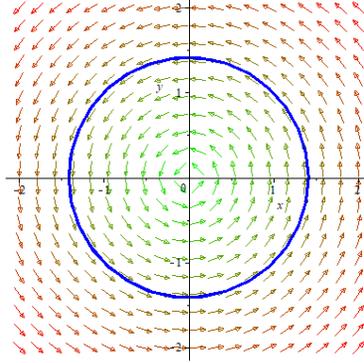
$$x = r, t = \theta, T = 2\pi, F(t, x) = F(\theta, r) = -r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta - r^2 \cos^2 \theta - 1).$$

D'après l'équation (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -(r \cos^2 \theta (r^4 \cos^4 \theta - r^2 \cos^2 \theta - 1)) d\theta, \\ &= \frac{-1}{16} r (5r^4 - 6r^2 - 8). \end{aligned}$$

La fonction moyennée $f^0(r)$ a un seul zéro positif $r = \sqrt{2}$. De plus, on a $\left[\frac{df^0}{dr}(\sqrt{2})\right] = \frac{-7}{2} < 0$.

Alors le système (2.1) a un cycle limite stable d'amplitude $\sqrt{2}$ pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit (voir Fig.(2.2))


 FIGURE 2.2 – Cycle limite stable pour $\varepsilon = 0.001$ du système (2.1)

2.2 Théorie de la moyennisation du second ordre

Le théorème suivant donne une approximation du second ordre des solutions périodiques pour certains systèmes différentiels.

Théorème 2.2.1 [34] Considérons les deux problèmes aux valeurs initiales

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.11)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 f^{10}(y) + \varepsilon^3 g^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.12)$$

où $F_1, F_2 : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_3 : [0, \infty) \times D \times [0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à t et D est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Soit

$$f^1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y^1(t, x) - \frac{\partial y^1}{\partial x} f^0(x), \quad (2.13)$$

où

$$y^1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x), \quad (2.14)$$

avec $z(x)$ est une fonction de classe C^1 telle que la moyenne de y^1 est nulle. f^0 , f^{10} et g^0 sont les fonctions moyennées de F_1 , f^1 et F_2 respectivement. Supposons que :

1. $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, F_2 et F_3 sont continues sur leurs domaines de définitions et lipschitziennes en x .
2. $|F_3(t, x, \varepsilon)|$ est uniformément bornée par une constante M dans $[0, \frac{M}{\varepsilon}) \times D \times (0, \varepsilon_0]$.

3. T est indépendante de ε .
4. $y(t) \in D$ pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y^1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

pendant un temps d'échelle $\frac{1}{\varepsilon}$.

Corollaire 2.2.1 Si les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites et de plus

$$f^0(y) = 0,$$

alors

1. Si p est le point d'équilibre du système moyenné (2.12) tel que

$$\frac{\partial}{\partial y}(f^{10}(y) + g^0(y)) \Big|_{y=p} \neq 0, \quad (2.15)$$

alors il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ de l'équation (2.11) telle que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow p \quad \text{quand} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. Si p est hyperbolique, alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique $x_\varepsilon(t)$ de (2.11) est unique, hyperbolique et de même stabilité que p .

Remarque 2.2.1

1. Si $f^0(y) = 0$, alors en coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient que $f^0(r) = 0$, d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1}{\partial r}(\theta, r) d\theta = 0.$$

Calculons f^{10} , on trouve

$$\begin{aligned} f^{10} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F_1}{\partial r}(s, r) \int_0^s F_1(\theta, r) d\theta \right) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1}{\partial r}(s, r) z(r) ds, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F_1}{\partial r}(s, r) \int_0^s F_1(\theta, r) d\theta \right) ds + \frac{z(r)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1}{\partial r}(s, r) ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$f^{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F_1}{\partial r}(s, r) \left(\int_0^s F_1(\theta, r) d\theta \right) \right) ds. \quad (2.16)$$

2. Pour $f^0(y) = 0$, on note la fonction moyennée du seconde ordre par

$$f_2(r) = f^{10}(r) + g^0(r). \quad (2.17)$$

Exemple 2.2.1 Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \varepsilon x^2 + \varepsilon^2 x^2, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon^2(x^4 + x^3 + y^3 - \frac{1}{3}y). \end{cases} \quad (2.18)$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $r > 0$, le système (2.18) devient

$$\begin{cases} \dot{r} &= \varepsilon r^2 \cos^3 \theta + \frac{\varepsilon^2}{r}(3r^3 \cos^3 \theta \sin \theta + 3r^2 \cos^4 \theta + 3r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ &+ 3r \cos^3 \theta - 6r^2 \cos^2 \theta + \cos^2 \theta + 3r^2 - 1), \\ \dot{\theta} &= -1 + \varepsilon r \cos^2 \theta \sin \theta + \varepsilon^2(r^3 \cos^5 \theta + r^2 \cos^4 \theta - r^2 \cos^3 \theta \sin \theta \\ &- r \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{1}{3} \cos \theta \sin \theta). \end{cases}$$

Considérons maintenant θ comme une variable indépendante, on obtient le système suivant

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon r^2 \cos^3 \theta + \varepsilon^2 \left(\frac{-1}{3} r (3r^3 \cos^3 \theta \sin \theta + 3r^2 \cos^4 \theta + 3r^2 \cos^3 \theta \sin \theta) + r^3 \cos^5 \theta \sin \theta \right).$$

Il est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r) + O(\varepsilon^2),$$

avec

$$F_1(\theta, r) = r^2 \cos^3 \theta,$$

et

$$F_2(\theta, r) = \left(\frac{-1}{3} r (3r^3 \cos^3 \theta \sin \theta + 3r^2 \cos^4 \theta + 3r^2 \cos^3 \theta \sin \theta) + r^3 \cos^5 \theta \sin \theta \right).$$

En appliquant maintenant le théorème 2.2.1, on calcule la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r) \theta = \frac{1}{2\pi} r^2 \cos^3 \theta d\theta = 0.$$

Puisque $f^0(r) = 0$, on peut passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux. Calculons f^1 telle que

$$f^1(r, s) = \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(s, r),$$

avec

$$y^1(s, r) = \int_0^s F_1(\theta, r) d\theta = \frac{1}{3} r^2 \sin s (\cos^2 s + 2),$$

d'où

$$f^1(s, r) = \frac{\partial F_1}{\partial r} y^1(s, r) = \frac{1}{3} r^4 \cos^3 s \sin s (\cos^2 s + 2).$$

On calcule maintenant la fonction f_2 telle que

$$f_2(r) = f^{10}(r) + g^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f^1(s, r) + F_2(s, r)) ds,$$

on obtient

$$f_2(r) = \frac{-1}{24} r (9r^2 - 4).$$

L'équation $f_2(r) = 0$ admet une seule racine positive $r = \frac{2}{3}$. Comme $f_2'(\frac{2}{3}) = \frac{-1}{3}$, donc le système (2.18) a un seul cycle limite stable d'amplitude $\frac{2}{3}$ pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit (voir Fig.(2.3)).

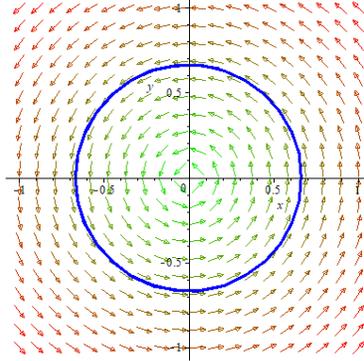


FIGURE 2.3 – Cycle limite stable pour $\varepsilon = 0.01$ du système (??).

2.3 Un autre théorème de la moyennisation du premier ordre

Théorème 2.3.1 On considère le problème de bifurcation des solutions T –périodiques du système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x, \varepsilon), \quad (2.19)$$

où $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ pour ε_0 suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \mathbb{R}^n \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2 , T –périodiques en t et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x), \quad (2.20)$$

a une sous variété des solutions périodiques de dimension k avec $k < n$.

Soit $x(t, z)$ la solution du système non perturbé (2.20) telle que $x(0, z) = z$. La linéarisation du système non perturbé (2.20) le long de la solution périodique $x(t, z)$ s'écrit

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z))y, \quad (2.21)$$

2.3. UN AUTRE THÉORÈME DE LA MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

Notons par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.21). Supposons qu'il existe un ensemble ouvert V avec $CL(V) \subset \Omega$, tel que pour chaque $z \in CL(V)$, $x(t, z, 0)$ est T -périodique, où $x(t, z, 0)$ est la solution du système non perturbé (2.20) avec $x(0, z, 0) = z$. L'ensemble $CL(V)$ est isochrone pour le système (2.19); c'est à dire il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.

On note par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées, c.à.d.

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k),$$

et par $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses $n - k$ dernières coordonnées, c.à.d.

$$\xi^\perp(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Alors on a les résultats suivants.

Théorème 2.3.2 [30] Soit V un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^k , et soit $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe C^2 . Supposons que :

- (i) $Z = z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V) \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (2.20) est T -périodique.
- (ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.21) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit une matrice $k \times (n - k)$ nulle, et dans le coin inférieur droit la matrice $\Delta_\alpha(n - k) \times (n - k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathfrak{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt\right). \quad (2.22)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathfrak{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathfrak{F}/d\alpha)(a)) = 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.19) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous donnons maintenant un résultat quand $n = k$.

Théorème 2.3.3 [30] Soit V un ensemble ouvert et borné avec $CL(V) \subset \Omega$ tel que pour chaque $z_\alpha \in CL(V)$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$, la solution $x(t, z_\alpha)$ est T -périodique.

Considérons la fonction $\mathfrak{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt. \quad (2.23)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathfrak{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathfrak{F}/d\alpha)(a)) = 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.19) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 2.3.4 [30] Supposons que $n = 2m$. Soit V un ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^m et soit $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^2 . Supposons que :

- (i) $Z = z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V) \subset \Omega$ et pour chaque $z_\alpha \in Z$ la solution $x(t, z_\alpha)$ de (2.20) est T -périodique.
- (ii) Pour chaque $z_\alpha \in Z$, il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.21) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le coin supérieur droit la matrice $\Delta_\alpha(m \times m)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$, et dans le coin inférieur droit une matrice $m \times m$ nulle.

On considère la fonction $\mathfrak{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathfrak{F}(\alpha) = \xi^\perp \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.24)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathfrak{F}(a) = 0$ et $\det((d\mathfrak{F}/d\alpha)(a)) = 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.19) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.4 Théorème de la moyennisation du premier ordre via le degré du Brouwer

La méthode de moyennisation fournit des solutions périodiques des systèmes différentiels non-autonomes en réduisant la recherche de ces solutions à la recherche des zéros d'un système moyenné équivalent qui est autonome.

En 2004, une nouvelle approche a été introduite par A. Buică et J. Llibre [8] pour la méthode de moyennisation. Ils ont utilisé des méthodes topologiques basées sur

2.4. THÉORÈME DE LA MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE VIA LE DEGRÉ DU BROUWER

le degré de Brouwer pour résoudre des équations d'opérateurs équivalentes au problème de la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel perturbé, sachant que ces équations d'opérateurs sont de dimension finie ou de dimension infinie.

Définition 2.4.1 Soient D un ouvert de \mathbb{R}^n , $g \in C^1(D)$, V est un ouvert de \mathbb{R}^n tel que $\bar{V} \subset D$ et $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$. Supposons que

$$J_g(z) \neq 0,$$

où J_g désigne le déterminant de la jacobienne de g en z , alors le degré de Brouwer de la fonction g par rapport à l'ensemble V et le point O noté $d_B(g, V, O)$ est défini par

$$d_B(g, V, O) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)).$$

Maintenant, nous allons donner un théorème de la moyennisation du premier ordre via le degré de Brouwer.

Théorème 2.4.1 [8] Soit le système différentiel

$$\dot{x}(t) = \varepsilon H(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \tag{2.25}$$

où $H : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la variable t et D est un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$h(z) = \frac{1}{T} \int_0^T H(s, z) ds. \tag{2.26}$$

Supposons que :

1. H et R sont localement lipschitziennes par rapport à la variable x .
2. Pour $a \in D$ avec $h(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(h, V, a) \neq 0$ (où $d_B(h, V, a) \neq 0$ désigne le degré de Brouwer de la fonction h dans le voisinage V de a).

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique isolée $x(t, \varepsilon)$ du système (2.25) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque 2.4.1 Soit $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 , avec $h(a) = 0$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in D$. Si $\det(Dh(a)) \neq 0$ (c.à.d le déterminant de la matrice jacobienne de la fonction h en a n'est pas nul), il existe un voisinage V de a tel que $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$ et on a $d_B(h, V, a, 0) \in \{-1, 1\}$.

Remarque 2.4.2 Les hypothèses du théorème (2.4.1) sont plus faibles que celles du théorème (2.1.1). Pour plus de détail sur le deuxième et troisième ordre voir [8].

Théorème 2.4.3 Sous les hypothèses du théorème (2.4.1), pour ε suffisamment petit la condition $\det(Dh(a)) \neq 0$ assure l'existence et l'unicité d'une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.25) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et si toutes les valeurs propres de la matrice $Dh(a)$ ont des parties réelles négatives, alors la solution $x(t, \varepsilon)$ est stable. S'il existe au moins une valeur propre de la matrice $Dh(a)$ avec une partie réelle positive, alors la solution $x(t, \varepsilon)$ est instable.

2.5 Théorie de moyennisation d'ordre un et deux dans \mathbb{R}^n

Théorème 2.5.1 [22] On considère le système différentiel suivant

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.27)$$

où $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la première variable et D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

Supposons que les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées.

- (i) F_1, F_2, R sont localement lipschitziennes par rapport à x , $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et R est différentiable par rapport à ε .

On définit $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit

$$f_1(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, f_2(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z) \right] ds. \quad (2.28)$$

- (ii) Pour $V \subset D$ un sous ensemble ouvert et pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$, il existe $a \in V$ tel que $f_1(a) + \varepsilon f_2(a) = 0$ et $d_B(f_1 + \varepsilon f_2, V, a) \neq 0$.

Alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ du système (2.27) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

L'expression $d_B(f_1 + \varepsilon f_2, V, 0)$ signifie que le degré de Brouwer de la fonction $f_1 + \varepsilon f_2$ dans un voisinage V de zéro est non nul.

Si la fonction $f_1 + \varepsilon f_2$ est de classe C^1 alors, il suffit de vérifier que $\det(D(f_1 + \varepsilon f_2(a_\varepsilon))) \neq 0$ pour avoir que $d_B(f_1 + \varepsilon f_2, V, 0) \neq 0$.

Exemple 2.5.1 On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}\varepsilon^2 x - y - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}xy^2, \\ \dot{y} = x + \frac{1}{4}\varepsilon^2 y + \frac{3}{2}x^2 y - y^3, \\ \dot{z} = \frac{3}{2}\varepsilon^2(z + x^2 y) - \frac{1}{2}z^3. \end{cases} \quad (2.29)$$

On fait le changement de variable $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, on obtient

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + (\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}X^3 + \frac{5}{4}XY^2)\varepsilon^2, \\ \dot{Y} = X + (\frac{1}{4}Y + \frac{3}{2}X^2 Y + Y^3)\varepsilon^2, \\ \dot{Z} = -\frac{1}{6}Z(2Z^2 - 9)\varepsilon^2. \end{cases} \quad (2.30)$$

En coordonnées cylindriques $(X, Y, Z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta)$, le système (2.30) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{1}{4}\rho(17\rho^2 \cos^4 \theta - 19\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2 - 1)\varepsilon^2, \\ \dot{\theta} = 1 + (\frac{17}{4}\rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta - \frac{9}{4}\rho^2 \cos \theta \sin \theta)\varepsilon^2, \\ \dot{\eta} = -\frac{1}{6}\eta(2\eta^2 - 9)\varepsilon^2. \end{cases} \quad (2.31)$$

Considérant θ comme une nouvelle variable indépendante, le système (2.31) s'écrit de la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{1}{4}\rho(17\rho^2 \cos^4 \theta - 19\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2 - 1)\varepsilon^2, \\ \frac{d\eta}{d\theta} = (-\frac{1}{6}\eta(2\eta^2 - 9)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)). \end{cases}$$

Ce dernier système est de la forme

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r, \eta) + \varepsilon^2 F_2(\theta, r, \eta) + O(\varepsilon^3),$$

où

$$F_1(\theta, r, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$F_2(\theta, r, \eta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}\rho(17\rho^2 \cos^4 \theta - 19\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2 - 1) \\ -\frac{1}{6}\eta(2\eta^2 - 9) \end{pmatrix}.$$

On calcule la fonction f_1 telle que

$$f_1(r, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, \eta) d\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule maintenant la fonction f_2 telle que

$$f_2(r, \eta) = (f_{21}(\rho, \eta), f_{22}(\rho, \eta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, \rho, \eta) d\theta,$$

car $F_1(\theta, \rho, \eta) = (0, 0)$, on obtient

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \eta) &= -\frac{1}{32}\rho(7\rho^2 - 8), \\ f_{22}(\rho, \eta) &= -\frac{1}{6}\eta(2\eta^2 - 9). \end{cases}$$

On résoud les fonctions $f_{21} = 0, f_{22} = 0$, on obtient les racines

$$\begin{aligned} (\rho_1, \eta_1) &= \left(\frac{2}{7}\sqrt{14}, 0\right), \\ (\rho_1, \eta_2) &= \left(\frac{2}{7}\sqrt{14}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ (\rho_1, \eta_3) &= \left(\frac{2}{7}\sqrt{14}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \end{aligned}$$

avec $\rho > 0$ et η un réel.

On calcule le déterminant des matrices jacobiniennes des fonctions f_{21} et f_{22} évaluées aux points (ρ_1, η_i) , pour $i = 1, \dots, 3$, on obtient

$$\begin{cases} d_{1,1} &= -\frac{3}{4} \neq 0, \\ d_{1,2} &= \frac{3}{2} \neq 0, \\ d_{1,3} &= \frac{3}{2} \neq 0. \end{cases}$$

Alors le système (2.29) a 3 cycles limites qui bifurquent de l'origine, d'après le théorème 2.5.1.

Pour étudier la stabilité de ces trois cycles limites, on calcule les valeurs propres des matrices jacobiniennes des fonctions f_{21} et f_{22} évaluées aux points (ρ_1, η_i) pour $i = 1, \dots, 3$, on trouve

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} &= \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \\ \lambda_{1,2} &= \left(-\frac{1}{2}, -3\right), \\ \lambda_{1,3} &= \left(-\frac{1}{2}, -3\right). \end{aligned}$$

Donc le cycle limite correspondant à (ρ_1, η_1) est instable et les deux autres correspondants aux (ρ_1, η_2) et (ρ_1, η_3) sont stables (voir Fig.(2.4)).

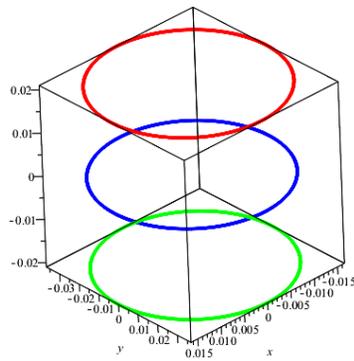


FIGURE 2.4 – 3 Cycles limites pour $\varepsilon = 0.01$ du système (2.29).

La bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels tridimensionnels

Dans ce chapitre, en utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, nous étudions l'existence des solutions périodiques qui bifurquent d'un point d'équilibre zéro-Hopf des systèmes différentiels cubiques dans \mathbb{R}^3 de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^1 \varepsilon^j X_j(x, y, z) \\ \dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^1 \varepsilon^j Y_j(x, y, z) \\ \dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^1 \varepsilon^j Z_j(x, y, z), \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z) &= a_{j0}x^3 + a_{j1}x^2y + a_{j2}x^2z + a_{j3}xy^2 + a_{j4}xyz + \\ &\quad a_{j5}xz^2 + a_{j6}y^3 + a_{j7}y^2z + a_{j8}yz^2 + a_{j9}z^3, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z)$ et $Z_j(x, y, z)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} et c_{ji} respectivement, pour $j = \overline{0, 2}$ et $i = \overline{0, 9}$. Les coefficients a_{ji} , b_{ji} , c_{ji} , a_1 , a_2 , b , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 sont des paramètres réels avec $b \neq 0$. Lorsque $\varepsilon = 0$, le système (3.1) à l'origine a les valeurs propres $\pm bi$ et 0.

3.1 Bifurcation zéro-Hopf tridimensionnelle via la théorie de la moyennisation

Dans cette partie, nous étudions l'existence des cycles limites des systèmes différentiels cubiques non linéaires (3.1).

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 3.1.1 En appliquant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, le système (3.1) a 3 cycles limites qui bifurquent de l'origine lorsque $\varepsilon = 0$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

- (a) $b \neq 0$,
- (b) $2a_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) < 0$,
- (c) $(8a_2c_{09} - 4c_2(a_{05} + b_{08}))(c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})) < 0$,
- (d) $(-4a_2(c_{02} + c_{07}) + c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))(c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})) < 0$,

3.2 Preuve

Preuve du théorème 3.1.1

Nous faisons le changement de variables $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, le système (3.1) s'écrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = -bY + (a_1X - b_1Y)\varepsilon + (a_{00}X^3 + a_{01}X^2Y + a_{02}X^2Z + a_{03}XY^2 + \\ a_{04}XYZ + a_{05}XZ^2 + a_{06}Y^3 + a_{07}Y^2Z + a_{08}YZ^2 + a_{09}Z^3 + a_2X - \\ b_2Y)\varepsilon^2 + (a_{10}X^3 + a_{11}X^2Y + a_{12}X^2Z + a_{13}XY^2 + a_{14}XYZ + \\ a_{15}XZ^2 + a_{16}Y^3 + a_{17}Y^2Z + a_{18}YZ^2 + a_{19}Z^3)\varepsilon^3 \\ \dot{Y} = bX + (b_1X - a_1Y)\varepsilon + (b_{00}X^3 + b_{01}X^2Y + b_{02}X^2Z + b_{03}XY^2 + \\ b_{04}XYZ + b_{05}XZ^2 + b_{06}Y^3 + b_{07}Y^2Z + b_{08}YZ^2 + b_{09}Z^3 + b_2X - \\ a_2Y)\varepsilon^2 + (b_{10}X^3 + b_{11}X^2Y + b_{12}X^2Z + b_{13}XY^2 + b_{14}XYZ + b_{15} \\ XZ^2 + b_{16}Y^3 + b_{17}Y^2Z + b_{18}YZ^2 + b_{19}Z^3)\varepsilon^3 \\ \dot{Z} = c_1Z\varepsilon + (c_{00}X^3 + c_{01}X^2Y + c_{02}X^2Z + c_{03}XY^2 + c_{04}XYZ + c_{05}XZ^2 + \\ c_{06}Y^3 + c_{07}Y^2Z + c_{08}YZ^2 + c_{09}Z^3 + c_2X - b_2Y)\varepsilon^2 + (c_{10}X^3 + c_{11}X^2Y + \\ c_{12}X^2Z + c_{13}XY^2 + c_{14}XYZ + c_{15}XZ^2 + c_{16}Y^3 + c_{17}Y^2Z + c_{18}YZ^2 + \\ c_{19}Z^3)\varepsilon^3 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Nous passons aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta)$, nous prenons θ comme une nouvelle variable indépendante. Le système (3.2) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \eta) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta}{d\theta} = \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \eta) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \eta) + O(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où

$$\begin{aligned}
F_{11}(\theta, \rho, \eta) &= \frac{a_1\rho}{b} \\
F_{12}(\theta, \rho, \eta) &= \frac{c_1\eta}{b} \\
F_{21}(\theta, \rho, \eta) &= \frac{1}{b} \left(\frac{-(a_1b_1)\rho}{b} - a_{07}\rho^2\eta \cos^3 \theta - b_{04}\rho^2\eta \cos^3 \theta - \right. \\
&\quad b_{0,8}\rho\eta^2 \cos^2 \theta - (b_{03} - a_{06})\rho^3 \sin \theta \cos^3 \theta + b_{07} \\
&\quad \rho^2\eta \sin \theta + b_{03}\rho^3 \cos \theta \sin \theta + a_{06}\rho^3 \cos \theta \sin \theta \\
&\quad + b_{04}\rho^2\eta \cos \theta + a_{07}\rho^2\eta \cos \theta + a_{01}\rho^3 \cos^3 \theta \\
&\quad \sin \theta + a_{02}\rho^2\eta \cos^3 \theta + a_{0,5}\rho\eta^2 \cos^2 \theta + b_{00}\rho^3 \\
&\quad \sin \theta \cos^3 \theta + \rho a_2 + b_{06}\rho^3 + b_{08}\rho\eta^2 + b_{06}\rho^3 \\
&\quad \cos^4 \theta - 2b_{06}\rho^3 \cos^2 \theta - (a_{03} + b_{01})\rho^3 \cos^4 \theta + \\
&\quad (a_{03} + b_{01})\rho^3 \cos^2 \theta + a_{09}\eta^3 \cos \theta + b_{09}\eta^3 \sin \theta + \\
&\quad a_{00}\rho^3 \cos^4 \theta + a_{08}\rho\eta^2 \cos \theta \sin \theta + b_{02}\rho^2\eta \sin \theta \\
&\quad \cos^2 \theta + b_{05}\rho\eta^2 \sin \theta \cos \theta - b_{07}^2\eta \sin \theta \cos^2 \theta + \\
&\quad \left. a_{04}\rho^2\eta \cos^2 \theta \sin \theta \right) \\
F_{22}(\theta, \rho, \eta) &= \frac{1}{b} \left(c_{00}\rho^3 \cos^3 \theta + c_{01}\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta + c_{03}\rho^3 \cos \theta \right. \\
&\quad \sin^2 \theta + c_{06}\rho^3 \sin^3 \theta + c_{02}\rho^2\eta \cos^2 \theta + c_{04}\rho^2\eta \cos \theta \\
&\quad \sin \theta + c_{07}\rho^2\eta \sin^2 \theta + c_{05}\rho\eta^2 \cos \theta + c_{08}\rho\eta^2 \sin \theta + \\
&\quad \left. c_{09}\eta^3 + c_2\eta - \frac{b_1c_1\eta}{b} \right)
\end{aligned}$$

En utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous obtenons

$$\begin{aligned}
f_{11}(\rho, \eta) &= \frac{a_1\rho}{b}, \\
f_{12}(\rho, \eta) &= \frac{c_1\eta}{b},
\end{aligned}$$

avec $b \neq 0$.

Nous résolvons ces fonctions par rapport aux variables ρ et η , nous obtenons $(\rho, \eta) = (0, 0)$. Puisque ρ est nulle, il n'y a pas de solutions périodiques. Pour passer au second ordre, nous devons donner des conditions suffisantes pour que la fonction moyennée du premier ordre soit identiquement nulle c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
c_1 &= 0
\end{aligned}$$

Nous substituons ces conditions dans F_{11}, F_{12}, F_{21} et F_{22} . Nous appliquons la théorie de moyennisation du deuxième ordre. La fonction moyennée du deuxième ordre est donnée comme suit

$$\begin{aligned} f_{21}(\rho, \eta) &= \frac{1}{8b}\rho(4(a_{05} + b_{08})\eta^2 + (3a_{00} + a_{03} + b_{0,1} + 3b_{06}) + 8a_2), \\ f_{22}(\rho, \eta) &= \frac{1}{2b}\eta(2c_{09}\eta^2 + (c_{02} + c_{07})\rho^2 + 2c_2). \end{aligned}$$

Nous résolvons le système des fonctions $f_{21}(\rho, \eta) = 0$ et $f_{22}(\rho, \eta) = 0$ par rapport à ρ et η avec $\rho > 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned} (\rho_1, \eta_1) &= \left(2\sqrt{-\frac{2a_2}{3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}}}, 0\right), \\ (\rho_2, \eta_2) &= \left(\sqrt{-\frac{8a_2c_{09} - 4c_2(a_{05} + b_{08})}{c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}}, \right. \\ &\quad \left.\sqrt{\frac{-4a_2(c_{02} + c_{07}) + c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{0,1} + 3b_{06})}{c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}}\right), \\ (\rho_2, \eta_3) &= \left(\sqrt{-\frac{8a_2c_{09} - 4c_2(a_{05} + b_{08})}{c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}}, \right. \\ &\quad \left.-\sqrt{\frac{-4a_2(c_{02} + c_{07}) + c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{0,1} + 3b_{06})}{c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}}\right). \end{aligned}$$

Ces racines sont définies si les conditions (a), (b), (c) et (d) sont vérifiées.

Nous calculons le déterminant d_k de la matrice jacobienne évaluée au point (ρ_k, Z_k) avec $k = 1, \dots, 3$, nous obtenons

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2a_2(4a_2(c_{02} + c_{07}) - c_2(3a_{0,0} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))}{(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06})b^2}, \\ d_2 &= -\frac{2(4a_2(c_{02} + c_{07}) - c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))(2a_2c_{09} - (a_{05} + b_{08})c_2)}{b^2c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}, \\ d_3 &= -\frac{2(4a_2(c_{02} + c_{07}) - c_2(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}))(2a_2c_{09} - (a_{05} + b_{08})c_2)}{b^2c_{09}(3a_{00} + a_{03} + b_{01} + 3b_{06}) - 2(a_{05} + b_{08})(c_{02} + c_{07})}. \end{aligned}$$

D'après les conditions (a), (b), (c) et (d), les déterminants d_1, d_2 and d_3 sont non-nuls. Nous déduisons qu'il y'a trois cycles limites qui bifurquent de l'origine quand $\varepsilon = 0$.

Nous considérons le système suivant comme exemple

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 x - 5y - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}xy^2, \\ \dot{y} &= 5x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 y + \frac{3}{2}x^2 y - y^3, \\ \dot{z} &= \frac{3}{2}\varepsilon^2 z - \frac{1}{3}z^3. \end{cases} \quad (3.4)$$

En faisant le changement de variables $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{X} &= -5Y + (\frac{1}{2}X - \frac{1}{2}X^3 + \frac{5}{4}XY^2)\varepsilon^2, \\ \dot{Y} &= 5X + (\frac{1}{2}Y + \frac{3}{2}X^2 Y + Y^3)\varepsilon^2, \\ \dot{Z} &= -\frac{1}{6}Z(2Z^2 - 9)\varepsilon^2, \end{cases} \quad (3.5)$$

Nous passons aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta)$, le système (3.5) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= -\frac{1}{4}\rho(17\rho^2 \cos^4 \theta - 19\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2 - 2)\varepsilon^3, \\ \dot{\theta} &= 5\varepsilon + (\frac{17}{4}\rho^2 \cos^3 \theta \sin \theta - \frac{9}{4}\rho^2 \cos \theta \sin \theta)\varepsilon^3, \\ \dot{\eta} &= (\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{3}\eta^3)\varepsilon^3. \end{cases}$$

Nous prenons θ comme une nouvelle variable indépendante, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} &= -\frac{1}{20}\rho(17\rho^2 \cos^4 \theta - 19\rho^2 \cos^2 \theta + 4\rho^2 - 2)\varepsilon^2, \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= (\frac{3}{10}\eta - \frac{1}{15}\eta^3)\varepsilon^2. \end{cases}$$

Nous appliquons la théorie de moyennisation du deuxième ordre, nous obtenons

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \eta) &= -\frac{1}{160}\rho(7\rho^2 - 16), \\ f_{22}(\rho, \eta) &= -\frac{1}{30}\eta(2\eta^2 - 9). \end{cases}$$

Nous résolvons le système des fonctions $f_{21} = 0$ et $f_{22} = 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned} (\rho_1, \eta_1) &= (\frac{4}{7}\sqrt{7}, 0), \\ (\rho_2, \eta_2) &= (\frac{4}{7}\sqrt{7}, \frac{3}{2}\sqrt{2}), \\ (\rho_2, \eta_3) &= (\frac{4}{7}\sqrt{7}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}), \end{aligned}$$

Nous calculons les déterminant de la matrice jacobienne d_i des fonctions f_{21} et f_{22} évaluée aux points $(\rho_i, \eta_i), i = 1, \dots, 3$, nous obtenons

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{3}{50}, \\ d_2 &= \frac{3}{25}, \\ d_3 &= \frac{3}{25}, \end{aligned}$$

Puisque $d_i \neq 0$, il y'a 3 cycles limites qui bifurquent de l'origine.

Nous étudions la stabilité des cycles limites selon les valeurs propres de la matrice jacobienne.

Pour (ρ_1, η_1) , les valeurs propres sont $(\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{3}{10}, -\frac{1}{5})$. Nous concluons que ce point d'équilibre est instable, donc le cycle limite associé est instable.

Pour (ρ_2, η_2) et (ρ_2, η_3) , les valeurs propres sont $(\lambda_1, \lambda_2) = (-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$. Nous concluons que ces points d'équilibre sont stables, donc les cycles limites associés sont stables.

Alors, il y'a 3 cycles limites, un est instable et deux sont stables (voir Fig.(4.1)).

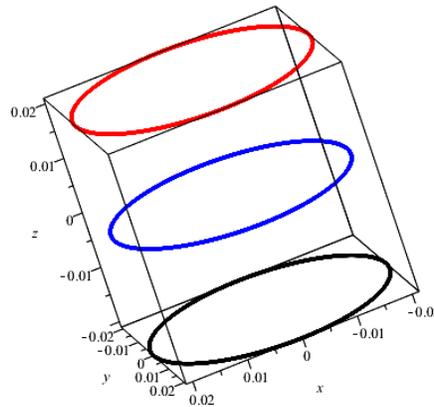


FIGURE 3.1 – 3 cycles limites du système (??) pour $\varepsilon = 10^{-2}$.

La bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux cubiques de dimension 5

En utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, nous étudions l'existence des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux cubiques dans \mathbb{R}^5 .

Dans [11], les auteurs ont étudié l'existence des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux cubiques dans \mathbb{R}^4 . Ils ont démontré qu'au moins 9 cycles limites peuvent bifurquer de l'origine.

Dans cette partie, nous étudions l'existence des cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux cubiques dans \mathbb{R}^5 de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, u, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, u, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, u, w), \\ \dot{u} = (B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^2)u + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j U_j(x, y, z, u, w), \\ \dot{w} = (A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, u, w), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où

$$\begin{aligned}
 X_j(x, y, z, u, w) = & a_{j,0}x^3 + a_{j,1}x^2y + a_{j,2}x^2z + a_{j,3}x^2u + a_{j,4}x^2w + a_{j,5}xy^2 + a_{j,6}xz^2 \\
 & + a_{j,7}xu^2 + a_{j,8}xw^2 + a_{j,9}xyz + a_{j,10}xyu + a_{j,11}xyw + a_{j,12}xzu \\
 & + a_{j,13}xzw + a_{j,14}xuw + a_{j,15}y^3 + a_{j,16}y^2z + a_{j,17}y^2u + a_{j,18}y^2w \\
 & + a_{j,19}yzu + a_{j,20}yzw + a_{j,21}yuw + a_{j,22}z^3 + a_{j,23}z^2u + a_{j,24}z^2w \\
 & + a_{j,25}uwz + a_{j,26}zu^2 + a_{j,27}zw^2 + a_{j,28}u^3 + a_{j,29}u^2w + a_{j,30}w^3 \\
 & + a_{j,31}yz^2 + a_{j,32}yu^2 + a_{j,33}yw^2 + a_{j,34}uw^2.
 \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, u, w)$, $Z_j(x, y, z, u, w)$, $U_j(x, y, z, u, w)$ et $W_j(x, y, z, u, w)$ ont la même expression que $X_j(x, y, z, u, w)$ en remplaçant a_{ji} par b_{ji} , c_{ji} , B_{ji} et A_{ji} pour $j = 0, 1, 2$ et $i = 0, 1, \dots, 34$, respectivement. Les coefficients a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , B_{ji} , A_{ij} , a_1 , a_2 , b , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , B_1 , B_2 , A_1 , A_2 sont des paramètres réels avec $b \neq 0$.

4.1 Résultats

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 4.1.1 En appliquant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, le système (4.1) admet au moins 27 cycles limites qui bifurquent de l'origine.

Preuve du théorème 4.1.1

Nous faisons le scaling $(x, y, z, u, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon U, \varepsilon W)$. Nous passons aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z, U, W) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta, \xi, \zeta)$ et nous prenons θ comme une nouvelle variable indépendante. Nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta}{d\theta} = \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\xi}{d\theta} = \varepsilon F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\zeta}{d\theta} = \varepsilon F_{14}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (4.2)$$

Le système (4.2) est écrit sous la forme (2.27) avec

$$\begin{aligned}
 x = z &= (\rho, \eta, \xi, \zeta), \\
 t &= \theta, \\
 F_1(t, x) &= (F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{14}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta)), \\
 F_2(t, x) &= (F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{24}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta)), \\
 T &= 2\pi,
 \end{aligned}$$

où

$$F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi\zeta) = \frac{\rho a_1}{b},$$

$$F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi\zeta) = \frac{\eta c_1}{b},$$

$$F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi\zeta) = \frac{\xi B_1}{b},$$

$$F_{14}(\theta, \rho, \eta, \xi\zeta) = \frac{\zeta A_1}{b},$$

$$\begin{aligned} F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi\zeta) = & \frac{1}{b} \left(-\frac{\rho a_1 b_1}{b} + b_{0,25} \xi \zeta \eta \sin \theta + b_{0,8} \rho \zeta^2 \sin \theta \cos \theta + b_{0,4} \rho^2 \zeta \cos^2 \theta \sin \theta - \right. \\ & b_{0,18} \rho^2 \zeta \sin \theta \cos^2 \theta - b_{0,16} \rho^2 \eta \sin \theta \cos \theta^2 - b_{0,17} \rho^2 \xi \sin \theta \cos \theta^2 - b_{0,20} \rho \eta \zeta \cos \theta^2 - b_{0,21} \rho \xi \zeta \cos \theta^2 - \\ & \cos \theta^2 \eta \rho \xi b_{0,19} + \cos \theta a_{0,31} \rho \sin \theta \eta^2 + \cos \theta a_{0,32} \rho \sin \theta \xi^2 + \cos \theta a_{0,33} \rho \sin \theta \zeta^2 + \cos \theta a_{0,25} \xi \zeta \eta + \\ & a_{0,9} \rho^2 \cos \theta^2 \sin \theta \eta + a_{0,10} \rho^2 \cos \theta^2 \sin \theta \xi + a_{0,11} \rho^2 \cos \theta^2 \sin \theta \zeta + a_{0,12} \rho \cos \theta^2 \eta \xi + a_{0,13} \rho \cos \theta^2 \eta \zeta + \\ & a_{0,14} \rho \cos \theta^2 \xi \zeta + \sin \theta b_{0,3} \rho^2 \cos \theta^2 \xi + \sin \theta b_{0,2} \rho^2 \cos \theta^2 \eta + \sin \theta b_{0,7} \rho \cos \theta \xi^2 + \sin \theta b_{0,6} \rho \cos \theta \eta^2 + \\ & \sin \theta b_{0,12} \rho \cos \theta \eta \xi + \sin \theta b_{0,13} \rho \cos \theta \eta \zeta + \sin \theta b_{0,14} \rho \cos \theta \xi \zeta + \cos \theta a_{0,19} \rho \sin \theta \eta \xi + \cos \theta a_{0,20} \rho \sin \theta \eta \zeta + \\ & \cos \theta a_{0,21} \rho \sin \theta \xi \zeta + \sin \theta b_{0,5} \rho^3 \cos \theta + \sin \theta b_{0,17} \rho^2 \xi + \sin \theta b_{0,16} \rho^2 \eta + \sin \theta b_{0,18} \rho^2 \zeta - \cos \theta^3 \eta \rho^2 a_{0,16} + \\ & a_{0,1} \rho^3 \cos \theta^3 \sin \theta + a_{0,8} \rho \cos \theta^2 \eta^2 + a_{0,4} \rho^2 \cos \theta^3 \zeta + a_{0,3} \rho^2 \cos \theta^3 \xi + a_{0,2} \rho^2 \cos \theta^3 \eta + \\ & a_{0,7} \rho \cos \theta^2 \xi^2 + a_{0,6} \rho \cos \theta^2 \eta^2 + \cos \theta a_{0,24} \eta^2 \zeta + \cos \theta a_{0,29} \xi^2 \zeta + \cos \theta a_{0,27} \eta \zeta^2 + \cos \theta a_{0,26} \eta \xi^2 + \\ & \cos \theta a_{0,23} \eta^2 \xi + \sin \theta b_{0,0} \rho^3 \cos \theta^3 + \sin \theta b_{0,34} \xi \zeta^2 + \sin \theta b_{0,29} \xi^2 \zeta + \sin \theta b_{0,24} \eta^2 \zeta + \sin \theta b_{0,27} \eta \zeta^2 + \\ & \sin \theta b_{0,23} \eta^2 \xi + \sin \theta b_{0,26} \eta \xi^2 + \cos \theta a_{0,34} \xi \zeta^2 - \cos \theta^3 \eta \rho^2 b_{0,9} - \cos \theta^3 \rho^2 \xi a_{0,17} - \cos \theta^3 \rho^2 \xi b_{0,10} - \\ & \cos \theta^2 \eta^2 \rho b_{0,31} - \cos \theta^2 \rho \xi^2 b_{0,32} - \zeta^2 \cos \theta^2 \rho b_{0,33} + b_{0,9} \rho^2 \cos \theta \eta + b_{0,10} \rho^2 \cos \theta \xi + b_{0,11} \rho^2 \cos \theta \zeta + \\ & \cos \theta a_{0,17} \rho^2 \xi + \cos \theta a_{0,16} \rho^2 \eta + \cos \theta a_{0,18} \rho^2 \eta - \sin \theta \cos \theta^3 \rho^3 a_{0,15} - \sin \theta \cos \theta^3 \rho^3 b_{0,5} - \\ & \zeta \cos \theta^3 \rho^2 a_{0,18} - \zeta \cos \theta^3 \rho^2 b_{0,11} + \sin \theta \cos \theta a_{0,15} \rho^3 + b_{0,19} \rho \eta \xi + b_{0,20} \rho \eta \zeta + b_{0,21} \rho \xi \zeta + \\ & a_{0,0} \rho^3 \cos \theta^4 + \cos \theta a_{0,22} \eta^3 + \cos \theta a_{0,30} \zeta^3 + \cos \theta a_{0,28} \xi^3 - 2 \cos \theta^2 \rho^3 b_{0,15} - \cos \theta^4 \rho^3 a_{0,5} - \\ & \cos \theta^4 \rho^3 b_{0,1} + \cos \theta^4 \rho^3 b_{0,15} + a_{0,5} \rho^3 \cos \theta^2 + b_{0,1} \rho^3 \cos \theta^2 + \sin \theta b_{0,28} \xi^3 + \sin \theta b_{0,30} \zeta^3 + \\ & \sin \theta b_{0,22} \eta^3 + b_{0,31} \rho \eta^2 + b_{0,32} \rho \xi^2 + b_{0,33} \rho \zeta^2 + b_{0,15} \rho^3 + \rho a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi\zeta) = & \frac{1}{b} (c_{0,28} \xi^3 + c_{0,30} \zeta^3 + \eta c_2 + c_{0,22} \eta^3 + c_{0,18} \rho^2 \zeta + \sin \theta c_{0,15} \rho^3 + c_{0,17} \rho^2 \xi + \\ & c_{0,5} \rho^3 \cos \theta + c_{0,16} \rho^2 \eta - \cos \theta^3 \rho^3 c_{0,5} + c_{0,23} \eta^2 \xi + c_{0,24} \eta^2 \zeta + c_{0,26} \eta \xi^2 + c_{0,29} \xi^2 \zeta + c_{0,0} \rho^3 \cos \theta^3 + \\ & c_{0,34} \xi \zeta^2 + c_{0,27} \eta \zeta^2 + c_{0,21} \rho \sin \theta \xi \zeta + c_{0,19} \rho \sin \theta \eta \xi + c_{0,20} \rho \sin \theta \eta \zeta + c_{0,12} \rho \cos \theta \eta \xi + \\ & c_{0,13} \rho \cos \theta \eta \zeta + c_{0,14} \rho \cos \theta \xi \zeta + c_{0,9} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \eta + c_{0,10} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \xi + c_{0,11} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \zeta - \\ & \cos \theta^2 \rho^2 \xi c_{0,17} - \zeta \cos \theta^2 \rho^2 c_{0,18} - \sin \theta \cos \theta^2 \rho^3 c_{0,15} - \cos \theta^2 \eta \rho^2 c_{0,16} - \eta \frac{c_1 b_1}{b} + c_{0,8} \rho \cos \theta \zeta^2 + \\ & c_{0,31} \rho \sin \theta \eta^2 + c_{0,1} \rho^3 \cos \theta^2 \sin \theta + c_{0,32} \rho \sin \theta \xi^2 + c_{0,33} \rho \sin \theta \zeta^2 + c_{0,4} \rho^2 \cos \theta^2 \zeta + c_{0,25} \xi \zeta \eta + \\ & c_{0,3} \rho^2 \cos \theta^2 \xi + c_{0,2} \rho^2 \cos \theta^2 \eta + c_{0,7} \rho \cos \theta \xi^2 + c_{0,6} \rho \cos \theta \eta^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi\zeta) = & \frac{1}{b} \left(-\xi \frac{B_1 b_1}{b} - \zeta \cos \theta^2 \rho^2 B_{0,18} - \cos \theta^2 \eta \rho^2 B_{0,16} - \cos \theta^2 \rho^2 \xi B_{0,17} - \right. \\ & \sin \theta \cos \theta^2 \rho^3 B_{0,15} + B_{0,25} \xi \zeta \eta + B_{0,33} \rho \sin \theta \zeta^2 + B_{0,4} \rho^2 \cos \theta^2 \zeta + B_{0,3} \rho^2 \cos \theta^2 \xi + B_{0,2} \rho^2 \cos \theta^2 \eta + \\ & B_{0,7} \rho \cos \theta \xi^2 + B_{0,6} \rho \cos \theta \eta^2 + B_{0,8} \rho \cos \theta \zeta^2 + B_{0,31} \rho \sin \theta \eta^2 + B_{0,32} \rho \sin \theta \xi^2 + B_{0,1} \rho^3 \cos \theta^2 \sin \theta + \\ & B_{0,29} \xi^2 \zeta + B_{0,24} \eta^2 \zeta + B_{0,23} \eta^2 \xi - \cos \theta^3 \rho^3 B_{0,5} + B_{0,0} \rho^3 \cos \theta^3 + B_{0,34} \xi \zeta^2 + B_{0,27} \eta \zeta^2 + \\ & B_{0,18} \rho^2 \zeta + B_{0,16} \rho^2 \eta + B_{0,5} \rho^3 \cos \theta + B_{0,17} \rho^2 \xi + B_{0,26} \eta \xi^2 + B_{0,15} \rho^3 \sin \theta + B_{0,30} \zeta^3 + B_{0,22} \eta^3 + \\ & \xi B_2 + B_{0,28} \xi^3 + B_{0,9} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \eta + B_{0,10} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \xi + B_{0,19} \rho \sin \theta \eta \xi + B_{0,20} \rho \sin \theta \eta \zeta + \end{aligned}$$

$$B_{0,21}\rho \sin \theta \xi \zeta + B_{0,12}\rho \cos \theta \eta \xi + B_{0,13}\rho \cos \theta \eta \zeta + B_{0,14}\rho \cos \theta \xi \zeta + B_{0,11}\rho^2 \cos \theta \sin \theta \zeta),$$

$$\begin{aligned} F_{24}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) = & \frac{1}{b}(A_{0,10}\rho^2 \cos \theta \sin \theta \xi + A_{0,11}\rho^2 \cos \theta \sin \theta \zeta + A_{0,9}\rho^2 \cos \theta \sin \theta \eta + \\ & A_{0,20}\rho \sin \theta \eta \zeta + A_{0,21}\rho \sin \theta \xi \zeta + A_{0,12}\rho \cos \theta \eta \xi + A_{0,13}\rho \cos \theta \eta \zeta + A_{0,14}\rho \cos \theta \xi \zeta + A_{0,19}\rho \sin \theta \eta \xi - \\ & \cos \theta^2 \rho^2 \xi A_{0,17} - \sin \theta \cos \theta^2 \rho^3 A_{0,15} - \zeta \cos \theta^2 \rho^2 A_{0,18} - \cos \theta^2 \eta \rho^2 A_{0,16} - \zeta \frac{A_1 b_1}{b} + A_{0,8}\rho \cos \theta \zeta^2 + \\ & A_{0,31}\rho \sin \theta \eta^2 + A_{0,32}\rho \sin \theta \xi^2 + A_{0,33}\rho \sin \theta \zeta^2 + A_{0,4}\rho^2 \cos \theta^2 \zeta + A_{0,3}\rho^2 \cos \theta^2 \xi + A_{0,25}\xi \zeta \eta + \\ & A_{0,2}\rho^2 \cos \theta^2 \eta + A_{0,7}\rho \cos \theta \xi^2 + A_{0,6}\rho \cos \theta \eta^2 + A_{0,5}\rho^3 \cos \theta - \cos \theta^3 \rho^3 A_{0,5} + A_{0,17}\rho^2 \xi + \\ & A_{0,1}\rho^3 \cos \theta^2 \sin \theta + A_{0,22}\eta^3 + A_{0,28}\xi^3 + A_{0,30}\zeta^3 + \zeta * A_2 + A_{0,27}\eta \zeta^2 + A_{0,34}\xi \zeta^2 + A_{0,0}\rho^3 \cos \theta^3 + \\ & A_{0,23}\eta^2 \xi + A_{0,26}\eta \xi^2 + A_{0,15}\rho^3 \sin \theta + A_{0,18}\rho^2 \zeta + A_{0,29}\xi^2 \zeta + A_{0,24}\eta^2 \zeta + A_{0,16}\rho^2 \eta). \end{aligned}$$

Nous calculons la fonction moyennée du premier ordre $f_1 = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14})$ de la forme

$$f_{1i}(\rho, \eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{1i}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) d\theta.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} f_{11}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{a_1 \rho}{b}, \\ f_{12}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{c_1 \eta}{b}, \\ f_{13}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{B_1 \xi}{b}, \\ f_{14}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{A_1 \zeta}{b}. \end{aligned}$$

Nous résolvons le système des fonctions moyennées

$$\begin{aligned} f_{11}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= 0, \\ f_{12}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= 0, \\ f_{13}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= 0, \\ f_{14}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= 0. \end{aligned}$$

L'unique zéro de ce système est $(\rho^*, \eta^*, \xi^*, \zeta^*) = (0, 0, 0, 0)$. Comme ρ est nulle, la méthode de moyennisation du premier ordre ne peut pas fournir d'information sur l'existence des cycles limites. Pour passer au second ordre, nous mettons la fonction moyennée du premier ordre nulle en prenant $a_1 = c_1 = B_1 = A_1 = 0$. Nous calculons la fonction moyennée du deuxième ordre de la formule (2.28).

Nous avons $f_2 = (f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}) = (f_{21}(\rho, \eta, \xi, \zeta), f_{22}(\rho, \eta, \xi, \zeta), f_{23}(\rho, \eta, \xi, \zeta), f_{24}(\rho, \eta, \xi, \zeta))$ donnée comme suit

$$\begin{aligned}
 f_{21} &= \frac{\rho}{8b}(I_1\rho^2 + I_2\eta^2 + I_3\xi^2 + I_4\zeta^2 + I_5\eta\xi + I_6\eta\zeta + I_7\xi\zeta + 8a_2), \\
 f_{22} &= \frac{1}{2b}(J_1\eta^3 + J_2\xi^3 + J_3\zeta^3 + J_4\eta^2\xi + J_5\eta^2\zeta + J_6\eta\rho^2 + J_7\eta\xi^2 \\
 &\quad + J_8\eta\zeta^2 + J_9\eta\xi\zeta + J_{10}\xi^2\zeta + J_{11}\xi\rho^2 + J_{12}\xi\zeta^2 + J_{13}\zeta\rho^2 + 2c_2\eta), \\
 f_{23} &= \frac{1}{2b}(K_1\eta^3 + K_2\xi^3 + K_3\zeta^3 + K_4\eta^2\xi + K_5\eta^2\zeta + K_6\eta\rho^2 + K_7\eta\xi^2 \\
 &\quad + K_8\eta\zeta^2 + K_9\eta\xi\zeta + K_{10}\xi^2\zeta + K_{11}\xi\rho^2 + K_{12}\xi\zeta^2 + K_{13}\zeta\rho^2 + 2B_2\eta), \\
 f_{24} &= \frac{1}{2b}(L_1\eta^3 + L_2\xi^3 + L_3\zeta^3 + L_4\eta^2\xi + L_5\eta^2\zeta + L_6\eta\rho^2 + L_7\eta\xi^2 \\
 &\quad + L_8\eta\zeta^2 + L_9\eta\xi\zeta + L_{10}\xi^2\zeta + L_{11}\xi\rho^2 + L_{12}\xi\zeta^2 + L_{13}\zeta\rho^2 + 2A_2\eta),
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 3(a_{00} + b_{015}) + a_{05} + b_{01}, & I_2 &= 4(a_{06} + b_{031}), \\
 I_3 &= 4(a_{07} + b_{032}), & I_4 &= 4(a_{08} + b_{033}), \\
 I_5 &= 4(a_{012} + b_{019}), & I_6 &= 4(a_{013} + b_{020}), \\
 I_7 &= 4(a_{014} + b_{021}), & J_1 &= 2c_{022}, \\
 J_2 &= 2c_{028}, & J_3 &= 2c_{030}, \\
 J_4 &= 2c_{023}, & J_5 &= 2c_{024}, \\
 J_6 &= c_{02} + c_{016}, & J_7 &= 2c_{026}, \\
 J_8 &= 2c_{027}, & J_9 &= 2c_{025}, \\
 J_{10} &= 2c_{029}, & J_{11} &= c_{03} + c_{017}, \\
 J_{12} &= 2c_{034}, & J_{13} &= c_{04} + c_{018}, \\
 K_1 &= 2B_{022}, & K_2 &= 2B_{028}, \\
 K_3 &= 2B_{030}, & K_4 &= 2B_{023}, \\
 K_5 &= 2B_{024}, & K_6 &= B_{02} + B_{016}, \\
 K_7 &= 2B_{026}, & K_8 &= 2B_{027}, \\
 K_9 &= 2B_{025}, & & \\
 K_{10} &= 2B_{029}, & K_{11} &= B_{03} + B_{017}, \\
 K_{12} &= 2B_{034}, & K_{13} &= B_{04} + B_{018}, \\
 L_1 &= 2A_{022}, & L_2 &= 2A_{028}, \\
 L_3 &= 2A_{030}, & L_4 &= 2A_{023}, \\
 L_5 &= 2A_{024}, & L_6 &= A_{02} + A_{016}, \\
 L_7 &= 2A_{026}, & L_8 &= 2A_{027}, \\
 L_9 &= 2A_{025}, & L_{10} &= 2A_{029}, \\
 L_{11} &= A_{03} + A_{017}, & L_{12} &= 2A_{034}, \\
 L_{13} &= A_{04} + A_{018}.
 \end{aligned}$$

Nous résolvons le système des fonctions

$$f_{21}(\rho, \eta, \xi, \zeta) = 0,$$

$$f_{22}(\rho, \eta, \xi, \zeta) = 0,$$

$$\begin{aligned} f_{23}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= 0, \\ f_{24}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= 0, \end{aligned}$$

par rapport aux variables ρ , η , ξ et ζ .

D'abord, nous isolons ρ^2 de l'équation $f_{21}(\rho, \eta, \xi) = 0$, nous obtenons

$$\rho^2 = -\frac{I_2\eta^2 + I_3\xi^2 + I_4\zeta^2 + I_5\eta\xi + I_6\eta\zeta + I_7\xi\zeta + 8a_2}{I_1}$$

avec $I_1 \neq 0$.

Ensuite, nous substituons ρ^2 dans $f_{2i}(\rho, \eta, \xi) = 0$ pour $i = 2, 3, 4$. Alors, nous obtenons les polynômes $(g_1(\eta, \xi, \zeta), g_2(\eta, \xi, \zeta), g_3(\eta, \xi, \zeta))$ donnés par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} g_1(\eta, \xi, \zeta) &= U_1\eta^3 + U_2\xi\eta^2 + U_3\zeta\eta^2 + U_4\xi^2\eta + U_5\xi\zeta\eta + U_6\zeta^2\eta + U_7\eta + U_8\xi^3 \\ &\quad U_9\xi^2\zeta + U_{10}\zeta^2\xi + U_{11}\xi + U_{12}\zeta^3 + U_{13}\zeta = 0, \\ g_2(\eta, \xi, \zeta) &= V_1\eta^3 + V_2\xi\eta^2 + V_3\zeta\eta^2 + V_4\xi^2\eta + V_5\xi\zeta\eta + V_6\zeta^2\eta + V_7\eta + V_8\xi^3 \\ &\quad V_9\xi^2\zeta + V_{10}\zeta^2\xi + V_{11}\xi + V_{12}\zeta^3 + V_{13}\zeta = 0, \\ g_3(\eta, \xi, \zeta) &= W_1\eta^3 + W_2\xi\eta^2 + W_3\zeta\eta^2 + W_4\xi^2\eta + W_5\xi\zeta\eta + W_6\zeta^2\eta + W_7\eta + W_8\xi^3 \\ &\quad W_9\xi^2\zeta + W_{10}\zeta^2\xi + W_{11}\xi + W_{12}\zeta^3 + W_{13}\zeta = 0, \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Bezout, le système $g_1(\eta, \xi, \zeta) = 0$, $g_2(\eta, \xi, \zeta) = 0$ et $g_3(\eta, \xi, \zeta) = 0$ a au plus 27 solutions. Comme $\rho > 0$, nous déduisons qu'il y'a au moins 27 cycles limites qui bifurquent de l'origine.

4.2 Application

Dans cette partie, nous donnons un système de la même forme du système (4.1). Nous prouvons que le nombre de cycles limites de ce système est atteint. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{2}\varepsilon^2x - 5y - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}xy^2, \\ \dot{y} &= 5x + \frac{1}{2}\varepsilon^2y + \frac{3}{2}x^2y - y^3, \\ \dot{z} &= \frac{3}{2}\varepsilon^2z - \frac{1}{3}z^3, \\ \dot{u} &= -\frac{3}{2}\varepsilon^2u + \frac{1}{3}u^3, \\ \dot{w} &= \frac{3}{2}\varepsilon^2w - \frac{1}{3}w^3. \end{cases} \quad (4.3)$$

En faisant le changement de variables $(x, y, z, u, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon U, \varepsilon W)$, passant aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z, U, W) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta, \xi, \zeta)$ et prenant θ

comme une nouvelle variable indépendante, nous obtenons la fonction $F_2(\rho, \eta, \xi, \zeta) = (F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{24})$ écrite de la forme suivante

$$\begin{aligned} F_{21}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= -\frac{1}{10}\rho(6\rho^2 \cos^4 \theta - 7 \cos^2 \theta^2 \rho^2 + 2\rho^2 - 1)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ F_{22}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{30}\eta(6 \cos^2 \theta^2 \rho^2 - 2\eta^2 + 9)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ F_{23}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{30}\xi(2\xi^2 - 9)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ F_{24}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= -\frac{1}{30}\zeta(2\zeta^2 - 9)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Nous appliquons la méthode de moyennisation du deuxième ordre, nous trouvons

$$\begin{aligned} f_{21}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= -\frac{1}{40}\rho(3\rho^2 - 4), \\ f_{22}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= -\frac{1}{30}\eta(2\eta^2 - 3\rho^2 - 9), \\ f_{23}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{30}\xi(2\xi^2 - 9), \\ f_{24}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= -\frac{1}{30}\zeta(2\zeta^2 - 9). \end{aligned}$$

Nous résolvons ce système de fonctions par rapport aux variables ρ, η, ξ et ζ , nous obtenons les racines $z_i = (\rho_i^*, \eta_i^*, \xi_i^*, \zeta_i^*)$ avec $\rho_i^* > 0$. Pour $i = 1, \dots, 27$, ces racines sont données comme suit

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, 0\right), & z_2 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\ z_3 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_4 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, 0, 0\right), \\ z_5 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, 0, 0\right), & z_6 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\ z_7 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_8 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\ z_9 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{10} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{11} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{12} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{13} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{14} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{15} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{16} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{17} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{18} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{19} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{20} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{21} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{22} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{23} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{26}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{24} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{25} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right), & z_{26} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right), \\ z_{27} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{26}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Le déterminant

$$\det \left(\frac{\partial(f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24})}{\partial(\rho, \eta, \xi, \zeta)} \Big|_{(\rho, \eta, \xi, \zeta) = (\rho^*, \eta^*, \xi^*, \zeta^*)} \right) \quad (4.4)$$

est égal à $\frac{39}{5000}, -\frac{39}{2500}, \pm \frac{39}{1250}, -\frac{39}{625}$.

Comme le déterminant est différent de zéro, alors le système (4.3) admet 27 cycles limites qui bifurquent de l'origine.

La bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux de dimension n

En utilisant la théorie de la moyennisation du deuxième ordre, nous étudions l'existence des cycles limites qui bifurquent à partir d'un point d'équilibre zéro-Hopf d'un champs de vecteurs avec des polynômes non-linéaires cubiques dans \mathbb{R}^n . Nous prouvons qu'il y a au moins 3^{n-2} cycles limites bifurquants à partir de tels points d'équilibre zéro-Hopf. De plus, nous donnons un exemple en dimension 6 montrant que ce nombre de cycles limites est atteint. Ce chapitre fait l'objet d'une publication dans le journal "Journal of Dynamical and Control Systems".

S. Kassa, J.llibre and A. Makhoulf, n -dimensional zero-Hopf bifurcation of polynomial differential systems via averaging theory of second order, JDCS,2020.

5.1 La Bifurcation zéro-Hopf des systèmes différentiels polynomiaux de dimension n par la théorie de moyennisation du deuxième ordre

Dans ce chapitre, notre objectif est d'étudier l'existence des solutions périodiques qui bifurquent à partir d'un point d'équilibre zéro-Hopf des systèmes différentiels dans \mathbb{R}^n avec des polynômes non-linéaires cubiques en utilisant la théorie de la moyennisation du deuxième ordre.

J. llibre et X. Zhang[25] ont étudié la bifurcation de Hopf dans la dimension $n > 2$, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Ils ont prouvé qu'au moins 2^{n-3} cycles limites peuvent bifurquer à partir d'un point d'équilibre avec des valeurs propres $\pm bi$ et $n - 2$ zéros, c'est-à-dire d'un point d'équilibre zéro-Hopf de \mathbb{R}^n . Ils ont prouvé pour la première fois que le nombre de cycles limites bifurqués dans une bifurcation Hopf peut croître de façon exponentielle avec la dimension du système.

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION n PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

Dans cette partie, nous étudions l'existence des cycles limites qui bifurquent de l'origine des systèmes différentiels polynomiaux cubiques dans \mathbb{R}^n de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{j,i_1,\dots,i_n} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \\ \dot{z}_k = (c_1^{(k)}\varepsilon + c_2^{(k)}\varepsilon^2)z_k + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} x^{i_1} y^{i_2} z_3^{i_3} \dots z_n^{i_n}, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où $k = 3, \dots, n$. $a_1, a_2, b, b_1, b_2, a_{j,i_1,\dots,i_n}, b_{j,i_1,\dots,i_n}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}$ et $c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)}$ sont des paramètres réels, ε est un paramètre suffisamment petit et $b \neq 0$. Pour $\varepsilon = 0$, le système (5.1) a les valeurs propres $\pm bi$ et $n - 2$ zéros. Ainsi l'origine est un point d'équilibre zero-Hopf.

Notre résultat principal est le suivant

Théorème 5.1.1 Considérons le système différentiel (5.1) dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$. En appliquant la méthode de moyennisation du deuxième ordre à ces systèmes, ils peuvent avoir au moins 3^{n-2} cycles limites qui bifurquent à partir du point d'équilibre zéro-Hopf localisé à l'origine des coordonnées lorsque $\varepsilon = 0$.

Dans le corollaire suivant, nous fournissons un système différentiel dans \mathbb{R}^6 ayant le nombre maximum de cycles limites indiqué dans le théorème (3.1.1).

Preuve du théorème 5.1.1

Considérons le système différentiel polynomial non linéaire cubique (5.1) dans \mathbb{R}^n . Faisons le scaling $(x, y, z_3, \dots, z_n) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z_3, \dots, \varepsilon Z_n)$, le système (5.1) devient

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)X - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)Y + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} \varepsilon^{i_1+\dots+i_n} \\ \quad X^{i_1} Y^{i_2} Z_3^{i_3} \dots Z_n^{i_n}, \\ \dot{Y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)X + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)Y + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} \varepsilon^{i_1+\dots+i_n} b_{j,i_1,\dots,i_n} \\ \quad X^{i_1} Y^{i_2} Z_3^{i_3} \dots Z_n^{i_n}, \\ \dot{Z}_k = (c_1^{(k)}\varepsilon + c_2^{(k)}\varepsilon^2)Z_k + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} \varepsilon^{i_1+\dots+i_n} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} \\ \quad X^{i_1} Y^{i_2} Z_3^{i_3} \dots Z_n^{i_n}, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

pour $k = 3, \dots, n$.

Comme nous avons $i_1 + \dots + i_n = 3$, alors $\varepsilon^{i_1+\dots+i_n} = \varepsilon^3$. nous écrivons le système (5.2) comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)X - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)Y + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} X^{i_1} Y^{i_2} Z_3^{i_3} \dots Z_n^{i_n}, \\ \dot{Y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)X + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)Y + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{j,i_1,\dots,i_n} X^{i_1} Y^{i_2} Z_3^{i_3} \dots Z_n^{i_n}, \\ \dot{Z}_k = (c_1^{(k)}\varepsilon + c_2^{(k)}\varepsilon^2)Z_k + \varepsilon^2 \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} X^{i_1} Y^{i_2} Z_3^{i_3} \dots Z_n^{i_n}, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

pour $k = 3, \dots, n$.

Nous passons aux coordonnées cylindriques $(X, Y, Z_3, \dots, Z_n) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta_3, \dots, \eta_n)$, le système (5.3) devient

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\rho} = a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2 \left(\cos \theta \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right. \\ \quad \left. + \sin \theta \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{j,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + a_2 \rho \right), \\ \dot{\theta} = \frac{1}{\rho} \left(b \rho + b_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2 \cos \theta \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{j,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right. \\ \quad \left. - \sin \theta \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{j,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + b_2 \right), \\ \dot{\eta}_k = c_1^{(k)} \varepsilon \eta_k + \varepsilon^2 \left(\sum_{j=0}^2 \varepsilon^j \sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(k)} \eta_k \right), \end{array} \right. \quad (5.4)$$

où $k = 3, \dots, n$.

Nous prenons θ comme une nouvelle variable indépendante au voisinage de $(\rho, z_3, \dots, z_n) = (0, 0, \dots, 0)$, le système (5.4) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\varepsilon a_1}{b} \rho + \frac{\varepsilon^2}{b} \left(\cos \theta \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{0,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right. \\ \quad \left. + \sin \theta \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{0,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + a_2 \rho - \frac{a_1 b_1}{b} \right) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta_k}{d\theta} = \frac{\varepsilon c_1^{(k)}}{b} \eta_k + \frac{\varepsilon^2}{b} \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{j,i_1,\dots,i_n}^{(k)} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(k)} \eta_k \right. \\ \quad \left. - \frac{c_1^{(k)} b_1}{b} \right) + O(\varepsilon^3), \end{array} \right. \quad (5.5)$$

où $k = 3, \dots, n$.

Le système (5.5) est sous la forme standard de théorie de moyennisation.

Nous utilisons les notations du théorème 2.5.1, c'est-à-dire

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

$$\begin{aligned}
 x = z &= (\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n), \\
 t &= \theta, \\
 F_1(t, x) &= (F_{11}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n), F_{12}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n), F_{13}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n), \\
 &\quad \dots, F_{1(n-1)}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n)), \\
 F_2(t, x) &= (F_{21}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n), F_{22}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n), F_{23}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n), \\
 &\quad \dots, F_{2(n-1)}(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n)), \\
 T &= 2\pi,
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \left(\frac{a_1}{b} \rho, \frac{c_1^{(3)}}{b} \eta_3, \dots, \frac{c_1^{(n)}}{b} \eta_n \right) \\
 F_2 &= \left(\frac{1}{b} (\cos \theta \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{0,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \theta \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{0,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + a_2 \rho - \frac{a_1 b_1}{b} \right), \\
 &\quad \frac{1}{b} \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{0,i_1,\dots,i_n}^{(3)} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(3)} - \frac{c_1^{(3)} b_1}{b} \right), \dots, \\
 &\quad \frac{1}{b} \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{0,i_1,\dots,i_n}^{(n)} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(n)} - \frac{c_1^{(n)} b_1}{b} \right),
 \end{aligned}$$

avec $k = 3, \dots, n$.

Nous calculons la fonction moyennée du premier ordre f_1 telle que

$$f_1(\rho, \eta_3, \dots, \eta_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n) d\theta,$$

et nous obtenons

$$f_1(\rho, \eta_3, \dots, \eta_n) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{b} \rho \\ \frac{c_1^{(3)}}{b} \eta_3 \\ \vdots \\ \frac{c_1^{(n)}}{b} \eta_n \end{pmatrix},$$

Nous résolvons le système des fonctions $f_1(\rho, \eta_3, \dots, \eta_n) = (0, 0, \dots, 0)$ par rapport à $\rho, \eta_3, \dots, \eta_n$.

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

L'unique zéro de ce système des fonctions est $(\rho, \eta_3, \dots, \eta_n) = (0, 0, \dots, 0)$. Alors la théorie de la moyennisation du premier ordre ne peut pas fournir d'informations sur l'existence des solutions périodiques. Pour passer au deuxième ordre, nous rendons la première fonction moyennée identiquement nulle, c'est-à-dire nous prenons $a_1 = c_1^{(k)} = 0$ pour $k = 3, \dots, n$.

Nous calculons la fonction moyennée du deuxième ordre en utilisant la formule (2.28), nous obtenons

$$f_2(\rho, \eta_3, \dots, \eta_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n) d\theta,$$

car $F_1(\theta, \rho, \eta_3, \dots, \eta_n) = (0, 0, \dots, 0)$, avec

$$\begin{aligned} f_{21}(\rho, \eta_3, \dots, \eta_n) &= \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta \sum_{i_1+\dots+i_n=3} a_{0,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \sum_{i_1+\dots+i_n=3} b_{0,i_1,\dots,i_n} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + a_2 \rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi b} I_1, \\ f_{2k}(\rho, \eta_3, \dots, \eta_n) &= \frac{1}{2\pi b} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=3} c_{0,i_1,\dots,i_n}^{(k)} (\rho \cos \theta)^{i_1} (\rho \sin \theta)^{i_2} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(k)} \eta_k \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi b} I_2, \end{aligned}$$

où $k = 3, \dots, n$, avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \left[\rho^3 ((a_{0,1,2,0,\dots,0} + b_{0,2,1,0,\dots,0}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + a_{0,3,0,\dots,0} \cos^4 \theta + b_{0,0,3,0,\dots,0} \sin^4 \theta) \right. \\ &\quad \left. + \rho \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=2} a_{0,1,0,i_3,\dots,i_n} \cos^2 \theta \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + \sum_{i_1+\dots+i_n=2} b_{0,0,1,i_3,\dots,i_n} \sin^2 \theta \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + a_2 \right) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{4} \pi (a_{0,1,2,0,\dots,0} + b_{0,2,1,0,\dots,0} + 3(a_{0,3,0,\dots,0} + b_{0,0,3,0,\dots,0})) \rho^3 \\ &\quad + \pi \left(2a_2 + \sum_{i_1+\dots+i_n=2} a_{0,1,0,i_3,\dots,i_n} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + \sum_{i_1+\dots+i_n=2} b_{0,0,1,i_3,\dots,i_n} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right) \rho, \end{aligned}$$

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

et

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 \left(\sum_{i_3+\dots+i_n=1} c_{0,2,0,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \cos^2 \theta \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + \sum_{i_3+\dots+i_n=1} c_{0,0,2,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \sin^2 \theta \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i_3+\dots+i_n=3} c_{0,0,0,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(k)} \eta_k \right] d\theta \\
 &= \pi \left(\rho^2 \left(\sum_{i_3+\dots+i_n=1} c_{0,2,0,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + \sum_{i_3+\dots+i_n=1} c_{0,0,2,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{i_3+\dots+i_n=3} c_{0,0,0,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(k)} \eta_k \right),
 \end{aligned}$$

avec $k = 3, \dots, n$.

Alors la fonction moyennée du deuxième ordre est donnée comme suit

$$\begin{aligned}
 f_{21} &= \frac{\rho}{8b} \left[8a_2 + (a_{0,1,2,0,\dots,0} + b_{0,2,1,0,\dots,0} + 3(a_{0,3,0,\dots,0} + b_{0,0,3,0,\dots,0})) \rho^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i_1+\dots+i_n=2} a_{0,1,0,i_3,\dots,i_n} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + \sum_{i_1+\dots+i_n=2} b_{0,0,1,i_3,\dots,i_n} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right], \\
 f_{2k} &= \frac{1}{2b} \left(\rho^2 \left(\sum_{i_3+\dots+i_n=1} c_{0,2,0,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + \sum_{i_3+\dots+i_n=1} c_{0,0,2,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{i_3+\dots+i_n=3} c_{0,0,0,i_3,\dots,i_n}^{(k)} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + c_2^{(k)} \eta_k \right),
 \end{aligned}$$

où $k = 3, \dots, n$.

Nous résolvons le système des fonctions moyennées du deuxième ordre par rapport à $\rho, \eta_3, \dots, \eta_n$.

D'abord, nous isolons ρ^2 de $f_{21} = 0$, nous obtenons

$$\rho^2 = - \frac{8a_2 + \sum_{i_1+\dots+i_n=2} a_{0,1,0,i_3,\dots,i_n} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n} + \sum_{i_1+\dots+i_n=2} b_{0,0,1,i_3,\dots,i_n} \eta_3^{i_3} \dots \eta_n^{i_n}}{a_{0,1,2,0,\dots,0} + b_{0,2,1,0,\dots,0} + 3(a_{0,3,0,\dots,0} + b_{0,0,3,0,\dots,0})}.$$

Ensuite, nous substituons ρ^2 dans $f_{2k} = 0$ pour $k = 3, \dots, n$. En utilisant le théorème de Bezout, nous déduisons que ces fonctions admettent au plus 3^{n-2} zéros réels (ρ^*, η_k^*) pour $k = 1, \dots, 3^{n-2}$. Puisque les coefficients du système $f_{2k} = 0$ sont indépendants, nous pouvons prendre ces 3^{n-2} zéros réels avec ρ positive. Par conséquent, en remontant les changements de coordonnées, ces zéros fournissent au moins 3^{n-2} solutions périodiques qui bifurquent du point d'équilibre zéro-Hopf à l'origine des coordonnées. Notant que puisque le nombre de zéros est le nombre maximum fourni

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

par le théorème de Bezout, les déterminants

$$\det \left(\frac{\partial(f_{21}, f_{2k})}{\partial(\rho, \eta_k)} \Big|_{(\rho, \eta_k) = (\rho^*, \eta_k^*)} \right)$$

ne sont pas nuls $k = 1, \dots, 3^{n-2}$.

Application

Considérons le système différentiel cubique

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 x - y - \frac{1}{3}x^3, \\ \dot{y} = x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 y + \frac{3}{2}x^2 y - y^3, \\ \dot{z}_3 = \frac{3}{2}\varepsilon^2(z_3 + x^2 y) - \frac{1}{2}z_3^3, \\ \dot{z}_4 = -\varepsilon^2 z_4 + \frac{1}{3}z_4^3, \\ \dot{z}_5 = \frac{3}{2}\varepsilon^2 z_5 - \frac{1}{3}z_5^3, \\ \dot{z}_6 = \frac{1}{4}\varepsilon^2 z_6 - z_6^3 + \varepsilon(-z_6^3 + x^3 + y^3). \end{cases} \quad (5.6)$$

En faisant le scaling, passant aux coordonnées cylindriques $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6)$ et prenant θ comme une nouvelle variable indépendante, nous obtenons les fonctions $F_{2j}(\theta, \rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6)$ pour $j = 1, \dots, 5$

$$\begin{cases} F_{21}(\theta, \rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6) = -\frac{1}{2}\rho(\rho^2(6 \cos^4 \theta - 7 \cos^2 \theta + 2) - 1), \\ F_{22}(\theta, \rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6) = -\frac{1}{3}\eta_3(2\eta_3^2 - 9), \\ F_{23}(\theta, \rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6) = \frac{1}{3}\eta_4(\eta_4^2 - 3), \\ F_{24}(\theta, \rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6) = -\frac{1}{6}\eta_5(2\eta_5^2 - 9), \\ F_{25}(\theta, \rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6) = -\eta_6^3 + \frac{1}{4}\eta_6. \end{cases}$$

En intégrant ces fonctions de 0 à 2π , nous obtenons les fonctions moyennées du deuxième ordre $f_{2j}(\rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6)$

$$\begin{cases} f_{21} = -\frac{1}{8}\rho(3\rho^2 - 4), \\ f_{22} = -\frac{1}{6}\eta_3(2\eta_3^2 - 9), \\ f_{23} = \frac{1}{3}\eta_4(\eta_4^2 - 3), \\ f_{24} = -\frac{1}{6}\eta_5(2\eta_5^2 - 9), \\ f_{25} = -\frac{1}{4}\eta_6(4\eta_6^2 - 1). \end{cases}$$

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

Nous résolvons les fonctions $(f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}) = (0, 0, 0, 0, 0)$ par rapport à $\rho, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ et η_6 , nous obtenons 81 racines $z_i = (\rho_i^*, \eta_i^{j*})$ avec $\rho_i^* > 0$ pour $i = 1, \dots, 81$ et $j = 3, \dots, 6$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, 0, 0\right), & z_2 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_3 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_4 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 0, 0\right), \\
 z_5 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, 0, 0\right), & z_6 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_7 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_8 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_9 &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{10} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0, 0\right), \\
 z_{11} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0, 0\right), & z_{12} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_{13} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{14} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_{15} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{16} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, 0\right), \\
 z_{17} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, 0\right), & z_{18} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0, 0\right), \\
 z_{19} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0, 0\right), & z_{20} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_{21} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{22} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_{23} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{24} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_{25} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{26} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), \\
 z_{27} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0\right), & z_{28} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \\
 z_{29} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}\right), & z_{30} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), \\
 z_{31} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), & z_{32} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right), \\
 z_{33} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right), & z_{34} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 0, \frac{1}{2}\right), \\
 z_{35} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2}\right), & z_{36} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right), \\
 z_{37} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right), & z_{38} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), \\
 z_{39} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), & z_{40} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), \\
 z_{41} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), & z_{42} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\right),
 \end{aligned}$$

5.1. LA BIFURCATION ZÉRO-HOPF DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS
POLYNOMIAUX DE DIMENSION N PAR LA THÉORIE DE
MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

$$\begin{aligned}
 z_{43} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), & z_{44} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{45} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), & z_{46} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{47} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right), & z_{48} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{49} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, 0, -\frac{1}{2} \right), & z_{50} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{51} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), & z_{52} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{53} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), & z_{54} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{55} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), & z_{56} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{57} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), & z_{58} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{59} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, \frac{1}{2} \right), & z_{60} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{61} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0, \frac{1}{2} \right), & z_{62} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{63} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2} \right), & z_{64} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{65} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2} \right), & z_{66} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{67} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), & z_{68} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{69} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), & z_{70} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{71} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), & z_{72} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), \\
 z_{73} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} \right), & z_{74} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{75} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), & z_{76} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{77} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), & z_{78} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{79} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), & z_{80} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right), \\
 z_{81} &= \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Les déterminants

$$\det \left(\frac{\partial(f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25})}{\partial(\rho, \eta^j)} \Big|_{(\rho, \eta^j) = (\rho_i^*, \eta_i^{j*})} \right) \quad (5.7)$$

qui correspondent aux racines sont : $\frac{9}{16}, -\frac{9}{8}, \frac{9}{4}, -\frac{9}{8}, -\frac{9}{2}$ et 9. Tous ces déterminants sont non nuls. Il y'a donc 81 cycles limites qui bifurquent à partir d'un point d'équilibre zéro-Hopf localisé à l'origine des coordonnées.

Cycles limites d'un système différentiel continu tridimensionnel

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence des cycles limites qui bifurquent à partir d'un point d'équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel Lipschitzien tridimensionnel. Cette étude a fait l'objet d'une publication internationale intitulée "**Limit cycles bifurcating from a zero-Hopf equilibrium of a 3-Dimensional continuous differential system**" dans le journal São Paulo Journal of Mathematical Sciences.

Jafari, Sprott et Golpayegani dans [15] ont introduit des systèmes différentiels continus sans équilibres. Il ont étudié l'existence de mouvements chaotiques dans la dynamique de tels systèmes.

Dans [3], les auteurs ont motivé par l'article de Jafari, Sprott et Golpayegani. Ils considèrent le système différentiel continu

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -a|x| - y + 3y^2 - xz - b, \end{cases} \quad (6.1)$$

6.1 Cycles limites qui bifurquent d'un point d'équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel tridimensionnel continu

Dans cette partie, notre objectif est d'enrichir les propriétés dynamiques du système différentiel (6.1), en fournissant les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de deux ou un cycle limite qui bifurquent à partir d'un point d'équilibre zéro-Hopf des systèmes différentiels lipschitziens tridimensionnels (6.1).

Nous définissons les fonctions suivantes

$$f_1(r, w) = \frac{1}{2\pi} \left(2w\sqrt{1 - \frac{w^2}{r^2}} - \pi r w + 2r \arcsin\left(\frac{w}{r}\right) \right),$$

et

$$f_2(r, w) = -\frac{1}{\pi} \left(\pi\beta + 2r\sqrt{1 - \frac{w^2}{r^2}} - 2\pi r^2 + 2w \arcsin\left(\frac{w}{r}\right) \right).$$

6.1.1 Résultats

Notre résultats principaux sont les suivant

Théorème 6.1.1 Considérons le système (6.1) avec $a = \varepsilon$, $b = \varepsilon^2\beta$ et $|\varepsilon|$ suffisamment petit. Alors pour tout zéro (r_0, w_0) avec $r_0 > 0$ des fonctions (f_1, f_2) tel que le déterminant de la matrice jacobienne $\partial(f_1, f_2)/\partial(r, w)$ évaluée à (r_0, w_0) est non-nul, il existe un cycle limite $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ du système (6.1) tel que

$$(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon), z(0, \varepsilon)) = \varepsilon(r_0 + w_0, 0, -r_0) + O(\varepsilon^2).$$

Si les deux valeurs propres de la matrice

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, w)} \Big|_{(r,w)=(r_0,w_0)} \quad (6.2)$$

ont une partie réelle négative, alors la solution périodique $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ est stable.

Si l'une de ces valeurs propres a une partie réelle positive, alors la solution périodique $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ est instable.

Corollaire 6.1.1 Considérons le système différentiel lipschitzien (6.1) avec $a = \varepsilon$, $b = \varepsilon^2\beta$ et $|\varepsilon|$ suffisamment petit.

(a) Le système (6.1) a deux solutions périodiques $(x_{\pm}(t, \varepsilon), y_{\pm}(t, \varepsilon), z_{\pm}(t, \varepsilon))$ telles que

$$(x_{\pm}(0, \varepsilon), y_{\pm}(0, \varepsilon), z_{\pm}(0, \varepsilon)) = \varepsilon(r_{\pm}, 0, -r_{\pm}) + O(\varepsilon^2) \quad \text{avec} \quad r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2\pi^2\beta}}{2\pi},$$

Si $1 + 2\pi^2\beta > 0$, $1 - \sqrt{1 + 2\pi^2\beta} > 0$ et $1 + 2\pi^2\beta - 7\sqrt{1 + 2\pi^2\beta} \neq 0$.

(b) Le système (6.1) a une solution périodique $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ telle que

$$(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon), z(0, \varepsilon)) = \varepsilon(r_+, 0, -r_+) + O(\varepsilon^2) \quad \text{avec} \quad r_+ = \frac{1 + \sqrt{1 + 2\pi^2\beta}}{2\pi},$$

si $1 + 2\pi^2\beta > 0$, $1 - \sqrt{1 + 2\pi^2\beta} < 0$ et $1 + 2\pi^2\beta - 7\sqrt{1 + 2\pi^2\beta} \neq 0$.

(c) Si en plus des hypothèses des énoncés (a) et (b), nous avons que $-1 - 2\pi^2\beta + 7\sqrt{1 + 2\pi^2\beta} > 0$, alors la solution périodique associée à $(r_+, 0)$ du système (f_1, f_2) est instable.

6.2 Preuve

Preuve du théorème 6.1.1 Considérons le système (6.1) avec $a = \varepsilon$, $b = \varepsilon^2\beta$ et $\varepsilon \geq 0$. Pour appliquer la théorie de moyennisation, nous écrivons le système différentiel (6.1) sous la forme (2.25). D'abord, nous faisons le changement de variables $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$, nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = Z, \\ \dot{Z} = -Y + \varepsilon(3Y^2 - XZ - |X| - \beta). \end{cases} \quad (6.3)$$

$(X, 0, 0)$ est un point d'équilibre du système (6.3) quand $\varepsilon = 0$. Le système linéarisé du système (6.3) lorsque $\varepsilon = 0$ à l'origine s'écrit comme suit

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

Nous faisons le changement

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix},$$

Nous obtenons le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{u} = -v + \varepsilon(-3v^2 - u(u+w) + |u+w| + \beta), \\ \dot{v} = u, \\ \dot{w} = \varepsilon(3v^2 + u(u+w) - |u+w| - \beta). \end{cases} \quad (6.4)$$

Nous passons aux coordonnées cylindriques $(u, v, w) = (r \cos \theta, r \sin \theta, w)$, le système (6.4) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos \theta (r^2 \cos 2\theta - rw \cos \theta + |w + r \cos \theta| - 2r^2 + \beta), \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon \sin \theta}{r} (r^2 \cos 2\theta - rw \cos \theta + |w + r \cos \theta| - 2r^2 + \beta), \\ \dot{w} = \varepsilon (3r^2 \sin^2 \theta + r \cos \theta (w + r \cos \theta) - |w + r \cos \theta| - \beta). \end{cases} \quad (6.5)$$

Nous prenons θ comme une nouvelle variable indépendante dans le système (6.5), il s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \cos \theta (r^2 \cos 2\theta - rw \cos \theta + |w + r \cos \theta| - 2r^2 + \beta) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dw}{d\theta} &= \varepsilon (r^2 (2 - \cos 2\theta) - |w + r \cos \theta| + rw \cos \theta - \beta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Nous calculons la fonction moyennée en utilisant la formule (2.26) avec les notations

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathbf{z} &= (r, w), \\ t &= \theta, \\ F(t, \mathbf{x}) &= F(\theta, r, w) \\ T &= 2\pi,\end{aligned}$$

où $F(\theta, r, w) = (F_1(\theta, r, w), F_2(\theta, r, w))$ est donnée comme suit

$$\begin{pmatrix} F_1(\theta, r, w) \\ F_2(\theta, r, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta (r^2 \cos 2\theta - rw \cos \theta + |w + r \cos \theta| - 2r^2 + \beta) \\ r^2(2 - \cos 2\theta) - |w + r \cos \theta| + rw \cos \theta - \beta \end{pmatrix}.$$

La fonction moyennée $f(r, w) = (f_{11}(r, w), f_{12}(r, w))$ est donnée par

$$\begin{aligned}f_1(r, w) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\arccos(\frac{-w}{r})} F_1(\theta, r, w) d\theta + \int_{\arccos(\frac{-w}{r})}^{2\pi - \arccos(\frac{-w}{r})} F_1(\theta, r, w) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{2\pi - \arccos(\frac{-w}{r})}^{2\pi} F_1(\theta, r, w) d\theta \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_2(r, w) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\arccos(\frac{-w}{r})} F_2(\theta, r, w) d\theta + \int_{\arccos(\frac{-w}{r})}^{2\pi - \arccos(\frac{-w}{r})} F_2(\theta, r, w) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{2\pi - \arccos(\frac{-w}{r})}^{2\pi} F_2(\theta, r, w) d\theta \right).\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}f_1(r, w) &= -\frac{rw}{2} + \frac{w\sqrt{1-\frac{w^2}{r^2}}}{\pi} + \frac{r \arcsin(\frac{w}{r})}{\pi}, \\ f_2(r, w) &= -\frac{1}{\pi} \left(\pi\beta - 2\pi r^2 + 2r\sqrt{1-\frac{w^2}{r^2}} + 2w \arcsin(\frac{w}{r}) \right).\end{aligned}\tag{6.7}$$

Nous résolvons le système $(f_1(r, w), f_2(r, w)) = (0, 0)$ par rapport aux variables r et w ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}2w\sqrt{1-\frac{w^2}{r^2}} - \pi rw + 2r \arcsin\left(\frac{w}{r}\right) &= 0, \\ \pi\beta + 2r\sqrt{1-\frac{w^2}{r^2}} - 2\pi r^2 + 2w \arcsin\left(\frac{w}{r}\right) &= 0,\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.4.1, tout zéro (r_0, w_0) des fonctions $(f_1(r, w), f_2(r, w))$ données par (6.7) dont le déterminant

$$\det\left(\frac{\partial(f_1(r, w), f_2(r, w))}{\partial(r, w)}\right)\Big|_{(r_i, w_i)} \neq 0,\tag{6.8}$$

fournit un cycle limite $(r(\theta, \varepsilon), w(\theta, \varepsilon))$ tel que

$$(r(0, \varepsilon), w(0, \varepsilon)) = (r_0, w_0) + O(\varepsilon),$$

du système (6.6).

Il est équivalent à un cycle limite $(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$ tel que

$$(r(0, \varepsilon), \theta(0, \varepsilon), w(0, \varepsilon)) = (r_0, 0, w_0) + O(\varepsilon),$$

du système (6.5).

Par conséquent, nous obtenons un cycle limite $(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$ tel que

$$(u(0, \varepsilon), v(0, \varepsilon), w(0, \varepsilon)) = (r_0, 0, w_0) + O(\varepsilon),$$

du système (6.4). Donc nous avons un cycle limite $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ de la forme

$$(X(0, \varepsilon), Y(0, \varepsilon), Z(0, \varepsilon)) = (r_0 + w_0, 0, -r_0) + O(\varepsilon),$$

du système (6.3).

Nous obtenons un cycle limite $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ tel que

$$(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon), z(0, \varepsilon)) = \varepsilon(r_0 + w_0, 0, -r_0) + O(\varepsilon),$$

du système (6.1).

Preuve du corollaire (6.1.1)

La fonction moyennée $(f_1(r, w), f_2(r, w))$ donnée par (6.7) a deux racines $(r_{\pm}, 0)$ avec $r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2\pi^2\beta}}{2\pi}$. Le déterminant (6.8) à ces deux racines prend les valeurs

$$d_{\pm} = \frac{1 + 2\pi^2\beta \mp 7\sqrt{1 + 2\pi^2\beta}}{2\pi^2}.$$

Alors, d'après le théorème (2.4.1) les affirmations (a) et (b) sont vérifiées.

Puisque les valeurs propres de la matrice (6.2) évaluée au point $(r_+, 0)$ sont

$$\pm \frac{-1 - 2\pi^2\beta + 7\sqrt{1 + 2\pi^2\beta}}{2\pi^2},$$

Alors la solution périodique est instable.

Par contre puisque les valeurs propres de la matrice (6.2) évaluée au point $(r_-, 0)$ sont imaginaires pures, nous pouvons rien dire pour la stabilité de cette solution périodique.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié l'existence des solutions périodiques des systèmes différentiels polynômiaux en utilisant la théorie de moyennisation.

En utilisant la théorie de moyennisation du deuxième ordre, nous avons montré que les systèmes différentiels polynomiaux cubiques non-linéaires dans \mathbb{R}^n admettent au moins 3^{n-2} cycles limites.

En appliquant la théorie de moyennisation, nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des cycles limites qui bifurquent à partir d'un point d'équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel tridimensionnel continu.

Nous continuerons nos recherches à l'étude de l'existence des cycles limites des systèmes différentiels qui modélisent des phénomènes en biologie, physique, mécanique.....

Bibliographie

- [1] A.A. Andronov, E.A. Leontovitch and Mayer A.G. Gordon II, Etude qualitative des systèmes dynamiques d'ordre deux, En Russe, Nouka Moxau, 1966.
- [2] A.A. Andronov and A. Witt, Sur la théorie mathématiques des auto oscillations, C.R.Acad. Sct. Paris, 1930 ; 190 : 256-258.
- [3] A.T. Azar, C. Volos, N.A. Gerodimos, G.S. Tombras, V.-T. Pham, A.G. Radwan, S. Vaidyanathan, A. Ouannas and J.M. Munoz-Pacheco, A novel chaotic system without equilibrium : Dynamics, synchronization and circuit realization, Hindawi Complexity (2017), Article ID 7871467, 11 pages.
- [4] E. Bendib, S. Badi and A. Makhlof, On the 3-Dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of third order, Turk J Math (2017) 41, 1053-1071.
- [5] N.N. Bogoliubov, On some statistical methods in mathematical physics, Izv. vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1945.
- [6] N.N. Bogoliubov and N. Krylov, The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations, Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev, 1934.
- [7] N.N. Bogoliubov and Yu. A. Mitropolsky, Asymtotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.
- [8] A. Buică and J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, Bull. Sci. math, 128 (2004), 7–22.
- [9] A. Buica, J.P. Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, Commun. Pure Appl Anal, 6 (2007), 103-111.
- [10] C.A. Buzzi, J. Llibre and P.R.da. Silva , 3-Dimensional Hopf bifurcation via averaging theory, Discrete Contin. DYN. Syst, 2007 , 17 : 529-540.
- [11] A. Feddaoui, J. Llibre and A. Makhlof, 4-dimensional zero-Hopf bifurcation for polynomial differential systems with cubic homogeneous nonlinearities via averaging theory, International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations (IJDSDE), Vol. 10, No. 4, 2020.
- [12] L. Halpern, Equations différentielles Etude mathématique et numérique, SuP Galilée L'école d'ingénieurs de l'Institut Galilée.

-
- [13] D. Hilbert, *Mathematische Probleme*, Lecture, Second Internat. Congr. Math, (Paris, 1900); *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen Math. Phys. Kl.*(1900); 253-297 :
- [14] Yu. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert's 16th problem, *Bull. (New Series) Amer. Math. Soc*, 39(2002); 301-354
- [15] S. Jafari, J.C. Sprott and S.M.R.H. Golpayegani, Elementary quadratic chaotic flows with no equilibria, *Physics Letters A* 377 (2013), 699–702.
- [16] S. Kassa, J. Llibre and A. Makhlouf, Limit cycles bifurcating from a Zero-Hopf equilibrium of a 3Dimensional Continuous Differential Systems, published 11/02/2021, *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*.
- [17] S. Kassa, J. Llibre and A. Makhlouf, n-dimensional zero-Hopf bifurcation of polynomial differential systems via averaging theory of second order. *Journal of Dynamical and Control Systems*, published 29 June 2020, ISSN 1079-2724.
- [18] J. Llibre, C.A. Buzzi and P.R. da Silva, 3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory, *Discrete Contin. Dynam. Syst.* 17 (2007), 529-540.
- [19] J. Llibre, C.A. Buzzi and P.R. da Silva, 3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory, *Discrete Contin. Dynam. Syst.* 17 (2007), 529–540.
- [20] J. Llibre, A. Makhlouf and S. Badi, 3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of the second order. *Discrete Contin. Dynam. Syst.* 25(2009), 1287-1295.
- [21] J. Llibre, A.C. Mereu and M.A. Teixeira, Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 148 (2010), 363–383.
- [22] J. Llibre, D.D. Novaes and M.A. Teixeira, Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree, IOP Pub Ltd, London Mathematical Society. 2014; 27 : 563-583.
- [23] J. Llibre and C. Valls, On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems. *Proc A : R Soc* 2012, 468 : 2347-60.
- [24] J. Llibre and C. Valls, Limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems. *Chaos, Solutions Fractals* 2013; 46 : 65-74.
- [25] J. Llibre and X. Zhang, Hopf bifurcation in higher dimensional differential systems via the averaging method differential system in \mathbb{R}^d , *Pacific J. Math*, 240 (2009), 321–341.
- [26] G.C. Layek, *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, Springer, 2015.
- [27] N.G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge Tracts in Mathematics 73, Cambridge University Press, Cambridge–New York–Melbourne, 1978.
- [28] N.G. Lloyd and S. Lynch, Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems, *Proc R Soc Lond Ser A* 1988, 418, 199-208.

- [29] J.E. Marsden and M. McCracken, The Hopf bifurcation and its applications, Applied Mathematical Sciences, New York, Springer–Verlag, 1976.
- [30] I.G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit, Moscow, 1956 (in Russian).
- [31] H. Poincaré . Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle,(première partie), Journal Mathématique, 1881.
- [32] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol. 8, Springer, New York, 1985.
- [33] J.A. Sanders and F. Verhulst, Averaging methods in nonlinear dynamical systems, Applied Mathematical Sciences, New York, Springer-Verlag, 1985.
- [34] J. A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock, Averaging method in nonlinear dynamical systems, Appl. Math. Sci., Vol. 59, Springer, New York, 2007.
- [35] I.R.Shafarevich, Basic algebraic geometry, Springer, 1974.
- [36] F. Verhulst, Nonlinear differential equations and dynamical systems, Universitex, Berlin, Springer-Verlag, 1990.
- [37] Z. Xianwu, Remarks on the uniqueness of limit cycles, Kexue Tongbao, 1983; 28 : 452-455.