

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

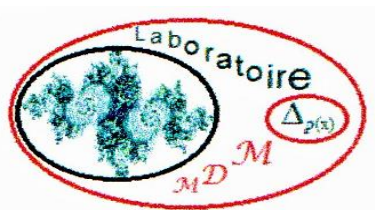


جامعة باجي مختار
- عنابة -

Année : 2021

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
DOCTORAT

Architecture et propriétés des singularités des systèmes découplés

Option : Équations différentielles et applications

Présentée Par :
Fakroune Yamina

DIRECTEUR DE THÈSE : Djellit Ilham Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury :

PRÉSIDENT: Ferchichi Mohamed Reda Prof. U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Kilani Brahim M.C.A. U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Maouni Messaoud Prof. U. SKIKDA
EXAMINATEUR : Taallah Frekh M.C.A. U.B.M. ANNABA

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques discrets chaotiques, modélisés par des transformations bidimensionnelles non linéaires et non inversibles. Cette étude est une analyse des comportements complexes et chaotiques.

Nous distinguons deux grandes parties. Dans la première partie, l'étude concerne les systèmes couplés et leurs propriétés relatives aux ensembles invariants qui peuvent être des variétés stables/instables associées aux points fixes et aux cycles de type col, ou des courbes fermées issues de bifurcations de Neïmark-Hopf. Nous considérons les bifurcations de contact entre la frontière d'attracteurs et la frontière de leurs bassins d'attraction et les bifurcations pouvant donner des bassins fractals.

Dans la seconde partie, les systèmes découplés sont considérés. Nous déterminons les points fixes, les bassins d'attractions et l'architecture des cycles d'ordres 2, 4, 8 et 16 pour $n = 2k$ et $n = 2k + 1$. Nous verrons que la dynamique de ce type de systèmes bidimensionnels se réduit à celle d'un système uni-dimensionnel et leurs bifurcations sont liées.

MOTS CLÉS : Attracteur, Bifurcations, Chaos, Variétés invariantes.

Abstract

In this thesis, we are interested in chaotic discrete dynamical systems, modeled by nonlinear and noninvertible two-dimensional transformations. This study is an analysis of complex and chaotic behaviors.

We distinguish two main parts. In the first part, the study concerns coupled systems and their properties relating to invariant sets which can be stable / unstable manifolds associated with fixed points and cycles of the saddle type, or closed curves resulting from Neïmark Hopf bifurcations. We consider the contact bifurcations between the attractor boundary and the boundary of their attraction basins and the bifurcations that can give fractal basins.

In the second part, decoupled systems are considered. We determine the fixed points, the attraction basins and the architecture of the order cycles 2, 4, 8 and 16 for $n = 2k$ and $n = 2k + 1$. We will see that the dynamics of this type of two-dimensional systems are reduced to that of a one-dimensional system and their bifurcations are related.

KEY WORDS : Attractor, Bifurcations, Chaos, Invariant manifolds.

الملخص

في هذه الأطروحة نهتم بالأنظمة الديناميكية الفوضوية المنفصلة، ممثلة بتحويلات نقطية غير خطية وغير قابلة للانعكاس في الفضاء \mathbb{R}^2 . هذه الدراسة مهمة جدا في تحليل السلوكيات المعقدة و الفوضوية.

نميز بين جزئين رئيسيين. في الجزء الأول، تتعلق الدراسة بالأنظمة المرتبطة وخصائصها في المجموعات الثابتة التي يمكن ان تكون منشعبات مستقرة / غير مستقرة مرتبطة بنقاط ثابتة ودورات من نوع عنق، او منحنيات مغلقة ناتجة من تشعبات Neimark-Hopf. نعتبر ان تشعبات الاتصال (التلامس) بين حدود الجاذب وحدود احواض الجذب والتشعبات التي تعطي احواض كسورية.

في الجزء الثاني، يتم النظر في الأنظمة المنفصلة. نحدد النقاط الثابتة و أحواض الجذب ومواقع الدورات 2، 4، 8 و 16 من أجل $n = 2k$ و $n = 2k + 1$. سنرى ان ديناميكيات هذا النوع من الأنظمة ثنائية الابعاد تختزل الى أنظمة احادية البعد وتشعباتهم مرتبطة ببعضها البعض.

كلمات مفتاحية: الجاذب، التشعبات، فوضى، أصناف ثابتة.

Remerciements

En premier lieu louange à Allah souverain de l'univers.

Je voudrais remercier grandement ma directrice de thèse madame Djellit Ilham Professeure à l'université Badji Mokhtar - Annaba, pour toute son aide. J'ai été ravie de travailler en sa compagnie car outre son appui scientifique, elle a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Djellit Ali, Professeur à l'Université Badji Mokhtar - Annaba et Directeur du Laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation d'Annaba, qui nous a fourni de bonnes conditions d'étude.

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements à monsieur Ferchichi professeur à l'université Badji Mokhtar - Annaba, qui m'a beaucoup appris sur les logiciels et pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Kilani Brahim Maître de conférence A à l'université Badji Mokhtar - Annaba, pour l'honneur d'accepter de participer à mon jury de thèse, je lui exprime ma gratitude.

Je remercie profondément Monsieur Maouni Messaoud Maître professeur à l'université de Skikda, d'avoir pris la peine d'examiner ce travail et m'honorer par sa présence parmi les membres de jury.

De même je remercie vivement Monsieur Taallah Frekh Maître de conférence A à l'université Badji Mokhtar - Annaba, pour l'honneur qu'il me fait de bien vouloir accepter de faire partie du jury.



Dédicace

Je dédie cette thèse à mes parents, pour l'amour qu'ils m'ont toujours donné, leurs encouragements et toute l'aide qu'ils m'ont apportée durant mes études.

Aucun mot, aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération, et mon amour pour les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon instruction et mon bien-être.

Trouvez ici, chère mère et cher père, dans ce modeste travail, le fruit de tant de dévouements et de sacrifices ainsi que l'expression de ma gratitude et de mon profond amour.

A mes chères sœurs Soumaya, Mounira et Naima pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral.

A mes chers frères Fawzi, Fouad, Yacine et Madjid pour leur appui et leur encouragement.

A mes chers neveux Nedjmou, Dia, Takwa, Ibtihel, Chahrazed, Siraj, Assille et Tasnim.

PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES

$J(X)$: la matrice Jacobienne au point X .

$\det J$: déterminant de la matrice jacobienne.

$tr J$: trace de la matrice jacobienne.

S_i ($i = 1, 2$) : valeurs propres ou multiplicateurs.

(k, j) : cycle d'ordre k , j caractérise l'ordre d'échange des k points du cycle.

$\Lambda^J_{(k)_0}$: une courbe de bifurcation "noeud-col" ou "fold" ou "pli".

Λ^j_k : une courbe de bifurcation "doublement de période" ou "flip".

N_i ($i > 0$) : points nœuds paramétriques (points de codimension-deux).

O : est l'origine ou le point fixe $(0, 0)$.

N_s^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud stable.

N_I^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type nœud instable.

C^k : cycle d'ordre k ($k \geq 1$) de type col.

C_{ij}^k : les points du cycles d'ordre k , (i, j deux entiers naturels).

TNI : transformations non inversibles.

LC_{-1} : le lieu des points pour lequel le $\det J$ de T s'annule.

$LC = LC_0$: ligne critique de rang 1, image de la courbe LC_{-1} .

LC_i ($i = 1, \dots, n$) : itérations, les images de la courbe LC_{-1} .

$B(A)$ ou (D) : bassin d'attraction (domaine) de l'attracteur A .

CFI : courbe invariante fermée.

TABLE DES FIGURES

1.1	Trajectoire au voisinage d'un point fixe	4
1.2	Courbes invariantes d'un point fixe col	6
1.3	Bifurcation fold ou noeud-col de points fixes, (-) : stable, (..) :instable	7
1.4	Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche) et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) :stable, (..) :instable	8
1.5	Bifurcation fourche super-critique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la super-critique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (..) :instable	9
1.6	Bifurcation flip ou doublement de période super-critique (à gauche), sous-critique (à droite), (-) :stable, (..) :instable	10
1.7	Bifurcation d'un bassin connexe \longleftrightarrow bassin non connexe	14
1.8	Bifurcation d'un bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin multiplement connexe	15
2.1	Les structures de bifurcations pour n pair	20
2.2	L'agrandissement des zones noires pour n pair	21
2.3	Les courbes de bifurcations	25
2.4	$n=2$, $a = 1.9$ et $b = 1.01$	27
2.5	$n=2$, $a = -1.94$ et $b = 1.04$	28
2.6	$n=2$, $a = -1.94$ et $b = -6.9$	28
2.7	$n=4$	29

2.8	Bassin connexe et bifurcation de contact de la courbe fermée et la courbe critique LC	31
2.9	Disparition de la courbe fermée CFI	32
2.10	Bifurcation de contact de LC et du bassin d'attraction du point fixe P et formation d'un point anguleux	32
2.11	Bassin non connexe	33
2.12	Bassin non connexe	33
2.13	Les courbes critiques pour $n = 2$, $a = -2$ et $b = 2$	34
2.14	Bassin simplement connexe	35
2.15	Bassin simplement connexe	36
2.16	Attracteur chaotique annulaire	36
2.17	Attracteur chaotique annulaire	37
3.1	Les structures de bifurcations pour n impair	40
3.2	Agrandissement des zones noires pour n impair	41
3.3	Les variétés des cols P_1 et P_2 autour du point fixe O et de ses préimages. . .	47
3.4	Les bassins d'attraction pour les cycles-4	49
3.5	51
3.6	Propriété auto-similarité et mise en évidence de frontières des bassins fractals.	53
3.7	Évolution des bassins - bassins entremêlés	55
4.1	Les bassins d'attraction de P et de O	67
4.2	Les bassins d'attraction de cycle d'ordre 4	68
4.3	Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 8	69
4.4	Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 16	69
4.5	L'architecture des cycles 4 et 8 pour $b < -3$ et n pair	70
4.6	L'architecture des cycles 4 et 8 pour $b > 1$ et n pair	70
4.7	Le bassin immédiat pour $b = 1$ et $b = -3$	72
4.8	Bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 2 pour $n=3$, $b = 0.5$	74
4.9	Bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 4 pour $n=3$, $b = 1.2$	75
4.10	Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 8 pour $n=3$, $b = 2.1$	75
4.11	Les bassins d'attraction d'un cycle d'ordre 16 pour $n=3$, $b = 2.237$	76
4.12	L'architecture d'un cycle d'ordre 2 pour n impair	77
4.13	L'architecture d'un cycle d'ordre 4 pour n impair	77
4.14	L'architecture des cycles d'ordre 8 pour n impair	78

INTRODUCTION

L'histoire des systèmes dynamiques moderne est relativement récente, elle commence par Henri Poincaré (1854-1912) qui fut le premier à entreprendre l'étude formelle d'un système dynamique chaotique, il avait la conviction que le comportement global de toute solution d'un système dynamique était plus important que le comportement local, cette conviction l'a conduit à développer une théorie qualitative des équations différentielles via l'étude du mouvement des trois corps célestes, qui consistait à savoir si les orbites décrites par ses corps étaient stables ou instables. La théorie des systèmes dynamiques est née avec ses travaux et a connu un développement très important par quelques mathématiciens et physiciens théoriciens à partir de 1930.

Vint ensuite le mathématicien Birkhoff qui développa au début de XXIème siècle l'étude des systèmes dynamiques discrets, qui selon lui permettait de mieux comprendre la dynamique la plus complexe résultant des équations différentielles.

Le travail sur les systèmes dynamiques fut poursuivi par Lyapunov et Pontriagin, qui développèrent notamment la notion de stabilité d'une solution d'un système différentiel, et l'influence de la perturbation des conditions initiales sur le comportement asymptotique de ses solutions.

Ensuite dans les années 60 vinrent Moser, Smale, Péixoto, Kolmogorov, Arnold, et Sinai, qui utilisèrent des techniques différentielles topologiques pour développer cette théorie. Depuis 1920 jusqu'à aujourd'hui, les systèmes dynamiques discrets modélisés par des transformations non inversibles (endomorphismes) jouent un rôle très important dans plusieurs domaines d'applications comme la physique, la chimie, la biologie, l'économie, l'électronique,

l'informatique et cryptographie...

Les systèmes multistables, c'est-à-dire les systèmes avec un grand nombre de systèmes stables coexistants, sont très présents dans la nature. Ils ont fait l'objet d'un intérêt croissant au cours des deux dernières décennies. C'est la découverte des états multistables dans de nombreux systèmes qui a déclenché la recherche dans de nombreux domaines (Agarwal dans [1], Arecchi et al. dans [2], Djellit et Soula dans [8]). Les comportements multistables ont été trouvés dans les systèmes discrets (Hénon dans [20], Ikeda dans [21], Grebogi et al. dans [18], Feudel et al. dans [11], Lorenz [24]).

De nombreux comportements chaotiques observés dans les systèmes dynamiques sont intimement associés à la présence de points homocliniques et / ou hétérocliniques, et les courbes critiques et / ou invariantes sont utiles pour interpréter de tels problèmes.

Plusieurs travaux ont montré l'importance des courbes critiques dans les bifurcations de bassins, par exemple Gumowski et Mira [19] et Mira et Roubellat dans [31] qui ont développé le rôle de ces courbes dans les bifurcations de bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin non connexe, Kilani et al. dans [23], Mira et al. dans [27] et Barugola et al. dans [5] ont étudié les bifurcations de type bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin multiples connexe. Ces bifurcations de base résultent du contact d'une frontière de bassin avec un segment de courbe critique ou un ensemble attractif entraînant des modifications du bassin.

Un attracteur est un ensemble vers lequel évolue un système dynamique dans le temps. Il est très courant pour les systèmes dynamiques d'avoir plus d'un attracteur. Les attracteurs peuvent être statiques, périodiques, quasi-périodiques ou chaotiques et sont contenus dans un bassin d'attraction, qui est l'ensemble des conditions initiales qui finissent par approcher l'attracteur. Étudier les bassins d'attraction des systèmes non linéaires aide à comprendre les mécanismes de formation de multistabilité (voir Hénon dans [20], Kaitala dans [22], Grebogi et al. dans [18], Feudel et al. dans [11], Lorenz dans [24]).

La multistabilité pose un défi pour étudier la dynamique se produisant dans divers domaines des sciences de l'ingénieur et de l'environnement et les attracteurs multiples des systèmes dynamiques non linéaires sont devenus des objets d'étude [18], [19] et [28]. Parfois, les frontières du bassin sont des ensembles fractals, qui peuvent rendre l'identification du comportement final extrêmement difficile. La structure fractale peut être révélée par les frontières du bassin fractal [29] ou par des motifs d'auto-similarité. L'analyse de ces structures est utile pour obtenir des informations sur le comportement futur des attracteurs et de leurs bassins, et fournit des connaissances importantes sur la relation entre eux.

Le concept du chaos et les attracteurs étranges étaient également très attractifs dans la recherche dynamique et l'existence de plusieurs ensembles attractifs, chacun avec son propre bassin d'attraction apparaît souvent dans les systèmes non linéaires et conduit à la complexité et comportements dynamiques imprévisibles (voir [19], [25] et [28]). Beaucoup

de travaux théoriques ont montré que les systèmes chaotiques, possédant des sous-espaces invariants d'une dimension inférieure à celle de l'espace complet, peuvent présenter une classe intéressante de phénomènes à attracteurs multiples dont les transitoires [28], bassins criblés et bassin entremêlés [8], bouillonnement attracteur [3].

Dans ce travail nous présentons les résultats d'une étude qualitative d'un système dynamique chaotique modélisé par un système bidimensionnel, $T(x; y) = (h(y); ay + f_n(x))$; où a est un paramètre réel. Notre étude se compose de deux parties : la première a fait l'objet de l'étude de certaines bifurcations des attracteurs et des bifurcations de bassins d'attraction pour $a \neq 0$, et la seconde partie (présentée dans le dernier chapitre) a concerné le cas $a = 0$, ce type de système est dit système dynamique découplé très répandu dans le domaine économique dont l'étude a consisté à cerner plusieurs phénomènes entre autres la propriété du multistabilité, la structure particulière des cycles et la représentation de leurs bassins d'attraction.

Cette thèse est divisée en quatre chapitres : Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions et propriétés importantes des systèmes dynamiques discrets.

Dans le deuxième chapitre, Nous étudions les systèmes dynamiques bidimensionnels couplés de la forme :

$$T_{a,b,n}(x, y) : \begin{cases} x' = y \\ y' = ay + f_n(x) \end{cases} \quad (1)$$

et

$$f_n(x) = -bx + x^n \quad (2)$$

Nous utilisons la méthode des courbes critiques et la méthode des courbes invariantes, deux méthodes bien établies pour étudier les bifurcations globales.

Nous étudions des ensembles invariants pour $n = 2$ et $n = 4$ et nous examinons leurs propriétés pour n pair et $a \neq 0$. Nous présentons les courbes de bifurcations associées à ces systèmes appelés de type $(Z_0 - Z_2)$. Nous terminons par l'identification et la vérification de certaines propriétés des points de bifurcations de codimension deux et trois.

Dans le chapitre 3, nous décrivons certaines propriétés relatives aux systèmes avec n impair $n = 2k + 1, k = 1, 2, \dots$, leur dépendance des paramètres $a \neq 0, b \neq 0$ et nous étudions la stabilité des points fixes et des attracteurs. Nous mettons en évidence le rôle des courbes invariantes dans certains cas où les bifurcations peuvent conduire à la création de bassins fractals et provoquer des changements qualitatifs dans la structure du bassin. Nous illustrons quelques bassins fractals avec des courbes critiques.

Dans le chapitre 4, nous présentons l'étude du système découplé $a = 0, b$ et n quelconques. L'objectif est de chercher les points fixes, les cycles d'ordre 2, 4, 8 et 16 (via les successives bifurcations flip) et donner la carte de positionnement ou l'architecture de ces cycles. Nous terminons le chapitre par une étude sur les ensembles critiques.

TABLE DES MATIÈRES

Principales notations utilisées	vi
Table des figures	viii
Introduction	ix
1 Notions Générales sur les Systèmes Dynamiques	1
1.1 Introduction	1
1.2 Définitions de base	1
1.3 Système dynamiques discrets et singularités	2
1.3.1 Singularités	2
1.3.2 Stabilité des singularités	3
1.3.3 Ensembles stable et instable	5
1.4 Bifurcations fondamentales	7
1.4.1 La bifurcation fold (Noeud-col)	7
1.4.2 Cas particuliers de la bifurcation Fold	8
1.4.3 La bifurcation flip (doublement de période)	9
1.4.4 La bifurcation de Neïmark-Hopf	10
1.5 Bifurcations Homoclines et Hétéroclines	10
1.6 Plan de phases d'une transformation non inversible	11
1.6.1 Les variétés critiques	11

1.6.2	Attracteurs et attracteurs chaotiques	12
1.6.3	Bassin d'attraction	13
1.6.4	Bifurcation des bassins d'attraction	14
2	Étude d'un endomorphisme bidimensionnel de type $Z_0 - Z_2$	16
2.1	Introduction	16
2.2	Description de la récurrence	17
2.2.1	Les points fixes	17
2.3	Étude du plan des paramètres	18
2.3.1	Simulation du plan des paramètres	19
2.3.2	Les courbes de bifurcations	22
2.4	Étude générale pour $n = 2k, k = 1, 2, \dots$	24
2.5	Étude du plan de phases	25
2.5.1	Les lignes critiques de T	25
2.5.2	Les déterminations inverses de T	26
2.5.3	Bassins et courbes invariantes	27
2.6	Bifurcations de bassins produites par la variation du paramètre b	30
3	Dynamique complexe d'endomorphismes polynomiaux de non linéarité im-	
	paire	38
3.1	Introduction	38
3.2	Le modèle	39
3.2.1	Points fixes et courbes critiques	42
3.3	Courbes invariantes et inverses	46
3.3.1	Courbes invariantes et structure de bifurcation	48
3.4	Évolution de bassins	52
4	Étude d'un endomorphisme découplé T	56
4.1	Introduction	56
4.2	Propriétés générales d'une transformation découplée	56
4.2.1	Les cycles de T générés par une bifurcation fold où une bifurcation flip d'un cycle de F	60
4.3	Étude de l'endomorphisme quadratique T pour $a = 0$	63
4.3.1	Points fixes de T	63
4.3.2	Bassin d'attraction et les cycles de T	67
4.3.3	L'architecture des cycles	68
4.3.4	Les ensembles critiques	71
4.4	Étude d'un endomorphisme cubique découplé T	72

4.4.1	Les points fixes de f_3	73
4.4.2	Le cycle deux de f_3	73
4.4.3	Bassin d'attraction et les cycles de T	74
4.4.4	L'architecture des cycles	77
Conclusion		79
Bibliographie		81

CHAPITRE

1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit les définitions et les principales notions de la théorie des systèmes dynamiques, ainsi que certaines de leurs propriétés que l'on utilisera dans les chapitres ultérieurs.

1.2 Définitions de base

Définition 1.2.1 *On appelle système dynamique, un triplet (X, \mathbb{T}, f) où X est une variété topologique, \mathbb{T} est l'ensemble \mathbb{R} , \mathbb{Z} ou \mathbb{N} , et f est une application continue de $\mathbb{T} \times X$ dans X , vérifiant :*

$$f(0, x) = x \quad \text{et} \quad f(t_2, f(t_1, x)) = f(t_1 + t_2, x) \quad (1.1)$$

X , \mathbb{T} et f sont appelés respectivement espace des phases (ou espace d'état), espace temps et flot.

Dans toute la suite on supposera que X est un sous ensemble compact de \mathbb{R}^n , ou \mathbb{R}^n lui même.

Définition 1.2.2 On appelle trajectoire ou orbite d'un point x de l'espace des phases X , l'ensemble des points $\{f(t, x) \mid t \in \mathbb{T}\}$. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ la trajectoire correspond à un système dynamique dit continu ; si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N} la trajectoire correspond à un système dynamique dit discret.

1.3 Système dynamiques discrets et singularités

Un système dynamique discret (X, \mathbb{N}, f) est complètement déterminé par l'application T de X dans X :

$$x_{n+1} = T(x_n) \quad (1.2)$$

où

$$T^n(x) \equiv \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}(x) = f(n, x), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } T^0 = id \quad (1.3)$$

Le point x_{n+1} est le point consécutif de rang 1 du point x_n .

L'application T est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité précédente reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Lorsque l'application T est au moins de classe C^1 sur X et a une seule détermination inverse T^{-1} (c'est-à-dire inversible), c'est un difféomorphisme. Lorsque l'application T n'a pas ou a plusieurs déterminations inverses (c'est-à-dire non inversible), c'est un endomorphisme. Dans ce cas, chaque point x_{n+1} peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents de rang un.

1.3.1 Singularités

On distingue deux types de singularités de dimension zéro pour la transformation T : les points fixes et les cycles, encore appelés orbites périodiques.

Définition 1.3.1 Un point fixe x^* est un point de l'espace des phases X vérifiant :

$$x^* = T(x^*) \quad (1.4)$$

Définition 1.3.2 Un Cycle d'ordre k (ou k -cycle) est un ensemble de k points (x_1^*, \dots, x_k^*) de l'espace des phases X , qui vérifie :

$$\begin{cases} x_{i+1}^* = T(x_i^*) , & i = 1, \dots, k-1 \\ x_1^* = T(x_k^*) \\ x_i^* = T^k(x_i^*) , & i = 1, \dots, k \\ x_i^* \neq T^l(x_i^*) , & i = 1, \dots, k \text{ et } 1 \leq l < k \end{cases} \quad (1.5)$$

Chaque point x_i^* d'un cycle d'ordre k est un point fixe de T^k . Un cycle d'ordre k est aussi caractérisé par l'ordre d'échange de ses k points x_i^* par applications successives de T . Il peut être désigné par le couple (k, j) , où k représente l'ordre du cycle et j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par applications successives de T .

Lorsque la dimension de l'espace des phases est supérieure à un, il peut également exister des singularités dites de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation T ou T^k .

Définition 1.3.3 Dans le plan de phases R^2 , une courbe définie par l'équation $Q(X) = C$, C une constante, est invariante par la transformation T ou T^k , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$Q(T(X)) = Q(X) \quad \text{ou} \quad Q(T^k(X)) = Q(X) \quad (1.6)$$

Plus généralement, un ensemble A de R^p est invariant par T ssi : $T(A) = A$

1.3.2 Stabilité des singularités

Lorsque T est différentiable dans l'espace de phases, on introduit la notion de multiplicateurs (ou valeurs propres) pour caractériser la nature des singularités.

A- Si la dimension de la récurrence $p = 1$, le multiplicateur d'un point fixe x^* ou d'un k -cycle est égale à :

$$S = \frac{dT}{dx}(x^*) \quad \text{pour } x^* \text{ un point fixe de } T$$

et

$$S = \prod_{i=1}^k \frac{dT}{dx}(x_i^*) \quad \text{pour } (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*) \text{ un cycle d'ordre } k \text{ de } T$$

Un point fixe ou un cycle d'ordre k est dit attractif (asymptotiquement stable) si $|S| < 1$.

B- Si la dimension de la récurrence $p = 2$, un point fixe x^* ou un cycle d'ordre k , $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ possède deux multiplicateurs S_1 et S_2 qui sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne de T (pour un point fixe) ou T^k (pour un cycle d'ordre k) au point considéré.

Un point fixe ou un cycle est dit attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$ et répulsif si $|S_1| > 1$ ou $|S_2| > 1$

Selon les valeurs prises par S_1 ou S_2 avec $|S_i| \neq 1, i = 1, 2$, on définit différentes sortes de points fixes ou cycles :

- 1) Col : S_1 et S_2 sont réels, $|S_1| > 1$ et $|S_2| < 1$. Un col est toujours instable.

- 2) Noeud : S_1 et S_2 sont réels
 - Attractif si $|S_i| < 1, i = 1, 2$.
 - Répulsif si $|S_i| > 1, i = 1, 2$.

- 3) Foyer : S_1 et S_2 sont complexes conjugués, $S_1 = \rho e^{-i\theta}, S_2 = \rho e^{+i\theta}$
 - Attractif si $\rho < 1$.
 - Répulsif si $\rho > 1$.

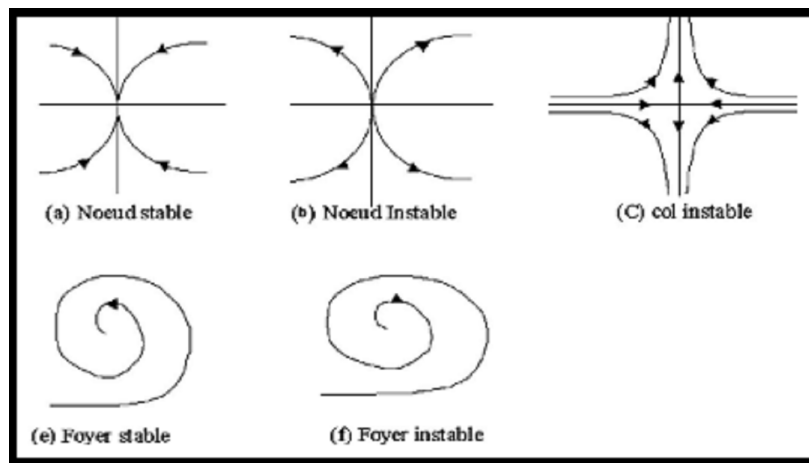


FIGURE 1.1 – Trajectoire au voisinage d'un point fixe

1.3.3 Ensembles stable et instable

Pour une transformation ponctuelle T définie par (1.1), on peut définir les ensembles stables et instables associés à un point fixe.

Définition 1.3.4 Soit x^* un point fixe répulsif et U un voisinage de x^* .

-On appelle $W_{loc}^i(x^*)$ ensemble instable local ou variété instable locale (c'est-à-dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U ayant une séquence d'antécédents successifs dans U qui converge vers x^* .

-On appelle $W^i(x^*)$ ensemble instable global de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers x^* . Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^i(x^*) = \{x \in U : x_{-n} \in T^{-n}(x) \longrightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{-n} \in U\} \quad (1.7)$$

$$W^i(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^p : x_{-n} \in T^{-n}(x) \longrightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^n(W_{loc}^i(x^*)) \quad (1.8)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble instable global :

P1- $W^i(x^*)$ est invariante par rapport à T c'est-à-dire :

$$T [W^i(x^*)] = W^i(x^*)$$

P2- Si T est un endomorphisme, en général $W^i(x^*)$ n'est pas invariant par rapport à T^{-1} et on a :

$$T^{-1} [W^i(x^*)] \supseteq W^i(x^*).$$

L'invariance de $W^i(x^*)$ par rapport à T^{-1} a lieu, lorsque T est inversible.

Définition 1.3.5 Soit x^* un point fixe de T répulsif ou attractif.

-On appelle $W_{loc}^s(x^*)$ ensemble stable local (c'est-à-dire dans U) de x^* , l'ensemble des points de U dont la séquence d'images successives converge vers x^* .

-On appelle $W^s(x^*)$ ensemble stable global de x^* , l'ensemble des points de \mathbb{R}^p dont la séquence d'images successives converge vers x^* . Ces ensembles s'écrivent :

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U : x_n = T^n(x) \longrightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in U\} \quad (1.9)$$

$$W^s(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^p : x_n = T^n(x) \longrightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(W_{loc}^s(x^*)). \quad (1.10)$$

Les propriétés qui suivent découlent de la définition de l'ensemble stable global :

P3- $W^s(x^*)$ est invariante par rapport à T^{-1} c'est-à-dire :

$$T^{-1} [W^s(x^*)] = W^s(x^*)$$

P4- Si T est un endomorphisme, en général $W^s(x^*)$ n'est pas invariant par rapport à T et on a :

$$T[W^s(x^*)] \subseteq W^s(x^*)$$

L'invariance de $W^s(x^*)$ par rapport à T a lieu, lorsque T est inversible.

Remarque 1.3.1 1- Si x^* est un point fixe attractif, l'ensemble stable global est son bassin d'attraction.

2- Si T est un difféomorphisme, les ensembles stables et instables globaux sont des variétés.

3- Dans le cas d'un point fixe x^* de type noeud instable ou foyer instable, l'ensemble stable global de x^* , lorsque T est inversible, se réduit à x^* lui même, et lorsque T est non inversible, l'ensemble stable local de x^* se réduit à x^* lui même et l'ensemble stable global de x^* est constitué de tous les antécédents de tout rang de x^* . Ceci s'écrit :

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(x^*) \quad \text{et} \quad \forall x \in W^s(x^*), \exists m \in \mathbb{N} : F^m(x) = x^*. \quad (1.11)$$

4- Les définitions des ensembles stables d'un cycle d'ordre k , se déduisent des définitions précédentes, en considérant les points du cycle comme des points fixes de T^k .

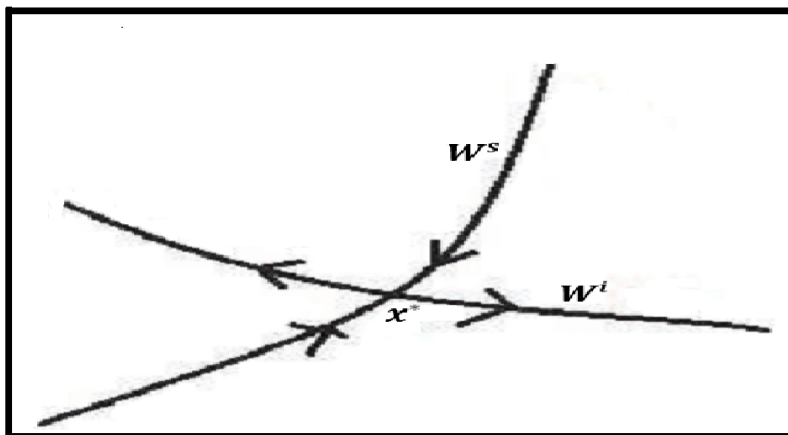


FIGURE 1.2 – Courbes invariantes d'un point fixe col

1.4 Bifurcations fondamentales

Un des problèmes fondamentaux pratiques de la dynamique non linéaire est l'étude des bifurcations dans l'espace paramétrique. Une bifurcation correspond à un changement qualitatif du comportement du système quand le paramètre Λ traverse une valeur critique Λ_0 . En particulier les valeurs de Λ correspondent à un cas critique de Lyapounov sont liées à des bifurcations dites classiques. Sous l'effet d'une petite variation autour Λ_0 , ce changement peut correspondre soit à l'apparition ou à la disparition de nouvelles singularités, soit à une modification de la nature des singularités.

Pour les transformations décrites par (1.2) plusieurs sortes de bifurcations se produisent. Nous ne mentionnerons que celles qui interviennent dans ce travail.

1.4.1 La bifurcation fold (Noeud-col)

Elle correspond à la naissance de deux points fixes ou deux cycles d'ordre k , l'un stable, et l'autre instable. Ces deux points fixes (cycles) sont confondus à la valeur de bifurcation pour laquelle S_1 ou S_2 est égale à 1. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\emptyset \xrightleftharpoons{S=+1} N_s^k + C^k \quad (1.12)$$

\emptyset signifie absence de cycle, N_s^k cycle noeud d'ordre k stable, et C^k cycle col d'ordre k . Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées $\Lambda_{(k)0}^j$, k correspond à l'ordre du cycle, j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par T .

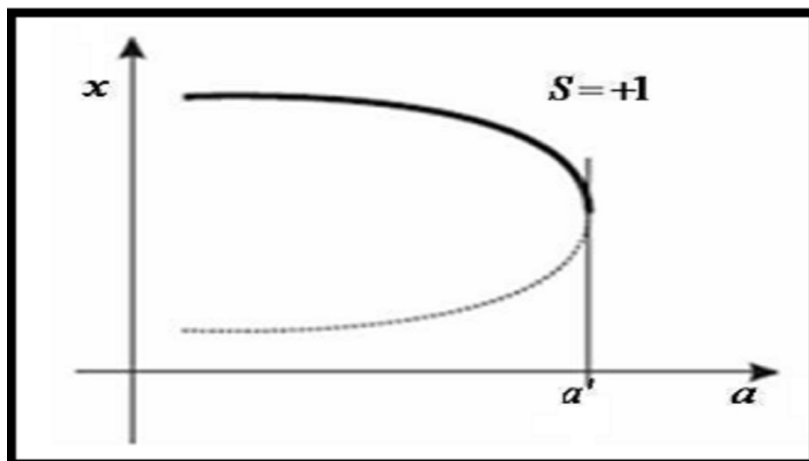


FIGURE 1.3 – Bifurcation fold ou noeud-col de points fixes, (-) : stable, (..) : instable

1.4.2 Cas particuliers de la bifurcation Fold

1.4.2.1 La bifurcation Transcritique ou échange de stabilité

La bifurcation transcritique survient lorsque dans l'espace combiné de l'espace des phases et l'espace des paramètres deux points fixes se croisent et s'échangent leurs stabilités. Le point fixe instable devient stable et vice-versa. Le nombre de points fixes n'a pas changé contrairement à la bifurcation noeud-col où deux points fixes apparaissent ou disparaissent. Ainsi, la bifurcation transcritique est un cas particulier de la bifurcation noeud-col, sa représentation est donnée dans la Figure 1.4.

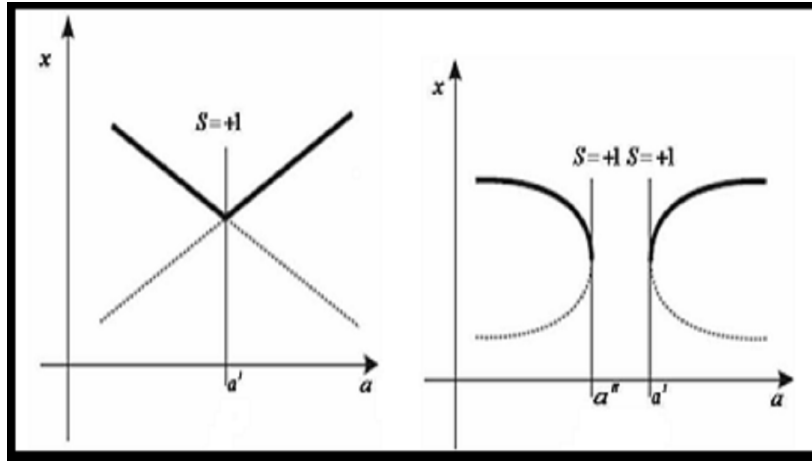


FIGURE 1.4 – Bifurcation transcritique de points fixes (à gauche) et sa dégénérescence après perturbation du système (à droite), (-) :stable, (..) :instable

1.4.2.2 La bifurcation Pitchfork ou Fourche

Lorsqu'un des multiplicateurs associé au cycle d'ordre k traverse la valeur $+1$ ($S_1 = 1, |S_2| \neq 1$), un autre type de bifurcation appelée bifurcation fourche, peut se produire, dans le cas le plus simple, en dimension deux, cette bifurcation obéit au schéma suivant :

$$\begin{cases} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) \xrightarrow{S=+1} 2N_s^k (\text{resp. } N_i^k) + C^k \\ C^k \xrightarrow{S=+1} N_s^k (\text{resp. } N_i^k) + 2C^k \end{cases} \quad (1.13)$$

On distingue deux types de bifurcation : bifurcation fourche super-critique (stable) et bifurcation fourche sous-critique (instable).

Les courbes qui correspondent à cette bifurcation sont notées $\Lambda_{(k)0}^j$.

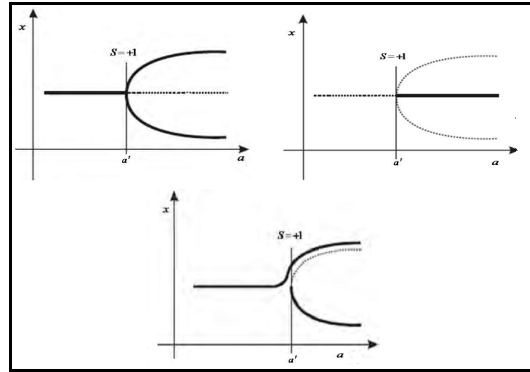


FIGURE 1.5 – Bifurcation fourche super-critique (à gauche), sous-critique (à droite) de points fixes et la dégénérescence de la super-critique après perturbation du système (en bas), (-) : stable, (..) : instable

1.4.3 La bifurcation flip (doublement de période)

Un point fixe (resp. cycle d'ordre k) de type noeud change de stabilité lorsque S_1 ou S_2 est égal à (-1) , et donne naissance à un cycle d'ordre 2 (resp. cycle d'ordre $2k$) qui a la même stabilité que le point fixe (resp. cycle d'ordre k) d'origine. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\begin{cases} N_s^k \text{ (resp. } N_i^k) \xrightarrow{S=-1} N_i^k \text{ (resp. } N_s^k) + N_s^{2k} \text{ (resp. } N_i^{2k}) \\ C^k \xrightarrow{S=-1} N_i^k \text{ (resp. } N_s^k) + C^{2k} \end{cases} \quad (1.14)$$

N_s^{2k} signifie cycle noeud d'ordre $2k$ stable, N_i^{2k} cycle noeud d'ordre $2k$ instable, C^{2k} cycle col d'ordre $2k$. Les valeurs du paramètre Λ qui correspondent à cette bifurcation sont notées Λ_k^j .

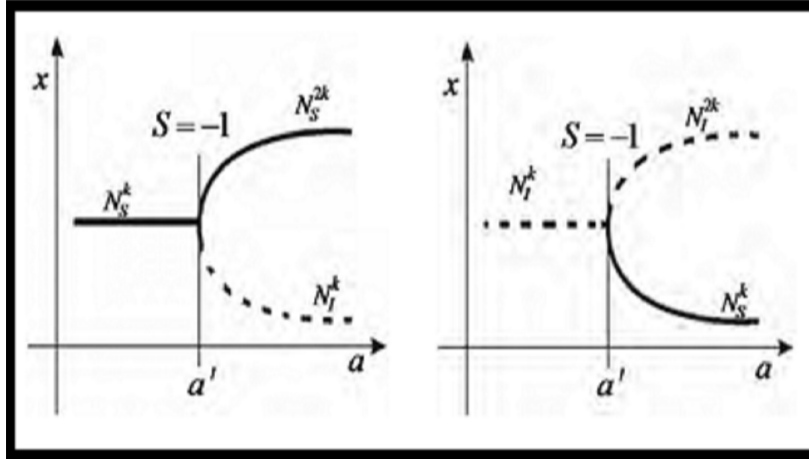


FIGURE 1.6 – Bifurcation flip ou doublement de période super-critique (à gauche), sous-critique (à droite), (-) :stable, (..) :instable

1.4.4 La bifurcation de Neïmark-Hopf

Un point fixe (resp. cycles d'ordre k) de type foyer change de stabilité (lorsque $S_{1,2} = \rho \exp(\pm i\varphi)$ vérifient $\rho = 1$) et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le point fixe (cycle) d'origine. On a le schéma :

$$F_s^k (\text{resp. } F_i^k) \xrightarrow{\rho=1} F_i^k (\text{resp. } F_s^k) + C.F.I_s^k (\text{resp. } C.F.I_i^k) \quad (1.15)$$

où F_s^k signifie cycle foyer d'ordre k stable, F_i^k cycles foyer d'ordre k instable, $C.F.I_s^k$ correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k stables (attractives), $C.F.I_i^k$ correspond à un cycle de k courbes fermées invariantes par T^k instables (répulsives).

1.5 Bifurcations Homoclines et Hétéroclines

Dans ce paragraphe, on rappellera les principales définitions et propriétés concernant les bifurcations homoclines et hétéroclines.

Définition 1.5.1 Soit x^* un point fixe répulsif de T , un point q est appelé homocline à x^* , si $q \in W^s(x^*) \cap W^i(x^*)$ et $q \neq x^*$. On dit que q est un point homocline transverse, si $W^s(x^*)$ et $W^i(x^*)$ se coupent transversalement en q .

Définition 1.5.2 Soit q un point homocline à un point fixe répulsif x^* de T et appartenant à voisinage $U(x^*)$ de x^* . On appelle orbite homocline $O_o(q)$ associée à q , un ensemble constitué des itérés successifs de q , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse T_l^{-1} de T dans $U(x^*)$:

$$O_o(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où

$$q_n = T^n(q) \rightarrow x^* \quad \text{et} \quad q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow x^* \quad (1.16)$$

Remarque 1.5.1 *Il y a une infinité d'orbites homoclines associées à un point homocline. Celles-ci ont la même demi-trajectoire positive, mais diffèrent par leur demi-trajectoire négative.*

Définition 1.5.3 *Soient x_1^* et x_2^* deux points fixes répulsifs de T . On dit qu'un point q , appartenant à un voisinage $U(x_1^*)$ de x_1^* , est hétérocline de x_1^* vers x_2^* , si $T^n(q) \rightarrow x_2^*$ quand n croît, et q appartient à l'ensemble instable local $W_{loc}^i(x_1^*)$ de x_1^* dans $U(x_1^*)$.*

Définition 1.5.4 *On appelle orbite hétérocline $O_e(q)$ associée à $q \in U(x_1^*)$ et connectant x_1^* à x_2^* (ou orbite hétérocline q), un ensemble constitué des itérés successifs de q , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse T_l^{-1} de T dans $U(x_1^*)$:*

$$O_e(q) = \{T_l^{-n}(q), q, T^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$$

où

$$q_n = T^n(q) \rightarrow x_2^* \quad \text{et} \quad q_{-n} = T_l^{-n}(q) \rightarrow x_1^* \quad (1.17)$$

Définition 1.5.5 *Soit T une transformation non inversible de \mathbb{R}^2 dépendant d'un paramètre λ , et soit x^* un point fixe répulsif de T . On dit qu'en $\lambda = \lambda^*$ une bifurcation homocline (ou explosion homocline) de x^* a lieu, si en traversant la valeur λ^* il y a apparition (ou disparition) d'une infinité d'orbites homoclines.*

1.6 Plan de phases d'une transformation non inversible

Dans ce paragraphe nous donnons quelques résultats généraux sur la structure du plan de phase d'une transformation ponctuelle non inversible de type (1.2) pour des valeurs de paramètres fixés.

1.6.1 Les variétés critiques

Dans le plan de phase, la non inversibilité des transformations (endomorphismes) est caractérisée par la présence de singularités appelées lignes critiques (LC_k), ce type de singularité, introduit pour la première fois par Mira en 1964. Les lignes critiques interviennent dans la détermination d'aire absorbante et d'aire chaotique, dans la caractérisation des propriétés de ces aires et aussi pour expliquer des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction.

Définition 1.6.1 *En dimension un, un point critique de rang $k+1$ est le conséquent de rang k d'un extremum de la courbe $Y = h_k(X)$ où h_k est la fonction définissant T^k , il est noté C_k*

Définition 1.6.2 *En dimension deux, une ligne critique notée LC est le lieu des points du plan de phase ayant au moins deux antécédents de rang un confondus. C'est la généralisation à la dimension deux de la notion de point critique défini en dimension un. Une ligne critique LC_k de rang $k+1$, est la ligne conséquente de rang k de LC_0 , $k = 1, 2, \dots$. La ligne critique LC_{-1} est l'antécédente de rang un de LC_0 . L'étude des lignes critiques présente plusieurs intérêts :*

- a)- *Les arcs de certaines d'entre elles délimitent les zones invariantes ou absorbantes, donc peuvent délimiter les attracteurs chaotiques.*
- b)- *Les lignes critiques interviennent dans certaines bifurcations spécifiques et permettent de comprendre l'évolution des bifurcations. Les lignes critiques partagent le plan de phase en zone Z_i chaque zone Z_i possède i antécédents de rang un.*

1.6.1.1 Formulation mathématique des lignes critiques

Cas différentiable : Dans le cas où T est différentiable, une courbe LC_{-1} est le lieu des points pour lequel le déterminant de la matrice Jacobienne de T s'annule.

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, J(X) = 0\} \quad (1.18)$$

Cas non différentiable : Dans le cas où T est non différentiable, une courbe LC_{-1} est le lieu des points de non différentiabilité. On suppose que ces points sont des antécédents de rang un confondus puisque T est continument différentiable par morceaux. Cet ensemble est donc :

$$LC_{-1} = \{X \in \mathbb{R}^2, T \text{ non différentiable en } X\} \quad (1.19)$$

Dans notre travail T est non différentiable.

1.6.2 Attracteurs et attracteurs chaotiques

Dans un système dynamique, il peut exister des singularités plus générales que les points fixes et les cycles, ce sont les attracteurs. Dans ce paragraphe nous donnons les définitions des attracteurs et attracteurs chaotiques

Définition 1.6.3 *Un ensemble fermé invariant A est attractif s'il existe un voisinage U de A tel que : $T(U) \subset U$ et $T^n(X) \rightarrow A$ quand $n \rightarrow \infty$ pour $X \in U$.*

Définition 1.6.4 *Un attracteur A est un ensemble attractif topologiquement transitif, ce qui signifie que pour tout couple d'ensembles ouverts $U, V \subset A$, il existe un entier positif k tel que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$, de façon équivalente, il existe un point $p \in A$ dont l'orbite est dense dans A .*

Un attracteur est peut être un point fixe ou un cycle d'ordre k ou une courbe invariante fermée ou un ensemble plus complexe.

Définition 1.6.5 *Un attracteur chaotique est un ensemble attractif invariant, dont les points génèrent des suites itérées qui vérifient la propriété de sensibilité aux conditions initiales.*

Actuellement il n'y a pas de définition générale du terme "chaos". En fonction du contexte, on dit qu'un état est chaotique quand il est non périodique. On parle même de mouvement chaotique pour un mouvement très irrégulier sur une période, et pour lequel la durée des observations physiquement possibles est inférieure à cette période.

Définition 1.6.6 *Soit A un sous ensemble fermé borné du plan alors A est dite aire absorbante par rapport à T si :*

- 1) $T(A) \subseteq A$.
- 2) Sa frontière est constituée d'un nombre fini ou infini de segments de lignes critiques.
- 3) Il existe un voisinage U de A tel que $T(U) \subset U$ et tout point $X \in U/A$ a une image de rang fini à l'intérieur de A .

1.6.3 Bassin d'attraction

Définition 1.6.7 *Le bassin d'attraction \mathcal{D} d'un attracteur (point fixe, cycle d'ordre k ou attracteur chaotique) est l'ensemble ouvert de conditions initiales x_0 dont les itérés successifs vont converger vers un attracteur $T^n(x_0) \rightarrow A$ quand $n \rightarrow +\infty$*

Propriété 1.6.1 \mathcal{D} est invariant par itération inverse T^{-1} , mais pas nécessairement invariant par T :

$$T^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \quad \text{et} \quad T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \quad (1.20)$$

Lorsque la transformation T est inversible on a : $T(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$

Définition 1.6.8 *La frontière de \mathcal{D} est notée \mathcal{F} (ou $\partial\mathcal{D}$). Elle est définie par : $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{C(\mathcal{D})}$ où $C(\mathcal{D})$ représente l'ensemble complémentaire de \mathcal{D} et $\overline{\mathcal{D}}$ (resp. $\overline{C(\mathcal{D})}$) représente l'adhérence de \mathcal{D} (resp. $C(\mathcal{D})$) .*

Propriété 1.6.2 \mathcal{F} est invariant par itération inverse T^{-1} , mais pas nécessairement invariant par T :

$$T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \quad \text{et} \quad T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F} \quad (1.21)$$

Remarque 1.6.1 - La relation $T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ implique que \mathcal{F} doit contenir l'ensemble des antécédents de chacun de ces cycles, c'est-à-dire que \mathcal{F} doit contenir l'ensemble stable W^s de tout cycle de T appartenant à \mathcal{F} .

- La relation $T(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ signifie que la trajectoire image de chaque point de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} .

Remarque 1.6.2 Le bassin d'attraction peut être connexe, multiplement connexe (connexe avec trous) ou non connexe c'est-à-dire formé d'un nombre fini ou infini de composantes connexes (qui peut être simplement ou multiplement connexe) et sa frontière peut être fractale.

1.6.4 Bifurcation des bassins d'attraction

Dans ce paragraphe, on décrit les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure du bassin d'attraction, ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection du bassin avec une ligne critique d'une transformation ponctuelle non inversible.

1.6.4.1 La bifurcation de contact de type 1

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière du bassin \mathcal{F} entre en contact avec LC a une certaine valeur de bifurcation, elle concerne le changement de la connexité du bassin d'attraction et a lieu lorsque l'intersection entre le bassin d'attraction \mathcal{D} et LC est formée de segments non connexe :

- bassin connexe \longleftrightarrow bassin non connexe.
- bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin multiplement connexe.
- modification du nombre d'îlots de \mathcal{D} ou apparition d'une nouvelle arborescente.

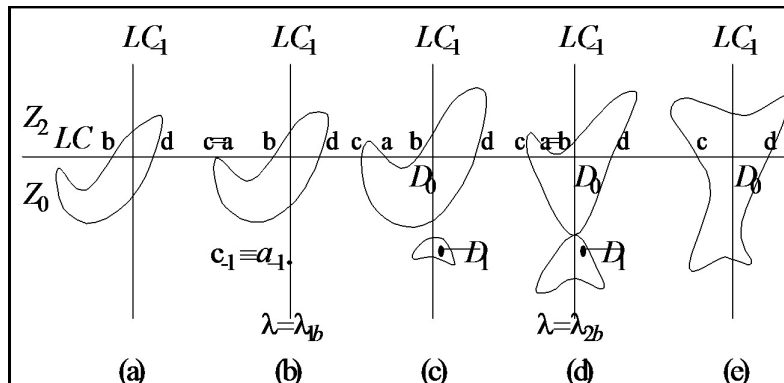
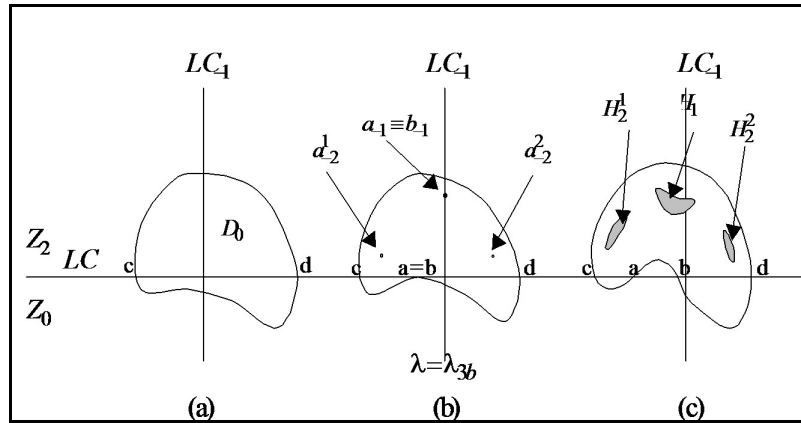


FIGURE 1.7 – Bifurcation d'un bassin connexe \longleftrightarrow bassin non connexe

FIGURE 1.8 – Bifurcation d'un bassin simplement connexe \longleftrightarrow bassin multiplement connexe

1.6.4.2 La bifurcation de contact de type 2

Cette bifurcation apparait lorsque la frontière d'un aire chaotique entre en contact avec la frontière de son bassin immédiat. Après la bifurcation, l'aire chaotique se détruit en donnant naissance à un répulseur étrange ou à une modification qualitative des propriétés de l'aire chaotique. Ce répulseur est constitué d'une infinité de cycles instables, de leur points limites et de leurs antécédents, appartenant à l'aire chaotique avant la bifurcation. Ces points sont responsables du transitoire chaotique qu'il en résulte, faisant évoluer les trajectoires discrètes du plan de phase soit vers l'infini, soit vers un autre attracteur à distance finie.

CHAPITRE

2

ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME BIDIMENSIONNEL DE TYPE $Z_0 - Z_2$

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la transformation T de type couplé. Nous nous intéressons à l'étude des bifurcations des ensembles invariants. Nous fournissons des preuves numériques et montrons certains mécanismes associés à l'apparition et disparition des courbes invariantes fermées.

L'étude se fera en trois étapes. La première étape est consacrée à l'étude des singularités pour des non linéarités de type pair $n = 2k$ avec $k = 1, 2, \dots$. Dans la seconde étape, les premières courbes de bifurcation pour $n = 2$ sont données explicitement ainsi que les structures de bifurcation pour n pair. La dernière étape de ce chapitre portera sur le tracé des lignes critiques, les attracteurs et les droites invariantes, le but étant d'étudier les bifurcations de bassins d'attraction.

2.2 Description de la récurrence

Considérons la récurrence bidimensionnelle T définie par :

$$T_{a,b,n}(x, y) : \begin{cases} x' = y \\ y' = ay + f_n(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

et

$$f_n(x) = -bx + x^n \quad (2.2)$$

où x, y sont des variables réelles, a, b sont des paramètres réels et $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 2$, $a = 1$ et b un paramètre quelconque, cette récurrence a déjà été étudiée par Razafimandimby [33] et Clerc et Hartmann [6]. Ils ont examiné les domaines d'influence et la stabilité des singularités de l'endomorphisme quadratique et ils ont considéré les auto-intersections de l'ensemble instable qui se présentait sous la forme particulière de boucles. Ce fait a des conséquences fondamentales et connues dans la théorie des bifurcations en particulier dans les bifurcations globales et le chaos. De telles bifurcations régissent une des routes vers le chaos qui ont été largement étudiées depuis 1975 dans [19] et [27].

2.2.1 Les points fixes

Considérons ce système dynamique généré par une famille de systèmes discrets bidimensionnels non inversibles $T_{a,b,2}$ défini par :

$$T_{a,b,2} : \begin{cases} x' = y \\ y' = ay - bx + x^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour déterminer les points fixes de cette récurrence, nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y = x \\ ay - bx + x^2 = y \end{cases} \quad (2.4)$$

Ces derniers sont obtenus en résolvant l'équation :

$$x^2 - (b + 1 - a)x = 0 \quad (2.5)$$

Elle admet deux racines $x_0 = 0$ et $x_1 = b + 1 - a$.

Donc T admet deux points fixes

$$O(0, 0) \quad \text{et} \quad P(b + 1 - a, b + 1 - a) \quad (2.6)$$

si $a \neq 1 + b$.

La stabilité de ces points fixes est déterminée par la matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_2'(x) & a \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Dont le déterminant

$$\det J = -f'_2(x) \quad (2.8)$$

et les multiplicateurs

$$S_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 8x} \right) \quad (2.9)$$

2.2.1.1 Points fixes pour n pair

Pour déterminer les points fixes de la transformation (2.1), il faut résoudre l'équation polynomiale d'ordre n suivante :

$$x^n - (b + 1 - a)x = 0 \quad (2.10)$$

Nous obtenons deux points fixes également

$$O(0,0) \quad \text{et} \quad P' \left((b + 1 - a)^{\frac{1}{n-1}}, (b + 1 - a)^{\frac{1}{n-1}} \right) \quad (2.11)$$

si $a \neq 1 + b$.

Pour n quelconque, la matrice jacobienne est donnée comme suit :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'_n(x) & a \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

dont le déterminant

$$\det J_n = -f'_n(x) = -b + nx^{n-1} \quad (2.13)$$

et les multiplicateurs

$$S_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b + 4nx^{n-1}} \right) \quad (2.14)$$

2.3 Étude du plan des paramètres

Dans ce paragraphe nous étudions l'évolution de la structure des bassins à travers les bifurcations dans le plan des paramètres (a, b) .

2.3.1 Simulation du plan des paramètres

Le domaine de stabilité pour la récurrence $T_{a,b,n}$ peut être construit numériquement, en utilisant une méthode de balayage du système. Le résultat du programme de balayage est représenté sur les Figures (2.1) dans le plan paramétrique (a, b) , nous donnons ici l'existence des cycles attractifs de la transformation $T_{a,b,n}$.

Nous remarquons des bifurcations dans le plan paramétrique (a, b) , le balayage montre clairement les domaines d'existence de cycles d'ordre k ; $k = 1, 2, \dots, 14$. Chaque couleur est attribuée à un attracteur d'un certain ordre. Les frontières de ces domaines représentent les courbes de bifurcations telles que les attracteurs apparaissent pour un multiplicateur $S = +1$ ou $S = -1$.

Dans les Figures (2.1) nous avons le code des couleurs :

- Les zones bleues représentent les valeurs des paramètres pour lesquelles il existe un point fixe attractif.
- Les zones vertes représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 2.
- Les zones rouges représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 4.
- Les zones roses représentent les zones d'existence d'un cycle attractif d'ordre 8, ainsi de suite pour les cycles jusqu'à $k = 14$.
- Les zones noires correspondent aux valeurs de paramètre (a, b) pour lesquelles il existe des itérées bornées (cycles d'ordre k ($k \geq 15$), un attracteur étrange, ou une courbe invariante fermée). C'est dans ces zones que peuvent être observés les phénomènes chaotiques.

Les Figures (2.1) représentent les structures de bifurcations pour n un entier pair. On remarque des pertes des cycles quand la valeur de n augmente, la zone noire diminue et devient complètement bleue.

Nous remarquons aussi la disparition de la symétrie de deux zones bleues.

Les Figures (2.2) présentent l'agrandissement des zones noires des Figures (2.1).

2.3. ÉTUDE DU PLAN DES PARAMÈTRES

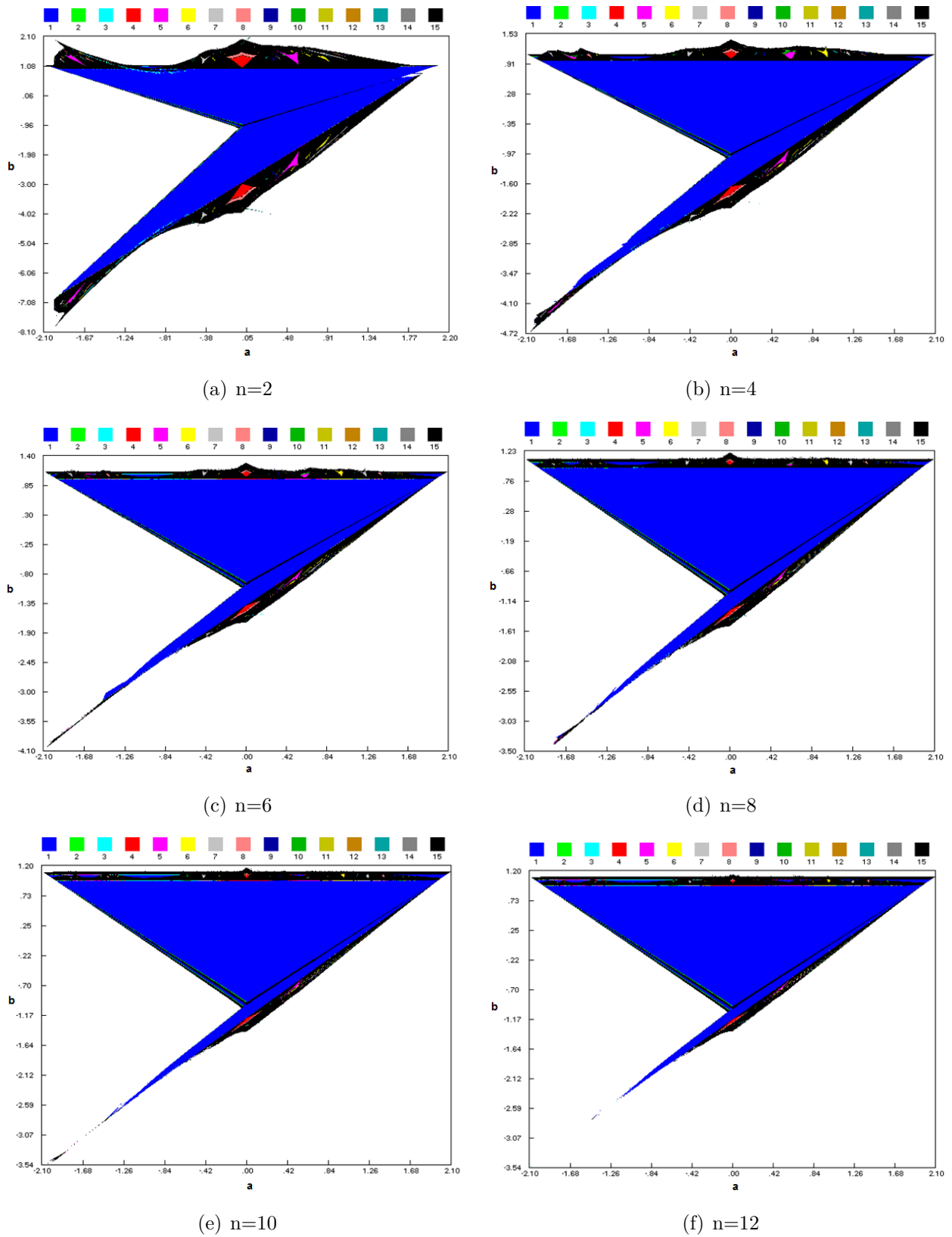


FIGURE 2.1 – Les structures de bifurcations pour n pair

2.3. ÉTUDE DU PLAN DES PARAMÈTRES

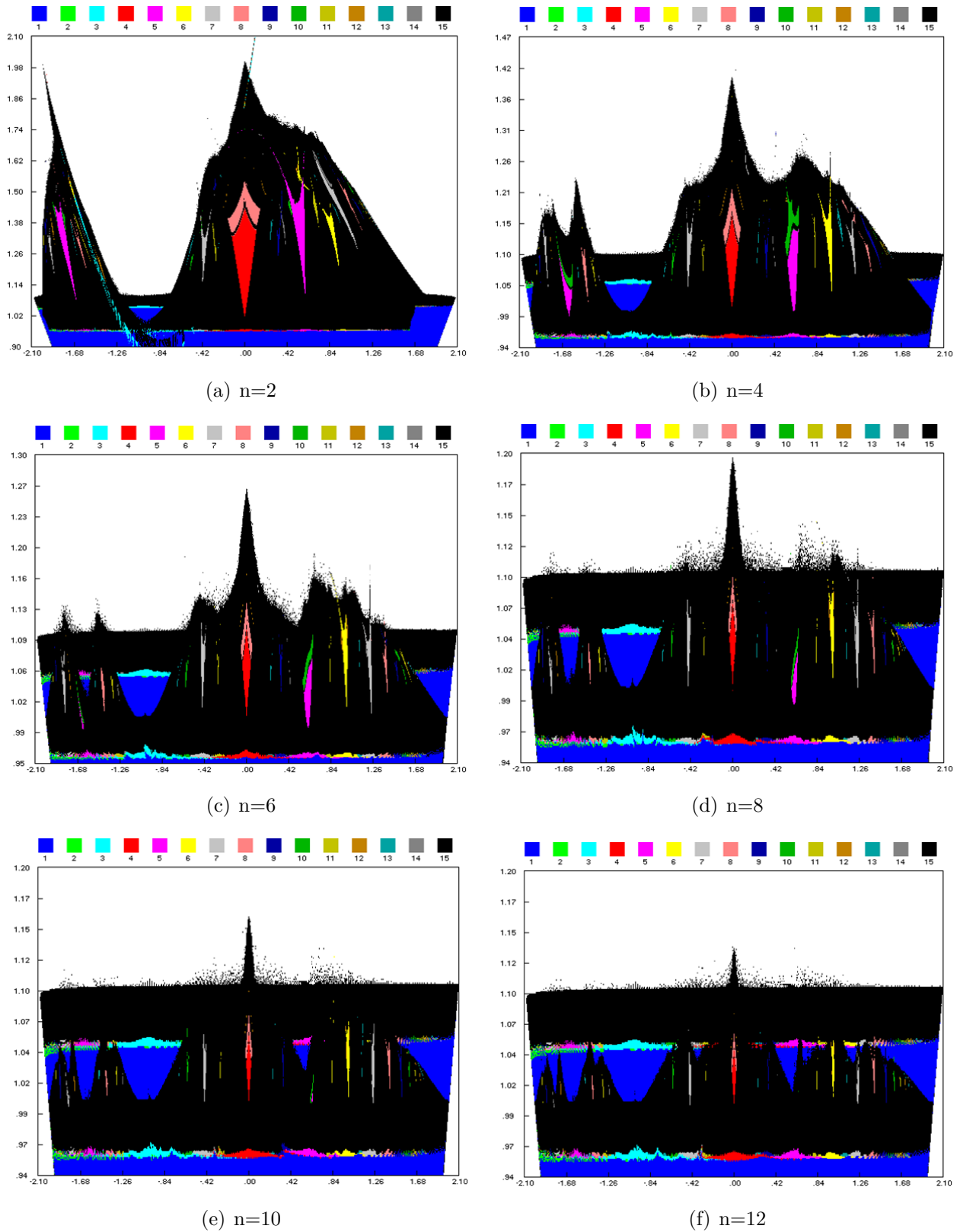


FIGURE 2.2 – L'agrandissement des zones noires pour n pair

2.3.2 Les courbes de bifurcations

Dans cette section, nous portons un intérêt particulier dans notre étude sur les bifurcations jouant un rôle important dans la dynamique, celles se produisant pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Nous pouvons facilement énoncer ce qui suit.

Proposition 2.3.1 *Si $b = a - 1$, alors $O(0, 0)$ est le point fixe unique de la transformation $T_{a,b,2}$ définie par (2.1). La courbe paramétrique $\Lambda_{(1)_0} : b = a - 1$ est la courbe de bifurcation transcritique telle que les deux points fixes O et P existent et sont symétriques par rapport à la courbe paramétrique $\Lambda_{(1)_0}$.*

Proof. Considérons le changement de variable qui déplace le point P pour coïncider avec l'origine comme suit :

$$\begin{cases} x = x^* + (1 + b - a) \\ y = y^* + (1 + b - a) \end{cases}$$

Après l'injection de ce changement de $T = T_{a,b,2}$ et une simple simplification, nous avons

$$\begin{cases} x^* = y^* \\ y^* = ay^* + x^{*2} - (2a - b - 2)x^* \end{cases}$$

On pose

$$b^* = 2a - b - 2 \quad \text{et} \quad a^* = a$$

$T_{a,b,2}$ devient $T_{a^*,b^*,2}^*$. Cette nouvelle transformation T^* a deux points fixes $(0, 0)$ [ce qui correspond à P pour T] et $P^*(1 + b^* - a^*, 1 + b^* - a^*)$ qui correspond à la solution triviale de T . Ces deux transformations T et T^* échangent leurs points fixes.

Soit : $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y)_{(a,b)} \rightarrow (x^*, y^*)_{(a^*,b^*)} = (x - (1 + b - a), y - (1 + b - a))_{(a, 2a - b - 2)} \quad \blacksquare$$

Proposition 2.3.2 *L est symétrique par rapport à $\Lambda_{(1)_0}$, telle que $L \circ T = T^* \circ L$.*

Corollaire 2.3.1 *Si P est un point fixe de T , alors $L(P)$ est un point fixe de T^**

Corollaire 2.3.2 *La courbe paramétrique $\Lambda_{(1)_0} : b = a - 1$ est invariante par L .*

Le point fixe $P(1 + b - a, 1 + b - a)$ avec le vecteur paramétrique (a, b) est associé au point $O(0, 0)$ lié au vecteur paramétrique $(a^*, b^*) = (a, 2a - b - 2)$.

Ainsi, les points fixes O et P peuvent subir des ensembles identiques de bifurcations dans les plans paramétriques appropriés. De ce fait, il suffit alors d'étudier la nature et les bifurcations de $O(0, 0)$, celles de P sont déduites automatiquement.

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b + 2x & a \end{pmatrix}$ la matrice jacobienne de T .

Au point $O(0, 0)$ J admet deux valeurs propres

$$S_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Nous pouvons conclure pour $a^2 - 4b > 0$ en considérant $b < \frac{a^2}{4}$.

Proposition 2.3.3 *Si $1 + a + b = 0$ ou $1 + b - 3a = 0$, T a une bifurcation flip au point fixe $O(0, 0)$, ou au point $P(b + 1 - a, b + 1 - a)$.*

Proof. Considérons la transformation T^2 (le deuxième itéré de T) :

$$T^2(x, y) : \begin{cases} x' = ay - bx + x^2 \\ y' = a(ay - bx + x^2) - by + y^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Les points fixes de T^2 sont calculés en considérant $T^2(x, y) = (x, y)$, nous obtenons donc :

$$\begin{cases} ay - bx + x^2 = x \\ a(ay - bx + x^2) - by + y^2 = y \end{cases} \quad (2.16)$$

Puisque $y = ((1 + b)x - x^2)/a$, nous obtenons un polynôme quartique en x après avoir remplacé y dans la deuxième équation du système 2.16. Après simplification des deux points fixes, nous obtenons ce polynôme quadratique :

$$Q(x) = x^2 - (1 + a + b)x + a(1 + a + b) \quad (2.17)$$

Les racines de $Q(x)$ sont les abscisses des deux points du cycle d'ordre 2 :

$$x_{1,2} = \left((1 + a + b) \pm \sqrt{(1 + a + b)(1 + b - 3a)} \right) / 2 \quad (2.18)$$

et les coordonnées sont : $y_1 = x_2$; $y_2 = x_1$.

La condition suffisante et nécessaire pour l'existence du cycle 2 est donnée par :

$$(1 + a + b)(1 + b - 3a) > 0$$

Nous avons deux courbes de bifurcation flip, notons :

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / 1 + a + b = 0 \right\} \text{ et } \Lambda'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / 1 + b - 3a = 0 \right\} \quad (2.19)$$

• Si $1 + a + b = 0$ nous avons $x_1 = x_2 = 0$, cette droite de bifurcation flip Λ_1 est associée avec le point fixe $O(0, 0)$.

• Si $1 + b - 3a = 0$ nous avons $x_1 = x_2 = 2a$, cette droite de bifurcation flip Λ'_1 est associée avec l'autre point fixe $P(1 + b - a, 1 + b - a)$. ■

Nous remarquons que les deux courbes Λ_1 et Λ'_1 sont clairement visibles sur la Figure 2.1(a).

Proposition 2.3.4 *La transformation T subit des bifurcations de Neïmark-Hopf au point fixe $O(0, 0)$ pour $a = 2 \cos(\alpha_k)$ et $b = 1$ avec $\alpha_k = \frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.*

Proof. Nous obtenons les valeurs de paramètre liées aux bifurcations de Neïmark-Hopf pour le point fixe $O(0, 0)$ de type foyer en posant $S_1 = \exp(i\alpha_k)$ et $S_2 = \exp(-i\alpha_k)$ avec $\alpha_k = \frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ ■

Proposition 2.3.5 *La droite paramétrique $b = 2a - 3$ est la symétrique de la droite $\Delta : b = 1$ par rapport à la droite $\Lambda_{(1)_0} : b = a - 1$. Cette droite $\Delta' : b = 2a - 3$ est associée au point fixe P et joue un rôle identique à celui de Δ qui est associée au point fixe trivial O pour les bifurcations globales.*

Proof. Avec un calcul simple, nous obtenons cette droite. ■

2.4 Étude générale pour $n = 2k, k = 1, 2, \dots$

Pour tout n pair, nous avons une courbe de bifurcation transcritique donnée par :

$$\Lambda_{(1)_0} : b - a + 1 = 0 \tag{2.20}$$

et deux courbes de bifurcation flip données par :

$$\Lambda_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / 1 + a + b = 0 \right\} \text{ et } \Lambda'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / (n-1)(1+b) - (n+1)a = 0 \right\} \tag{2.21}$$

où Λ_1 associée au point O et Λ'_1 associée au point P .

La Figure 2.3 représente les courbes de bifurcation pour $n = 2$ et $n = 4$.

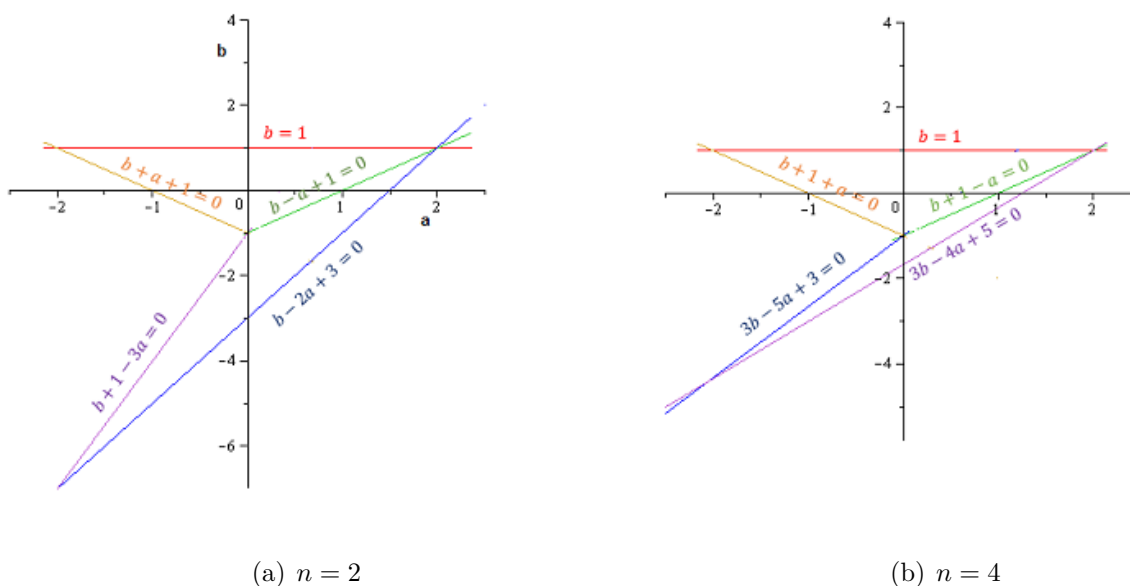


FIGURE 2.3 – Les courbes de bifurcations

2.5 Étude du plan de phases

Les lignes critiques jouent un rôle très important dans les bifurcations de bassins, elles délimitent les zones des différentes déterminations qui engendrent des complications dans l'étude de T , des interactions des attracteurs et la dynamique de T .

2.5.1 Les lignes critiques de T

Le lieu LC_{-1} des antécédents confondus de rang 1 de T est donné par

$$LC_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \det(J(x, y)) = 0\} \quad (2.22)$$

où $J(x, y)$ désigne la matrice Jacobienne de T au point (x, y) .

Après les calculs, LC_{-1} est explicitement formulée par :

$$LC_{-1} = \left\{ (x, y) / x = \frac{b}{2} \right\} \quad (2.23)$$

La ligne critique $LC = T(LC_{-1})$ est donc :

$$LC = T(LC_{-1}) = \left\{ y = ax - \frac{b^2}{4} \right\} \quad (2.24)$$

et

$$LC_1 = \left\{ (x, y) / y = \frac{1}{a^2}x^2 + \left(a + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b}{a} \right) x + \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b^3}{4a} \right\} \quad (2.25)$$

La ligne critique LC_{-1} de $T_{a,b,n}$ est donnée par :

$$LC_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \left(\frac{b}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} \quad (2.26)$$

et LC l'image de LC_{-1} est donnée par :

$$LC = T(LC_{-1}) = \left\{ y = ax + \left(\frac{b}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}} - b \left(\frac{b}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \right\} \quad (2.27)$$

2.5.2 Les déterminations inverses de T

La recherche des déterminations inverses de la transformation T (si elles existent) revient à résoudre le système par rapport à (x, y) :

$$T(x, y) - (x', y') = (0, 0) \quad (2.28)$$

Ce dernier est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - bx + ay - y' = 0 \\ y = x' \end{cases} \quad (2.29)$$

Dans le cas où le discriminant de la première équation de (2.29)

$$\Delta(x', y') = b^2 - 4(ax' - y') = b^2 + 4(y' - ax') \succ 0 \quad (2.30)$$

Alors la transformation T admet deux déterminations inverses, données par :

$$T_1^{-1}(x, y) : \begin{cases} x_1 = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4(y' - ax')} \\ y = x' \end{cases} \quad (2.31)$$

et

$$T_2^{-1}(x, y) : \begin{cases} x_2 = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4(y' - ax')} \\ y = x' \end{cases} \quad (2.32)$$

Lorsque le discriminant Δ est strictement négatif, la transformation T n'a pas de détermination inverse. Par conséquent, T est une transformation de type $Z_0 - Z_2$, et la ligne critique LC séparant les régions Z_0 et Z_2 a pour équation $\Delta = 0$. Ce qui équivaut à :

$$LC : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax - \frac{1}{4}b^2 \right\}$$

Par conséquent, les deux zones Z_0 et Z_2 à 0 et à 2 préimages respectivement :

$$Z_0 : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \prec ax - \frac{1}{4}b^2 \right\} \quad (2.33)$$

et

$$Z_2 : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \succ ax - \frac{1}{4}b^2 \right\} \quad (2.34)$$

2.5.3 Bassins et courbes invariantes

Nous présentons quelques résultats de simulations numériques et discutons de leurs implications.

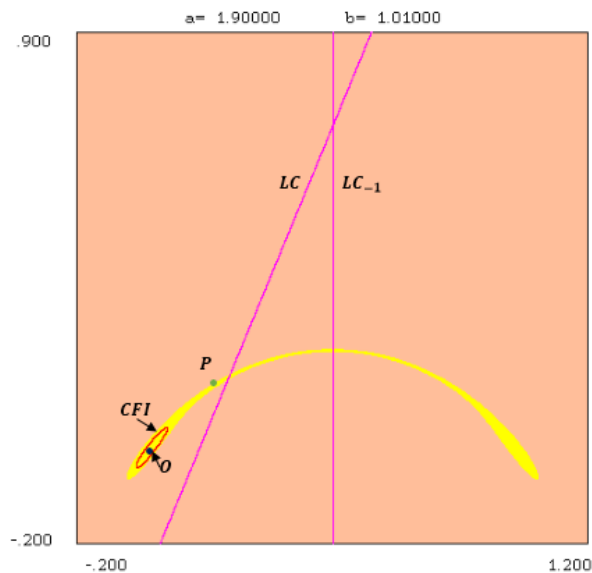
Rappelons que le bassin d'attraction d'une singularité stable est l'ensemble des points dont la suite des itérations converge vers cet ensemble attractif. Sa frontière possède quelques propriétés, telles que l'invariance par T^n et T^{-n} , $n = 1, 2, \dots$, elle est séparatrice et elle est constituée d'arcs de courbes invariantes issues de points cols et par leurs antécédents ou des points fixes ou cycles répulsifs.

De la figure (2.3(a)), nous avons quatre points ($a = 2, b \simeq 1$), ($a = -2, b \simeq 1$), ($a = -2, b \simeq -6.9$) et ($a = 0, b \simeq -1$) qui sont des points de bifurcation de codimension supérieure ou égale à 2.

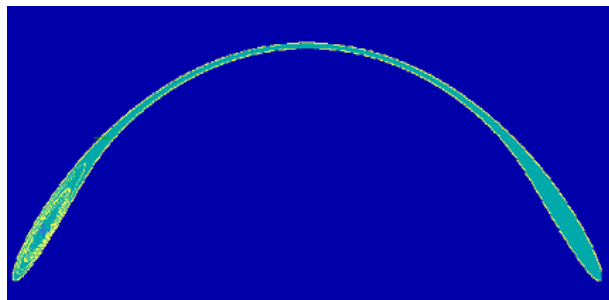
Rappelons qu'un point X est un point de bifurcation de codimension-2, si ce point est le point d'intersection d'une courbe de bifurcation fold et une courbe de bifurcation flip. Portons notre attention sur les bifurcations qui se produisent autour de ces points.

Quand on fait varier les paramètres autour de $a \simeq 2$ (voir Figures 2.4(a) et 2.4(b)) et $a \simeq -2$ dans les Figures 2.5(a) et 2.5(b) pour $b \simeq 1$.

Puisque $b > 0$, le point fixe O est stable, l'intérieur de son bassin d'attraction subit une bifurcation de Neïmark-Hopf et une petite courbe fermée apparaît à l'intérieur du bassin, avec une variété stable fermée au point col P .



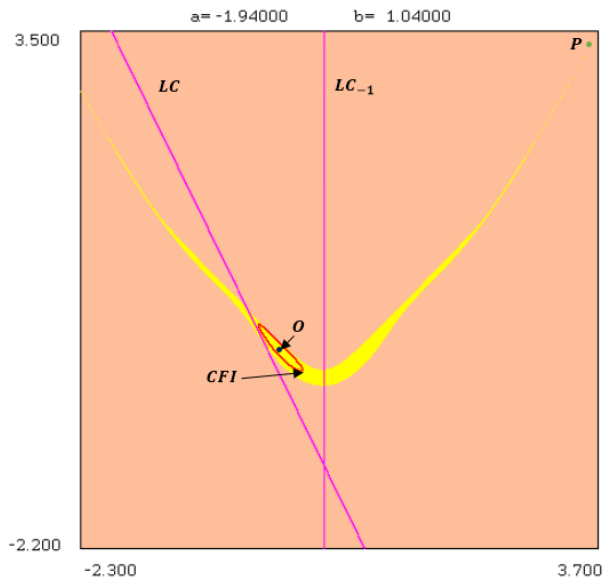
(a) Les courbes critiques et la courbe CFI provenant de la bifurcation de Neïmark-Hopf



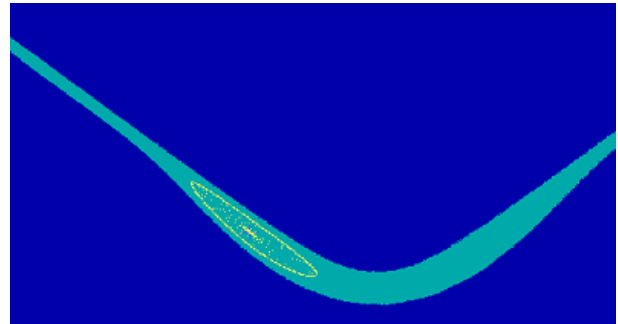
(b) Agrandissement des courbes invariantes à l'intérieur et autour du bassin

FIGURE 2.4 – $n=2$, $a = 1.9$ et $b = 1.01$

2.5. ÉTUDE DU PLAN DE PHASES

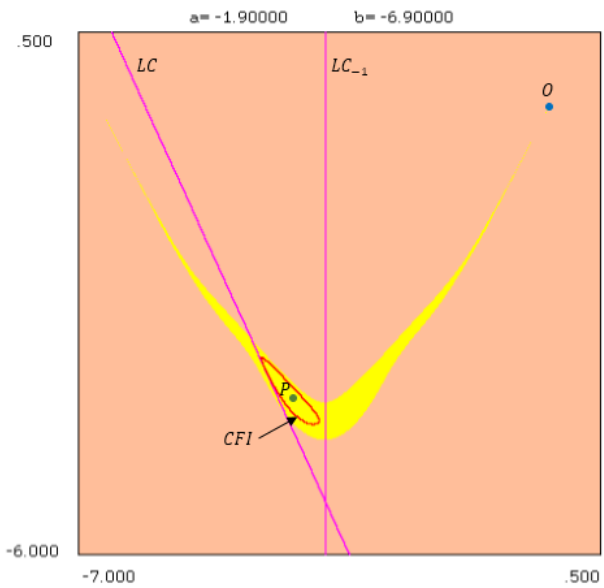


(a) La symétrie du bassin est visible

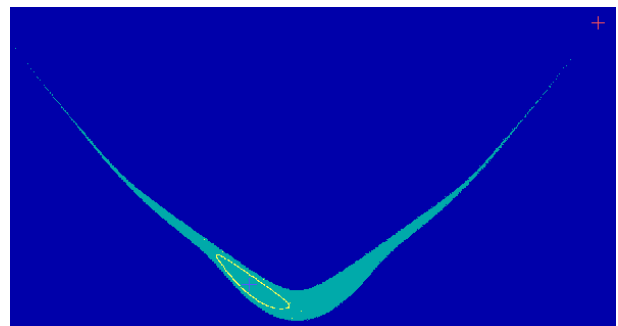


(b) Agrandissement du bassin

FIGURE 2.5 - $n=2$, $a = -1.94$ et $b = 1.04$



(a)



(b)

FIGURE 2.6 - $n=2$, $a = -1.94$ et $b = -6.9$

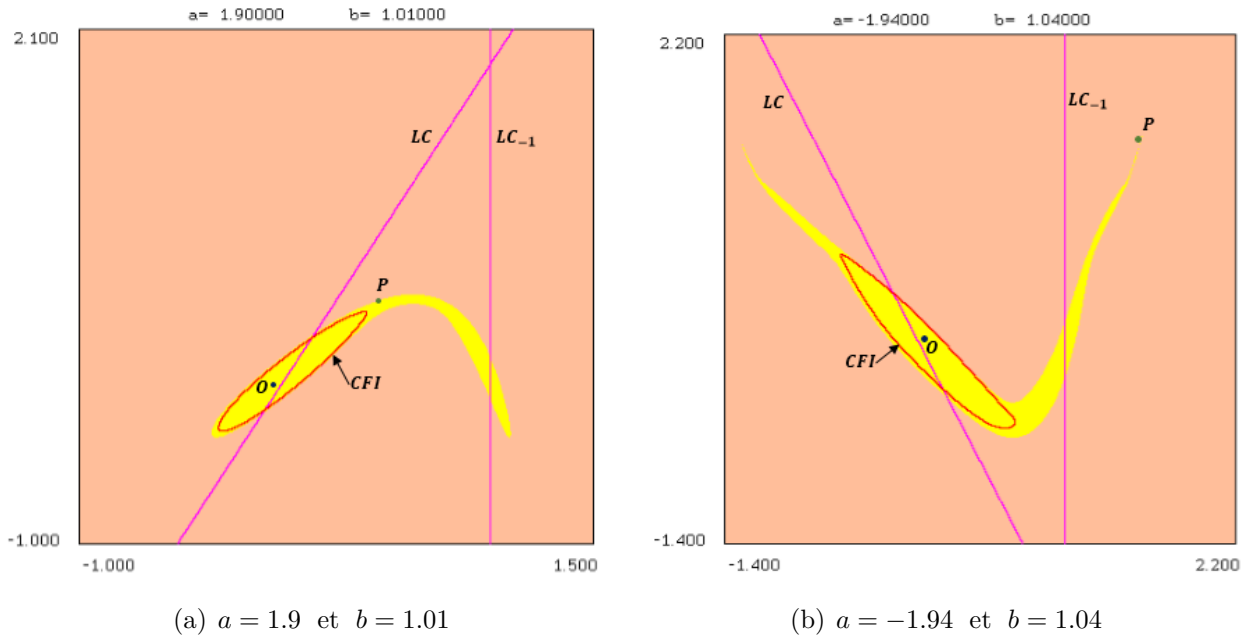


FIGURE 2.7 – $n=4$

Les Figures précédentes montrent la structure de bassin correspondante de T pour $n = 2$. Les Figures 2.4, 2.5, 2.6 et 2.7 représentent les attracteurs existants (les deux points fixes O , P , une courbe fermée invariante (CFI) autour du point fixe O après la bifurcation de Neïmark-Hopf) et la variété stable émanant du point col P . Sur la Figures 2.4 $a \simeq 2$ et $b \simeq 1$ ($S_1 = S_2 = 1$), les deux points fixes existent, P est un col et sa variété invariante stable délimite le bassin de O qui subit une bifurcation Neïmark-Hopf lorsque a croit de 1.7 à 1.9. Les deux courbes sont fermées et invariantes. Sur la Figure 2.5, $a \simeq -2$ et $b \simeq 1$ ($S_1 = S_2 = -1$), le point fixe O , subit la bifurcation flip Λ_1 ($1 + b + a = 0$) et le cycle-2 entourant O devient instable donnant encore une CFI . Sur la Figures 2.7 et pour $n = 4$ nous avons presque le même comportement avec des courbes invariantes associées avec les points fixes. Nous observons de petits changements dans l'emplacement de la courbe critique LC_{-1} qui a des effets sur les propriétés des attracteurs, et peut causer de notables asymétries dans la structure des bassins, qui ne peuvent être détectées qu'à partir des propriétés du modèle étudié.

2.5.3.1 Les droites invariantes

D'autres ensembles invariants pour $n = 2$ (et même pour n pair) peuvent être estimés pour T^2 . Ces ensembles invariants sont obtenus par itération des droites invariantes sur la frontière du bassin immédiat. Le cas $a = -2$ est très intéressant, car on peut mettre en évidence l'existence de tels ensembles. Le caractère spécial de ce type d'ensembles a déjà été

observé dans les endomorphismes découplés.

Pour illustrer cette idée, on pose $L_1 : y_2 = \alpha x_2 + \beta$, x_2 et y_2 sont les deuxièmes itérations de x et y . On obtient alors :

$$a(ay - bx + x^2) - by + y^2 = \alpha(ay - bx + x^2) + \beta \quad (2.35)$$

En vertu de l'invariance de L_1 par T ($y = \alpha x + \beta$), pour tout x , on a :

$$(a + \alpha^2 - \alpha)x^2 + (a^2\alpha - ab + 2\alpha\beta - a\alpha^2)x + (a^2\beta - b\beta + \beta^2 - a\alpha\beta - \beta) = 0 \quad (2.36)$$

Alors

$$\begin{cases} a + \alpha^2 - \alpha = 0 \\ \beta(a^2 - b + \beta - a\alpha - 1) = 0 \\ a^2\alpha - ab + 2\alpha\beta - a\alpha^2 = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Pour $a = -2$, nous avons $L_1 : y = -x + b - 1$. Si nous prenons $b = 1 + \varepsilon$, alors $L_1 : y = -x + \varepsilon$. Les itérées $T(L_1)$ sont également invariantes car $T^2(T(L_1)) = T(T^2(L_1)) = T(L_1)$. $T(L_1)$ est une parabole dont l'équation est

$$y = \frac{x^2}{\alpha^2} + \left(a - \frac{b}{a} - \frac{2\beta}{\alpha^2}\right)x + \frac{\beta}{\alpha} \left(b + \frac{\beta}{\alpha}\right) = x^2 - bx - b + 1 \quad (2.38)$$

Si nous prenons $\beta = 0$, nous avons $L_2 : y = 0$, $L_3 : y = x$. Outre les éléments vus jusqu'à présent, il existe une autre particularité dans la dynamique de T . La forte dépendance vis-à-vis des paramètres engendre une grande variété de phénomènes complexes dans le plan et donne lieu à différents types de bassins. Compte tenu de la complexité de la matière et de sa nature, l'étude de ces phénomènes ne peut être réalisée que par l'association d'investigations numériques guidées par des considérations fondamentales qui se retrouvent dans [28].

2.6 Bifurcations de bassins produites par la variation du paramètre b

Les attracteurs constituent un ensemble intéressant d'études par eux-mêmes. Leurs bassins d'attraction sont divisés en deux parties égales par LC_{-1} .

Pour comprendre le comportement de l'application quand a est proche de -2 , nous suivons l'évolution dans le plan de phases quand on fait varier le paramètre b ($b \approx -5.87, b = 0.95$). Toutes les situations qui vont suivre, ont été publiées dans [7] proposé par Djellit, Fakroune et Selmani, pour une grande variété de modèles non linéaires. Dans la plupart des applications, le bassin d'attraction subit quelques modifications. La structure géométrique du bassin se produit pour des choix particuliers des paramètres.

2.6. BIFURCATIONS DE BASSINS PRODUITES PAR LA VARIATION DU PARAMÈTRE B

Des travaux récents traitant de cas d'attracteurs multiples dans l'application non-inversible ont montré que peut devenir une source de bifurcations donnant des structures complexes pour les bassins d'attraction. Cependant, les phénomènes globaux et les structures complexes des bassins illustrés ici sont dus aux deux ensembles critiques et invariants.

Considérons le paramètre b proche de la valeur -5.9 et varions a , on a les situations suivantes :

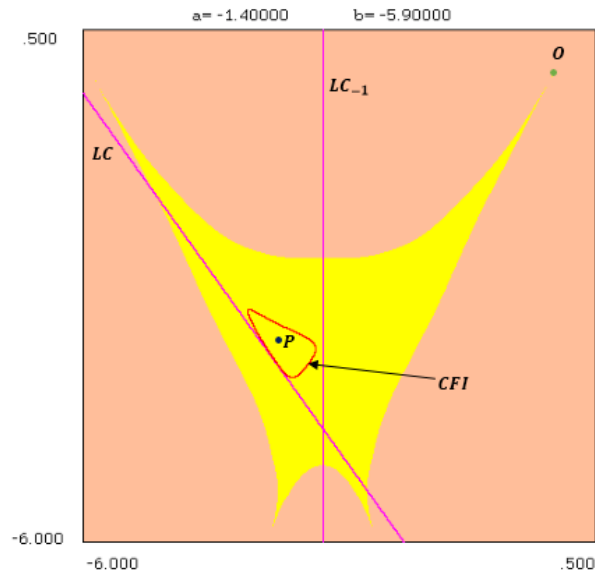


FIGURE 2.8 – Bassin connexe et bifurcation de contact de la courbe fermée et la courbe critique LC

2.6. BIFURCATIONS DE BASSINS PRODUITES PAR LA VARIATION DU PARAMÈTRE B

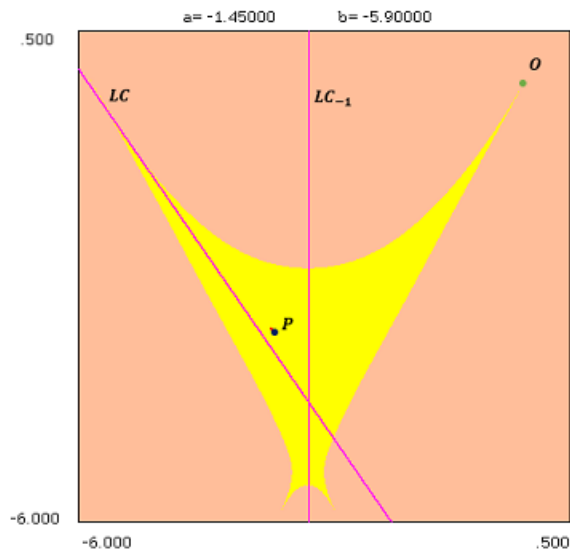


FIGURE 2.9 – Disparition de la courbe fermée CFI

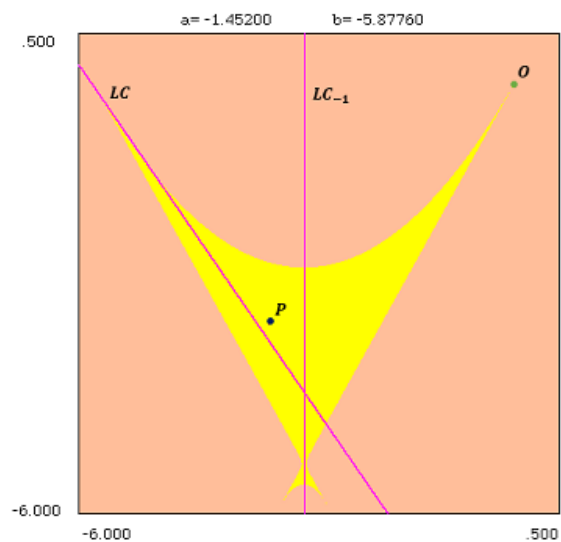


FIGURE 2.10 – Bifurcation de contact de LC et du bassin d'attraction du point fixe P et formation d'un point anguleux

2.6. BIFURCATIONS DE BASSINS PRODUITES PAR LA VARIATION DU PARAMÈTRE B

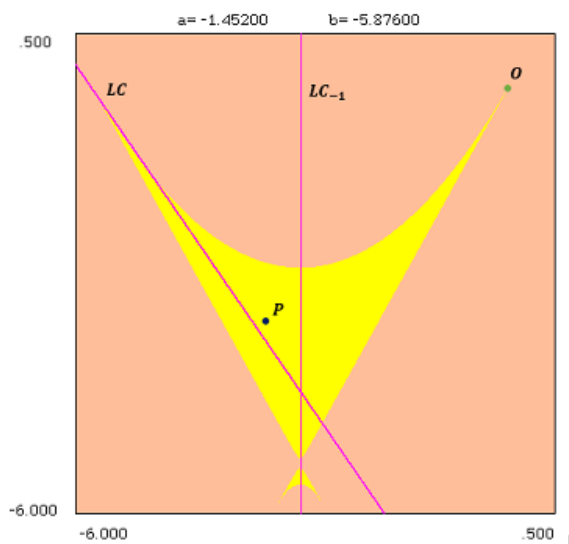


FIGURE 2.11 – Bassin non connexe

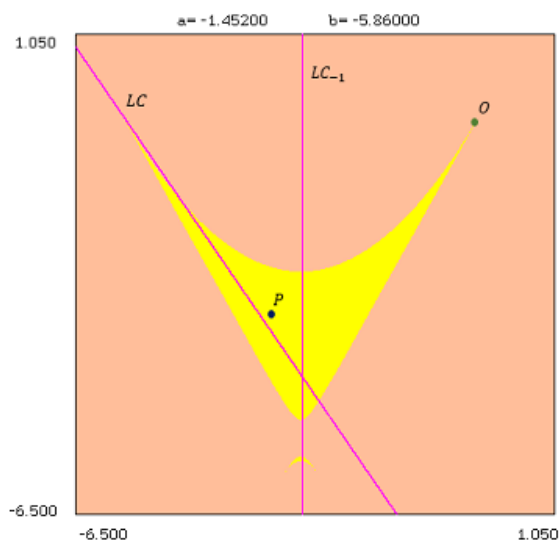


FIGURE 2.12 – Bassin non connexe

2.6. BIFURCATIONS DE BASSINS PRODUITES PAR LA VARIATION DU PARAMÈTRE B

Pour $a = -2$ et $b = 2$, les courbes critiques LC_{-1} , LC , LC_1 et LC_2 délimitent l'attracteur qui occupe tout le bassin. Les lignes invariantes de T et T^2 respectivement ($y = x$ et $y = -x + 1$) contiennent des points fixes $(0, 0)$ et $(5, 5)$ pour $y = x$ et les deux points de cycle-2 $\{(2, -1); (-1, 2)\}$ pour $y = -x + 1$ (voir la Figure 2.13).

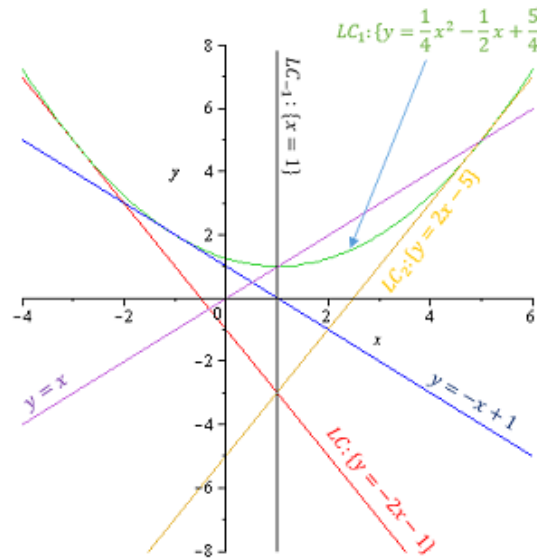


FIGURE 2.13 – Les courbes critiques pour $n = 2$, $a = -2$ et $b = 2$

2.6. BIFURCATIONS DE BASSINS PRODUITES PAR LA VARIATION DU PARAMÈTRE B

Considérons maintenant le paramètre $a = 0.96$ et varions b . Pour $b = 1.13$ et $b = 1.25$, le bassin est simplement connexe, le point fixe P de type col appartient à la frontière du bassin d'attraction. Une courbe fermée invariante (CFI) est née de la déstabilisation du point fixe foyer O via une bifurcation de Neïmark-Hopf (voir Figure 2.14 et Figure 2.15). Pour $b = 1.5$ un attracteur chaotique annulaire (voir Figure 2.16 et Figure 2.17).

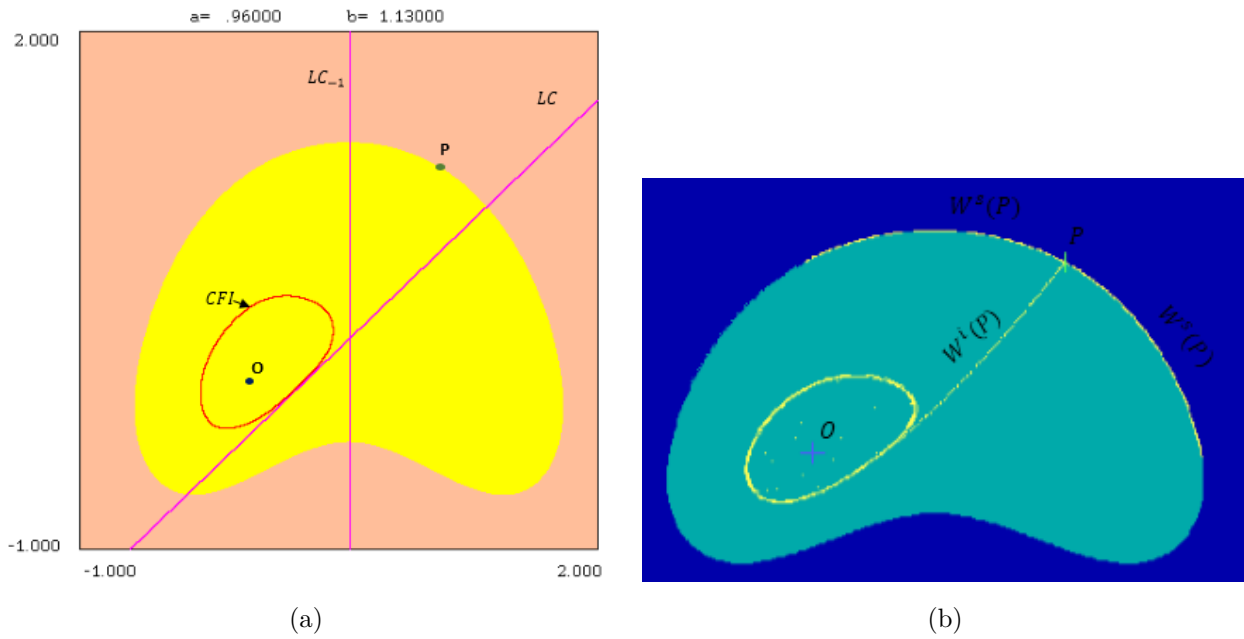


FIGURE 2.14 – Bassin simplement connexe

2.6. BIFURCATIONS DE BASSINS PRODUITES PAR LA VARIATION DU PARAMÈTRE B

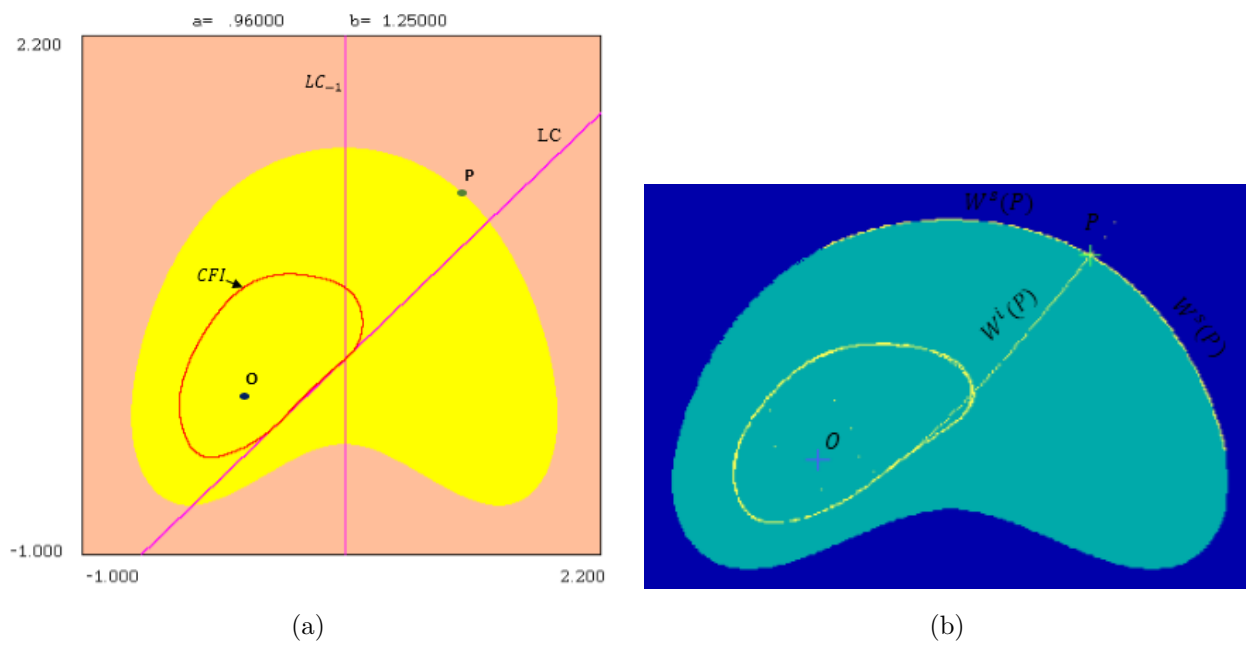


FIGURE 2.15 – Bassin simplement connexe

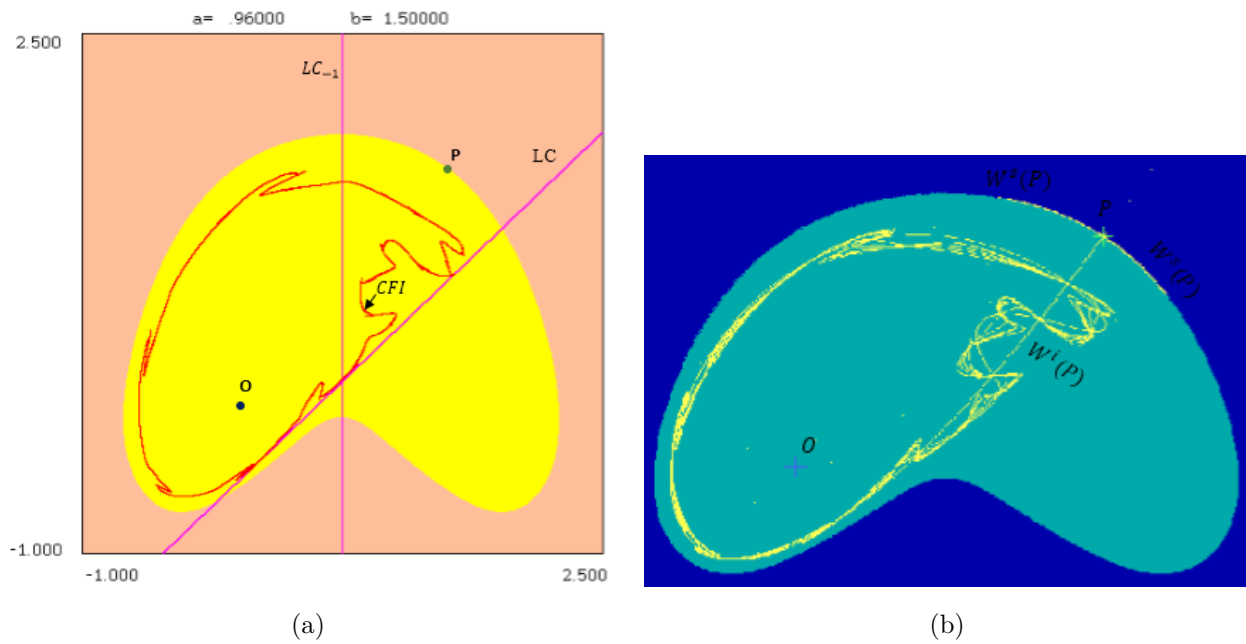


FIGURE 2.16 – Attracteur chaotique annulaire

2.6. BIFURCATIONS DE BASSINS PRODUITES PAR LA VARIATION DU PARAMÈTRE B

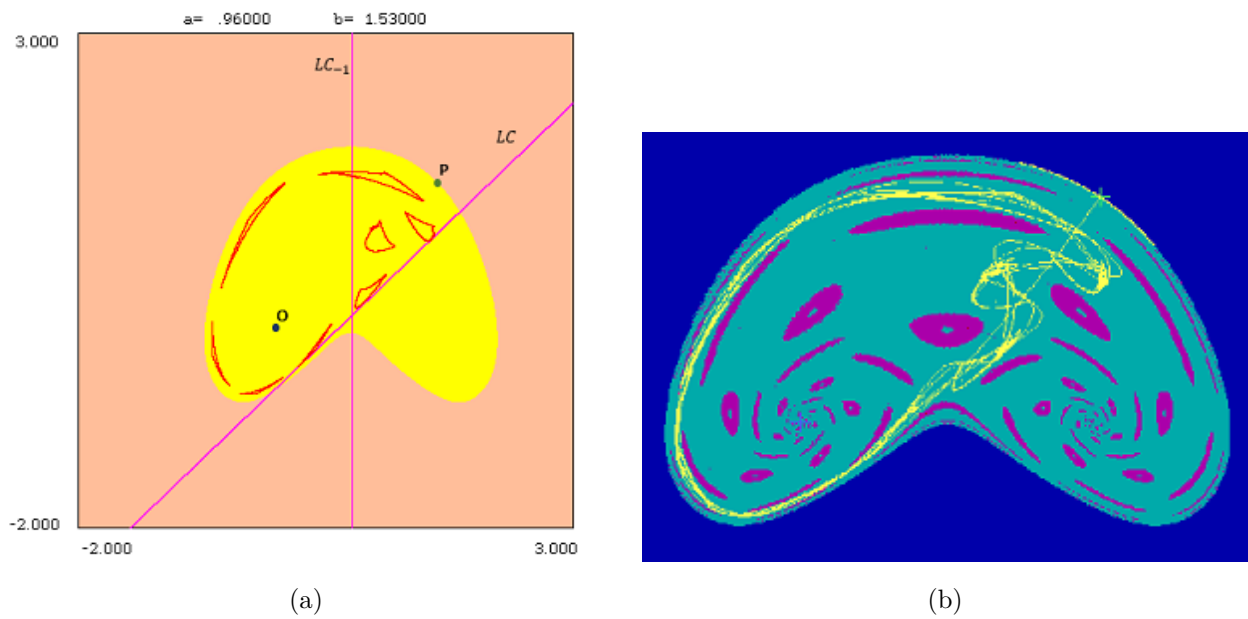


FIGURE 2.17 – Attracteur chaotique annulaire

CHAPITRE

3

DYNAMIQUE COMPLEXE D'ENDOMORPHISMES POLYNOMIAUX DE NON LINÉARITÉ IMPAIRE

3.1 Introduction

Ce chapitre est organisé comme suit : la première partie décrit certaines propriétés particulières du modèle pour des non linéarités impaires, leur dépendance aux paramètres et la stabilité des points fixes et des attracteurs. Le comportement qualitatif et les bifurcations sont examinés dans une sous-section en utilisant une théorie qualitative et la théorie standard des bifurcations. Dans la deuxième partie, nous mettons en évidence le rôle des courbes invariantes et de quelques cas où les bifurcations peuvent conduire à la création de bassins fractals et provoquer des changements qualitatifs dans la structure du domaine lorsque les paramètres sont modifiés. Enfin, nous terminerons avec quelques illustrations de bassins fractals et les courbes critiques.

3.2 Le modèle

Reprenons le système (2.1) avec des non linéarités impaires $n = 2k + 1, k = 1, 2, \dots$ et étudions la dynamique et les mécanismes qui induisent les variations principales relatives aux attracteurs et leurs bassins.

$$T_{a,b,n}(x, y) : \begin{cases} x' = y \\ y' = ay - bx + x^n \end{cases}$$

Premièrement, il suffit de montrer le schéma représentatif de ce système pour $n = 3$ fournissant ainsi des informations sur la région de stabilité pour le point fixe de base (domaine bleu dans la Figure (3.1)) et la région d'existence des cycles d'ordre k .

La Figure 3.1 représente le diagramme de bifurcation, comme le chapitre 2, de T dans le plan des paramètres (a, b) . On peut voir des régions d'attraction de k -cycles d'ordres différents ($k \leq 14$) issus des courbes de bifurcation (ordres différents sont représentés avec des couleurs différentes), et il est connu que les ordres suivent la règle de sommation de Farey standard. Les régions noires ($k = 15$) correspondent à l'existence de séquences itérées bornées comprenant un comportement chaotique. La zone blanche correspond aux séquences itératives divergentes dans l'espace des phases.

La Figure 3.1 représente les structures de bifurcations pour n impair. Nous remarquons des pertes de cycles quand la valeur de n augmente ($n \in \mathbb{N}$ et n impair), la zone noire diminue et devient complètement bleue.

Nous pouvons observer des caractéristiques intéressantes et des schémas dynamiques complexes lorsque les régions de stabilité des points fixes et des cycles sont mises en évidence. Le but de cette étape est de sélectionner l'ensemble des "bonnes valeurs" de paramètres susceptibles de garantir des situations intéressantes. Nous commençons nos recherches pour $n = 3$, dans l'espoir que ces propriétés seront transmises à $n = 2k + 1, k > 1$.

Ce modèle peut produire des dynamiques régulières et / ou chaotiques. De la Figure 3.2(a), nous pouvons tirer la conclusion suivante :

- Pour $b > 1$ et $-2 < a < 2$, dans la zone noire, différents k -cycles peuvent coexister.
- Pour $1 < b < 1.84$ et $a = -1$, un cycle d'ordre-3 peut coexister avec une courbe invariante fermée.
- Pour $1 < b < 2$ et a proche de 0, deux cycles d'ordre-4 coexistent.
- Pour $1 < b < 1,84$ et $a = 1$, nous avons un cycle d'ordre-6.

La dynamique périodique, provoquée par les verrouillages de fréquence qui se présentent sous forme de "régions colorées" de langues d'Arnold étroites d'ordres ≤ 14 , est représentée en touchant la courbe de bifurcation de Neïmark-Hopf $b = 1$.

3.2. LE MODÈLE

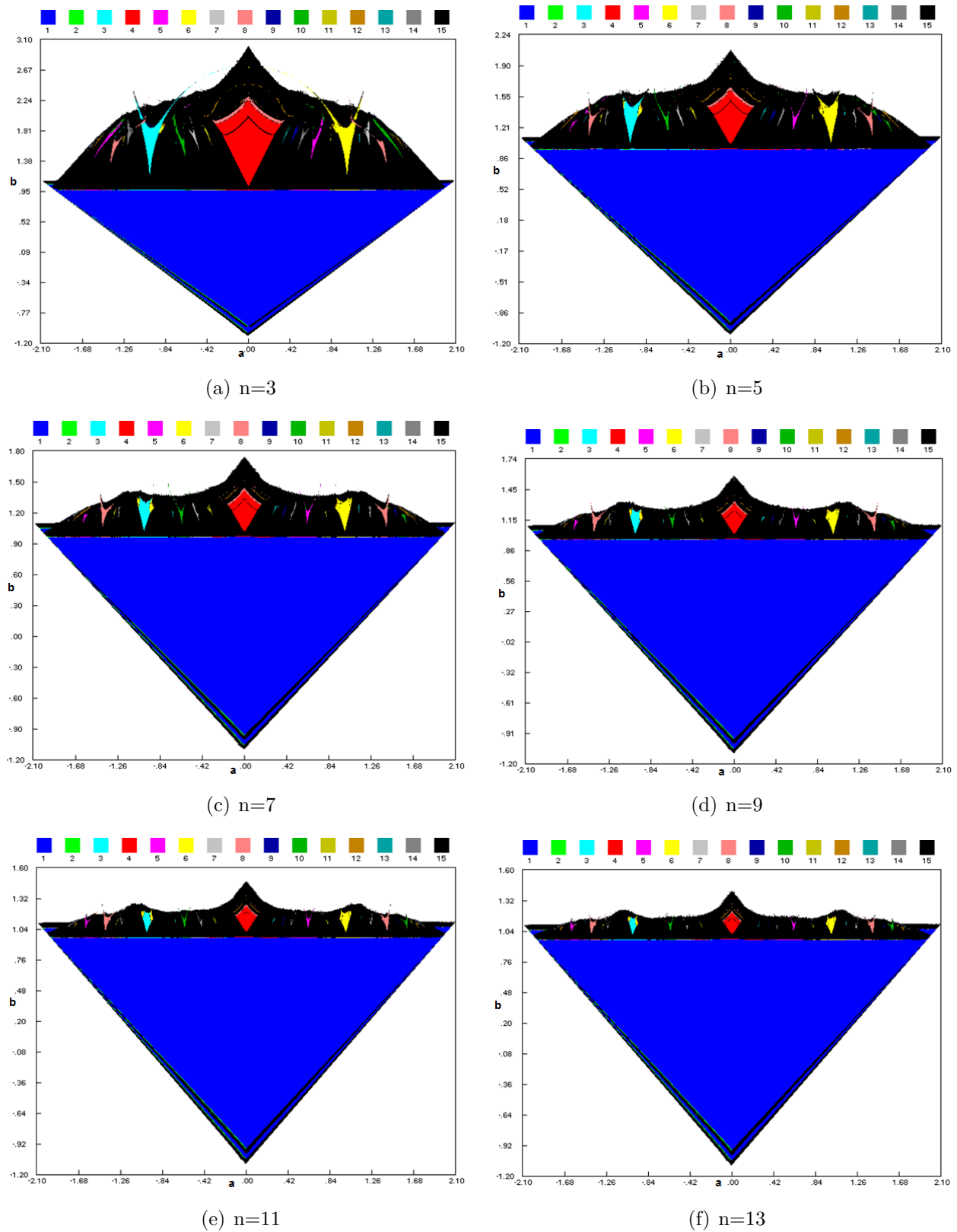


FIGURE 3.1 – Les structures de bifurcations pour n impair

3.2. LE MODÈLE

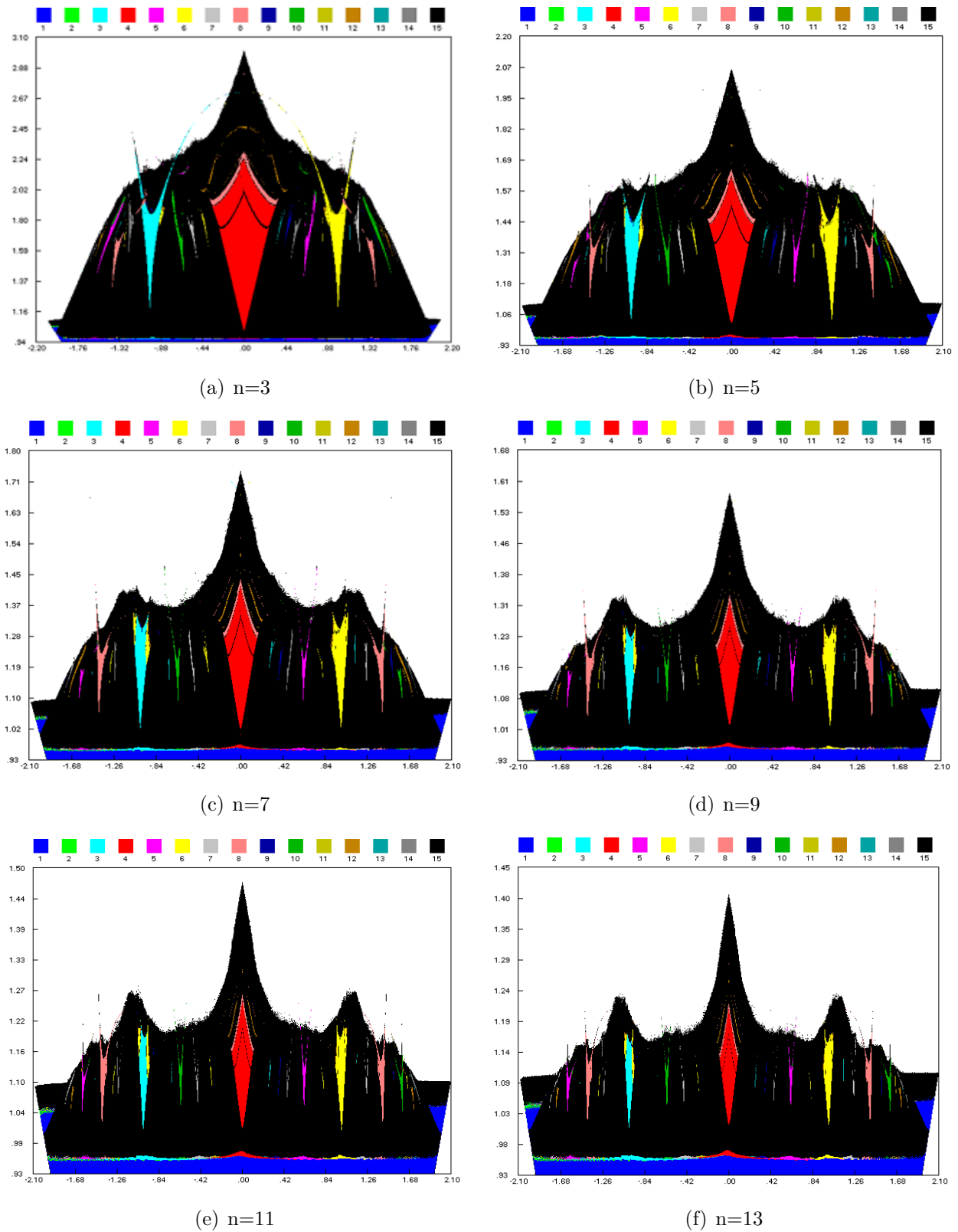


FIGURE 3.2 – Agrandissement des zones noires pour n impair

3.2.1 Points fixes et courbes critiques

Considérons le système dynamique $T_{a,b,3}$ défini par :

$$T : \begin{cases} x' = y \\ y' = ay - bx + x^3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Les points fixes de cette récurrence sont des solutions obtenues par une manipulation triviale de (3.1) avec $x' = x$ et $y' = y$. Outre la solution triviale $(0; 0)$ qui existe toujours deux points fixes supplémentaires si $b \geq -1 + a$.

Nous devons concentrer notre attention sur les bifurcations jouant un rôle important dans la dynamique, celles se produisant pour $-2 \leq a \leq 2$ et $-1 \leq b \leq 3$.

Nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Proposition 3.2.1 *Si $a = 0$ et $b + 1 > 0$, deux autres points fixes symétriques P_1 et P_2 peuvent exister*

$$P_1 = (\sqrt{b+1}, \sqrt{b+1}) \text{ et } P_2 = (-\sqrt{b+1}, -\sqrt{b+1})$$

Pour $-2 \leq a \leq 2$ et $b + 1 - a > 0$, deux autres points fixes symétriques P_1 et P_2 peuvent exister

$$P_1 = (\sqrt{b+1-a}, \sqrt{b+1-a}) \text{ et } P_2 = (-\sqrt{b+1-a}, -\sqrt{b+1-a})$$

La courbe paramétrique $\Lambda_{(1)_0} : b = a - 1$ correspond à la courbe de la bifurcation fourche.

Pour $a = 0$, T^2 est une transformation découplée (pour plus de détails voir les références [25] et [28] et chapitre 4). Mira et al. ont montré qu'une dynamique complexe peut émerger de l'itération des transformations découplées caractérisées par la multistabilité.

3.2.1.1 Les déterminations inverses

La transformation T admet trois déterminations inverses qui sont des solutions du système dépendantes de l'ensemble des paramètres considérés. En fait, en déterminant les préimages d'un point (x', y') , nous obtenons :

$$\begin{cases} y = x' \\ ay - bx + x^3 = y' \end{cases} \quad (3.2)$$

De la deuxième équation nous trouvons :

$$x^3 - bx + (ax' - y') = 0 \quad (3.3)$$

En utilisant les formules de Cardan pour résoudre l'équation (3.3), nous trouvons :

$$\Delta(x', y') = \frac{1}{4}(ax' - y')^2 - \frac{b^3}{27} \quad (3.4)$$

- Si $\Delta(x', y') > 0$, l'équation cubique admet une solution réelle unique. C'est-à-dire qu'un point (x', y') a une unique préimage de rang 1.
- Si $\Delta(x', y') < 0$, l'équation admet trois solutions réelles. C'est-à-dire qu'un point (x', y') a trois préimages distinctes de rang 1.
- Si $\Delta(x', y') = 0$, l'équation admet trois solutions réelles, dont deux sont égales. C'est-à-dire qu'un point (x', y') a trois préimages de rang 1, dont deux sont confondues.

Nous en déduisons que la transformation bidimensionnelle est non inversible et que le plan des phases peut être formé de trois régions ; une région Z_3 sur laquelle l'application T admet trois déterminations inverses données par :

$$T_1^{-1} : \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(y' - ax') + \sqrt{\Delta(x', y')}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(y' - ax') - \sqrt{\Delta(x', y')}} \\ y = x' \end{cases} \quad (3.5)$$

et

$$T_{2,3}^{-1} : \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(y' - ax') + \sqrt{\Delta(x', y')}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(y' - ax') - \sqrt{\Delta(x', y')}} \\ \pm i \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}(y' - ax') + \sqrt{\Delta(x', y')}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}(y' - ax') - \sqrt{\Delta(x', y')}} \right] \\ y = x' \end{cases} \quad (3.6)$$

et deux régions Z_1 sur laquelle l'application T admet une seule détermination inverse donnée par T_1^{-1} .

3.2.1.2 Les courbes critiques

Les courbes critiques sont déterminées via le déterminant de la matrice Jacobienne :

$$\det(J(x, y)) = b - 3x^2 \quad (3.7)$$

Ce dernier s'annule sur deux droites verticales du plan

$$x = \pm \sqrt{\frac{b}{3}} \quad (3.8)$$

Le lieu LC_{-1} est donc constitué de deux branches LC_{-1}^1 et LC_{-1}^2 , avec :

$$LC_{-1}^1 = \left\{ x = \sqrt{\frac{b}{3}} \right\} \quad \text{et} \quad LC_{-1}^2 = \left\{ x = -\sqrt{\frac{b}{3}} \right\} \quad (3.9)$$

Lorsque la condition suivante $b > 0$ est vérifiée, T est non inversible de type $Z_1 - Z_3 - Z_1$. Rappelons que :

$$\Delta(x', y') = \frac{1}{4}(ax' - y')^2 - \frac{b^3}{27} = 0$$

Ces régions Z_1, Z_3 sont séparées par deux courbes, notées $LC^{1,2}$, appelées courbes critiques, équivalentes à :

$$LC^1 = \left\{ (x, y) / y = ax + \sqrt[2]{\frac{4b^3}{27}} \right\} \quad \text{et} \quad LC^2 = \left\{ (x, y) / y = ax - \sqrt[2]{\frac{4b^3}{27}} \right\} \quad (3.10)$$

Le système dynamique (3.1) est symétrique par rapport à l'origine, car $T(-x, -y) = -T(x, y)$. Cela implique que tout ensemble invariant de T est soit symétrique par rapport à O , soit admet un ensemble invariant symétrique. Ceci vaut en particulier pour les points fixes et les cycles de $T(-x, -y) = -T(x, y)$. Ainsi, les deux points fixes P_1, P_2 , lorsqu'ils existent, sont dans les positions symétriques par rapport à O , et tout cycle de T de période impaire coexiste nécessairement par symétrie avec un autre cycle ayant les mêmes caractéristiques. Pour la même raison, tous les bassins d'attraction sont soit symétriques par rapport à O , soit un autre bassin existe également en position symétrique.

Examinons les comportements qualitatifs du système (3.1). Comme d'habitude, la dynamique locale du système (3.1) au voisinage d'un point fixe dépend de la matrice jacobienne. Le jacobien est évalué au point fixe de base.

Soit $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b + 3x^2 & a \end{pmatrix}$ la matrice jacobienne de T au point $(x; y)$.

Considérons maintenant les conditions de la stabilité locale du point fixe $O = (0, 0)$ en terme de paramètres dans l'équation(3.1).

La matrice Jacobienne $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}$ de T en O admet deux multiplicateurs :

$$S_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (3.11)$$

Pour $a^2 - 4b > 0$, et par un simple calcul, il est simple d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 3.2.2 *Si $1 + a + b > 0$, le système (3.1) subit une bifurcation flip au point fixe $O = (0, 0)$.*

Proof. Par un simple calcul, nous pouvons prouver cette proposition ■

De :

$$T \circ T(x, y) = \begin{cases} x' = ay - bx + x^3 \\ y' = a(ay + x^3 - bx) - by + y^3 \end{cases}$$

Nous cherchons des points fixes de $T \circ T$ en mettant :

$$\begin{cases} x = ay - bx + x^3 \\ y = a(ay + x^3 - bx) - by + y^3 \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous obtenons un polynôme de degré trois par rapport à y :

$$y^3 - (b + 1 - a^2)y - abx + ax^3 = 0 \quad (3.13)$$

et

$$y = \frac{(1 + b)x - x^3}{a} \quad (3.14)$$

Après avoir remplacé y par son expression, nous obtenons :

$$\left(\frac{(1 + b)x - x^3}{a} \right)^3 - (b + 1 - a^2) \left(\frac{(1 + b)x - x^3}{a} \right) - abx + ax^3 = 0 \quad (3.15)$$

Nous obtenons seulement un cycle constitué de (P_3, P_4) tels que :

$$P_{3,4} = \left(\pm \sqrt{b + 1 + a}, \pm \left[(b + 1) \sqrt{b + 1 + a} \mp (b + 1 + a)^{\frac{3}{2}} \right] \right) \quad (3.16)$$

Proposition 3.2.3 *Si $b > -1$ et $b^2 + 2b + 1 - 4a^2 > 0$, le cycle-2 né de la bifurcation flip subit une bifurcation fourche donnant lieu à deux cycles-2 supplémentaires.*

Proof. Deux cycles d'ordre 2 supplémentaires apparaissent via une bifurcation fourche, le deuxième cycle-2 est formé de deux points (P_5, P_6) et le troisième et dernier cycle-2 est formé de deux points (P_7, P_8) .

$$P_{5,6} = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\psi}, \frac{1}{a} \left[\pm \frac{1}{2} (1 + b) \sqrt{\psi} \mp \frac{1}{8} (\psi)^{\frac{3}{2}} \right] \right) \quad (3.17)$$

et

$$P_{7,8} = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\psi'}, \frac{1}{a} \left[\pm \frac{1}{2} (1 + b) \sqrt{\psi'} \mp \frac{1}{8} (\psi')^{\frac{3}{2}} \right] \right) \quad (3.18)$$

avec $\psi = 2 + 2b + 2\sqrt{b^2 + 2b + 1 - 4a^2}$ et $\psi' = 2 + 2b - 2\sqrt{b^2 + 2b + 1 - 4a^2}$. ■

Proposition 3.2.4 *Si $b = 1$ et $-2 < a < 2$, le système (3.1) subit une bifurcation de Neïmark-Hopf au point fixe interne stable $O(0, 0)$ de type foyer. De plus, une courbe fermée invariante attractive apparaît autour de ce point fixe.*

La matrice Jacobienne $J_{P_{1,2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2b - 3a + 3 & a \end{pmatrix}$ de T aux points $P_{1,2}$ admet deux multipliateurs

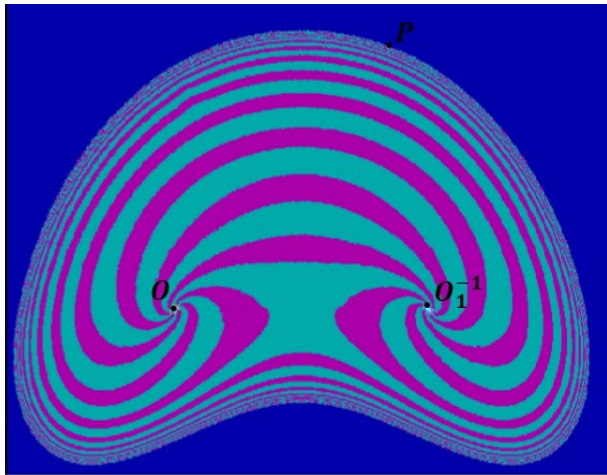
$$S_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + (2b - 3a + 3)} \quad (3.19)$$

Pour $-2 \leq a \leq 2$ et $-1 \leq b \leq 2$, $\frac{a^2}{4} + (2b - 3a + 3) \geq 4$, les points fixes P_1, P_2 sont des cols. Les considérations théoriques ci-dessus permettent d'étudier sans ambiguïté la dynamique du système.

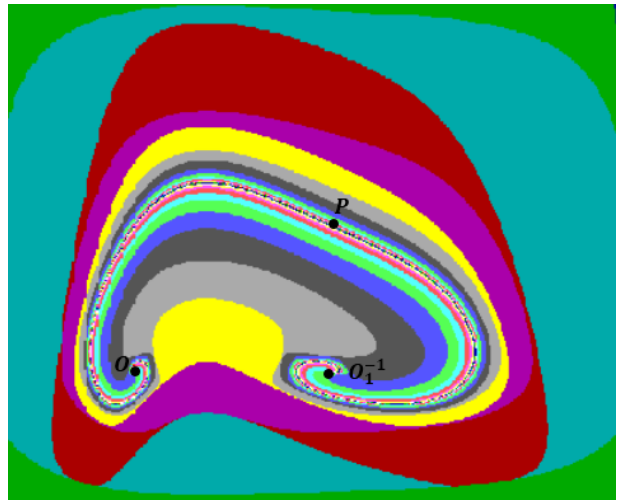
3.3 Courbes invariantes et inverses

Dans cette section, nous montrons certains mécanismes associés à l'apparition et à la disparition de courbes invariantes fermées. Nous verrons qu'un mécanisme, qui s'est déjà produit dans certaines classes de systèmes dynamiques avec des non linéarités paires, est valable pour des non linéarités impaires. Pour $n = 2$, ce système a retenu l'attention de Razafimandimby [33] et de Clerc & Hartmann [6]. Ce système est associé à une connexion-col également appelée boucle homocline, comme on le voit dans Djellit et al. [7], représentée par une courbe invariante fermée formée par la fusion des deux branches issues de l'ensemble stable du deuxième point fixe de type col. Il s'agit d'une situation structurellement instable, ce qui entraîne une division entre deux comportements dynamiques qualitativement différents. Comme ce type de bifurcation ne peut être prédit par une étude locale, on peut la classer comme une bifurcation globale.

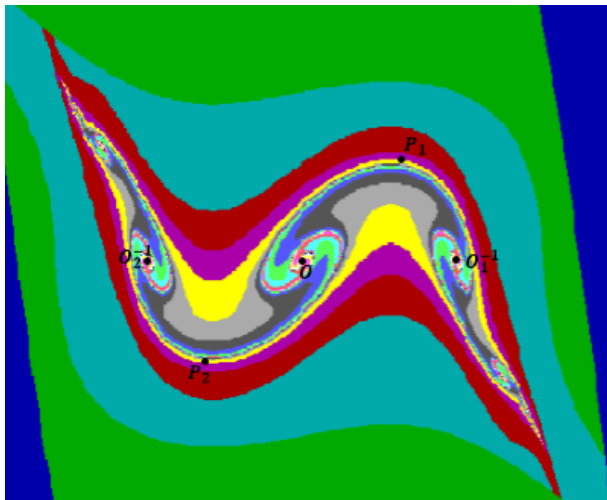
Par conséquent, des différences évidentes des caractéristiques pour $n = 2k$ et $n = 2k+1$, $k \geq 1$ apparaissent et illustrées par les Figures 3.3(a), 3.3(b), 3.3(c) et 3.3(d). Ces caractéristiques peuvent être utilisées pour diagnostiquer les types de comportement dans les systèmes dont l'étude théorique est difficile.



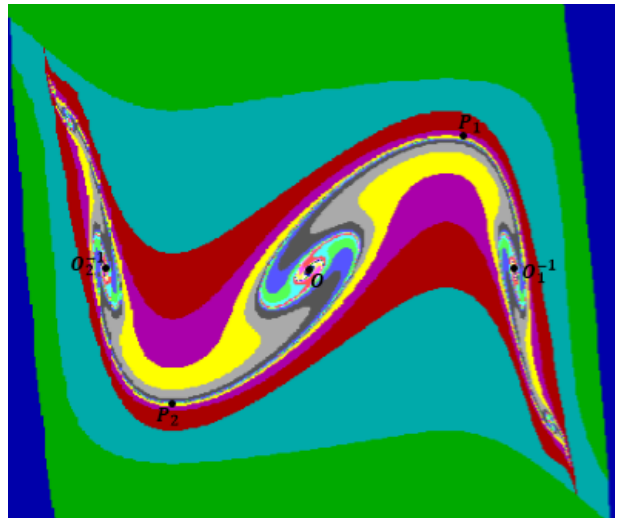
(a) $n=2, a=1, b=-1$



(b) $n=4, a=1, b=-1$



(c) $n=3, a=1.8, b=2$



(d) $n=5, a=1.8, b=2$

FIGURE 3.3 – Les variétés des cols P_1 et P_2 autour du point fixe O et de ses préimages.

Le comportement des variétés de cols joue un rôle principal dans la formation de courbes invariantes. Dans les systèmes bidimensionnels, les variétés de col sont des courbes unidimensionnelles et leur comportement peut être analysé numériquement. Les attracteurs sont situés le long de la variété instable de points fixes col qui répètent leur forme.

Dans un système dynamique polynomial du plan, les variétés instables de col ainsi que l'attracteur lui-même doivent être "groupés" dans une région délimitée du plan des phases.

Illustrons ce qui a été mentionné ci-dessus avec des non linéarités impaires. Les Figures 3.3(c) et 3.3(d) montrent le comportement des variétés des points fixes de type col. Nous répétons numériquement les résultats obtenus pour des degrés impairs.

Pour $b = 2$, le point fixe O et ses préimages de rang 1 sont entourées de variétés invariantes stables de P_1 ou de P_2 . O est une préimage de lui-même. Ces bassins renferment des trajectoires singulières "complexes". Il peut s'agir de boucles séparatrices de points cols ou de courbes homocliniques de cycles cols après le moment de tangence de leurs variétés stables et instables (voir Figure 3.3).

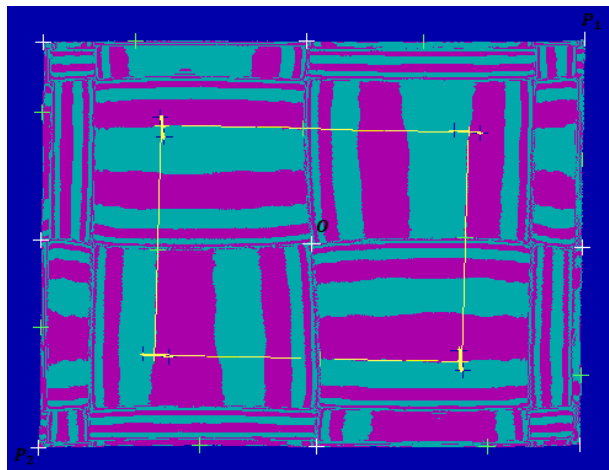
Comme a augmente, le point fixe interne O devient instable par une bifurcation de Neïmark-Hopf et le comportement du modèle devient chaotique.

3.3.1 Courbes invariantes et structure de bifurcation

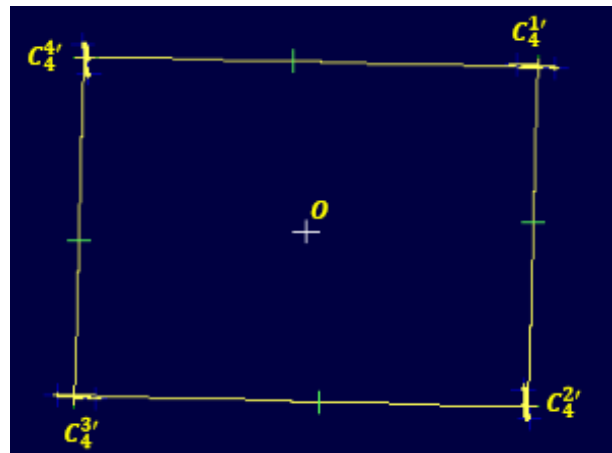
La dynamique est entièrement étudiée à l'aide de simulations numériques. L'analyse révèle les types d'attracteurs et montre que la dynamique est riche en mettant en évidence le rôle des ensembles invariants.

Nous étudions les régularités dans le comportement de variétés invariantes auxquelles les attracteurs sont étroitement liés. Sur la Figure 3.4, pour $a = -0,05$ et $n = 3$, un comportement chaotique apparaît autour du point fixe trivial O , les deux cols d'ordre 4 communiquent en créant une courbe hétéroclinique et invariante fermée.

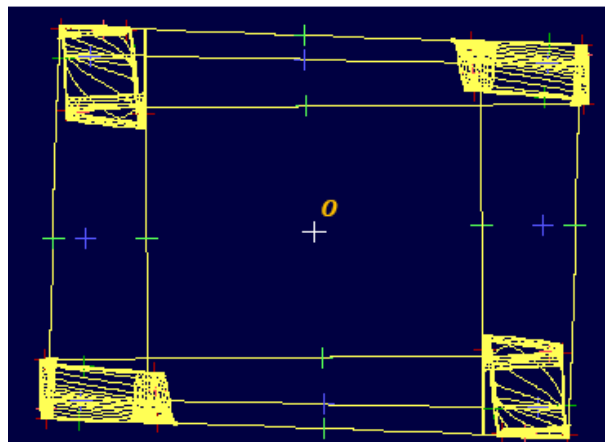
Les zones rouges et bleues sont leurs bassins d'attraction. Les phénomènes d'auto-similarité et les frontières des bassins fractales sont facilement visibles. Les variétés instables issues de col sont illustrées pour $b = 1.95$ et $b = 2.20$.



(a) $n=3$, $a=-0.05$, $b=1.95$



(b) $n=3$, $a=-0.05$, $b=1.95$



(c) $n=3$, $a=-0.05$, $b=2.20$

FIGURE 3.4 – Les bassins d'attraction pour les cycles-4

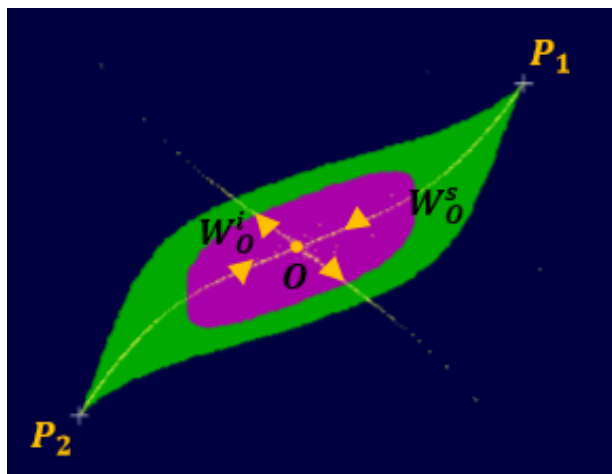
Sur la Figure 3.5, pour $a = -0.05$, $n = 5$ le point fixe stable O est à l'intérieur et subit une bifurcation de dédoublement de période (flip) donnant lieu à un cycle-2 dont les points appartiennent à la droite invariante $y = -x$ qui est aussi la variété instable.

Nous pouvons voir que le processus se répète pour le cycle d'ordre 2. Chaque point du cycle-2 subit une bifurcation fourche (voir Figure 3.5(c) et 3.5(d)). Lorsque b augmente, ces nouveaux points subissent une bifurcation de doublement de période, donnant lieu à deux points d'un cycle-4.

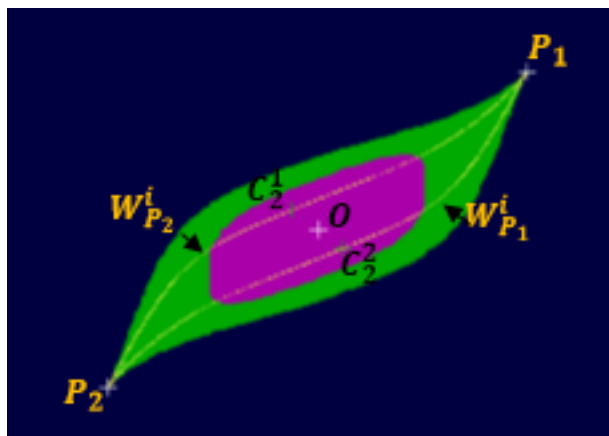
Les points fixes O , P_1 et P_2 appartiennent à la droite invariante $y = x$. La détermination des ensembles invariants est cruciale dans l'étude de la dynamique de ces systèmes.

Lorsque le paramètre a augmente encore, une bifurcation de Neïmark-Hopf se produit à $b = 1.01$. Dans le plan de phase, l'apparition d'une courbe fermée CFI est représentée dans les Figures 3.5(e) et 3.5(f). Ces complexités dynamiques sont causées par la non-linéarité du système. Nous donnons une illustration du scénario de la bifurcation de doublement de période suivie par l'émergence des trois cycles-2, où tous les cycles instables et tous les points fixes et une orbite stable coexistent. Les variétés instables issues de points de cycles-2 tournent autour du point fixe O de manière étrange.

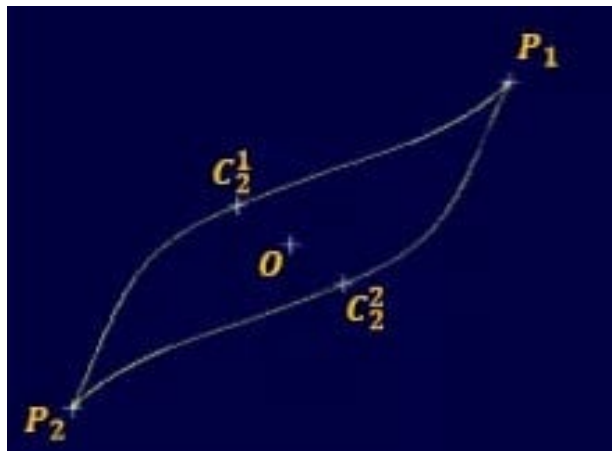
Sur les Figures 3.5(e) et 3.5(f) la courbe invariante fermée CFI issue de la bifurcation de Neïmark-Hopf et les variétés instables sont enroulées autour de la courbe fermée.



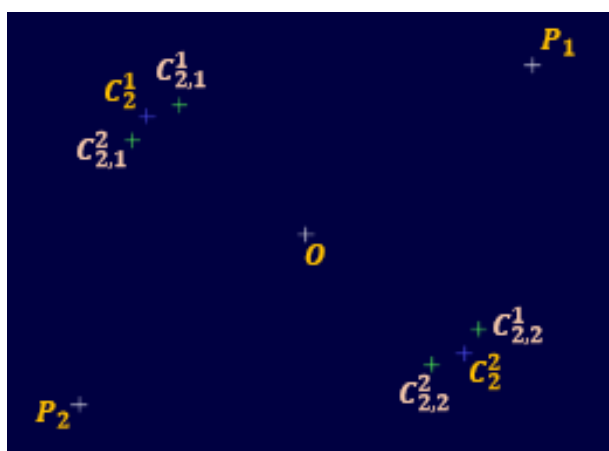
(a) Doublement de la période du point fixe trivial O



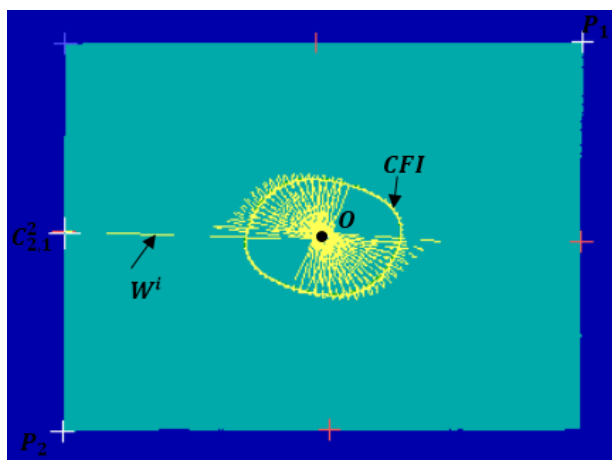
(b) La ligne invariante $y = -x$ contient les deux points de cycle-2



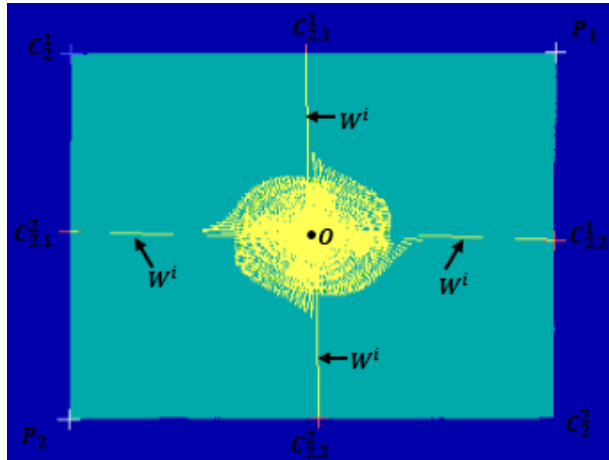
(c) Boucle hétéroclinique joignant des points d'ordre 1 et 2



(d) Bifurcation de Pitchfork (Fourche) pour chaque point de cycle-2



(e) $n=5, a=-0.05, b=1.01$



(f) $n=5, a=-0.05, b=1.01$

FIGURE 3.5 –

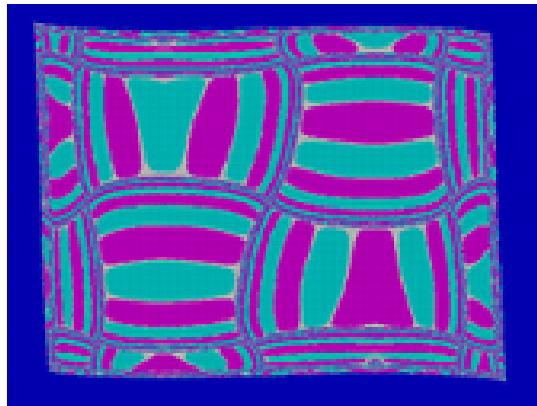
3.4 Évolution de bassins

Nous avons détecté le chaos et d'autres formes de dynamiques complexes dans ces modèles de dynamiques polynomiales simples.

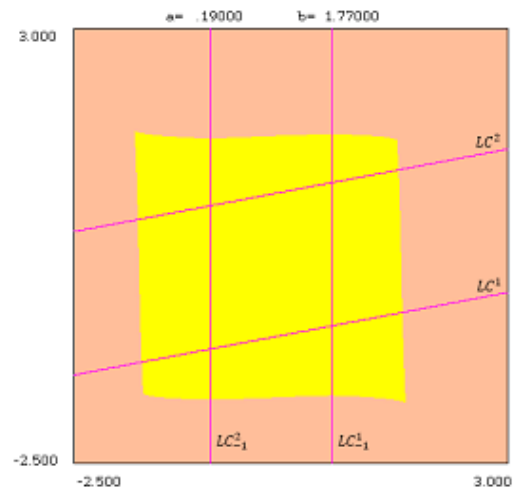
Pour $n = 3$, quelques schémas dynamiques complexes apparaissant dans ce modèle avec une dynamique non unique à multiples attracteurs. Nous montrons que plusieurs types d'attracteurs peuvent coexister, y compris des attracteurs réguliers et chaotiques.

Une représentation graphique des bassins fractals fournit une indication qualitative de la difficulté à prévoir leur évolution future. Depuis que la relation entre la fractalité et la dynamique non linéaire a été établie, nous utilisons une technique numérique pour caractériser la nature fractale des bassins. Nous suivons l'évolution du plan de phase en variant les paramètres a et b . Nous avons effectué une étude dans le plan des phases. Le système affiche principalement la dynamique de deux attracteurs coexistants.

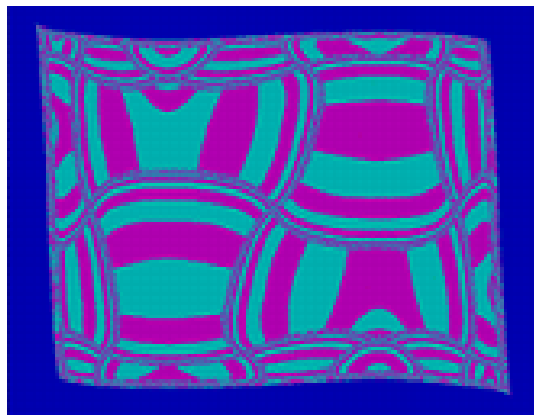
Dans certaines régions de paramètres, les figures mettent en évidence les conditions d'occurrence de bassins entremêlés. Dans l'intervalle $-1 < a < 2$, une coexistence stable est possible pour $1.70 < b < 2$. C'est la conséquence de bifurcations fourches successives suivies d'un plus grand nombre d'attracteurs réguliers coexistants dans l'espace des phases (voir Figures 3.6(a), 3.6(c), 3.6(e) et 3.6(f)). Malgré les inconvénients apparents des bassins d'attraction déformés, on peut supposer que de nombreux attracteurs avec des bassins fractals et mélangés sont présents dans ce modèle. Cette étude confirme que des systèmes simples à multi-attracteurs sont capables de générer des dynamiques complexes et imprévisibles (voir aussi Djellit & Soula[8]). Les Figures 3.6(a), 3.6(c), 3.6(e) et 3.6(f), montrent les propriétés de similarité et les frontières fractales des bassins.



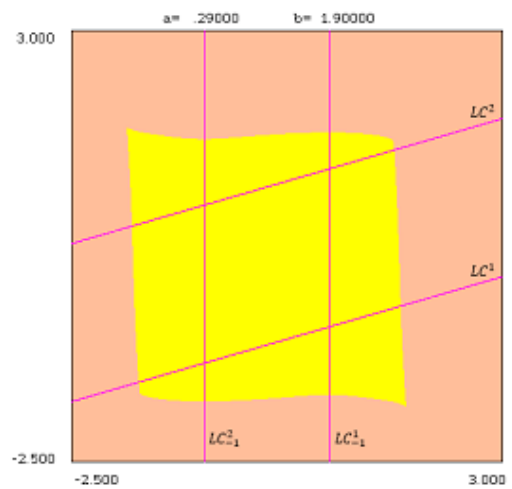
(a) $a=0.19, b=1.77$



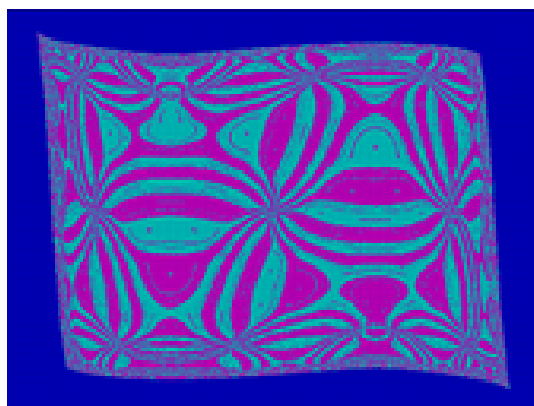
(b) $a=0.19, b=1.77$



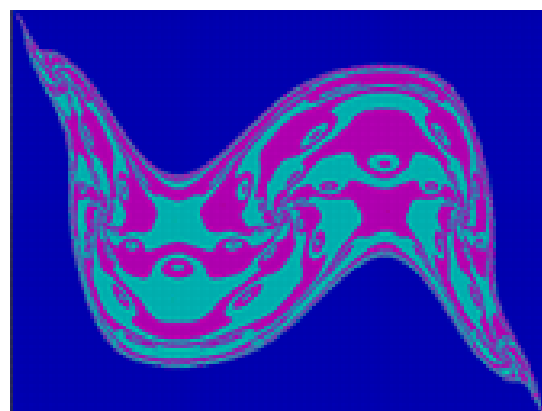
(c) $a=0.29, b=1.90$



(d) $a=0.29, b=1.90$



(e) $a=0.38, b=1.77$



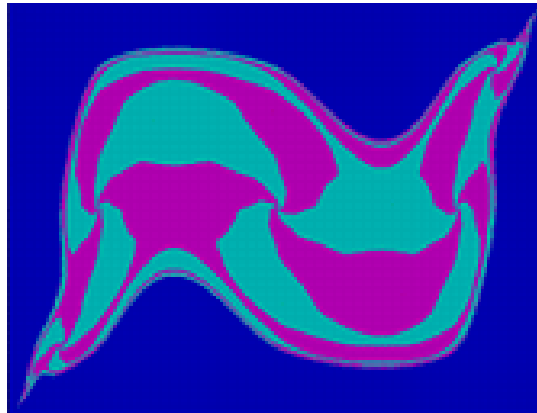
(f) $a=1.20, b=1.77$

FIGURE 3.6 – Propriété auto-similarité et mise en évidence de frontières des bassins fractals.

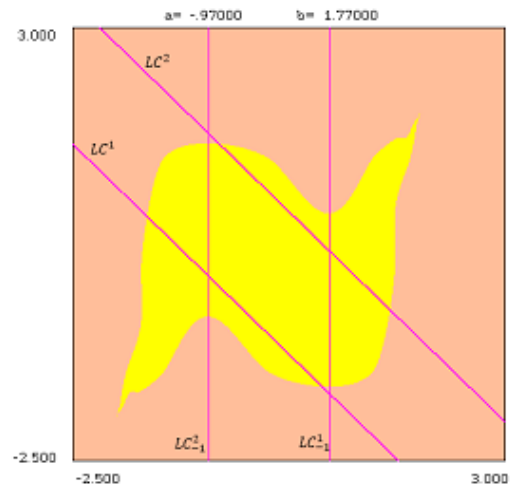
En analysant les Figures, nous montrons comment une caractéristique particulière est impliquée dans l'explication de certaines propriétés du système associées aux frontières des bassins et à leurs ensembles attractants. Les schémas d'auto-similarité et les bordures des bassins fractals sont également visibles dans la Figure 3.6(c), Kaitala et al. ont révélé ce résultat intrigant (voir leur travail [22] pour plus de détails).

L'objectif principal ici est de souligner le rôle crucial de la non-linéarité dans la caractérisation des propriétés globales du système considéré dans ce chapitre, et en particulier leur rôle dans l'apparition des différents comportements dynamiques.

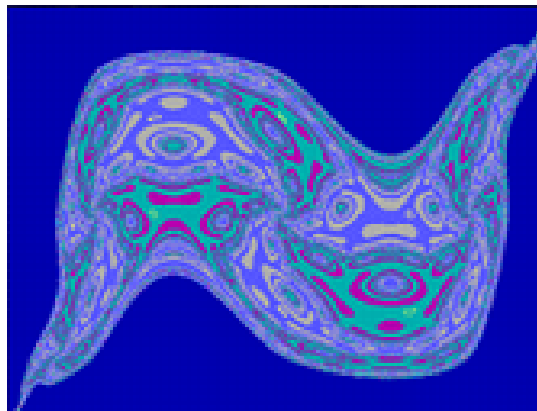
Pour le cas $b = 1,77$ et $a = -0.97$, il existe deux attracteurs, chacun avec son propre bassin illustré par les bassins rouge et bleu dans la Figure 3.7(a). Nous observons que pour $b = 1,87$, les bassins d'attraction pour les deux courbes fermées cycliques d'ordre 3 dans les bassins gris et vert et deux cycles d'ordre 3 associés aux bassins blanc et rouge. On observe que les bassins de ces attracteurs sont entremêlés de manière très complexe dans les Figures 3.7(e) et 3.7(f).



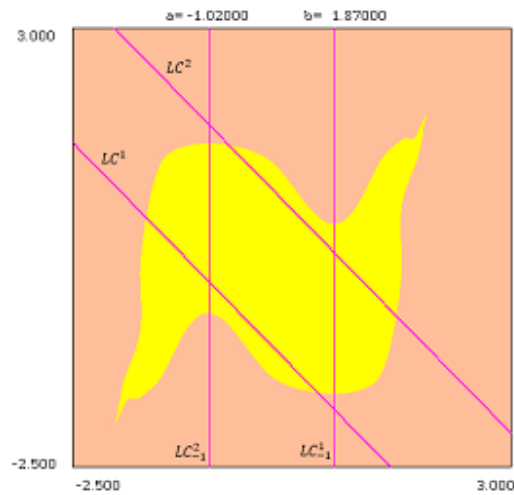
(a) $a=-0.97, b=1.77$



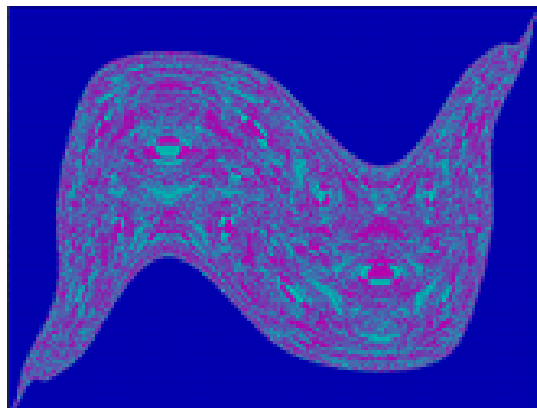
(b) $a=-0.97, b=1.77$



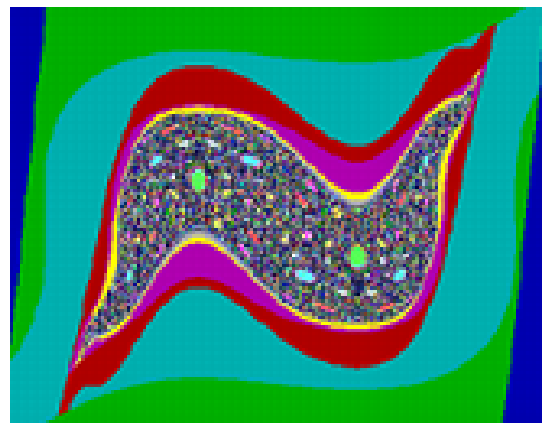
(c) $a=-1.02, b=1.87$



(d) $a=-1.02, b=1.87$



(e) $a=-1.1, b=1.92$



(f) $a=-1.3, b=2$

FIGURE 3.7 – Évolution des bassins - bassins entremêlés

CHAPITRE

4

ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME DÉCOUPLÉ T

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons l'étude du système découplé en dimension deux. L'objectif est de cerner plusieurs phénomènes entre autre la propriété de multistabilité (coexistence de plusieurs attracteurs), de déterminer les points fixes, les cycles d'ordre 2, 4, 8 et 16 (via les successives bifurcations flip) et de mettre en évidence la structure ou la configuration particulière des cycles et la représentation de leurs bassins d'attraction (l'architecture de ces cycles). Nous terminons par une étude sur les ensembles critiques.

4.2 Propriétés générales d'une transformation découplée

D'une manière générale, nous parlerons de récurrence découplée T de dimension deux, chaque fois qu'on a la forme suivante :

$$T(x, y) = (f(y), g(x)) \in X \times Y \tag{4.1}$$

où $f : Y \rightarrow X$ et $g : X \rightarrow Y$ sont deux fonctions continues. Ce type de transformation décrit un modèle de Marketing appelé "Cournot duopole". Ainsi T s'appelle une transformation de Cournot, et f et g sont appelées deux fonctions de réaction : elles décrivent des lois sur les productions de sociétés qui sont en concurrence dans un marché. Pour toute transformation de ce type, il est possible d'associer les deux transformations unidimensionnelles définies par :

$$F = f \circ g \quad \text{et} \quad G = g \circ f \quad (4.2)$$

Les propriétés suivantes sont établies dans [5], [17] et [18].

Propriété 4.2.1

$$T^{2k} : \begin{cases} x' = F^k(x) \\ y' = G^k(y) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$T^{2k+1} : \begin{cases} x' = f(G^k(y)) \\ y' = g(F^k(x)) \end{cases}$$

Où $k = 1, 2, \dots, F^k$ et G^k sont les images d'ordre k de F et G . La nature d'un cycle d'une transformation symétriquement découplée dépend de l'ordre n du cycle, car un itéré pair ($n = 2k$) de T est toujours découplé et un itéré impair ($n = 2k + 1$) est toujours symétriquement découplé.

Propriété 4.2.2 Pour $n \geq 1$, les deux récurrences unidimensionnelles F et G satisfont :

$$\begin{aligned} f \circ G^n(y) &= f \circ g \circ f \circ \dots \circ g \circ f(y) = F^n \circ f(y) \\ g \circ F^n(x) &= g \circ f \circ g \circ \dots \circ f \circ g(x) = G^n \circ g(x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Nous déduisons de cette propriété que les cycles de la récurrence F et ceux de G , et leurs propriétés de stabilité sont strictement liées. La correspondance entre les cycles de F et ceux de G est donnée dans la propriété suivante :

Propriété 4.2.3

- 1- Si $\{a_1, \dots, a_n\}$ un cycle de F d'ordre n , alors : $\{b_1, \dots, b_n\} = \{g(a_1), \dots, g(a_n)\}$ est un cycle de G d'ordre n .
- 2- Si $\{b_1, \dots, b_n\}$ un cycle de G d'ordre n , alors : $\{a_1, \dots, a_n\} = \{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ est un cycle de F d'ordre n . On appelle ces cycles, des cycles conjugués. La stabilité est déduite par cette relation :

$$S = \prod_{i=1}^n F'(a_i) = \prod_{i=1}^n G'(b_i) = \prod_{i=1}^n f'(b_i)g'(a_i) \quad (4.5)$$

Ces propriétés montrent que les cycles de la transformation bidimensionnelle T sont liés aux cycles des transformations unidimensionnelles F et G .

Propriété 4.2.4

- Si x_1, x_2, \dots, x_m sont m points fixes de F , alors $y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \dots, y_m = g(x_m)$ sont les points fixes conjugués de G
- Parmi les m^2 points du produit cartésien $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \times \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, m points sont des points fixes de la transformation T et sont donnés par :

$$(x_i, y_i) = (x_i, g(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

Remarque 4.2.1 Les $(m^2 - m)$ points restants de la forme $(x_i, y_j), i \neq j$, forment des cycles d'ordre deux pour la récurrence T . Du fait que :

$$T(x_i, y_j) = T(x_i, g(x_j)) = (F(x_j, g(x_i)) = (x_j, y_i)$$

$$T(x_j, y_i) = T(x_j, g(x_i)) = (F(x_i, g(x_j)) = (x_i, y_j)$$

Donc $\{(x_i, y_j), (x_j, y_i)\}$ est un cycle d'ordre deux de T .

Il existe $\frac{(m^2 - m)}{2}$ cycles d'ordre deux de T donnés par :

$$C_T^2 = \{(x_i, g(x_j)), (x_j, g(x_i))\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \text{ et } i < j \quad (4.7)$$

Propriété 4.2.5 Un cycle d'ordre k est constitué de points fixes de la transformation T^k .

1- Si l'ordre du cycle est un nombre impair $(2k + 1)$, on a deux cas :

- Soit les abscisses des points de ce cycle de T sont des points d'un cycle de même ordre que F .
- Soit les ordonnés des points du cycle de T sont des points d'un cycle de même ordre que G , mais pas les deux à la fois.

2- Si l'ordre de cycle est pair $(2k)$, les abscisses et les ordonnés de ce cycle sont en même temps des points d'un cycle de F et G d'ordre k respectivement.

En effet : On sait que les points d'un cycle d'ordre n de T sont des points fixes de T^n .

a)- Un cycle d'ordre $(2k + 1)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x = f(G^k(y)) \\ y = g(F^k(x)) \end{cases} \quad (4.8)$$

Si on remplace y dans la première équation, on obtient $x = F^{2k+1}(x)$, et x sera un point fixe de F^{2k+1} . x est un point fixe de F^{2k+1} , i.e x est un point d'un cycle d'ordre $(2k + 1)$ de F alors $g(x)$ est un point d'un cycle d'ordre $(2k + 1)$ de G , i.e $g(x)$ est un point fixe de G^{2k+1} .

b)- Un cycle d'ordre $(2k)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x = F^k(x) \\ y = G^k(y) \end{cases} \quad (4.9)$$

Ici x est un point fixe de F^k , et y est un point fixe de G^k , i.e x et y sont des points d'un cycle d'ordre k de F et G respectivement.

Propriété 4.2.6 Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un cycle d'ordre n de F , avec la valeur propre

$$\lambda_a = \prod_{i=1}^n F'(a_i)$$

1- si $n = 2k$, alors T a k cycles distincts d'ordre $2n$, donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(a_1, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, 2n\} \\ \{T^i(a_2, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, 2n\} \\ \vdots \\ \{T^i(a_k, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, 2n\} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Avec les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_a$.

2- Si $n = 2k + 1$, alors T a k cycles distincts d'ordre $2n$ donnés par les relations précédentes, avec les valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n$, et un cycle d'ordre n donné par : $\{T^i(a_{k+1}, g(a_1)), i = 1, 2, \dots, n\}$, avec les valeurs $\lambda_1 = -\sqrt{\lambda_a}$, $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_a}$. Les cycles de T dans cette propriété sont dites de type homogène, parce qu'ils résultent de la combinaison de cycles de F avec leurs conjugués de G .

Propriété 4.2.7 Soient $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ deux cycles de F , avec les valeurs propres λ_a, λ_b respectivement, soient $k = \text{ppcm}(n, m)$, et α_1, α_2 deux entiers tels que : $k = n \cdot \alpha_1 = m \cdot \alpha_2$. Alors T a $l = \frac{n \cdot m}{k}$ cycles distincts d'ordre $2k$ de type mixte (parce qu'ils résultent de la combinaison d'un cycle de F avec un cycle de G non conjugué à celui de F) donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(a_1, g(b_1)), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \vdots \\ \{T^i(a_1, g(b_l)), i = 1, 2, \dots, 2k\} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

avec les valeurs propres : $\lambda_1 = \lambda_a^{\alpha_1}, \lambda_2 = \lambda_b^{\alpha_2}$.

4.2.1 Les cycles de T générés par une bifurcation fold où une bifurcation flip d'un cycle de F

De la propriété 4.2.5 et la propriété 4.2.6 nous déduisons que quand F a un cycle attractif alors T a plus d'un cycle attractif.

4.2.1.1 Les cycles de T générés par une bifurcation fold de F

Supposons que $\mu = \mu_k + \varepsilon$ est la valeur de bifurcation fold au cycle d'ordre k de F , ce cycle bifurque et nous donne deux cycles d'ordre k l'un est attractif $c_a = \{a_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ avec la valeur propre $0 < S_a < 1$ et l'autre répulsif $c_b = \{b_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ avec la valeur propre $S_b > 1$

a) $k = 2m$

- Pour $\mu = \mu_k$ d'après la propriété 4.2.5, T a m cycles homogènes d'ordre $2k$, et d'après la propriété 4.2.6, T admet des cycles mixtes, qui sont formés d'après la combinaison avec les cycles qui sont existes précédent.

- Pour $\mu = \mu_k + \varepsilon$ (qui n'existent pas pour $\mu = \mu_k - \varepsilon$), tout cycle des m cycles de T bifurque et nous donne quatre cycles. donc les cycles de T sont les suivants :

(i1) - m cycles de type homogène d'ordre $2k$ sont des cycles noeuds attractifs donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(a_1, a_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \{T^i(a_2, a_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(a_m, a_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \end{array} \right. \quad (4.12)$$

avec $S_1 = S_2 = S_a$ ($S_a < 1$)

(i2) - m cycles de type homogène d'ordre $2k$ sont des cycles noeuds répulsifs donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(b_1, b_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \{T^i(b_2, b_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(b_m, b_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

avec $S_1 = S_2 = S_b$ ($S_b > 1$)

(i3) - k cycles de type mixte d'ordre $2k$ sont des cycles cols donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(a_1, b_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \{T^i(a_2, b_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(a_k, a_1), i = 1, 2, \dots, 2k\} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

avec $S_1 = S_a < 1$ and $S_2 = S_b > 1$

(i4) - Les cycles mixtes associés avec le cycle attractif après la bifurcation deviennent des cols s'ils sont des cycles répulsifs.

(i5) - Les cycles mixtes associés avec le cycle répulsif donnent des cycles de type noeuds répulsifs.

b) $k = 2m + 1$

(j1) -

(j1-1) - m cycles homogène d'ordre k de type noeuds attractifs donnés par (4.12)

(j1-2) - un cycle d'ordre k homogène de type noeud attractif donné par :

$$\{T^i(a_{m+1}, a_1), i = 1, 2, \dots, k\} \quad (4.15)$$

avec les valeurs propres $S_{1,2} = \pm\sqrt{S_a}$ ($S_a < 1$)

(j2) -

(j2-1) - m cycles homogène d'ordre k de type noeuds répulsifs donnés par (4.13)

(j2-2) - Un cycle d'ordre k homogène de type noeud répulsif donné par :

$$\{T^i(b_{m+1}, b_1), i = 1, 2, \dots, k\} \quad (4.16)$$

avec les valeurs propres $S_{1,2} = \pm\sqrt{S_b}$ ($S_b > 1$)

- (j3) - k cycles de type mixte d'ordre $2k$ sont des cycles cols donnés par (4.14)
(j4) - Les cycles mixtes associés avec le cycle attractif après la bifurcation deviennent des cols s'ils sont des cycles répulsifs.
(j5) - Les cycles mixtes associés avec le cycle répulsif donnent des cycles de type noeuds répulsifs.

4.2.1.2 Les cycles de T générés par une bifurcation flip de F

Soit une bifurcation flip pour $\mu = \mu^*$ au cycle attractif $a_i, i = 1, \dots, k$ où la valeur propre de ce cycle est $S_a = -1$ est la valeur propre de ce cycle. Pour $\mu = \mu'_k + \varepsilon$ ce cycle devient répulsif avec $S_a < -1$, et donne naissance à un cycle attractif d'ordre $2k$ $d_i, i = 1, 2, \dots, 2k$ avec la valeur propre $0 < S_d < 1$

a) $K = 2m$

- Pour $\mu = \mu'$ le nombre et le type des cycles de T sont donnés dans (i1)-(i5) avec $S_a = -1$.
- Pour $\mu = \mu' + \varepsilon$, en appliquant les propriétés 4.2.6 et 4.2.7, on obtient les cycles suivants :

(11) - Tous les cycles donnés en (i1)-(i5), où les cols et les noeuds attractifs deviennent des noeuds répulsifs.

(12) - K cycles homogènes d'ordre $4k$, sont des noeuds attractifs, donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(d_1, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \\ \{T^i(d_2, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(d_k, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \end{array} \right. \quad (4.17)$$

chaque cycle a les valeurs propres $S_1 = S_2 = S_d$

(13) - K cycles de type mixte d'ordre $4k$, sont des cols, donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(a_1, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \\ \{T^i(a_2, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(a_k, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \end{array} \right. \quad (4.18)$$

chaque cycle a les valeurs propres $S_1 = S_a > 1$ et $S_2 = S_d < 1$

(14) - K cycles de type mixte d'ordre $4k$, sont des cols, donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{T^i(b_1, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \\ \{T^i(b_2, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \{T^i(b_k, d_1), i = 1, 2, \dots, 4k\} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

chaque cycle a les valeurs propres $S_1 = S_b > 1$ et $S_2 = S_d < 1$

b) $K = 2m + 1$

- Pour $\mu = \mu'$, le nombre et le type des cycles de T sont ceux considérés dans (j1)-(j3), avec la valeur propre $S_a = -1$.

- Pour $\mu = \mu' + \varepsilon$, on obtient les cycles de T suivants :

(1) - Tous les cycles qui existent en $\mu = \mu'$, où les cols et les noeuds attractifs deviennent des noeuds répulsifs, et le foyer attractif en (j1-1) devient un foyer répulsif.

(2) - Les cycles décrits en (11)-(f4) avec $K = 2m + 1$

4.3 Étude de l'endomorphisme quadratique T pour $a = 0$

4.3.1 Points fixes de T

Considérons le même système (2.3) avec $a = 0$ donné par :

$$T(x, y) : \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = x^2 - bx = f_2(x) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

La transformation T représente un modèle duopole de Cournot, et les points fixes sont appelés les points singuliers de Cournot-Nash.

La dynamique de T est associée à celle de l'application f_2 et leurs bifurcations sont aussi strictement en relation.

4.3.1.1 Les points fixes de f_2

Pour chercher les points fixes de f_2 nous devons résoudre l'équation suivante :

$$x^2 - (b + 1)x = 0 \quad (4.21)$$

Nous obtenons deux points fixes :

$$x_* = 0 \quad \text{et} \quad x_0 = b + 1$$

- Pour $b = -1$, f_2 admet un seul point fixe alors $b = -1$ est une valeur de bifurcation transcritique.
- Pour $b = 1$ on a $f_2'(0) = -1$ donc $b = 1$ est une valeur de bifurcation flip (doublement de période) au point $x = 0$.
- Pour $b = -3$ on a $f_2'(b + 1) = -1$ donc $b = -3$ est une valeur de bifurcation flip (doublement de période) au point $x = b + 1$.

Alors T admet deux points fixes :

$$O(0, 0) \quad \text{et} \quad P(b + 1, b + 1)$$

4.3.1.2 La stabilité des points fixes de f_2

- 1 -Le point fixe $x_* = 0$ est instable pour $b \in]-3, -1[$ et stable pour $b \in]-1, 1[$ avec une valeur propre $S = -b$
- 2 -Le point fixe $x_0 = b + 1$ est stable pour $b \in]-3, -1[$ et instable pour $b \in]-1, 1[$ avec une valeur propre $S = b + 2$

4.3.1.3 Stabilité des points fixes de T

Étudions maintenant la stabilité des points fixes de T Rappelons $J(X)$ la matrice Jacobienne de T au point X :

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(X) & \frac{\partial f}{\partial y}(X) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(X) & \frac{\partial g}{\partial y}(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x - b & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Si $X_0(x_0, y_0)$ est un point fixe, nous nous intéressons aux valeurs propres de la matrice $J(X_0)$.

1. Au point $O(0, 0)$ on a deux valeurs propres $S_{1,2} = \pm\sqrt{-b}$
 - Si $b \in]-3, -1[$ alors $O(0, 0)$ est un noeud instable
 - Si $b \in]-1, 0[$ alors $O(0, 0)$ est un noeud stable
 - Si $b \in]0, 1[$ alors $O(0, 0)$ est un foyer stable.

2. Au point $P_0(b+1, b+1)$ on a deux valeurs propres $S_{1,2} = \pm\sqrt{b+2}$
 - Si $b \in]-3, -2[$ alors $P(b+1, b+1)$ est un foyer stable
 - Si $b \in]-2, -1[$ alors $P(b+1, b+1)$ est un noeud stable
 - Si $b \in]-1, 1[$ alors $P(b+1, b+1)$ est un noeud instable.

T possède un cycle 2 qui est un col $C_T^2 = \{(0, b+1), (b+1, 0)\}$.

La transformation T^2 (deuxième itération de T) est une transformation découplée :

$$T^2(x, y) : \begin{cases} x' = x^2 - bx = f_2(x) \\ y' = y^2 - by = f_2(y) \end{cases} \quad (4.23)$$

4.3.1.4 Les cycles d'ordre deux de f_2

Pour trouver les cycles d'ordre deux de f_2 , nous devons résoudre l'équation : $f_2^2(x) = x$
Ce qui revient à résoudre

$$x^4 - 2bx^3 + b^2x^2 - bx^2 + b^2x - x = 0 \quad (4.24)$$

Les points fixes $x_* = 0$ et $x_0 = b+1$ vérifient l'équation (4.24) car ils sont des points fixes pour $f_2(x)$ et par conséquent ils le sont également pour $f_2^2(x)$.

On a en plus :

$$(x - x_*) (x - x_0) = x^2 - bx - x \quad (4.25)$$

L'équation (4.24) devient :

$$x^4 - 2bx^3 + b^2x^2 - bx^2 + b^2x - x = (x^2 - bx - x)(x^2 - bx + x - b + 1) \quad (4.26)$$

Trouver les points fixes de $f_2^2(x)$ revient à résoudre

$$x^2 - bx + x - b + 1 = 0 \quad (4.27)$$

Le discriminant de l'équation (4.8) est :

$$\Delta = b^2 + 2b - 3 = (b-1)(b+3) \quad (4.28)$$

- $\Delta = 0 \Leftrightarrow b = 1$ ou $b = -3$ il existe un seul point fixe

$$x_1 = x_2 = \frac{b-1}{2}.$$

- $\Delta > 0 \Leftrightarrow b \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ il existe deux points fixes

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[b - 1 + \sqrt{(b+3)(b-1)} \right] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2} \left[b - 1 - \sqrt{(b+3)(b-1)} \right] \quad (4.29)$$

On a :

$$(f_2^2)'(x_1) = f_2'(x_1) f_2'(x_2) = 1 - (b+3)(b-1) \quad (4.30)$$

De même :

$$(f_2^2)'(x_2) = f_2'(x_2) f_2'(x_1) = 1 - (b+3)(b-1) \quad (4.31)$$

On pose $S = 1 - (b+3)(b-1)$, où S est le multiplicateur (ou la valeur propre). b est une valeur de bifurcation flip si est seulement si $1 - (b+3)(b-1) = -1$ on obtient alors deux valeurs $b_{1,2} = -1 \pm \sqrt{6}$, à ces valeurs il y a naissance d'un cycle 2.

4.3.1.5 La stabilité des cycles d'ordre 2 de f_2

- 1 -Le point fixe $b+1$ est stable pour $b \in]-3, -1[$, devient instable pour $b \in]-1 - \sqrt{6}, -3[$ et donne naissance à un cycle stable d'ordre 2

$$C_{f_2}^2 = \{x_1, x_2\} = \left\{ \frac{1}{2} \left[b - 1 + \sqrt{(b+3)(b-1)} \right], \frac{1}{2} \left[b - 1 - \sqrt{(b+3)(b-1)} \right] \right\} \quad (4.32)$$

- 2 -Le point fixe $x = 0$ est stable pour $b \in]-1, 1[$, devient instable pour $b \in]1, -1 + \sqrt{6}[$ et donne naissance à un cycle stable d'ordre deux

$$C_{f_2}^2 = \{x_1, x_2\} = \left\{ \frac{1}{2} \left[b - 1 + \sqrt{(b+3)(b-1)} \right], \frac{1}{2} \left[b - 1 - \sqrt{(b+3)(b-1)} \right] \right\} \quad (4.33)$$

Nous remarquons l'apparition d'une suite décroissante de valeurs du paramètre de $b : \{b_1; b_2; b_3; \dots\}$ qui correspondent aux valeurs de bifurcations de doublements de période. Ces valeurs de b ont tendance de converger vers b_∞ , l'attracteur devient un ensemble de Cantor (voir [32]).
Tableaux des valeurs de paramètre de $b : f_2(x) = x^2 - bx$ pour $b \leq -3$ et $b \geq 1$ respectivement :

n	1	2	3	4	5	6
b_n	-3	-3.44931	-3.54402	-3.56437	-3.56875	-3.56994

n	1	2	3	4	5	6
b_n	1	1.44931	1.54402	1.56437	1.56875	1.56994

4.3.2 Bassin d'attraction et les cycles de T

Nous illustrons dans cette section les bassins d'attraction de cycles d'ordre 2. La figure 4.1 représente un cycle d'ordre 2 de type col (le cycle-2 : (C_2^1, C_2^2) représenté par deux croix vertes) situé sur la frontière du bassin. Le cycle-2 considéré ici, est donné par :

$$C_T^2 = \{(0, b + 1), (b + 1, 0)\} \quad (4.34)$$

Le cycle d'ordre 4 de T est représenté dans la Figure 4.2, où T a un cycle stable est en bleu

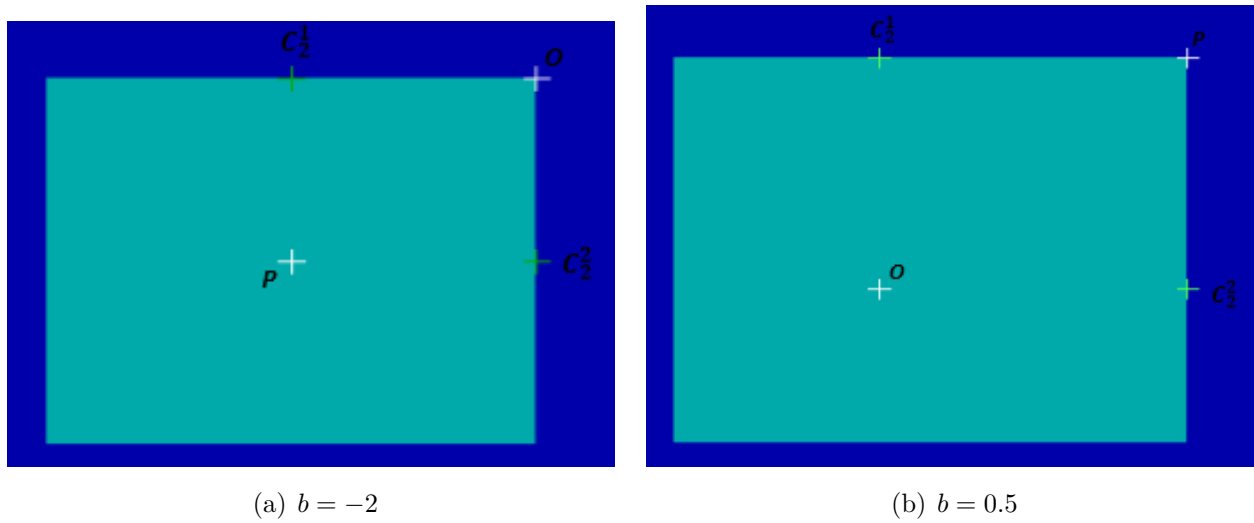


FIGURE 4.1 – Les bassins d'attraction de P et de O

et deux cycles de type cols qui sont en vert. En vertu de la propriété 4.2.6, T a trois cycle d'ordre quatre.

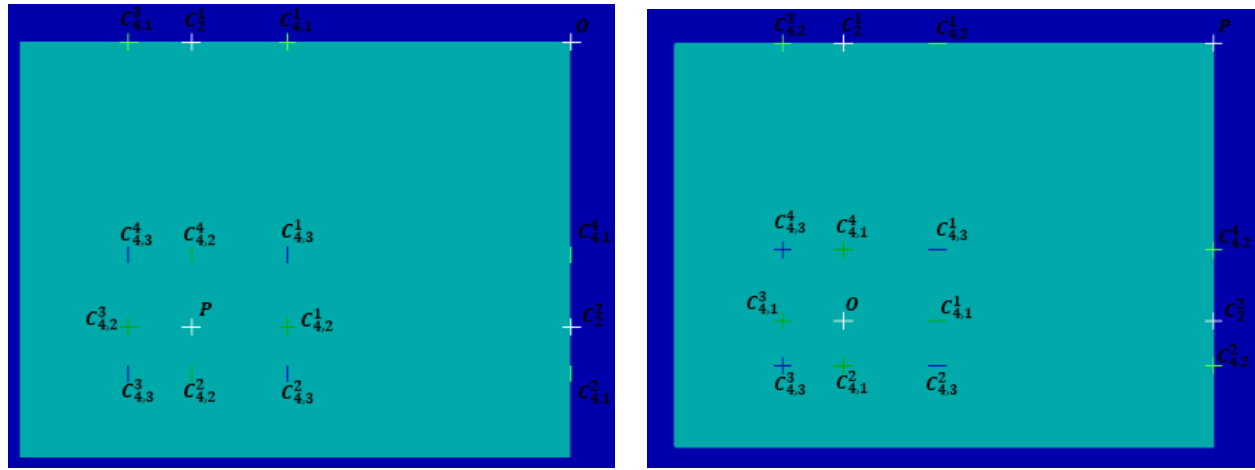
- Un cycle stable donné par :

$$C_{T,3}^4 = \{T^i(x_1, x_1), i = 1, \dots, 4\} \quad (4.35)$$

- Deux cycles cols donnée par :

$$C_{T,1}^4 = \{T^i(x_1, 0), i = 1, \dots, 4\} \quad (4.36)$$

$$C_{T,2}^4 = \{T^i(x_1, x_0), i = 1, \dots, 4\} \quad (4.37)$$



(a) $b = -3.2$

(b) $b = 1.2$

FIGURE 4.2 – Les bassins d'attraction de cycle d'ordre 4

De la même manière, nous illustrons les cycles-8 dans la Figure 4.3.

- Deux cycles de type noeuds stables de période 8, de type homogène donné par :

$$\begin{aligned} C_{T,1}^8 &= \{T^i(x_3, x_3), i = 1, \dots, 8\} \\ C_{T,2}^8 &= \{T^i(x_4, x_3), i = 1, \dots, 8\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

- Deux cycles-8 cols de type mixtes, engendrés par la combinaison d'un cycle-2 avec celui d'ordre 4 donnés par :

$$\begin{aligned} C_{T,3}^8 &= \{T^i(x_1, x_3), i = 1, \dots, 8\} \\ C_{T,4}^8 &= \{T^i(x_2, x_3), i = 1, \dots, 8\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

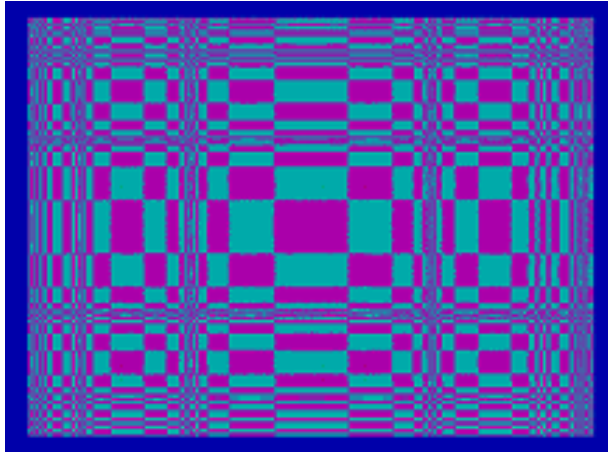
- Deux cycles-8 cols de type mixtes engendrés par la combinaison de deux points fixes donnés par :

$$\begin{aligned} C_{T,5}^8 &= \{T^i(0, x_3), i = 1, \dots, 8\} \\ C_{T,6}^8 &= \{T^i(x_0, x_3), i = 1, \dots, 8\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

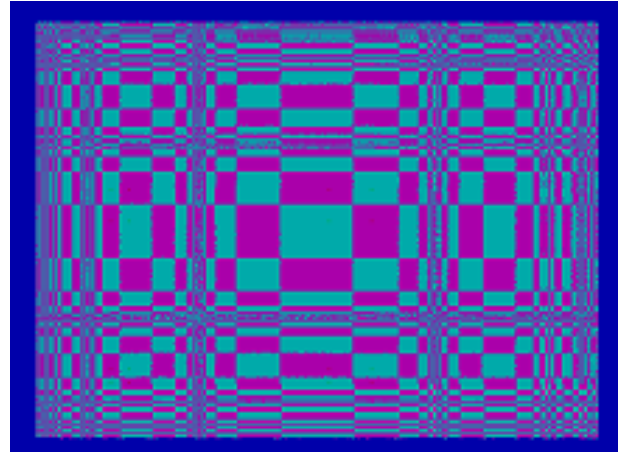
Les zones mauve et verte représentent les bassins d'attraction de deux cycles-8 stables. La Figure 4.4 représente les bassins d'attraction des cycles-16. Les zones de différentes couleurs (vert, mauve, bleue et gris) représentent respectivement les bassins d'attraction de quatre cycles-8 stables.

4.3.3 L'architecture des cycles

Nous donnons la position des cycles pour l'application T et précisément les points fixes et les cycles qui sont générés par une séquence infinie de bifurcations flip pouvant provoquer le

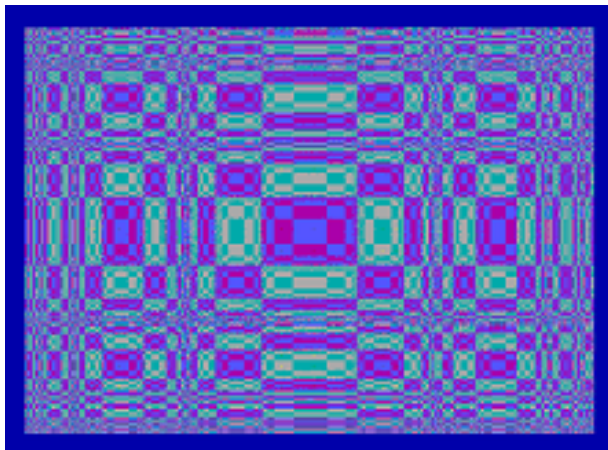


(a) $b = -3.47$

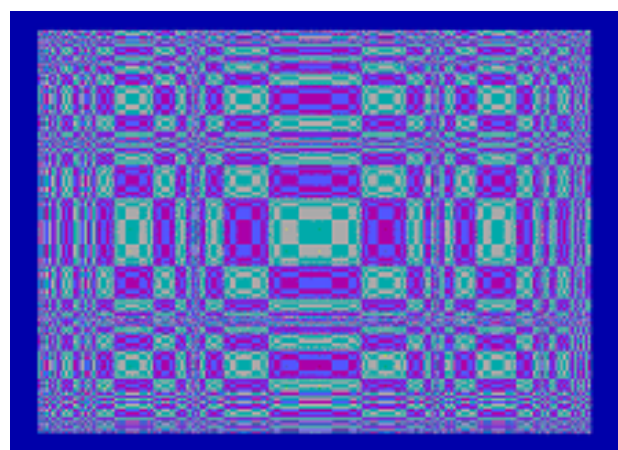


(b) $b = 1.47$

FIGURE 4.3 – Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 8



(a) $b = -3.56$



(b) $b = 1.56$

FIGURE 4.4 – Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 16

4.3. ÉTUDE DE L'ENDOMORPHISME QUADRATIQUE T POUR $A = 0$

chaos. Les deux points fixes P et O peuvent être stables dans une région donnée de l'espace des paramètres de l'application, et perdre leur stabilité via une bifurcation transcritique ou une bifurcation flip. Cette dernière situation est rapportée dans le graphique qualitatif donné par les Figures 4.5(a) et 4.5(b) pour $b < -3$, où O est instable et P stable et par les Figures 4.6(a) et 4.6(b) pour $b > 1$, où O est stable et P un point fixe instable.

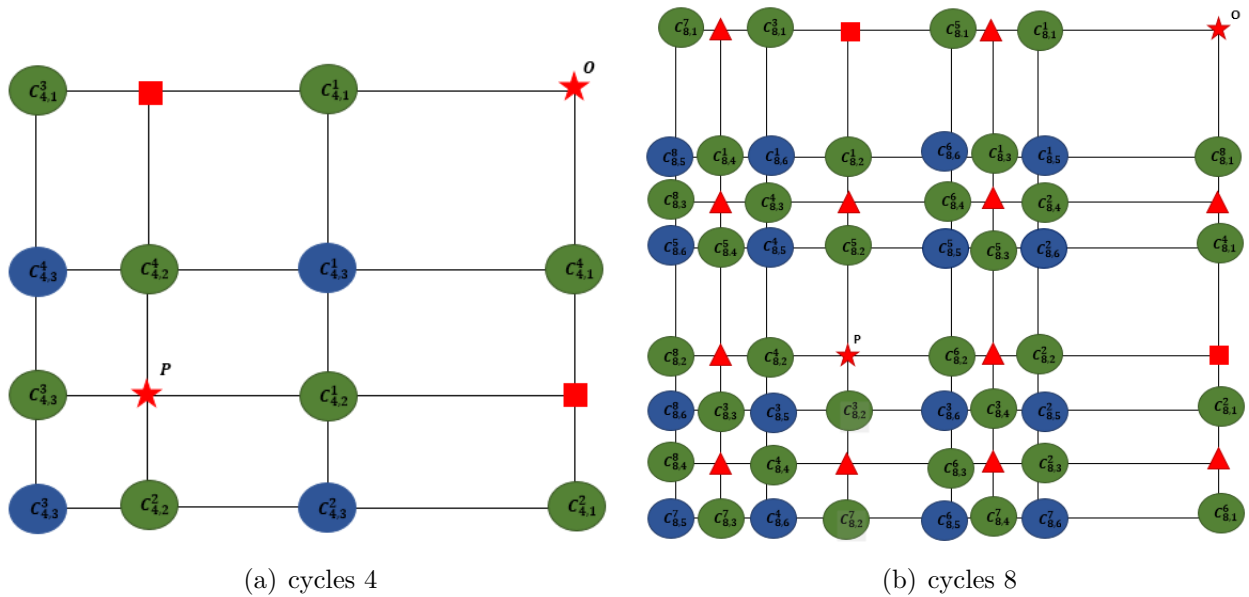


FIGURE 4.5 – L'architecture des cycles 4 et 8 pour $b < -3$ et n pair

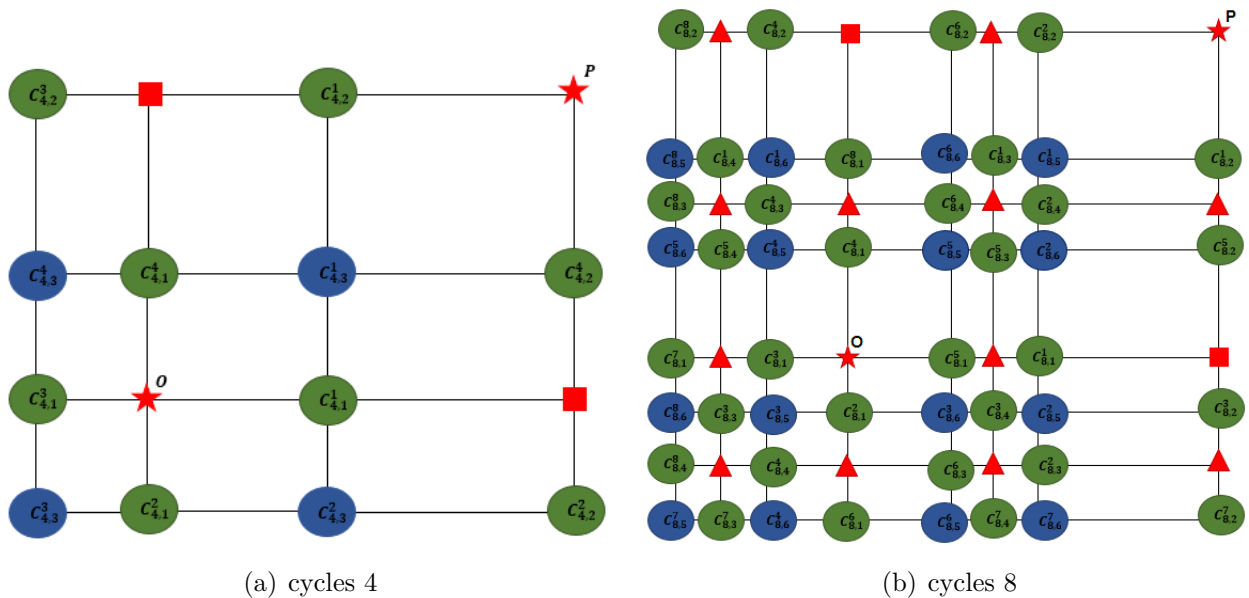


FIGURE 4.6 – L'architecture des cycles 4 et 8 pour $b > 1$ et n pair

4.3.4 Les ensembles critiques

Le système dynamique T est un endomorphisme bidimensionnel avec un inverse non unique si seulement si l'application unidimensionnelle f_2 est un endomorphisme avec un inverse non unique. Les courbes critiques de T sont liées aux points critiques de f_2 .

Soit s_{-1} un point critique du rang 0 de f_2 (c'est-à-dire un point où $f_2(x)$ atteint un minimum local ou un maximum local), tel que $f_2'(s_{-1}) = 0$

Soit $s_0 = f_2(s_{-1})$ le point critique du rang 1. En général $s_i = f_2^{i+1}(s_{-1})$ est le point critique de f_2 de rang $(i + 1)$ avec $i \geq 1$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} s_{-1} &= \frac{b}{2} \\ s_0 &= f_2(s_{-1}) = -\frac{b^2}{4} \\ s_1 &= f_2(s_0) = \frac{b^3}{4} + \frac{b^4}{16} \\ s_2 &= f_2(s_1) = -\frac{b^4}{4} - \frac{b^5}{16} + \frac{b^6}{16} + \frac{b^7}{32} + \frac{b^8}{256} \end{aligned} \tag{4.41}$$

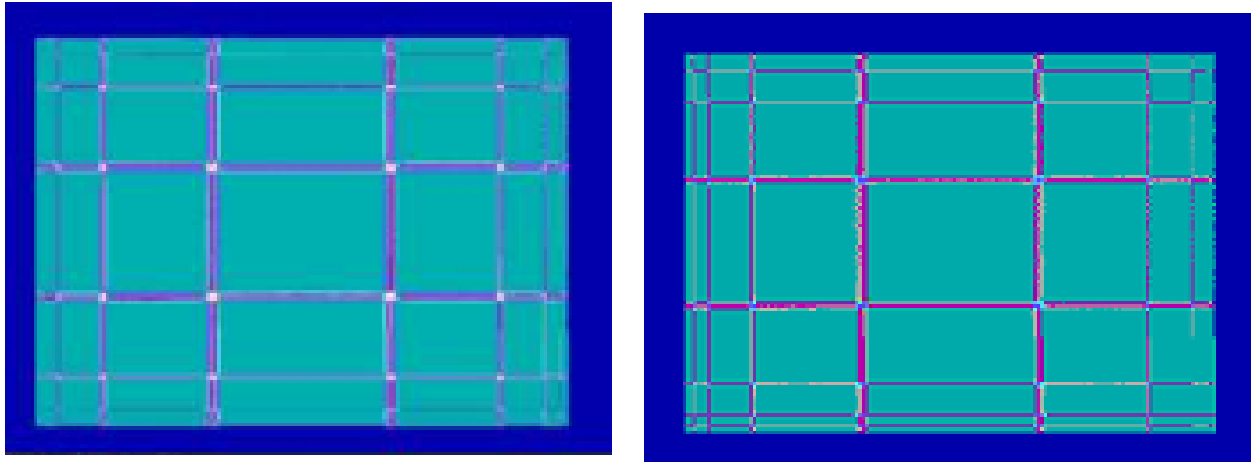
La ligne critique de T de rang 0 est la droite de l'équation $x = s_{-1}$. Les courbes critiques LC_i de T sont des lignes droites parallèles aux axes des coordonnées, à partir des points critiques de f_2 ,

$$\begin{aligned} LC_{-1} &: x = s_{-1} \\ LC &: y = s_0 \\ LC_1 &: x = s_0 \\ LC_2 &: y = s_1 \\ LC_3 &: x = s_1 \end{aligned} \tag{4.42}$$

et ainsi de suite. Pour $b = -2$, les points critiques s_{-1} , s_0 et s_1 sont égaux, $b < -2$ l'intervalle $I = [s_0, s_1]$ est un intervalle absorbant contenant un ensemble attractif, mais pour $b > -2$ l'intervalle $I = [s_0, s_1]$ n'est pas un intervalle absorbant.

Pour des valeurs sélectionnées du paramètre b et pour $n = 2$, la coexistence de nombreux différents attracteurs locaux ouvre une question importante sur leur comportement, et le problème de la délimitation des frontières de leurs bassins qui sont constitués de rectangles.

Dans la Figure 4.7, le bassin immédiat (contenant les attracteurs) est formé par des rectangles bornés par des segments de courbes critiques qui sont des lignes droites parallèles aux axes des coordonnées, et issues des points critiques de $f_2(x)$. La configuration des bassins aide à comprendre leur évolution et la formation de multistabilité. Nous renvoyons à [28] pour sa description complète.



(a) $a = 0$ et $b = 1$

(b) $a = 0$ et $b = -3$

FIGURE 4.7 – Le bassin immédiat pour $b = 1$ et $b = -3$

Les courbes de bifurcation liées aux deux valeurs de $b = 1$ et $b = -3$, correspondent aux courbes de bifurcation homocline ou / et hétérocline pour les points fixes O ou P et déterminent également à la fin de l'intervalle dans lequel la forme quadratique de $f_2(x)$ ne joue aucun rôle. Nous pouvons voir une explosion de lignes droites de couleurs différentes délimitant des bassins rectangulaires.

4.4 Étude d'un endomorphisme cubique découplé T

Considérons le système dynamique 2.1 avec $a = 0$ et $n = 3$ donné par :

$$T(x, y) : \begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 - bx \end{cases}$$

La dynamique de T est associée à celle de l'application f_3 et leurs bifurcations sont aussi strictement en relation.

4.4.1 Les points fixes de f_3

Si $b \succ -1$ alors il existe trois points fixes :

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{b+1}$$

$$x_2 = -\sqrt{b+1}$$

4.4.2 Le cycle deux de f_3

Considérons les points fixes de f_3^2

$$f_3^2(x) = -b(-bx + x^3) + (-bx + x^3)^3$$

L'équation $f_3^2(x) = x$ admet six solutions :

$$x_3 = \sqrt{b-1}$$

$$x_4 = -\sqrt{b-1}$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}}$$

$$x_6 = -\frac{1}{2}\sqrt{2b + 2\sqrt{b^2 - 4}}$$

$$x_7 = \frac{1}{2}\sqrt{2b - 2\sqrt{b^2 - 4}}$$

$$x_8 = -\frac{1}{2}\sqrt{2b - 2\sqrt{b^2 - 4}}$$

Pour $b = 2$ on a que deux points fixes au lieu de six points ($x_3 = x_5 = x_7$ et $x_4 = x_6 = x_8$).

- Le point fixe x_0 est stable pour $b \in]-1, 1[$ et devient instable pour $b \in]1, 2[$ et donne naissance à un cycle stable d'ordre 2

$$C_{f_3}^2 = \{x_3, x_4\} \tag{4.43}$$

- Pour $2 < b < 2.236$ les deux points fixes de cycle 2 bifurque par bifurcation fourche et donnant naissance à deux cycles d'ordre deux donnés par :

$$C_{f_3}^{2,1} = \{x_5, x_6\} \tag{4.44}$$

$$C_{f_3}^{2,2} = \{x_7, x_8\}$$

4.4.3 Bassin d'attraction et les cycles de T

On a trois points fixes de T sont :

$$\begin{aligned} &O(0,0) \\ &P_1(\sqrt{b+1}, \sqrt{b+1}) \\ &P_2(-\sqrt{b+1}, -\sqrt{b+1}) \end{aligned}$$

Les Figures 4.8 et 4.9 présentent le bassin d'attraction pour les trois cycles-2 et cycle-4.

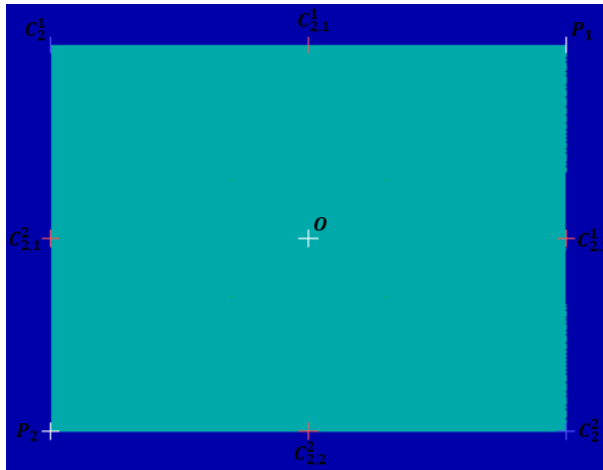


FIGURE 4.8 – Bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 2 pour $n=3$, $b = 0.5$

Nous avons considéré de plan de phases pour $b = 0.5$. T a trois points fixes et trois cycles d'ordre 2 sont donnés par :

- Un cycle noeud instable

$$C_T^2 = \{T^i(x_2, x_1), i = 1, 2\} \quad (4.45)$$

- Deux cycles cols

$$\begin{aligned} C_{T,1}^2 &= \{T^i(0, x_1), i = 1, 2\} \\ C_{T,2}^2 &= \{T^i(x_1, 0), i = 1, 2\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

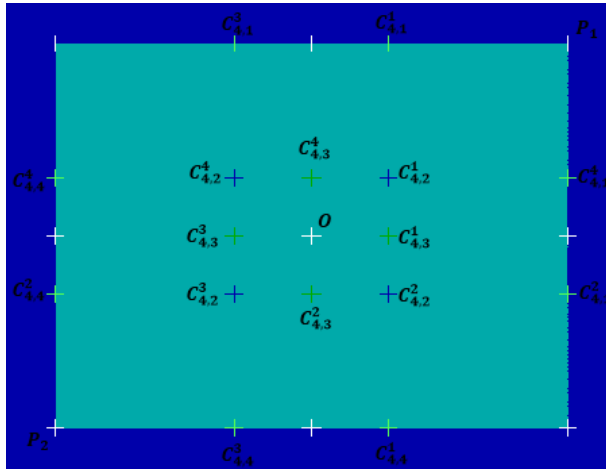


FIGURE 4.9 – Bassin d'attraction d'un cycle d'ordre 4 pour $n=3$, $b = 1.2$

T a

- un cycle stable

$$C_{T,2}^4 = \{T^i(x_3, x_3), i = 1, \dots, 4\} \quad (4.47)$$

- Trois cycles cols

$$C_{T,1}^4 = \{T^i(x_3, x_1), i = 1, \dots, 4\}$$

$$C_{T,3}^4 = \{T^i(x_3, 0), i = 1, \dots, 4\} \quad (4.48)$$

$$C_{T,4}^4 = \{T^i(x_3, x_2), i = 1, \dots, 4\}$$

La Figure 4.10 présente le bassin d'attraction de cycle-8.

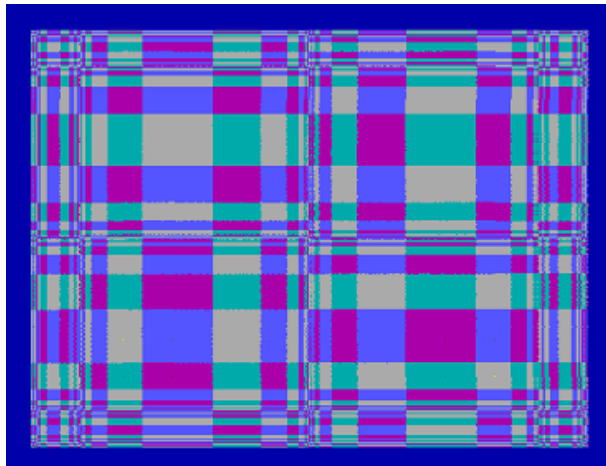


FIGURE 4.10 – Les bassins d'attraction des cycles d'ordre 8 pour $n=3$, $b = 2.1$

- Deux cycles noeuds stables de période 8, de type homogène donnés par :

$$C_{T,1}^8 = \{T^i(x_5, x_5); i = 1, \dots, 8\} \quad (4.49)$$

$$C_{T,2}^8 = \{T^i(x_6, x_5); i = 1, \dots, 8\}$$

- Deux cycles-8 cols de type mixtes, engendrés par la combinaison d'un cycle-2 avec celui d'ordre 4 donnés par :

$$C_{T,3}^8 = \{T^i(x_3, x_5); i = 1, \dots, 8\} \quad (4.50)$$

$$C_{T,4}^8 = \{T^i(x_4, x_5); i = 1, \dots, 8\}$$

- Trois cycles-8 cols de types mixtes engendrés par la combinaison de trois points fixes donnés par :

$$C_{T,5}^8 = \{T^i(0, x_5); i = 1, \dots, 8\}$$

$$C_{T,6}^8 = \{T^i(x_1, x_5); i = 1, \dots, 8\} \quad (4.51)$$

$$C_{T,7}^8 = \{T^i(x_2, x_5); i = 1, \dots, 8\}$$

La figure 4.11 représente le bassin d'attraction de cycle-16.

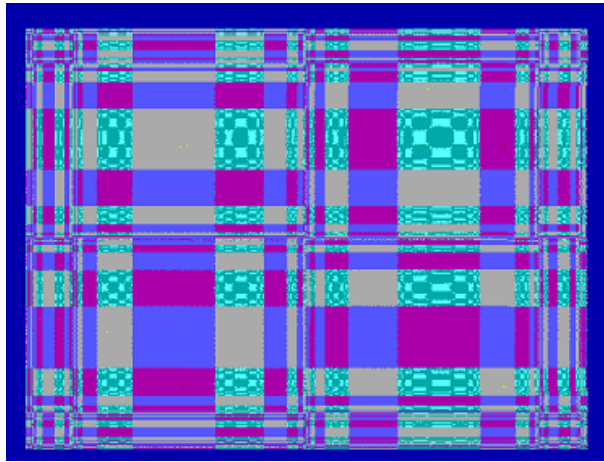


FIGURE 4.11 – Les bassins d'attraction d'un cycle d'ordre 16 pour $n=3$, $b = 2.237$

4.4.4 L'architecture des cycles

Dans les Figures 4.12, 4.13 et 4.14 nous donnons les positions (l'architectures) des cycles-2, 4, 8 respectivement pour l'application T .

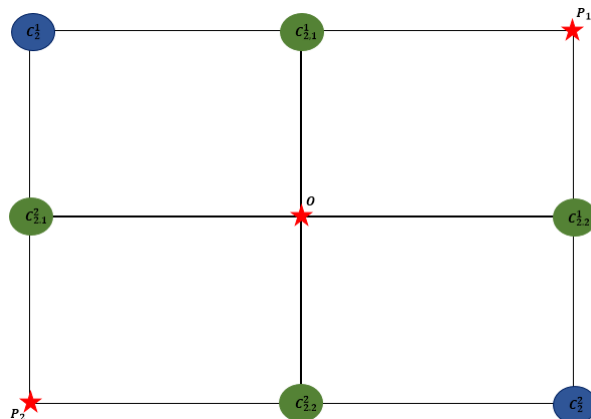


FIGURE 4.12 – L'architecture d'un cycle d'ordre 2 pour n impair

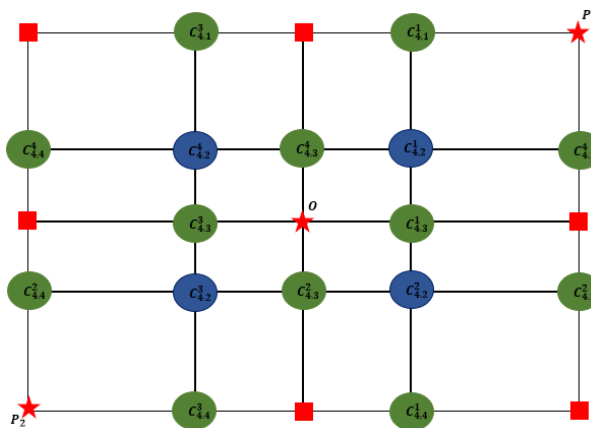


FIGURE 4.13 – L'architecture d'un cycle d'ordre 4 pour n impair

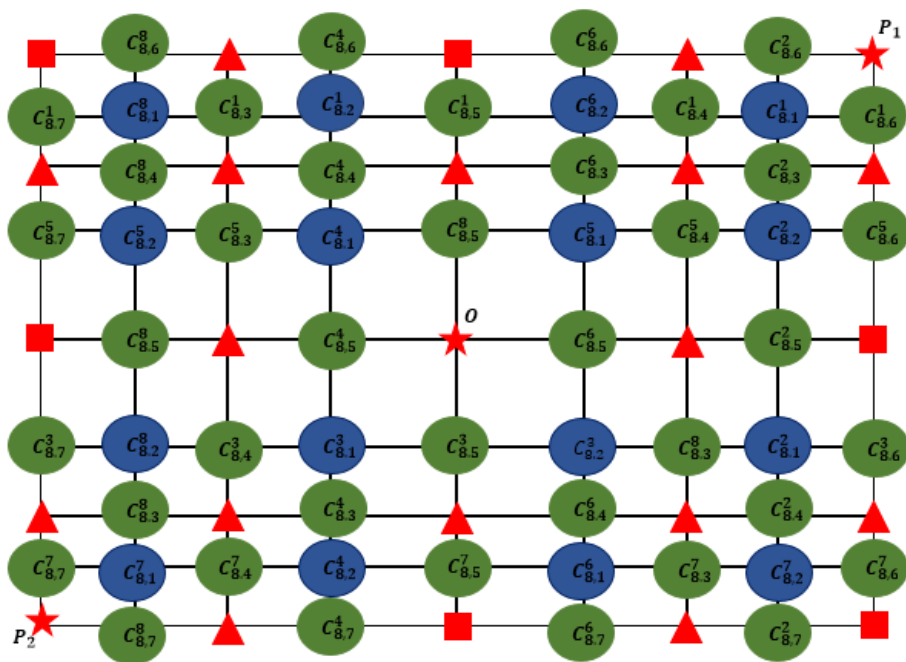


FIGURE 4.14 – L'architecture des cycles d'ordre 8 pour n impair

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons étudié des systèmes polynomiaux non inversibles dépendants de deux paramètres réels. Dans le deuxième chapitre, ces systèmes dynamiques polynomiaux avec $n = 2$ sont symétriques par rapport à la courbe LC_{-1} et les bifurcations présentées dans les différentes sections sont liées à cette courbe. Nous perdons cette symétrie pour $n = 2k$, $k \succ 1$. Une variété de propriétés intéressantes ont été mentionnées dans cette famille, y compris les bifurcations locales et globales. Selon le diagramme de bifurcation et en exploitant la relation entre les ensembles invariants et les courbes critiques, nous avons considéré quatre points paramétriques (a, b) qui sont des points de bifurcations de codimension deux ou trois, $(-2, 1)$, $(-2, -7)$, $(2, 1)$ et $(0, -1)$. Les deux premiers points sont de degré de complexité 2 et les deux derniers points sont de degré de complexité 3. Le comportement des solutions est principalement déterminé par les ensembles invariants et les courbes critiques. Le rôle des courbes invariantes est mis en évidence et leur relation avec les attracteurs. Dans le troisième chapitre, nous détectons le chaos et une dynamique complexe pour $n = 2k+1$. En conséquence, le modèle considéré ici a une structure de bassin d'attraction complexe principalement connexe, produisant une imprévisibilité qualitativement supérieure à la dépendance sensible classique aux conditions initiales au sein d'un attracteur spécifique coexistant avec plusieurs autres attracteurs. Ce travail souligne le fait que ce modèle peut présenter des dynamiques très différentes. Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté une étude sur les systèmes découplés. Du fait qu'ils soient découplés, l'étude fait appel à une transformation de dimension inférieure $f_n(x) = -bx + x^n$. Dans cette partie, nous nous sommes concentrés sur les bassins d'attractions et le positionnement de chaque cycle. Dans

le plan de phase, nous avons considéré la caractéristique de multistabilité (coexistence de plusieurs cycles stables), et le comportement chaotique engendré par l'existence d'une infinité de cycles répulsifs nés à partir d'une chaîne successive de bifurcations de doublements de période. Une étude sur les bifurcations globales est faite, et nous avons établi le rôle des lignes critiques dans les bifurcations de contact, soit avec une courbe invariante fermée, soit avec la frontière d'un bassin d'attraction, donc sont à l'origine d'apparition des attracteurs chaotiques. Nous remarquons qu'il n'y a pas de différence dans l'architecture et dans la structure des lignes critiques pour $n = 2k$ et $n = 2k + 1$. Mais il y a différence dans l'architecture des cycles 4 pour $b < -3$ et $b > 1$ (n pair), nous remarquons que le cycle $C_{4,2}^i$ de type cols est lié avec le point fixe P et $C_{4,1}^i$ est associé au point fixe O . La même chose pour le cycle $C_{8,2}^i$ est associé au point fixe P et $C_{8,1}^i$ est associé au point fixe O .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Agarwal G.S., “Existence of Multistability in Systems with Complex Order Parameters”, *Phy. Rev.A*, 26, 1982, pp. 888-891.
- [2] Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G. and Tredicce J., “Experimental Evidence of Subharmonic Bifurcations, Multistability, and Turbulence in a Qswitched gas laser”, *Phys. Rev. Lett.*, 49, 1982, 1217-1220.
- [3] Ashwin P., Buescu J., and Stewart I., “From Attractor to Chaotic Saddle : a Tale of Transverse Instability”, *Non linearity Vol.9*, 1996, pp. 706-737.
- [4] Aziz-Alaoui H., “Bifurcation Non Classiques d’une Classe de \mathbb{R}^2 Endomorphisme”, *Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1984*
- [5] Barugola A., Cathala J.C. and Mira C., “Annular Chaotic Areas”, *Nonlinear Analysis TM & A*. 10(11), 1986, pp. 1223-1236.
- [6] Clerc R. L. and Hartmann C., “Invariant Manifolds of Separable Discrete Dynamics Systems”, *Dynamics Days*, La Jolla, California, 1982.
- [7] Djellit I., Fakroune Y. and Selmani W., “Bifurcations and Invariant Sets in a Class of Twodimensional Endomorphisms”, *International Journal of Analysis and Applications*, Vol 17, n 4, 2019, pp 517-529.
- [8] Djellit I. and Soula Y., “On Riddled Sets and Bifurcations of Chaotic Attractors”, *Appl. Math. Sci.*, Vol. 1, n13, 2007, pp. 603-614.

- [9] Fakroune Y., Selmani W. and Djellit I., “Complex dynamics in odd-degree polynomial maps.”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems-Série B.*, Vol. 28, Number 3b(2021), 2021, pp.
- [10] Ferchichi M.R., Thèse de doctorat, ”Etude des comportements complexes de systèmes modélisés par des endomorphismes bidimensionnels” , *Université Badji Mokhtar Annaba*, 2006.
- [11] Feudel U. and Grebogi C., “Multistability and the Control of Complexity”, *Chaos*, 7, 1997, 597-604.
- [12] Gardini L., “On the Global Bifurcation of Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines”, *Nonlinear analysis TM & A.* 18(4), 1991, pp. 361-399.
- [13] Gardini L., “Global Analysis and Bifurcations in Two-Dimensional Endomorphisms by Use of Critical Lines”, *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria, (World Scientific, Singapore, 1992)*, Sept.91, pp. 112-125.
- [14] Gardini L., “Homoclinic Orbits of Saddles in Two-Dimensional Endomorphisms”, *Proceedings of ECIT Batschuns, Austria, 1992, Sept.92*.
- [15] Gardini L., “Homoclinic Bifurcations in n -Dimensional Endomorphisms Due to Expanding Periodic Points”, *Nonlinear analysis TM & A.* 23(8), pp. 1039-1089.
- [16] Gardini L., Lenci S. and Lupini R., “Bifurcation and Multistability in a Class of Two-Dimensionnel Endomorphisms”, *Nonlinear analysis, Theory, Methods et Appliacation*, , Vol 28 n1, 1997, pp. 61-85.
- [17] Gardini L., Mammana C. and Bischi G.I., “Multistability and Cyclic Attractor in Duopoly Games”, *Chaos, Solutions et Fractals* 11, 2000, pp. 543-564.
- [18] Grebogi C., Kostelich E. OTT and Yorke J. A., “Multi-Dimensionned Intertwined Bassin Boundaries : Bassin Structure of the Kicked Rotor”, *Physica D*, 25, 1987, 347-360.
- [19] Gumowski I. et Mira C. “Dynamique Chaotique” (Ed. Cépadues, Toulouse), 1980.
- [20] Hénon M., “A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor”, *Comm. Math. Phys.* 50, 1976, 69-77.
- [21] Ikeda K., “Multiple-valued Stationary State and its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System”, *Opt. Commun.*, 30, 1976, 257-261.
- [22] Kaitala V. and Heino M., “Complex Non-Unique Dynamics in Simple Ecological Interactions”, *Proc. R. Soc. Lond. B*, 263, 1996, pp 1011-1015.
- [23] Kilani B. et Djellit I. and Sprott J. C., “Broken Symmetry in Modified Lorenz Model” , *Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations*, 5, 2, 2015.

- [24] Lorenz H. W., “Multiple Attractors, Complex Bassin Boundaries, and Transient Motion Interministic Economic Systems”, in *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, ed. Feichtinger, G. (Elsevier), 1992.
- [25] May R. M., “Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamical Behaviour”, *Nature*, 269, 1976, pp 459-467.
- [26] Millérioux J. Thèse de doctorat, “Modèles par Transformations Non Inversibles et Application à la Sécurité des Communications. Synchronisation du Chaos”, L’institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 1997.
- [27] Mira C., “Chaotic Dynamics” *World Scientific, Singapore, 1987*.
- [28] Mira C., Gardini L., Barugola A. et Cathala J.C., “Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps”, *World Scientific, Series A, Vol.A, 1996*.
- [29] Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H. et Cathala J.C., “Bassin Bifurcations of Two Dimensional Noninvertible Maps : Fractalization of Bassins”, *International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol 4, n2, 1994, pp. 343-381*.
- [30] Mira C. and Narayaninsamy T., “On two Behaviours of Two-Dimensional Endomorphisms : Role of the Critical Curve”, *International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol 3, n1, 1993, pp. 187-194*.
- [31] Mira C. and Roubellat J.C., “Cas où le Domaine de Stabilité d’un Ensemble Limite Attractif d’une Récurrence du Deuxième Ordre n’est pas Simplement Connexe”, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A 268, 1969, pp. 1657-1660*.
- [32] Mouzaia R., Thèse de magister., “Dynamique et Architecture des Singularités des Systèmes Découplés”, *Université Badji Mokhtar Annaba, 2009*.
- [33] Razafimandimby B, “Domaine d’influence de Certaines Singularités Stables d’un endomorphisme de \mathbb{R}^2 ”, *Thèse de 3 ème cycle, Univ. Paul Sabatier, Toulouse, 1981*.