



**BADJI MOKHTAR UNIVERSITY  
ANNABA**

**UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA**

**وزارة التعليم العالي والبحث العلمي**



**جامعة باجي مختار  
- عنابة -**

**Année : 2020**

**Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques**



# **THÈSE**

**Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
DOCTORAT**

**Domaine : Mathématiques et informatique**

**Filière : Mathématiques**

**Option : EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET APPLICATIONS**

**METHODES VARIATIONNELLES DE REGULARISATION  
POUR UNE CLASSE DE PROBLEMES INVERSES EN EDP**

**Par : SASSANE Roumaïssa**

**Directeur de Thèse :**

**Co-Directeur de Thèse :**

**Prof. Rebbani Faouzia**

**Prof. Boussetila Nadjib**

**ESTI. Annaba**

**U. Guelma**

**Devant le jury de soutenance :**

<b>Président</b>	<b>Chorfi Lahcène</b>	<b>Prof</b>	<b>U.B.M. Annaba</b>
<b>Examineur</b>	<b>Alem Leila</b>	<b>Prof</b>	<b>U.B.M. Annaba</b>
<b>Examineur</b>	<b>Zouyed Fairouz</b>	<b>Prof</b>	<b>U.B.M. Annaba</b>
<b>Examineur</b>	<b>Ramoul Hichem</b>	<b>M.C.A</b>	<b>U. Khenchela</b>

# ملخص

تهدف هذه الأطروحة الى دراسة ثلاث نماذج من المسائل المعتلة الطرح بمفهوم هادامار. من اجل استخلاص معلومات ذات معنى من هذه المسائل نقوم باقتراح طرق تعديل تمكنا من تغيير طبيعتهم السيئة الطرح والحصول على حلول تقريبية ومنتزعة للحلول الأصلية لهذه المشاكل.

النموذج الأول مخصص لدراسة مسألة ذات معادلة تكافئية مع متغير منحرف حيث نقترح لتعديلها اسلوب يعتمد على الطريقة شبه الانعكاسية أما النموذج الثاني فهو عبارة عن مسألة عكسية ذات معادلة ثنائية كسرية اين يعتمد نهج تسويتها على طريقة التعديل التكراري. بينما نقوم في النموذج الأخير بدراسة مسألة عكسية ذات معادلة جزئية معممة حيث تم تطوير استراتيجيتين لتصحيحها ، الأولى تعتمد على نسخة من طريقة التعديل التكراري والثانية تعتمد على طريقة التحليل الطيفي.

نبين في هذه الدراسة أن حلول المسائل التقريبية لها طابع مستقر وهي متقاربة نحو حلول المسائل الأصلية. علاوة على ذلك ، نبرهن نتائج التقارب للطرق المقترحة اعلاه. وفي الأخير نختم هذه الأطروحة بسلسلة من التجارب الرقمية التي توضح دقة وكفاءة الطرق المقترحة.

## الكلمات المفتاحية.

إشكاليات عكسية ، إشكالية سيئة الطرح ، التسوية ، معادلة جزئية معممة ، طرق تكرارية ، طرق الإسقاط ، معادلة ثنائية كسرية ، طريقة شبه انعكاسية ، معادلة تكافئية ذات متغير منحرف.

# Abstract

In this thesis, we study three classes of ill-posed problems in the sense of HADAMARD. To neutralize the instability character, regularization methods are proposed in order to be able to derive meaningful information from these models.

The first model is devoted to the study of a parabolic problem governed by nonclassical heat equation with involution, a variant of the quasi-reversibility method is proposed to regularize this problem.

In the other two models, we study inverse fractional problems generated respectively by a bi-fractional equation and a generalized elliptic equation. The regularization approach proposed for the bi-fractional problem is based on the iterative Kozlov-Maz'ya method and for the generalized elliptic problem, two regularization strategies are adopted : the first is based on a preconditioning version of the Kozlov-Maz'ya iteration method and the second employs the spectral truncation method.

In this investigation, we show that the solutions of approximate problems have a stable character as well as their convergences towards the solutions of the original problems. Moreover, some convergence results are established for the proposed methods. Finally, numerical results are included showing the accuracy and efficiency of the proposed methods.

**Keywords :** *Ill-posed problems, inverse problems, regularization, stabilization, iterative regularization method, generalized elliptic equation, involution perturbation, pseudo-paraolic method, bi-fractional problem, spectral truncation method.*

# Résumé

Dans la présente thèse, on étudie trois classes de problèmes mal-posés au sens de HADAMARD. Pour neutraliser le caractère d'instabilité, des méthodes de régularisation sont proposées afin qu'on puisse tirer des informations significatives de ces modèles.

Le premier modèle est consacré à l'étude d'un problème parabolique avec variables déviées. Une variante de la méthode de quasi-reversibilité est proposée pour régulariser le problème en question.

Quant aux autres modèles, ils sont consacrés à l'étude de problèmes inverses de type fractionnaire, engendrés respectivement par une équation bi-fractionnaire et une équation elliptique généralisée. L'approche de régularisation proposée pour le problème bi-fractionnaire est basée sur la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya, et pour le problème elliptique généralisé, on développe deux stratégies de régularisation : la première repose sur un schéma itératif avec conditionnement, et l'autre est basée sur la méthode de troncature spectrale.

Dans ce contexte, on démontre la stabilité des solutions ainsi que leurs convergences vers les solutions des problèmes originaux. On établit aussi des estimations d'erreurs entre les solutions originales et les solutions approchées sous certaines hypothèses de régularité sur les données. L'étude est clôturée par une série d'expérimentations numériques justifiant le cadre théorique développé dans cette thèse.

**Mots-clés :** *Problèmes mal posés, problèmes inverses, régularisation, stabilisation, méthodes itératives, équation elliptique généralisée, équation avec variables déviées, méthode pseudo-parabolique, problème bi-fractionnaire, méthode de troncature spectrale.*



Il reste toujours un peu de parfum à la main qui donne des roses.

CONFUCIUS (551 avant J.C., 479 avant J.C.) Philosophe chinois.

Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes ; un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies.

(Stefan Banach)

La physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes ; elle nous aide à en trouver les moyens, et cela de deux manières. Elle nous fait pressentir la solution ; elle nous suggère des raisonnements.

(Henri Poincaré)

Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.

(Henri Poincaré)

Dans la vie il n'y a pas de solutions. Il y a des forces en marche : il faut les créer et les solutions suivent.

(Antoine de Saint-Exupéry)

# Dedication



To the memory of my sweet mother.  
To my family, my teachers and my friends.

*R. Sassane*

# Remerciements

Avant tout je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.



J'exprime toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse Mme. Rebbani F. (Prof. Esti Annaba) et M. Boussetila N. (Prof. U. Guelma) pour leur aide, leur soutien, leur patience, leur compréhension, leurs conseils ainsi que la confiance qu'ils m'ont fait en acceptant de diriger mes recherches.



Je tiens également à remercier M. Chorfi Lahcène (Prof. U. Annaba) qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que Mme. Zouyed Fairouz (Prof. U. Annaba), Mme. Alem Leila (Prof. U. Annaba) et M. Ramoul Hichem (MCA. U. Khenechla) pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.



Je tiens également à remercier M. Kirane Mokhtar (Prof. U. de La Rochelle) et M. Benrabah Abderafik (MCA. U. Guelma) qui m'ont aidé beaucoup par leur soutien scientifique.



Je remercie chaleureusement tous les membres du Laboratoire LMA de l'UBMA, la composante administrative du département de mathématiques, ainsi que le staf de l'école supérieure de technologies industrielle, Annaba, pour toute l'aide qui m'a été accordée.



une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation, surtout les enseignants de Master.



Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

*R. Sassane*

---

© Sassane Roumaïssa  
D. LMD : MÉTHODES VARIATIONNELLES DE RÉGULARISATION  
POUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES INVERSES EN EDP

Université Badji Mokhtar Annaba  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques  
Laboratoire de Mathématiques Appliquées

**Composition du document**

La production de ce document repose sur la programmation lettrée avec LaTeX.

Distribution [TeX Live 2017].

Math Package : LUCIMATX. [https://www.pctex.com/Lucida\\_Fonts.html](https://www.pctex.com/Lucida_Fonts.html).

Fontes commerciales.otf compilées avec L<sup>C</sup>D<sup>F</sup>-Tools : MinionPro, KlavikaPro, ScrittaNuova, KautivaPro, CoralPen, Hedra, SkolarPE, OfficinaSans, LoewNextArabic, GumelaArabic, Awan-Zaman.



---

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Activités de recherches</b>	<b>1</b>
<b>Thématique de la thèse</b>	<b>3</b>
<b>Contenu de la thèse</b>	<b>9</b>
<b>1 Résultats préliminaires et notations</b>	<b>10</b>
1.1 Espaces fonctionnels . . . . .	10
1.2 Eléments de la théorie spectrale . . . . .	11
1.2.1 Opérateurs linéaires bornés . . . . .	11
1.2.2 Inverse et adjoint d'un opérateur linéaire borné . . . . .	12
1.2.3 Spectre d'un opérateur linéaire et décomposition spectrale . . . . .	12
1.2.4 Opérateurs fermés et non-bornés . . . . .	13
1.2.5 Adjoint d'un opérateur non-borné . . . . .	14
1.2.6 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné . . . . .	15
1.3 Théorie de Riesz-Fredholm . . . . .	16
1.3.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts . . . . .	16
1.3.2 Famille spectrale et résolution de l'identité . . . . .	17
1.4 Problèmes mal posés et problèmes inverses . . . . .	18
1.4.1 Exemples des problèmes mal posés . . . . .	20
1.4.2 Outils d'analyse de problèmes mal posés . . . . .	24
1.5 Méthodes de régularisation . . . . .	26
1.5.1 Méthode de Tikhonov . . . . .	28
1.5.2 Méthode du gradient . . . . .	29
1.6 Calcul fractionnaire . . . . .	31
1.6.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	32
1.6.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	34
<b>2 Problème de la chaleur avec une perturbation de type involution</b>	<b>36</b>
2.1 Position du problème . . . . .	36
2.2 Rappels . . . . .	37
2.3 Analyse du problème . . . . .	38

2.3.1	Stabilité conditionnelle . . . . .	44
2.4	Méthode de régularisation pseudo-parabolique . . . . .	46
2.5	Tests numériques . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Etude d'un problème inverse de type bi-fractionnaire</b>	<b>56</b>
3.1	Formulation du problème . . . . .	57
3.2	Résultats Préliminaires . . . . .	59
3.2.1	Opérateurs quasi-contractants . . . . .	59
3.2.2	Fonction de Mittag-Leffler et ses propriétés . . . . .	60
3.3	Analyse du Problème . . . . .	62
3.3.1	Caractère mal posé du problème (3.1.4) . . . . .	68
3.3.2	Stabilité conditionnelle . . . . .	70
3.4	Méthode de régularisation itérative de Kozlov-Mazya . . . . .	72
3.4.1	Description de la méthode . . . . .	72
3.5	Tests numériques . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Régularisation d'un problème elliptique généralisé</b>	<b>81</b>
4.1	Formulation du problème . . . . .	81
4.2	Résultats préliminaires . . . . .	84
4.3	Analyse du problème . . . . .	85
4.3.1	Caractère mal posé du problème . . . . .	85
4.3.2	Stabilité du problème (4.1.5) . . . . .	89
4.4	Méthodes de régularisation . . . . .	90
4.4.1	Méthode de troncature spectrale . . . . .	90
4.4.2	Méthode itérative de Kozlov Maz'ya . . . . .	94
4.5	Tests numériques . . . . .	98
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>104</b>

# Introduction

---

## Activités de recherche

### PUBLICATIONS INTERNATIONALES

Les travaux de cette thèse ont fait l'objet de deux publications internationales [125, 126] et le troisième article est en cours de préparation.

✍ Sassane R, Boussetila N, Rebbani F, Benrabah A. Iterative regularization method for an abstract ill-posed generalized elliptic equation. *Asian-European Journal of Mathematics*. 2021; 2150069 (22 pages), DOI : 10.1142/S1793557121500698.

**Indexation** : Liste des revues scientifiques de catégorie **B** (DGRST 2019), No.2118. Asian-European Journal of Mathematics (World Scientific), Print-ISSN 17935571. SCOPUS 2019 : Impact Factor : 0.39.

✍ Sassane R, Boussetila N, Rebbani F. A variant of quasi-reversibility method for a class of heat equations with involution perturbation. *Math Meth Appl Sci*. 2020; 1-11. <https://doi.org/10.1002/mma.6780>

**Indexation** : Liste des revues scientifiques de catégorie **A** (DGRST 2019) No. 9035. Mathematical Methods in the Applied Sciences (WILEY), ISSN 0170-4214, E-ISSN 1099-1476. JCR 2019 : Impact Factor : 1.626.

### PUBLICATIONS INTERNATIONALES (en préparation)

✍ Sassane Roumaïssa, Benrabah Abderafik, Boussetila Nadjib, Rebbani Faouzia. *Iterative Regularization Method for an Inverse Problem Governed by Time-Bifractional Diffusion Equations*.

### COMMUNICATIONS INTERNATIONALES

✍ Boussetila Nadjib, Sassane Roumaïssa, Rebbani Faouzia. An Iterative Regularization Method for an Ill-Posed Bi-Fractional Problem, 3rd International Conference of Mathematical

Sciences (ICMS 2019), 4-8 September 2019, Istanbul, Turkey. ABSTRACT BOOK, ISBN : 978-605-2124-29-1.

### COMMUNICATIONS NATIONALES

- ✍ Problème de Calderón de la conductivité inverse. JIP'13, U. Annaba 2013.
- ✍ The modified QBV-method for forward-backward heat equations in one space dimension. 4èmes Journées jeunes chercheurs (4JJC), U. Annaba 2015.
- ✍ Participation aux Journées sur les problèmes inverses. Théorie et applications JIP'15, U. Annaba 2015.
- ✍ An iterative regularization method of an ill-posed bi-fractional equation. Journées Jeunes Chercheurs en Mathématiques et Applications, U. Annaba 2018.

## Thématique de la thèse

Le lien entre mathématique et physique ne devrait pas surprendre le lecteur. On peut penser aux mathématiques comme la seule façon de décrire la physique, et pas seulement comme un outil utile. Cela ne signifie pas que ces deux disciplines ne peuvent pas se développer indépendamment, mais des jalons importants sont atteints grâce à une interaction intense de ces deux champs.

L'étude des équations différentielles, de la géométrie différentielle et de la théorie des opérateurs, motivée respectivement par des sujets physiques tels que la mécanique newtonienne, la relativité générale et la mécanique quantique en sont un exemple clair.

D'un autre côté, quelques phénomènes physiques, des plus fondamentaux ont été exprimés moyennant des formulations mathématiques abstraites, tels que la mécanique en géométrie simpliste.

En grande partie, les lois de la physique sont écrites sous forme d'équations différentielles. La présence d'une seule variable indépendante, comme on le voit dans la mécanique des particules ponctuelles, conduit à des **équations différentielles ordinaires (EDO)**. D'autres domaines de la physique étudient les objets étendus et les dérivées partielles rejoignent les équations différentielles, qui sont alors appelées **équations aux dérivées partielles (EDP)**. Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être modélisés par ce type d'équations auxquelles sont jointes des conditions aux limites imposées sur la frontière du domaine où le phénomène évolue, ainsi que des conditions initiales.

Les EDP les plus récurrentes et les plus célèbres en physique mathématique sont l'équation de Poisson et sa version sous le nom d'équation de Laplace. Pour les équations d'évolution, on a l'équation de la chaleur, l'équation d'Alembert, l'équation de Schrödinger et sa généralisation relativiste pour une particule libre, connue sous le nom d'équation de Klein-Gordon. Toutes ces équations qui viennent d'être mentionnées ont des dérivées partielles par rapport au temps.

Généralement, la modélisation d'un problème est constituée d'une analyse théorique et d'une implémentation numérique.

L'étude des phénomènes dans la nature nous permet de calculer des quantités ou **des propriétés physiques d'un modèle donné**. On distingue alors deux types de problèmes : les **problèmes directs** et les **problèmes inverses**. De manière schématique, un **problème inverse** peut être formulé comme étant une relation fonctionnelle (**Input, Système, Output**), où l'objectif d'étude est d'identifier des **causes** connaissant les **effets**.

La causalité et l'irréversibilité donnent une dichotomie entre les phénomènes physiques, qui peut être quantifiée mathématiquement en deux classes de problèmes : les problèmes **bien posés** et les problèmes **mal posés**. En se référant à cette dichotomie, le mot "**problèmes inverses**" désigne tous les problèmes qui partagent le caractère **mal posé** par opposition aux problèmes dits **directs**.



En 1923, le mathématicien français J. HADAMARD a écrit son livre célèbre sur les équations aux dérivées partielles et leur signification physique [53]. Cet ouvrage fut le point de départ du développement du concept du problème *bien posé* en physique mathématique. Il s'agit d'un problème dont la solution existe, est unique, et dépend continûment des données (stabilité). Par la suite, on considéra que les problèmes ne vérifiant pas les conditions de HADAMARD n'ont pas de valeur pratique et ne peuvent pas modéliser de manière correcte un phénomène physique. La réalité actuelle est toute autre. Il y'a plusieurs problèmes dont une au moins des trois conditions de HADAMARD n'est pas vérifiée; ces problèmes sont dits *mal posés*. En général, la plus grande difficulté dans ce type de problèmes réside dans l'instabilité, *i.e.*, une légère perturbation des données peut provoquer un changement important au niveau de la solution.

Les problèmes *mal posés* apparaissent dans de nombreuses branches des sciences et techniques, comme la géophysique, le contrôle non destructif, la corrosion, l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X,...), l'énergie (calcul d'écoulements de pétrole dans un réservoir avec puits), la chimie (détermination des constantes de réaction), le radar et l'acoustique sous-marine (détermination de la forme d'un obstacle), le traitement d'image (restauration d'images floues) et d'autres domaines pratiques.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien été adaptées pour les solutions des problèmes *bien posés*. Cependant, ce n'était pas clair dans quel sens les problèmes *mal posés* peuvent avoir des solutions. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, John, Lavrentiev, Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes *mal posés*. Ils ont pu donner une définition mathématique précise des "**solutions approchées**" pour une classe assez large de problèmes. Aujourd'hui, ces problèmes sont un domaine de recherche très riche et plein de questions mathématiques. Pour plus de détails de l'étude des problèmes *mal posés*, on peut se référer aux deux excellents livres [38, D. Colton, H.W. Engel, A.K. Louis ] et de [45, H. W.Engl, M.Hanke, A. Neubauer].

Parmi les situations qui se traduisent par un problème *mal posé* on peut citer le problème consistant à déterminer les états passés d'un système physique décrit par une équation différentielle à partir de son état présent, ou bien celui de déterminer les paramètres d'un système à partir de données expérimentales. Dans les deux cas, on parle de *problèmes inverses* (voir [47, 64, 78, 114]).



D'après Jd.B.Keller [73], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre; si la formulation de l'un met l'autre en cause. Une définition plus opérationnelle est qu'un *problème inverse* consiste à déterminer les **causes** d'un phénomène en fonction de l'observation de ses **effets**. Ainsi, ce problème est l'inverse de celui appelé **problème direct** consistant à chercher les **effets** à partir des **causes** qui sont observables. Par exemple, localiser l'origine d'un tremblement de terre à partir de mesures faites par plusieurs stations sismiques réparties sur la surface du globe terrestre est un problème inverse.

On peut décrire le schéma d'un **problème direct** comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{(entrée) input} \rightarrow \text{processus} \rightarrow \text{output (sortie)} \\ \text{cause} \rightarrow \text{modèle} \rightarrow \text{effet} \end{array}$$

Les **problèmes inverses** peuvent être classés en deux catégories : les problèmes qui visent à déterminer des conditions aux limites ou des sources inconnues, et les problèmes liés à l'estimation de paramètres intrinsèques du système. Le premier type de problèmes apparaît dès que la mesure directe de la grandeur physique étudiée n'est pas accessible en pratique. Dans la deuxième catégorie de **problèmes inverses**, l'objectif est de déterminer à partir d'une connaissance partielle de l'état du système, les paramètres décrivant le modèle physique. Les **problèmes inverses** sont multiples et leurs applications se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, la détection des fissures, le contrôle non destructif, la mécanique des structures,...

D'après la définition d'un **problème inverse**, on peut voir que ces problèmes risquent de poser des difficultés particulières. En effet, il est raisonnable d'exiger qu'un **problème direct** soit **bien posé** : "les mêmes **causes** produisent les mêmes **effets**". Par contre, il est facile d'imaginer que les mêmes **effets** puissent provenir de **causes** différentes. Ceci illustre une difficulté de l'étude des **problèmes inverses** : ils peuvent avoir plusieurs solutions, et il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires pour les différencier.

Une autre difficulté majeure dans l'étude des **problèmes inverses** est qu'elles nécessitent une bonne connaissance des **problèmes directs** associés. Lorsqu'il est question d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir d'observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du **problème direct**); cette inversion généralement instable nécessite un traitement particulier. Il s'agit de techniques, dites de **régularisation**, dont le but est de rendre le problème étudié **bien posé** et rendre son implémentations numériques réalisable, et ce en le perturbant légèrement pour éliminer les éléments responsables de l'instabilité.



En mathématique, la **régularisation** est une procédure qui consiste à remplacer un problème **mal posé** par un autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés (**bien posé**) rendant son étude théorique et numérique plus aisée.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de **régularisation** ont été utilisées pour résoudre certains problèmes de Cauchy **mal posés**. Parmi elles, on cite :

- La méthode de quasi-réversibilité, introduite par Lattes et Lions (1969) [91], qui consiste à transformer le problème de Cauchy **mal posé** d'ordre 2 en un problème différentiel **bien posé** d'ordre plus élevé (d'ordre 4), en perturbant l'opérateur-coefficient de l'équation. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre

le problème de Cauchy, notamment : Klibanov et Santosa [81] et plus récemment Bourgeois [18].

- La méthode de quasi-réversibilité modifiée qui a été introduite par Gasjewski et développée par plusieurs auteurs dont N. Boussetila et F. Rebbani [20].
- La méthode de *régularisation* de Tikhonov [140] est la méthode de *régularisation* la plus ancienne. Elle consiste à transformer le problème original *mal posé* en un problème de minimisation.
- La méthode itérative de Kozlov et al.[84] est basée sur une procédure itérative. Elle consiste à résoudre une suite alternative de problèmes *bien posés* avec conditions aux limites mêlées jusqu'à satisfaire un certain critère d'arrêt. La solution approchée converge pour des données compatibles, vers la solution du problème de Cauchy considéré.
- La méthode de *régularisation* par les conditions non locales "Quasi-Boundary-Value Method" introduite par Showalter [1]. L'idée dans cette méthode est de remplacer le problème *mal posé* par un problème *bien posé*, dans lequel on perturbe la condition finale en la remplaçant par une condition non-locale dépendant d'un petit paramètre  $\alpha$ . Elle a été utilisée par plusieurs auteurs, comme D.N. Hào [55] et Samariskii [130].



Dans ce travail, on étudie un problème de la chaleur *mal posé* et deux *problèmes inverses* de type *fractionnaires*. Dans le premier cas, le but est d'approximer le problème initial qui est *mal posé* par un problème *bien posé* en utilisant une *régularisation* pseudo-parabolique afin de construire une solution stable du problème en question. Dans les deux autres cas, il s'agit de reconstituer des données au bord, inaccessibles à la mesure à partir des données internes, respectivement, pour un problème *bi-fractionnaire* et un problème *elliptique généralisé*.

La **diffusion** est l'un des mécanismes de transport parmi les plus importants. Dans la littérature, de nombreux modèles ont été proposés pour décrire ce mécanisme dans des milieux homogènes et non homogènes. Au niveau microscopique, la **diffusion** est liée au mouvement aléatoire de particules individuelles. Suite au travail d'Albert Einstein [44], l'hypothèse que le mouvement des particules soit de processus Gaussien a été interprétée par l'utilisation de l'opérateur de Laplace et de la dérivée du premier ordre dans le modèle de **diffusion** canonique.

L'un des inconvénients majeurs du modèle Gaussien (lois de Fourier) est qu'il ne décrit pas de manière adéquate le phénomène de **diffusion** dans les matériaux à mémoire, par exemple les matériaux viscoélastiques, et les milieux hétérogènes, tels que le sol, les aquifères hétérogènes et l'écoulement des fluides souterrains.

Au cours des deux dernières décennies, un vaste corpus de littérature a montré que les modèles de **diffusion anormale** dans lesquels la variance quadratique moyenne augmente



plus rapidement (**super-diffusion**) ou plus lentement (**sous-diffusion**) que dans un processus Gaussien dans certaines circonstances, peuvent offrir une bonne modélisation (voir [61, 95, 136]) pour la physique et les applications pratiques.

Dans des contextes biologiques, les résultats expérimentaux suggèrent que la **diffusion classique** n'est pas la meilleure description dans les cas de transport biophysique complexe. Au lieu de cela, il a été démontré qu'une **diffusion anormale** se produit dans diverses circonstances, potentiellement causée par des mécanismes sous-jacents tels que le transport actif, l'encombrement macromoléculaire dans un environnement extracellulaire ou intracellulaire tortueux, où la géométrie du milieu est complexe. Récemment, une équation **fractionnaire** a été introduite pour décrire la **diffusion** dans des types spéciaux de milieux poreux qui présentent une géométrie fractale, afin de donner la possibilité d'étendre l'utilisation de l'équation de Bloch pour faire un grand paquet de situations expérimentales en résonance magnétique nucléaire (RMN) (voir [97]). Dans le même travail, l'auteur a montré que l'équation des ondes d'ordre **fractionnaire** régit la propagation des ondes mécaniques dans les milieux viscoélastiques caractérisés par une simple déformation et peut fournir un modèle bien adapté pour la description des mouvements dynamiques qui se produisent dans les tissus biologiques.

Par conséquent, au cours des dernières décennies, un intérêt considérable a été consacré au calcul **fractionnaire**; la plupart des auteurs citeront une date particulière comme l'anniversaire du calcul **fractionnaire**. Dans une lettre datée du 30 septembre 1695, l'Hospital a écrit à Leibniz pour s'informer sur la dérivée d'ordre  $n = 1/2$  de la fonction  $f(x) = x$ , et la réponse de Leibniz a été : "Un paradoxe apparent, dont un jour des conséquences utiles seront tirées" (voir [61]). Cependant, peu de progrès ont été faits dans ce domaine pendant trois siècles. Une des raisons est que les outils mathématiques du calcul **fractionnaire** n'étaient pas disponibles. Une autre raison est le manque d'applications pratiques de ce concept. Plus de 300 ans après, on commence seulement à surmonter ces difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler, Laplace, Fourier, Liouville et Riemann, etc.. Le calcul **fractionnaire** est devenu l'un des domaines les plus développés de l'analyse mathématique. Il a eu une évolution rapide et s'est révélé comme un outil puissant dans la modélisation de certains phénomènes dans plusieurs domaines scientifiques tels que la physique, la chimie, la biologie, l'ingénierie et la finance, y compris éventuellement les phénomènes fractals. En raison de ses propriétés intéressantes et les différentes applications dans divers domaines scientifiques, les solutions numériques des problèmes traités ont montré plus de cohérence avec les données expérimentales que celles produites par les équations différentielles d'ordre entier (voir [17, 65]).

Dans un modèle **fractionnaire**, il existe un certain nombre de paramètres, par exemple, l'ordre **fractionnaire**, coefficients du potentiel (lors de l'utilisation d'un opérateur elliptique du second ordre dans l'espace), condition initiale, terme source, conditions aux limites et la géométrie du domaine, qui ne peuvent pas être mesurés ou caractérisés directement, et doivent être déduits indirectement à partir des données mesurées.

Cela a donné lieu à une grande variété de *problèmes inverses* pour les EDF, qui ont commencé à attirer beaucoup d'attention ces dernières années, depuis le fameux travail de Cheng et al.[36]. Une question intéressante est de savoir comment la physique non locale (à partir des processus de **diffusion anormaux**) influencera le comportement des *problèmes inverses*. Par exemple l'unicité, la stabilité et le degré du caractère *mal-posé*. Ce degré est particulièrement important pour le développement de procédures de reconstruction numérique.



## Contenu de la thèse

La thèse est composée d'une introduction et de cinq chapitres.

- Dans le Chapitre 1, on rappelle certaines notions préliminaires fondamentales et les ingrédients nécessaires d'analyse fonctionnelle et du calcul *fractionnaire* pour l'étude des problèmes proposés, et pour faciliter la lecture de la thèse.
- Le Chapitre 2 traite un problème de la chaleur *mal posé*, où l'objectif d'étude est d'étendre la méthode de quasi-réversibilité à certaines classes de problèmes non classiques. En utilisant une variante modifiée de la méthode de *régularisation pseudo-parabolique*, on construit une famille de problèmes pseudo-paraboliques *bien posés*, qui approchent le problème traité, et on montre la convergence de cette procédure de *régularisation*.
- Dans le Chapitre 3, on propose l'étude d'un *problème inverse bi-fractionnaire* engendré par une équation biparabolique faisant intervenir une dérivée *fractionnaire* par rapport à la variable temps, qu'on peut considérer comme étant un problème de diffusion relaxée. On montre que ce problème est *faiblement mal posé* et on propose une méthode de *régularisation* basée sur la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya.
- Quant au Chapitre 4, il est consacré à l'étude d'un *problème inverse* elliptique généralisé, défini sur une géométrie non bornée. L'objectif de cette investigation est de reconstruire une donnée de Dirichlet à partir d'une mesure interne. Pour régulariser le problème proposé, on utilise deux stratégies d'approximation : la première est basée sur la méthode de troncature spectrale, qui nous permet de construire une solution approchée stable, et la deuxième repose sur la méthode itérative de Kozlov-Mazya.
- Le volet numérique de ce travail fait l'objet du Chapitre 5. On y donne des tests numériques pour des exemples académiques, à travers lesquels, on justifie les résultats théoriques de stabilité obtenus dans cette thèse.

Notre travail est une extension de la série des travaux qui ont été faits dans cette direction par notre groupe de recherche [23, 90, 80, 54].



## Résultats préliminaires et notations

Le premier chapitre est consacré à un rappel de certaines notions d'analyse fonctionnelle, quelques éléments de la théorie des *problèmes inverses* ainsi qu'aux outils de base sur le calcul *fractionnaire*. [21, 23, 25, 59, 72, 80, 82, 90, 150]

### 1.1 Espaces fonctionnels

On note par  $\Omega$  une partie mesurable de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1.1. (Espaces  $\mathbb{L}^p(\Omega)$ )**

Soit  $p$  un réel de  $[1, +\infty[$ , on définit l'espace  $\mathbb{L}^p(\Omega)$  par

$$\mathbb{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable telle que : } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

**Théorème 1.1.1.** *L'espace vectoriel  $\mathbb{L}^p(\Omega)$  est un espace de Banach muni de la norme définie par*

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Remarque 1.1.1.** Pour  $q > p \geq 1$ , on a  $\mathbb{L}^q(\Omega) \subset \mathbb{L}^p(\Omega)$ .

**Définition 1.1.2 (Espaces de Sobolev  $H^m(\Omega)$ ).** Soit  $m \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $H^m(\Omega)$  l'espace de Sobolev donné par

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m, \exists v_{\alpha} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que } v_{\alpha} = \partial^{\alpha} u \text{ au sens faible} \right\}.$$

On introduit sur  $H^m(\Omega)$  le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^{\alpha} u, \partial^{\alpha} v \rangle, \quad (1.1.1)$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_m}. \quad (1.1.2)$$

**Théorème 1.1.2.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $m \in \mathbb{N}$ . L'espace  $H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire (1.1.1) est un espace de Hilbert séparable.

Dans le cas où  $m = 1$ , on utilise la densité de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  pour définir l'espace de Sobolev suivant :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

## 1.2 Éléments de la théorie spectrale

Dans tout ce qui suit, on désigne par  $H_i$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{H_i}$  et le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ ; ( $i = 1; 2$ ).

### 1.2.1 Opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.2.1.** Un opérateur **linéaire** est une application  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$  vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\forall x, y \in \mathcal{D}(A)$ , on a :  $A(x + y) = A(x) + A(y)$ ,
2.  $\forall x \in \mathcal{D}(A)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a :  $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ ,

où  $\mathcal{D}(A)$  est le domaine de définition de l'application **linéaire**  $A$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $H_1$ , que l'on suppose en général **dense** dans  $H_1$ .

**Définition 1.2.2. (Opérateurs bornés).** L'opérateur **linéaire**  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  est dit **borné** si la quantité :

$$\|A\| = \sup \left\{ \|Au\|_{H_2}, u \in \mathcal{D}(A), \|u\|_{H_1} = 1 \right\},$$

est finie. Dans ce cas  $A$  est une application **linéaire continue** sur  $\mathcal{D}(A)$ , et lorsque  $\mathcal{D}(A)$  est **dense** dans  $H_1$ ,  $A$  s'étend de manière unique en un opérateur **borné** sur  $H_1$ .

- On note  $\mathcal{L}(H_1, H_2)$  (resp.  $\mathcal{L}(H_1)$ ) l'espace vectoriel des opérateurs **linéaires continus** de  $H_1$  dans  $H_2$  (resp. des endomorphismes continus de  $H_1$ ) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Bu\|_{H_2}}{\|u\|_{H_1}}.$$

- Tout opérateur  $A$  est complètement défini par son graphe  $\mathbf{G}(A)$  qui est un sous-espace vectoriel de  $H_1 \times H_2$  défini par  $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$ .
- Pour tout opérateur linéaire  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$ , on note par :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(A) &= \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} && \text{(le noyau de } A), \\ \mathbf{R}(A) &= \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} && \text{(l'image de } A). \end{aligned}$$

### 1.2.2 Inverse et adjoint d'un opérateur linéaire borné

**Définition 1.2.3. (Opérateurs inverses).** On dit qu'une application **linéaire continue**  $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est **inversible** si et seulement si, il existe une application  $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  telle que :

$$S' \circ S = I_{H_1}, S \circ S' = I_{H_2},$$

où  $I_{H_1}$  (resp.  $I_{H_2}$ ) est l'opérateur identité de  $H_1$  (resp.  $H_2$ ). L'application  $S'$ , si elle existe, est unique et on note :  $S' = S^{-1}$ .

**Théorème 1.2.1. (Théorème des isomorphismes de Banach) [24].** Toute application **bijective linéaire et continue**  $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est **inversible**.

**Définition 1.2.4. (Opérateur adjoint).** Soit  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , il existe un opérateur unique noté  $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$  qui vérifie la relation :

$$\langle Th_1, h_2 \rangle_2 = \langle h_1, T^* h_2 \rangle_1, \quad \forall (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2.$$

Cet opérateur  $T^*$  est appelé l'opérateur **adjoint** de  $T$ .

**Propriétés 1.2.1.** Soient  $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , on a les propriétés suivantes :

- $\|T\| = \|T^*\|$ ,
- $S^{**} = (S^*)^* = S$ ,
- $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*$ ,
- $(TS)^* = S^* T^*$ ,
- Si  $T$  est inversible, alors  $T^*$  l'est aussi, et  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

**Définition 1.2.5. (Opérateur auto-adjoint).** Soit  $H$  un espace de Hilbert. On dit que  $T \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur **auto-adjoint** si  $T = T^*$ , autrement dit :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

### 1.2.3 Spectre d'un opérateur linéaire et décomposition spectrale

**Définition 1.2.6.** Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ . On note par  $\rho(A)$  l'**ensemble résolvant** de  $A$  défini comme suit :

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} ; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible} \right\}.$$

La **résolvante** de  $A$  en  $\lambda$  est notée par :

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

- Le complémentaire de  $\rho(A)$  dans le plan complexe s'appelle le **spectre** de  $A$  et on le note par  $\sigma(A)$ , où

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

- Le **rayon spectral** (noté  $r(A)$ ) de l'opérateur  $A$  est définie par :

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

- Le **spectre** d'un opérateur borné est un compact non vide.  
 ► Le **spectre ponctuel** de  $A$  (noté  $\sigma_p(A)$ ) est l'ensemble défini par :

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathbf{N}(A_\lambda = \lambda I - A) \neq \{0\} \right\} \\ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \exists v \in H \setminus \{0\} : Av = \lambda v \right\}. \end{aligned}$$

- Le **spectre résiduel** est l'ensemble :

$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathbf{N}(\lambda I - A) = \{0\} \text{ et } \overline{\mathbf{R}(\lambda I - A)} \neq H \right\}.$$

- Le **spectre continu** est l'ensemble  $\sigma_c(A)$  défini par :

$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \mathbf{N}(\lambda I - A) = \{0\} \text{ et } \overline{\mathbf{R}(\lambda I - A)} = H \right\}.$$

- On a

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

### 1.2.4 Opérateurs fermés et non-bornés

**Définition 1.2.7. (Opérateurs fermés).** On dit qu'un opérateur  $A$  est **fermé** si son graphe  $\mathbf{G}(A)$  est **fermé** dans  $H_1 \times H_2$ , i.e., pour toute suite  $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $H_1$  et  $Au_n \rightarrow v$  dans  $H_2$ , on a

$$u \in \mathcal{D}(A) \text{ et } v = Au.$$

**Remarque 1.2.1.** L'opérateur **fermé**  $A$  peut être considéré comme un opérateur **borné** sur son domaine de définition  $\mathcal{D}(A)$  muni de la norme du graphe ( $\|u\|_G := \|u\|_{H_1} + \|Au\|_{H_2}$ ) dans  $H_1$ .

**Théorème 1.2.2. (Théorème du graphe fermé) [24].** Soient  $H_1, H_2$  deux espaces de Banach et  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur linéaire. Si l'opérateur  $A$  est **fermé** alors il est **borné**.

**Définition 1.2.8. (Opérateurs non-bornés).** On dit qu'un opérateur linéaire  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  est un opérateur **non-borné** s'il existe une suite  $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$  telle que

$$\|u_n\|_{H_1} = 1 \text{ et } \|Au_n\|_{H_2} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

### 1.2.5 Adjoint d'un opérateur non-borné

**Définition 1.2.9.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur **non-borné** à domaine dense. On appelle l'**adjoint** de  $A$ , l'opérateur **non-borné**  $A^*$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H_2 &\rightarrow H_1, \\ v &\mapsto A^*v = w, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A^*) &= \left\{ v \in H_2 : \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle Au, v \rangle_2| \leq c \|u\|_{H_1}, \forall u \in \mathcal{D}(A) \right\} \\ &= \left\{ v \in H_2 : \exists w \in H_1 : \langle Au, v \rangle_2 = \langle u, w \rangle_1 = \langle u, A^*v \rangle_1, \forall u \in \mathcal{D}(A) \right\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.2.10. (Opérateur symétrique et auto-adjoint).** On dit que l'opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  est **symétrique** si :

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A), \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

L'opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  est dit **auto-adjoint** si  $A = A^*$ , i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ et } \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

**Remarque 1.2.2.** Si  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  est un opérateur **non-borné** à domaine dense, alors  $A^*$  est **fermé**.

**Théorème 1.2.3.** [25] [*Caractérisation des opérateurs à image fermée.*] Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur **non-borné, fermé**, avec  $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(i) \mathbf{R}(A) \text{ est fermé, } \quad (ii) \mathbf{R}(A^*) \text{ est fermé,}$$

$$(iii) \mathbf{R}(A) = \mathbf{N}(A^*)^\perp, \quad (iv) \mathbf{R}(A^*) = \mathbf{N}(A)^\perp.$$

**Théorème 1.2.4.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur **non-borné, fermé**, avec  $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est surjectif, i.e.,  $\mathbf{R}(A) = H_2$ ,
2. il existe une constante  $k > 0$  telle que :

$$\|v\| \leq k \|A^*v\|, \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

3.  $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$  et  $\mathbf{R}(A)$  est **fermée**.

**Corollaire 1.2.1.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur **non-borné, fermé**, avec  $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$ . L'opérateur  $A$  admet un **inverse borné**  $A^{-1}$  sur  $H_2$  si et seulement si, il existe deux constantes  $m_1$  et  $m_2$  telles que :

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq m_1 \|Au\|, \forall u \in \mathcal{D}(A), \\ \|v\| &\leq m_2 \|A^*v\|, \forall v \in \mathcal{D}(A^*). \end{aligned}$$



### 1.2.6 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur **non borné** que l'on suppose **fermé**<sup>1 2 3</sup> et à domaine dense ( $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$ ).

**Définition 1.2.11.** [34] On appelle **ensemble résolvant** de  $A$ , l'ensemble

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif} \right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe est le **spectre** de  $A$  et est noté  $\sigma(A)$  :

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

- ▷ Si  $\lambda \in \rho(A)$ , alors l'**opérateur inverse**  $R(\lambda; A) = A_\lambda^{-1}$  est défini sur tout l'espace et il est **fermé**. D'après le théorème du graphe fermé, cet opérateur est **borné**, *i.e.*,  $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H)$  et il est appelé **la résolvante de l'opérateur  $A$** .
- ▷ L'ensemble  $\rho(A)$  est un ouvert du plan complexe.
- ▷ L'application qui associe à chaque  $\lambda \in \rho(A)$  l'opérateur  $R(\lambda; A)$  est analytique sur chaque composante connexe de  $\rho(A)$ .
- ▷ **La résolvante** vérifie l'équation fonctionnelle suivante dite "**identité de la résolvante**" :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1; A) R(\lambda_2; A).$$

- ▷ Le **spectre** de  $A$  est un fermé de  $\mathbb{C}$ , et si de plus l'opérateur  $A$  est **borné**, alors  $\sigma(A)$  est un compact non vide.

**Théorème 1.2.5.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur **fermé symétrique**.  $A$  est **auto-adjoint** si et seulement si  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Remarque 1.2.3.** On a

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A),$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ n'est pas injectif} \right\}, \\ \sigma_r(A) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est injectif et } \mathbf{R}(\lambda I - A) \text{ n'est pas dense} \right\}, \\ \sigma_c(A) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ est injectif et } \mathbf{R}(\lambda I - A) \text{ est dense} \right\}. \end{aligned}$$

1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
2. Si  $A$  n'est pas **fermé**, alors  $\rho(A) = \emptyset$ .
3. Si  $A = A^*$ , alors  $\sigma(A) \neq \emptyset$  et  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

## 1.3 Théorie de Riesz-Fredholm

### 1.3.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

**Définition 1.3.1. (Opérateur compact).** On dit qu'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est **compact** s'il transforme toute partie bornée de  $H_1$  en une partie **relativement compacte** de  $H_2$ , i.e.,  $A(B_{H_1}(0, 1))$  est **relativement compacte** pour la topologie forte.

On désigne par  $\mathcal{K}(H_1, H_2)$  l'ensemble des opérateurs **compacts** de  $H_1$  dans  $H_2$  et on pose  $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$ .

► La compacité d'un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \iff \left[ \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightharpoonup 0 \text{ (faiblement)} \implies Tx_n \rightarrow 0 \text{ (fortement)} \right].$$

► Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach. Si  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $B \in \mathcal{K}(F, G)$  (resp.  $A \in \mathcal{K}(E, F)$  et  $B \in \mathcal{L}(F, G)$ ), alors  $AB \in \mathcal{K}(E, G)$ .

**Théorème 1.3.1. (Théorème de Schauder).** Si  $A$  est un opérateur **compact**, alors  $A^*$  est aussi **compact** et la réciproque est vraie.

**Théorème 1.3.2.** Soit  $K \in \mathcal{K}(H)$  avec  $\dim(H) = +\infty$ . Alors on a :

- $0 \in \sigma(K)$ ,
- $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ .
- En outre, on a l'une des situations suivantes :
  1.  $\sigma(K) = \{0\}$ ,
  2. ou bien  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  est fini,
  3. ou bien  $\sigma(K) \setminus \{0\}$  est une suite qui tend vers 0.

**Théorème 1.3.3.** On suppose que  $H$  est séparable. Soit  $A \in \mathcal{K}(H)$  un opérateur **auto-adjoint**. Alors  $H$  admet une **base Hilbertienne** formée de vecteurs propres de  $A$  :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Ax = \sum_{k \geq 1} (x, e_k) \lambda_k e_k.$$

**Définition et proposition 1.3.1.** 1. Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur symétrique. On dit que  $A$  est un **opérateur positif**, que l'on note  $A \geq 0$ , si :

$$\langle Ah, h \rangle \geq 0, \quad \forall h \in H.$$

2. Soit  $A$  un opérateur **positif** défini sur un espace de Hilbert, alors  $A$  est un opérateur **auto-adjoint**.

### 1.3.2 Famille spectrale et résolution de l'identité

#### □ Version discrète

**Définition 1.3.2.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur **non borné**. Alors  $A$  est dit à **résolvante compacte** si :

$$\forall \lambda \in \rho(A), R(\lambda; A) \in \mathcal{K}(H).$$

**Théorème 1.3.4.** Un opérateur  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  est à **résolvante compacte** si et seulement si, il existe  $\mu \in \rho(A)$  tel que :  $R(\mu; A) \in \mathcal{K}(H)$ .

**Théorème 1.3.5.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur **auto-adjoint**. Alors :

1.  $\sigma_r(A) = \emptyset$ ,
2.  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$ ,
3.  $A \geq \theta \Leftrightarrow \sigma(A) \subset [\theta, +\infty[$ .

**Théorème 1.3.6.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur **auto-adjoint borné inférieurement** et à **résolvante compacte**. Alors  $A$  est **diagonalisable**, i.e., il existe une base hilbertienne dans  $H$ ,  $(e_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$ , et une suite de réels  $(\lambda_m)_{m \geq 1}$  telles que :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots, \text{ avec } \lambda_m \rightarrow +\infty, \quad Ae_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

#### **Remarque 1.3.1.**

Si  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  est un opérateur **auto-adjoint** avec  $A \geq \theta > 0$  c'est-à-dire  $0 \in \rho(A)$ , et l'injection  $H_1 := (\mathcal{D}(A), \|\cdot\|_G) \hookrightarrow H$  est **compacte**, alors  $A$  est à **résolvante compacte** et donc **diagonalisable**.

#### □ Version continue

**Définition 1.3.3.** Une famille  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  de projections orthogonales dans  $H$  est appelée **famille spectrale** ou encore **résolution de l'identité** si elle satisfait les conditions suivantes :

- $E_\lambda E_\mu = E_{\inf(\lambda, \mu)}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
- $E_{-\infty} = 0$ ,  $E_{+\infty} = I$ , où :  $E_{-\infty}h = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda h$ , et  $E_{+\infty}h = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda h$ ,  $h \in H$ ,
- $E_{\lambda+0} = E_\lambda$  où :  $E_{\lambda+0}h = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon}h$ ,  $h \in H$ .

Les limites sont prises au sens de la norme de  $H$ .

**Théorème 1.3.7.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur **auto-adjoint** dans  $H$ . Alors il existe une **famille spectrale**  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  telle que :

$$\langle Ax, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_\lambda x, y \rangle, \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x.$$

On note symboliquement  $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ .

**Théorème 1.3.8.** Soit  $\lambda \mapsto f(\lambda)$  une fonction **continue** à valeurs réelles. Soit  $\mathcal{D} \subset H$  défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ h \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < +\infty \right\}.$$

Alors  $\mathcal{D}$  est **dense** dans  $H$  et on définit un opérateur **auto-adjoint**  $S$  dans  $H$  par :

$$\langle Sx, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E_\lambda x, y \rangle, \quad x \in \mathcal{D}, y \in H,$$

de domaine  $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}$ .

### ■ Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit  $A$  un opérateur **auto-adjoint** dans l'espace de Hilbert  $H$  défini par  $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ , où  $\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$  et  $\{E_\lambda\}$  est sa résolution de l'identité.

**Définition 1.3.4.** Les puissances de l'opérateur  $A$  sont définies comme suit :

$$A^r = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathcal{D}(A^r) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} d|E_\lambda h|^2 < +\infty,$$

et on a les propriétés suivantes :

1. Pour tout  $r \leq 0$ , on a :  $A^r \in \mathcal{L}(H)$ , et si  $r = 0$ , alors  $A^0 = I$ ,
2. Pour tout  $r \geq 0$  et  $h \in \mathcal{D}(A^r)$ , on a

$$\langle A^r h, h \rangle \geq \lambda_0^r |h|^2.$$

3. Pour tout  $r \geq 0$ ,  $\mathcal{D}(A^r)$  muni de la norme  $\|h\|_r = \|A^r h\|$  est un espace de Hilbert avec  $h \in \mathcal{D}(A^r)$ .
4. Si  $0 \leq r_1 \leq r_2$ ,  $\mathcal{D}(A^{r_2}) \subset \mathcal{D}(A^{r_1})$  et  $\overline{\mathcal{D}(A^{r_2})} = \mathcal{D}(A^{r_1})$ .

**Définition 1.3.5.** Si  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $f(A)$  est définie comme suit :

$$f(A) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda, \quad h \in \mathcal{D}(f(A)) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < +\infty.$$

## 1.4 Problèmes mal posés et problèmes inverses

Les **problèmes inverses** sont difficiles du point de vue théorique et numérique. Chaque problème exige une démarche bien appropriée selon les données réelles et les contraintes

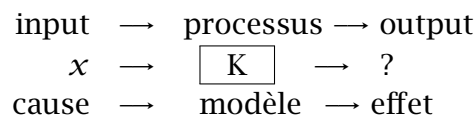
pratiques, qu'on doit les respecter, pour ne pas simplifier le modèle physique et pour ne pas rendre la tâche expérimentale irréalisable. Cette spécificité est dictée par la nature et la logique humaine.

Comme exemple, on peut considérer le calcul des valeurs d'une fonction donnée pour laquelle on peut formuler un *problème inverse* qui consiste à déterminer cette fonction à partir d'un certain nombre de points situés sur son graphe.

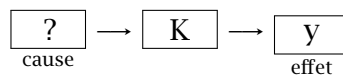
**Problèmes directs.** Si on note par  $\mathbf{P}$  l'espace des **paramètres**,  $\mathbf{E}$  l'espace des **excitations** et  $\mathbf{R}$  l'espace des **états (réponses)**, alors le **problème direct**  $L : \mathbf{P} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$ , consiste à calculer la **réponse**  $d$  à partir de la **donnée des sollicitations**  $x$  et des **paramètres**  $p$ . Les équations de la physique donnent en général la **réponse**  $d$  comme fonction de  $x$  et  $p : L(x, p) = d$ , la notation  $L$  symbolise les équations de la physique du problème considéré; on parle parfois du modèle physique.

**Problèmes inverses.** D'un point de vue "physique" ou "expérimental", on dit qu'on a un *problème inverse* si on se trouve dans une situation dans laquelle on souhaite évaluer une certaine grandeur physique  $p$  inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur  $d$  directement accessible à l'expérience, en connaissant un modèle mathématique du **problème direct** qui donne explicitement  $d$  à partir de  $p$  (ce que l'on note symboliquement  $d = G(p)$ ).<sup>Réf 1</sup>

Dans certains problèmes, on a suffisamment d'informations pour effectuer un processus bien défini et stable qui nous donne une solution unique. Dans le domaine des sciences, un **processus** est, en général, appelé un **modèle**, où les données d'entrées sont des **causes** et de sorties sont des **effets**. Si on symbolise les données d'entrées par  $x$  et le processus par  $K$ , alors le **problème direct** consiste à trouver  $Kx$ . On peut décrire le schéma d'un **problème direct** comme suit :

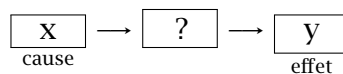


À ce **problème direct**, on peut associer par exemple deux *problèmes inverses*. Le premier *problème inverse* est le problème de **causalité** qui consiste à trouver la cause  $x$  correspondant à l'effet  $y$  en donnant le modèle  $K$  qu'on peut représenter comme suit :



Evidemment, le problème de **causalité** pour  $K$  est le **problème direct** pour  $K^{-1}$ , en supposant que  $K$  est inversible mais en général  $K$  ne l'est pas.

Un autre *problème inverse* associé à ce **problème direct** est le problème **d'identification de paramètres**. Dans ce cas on donne des informations d'entrées et de sorties, le but étant de trouver les paramètres du modèle. On peut le schématiser comme suit :



1. Marc Bonnet, Problèmes inverses : Cours de DEA Dynamique des Structures et Couplages (2004).

Si le processus  $K$  est un opérateur, alors pour toute donnée d'entrée, un unique résultat est déterminé. D'autre part, il n'existe aucune garantie que les **problèmes inverses** de **causalité** et **d'identification de paramètres** aient des solutions uniques. De plus, si l'opérateur  $K$  est continu, la solution du **problème direct** est stable. Même si l'opérateur  $K$  admet un inverse bien défini de tel sorte que le problème de **causalité** est uniquement résoluble, on n'a aucune garantie que cette solution est stable, c-à-d que l'opérateur inverse est continu. Par conséquent, la difficulté principale des **problèmes inverses** est leur caractère généralement **mal posé**<sup>2</sup>.

**Définition 1.4.1.** [53] Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, et  $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$  un opérateur (**linéaire ou non-linéaire**). Le **problème inverse**  $Ax = y$  est **bien posé** au sens de HADAMARD si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. **Existence** : Pour tout  $y \in Y$ , il existe  $x \in X$  tel que  $Ax = y$ .
2. **Unicité** : Pour tout  $y \in Y$ , il y a au plus une solution  $x \in X$ .
3. **Stabilité** : La solution  $x$  dépend continûment de la donnée  $y$ .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**.

En général, le traitement d'un problème **mal posé** demande des corrections et des modifications de certaines données liées aux modèle en question. La condition sur **l'existence** peut être satisfaite pour des topologies bien appropriées (relaxation des espaces), la condition sur **l'unicité** peut être récupérée en ajoutant des informations a priori. La difficulté essentielle dans l'étude d'un problème **mal posé** réside dans la question de **l'instabilité** de la solution. En effet, s'il y a un processus d'instabilité, l'implémentation numérique du problème n'est pas réalisable. Pour éliminer cette difficulté, on remplace le problème original par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable en utilisant des méthodes de **régularisation**. Ces stratégies de **régularisation** sont variées et chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de position incorrecte (voir [48]).

### 1.4.1 Exemples des problèmes mal posés

**Exemple 1.4.1. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.4.3)$$

où  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $\varepsilon > 0$ . On vérifie aisément que  $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  est une solution du problème (1.4.3). On remarque que

$$(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0),$$

---

2. Alors que les mêmes **causes** provoquent les mêmes **effets**, des **effets** identiques peuvent avoir de multiples **causes** : les **problèmes inverses** sont **mal posés**.

mais  $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$  pour tout  $x > 0$  fixé, ce qui prouve que les solutions de (1.4.3) ne dépendent pas continûment des données initiales d'où le problème d'instabilité.

**Exemple 1.4.2. Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur.** Ce problème consiste à déterminer  $u(x, 0) = u_0(x)$  (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température  $u(x, t)$  vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.4.4)$$

où  $\psi \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$  est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (1.4.4) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où  $\psi_n$  est le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $\psi$  :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit  $\varphi(x) = u_0(x, 0)$  la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (1.4.4) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que  $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$  mais

$$\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2T} \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty.$$

On voit très clairement que le problème (1.4.4) est instable donc **mal posé**. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initiale  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , telle que  $\varphi(x) \in \mathbb{L}_2((0, \pi))$  est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^\pi \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi,  $u$  est solution du problème (1.4.4) si et seulement si  $\varphi$  satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathbf{K}\varphi = \psi, \quad u(x, T) = \int_0^\pi K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{où } K(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(n\xi).$$

L'opérateur intégral  $\mathbf{K}$  est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où  $\mathbf{K}^{-1}$  n'est pas borné. Ce qui montre le caractère **mal posé** du problème (1.4.4).

**Exemple 1.4.3. Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases} \quad (1.4.5)$$

où  $\varphi, \psi$  sont des fonctions données dans l'espace de Hilbert  $H$ , et  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  tel que  $A = A^*$  et  $A \geq \delta > 0$ . Si  $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots$ , ne sont pas des valeurs propres de  $A$ , alors l'opérateur  $(\sin(T\sqrt{A}))$  est injectif, et la solution formelle du problème (1.4.5) est donnée par :

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A}) (\sin(T\sqrt{A}))^{-1} \psi + \sin(t\sqrt{A}) (\sin(T\sqrt{A}))^{-1} \varphi.$$

Inversement, si  $\left\{ \lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots \right\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$ , alors la solution du problème (1.4.5) n'est pas unique. Le problème (1.4.5) est **mal posé** au sens d'HADAMARD dans les deux cas : les valeurs  $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots$ , peuvent être proches des valeurs propres de  $A$  :

$$[\delta, +\infty[ \ni \lambda \mapsto \frac{1}{\sin(T\sqrt{\lambda})} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

**Exemple 1.4.4. Equation intégrale de première espèce.** Soient  $k(x, y) \in \mathbb{L}^2([c, d] \times [a, b])$  et  $f \in \mathbb{L}^2([c, d])$ . L'équation intégrale de première espèce associée au noyau  $k(x, y)$  et à la donnée  $f$  est donnée par : trouver  $\varphi \in \mathbb{L}^2([a, b])$  telle que, pour tout  $x \in [c, d]$ ,

$$\int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy \equiv (K\varphi)(x) = f(x). \quad (1.4.6)$$

Cette équation n'admet pas toujours de solution. En effet, supposons  $k(x, y)$  est continûment dérivable par rapport à  $x$  sur  $[c, d]$ ; alors le premier membre de l'équation précédente est continûment dérivable par rapport à  $x$  quelque soit  $\varphi \in \mathbb{L}^2([a, b])$  vu le théorème de dérivation sous le signe intégral. D'où l'équation (1.4.6) n'a aucune solution si le second membre  $f$  n'est pas dérivable sur  $[c, d]$ .



Plaçons-nous dans le cas le plus favorable où l'équation (1.4.6) admet une solution unique  $\psi$ . Considérons alors une perturbation de  $\psi$  de la forme :

$$\hat{\psi}(y) = \psi(y) + A \sin(\omega y).$$

On a alors d'une part :

$$\|\hat{\psi} - \psi\|_{\mathbb{L}^2([a,b])} = \int_a^b A^2 \sin^2(\omega y) dy = \frac{1}{2} A^2 (b - a), \quad (1.4.7)$$

et d'autre part :

$$\|f - K\hat{\psi}\|_{\mathbb{L}^2([c,d])} = \int_c^d \left[ \int_a^b k(x, y) A \sin(\omega y) dy \right]^2 dx = \frac{1}{2} A^2 (b - a). \quad (1.4.8)$$

Or, par le lemme de Riemann-Lebesgue, on a (sous réserve que  $k$  soit continu par rapport à  $y$ ) :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \int_a^b k(x, y) A \sin(\omega y) dy \right| = 0, \quad \forall x \in [c, d]. \quad (1.4.9)$$

Cela permet, en choisissant  $\omega$  suffisamment grand, de rendre la norme (1.4.8) aussi petite que l'on veut, quelle que soit la valeur (fixée au départ) de  $A$ . Cette remarque nous permet de constater que l'on peut trouver une perturbation de norme constante arbitraire de la solution  $\psi$  même qu'on a une perturbation aussi petite que l'on voudra sur la donnée  $f$ . En d'autres termes, la solution de (1.4.6), quand elle existe, ne dépend pas continûment du second membre  $f$ ; une "**petite**" erreur sur celui-ci (construit à partir de données expérimentales) peut mener à une "**grande**" erreur sur la reconstruction de la fonction inconnue  $\psi$ . Le problème (1.4.6) est donc **mal posé** pour deux raisons :

1. Il n'admet pas nécessairement de solution.
2. Il n'est pas stable vis-à-vis de petites erreurs sur les données.

Cet exemple est fondamental. De nombreux **problèmes inverses**, issus de domaines variés de la physique, se ramènent à une équation intégrale de première espèce.

Les ouvrages classiques de physique mathématique [39] traitent peu l'équation de première espèce. Celle-ci a probablement été jugée pendant longtemps sans intérêt. D'une part, ses "**mauvaises**" propriétés sont connues depuis le début du siècle. D'autre part, les problèmes directs de la physique mathématique peuvent en général être décrits par des équations intégrales de deuxième espèce, qui sont stables par rapport aux données.

**Remarque 1.4.1.** La définition donnée par HADAMARD est très contraignante dans la pratique. D'où, il faut relaxer la définition d'un problème **bien posé** pour élargir la classe des problèmes traités.

**Définition 1.4.2 (Lavrentiev 1959, Stabilité conditionnelle).** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$  un opérateur **fermé, densément défini**. On dit que le problème  $Ax = y$  est **conditionnellement stable** (ou correct au sens de Tikhonov) sur  $M \subset \mathcal{D}(A)$  s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

vérifiant

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega (\|Ax_2 - Ax_1\|), \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble  $M$  est appelé ensemble des **contraintes** (ou ensemble des **informations a priori**).

## Convexité logarithmique

Parmi les méthodes d'analyse des problèmes **mal posés** en EDP, on cite ici la méthode de la convexité logarithmique (cf. [5, 49]) employée dans l'analyse qualitative des problèmes **mal posés** conditionnellement stables.

**Définition 1.4.3.** Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction **positive**. On dit que  $f$  est **log-convexe** si la fonction  $\hat{f}(t) = \log(f(t))$  est **convexe**.

Si la fonction  $f$  est **strictement positive** ( $f > 0$ ) et **log-convexe** sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors on a l'inégalité suivante :

$$\log(f(t)) \leq (1 - \theta(t)) \log(f(a)) + \theta(t) \log(f(b)), \quad t \in [a, b], \quad (1.4.10)$$

où  $\theta(t) = \frac{b-t}{b-a}$ . Cette dernière inégalité nous donne l'inégalité d'interpolation :

$$f(t) \leq f(a)^{1-\theta(t)} f(b)^{\theta(t)}, \quad t \in [a, b]. \quad (1.4.11)$$

► Une fonction  $f \in C^2([a, b]; \mathbb{R}_+^*)$  est **log-convexe** si et seulement si  $ff'' - (f')^2 \geq 0$ . Cette propriété découle du fait qu'une fonction est **convexe** si sa dérivée seconde est positive :

$$\hat{f}'' = \log(f(t))'' \geq 0 \iff \frac{ff'' - (f')^2}{f^2} \geq 0 \iff ff'' - (f')^2 \geq 0 \text{ et } f^2 > 0.$$

**Théorème 1.4.1.** Soit  $f$  une fonction **continue, positive et log-convexe** sur un intervalle  $I$ . Alors  $f(t) > 0, \forall t \in I$  ou  $f(t) = 0, \forall t \in I$ .

**Théorème 1.4.2.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur **symétrique**, et  $u(t)$  une solution du problème  $u'(t) = Au(t), \quad 0 \leq t \leq T$ . Alors  $\log(|u(t)|)$  est **convexe** sur  $[0, T]$ . En conséquence

$$|u(t)| \leq |u(0)|^{1-t/T} |u(T)|^{t/T}. \quad (1.4.12)$$

Cette inégalité montre qu'on peut récupérer la dépendance continue si on impose une contrainte de bornitude sur la solution.

### 1.4.2 Outils d'analyse de problèmes mal posés

Dans l'étude des équations de la forme :

$$A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2, x \mapsto Ax = y,$$

la fermeture de  $\mathbf{R}(A)$  est une propriété cruciale, pour que **l'inverse** de  $A$  soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique de cette propriété :

**Théorème 1.4.3 (Théorème de Banach sur l'inversion bornée.).** Soit  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Si  $A$  est injectif, alors  $A^{-1} : \mathbf{R}(A) \rightarrow H_1$  est **borné** si et seulement si  $\mathbf{R}(A)$  est **fermée**.

Dans les situations pratiques, la vérification de la fermeture de l'image est souvent une tâche très difficile, et en général, on n'a pas beaucoup d'outils pour étudier cette question. Si la carte spectrale de l'opérateur est bien connue, cette information peut être exploitée pour étudier la fermeture de son image. On peut alors utiliser la caractérisation spectrale suivante :

**Théorème 1.4.4.** [87, 88]. Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur **fermé densément défini**. Alors  $\mathbf{R}(A)$  est **fermée** si et seulement si, il existe  $r > 0$  tel que  $\sigma(A^*A) \subseteq \{0\} \cup [r, +\infty[$ . Si de plus,  $H_1 = H_2$  et  $A = A^*$ , alors  $\mathbf{R}(A)$  est **fermée** si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de  $\sigma(A)$ .

Considérons maintenant un opérateur **compact**  $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ , où  $H_1, H_2$  sont deux espaces de Hilbert **séparables**. L'une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse  $Th_1 = h_2$ , consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD)<sup>3</sup> de l'opérateur  $T$ . Cette décomposition propose des bases pour les espaces de Hilbert  $H_1$  et  $H_2$  permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

**Définition 1.4.4. (Valeurs singulières).** Soient  $H_1, H_2$  deux espaces de Hilbert **séparables** et  $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ . On appelle **valeur singulière** de l'opérateur  $T$ , le réel positif  $s = \sqrt{\lambda}$ , où  $\lambda$  est une valeur propre de l'opérateur  $K = T^*T : H_1 \rightarrow H_1$ .

**Théorème 1.4.5 (Décomposition en valeurs singulières (SVD)).** Soit  $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ . Alors il existe une suite de valeurs singulières  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et deux systèmes orthonormés  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$  tels que :

1.  $(s_n)$  est décroissante,  $s_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .
2.  $T\varphi_k = s_k\psi_k, T^*\psi_k = s_k\varphi_k$ .
3.  $\forall h \in H_1, h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k) \varphi_k + h_0$  où  $h_0 \in \mathbf{N}(T)$ .
4.  $\forall h \in H_1, Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k) \psi_k$ .
5.  $\forall \tilde{h} \in H_2, T^*\tilde{h} = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \psi_k) \varphi_k$ .
6. Le système  $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$  est appelé **système singulier** de  $T$ .
7. La famille  $(\varphi_n)$  (resp. la famille  $(\psi_n)$ ) est une base hilbertienne de  $\mathbf{N}(T)^\perp$  (resp.  $\overline{\mathbf{R}(T)}$ ).

**Remarque 1.4.2.** Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère **mal posé** d'un **problème inverse** donné.

3. La notion de valeurs singulières généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints.

**Théorème 1.4.6 (Théorème de Picard).** (voir [86]). Soit  $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$  un opérateur **compact**, et  $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), n \in \mathbb{N}\}$  son système singulier. Alors le problème :

$$Af = g,$$

est résoluble si et seulement si

$$g \in \mathbf{N}(A^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(A)} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + f_0, \quad f_0 \in \mathbf{N}(A).$$

- Afin de proposer une stratégie de **régularisation** efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont **fortement** ou **faiblement mal posés**.
- Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant : Soient  $H_1, H_2$  deux espaces de Hilbert séparables,  $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ , et soit le **problème inverse** :

$$T : H_1 \rightarrow H_2, u \rightarrow Tu = v. \quad (1.4.13)$$

**Définition 1.4.5.** (cf. [48]). On dit que le problème (1.4.13) est **faiblement mal posé** (resp. **fortement mal posé**), si les valeurs propres  $s_n$  de  $K = T^*T$  sont équivalentes à

$$\frac{C}{n^p} \text{ (resp. } Ce^{-n^p}\text{),}$$

où  $C$  et  $p$  sont des constantes positives.

## 1.5 Méthodes de régularisation

La **régularisation** des problèmes **mal posés**, due initialement à Tikhonov [140], consiste à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la "**solution régularisée**" obtenue par "**inversion régularisée**" dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (on suppose que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial **mal posé** par un autre "**proche dans un certain sens**" du premier et qui est **bien posé**.

Considérons le **problème inverse**  $Ax = y$  où  $A : H_1 \rightarrow H_2$  est un opérateur **compact injectif**<sup>4</sup>. On suppose que  $y \in \mathbf{R}(A)$ , *i.e.*, le **problème inverse** possède une solution unique<sup>5</sup>.

**Définition 1.5.1.** Une famille d'opérateurs linéaires bornés  $R_\alpha : H_1 \rightarrow H_2$ , ( $\alpha > 0$ ) est dite "**famille régularisante**" pour l'opérateur  $A$  si

$$\forall x \in H_1, \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha A) x = x, \text{ i.e., } R_\alpha A \rightarrow I \text{ simplement.}$$

**Remarque 1.5.1.** Si  $R_\alpha$  est une **famille régularisante** pour l'opérateur  $A : H_1 \rightarrow H_2$ , où  $H_1$  est de dimension infinie, alors les opérateurs  $R_\alpha$  ne sont pas **uniformément bornés**, *i.e.*, il existe une suite  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$ .

1. La donnée initiale  $y \in H_2$  n'est jamais connue exactement, il y a toujours un bruit qui vient la perturber. On note par  $y^\delta$  la donnée perturbée de  $y$  où le  $\delta > 0$  représente le niveau du bruit, *i.e.*,

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta.$$

2. Notons  $x^{\alpha, \delta} = R_\alpha y^\delta$  l'approximation de la solution du **problème inverse**  $Ax = y$  obtenue par l'opérateur de **régularisation** et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que :

$$\|x - x^{\alpha, \delta}\| = \|(x - R_\alpha y) + (R_\alpha y - x^{\alpha, \delta})\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|x - R_\alpha y\|. \quad (1.5.14)$$

3. Le premier terme de droite de l'inégalité (1.5.14) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. On sait que  $\|R_{\alpha_n}\| \rightarrow +\infty$  quand  $\alpha \rightarrow 0$  d'après la remarque (1.5.1). Donc il ne faut pas choisir  $\alpha$  trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de l'inégalité (1.5.14) tend vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0 par définition de  $R_\alpha$ . Le but est de choisir une stratégie de **régularisation** de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution  $x$  quand le niveau de bruit  $\delta$  tend vers 0.

**Définition 1.5.2.** Une stratégie de **régularisation**  $\alpha(\delta)$  est **admissible** si pour tout  $x \in H_1$ , on a :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \sup_{y^\delta \in H_2} \left\{ \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| \text{ tel que } \|Ax - y^\delta\| \leq \delta \right\} \right) = 0. \quad (1.5.15)$$

Parmi les méthodes de **régularisation** les plus connues en **problèmes inverses** et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov.

4. Le fait de choisir  $A$  injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace  $H_1$  au complément orthogonal de  $\mathbf{N}(A)$ , où  $\mathbf{N}$  désigne le noyau.

5. Il faut noter que notre **problème inverse**  $Ax = y$  est toujours **mal posé** à cause de la non continuité de  $A^{-1}$ .

### 1.5.1 Méthode de Tikhonov

- ◆ Le principe de la **régularisation** de Tikhonov pour stabiliser le **problème inverse mal posé**  $Af = g$  est de choisir comme solution l'élément  $f_\alpha$  qui minimise la fonctionnelle

$$\|Af - g\|^2 + \alpha \|f\|^2, \alpha > 0. \quad (1.5.16)$$

L'existence et l'unicité du minimum sont assurées par la coercivité et la stricte convexité de  $f \mapsto \|f\|^2$ . Le paramètre  $\alpha$  est appelé **paramètre de régularisation** et le terme  $\|f\|^2$  est appelé **terme de correction**. Le choix du paramètre  $\alpha$  est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité.

On a le Théorème suivant :

**Théorème 1.5.1.** [78] Soit  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ . Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum  $f_\alpha$ . L'élément  $f_\alpha$  est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_\alpha = (\alpha I + A^* A) f_\alpha = A^* g. \quad (1.5.17)$$

La famille d'opérateurs  $R_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* : H_2 \rightarrow H_1$ <sup>6</sup> est appelée **famille régularisante de Tikhonov**. On a  $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$  et tout choix de  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  avec

$$\delta^2 \alpha(\eta) \rightarrow 0,$$

est **admissible**. Pour les résultats de la vitesse de convergence, on peut consulter les références [48, 109].

- ◆ Le paramètre de **régularisation**  $\alpha > 0$  est choisi via le principe d'écart (en anglais : discrepancy principle) de Morozov [104]. Ce principe consiste à fixer le paramètre tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit (cf. [103], [152]).
- ◆ Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mises en oeuvre.<sup>7, 8</sup>
- ◆ Dans la pratique on supposera qu'un paramètre  $\alpha$  est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit  $\delta > 0$  (voir [109], page 172).

La partie qui suit traite quelques exemples de méthodes de gradient, qui représentent l'une des classes de méthodes de **régularisation** itérative des plus efficaces et des plus utilisées. [132]

6.  $(S_\alpha = S_\alpha^*, \langle S_\alpha h, h \rangle = \|Sh\|^2 + \alpha \|h\|^2 \geq \alpha \|h\|^2, \forall h \in H_1) \Rightarrow (\sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \Rightarrow 0 \in \rho(S_\alpha))$ , i.e.,  $S_\alpha^{-1}$  existe et  $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$ .

7. **Méthodes a priori** : utilisation d'informations sur le niveau d'erreur et sur l'opérateur  $K$ .

8. **Méthodes a posteriori** : utilisent aussi les données  $g_\delta$ .  $\alpha_{opt} := \max \{ \alpha : \|Af_\alpha - g_\delta\| \leq \delta \}$ , où  $f_\alpha = \inf_f \{ \|Af_\alpha - g_\delta\|^2 + \alpha \|f_\alpha\|^2 \}$ .

## 1.5.2 Méthode du gradient

L'idée de remplacer  $Af = g$  par le problème qui consiste à trouver le minimum de la fonctionnel

$$J(f) = \|Af - g\|,$$

remonte aux travaux de A. M. Legendre (1806) et K. Gauss (1809), qui ont proposé la méthode des moindres carrés, pour résoudre des systèmes d'équations algébriques linéaires. A. Cauchy (1847) a proposé la méthode de descente la plus basique pour résoudre le problème de la recherche du minimum d'une fonction de  $n$  variables. L.V. Kantorovich a proposé de résoudre les équations opérationnelles linéaires  $Af = g$  dans les espaces de Hilbert en minimisant la fonctionnelle

$$H(f) = \langle Af, f \rangle - 2\langle f, g \rangle,$$

en utilisant la méthode de descente la plus rapide. Il a également étudié la convergence de cette méthode dans le cas où

$$m\langle f, f \rangle \leq \langle Af, f \rangle \leq M\langle f, f \rangle, \quad m > 0, M > 0,$$

et a souligné des idées directrices pour traiter le cas  $m = 0$  (Kantorovich, 1952).

Dans ce qui suit, on minimise la fonctionnelle  $J(f)$ , qui est plus utilisée en pratique que la fonctionnelle  $H(f)$ . Notons que pour  $A = A^*$ , le gradient  $H'f$  de la fonctionnelle  $H(f)$  est égal à  $2(Af - g)$ , et sa diminution par rapport à  $f$  signifie que  $f$  se rapproche de la solution de l'équation  $Af = g$ .

Dans ce paragraphe, on décrit brièvement la structure générale de plusieurs méthodes de gradient pour résoudre des problèmes **mal posés**  $Af = g$ .

### ■ Description des méthodes de gradient :

Soit  $A$  un opérateur **Fréchet-différentiable** de  $H_1$  dans  $H_2$ . Pour résoudre l'équation  $A(f) = g$ , on minimise la fonctionnelle

$$J(f) = \langle A(f) - g, A(f) - g \rangle = \|A(f) - g\|^2.$$

**Lemme 1.5.1.** *Si  $A$  est un opérateur **Fréchet-différentiable**, alors la fonctionnelle  $J(f)$  est aussi **différentiable** et son **gradient**  $J'f$  est donné par*

$$J'f = 2(A'f)^*(A(f) - g).$$

**Remarque 1.5.2.** Si  $A$  est un opérateur linéaire, alors

$$J'f = 2A^*(Af - g).$$

Les méthodes de gradient les plus simples sont de la forme

$$f_{n+1} = f_n - \alpha_n J'f_n.$$

Cette formule représente différentes méthodes selon la manière de définir le paramètre positif  $\alpha_n$ .

**Théorème 1.5.2.** Soit  $A : H_1 \rightarrow H_2$  un opérateur linéaire continu tel que  $A$  et  $A^*$  sont **injectifs**. Alors la fonctionnelle  $J(f)$  admet un point **stationnaire unique**.

Dans ce qui suit, on considère plusieurs exemples de méthodes de gradient

$$f_{n+1} = f_n - \alpha_n J' f_n, f_n \in H_1, \alpha_n > 0,$$

de telle sorte que le **paramètre de descente**  $\alpha_n$  est soit fixé ou bien déterminé à partir de la condition de minimalité selon un critère de qualité. On note par  $f_e$  la solution exacte du problème  $Af = g$  (qui n'est pas nécessairement unique).

► **La méthode itérative de Landweber :**

Dans cette méthode, le paramètre  $\alpha_n$  est fixé et on a

$$\alpha_n = \alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right).$$

► **La méthode de la descente la plus rapide :**

On choisit le paramètre  $\alpha_n$  comme étant un minimiseur de l'expression

$$J(f_{n+1}) = J(f_n) - \alpha \|J' f_n\|^2 + \alpha^2 \|AJ' f_n\|^2 = \frac{\|J' f_n\|^2}{2\|AJ' f_n\|^2}.$$

**Remarque 1.5.3.** Si l'opérateur  $A^{-1}$  est **continu**, alors le taux de convergence de ces méthodes est **linéaire**.

► **La méthode du gradient conjugué :**

On commence par  $f_0$  (donnée initiale fixée) et on calcule  $p_0 = J' f_0$ . On suppose que  $p_n$  et  $f_n$  ont déjà été déterminés, avec  $p_n = J' f_n$ . On calcule la fonction auxiliaire suivante

$$p_n = J' f_n + \frac{\|J' f_n\|^2}{\|J' f_{n-1}\|^2} p_{n-1},$$

à l'étape  $n + 1$ , donc le paramètre de descente par la formule

$$\alpha_n = \frac{\langle J' f_n, p_n \rangle}{\|Ap_n\|^2}.$$

Ce qui nous donne un schéma itératif pour calculer la solution approchée :

$$f_{n+1} = f_n - \alpha_n p_n.$$



## 1.6 Calcul fractionnaire

Le terme "**calcul fractionnaire**" fait référence à la généralisation des intégrales et des dérivées d'ordre entier à l'ordre rationnel. Ce concept a été introduit pour la première fois par G.W. Leibniz et G. L'Hôpital (30 septembre 1695), où ils ont discuté sur la signification de la dérivée d'ordre  $1/2$  et ils ont donné quelques remarques sur sa possible existence. Cela attira l'attention de nombreux mathématiciens sur ce sujet mais vu l'insuffisance des outils mathématiques du calcul **fractionnaire**, cette théorie n'a pu être développée.

Néanmoins, au dix neuvième siècle, des développements intéressants ont été réalisés dans le calcul **fractionnaire**. Par exemple, en 1812, Laplace a proposé une formulation intégrale, qui a été utilisée plus tard par S.F. Lacroix pour définir des dérivées d'ordre arbitraire. En 1823, Abel a été le premier à étudier un problème physique intéressant en utilisant des techniques du calcul **fractionnaire**. On peut citer aussi J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A. K. Grunwald (1867-1872), A. V. Letnikov (1868-1872), H. Weyl (1917) et M. Riesz (1949). Ces mathématiciens ont beaucoup contribué à l'élaboration de la théorie du calcul **fractionnaire**. Pour plus de détails sur les aspects historiques de la théorie du calcul **fractionnaire**, on renvoie le lecteur aux ouvrages [101, 111]. Dans la seconde moitié du vingtième siècle, la plupart des outils pour traiter le calcul **fractionnaire** étant disponibles. Le calcul **fractionnaire** est passé de la formulation mathématique pure, aux applications et il a été utilisé pour modéliser de nombreux phénomènes physiques dans divers domaines [127].

Les dérivées **fractionnaires** et les dérivées d'ordre entier sont des opérateurs linéaires. Mais, les dérivées d'ordre entier sont des opérateurs locaux et les dérivées **fractionnaires** sont des opérateurs **non locaux**. Ce qui fait d'eux un outil puissant pour la description des effets héréditaires et mnémoniques de diverses substances, ainsi que pour la modélisation de certains processus dynamiques.

Le calcul **fractionnaire** a été utilisé récemment dans divers domaines, tels que la physique, la chimie, la biologie, l'ingénierie mécanique, le traitement du signal et l'identification des systèmes, l'électrotechnique, la théorie du contrôle, la finance, la dynamique **fractionnaire** [99, 112].

### 1.6.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

On commence par la formule qui donne les primitives successives d'une fonction continue. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, on sait que la primitive de  $f$  est donnée par :

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Pour une primitive seconde, on aura :

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^x f(t) dt ds = \int_a^x (x-t) f(t) dt.$$

Par itération, on obtient :

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre  $\alpha$  réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma, on aura la définition suivante :

**Définition 1.6.1.** Soit :  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, on définit l'intégrale **fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville** de  $f$  comme suit :

$${}^-I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

**Remarque 1.6.1.** 1. l'intégrale **fractionnaire** à droite de **Riemann-Liouville** de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme suit :

$${}^+I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

2. Pour  $\alpha = 0$ , on a :

$$I_b^0 f(x) = I_a^0 f(x) = f(x).$$

3. La fonction gamma est définie comme suit :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0.$$

4. Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ , on a :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

en particulier, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

5. La fonction Bêta est donnée par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0.$$

6. La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \forall z, w : \operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0.$$

**Exemple 1.6.1.** Soit  $f(x) = (x-a)^\beta$  où  $\beta > -1$ . On a

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt, \quad a < x < b.$$

En effectuant le changement de variable suivant :  $t = a + \tau(x-a)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  et en utilisant la fonction Bêta, on trouve que :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

**Théorème 1.6.1.** [131] Si  $f \in \mathbb{L}^1([a, b])$  avec  $a$  fini, alors  $I_a^\alpha f(x)$  existe pour presque tout  $x \in [a, b]$  et on a  $I_a^\alpha f(x) \in \mathbb{L}^1([a, b])$ .

**Proposition 1.6.1.** [79]

L'opérateur  $I_a^\alpha f(x)$  est borné dans  $\mathbb{L}^p([a, b])$  et on a

$$\|I_a^\alpha f(x)\|_p \leq K \|f\|_p,$$

pour toute  $f \in \mathbb{L}^p([a, b])$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $K$  est une constante positive.

Dans la littérature, plusieurs définitions des dérivées *fractionnaires* ont été proposées. Par exemple, la dérivée *fractionnaire* au sens de Grunwald-Letnikov, au sens de Riemann-Liouville, au sens de Caputo et au sens de Riesz-Feller [112]. Même si elles sont différentes, elles sont toutes liées les unes aux autres. La dérivée *fractionnaire* au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans les mathématiques pures, tandis que la dérivée au sens de Caputo a été introduite pour traiter des problèmes appliqués. En effet, les dérivées de Caputo permettent l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables, ce qui n'est pas admis par la dérivée au sens de Riemann-Liouville. Dans ce travail, on s'intéresse à la dérivée *fractionnaire* au sens de Caputo.

## 1.6.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

**Définition 1.6.2.** La dérivée *fractionnaire* au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  est donnée par :

$$D_a^\alpha f(x) = I_a^{m-\alpha} f^{(m)}(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt, \quad \alpha \in ]m-1, m[,$$

$$\text{avec } m = \begin{cases} [\alpha] + 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Remarque 1.6.2.** La dérivée *fractionnaire* au sens de Caputo d'une constante est nulle *i.e.*,  $D_a^\alpha K = 0$ .

**Exemple 1.6.2.** Soient  $\alpha > 0$  tel que  $n-1 \leq \alpha < n$  et  $f(x) = (x-a)^\beta$  où  $\beta > -1$ , alors On a

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

Si  $\beta \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , alors  $D_a^\alpha f(x) = 0$ . Si  $\beta > n-1$ , alors :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}.$$

En effectuant le changement de variable suivant :  $t = a + \tau(x-a)$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$  et en utilisant la fonction Bêta, on trouve que :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^{\beta-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} B(n-\alpha, \beta-n+1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

**Propriétés 1.6.1.** [79] La dérivée *fractionnaire* au sens de Caputo vérifie les propriétés suivantes :

- Pour  $f, g \in C([a, b])$  et  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$ , on a

$$D_a^\alpha (\lambda f(x) + \delta g(x)) = \lambda D_a^\alpha f(x) + \delta D_a^\alpha g(x),$$

*i.e.*,  $D_a^\alpha$  est un opérateur linéaire.

- Pour  $\alpha > 0$ , on a

$$D_a^\alpha [I_a^\alpha f(x)] = f(x).$$

- Si  $D_a^\alpha f(x) = 0$  alors :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i (x-a)^i.$$

- Pour  $f \in C^n([a, b])$  et  $\alpha > 0$ , on a

$$I_a^\alpha [D_a^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(x).$$

**Corollaire 1.6.1.** Soit  $f \in C^1([a, b])$ . Si  $0 < \alpha < 1$  et  $0 < \beta < 1$  tel que :  $\alpha + \beta < 1$ , alors on a :

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta f(x) = D_a^\beta \circ D_a^\alpha f(x) = D_a^{\alpha+\beta} f(x).$$

En général, lorsque on résout un problème *fractionnaire*, on utilise la transformée de Laplace pour trouver la solution. Dans ce qui suit, on donne la **transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo** qui sera utilisée ultérieurement pour expliciter les solutions des problèmes *fractionnaires* étudiés.

**Définition 1.6.3.** La **transformée de Laplace** de la dérivée *fractionnaire* d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo de la fonction  $f$  est donnée par :

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(x)] = s^\alpha \mathcal{F}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (1.6.18)$$

avec :  $\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}[f(x)]$  et  $n = [\alpha] + 1$  où  $[\cdot]$  représente la **partie entière** d'un nombre réel.

## Problème de la chaleur avec une perturbation de type involution

Dans ce chapitre, on étudie un problème de la chaleur non classique de nature *mal posée*. La stratégie de *régularisation* de ce problème repose sur une variante de la méthode de quasi-réversibilité (dite méthode de *régularisation* pseudo-parabolique).

### 2.1 Position du problème

On note par  $H = \mathbb{L}^2((-1, 1); \mathbb{R})$  l'espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme associée :

$$\langle u, v \rangle := \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx, \quad \|u\|^2 := \int_{-1}^1 |u(x)|^2 dx.$$

Dans le rectangle  $\mathcal{Q} = (-1, 1) \times (0, T)$ , on considère le problème de la chaleur suivant :

$$u_t(x, t) - \alpha u_{xx}(x, t) - \beta u_{xx}(-x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{Q}, \quad (2.1.1)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u(-1, t) = u(1, t), \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t), \quad t \in (0, T), \quad (2.1.2)$$

et la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (2.1.3)$$

où  $\alpha$  est un nombre réel positif ( $\alpha > 0$ ) et  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Les équations faisant intervenir les termes  $u(\sigma(x), t)$ ,  $u_x(\sigma(x), t)$  et  $u_{xx}(\sigma(x), t)$  sont appelées **équations avec variables déviées**, où la fonction  $\sigma$  est appelée la translation de

Carleman (involution) [30, 153] est définie par :

$$\sigma : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \text{ avec } \sigma(\sigma(x)) = x.$$

Les **équations avec variables déviées** ont été étudiées par plusieurs chercheurs pour certains modèles mathématiques de type parabolique, hyperbolique et elliptique [7, 8, 9, 28, 29, 70, 75, 128]. Cette classe de problèmes a de nombreuses applications en ingénierie [124, 141]. Pour ralentir la vitesse de refroidissement dans un processus de diffusion, l'addition d'un terme d'involution peut jouer le rôle d'un régulateur de transfert (une fonction de refroidissement) pour éviter les transformations indésirables qui peuvent se produire et changer les caractéristiques de certains matériaux sensibles aux transitions brutales chaud-froid. Pour plus de détails concernant le développement théorique et la motivation physique de ces équations, on renvoie le lecteur aux références [14, 67, 68, 69, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 128, 149] et les monographies [30, 153].

La littérature mathématique consacrée aux **problèmes inverses** et problèmes **mal posés** pour des modèles gouvernés par des **EDP avec variables déviées**, ainsi que leurs méthodes de **régularisation** se caractérise par la rareté des travaux, et surtout les approches numériques traitant cette catégorie de problèmes. Concernant les **problèmes inverses** faisant intervenir des perturbations de type involution, on peut citer les travaux récents [2, 6, 75, 76, 77, 124, 139, 142].

Dans [6], les auteurs ont étudié un **problème inverse** de source dans le cas où  $\alpha = 1$  et  $|\beta| < 1$ . Ils ont établi des résultats sur l'existence et l'unicité des solutions recherchées pour plusieurs cas de conditions aux limites, mais ils n'ont pas étudié la procédure de **régularisation** du problème considéré.

Ce travail est une continuité de [6] et [54]<sup>1</sup> dans cette direction. Cette étude traite le cas où le problème considéré est **mal posé**. Dans ce contexte, on propose une version modifiée de la méthode de **régularisation** pseudo-parabolique introduite et développée par Showalter [135]. Cette méthode a été utilisée pour résoudre certains problèmes **mal posés** pour des équations paraboliques. Pour plus de détails, voir [3, 4, 19, 35, 46, 52, 62].

Pour cette stratégie de **régularisation**, on montre la convergence de la solution approchée et on établit des estimations d'erreurs sous des hypothèses de régularité sur les données du problème considéré.

## 2.2 Rappels

Dans cette section, on donne quelques définitions et théorèmes qui seront utiles ultérieurement lors de l'étude du problème ainsi que dans le calcul des résultats de convergence.

**Définition 2.2.1.** Soit  $S : H \rightarrow H$  un opérateur linéaire.

1. Hamida S. Etude de certains problèmes inverses elliptiques et paraboliques, PhD Thesis, University Badji Mokhtar Annaba (Algeria) 2015.

Dans cette thèse, une variante de la méthode Q.B.V. a été introduite pour régulariser le problème (2.1.1).

1. On dit que  $S$  est une **involution** si  $S^2 = I$ .
2. On dit que  $S$  est **unitaire** si  $SS^* = S^*S = I$ , où  $S^*$  est l'**adjoint** de l'opérateur  $S$ .

**Théorème 2.2.1.** [60, Critère de Vitali-Dalzell, p. 39] . Soit  $\mathbb{B} = (\zeta)_{n=0}^{\infty}$  une suite orthonormale de l'espace de Hilbert  $H = \mathbb{L}^2((a, b), \mathbb{R})$ , où  $(a, b)$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . Alors, la suite  $\mathbb{B}$  est **totale** (et donc **une base hilbertienne**) si et seulement si :

$$\frac{2}{(b-a)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \left| \int_a^x \zeta_n(t) dt \right|^2 dx = 1. \quad (2.2.4)$$

**Lemme 2.2.1.** Pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a toujours :

$$1 - e^{-\lambda} \leq \lambda^r, \quad \forall r \in ]0, 1].$$

**Preuve.** Posons  $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . En utilisant le théorème de la valeur moyenne, on peut écrire

$$F(\lambda) - F(0) = F(\lambda) = (\lambda - 0)F'(\mu) = \lambda e^{-\mu} \leq \lambda, \quad 0 < \mu < \lambda \leq 1,$$

et de l'inégalité  $\lambda \leq \lambda^r$  si  $\lambda \in [0, 1]$  et  $0 < r \leq 1$ , on trouve que

$$1 - e^{-\lambda} \leq \lambda^r, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall r \in ]0, 1].$$

Maintenant si  $\lambda \geq 1$  et  $r > 0$ , on a

$$\lambda^r \geq 1 \geq 1 - e^{-\lambda}.$$

Par conséquent, on conclut que

$$1 - e^{-\lambda} \leq \begin{cases} \lambda^r, & \forall \lambda \geq 0, \quad \forall r \in ]0, 1], \\ \lambda^r, & \forall \lambda \geq 1, \quad \forall r > 0. \end{cases}$$

■

## 2.3 Analyse du problème

Le problème (2.1.1),(2.1.2) et (2.1.3) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} u_t(x, t) + (\alpha I + \beta S)Au(x, t) = 0, & 0 < t < T, \quad x \in (-1, 1), \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (2.3.5)$$

où

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H, \quad w \mapsto Aw(x) = -w_{xx}(x),$$

avec

$$D(A) = \{w \in H^2(-1, 1) : w(-1) = w(1); \quad w_x(-1) = w_x(1)\},$$

et

$$S : H \rightarrow H, \quad w \mapsto S(w) = v, \quad v(x) = w(-x).$$



**Proposition 2.3.1.** *L'opérateur  $S$  vérifie les propriétés suivantes :*

1.  $S \in \mathcal{L}(H)$ .
2.  $SS^* = S^*S = I$ .
3.  $S^2 = I$ .

*i.e.,  $S$  est une **involution unitaire**.*

**Preuve.** Montrons tout d'abord que  $S$  est borné. En effet, en posant  $x = -y$ ,  $dx = -dy$  et pour tout  $u \in H$ , on a :

$$\|Su\|^2 = \int_{-1}^1 |u(-x)|^2 dx = - \int_1^{-1} |u(y)|^2 dy = \|u\|^2. \quad (2.3.6)$$

D'où  $S$  est borné et  $\|S\| = 1$ . D'autre part, pour tout  $u, v \in H$ , on a :

$$\langle u, S^*v \rangle = \langle Su, v \rangle = \int_{-1}^1 u(-x)v(x)dx = - \int_1^{-1} u(y)v(-y)dy = \int_{-1}^1 u(y)v(-y)dy = \langle u, Sv \rangle, \quad (2.3.7)$$

ce qui montre que  $S = S^*$ . La relation  $S^2u(x) = u(x)$  nous permet de conclure que

$$S^2 = I = S^*S = SS^* \text{ et } S^{-1} = S.$$

■

Considérons maintenant le problème aux valeurs propres :  $Au = \lambda u$ ,  $u \neq 0$ ,

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) &= \lambda u(x), & x \in (-1, 1), \\ u(-1) &= u(1), \\ u'(-1) &= u'(1). \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Si  $(u, \lambda)$  est un couple propre, alors on a :

$$\begin{aligned} \lambda(u, u) &= (Au, u) = \int_{-1}^1 -u_{xx}(x)u(x)dx = -u_x u(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 u_x(x)u_x(x)dx \\ &= \underbrace{-(u'(1)u(1) - u'(-1)u(-1))}_{=0} + \int_{-1}^1 |u_x(x)|^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 |u_x(x)|^2 dx \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\lambda = \omega^2 \geq 0$ .

La solution générale de l'équation différentielle du problème (2.3.8) est donnée par la combinaison :

$$u(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x).$$

En utilisant les conditions de périodicité suivantes  $u(-1) = u(1)$ ,  $u'(-1) = u'(1)$  et l'expression précédente, on trouve que :

$$a \cos(-\omega) + b \sin(-\omega) = a \cos(\omega) - b \sin(\omega) = a \cos(\omega) + b \sin(\omega),$$

$$-\omega a \sin(-\omega) + \omega b \cos(-\omega) = \omega a \sin(\omega) + \omega b \cos(\omega) = -\omega a \sin(\omega) + \omega b \cos(\omega).$$

De ces deux formules, on déduit que :  $b = 0$  et  $a\omega \sin(\omega) = 0$ .

Ce système homogène possède une solution non triviale si la condition suivante est remplie :

$$\omega \sin(\omega) = 0.$$

- Pour  $\omega = 0$ , on obtient  $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . En effet, la solution devient  $u(x) = a$  lorsque  $\omega = 0$  et on a

$$\|u\| = \int_{-1}^1 a^2 dx = 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Si  $\sin(\omega) = 0$  alors :  $\omega = k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Dans ce cas on obtient les couples propres

$$\lambda_k = (k\pi)^2, \quad \varphi_k(x) = \sin(k\pi x), \quad \psi_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

**Proposition 2.3.2.** Les éléments de l'ensemble  $\mathcal{B} = \{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \cup \{\psi_m\}_{m=0}^{+\infty}$  forment **une base orthonormée** dans l'espace de Hilbert  $H = \mathbb{L}^2((-1, 1), \mathbb{R})$ ; où

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \sin(n\pi x); & n \in \mathbb{N}^*, \\ \psi_m(x) = \cos(m\pi x); & m \in \mathbb{N}^*, \\ \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \lambda_0 = 0, \\ \lambda_n = (n\pi)^2, \\ \lambda_m = (m\pi)^2. \end{cases}$$

**Preuve.** La démonstration de cette proposition est basée sur le critère de Vitalli-Dalzell donné précédemment par le théorème (2.2.1).

En effet, il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) &= \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; \\ \int_{-1}^1 \psi_i(x) \psi_j(x) &= \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \\ \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \psi_j(x) &= 0, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De ces formules, on voit que l'ensemble  $\mathcal{B} = \{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \cup \{\psi_m\}_{m=0}^{+\infty}$  est orthonormale dans  $H = \mathbb{L}^2((-1, 1), \mathbb{R})$ .

Il reste à vérifier la propriété donnée par l'inégalité (2.2.4) pour conclure que  $\mathcal{B}$  est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert  $H = \mathbb{L}^2((-1, 1), \mathbb{R})$ , i.e., on doit vérifier que :

$$\frac{2}{(1+1)^2} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) \right\} = 1, \quad (2.3.9)$$

où :

$$b_n = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^x \sin(n\pi t) dt \right)^2 dx = \frac{3}{n^2\pi^2}, \quad a_0 = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{2}} dt \right)^2 dx = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^x \cos(n\pi t) dt \right)^2 dx = \frac{1}{n^2\pi^2}.$$

En remplaçant ces nombres dans l'expression (2.3.9), on trouve que :

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+1)^2} \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) \right\} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \times \frac{\pi^2}{6} \right\} = 1. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition (2.3.2). ■

On sait que chaque fonction  $u$  définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$  peut être écrite sous la forme  $u = u_i + u_p$ , où  $u_i$  est la composante impaire et  $u_p$  est la composante paire. La même chose pour l'espace  $H = \mathbb{L}^2((-1, 1), \mathbb{R})$ , on a  $H = H_s \oplus H_c$  tels que l'espace  $H_s$  (resp.  $H_c$ ) est engendré par les vecteurs propres  $\{\varphi_n, n \geq 1\}$  (resp.  $\{\psi_m, m \geq 0\}$ ).

**Remarque 2.3.1.** Si on note :

$$P_s = \frac{1}{2}(I - S) \quad \text{et} \quad P_c = \frac{1}{2}(I + S),$$

alors on a :

$$I = P_s + P_c, \quad P_c P_s = P_s P_c = 0,$$

$$P_c \varphi_n = 0, \quad P_c \psi_m = \psi_m,$$

$$P_s \varphi_n = \varphi_n; \quad P_s \psi_m = 0.$$

A partir de ces dernières propriétés, on conclut que  $P_s$  et  $P_c$  sont des projections orthogonales, i.e.,  $P_s(H) = H_s$  et  $P_c(H) = H_c$ .

Pour  $u, f \in H$ , on a la décomposition suivante :

$$u(x, t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n}_{u_i} + \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} \langle u, \psi_m \rangle \psi_m}_{u_p} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \varphi_n(x) + \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(t) \psi_m(x), \quad (2.3.10)$$

et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \varphi_n(x) + \sum_{m=0}^{+\infty} f_m \psi_m(x). \quad (2.3.11)$$

Cette décomposition nous permet de décomposer le problème (2.3.5) en deux sous-problèmes dont la somme de leurs solutions donne la solution du problème globale. En effet, en utilisant les relations suivantes :

$$A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad A\psi_m = \lambda_m \psi_m,$$

$$A_{\alpha, \beta} \varphi_n = (\alpha I + \beta S) A \varphi_n = \lambda_n (\alpha I + \beta S) \varphi_n = \lambda_n (\alpha - \beta) \varphi_n = (\alpha - \beta) \lambda_n \varphi_n,$$

$$A_{\alpha, \beta} \psi_n = (\alpha I + \beta S) A \psi_n = \lambda_n (\alpha I + \beta S) \psi_n = \lambda_n (\alpha + \beta) \psi_n = (\alpha + \beta) \lambda_n \psi_n,$$

et en substituant les expressions (2.3.10) et (2.3.11) dans le problème (2.3.5), on obtient les deux sous-problèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} (u'_n(t) + (\alpha - \beta) \lambda_n u_n(t)) \varphi_n = 0, \quad 0 < t < T, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) \varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \varphi_n, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=0}^{+\infty} (u'_m(t) + (\alpha + \beta) \lambda_m u_m(t)) \psi_m = 0, \quad 0 < t < T, \\ \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(0) \psi_m = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m \psi_m. \end{array} \right.$$

Par conséquent, on obtient la famille des équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_n(t) + (\alpha - \beta) \lambda_n u_n(t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u_n(0) = f_n, \end{array} \right. \quad (2.3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_m(t) + (\alpha + \beta) \lambda_m u_m(t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u_m(0) = f_m. \end{array} \right. \quad (2.3.13)$$

**Remarque 2.3.2.** Pour chaque valeur fixée de  $n$  (resp.  $m$ ), le problème (2.3.12) (resp. (2.3.13)) est une équation différentielle du premier ordre. En conséquence, il en résulte que chaque problème admet une solution unique donnée sous la forme exponentielle.

Alors les solutions uniques de ces deux problèmes sont données respectivement par :

$$\text{composante impaire : } u_n(t) = e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$\text{composante paire : } u_m(t) = e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

**Définition 2.3.1.** On dit que l'ensemble  $\mathcal{V} \subset H$  est **admissible** pour le problème (2.3.5), si pour tout  $f \in \mathcal{V}$ , le problème (2.3.5) est résoluble, *i.e.*, l'ensemble des solutions associées à  $f$  est non vide.

On distingue ici deux cas :

- Si  $\beta \in [-\alpha, \alpha]$ , alors le problème (2.3.5) est **bien posé**, de plus sa solution est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n + \sum_{m \geq 0} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m, \quad (2.3.14)$$

et on a la relation de continuité suivante :

$$\|u(t, \cdot)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n t} |f_n|^2 + \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-2(\alpha+\beta)\lambda_m t} |f_m|^2 \leq \|f\|^2.$$

Ce qui montre clairement que

$$\sup_{0 < t < T} \|u(\cdot, t)\| \leq \|f\|.$$

- Si  $\beta \in ]-\infty, -\alpha[ \cup ]\alpha, +\infty[$ , alors le problème ((2.3.5)) est **mal posé**, et sa solution formelle est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n + \sum_{m \geq 0} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m. \quad (2.3.15)$$

On note que l'instabilité de cette solution est due aux hautes fréquences

$\theta_n = e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n}$  si  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$  et  $\theta_m = e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m}$  dans le cas où  $\beta \in ]-\infty, -\alpha[$ ; *i.e.*,

$$\theta_n = e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty; \quad \beta \in ]\alpha, +\infty[,$$

et

$$\theta_m = e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty; \quad \beta \in ]-\infty, -\alpha[.$$

### 2.3.1 Stabilité conditionnelle

Dans cette partie, on définit des nouveaux ensembles pour lesquels la solution du problème (2.3.5) est stable.

Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur **auto-adjoint, strictement positif** et à **résolvante compacte**. Notons les couples propres de  $A$  par :

$$A\phi_n = \lambda_n \phi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (\phi_i, \phi_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

Pour  $\theta \geq 0$  et  $\vartheta \geq 0$ , on définit la classe de Gevrey<sup>2</sup> d'ordre  $\theta$  et d'indice  $\vartheta$  par :

$$E_\vartheta^\theta := \left\{ h = \sum_{n \geq 1} h_n \phi_n : \|h\|_{\theta, \vartheta}^2 = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2\theta} e^{2\vartheta \lambda_n} |h_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Cet ensemble est un espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme :

$$\langle u, v \rangle_{\theta, \vartheta} = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2\theta} e^{2\vartheta \lambda_n} u_n v_n, \quad u, v \in E_\vartheta^\theta,$$

$$\|u\|_{\theta, \vartheta}^2 = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2\theta} e^{2\vartheta \lambda_n} |u_n|^2, \quad u \in E_\vartheta^\theta.$$

**Définition 2.3.2.** Pour  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$ ,  $\theta \geq 0$ , on définit l'ensemble :

$$G_s^\theta = \left\{ h \in H : \sum_{n \geq 1} e^{-2\theta(\alpha-\beta)\lambda_n T} |h_n|^2 < +\infty \right\},$$

et si  $\beta \in ]-\infty, -\alpha[$ , on pose

$$G_c^\theta = \left\{ h \in H : \sum_{m \geq 0} e^{-2\theta(\alpha+\beta)\lambda_m T} |h_m|^2 < +\infty \right\},$$

où  $h_n = \langle h, \varphi_n \rangle$ ,  $h_m = \langle h, \psi_m \rangle$ .

**Remarque 2.3.3.** 1. L'ensemble  $G_s^\theta$  (resp.  $G_c^\theta$ ) est non vide. En effet, il est facile de vérifier que  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset G_s^\theta$ ,  $\{\psi_m\}_{m=0}^{+\infty} \subset G_c^\theta$ .

2. Pour  $\theta = 0$ , on a  $G_s^0 = H_s$  et  $G_c^0 = H_c$ .

3. Si  $\theta_2 \geq \theta_1$ , alors  $G_s^{\theta_2} \subseteq G_s^{\theta_1}$  et  $G_c^{\theta_2} \subseteq G_c^{\theta_1}$ .

2. Pour plus de détails, voir les références :

Cao C, Rammaha MA, Titi ES. The NavierStokes equations on the rotating 2-D sphere : Gevrey regularity and asymptotic degrees of freedom. *Z. Angew. Math. Phys.* 1999; 50, 341-360.

Foias C, Temam R. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. *J. Funct. Anal.* 1989; 87, 359-369.

Levermore CD, Oliver M. *The Complex Ginzburg-Landau Equation as a Model Problem*, in "Lectures in Applied Mathematics," Vol. 31 141-190, AMS. Providence, R.I. 1996.

**Théorème 2.3.1.** Soit  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$ , alors le problème (2.3.5) admet une solution unique  $u \in C([0, T], H)$  si et seulement si  $f \in G_s^1$ .

**Preuve.** L'unicité de la solution du problème (2.3.5) découle de l'unicité des solutions des problèmes (2.3.12) et (2.3.13).

La propriété  $u \in C([0, T], H)$  est équivalente à  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\| < +\infty$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|^2 &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \sum_{n \geq 1} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n t} |f_n|^2 + \sum_{m \geq 0} e^{-2(\alpha+\beta)\lambda_m t} |f_m|^2 \right\} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 + \sum_{m \geq 0} |f_m|^2 \\ &\leq \sum_{n \geq 1} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 + \sum_{m \geq 0} |f_m|^2. \end{aligned}$$

Comme  $f \in G_s^1$ , i.e.,  $\sum_{n \geq 1} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 < +\infty$ , alors on déduit que :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|^2 \leq \sum_{n \geq 1} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 + \sum_{m \geq 0} |f_m|^2 < +\infty.$$

■

De manière analogue, on montre le théorème suivant :

**Théorème 2.3.2.** Soit  $\beta \in ]-\infty, -\alpha[$ , alors le problème (2.3.5) admet une solution unique  $u \in C([0, T], H)$  si et seulement si  $f \in G_c^1$  (i.e.,  $\sum_{m \geq 0} e^{-2(\alpha+\beta)\lambda_m T} |f_m|^2 < +\infty$ ).

**Remarque 2.3.4.** En utilisant le critère de la convexité logarithmique (1.4.12), on montre une continuité Höldérienne de la solution (2.3.15).

**Remarque 2.3.5.** En utilisant le développement de Fourier de  $u(x, t)$  et  $f(x)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \underbrace{\sum_{n \geq 1} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n}_{u_s(x, t)} + \underbrace{\sum_{m \geq 0} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m}_{u_c(x, t)}, \\ f &= f_c + f_s = \sum_{n \geq 1} f_n \varphi_n + \sum_{m \geq 0} f_m \psi_m, \end{aligned}$$

où  $u_s, f_s$  sont les composantes impaires (resp.  $u_c, f_c$  sont les composantes paires).

Si  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$  (resp.  $\beta \in ]-\infty, -\alpha[$ ), on remarque que la composante impaire  $u_s$  (resp. la composante paire  $u_c$ ) est la source d'instabilité.

A partir de ces remarques, on distingue deux situations particulières :

1. Si  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$  avec  $f = f_c$  et si les données sont parfaitement exactes, alors la solution est stable sur le sous-espace  $H_c$ .
2. Si  $\beta \in ]-\infty, -\alpha[$  avec  $f = f_s$  et si les données sont parfaitement exactes, alors la solution est stable sur le sous-espace  $H_s$ .

## 2.4 Méthode de régularisation pseudo-parabolique

Dans cette section, on propose une méthode de *régularisation* du problème (2.1.1) basée sur la correction pseudo-parabolique.

• On commence par le cas où  $\beta \in ] + \alpha, +\infty[$ .

Considérons le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} L_\varepsilon u = 0, & (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T), \\ u(x, 0) = f(x), & x \in (-1, 1), \\ u(-1, t) = u(1, t), & t \in (0, T), \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (2.4.16)$$

où

$$L_\varepsilon u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-x, t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-x, t) \right), \quad (2.4.17)$$

et  $\varepsilon$  est un paramètre positif (paramètre de *régularisation*).

On note par  $u_\varepsilon(x, t)$  la solution du problème (2.4.16). On sait que :

$$u_\varepsilon(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varepsilon n}(t) \varphi_n(x) + \sum_{m=0}^{+\infty} u_{\varepsilon m}(t) \psi_m(x).$$

Pour trouver la solution de ce problème perturbé, on suit les mêmes étapes utilisées précédemment pour obtenir la solution du problème original (2.1.1).

En effet, en substituant l'expression de  $u_\varepsilon(x, t)$  dans la formule de  $L_\varepsilon$ , on obtient les deux sous-problèmes suivants :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (1 + 2\varepsilon\lambda_n) u'_{\varepsilon n}(t) + (\alpha - \beta)\lambda_n u_{\varepsilon n}(t) \right) \varphi_n(x) = 0, & 0 < t < T, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varepsilon n}(0) \varphi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \varphi_n, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} \left( u'_{\varepsilon m}(t) + (\alpha + \beta)\lambda_m u_{\varepsilon m}(t) \right) \psi_m(x) = 0, & 0 < t < T, \\ \sum_{m=0}^{+\infty} u_{\varepsilon m}(0) \psi_m = \sum_{m=0}^{+\infty} f_m \psi_m. \end{cases}$$



Par conséquent, on obtient la famille des équations différentielles suivante :

$$\begin{cases} (1 + 2\varepsilon\lambda_n)u'_{\varepsilon n}(t) + (\alpha - \beta)\lambda_n u_{\varepsilon n}(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u_{\varepsilon n}(0) = f_n, \end{cases} \quad (2.4.18)$$

et

$$\begin{cases} u'_{\varepsilon m}(t) + (\alpha + \beta)\lambda_m u_{\varepsilon m}(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u_m(0) = f_m, \end{cases} \quad (2.4.19)$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

Si on note par  $u_{\varepsilon s}(x, t)$  (resp.  $u_{\varepsilon c}(x, t)$ ) la solution du problème (2.4.18) (resp. (2.4.19)), alors la solution  $u_{\varepsilon}(x, t)$  du problème perturbé (2.4.16) est la somme de ces deux solutions et elle est donnée par :

$$u_{\varepsilon}(x, t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\varepsilon\lambda_n}\lambda_n t} f_n \varphi_n(x)}_{u_{\varepsilon s}(x, t)} + \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m}_{u_{\varepsilon c}(x, t)}.$$

**Théorème 2.4.1.** *Pour tout  $f \in H$ , le problème (2.4.16) admet une solution unique qui dépend continûment de la donnée  $f$ .*

**Preuve.**

On a trouvé que la solution du problème (2.4.16) est donnée par l'expression suivante :

$$u_{\varepsilon}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\varepsilon\lambda_n}\lambda_n t} f_n \varphi_n(x) + \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} f_m \psi_m.$$

L'unicité de cette solution découle de l'unicité des solutions des sous-problèmes (2.4.18) et (2.4.19).

Pour  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \varphi_n + \sum_{m=0}^{+\infty} f_m \psi_m = f_s + f_c$ , on a

$$\|f\|^2 = \sum_{n \geq 1} |f_n|^2 + \sum_{m \geq 0} |f_m|^2 = \|f_s\|^2 + \|f_c\|^2$$

Par un simple calcul, on a :

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon(x, t)\|^2 &= \|u_{\varepsilon_S}(x, t)\|^2 + \|u_{\varepsilon_C}(x, t)\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\varepsilon\lambda_n}\lambda_n t} \right|^2 |f_n|^2 + \sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{\left[ e^{-(\alpha+\beta)\lambda_n t} \right]^2}_{\leq 1} |f_m|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{-\frac{(\alpha-\beta)\lambda_n T}{1+2\varepsilon\lambda_n}} \right|^2 |f_n|^2 + \sum_{m=0} |f_m|^2 \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \left\{ e^{-\frac{(\alpha-\beta)T}{\varepsilon}} \right\}^2 |f_n|^2 + \|f_c\|^2 \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \left\{ e^{-\frac{2(\alpha-\beta)T}{\varepsilon}} \right\} |f_n|^2 + \|f_c\|^2 \\
&\leq e^{-\frac{2(\alpha-\beta)T}{\varepsilon}} \sum_{n \geq 1} |f_n|^2 + \|f_c\|^2 \\
&\leq e^{-\frac{2(\alpha-\beta)T}{\varepsilon}} \|f_s\|^2 + \|f_c\|^2 \leq e^{-\frac{2(\alpha-\beta)T}{\varepsilon}} \|f\|^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|u_\varepsilon(x, t)\| \leq e^{-\frac{(\alpha-\beta)T}{\varepsilon}} \|f\|.$$

■

**Théorème 2.4.2.** Si  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$  et  $f \in G_1^s$ , alors on a :

$$\|u(x, t) - u_\varepsilon(x, t)\|^2 \leq \|u(x, T) - u_\varepsilon(x, T)\|^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Preuve.** On sait que la solution du problème (2.1.1) est donnée par l'expression suivante :

$$u(x, t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n(x)}_{\text{partie non bornée}} + \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_n t} f_m \psi_m}_{\text{partie régulière}}.$$

Posons

$$\begin{aligned}
\Delta_\varepsilon(t) &= u(x, t) - u_\varepsilon(x, t) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} - e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\varepsilon\lambda_n}\lambda_n t} \right\} f_n \varphi_n(x),
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\Delta_\varepsilon(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left\{ e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} - e^{-\frac{(\alpha-\beta)}{1+2\varepsilon\lambda_n}\lambda_n t} \right\}^2}_{G(\lambda_n)} |f_n|^2.$$

On a :

$$\begin{aligned} G(\lambda_n) &= \left\{ e^{-(\alpha-\beta)\lambda_n t} \left[ 1 - e^{(\alpha-\beta)\lambda_n t - \frac{(\alpha-\beta)\lambda_n t}{1+2\varepsilon\lambda_n}} \right] \right\}^2 \\ &= e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n t} \left[ 1 - e^{\frac{2\varepsilon(\alpha-\beta)\lambda_n^2 t}{1+2\varepsilon\lambda_n}} \right]^2. \end{aligned}$$

On sait que :  $\|\Delta_\varepsilon(t)\|^2 \leq \|\Delta_\varepsilon(T)\|^2$ , alors il suffit d'estimer  $\Delta_\varepsilon(T)$ .  
En effet, on a :

$$\|\Delta_\varepsilon(T)\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2T(\alpha-\beta)\lambda_n} \left\{ 1 - e^{\frac{2T(\alpha-\beta)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n}} \right\}^2 |f_n|^2,$$

La condition  $f \in G_s^1$  signifie que  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2T(\alpha-\beta)\lambda_n} |f_n|^2 = E^2 < +\infty$  (série convergente), alors pour chaque  $\eta > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 \leq \frac{\eta^2}{2},$$

ceci nous permet d'écrire  $\Delta_\varepsilon(T)$  sous la forme suivante :

$$\|\Delta_\varepsilon(T)\|^2 = \underbrace{\sum_{n=1}^N e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2}_{A_1} + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2}_{A_2}.$$

D'une part, on a :

$$A_2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 \leq \frac{\eta^2}{2}.$$

D'autre part et en utilisant le lemme (2.2.1) on peut écrire que

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{n=1}^N e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2 \\
&= \sum_{n=1}^N e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{-2(\beta-\alpha)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T} \right\}^2 |f_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^N e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left[ \frac{2(\beta-\alpha)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T \right]^2 |f_n|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^N e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left( 2(\beta-\alpha)T\varepsilon\lambda_n^2 \right)^2 |f_n|^2 \\
&\leq \left\{ \sum_{n=1}^N e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} 4T^2(\beta-\alpha)^2\varepsilon^2\lambda_n^4 \right\} |f_n|^2 \\
&\leq 4T^2(\beta-\alpha)^2\lambda_N^4\varepsilon^2 \left\{ \sum_{n=1}^N e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} |f_n|^2 \right\} \\
&\leq 4T^2(\beta-\alpha)^2\lambda_N^4 E^2 \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Il suffit de choisir  $\varepsilon$  de tel sorte que :

$$4T^2(\beta-\alpha)^2 E^2 \lambda_N^4 \varepsilon^2 \leq \frac{\eta^2}{2}.$$

Par conséquent, Il s'en suit que :

$$\|\Delta_\varepsilon(T)\|^2 = A_1 + A_2 \leq \eta^2,$$

pour tout  $\varepsilon$  vérifiant :  $\varepsilon \leq \frac{\eta}{2\sqrt{2}T\lambda_N^2(\beta-\alpha)E}$ , et  $\eta$  est un nombre réel positif arbitraire. Ceci implique que

$$\|\Delta_\varepsilon(T)\|^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \implies \|\Delta_\varepsilon(t)\|^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad t \in (0, T).$$

En conclusion, on a prouvé que

$$\sup_{0 < t < T} \|\Delta_\varepsilon(t)\| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

ce qui achève le résultat désiré. ■

**Définition 2.4.1.** Une famille d'opérateurs  $\{R_\varepsilon(t), \varepsilon > 0, t \in (0, T)\} \subset \mathcal{L}(H)$  est dite **famille d'opérateurs régularisante** pour le problème (2.3.5) si pour toute solution  $u(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , du problème (2.3.5) avec la donnée  $f$ , et pour tout  $\delta > 0$ , il existe un choix  $\varepsilon(\delta) > 0$ , tel que

$$\varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \tag{2.4.20}$$

et

$$\|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f_\delta - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (2.4.21)$$

où  $f_\delta$  vérifie la condition suivante :

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta. \quad (2.4.22)$$

**Définition 2.4.2.** On note par  $\{R_\varepsilon(t)\}_{\varepsilon>0}$  la famille d'opérateurs bornés définie sur  $H$  comme suit :

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(t) : H &\longrightarrow H, \\ h = h_s + h_c &\longmapsto R_\varepsilon(t)h = \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{(\alpha-\beta)\lambda_n t}{1+2\varepsilon\lambda_n}} h_n \varphi_n + \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda_m t} h_m \psi_m, \end{aligned}$$

où

$$h_s = \sum_{n \geq 1} h_n \varphi_n = \sum_{n \geq 1} \langle h, \varphi_n \rangle \varphi_n,$$

et

$$h_c = \sum_{m \geq 0} h_m \psi_m = \sum_{m \geq 0} \langle h, \psi_m \rangle \psi_m.$$

Dans ce qui suit, on montre que la famille  $R_\varepsilon(t)$  est une famille d'opérateurs régularisante pour le problème (2.1.1).

**Théorème 2.4.3.** Si  $\beta \in ]\alpha, +\infty[$  et  $f \in G_s^1$ , alors les deux propriétés (2.4.20)-(2.4.21) sont vérifiées.

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f_\delta - u(t)\| &= \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f_\delta - R_{\varepsilon(\delta)}(t)f + R_{\varepsilon(\delta)}(t)f - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f_\delta - R_{\varepsilon(\delta)}(t)f\| + \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)\| \|f_\delta - f\| + \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f - u(t)\| \\ &\leq \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)\| \delta + \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f - u(t)\|. \end{aligned}$$

D'après ce qu'on a montré dans le théorème (2.4.2), on a :

$$\|R_{\varepsilon(\delta)} - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.4.23)$$

D'autre part, en utilisant le théorème (2.4.1) et la propriété (2.4.22), on obtient que :

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f_\delta - u(t)\| &\leq \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)(f_\delta - f)\| \\ &\leq \|R_{\varepsilon(\delta)}(t)\| \delta \leq \delta e^{\frac{(\beta-\alpha)T}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

En choisissant

$$\varepsilon(\delta) = \frac{(\beta - \alpha)T}{\ln(\delta^{\theta-1})}, \quad 0 < \theta < 1,$$

on obtient que :

$$\|R_{\varepsilon(\delta)}(t)f_{\delta} - u(t)\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.4.24)$$

■

Maintenant, on suppose que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \lambda_n^{2r} |f_n|^2 = F^2 < +\infty. \quad (2.4.25)$$

**Théorème 2.4.4.** *Sous la condition (2.4.25), on a l'estimation suivante :*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\Delta_{\varepsilon}(t)\|^2 \leq \Delta_{\varepsilon}(T) \leq \kappa \varepsilon^{2r} F^2,$$

où  $0 < r \leq 1$ .

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon}(T) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{2(\alpha-\beta)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T} \right\} |f_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left\{ 1 - e^{\frac{-2(\beta-\alpha)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T} \right\} |f_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} \left[ \frac{2(\beta-\alpha)\varepsilon\lambda_n^2}{1+2\varepsilon\lambda_n} T \right]^{2r} |f_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2(\alpha-\beta)\lambda_n T} (\beta-\alpha)^{2r} \lambda_n^{2r} (2T)^{2r} \varepsilon^{2r} |f_n|^2 \\ &\leq \varepsilon^{2r} (\beta-\alpha)^{2r} (2T)^{2r} F^2 \\ &\leq \kappa F^2 \varepsilon^{2r}, \end{aligned}$$

où  $\kappa = (\beta-\alpha)^{2r} (2T)^{2r}$ .

■

• Dans le cas où  $\beta \in ]-\infty, -\alpha[$ , on considère le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} L_{\varepsilon} v = 0, & (x, t) \in (-1, 1) \times (0, T), \\ v(x, 0) = f(x), & x \in (-1, 1), \\ v(-1, t) = v(1, t), \quad v_x(-1, t) = v_x(1, t), & t \in (0, T), \end{cases} \quad (2.4.26)$$

où

$$L_{\varepsilon} v = \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(-x, t) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \right) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(-x, t) \right), \quad (2.4.27)$$

et  $\varepsilon$  est un paramètre positif (paramètre de *régularisation*).

On note par  $v_\varepsilon$  la solution du problème (2.4.26) qui est donnée par :

$$v_\varepsilon(x, t) = \sum_{n \geq 1} e^{-(\alpha - \beta)\lambda_n t} f_n \varphi_n + \sum_{m=0}^{+\infty} e^{\frac{-(\alpha + \beta)\lambda_m t}{1 + 2\varepsilon\lambda_m}} f_m \psi_m.$$

De la même méthodologie que celle développée pour le cas  $\beta \in ] + \alpha, + \infty[$ , on montre que  $v_\varepsilon$  est une approximation stable de la solution du problème *mal posé* (2.1.1), et on établit aussi les mêmes résultats de convergence.

## 2.5 Tests numériques

### Equation de la chaleur avec involution (Pseudo-parabolique régularisation)

On prend ici,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $\beta = 3$ . Pour le niveau du bruit, on considère un bruit fort de taille  $\delta = 0.1$ .

Pour le cas :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $\delta = 0.1$ , on teste deux paramètres de régularisation  $\epsilon = 0.01$  et  $\epsilon = 0.001$ .

Pour le cas :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $\delta = 0.1$ , on teste deux paramètres de régularisation  $\epsilon = 0.0001$  et  $\epsilon = 0.00001$ .

Comme donnée initiale, on prend la fonction  $f(x) = 2(1 + x)(1 - x) + \sin(100x)$  et on calcule la solution  $u(x, t)$  au point  $t = 0.01$ . Puisque la solution recherchée est donnée par une série de Fourier, alors, pour calculer cette solution, on tronque la série et on prend uniquement les six (06) premiers termes.

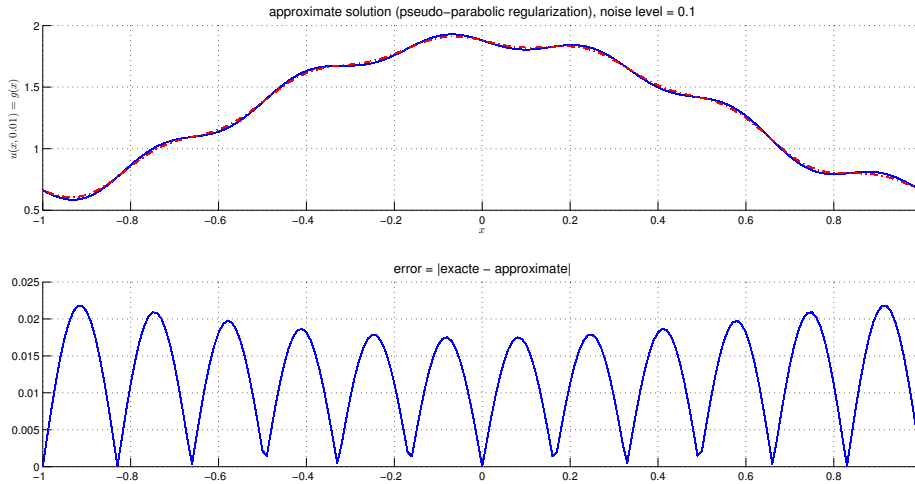


FIGURE 2.1 - Pseudo-parabolic regularization method :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ , Cut-off spectral truncation :  $N = 6$ , Noise level :  $\delta = 0.1$ , Regularization parameter :  $\epsilon = 0.01$ , Relative error :  $E_R = 0.0098$

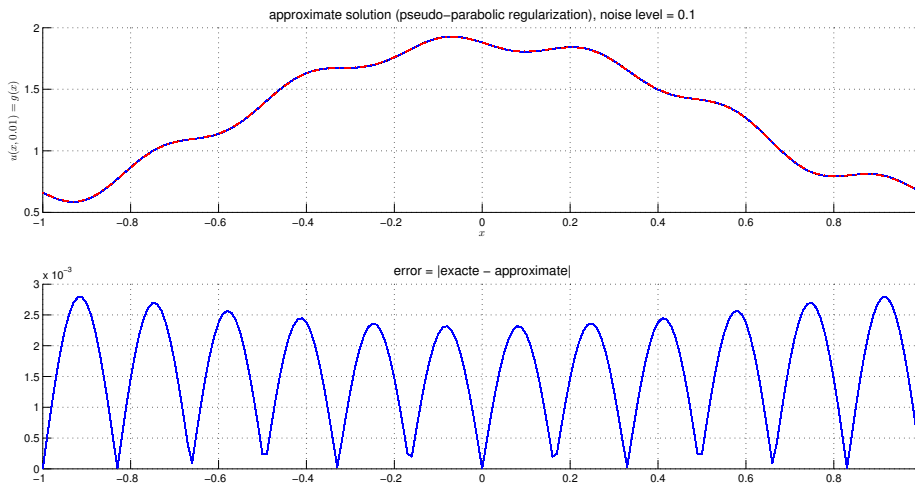


FIGURE 2.2 - Pseudo-parabolic regularization method :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ , Cut-off spectral truncation :  $N = 6$ , Noise level :  $\delta = 0.1$ , Regularization parameter :  $\epsilon = 0.001$ , Relative error :  $E_R = 0.0013$



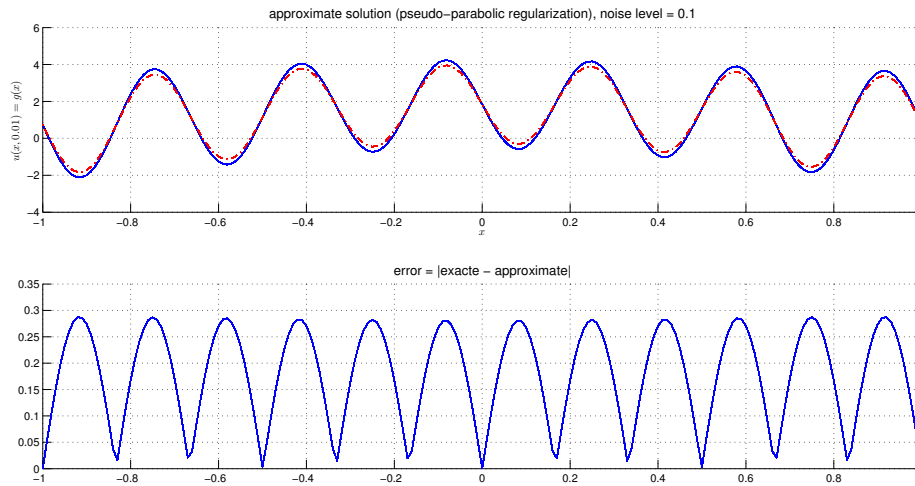


FIGURE 2.3 - Pseudo-parabolic regularization method :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ , Cut-off spectral truncation :  $N = 6$ , Noise level :  $\delta = 0.1$ , Regularization parameter :  $\epsilon = 0.0001$ , Relative error :  $E_R = 0.0867$

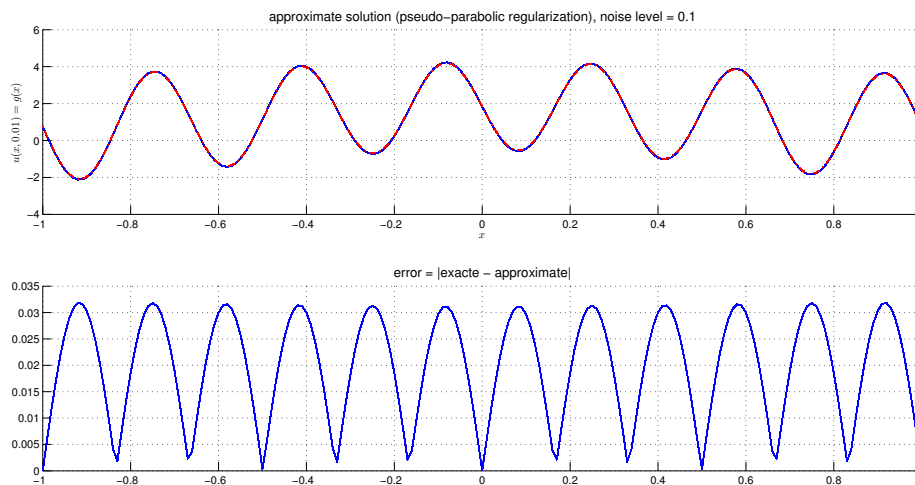


FIGURE 2.4 - Pseudo-parabolic regularization method :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$ , Cut-off spectral truncation :  $N = 6$ , Noise level :  $\delta = 0.1$ , Regularization parameter :  $\epsilon = 0.00001$ , Relative error :  $E_R = 0.0096$

Les résultats numériques obtenus pour cet exemple avec un bruit fort  $\delta = 0.1$ , montrent une certaine exactitude entre la solution recherchée et la solution approchée (régularisée) construite par la méthode pseudo-parabolique.

## Etude d'un problème inverse de type bi-fractionnaire

La **diffusion** est l'un des mécanismes de transport les plus importants dans la nature. Dans la littérature, plusieurs modèles ont été proposés pour décrire ce mécanisme dans des milieux homogènes et hétérogènes ; parmi eux **l'équation parabolique classique (EPC)**, **l'équation bi-parabolique (EBP)** et **l'équation parabolique fractionnaire (EPF)**. Pour le premier modèle (EPC), l'utilisation de l'opérateur de Laplace et de la dérivée du premier ordre est la meilleure façon de décrire la **diffusion** canonique. Commençons par l'exemple typique d'un **problème inverse** engendré par une équation parabolique dans le cadre géométrique le plus simple :

$$L_1 u(x, t) \equiv u_t(x, t) - a \Delta u(x, t) = 0, \quad x \in (0, l); t \in [0, T], \quad (3.0.1)$$

où  $u(x, 0) = u_0$  est la condition initiale inconnue qui peut être déterminée à partir de la condition finale  $u(x, T) = h(x)$ , avec  $a > 0$  et  $h$  une fonction donnée. Ce problème est bien connu comme étant un problème **mal posé (problème de la chaleur rétrograde)**. En raison de son importance physique, le problème (3.0.1) a reçu une attention considérable au cours des soixante dernières années.

Cependant, il est bien connu que **l'équation parabolique classique** ne peut pas décrire avec précision la procédure de conduction thermique, car dans la théorie mathématique classique de la conductivité thermique, certaines conditions simplificatrices sont imposées aux processus (voir [33, 50]). Dans le cas où on ne considère pas ces conditions, on ne peut pas obtenir une description suffisamment correcte des processus dynamiques de transfert de la chaleur et de la masse. Pour surmonter ces difficultés, certains nouveaux modèles ont été proposés par [26, 27, 89] via le modèle **EBP**, qui est une généralisation naturelle du modèle donné dans (3.0.1). Le modèle proposé a été donné par

$$Lu(x, t) \equiv \alpha_1 L_1 u(x, t) + \alpha_2 L_1^2 u(x, t) = 0, \quad x \in (0, l); t \in [0, T], \quad (3.0.2)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des paramètres réels. Le cas  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 0$  coïncide avec le problème

classique (3.0.1).

L'un des inconvénients majeurs des deux modèles proposés respectivement par (3.0.1) et (3.0.2) est qu'ils ne décrivent pas adéquatement le phénomène de **diffusion** dans les matériaux à mémoire, par exemple les matériaux viscoélastiques, et les milieux hétérogènes, tels que le sol, les aquifères hétérogènes et l'écoulement des fluides souterrains.

Afin de mieux décrire le phénomène de **diffusion** dans des milieux hétérogènes, le modèle (3.0.1) a été remplacé par un problème analogue en introduisant une dérivée *fractionnaire*. Un modèle typique est donné par

$$L_\alpha u(x, t) \equiv D_t^\alpha u(x, t) - a\Delta u(x, t) = 0, \quad x \in (0, l); t \in [0, T], \quad (3.0.3)$$

où  $D_t^\alpha$  est la dérivée *fractionnaire* d'ordre  $\alpha$ . Dans cette direction, on renvoie le lecteur à plusieurs ouvrages sur les traitements mathématiques des équations (3.0.3). On cite par exemple [71, 17, 36, 51, 65, 92, 106, 107, 108, 66, 129, 151, 155].

Il est très intéressant de point de vue théorique et pratique d'avoir une compréhension quantitative de la coexistence de deux **diffusions fractionnaires** distinctes dans le modèle inverse bi-parabolique. En particulier de la façon dont les solutions régularisées se stabilisent avec un bon contrôle de deux régimes différents. Ce sujet n'a pas encore été étudié de façons globale dans la littérature pour des raisons de difficultés purement théoriques. C'est la principale motivation et le centre d'intérêt du travail actuel.

Le modèle proposé dans ce chapitre est basé sur l'idée de combiner les avantages de l'équation **bi-parabolique** et les avantages de l'équation **parabolique fractionnaire**, afin de mieux décrire la **diffusion anormale** et de construire une solution stable.

### 3.1 Formulation du problème

On considère le *problème inverse* qui consiste à déterminer le terme inconnu  $u(x, 0) = \Psi(x)$  dans le problème *bi-fractionnaire* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lu = (D_t^\alpha - \mathfrak{k}^2 \Delta)u(x, t) + \tau(D_t^\alpha - \mathfrak{k}^2 \Delta)^2 u(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u(x, t = T) = g(x), & x \in (0, l), \\ D_t^\alpha u(x, t = 0) = 0, & x \in (0, l), \\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u_x(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0, & t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (3.1.4)$$

où  $0 < T < +\infty$ ,  $k$  et  $\tau$  sont des paramètres réels,  $g$  est une fonction donnée et  $D_t^\alpha$  est la dérivée **fractionnaire de Caputo** d'ordre  $\alpha$  définie par :

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{-\alpha} u'(s, t) ds, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Le problème direct bi-fractionnaire et son analyse théorique ont été étudiés dans [26], où la condition initiale  $u_t(x, 0)$  classique a été remplacée par une condition initiale **fractionnaire**  $D_t^\alpha u(x, 0)$ .

Le modèle basé sur (3.1.4) n'est pas markovien et la valeur de son état actuel dépend de tous les états de son passé. Ainsi, contrairement à l'opérateur différentiel parabolique, la partie **fractionnaire** est un opérateur **non local** qui conserve le passé. Cette spécificité peut être considérée comme un remède pour la réversibilité en temps. En effet, il a été démontré [129], que le problème de **sous-diffusion** rétrograde est faiblement **mal posé** et le phénomène d'instabilité se produit uniquement au voisinage de l'instant initial  $t = 0$ .

Les **problèmes directs** pour l'équation de **diffusion fractionnaire** ont été largement étudiés ces dernières années, où un grand nombre d'études a été développé sur le principe du maximum [94], l'existence et l'unicité des solutions [93], les méthodes opérationnelles de résolution exacte [96, 100, 154], et d'autres comme les solutions numériques par les méthodes des éléments finis et les méthodes des différences finies [105, 133, 155].

Cependant, pour certains problèmes pratiques, les conditions aux limites, les données initiales, les coefficients de **diffusion** ou les termes sources sont inconnus, et on veut les reconstruire à partir des mesures supplémentaires. Cette situation donne lieu à certains **problèmes inverses de diffusion fractionnaire**. Les premiers articles sur ce type de **problèmes inverses** ont été fournis par Murio dans [106, 107, 108] pour résoudre les équations de la chaleur **fractionnaires** par des méthodes de mollification. Après cela, certains travaux ont été publiés. Dans [36], Cheng et *al.* ont considéré un **problème inverse** pour déterminer l'ordre de la dérivée **fractionnaire** et le coefficient de **diffusion** dans une équation de **diffusion fractionnaire** et ils ont donné un résultat d'unicité. Dans [92], Liu et *al.* ont résolu un problème rétrograde pour l'équation d'évolution de **diffusion fractionnaire** par une méthode de **régularisation** de quasi-réversibilité.

Dans ce travail, on va d'abord extraire une certaine stabilité conditionnelle pour le **problème inverse** proposé, puis on applique une méthode de **régularisation** itérative pour construire des solutions approchées et stables pour le problème proposé.

Il y a plusieurs nouveautés importantes dans ce travail. La première est l'utilisation des conditions initiales **fractionnaires**, la seconde est que le modèle (3.1.4) est composé de deux modèles relaxés : l'équation **bi-parabolique** et l'équation **parabolique fractionnaire** [26]. Une autre nouveauté importante qu'on souhaite souligner dans ce travail est la nature **faiblement mal-posée** du problème qui nous permet d'améliorer la qualité de toutes les méthodes de **régularisation** connues dans la littérature des problèmes **mal-posés**.

Dans [83, 84] Kozlov et Maz'ya ont proposé une méthode itérative alternée pour résoudre des problèmes aux limites engendrés par des systèmes fortement elliptiques et

formellement auto-adjoints. Après cela, l'idée de cette méthode a été utilisée avec succès pour résoudre diverses classes de problèmes *mal posés* (elliptiques, paraboliques et hyperboliques) [12, 13, 22, 151, 155].

## 3.2 Résultats Préliminaires

Dans cette section, on donne les ingrédients et le cadre fonctionnel qui seront utilisés dans ce chapitre. On commence par un bref rappel sur les opérateurs **quasi-contractants**, la transformée de Fourier sinus, la fonction principale du calcul *fractionnaire* (la fonction de Mittag-Leffler) et on termine cette partie en introduisant quelques lemmes de base qui seront utiles dans notre analyse.

### 3.2.1 Opérateurs quasi-contractants

**Définition 3.2.1.** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $M \in \mathcal{L}(H)$ . On dit que  $M$  est **quasi-contractant** si

$$\|M\| \leq 1.$$

**Théorème 3.2.1.** ([134, Théorème 2.2]). Soit  $M \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur **auto-adjoint positif** avec  $\|M\| \leq 1$ . Posons  $V_0 = N(M)$  et  $V_1 = N(I - M)$ , alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \Pi_{V_1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M)^n = \Pi_{V_0},$$

où la notation  $\Pi_V$  désigne la projection orthogonale sur le sous-espace fermé  $V$ .

Pour plus de détails sur la théorie des opérateurs quasi-contractants, on renvoie le lecteur à Krasnosel'skii *and al.* [85, P. 66].

Considérons l'équation opérationnelle

$$S\varphi = (I - M)\varphi = \psi, \quad (3.2.5)$$

où  $M$  est un opérateur quasi-contractant.

**Théorème 3.2.2.** Soit  $M$  un opérateur **linéaire auto-adjoint, positif et quasi-contractant** sur  $H$ . Soit  $\hat{\psi} \in H$  tel que l'équation (3.2.5) admet une solution  $\hat{\varphi}$ . Si 1 n'est pas une valeur propre de  $M$ , i.e.,  $I - M$  est injective ( $V_1 = N(I - M) = \{0\}$ ), alors les approximations successive

$$\varphi_{n+1} = M\varphi_n + \hat{\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

convergent vers  $\hat{\varphi}$  pour toute donnée initiale  $\varphi_0 \in H$ .

**Preuve.** D'après les hypothèses du théorème (3.2.1), nous avons :

$$\forall \varphi_0 \in H, M^n \varphi_0 \rightarrow \Pi_{V_1} \varphi_0 = \Pi_{\{0\}} \varphi_0 = 0. \quad (3.2.6)$$

Par induction par rapport à  $n$ , il est facile de voir que  $\varphi_n$  a la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_n &= M^n \varphi_0 + \sum_{j=0}^{n-1} M^j \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n)(I - M)^{-1} \hat{\psi} \\ &= M^n \varphi_0 + (I - M^n) \hat{\varphi},\end{aligned}$$

et l'équation (3.2.6) nous permet de conclure que

$$\hat{\varphi} - \varphi_n = M^n(\varphi_0 - \hat{\varphi}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3.2.7)$$

■

**Remarque 3.2.1.** Certains *problèmes inverses* peuvent être formulés par des équations de Fredholm de première espèce de la forme  $B\varphi = \psi$ , où  $B$  est un opérateur **compact, positif auto-adjoint** sur  $H$ . Cette équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\varphi = (I - \omega B)\varphi + \omega\psi = L\varphi + \omega\psi,$$

où  $L = (I - \omega B)$ , et  $\omega$  est un paramètre positif satisfaisant  $\omega < \frac{1}{\|B\|}$ . Il est facile de voir que l'opérateur  $L$  est quasi-contractant et 1 n'est pas une valeur propre de  $L$ . Il résulte du théorème (3.2.2) que la suite  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  converge et  $(I - \omega B)^n \zeta \rightarrow 0$ , pour tout  $\zeta \in H$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

### 3.2.2 Fonction de Mittag-Leffler et ses propriétés

Dans ce qui suit, on présente quelques définitions et lemmes qui seront utiles pour expliciter la solution du problème (3.1.4), ainsi que les estimations de convergence découlant de la méthode de *régularisation* proposée. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux références [66, 71, 113, 112, 26, 40].

**Définition 3.2.2.** [26] On définit la **transformée finie de Fourier sinus** par rapport à la variable  $x$  comme suit :

$$\hat{u}_n(t) = \int_0^l u(x, t) \sin(\lambda_n x) dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l}; \quad n > 0.$$

**Définition 3.2.3.** [112] La **fonction de Mittag-Leffler** de deux-paramètres est définie par :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

où  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  sont des paramètres arbitraires.

**Propriétés 3.2.1.** La fonction de Mittag-Leffler vérifie les propriétés suivantes :

1. Si  $\beta = 1$  alors la fonction de Mittag-Leffler de deux-paramètres s'écrit comme suit :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z) \text{ (fonction de Mittag-Leffler d'un seul paramètre).}$$

2. On a :

$$E_{\alpha,1-\alpha}(z) = zE_{\alpha}(z) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

3. Pour  $0 < \alpha < 1, \lambda > 0$  et  $y > 0$ , on a :

$$D_y^{\alpha} E_{\alpha,1}(-\lambda y^{\alpha}) = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda y^{\alpha}), \quad y > 0,$$

et

$$\frac{d^n}{dy^n} (E_{\alpha,1}(-y)) = (-1)^n E_{\alpha,1}(-y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Pour  $y > 0$ , on a :

$$E_{\alpha,1}(0) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} E_{\alpha,1}(-y) = 0.$$

**Lemme 3.2.1.** [113] Pour  $0 < \alpha < 1, \lambda > 0$  et  $y > 0$ , On a :

$$0 \leq E_{\alpha,1}(-y) < 1.$$

De plus  $E_{\alpha,1}(-y)$  est **complètement monotone**, i.e.,

$$(-1)^n \frac{d^n}{dy^n} E_{\alpha,1}(-y) \geq 0.$$

**Lemme 3.2.2.** [129] Pour  $0 < y_0 < y_1 < 1$ , il existe des constantes  $C_{1,\pm}, C_{2,\pm}$  telles que :

$$\begin{aligned} \frac{C_{1,-}}{y} e^{x^{\frac{1}{y}}} \leq E_y(x) \leq \frac{C_{1,+}}{y} e^{x^{\frac{1}{y}}}, \quad \forall x \geq 0, \\ \frac{C_{2,-}}{\Gamma(1-y)} \frac{1}{1-x} \leq E_y(x) \leq \frac{C_{2,+}}{\Gamma(1-y)} \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \leq 0, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

où  $y \in [y_0, y_1]$ .

**Lemme 3.2.3.** Soient  $0 < \alpha < 1, T > 0$  et  $\lambda_1 > 0$ . Pour tout  $\lambda_n \geq \lambda_1 > 0$ , il existe des constantes positives  $\underline{C}, \bar{C}$  dépendant de  $T, \alpha$  et  $\lambda_1$  telles que :

$$\frac{\underline{C}}{\lambda_n} \leq E_{\alpha,1}(-\lambda_n T^{\alpha}) \leq \frac{\bar{C}}{\lambda_n}. \quad (3.2.9)$$

**Preuve.** A partir du lemme (3.2.2), on sait qu'il existe des constantes  $\tilde{C}_+, \tilde{C}_-$  telles que :

$$E_{\alpha}(-\lambda_n T^{\alpha}) \leq \frac{\tilde{C}_+}{1 + \lambda_n T^{\alpha}} \leq \frac{\tilde{C}_+}{T^{\alpha}} \frac{1}{\lambda_n}, \text{ avec } \tilde{C}_+ = \frac{C_{2,+}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

et

$$E_{\alpha}(-\lambda_n T^{\alpha}) \geq \frac{\tilde{C}_-}{1 + \lambda_n T^{\alpha}} \geq \frac{\tilde{C}_-}{\frac{\lambda_n}{\lambda_1} + \lambda_n T^{\alpha}} = \frac{\tilde{C}_-}{\frac{1}{\lambda_1} + T^{\alpha}} \frac{1}{\lambda_n}, \text{ avec } \tilde{C}_- = \frac{C_{2,-}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

En posant  $\bar{C} = \frac{\tilde{C}_+}{T^{\alpha}}$  et  $\underline{C} = \frac{\tilde{C}_-}{\frac{1}{\lambda_1} + T^{\alpha}}$ , on obtient le résultat désiré. ■

**Lemme 3.2.4.** [40] Pour  $0 < \lambda < 1$ , on définit  $p_k(\lambda)$  et  $r_k(\lambda)$  par :

$$p_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{k-1} (1 - \lambda)^i,$$

et

$$r_k(\lambda) = 1 - p_k(\lambda) = (1 - \lambda)^k.$$

On a :

$$\begin{aligned} p_k(\lambda)\lambda^\mu &\leq k^{1-\mu}, \quad \forall 0 \leq \mu \leq 1, \\ r_k(\lambda)\lambda^\nu &\leq \theta_\nu(k+1)^{-\nu}, \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

où

$$\theta_\nu = \begin{cases} 1, & 0 \leq \nu \leq 1, \\ \nu^\nu, & \nu > 1. \end{cases}$$

**Théorème 3.2.3. (Inégalité de Hölder).** Soient  $p$  et  $q$  deux réels strictement positifs tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

et cette inégalité est encore valable pour  $p = 1$  et  $q = \infty$ . Pour  $p = q = 2$  on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

### 3.3 Analyse du Problème

On considère le problème *bi-fractionnaire* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lu = (D_t^\alpha - \mathfrak{k}^2 \Delta)u(x, t) + \tau(D_t^\alpha - \mathfrak{k}^2 \Delta)^2 u(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u(x, t = 0) = \Psi(x), & x \in (0, l), \\ D_t^\alpha u(x, t = 0) = \varphi(x), & x \in (0, l), \\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u_x(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0, & t \in [0, T], \end{array} \right. \tag{3.3.11}$$



qu'on peut l'écrire aussi sous la forme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau D_t^\alpha D_t^\alpha u(x, t) + (1 - 2\tau \mathfrak{k}^2 \Delta) D_t^\alpha u(x, t) + \mathfrak{k}^2 (\tau \mathfrak{k}^2 \Delta^2 - \Delta) u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u(x, t = 0) = \Psi(x), \quad x \in (0, l), \\ D_t^\alpha u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l), \\ u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u_x(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (3.3.12)$$

où  $(x, t) \in (0, l) \times [0, T]$ ,  $\varphi, \psi \in \mathbb{L}^2((0, l); \mathbb{R})$ .

Pour trouver la solution du problème (3.3.12), on applique une suite de transformations selon les étapes suivantes : transformée de Fourier sinus par rapport à la variable  $x$ , transformée de Laplace par rapport à la variable  $t$ , transformée de Laplace inverse, et enfin la transformée de Fourier inverse.

• **Transformée de Fourier sinus :**

On applique la transformée de Fourier sinus par rapport à la variable  $x$  au problème (3.3.12), on obtient

$$\int_0^l \left( \tau D_t^\alpha D_t^\alpha u(x, t) + (1 - 2\tau \mathfrak{k}^2 \Delta) D_t^\alpha u(x, t) + \mathfrak{k}^2 (\tau \mathfrak{k}^2 \Delta^2 - \Delta) u(x, t) \right) \sin(\lambda_n x) dx = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \tau D_t^\alpha D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + D_t^\alpha \int_0^l u(x, t) \sin(\lambda_n x) dx - 2\tau \mathfrak{k}^2 D_t^\alpha \underbrace{\int_0^l \Delta u(x, t) \sin(\lambda_n x) dx}_I \\ + \tau \mathfrak{k}^4 \underbrace{\int_0^l \Delta^2 u(x, t) \sin(\lambda_n x) dx}_J - \mathfrak{k}^2 \underbrace{\int_0^l \Delta u(x, t) \sin(\lambda_n x) dx}_I = 0. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie, on trouve que :

$$I = -\lambda_n^2 \hat{u}_n(t) \quad \text{et} \quad J = -\lambda_n^2 I = \lambda_n^4 \hat{u}_n(t).$$

Par conséquent, on obtient que :

$$\tau D_t^\alpha D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + 2\tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + \tau \mathfrak{k}^4 \lambda_n^4 \hat{u}_n(t) + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \hat{u}_n(t) = 0.$$

Ceci implique que :

$$\tau D_t^\alpha D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + (1 + 2\tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) \hat{u}_n(t) = 0, \quad (3.3.13)$$

avec

$$\int_0^l u(x, 0) \sin(\lambda_n x) dx = \hat{u}_n(0) = \int_0^l \Psi(x) \sin(\lambda_n x) dx = w_n,$$

et

$$\int_0^l D_t^\alpha u(x, 0) \sin(\lambda_n x) dx = D_t^\alpha \hat{u}_n(0) = \int_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_n x) dx = \sigma_n.$$

• **Transformée de Laplace :**

Maintenant, on applique la transformée de Laplace par rapport à la variable  $t$  à l'équation (3.3.13), on obtient

$$\mathcal{L}[\tau D_t^\alpha D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + (1 + 2\tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) D_t^\alpha \hat{u}_n(t) + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) \hat{u}_n(t)](s) = 0, \quad (3.3.14)$$

d'où

$$\tau \mathcal{L}[D_t^\alpha D_t^\alpha \hat{u}_n(t)](s) + (1 + 2\tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) \mathcal{L}[D_t^\alpha \hat{u}_n(t)](s) + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) \mathcal{L}[\hat{u}_n(t)](s) = 0.$$

Posons  $\mathcal{L}[\hat{u}_n(t)](s) = \widehat{u}_n(s)$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_t^\alpha \hat{u}_n(t)](s) &= s^\alpha \mathcal{L}[\hat{u}_n(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} \hat{u}_n^{(k)}(0^+) \\ &= s^\alpha \widehat{u}_n(s) - s^{\alpha-1} \hat{u}_n(0^+) \\ &= s^\alpha \widehat{u}_n(s) - s^{\alpha-1} w_n, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D_t^\alpha D_t^\alpha \hat{u}_n(t)](s) &= \mathcal{L}[D_t^\alpha K(t)](s) \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[K(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} K(0^+) \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[D_t^\alpha \hat{u}_n(t)](s) - s^{\alpha-1} D_t^\alpha \hat{u}_n(0^+) \\ &= s^\alpha [s^\alpha \widehat{u}_n(s) - s^{\alpha-1} w_n] - s^{\alpha-1} \sigma_n \\ &= s^{2\alpha} \widehat{u}_n(s) - s^{2\alpha-1} w_n - s^{\alpha-1} \sigma_n. \end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans (3.3.14), on obtient que :

$$\tau [s^{2\alpha} \widehat{u}_n(s) - s^{2\alpha-1} w_n - s^{\alpha-1} \sigma_n] + (1 + 2\tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) [s^\alpha \widehat{u}_n(s) - s^{\alpha-1} w_n] + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) \widehat{u}_n(s) = 0,$$

d'où

$$\tau [s^{2\alpha} \widehat{u}_n(s) - s^{2\alpha-1} w_n - s^{\alpha-1} \sigma_n + \left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) [s^\alpha \widehat{u}_n(s) - s^{\alpha-1} w_n] + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) \widehat{u}_n(s)] = 0,$$

ce qui entraîne que

$$s^{2\alpha}\widehat{u}_n(s) + s^\alpha\left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)\widehat{u}_n(s) + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)\widehat{u}_n(s) = s^{2\alpha-1}w_n + s^{\alpha-1}\sigma_n + s^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)w_n,$$

et donc

$$\left[s^{2\alpha} + s^\alpha\left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right) + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)\right]\widehat{u}_n(s) = s^{2\alpha-1}w_n + s^{\alpha-1}\left[\sigma_n + \left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)w_n\right].$$

Il en résulte que :

$$\widehat{u}_n(s) = A_1(s)w_n + B_1(s)\left[\sigma_n + \left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)w_n\right], \quad (3.3.15)$$

avec

$$A_1(s) = \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + s^\alpha\left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right) + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)},$$

$$B_1(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{2\alpha} + s^\alpha\left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right) + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)}.$$

Il est possible de représenter les expressions  $A_1(s)$  et  $B_1(s)$  comme une combinaison linéaire entre  $\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a}$  et  $\frac{s^{2\alpha-1}}{s^\alpha + a}$ . En effet, il est facile de vérifier les formules suivantes :

$$A_1(s) = \frac{\tau s^{2\alpha-1}}{s^\alpha + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2} - \frac{\tau s^{2\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2},$$

et

$$B_1(s) = \frac{\tau s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2} - \frac{\tau s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2}.$$

Alors il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \widehat{u}_n(s) &= \left[ \frac{\tau s^{2\alpha-1}}{s^\alpha + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2} - \frac{\tau s^{2\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2} \right] w_n \\ &+ \left[ \frac{\tau s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2} - \frac{\tau s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2\lambda_n^2} \right] \left[ \sigma_n + \left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)w_n \right]. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

- **Transformée de Laplace inverse :**

Dans cette étape, on applique la transformée de Laplace inverse par rapport à la variable  $t$  à l'équation (3.3.16), il vient

$$\widehat{u}_n(t) = w_n \mathcal{L}^{-1}[A_1(s)](t) + \left[\sigma_n + \left(\frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2\lambda_n^2\right)w_n\right] \mathcal{L}^{-1}[B_1(s)](t).$$

En utilisant les deux formules suivantes :

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(-at^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a},$$

et

$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)] = \frac{1}{s^\alpha + a},$$

on trouve que :

$$\mathcal{L}^{-1}[A_1(s)](t) = \tau t^{-\alpha} \left[ E_{\alpha,1-\alpha}(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_{\alpha,1-\alpha} \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[B_1(s)](t) = \tau \left[ E_{\alpha,1}(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_{\alpha,1} \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right],$$

d'où :

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(t) &= \tau w_n \left[ t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha}(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha} \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \\ &+ \tau \left[ \sigma_n + \left( \frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) w_n \right] \left[ E_{\alpha,1}(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_{\alpha,1} \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \\ &= \tau \sigma_n \left[ E_{\alpha,1}(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_{\alpha,1} \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \\ &+ \tau w_n \left[ \left[ t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha}(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha} \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) \left[ E_{\alpha,1}(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_{\alpha,1} \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

D'après les propriétés de (3.2.1), on arrive à la formule suivante :

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(t) &= \tau \sigma_n \left[ E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_\alpha \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \\ &+ \tau w_n \left[ \left[ -\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) + \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) E_\alpha \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{\tau} + 2\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) \left[ E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_\alpha \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \right] \\ &= \tau \sigma_n \left[ E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_\alpha \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right] \\ &+ w_n \left[ (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha \left( - \left( \frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right) t^\alpha \right) \right]. \end{aligned}$$

• **Transformée de Fourier inverse :**

Enfin, on applique la transformée de Fourier inverse par rapport à la variable  $x$  à la dernière équation, on trouve la solution finale de notre problème, donnée par l'expression :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{2}{l} \sum_{n \geq 1} \left[ \tau \sigma_n \left[ E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) t^\alpha\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + w_n \left[ (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) t^\alpha\right) \right] \right] \sin(\lambda_n x),
 \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

avec  $\hat{u}_n(0) = \int_0^l \Psi(x) \sin(\lambda_n x) dx = w_n$  et  $D_t^\alpha \hat{u}_n(0) = \int_0^l \varphi(x) \sin(\lambda_n x) dx = \sigma_n$ .

Comme conséquence, la solution du problème (3.1.4) est donnée par l'expression :

$$u(x, t) = (R(t)\Psi)(x) = \frac{2}{l} \sum_{n \geq 1} w_n \left[ (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) t^\alpha\right) \right] \sin(\lambda_n x). \tag{3.3.18}$$

Cette solution est stable par rapport à la donnée  $\Psi$ . En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 \|u(., t)\|^2 &= \|R(t)\Psi\|^2 \\
 &= \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} \left[ (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) t^\alpha\right) \right]^2 |w_n|^2 \\
 &= \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} |w_n|^2 [\chi_t(\lambda_n)]^2,
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \chi_t(\lambda_n) &= (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) t^\alpha\right) \\
 &\leq (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 t^\alpha) \\
 &\leq (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) \\
 &\leq (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) \frac{C_{2,+}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1 + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha} \\
 &\leq \left[ \frac{\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2}{\mathfrak{k}^2 \lambda_1^2} + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \right] \frac{C_{2,+}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha} \\
 &\leq \left[ \frac{1}{\mathfrak{k}^2 \lambda_1^2} + \tau \right] \frac{C_{2,+}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{T^\alpha} = m.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que :

$$\|u(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} m^2 |w_n|^2 = m_1^2 \|\Psi\|^2,$$

d'où

$$\|R(t)\| \leq m_1, \text{ où } m_1 = \frac{2m}{l}. \quad (3.3.19)$$

Ceci implique que le **problème direct** (3.3.11) est **bien posé** au sens de Hadamard.

### 3.3.1 Caractère mal posé du problème (3.1.4)

Dans cette section, on va montrer l'instabilité du **problème inverse** associé à l'équation (3.1.4). Ce dernier consiste à trouver  $\Psi = u(x, 0)$  à partir de  $u(x, T) = g(x)$ .

Notons

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$h_n = \langle h, e_n \rangle = \int_0^l h(x) e_n(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h(x) \sin(\lambda_n x) dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On introduit l'espace de Hilbert  $H^p$  :

$$H^p := \left\{ h \in H = \mathbb{L}^2((0, l); \mathbb{R}) : \|h\|_p^2 = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2p} |\langle h, e_n \rangle|^2 < +\infty \right\},$$

muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  et de la norme  $\|\cdot\|_p$  :

$$\langle u, v \rangle_p := \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2p} u_n v_n, \quad \|u\|_p^2 = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2p} u_n^2,$$

où  $u_n$  (resp.  $v_n$ ) est le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $u$  (resp.  $v$ ) relativement à la base Hilbertienne  $(e_n)_{n \geq 1}$  :

$$u_n = \langle u, e_n \rangle = \int_0^l u(x) e_n(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x) \sin(\lambda_n x) dx,$$

$$v_n = \langle v, e_n \rangle = \int_0^l v(x) e_n(x) dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l v(x) \sin(\lambda_n x) dx.$$

En tenant compte de l'expression de la solution donnée par (3.3.17) et la condition supplémentaire  $u(x, T) = g(x)$ , on obtient l'équation vectorielle :

$$\begin{aligned} u(x, T) &= R(T)\Psi = \frac{2}{l} \sum_{n \geq 1} w_n \left[ (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right) \right] e_n(x) \\ &= \sum_{n \geq 1} g_n e_n(x) = g(x), \end{aligned}$$

et par identification, on trouve

$$w_n = \frac{g_n}{(1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right)}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.3.20)$$

Ce qui nous donne :

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{g_n}{(1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right)} \right] \sin(\lambda_n x).$$

Pour simplifier le calcul, on note

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n \geq 1} \chi_1(\lambda_n) g_n \sin(\lambda_n x) = R^{-1}(T)g(x). \quad (3.3.21)$$

En utilisant les propriétés de la fonction  $E_\alpha(-y)$ ,  $y > 0$ , on montre que

$$\chi_1(\lambda_n) = \frac{1}{\chi_T(\lambda_n)} = \frac{1}{(1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Preuve.** On a

$$\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'après le lemme (3.2.3), on sait que  $E_\alpha(-x) \approx \frac{1}{x}$ , ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \chi_T(\lambda_n) &= (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right) \\ &\approx (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) \frac{1}{\lambda_n^2} - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \frac{1}{\lambda_n^2} \\ &\approx \frac{1}{\lambda_n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\chi_1(\lambda_n) = \frac{1}{\chi_T(\lambda_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \quad \blacksquare$$

Ce qui implique que le **problème inverse** associé au problème (3.1.4) est **mal posé** au sens de HADAMARD.

### 3.3.2 Stabilité conditionnelle

Dans ce qui suit, on donne une condition de stabilité conditionnelle du problème en question.

**Théorème 3.3.1.** Si  $\Psi(\cdot) = u(\cdot, 0) \in H^p$ ,  $p > 0$ , i.e.,

$$\|\Psi\|_p^2 = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2p} |\langle \Psi, e_n \rangle|^2 \leq E^2 < +\infty,$$

alors on a la continuité Höldérienne suivante :

$$\|\Psi\| \leq (\underline{C}_1)^{\frac{p}{p+2}} E^{\frac{2}{p+2}} \|\mathcal{g}\|^{\frac{p}{p+2}},$$

où  $\underline{C}_1$  est une constante positive.

**Preuve.** De la formule (3.3.21), on a :

$$\|\Psi\|^2 = \frac{2}{l} \sum_{n \geq 1} |w_n|^2 = \frac{2}{l} \sum_{n \geq 1} \left( \frac{|\mathcal{g}_n|}{\chi_T(\lambda_n)} \right)^2.$$

On applique l'inégalité de Hölder donnée par le théorème (3.2.3), en posant  $r = \frac{p+2}{2}$  et  $s = \frac{p+2}{p}$  de tel sorte que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ , on obtient :

$$\|\Psi\|^2 \leq \frac{2}{l} \underbrace{\left[ \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{g}_n^2}{\chi_T^{p+2}(\lambda_n)} \right]}_I^{\frac{2}{p+2}} \left( \sum_{n \geq 1} \mathcal{g}_n^2 \right)^{\frac{p}{p+2}},$$

où

$$I = \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{g}_n^2}{\chi_T^{p+2}(\lambda_n)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mathcal{g}_n^2}{\chi_T(\lambda_n)^p \chi_T(\lambda_n)^2} = \sum_{n \geq 1} w_n^2 \frac{1}{\chi_T(\lambda_n)^p},$$

et

$$\begin{aligned} \chi_T(\lambda_n) &= (1 + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2) E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right) \\ &= E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \left( E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

On sait d'après le lemme (3.2.1) que  $E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) \geq 0$  et que la fonction  $E_\alpha(-\eta)$  est décroissante. Comme  $\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha \leq \left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha$ , il en résulte que

$$E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) \geq E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right),$$



et donc

$$E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - E_\alpha\left(\left(-\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right) \geq 0.$$

Comme conséquence, on a

$$\chi_T(\lambda_n) = \underbrace{E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha)}_{\geq 0} + \underbrace{\tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \left( E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right) \right)}_{\geq 0} \geq 0.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \chi_T(\lambda_n) &= E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) + \tau \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \left( E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) - E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2\right) T^\alpha\right) \right) \\ &\geq E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) \geq \frac{C_{2,-}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{1 + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha} \\ &\geq \frac{C_{2,-}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\frac{\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2}{\mathfrak{k}^2 \lambda_1^2} + \mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha} \\ &\geq \frac{C_{2,-}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 \left( \frac{1}{\mathfrak{k}^2 \lambda_1^2} + T^\alpha \right)} \\ &\geq \underbrace{\frac{C_{2,-}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{k}^2 \lambda_1^2} + T^\alpha}}_{\underline{C}} \frac{1}{\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2}, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\frac{1}{\chi_T(\lambda_n)} \leq \frac{\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2}{\underline{C}}$ .

Il s'ensuit que

$$I \leq \left( \frac{\mathfrak{k}^2}{\underline{C}} \right)^p \underbrace{\sum_{n \geq 1} \Psi_n^2 \lambda_n^{2p}}_{\|\Psi\|_p^2}.$$

Ainsi, on obtient l'estimation de continuité :

$$\|\Psi\|^2 \leq \frac{2}{l} \left[ \left( \frac{\mathfrak{k}^2}{\underline{C}} \right)^p \|\Psi\|_p^2 \right]^{\frac{2}{p+2}} \|\mathcal{G}\|^{\frac{2p}{p+2}} \leq \frac{2}{l} \underbrace{\left[ \frac{\mathfrak{k}^2}{\underline{C}} \right]^{\frac{2p}{p+2}} E_{\frac{4}{p+2}}}_{\underline{C}_1} \|\mathcal{G}\|^{\frac{2p}{p+2}} = (\underline{C}_1) E_{\frac{2}{p+2}} \|\mathcal{G}\|^{\frac{p}{p+2}},$$

avec  $\underline{C}_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \left[ \frac{\underline{k}^2}{\underline{C}} \right]^{\frac{p}{p+2}}$ . ■

Donc, le **problème inverse** associé au problème (3.1.4) est conditionnellement **bien posé** sur l'ensemble  $H^p$ ,  $p > 0$ .

### 3.4 Méthode de régularisation itérative de Kozlov-Mazya

Dans cette section on applique la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya pour construire une solution approchée stable du problème **mal posé** (3.1.4).

#### 3.4.1 Description de la méthode

L'algorithme itératif pour résoudre le problème (3.1.4) commence par un choix arbitraire de  $\psi_0$ . La première approximation  $u^0(t)$  est la solution du **problème direct** suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lu^0(t) = (D_t^\alpha - \underline{k}^2 \Delta)u^0(t) + \tau(D_t^\alpha - \underline{k}^2 \Delta)^2 u^0(t) = 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u^0(x, t = 0) = \Psi_0(x), & x \in (0, l), \\ D_t^\alpha u^0(x, t = 0) = 0, & x \in (0, l), \\ u^0(0, t) = u_{xx}^0(0, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u_x^0(l, t) = u_{xxx}^0(l, t) = 0 & t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.4.22)$$

Une fois que la paire  $(u^k, \Psi_k)$  est construite, on définit  $\Psi_{k+1}$  par

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k - \omega (u^k(T) - g), \quad (3.4.23)$$

où  $\omega$  (paramètre de relaxation) vérifie la condition

$$0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|K\|},$$

avec  $\|K\| = \|R(T)\| \leq m_1$ , et  $R(\cdot)$  est l'opérateur résolvant associé au problème (3.1.4) donné par (3.3.18).

Finalement, l'itération  $u^{k+1}$  s'obtient en résolvant le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu^{k+1}(t) = (D_t^\alpha - \mathfrak{k}^2 \Delta)u^{k+1}(t) + \tau(D_t^\alpha - \mathfrak{k}^2 \Delta)^2 u^{k+1}(t) = 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u^{k+1}(x, t = 0) = \Psi_{k+1}(x), \quad x \in (0, l), \\ D_t^\alpha u^{k+1}(x, t = 0) = 0, \quad x \in (0, l), \\ u^k(0, t) = u_{xx}^k(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \\ u_x^k(l, t) = u_{xxx}^k(l, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (3.4.24)$$

On pose  $G = I - \omega K$ . Si on itère l'expression dans (3.4.23) et en tenant compte de

$$u^k(T) = R(T)\Psi_k = K\Psi_k, \quad K^{-1}g = R^{-1}(T)g = u(0),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \Psi_k &= \Psi_{k-1} - \omega(K\Psi_{k-1} - g), \\ &= (I - \omega K)\Psi_{k-1} + \omega g \\ &= G^k\Psi_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g \\ &= G^k\Psi_0 + \omega(I - G^k)(I - G)^{-1}g \\ &= G^k\Psi_0 + \omega(I - G^k)(\omega K)^{-1}g \\ &= G^k\Psi_0 + (I - G^k)K^{-1}g, \\ &\Rightarrow \Psi_k = G^k\Psi_0 + (I - G^k)u(0), \\ &\Rightarrow \Psi_k - u(0) = G^k(\Psi_0 - u(0)) \\ &\Rightarrow R(t)(\Psi_k - u(0)) = u^k(t) - u(t) = R(t)G^k(\Psi_0 - u(0)). \end{aligned}$$

**Proposition 3.4.1.** *L'opérateur  $G = I - \omega K$  est **auto-adjoint et quasi-contractant** sur  $H$ . De plus, 1 n'est pas une valeur propre de  $G$ .*

**Remarque 3.4.1.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\|G\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|G^i\| \leq k.$$

**Théorème 3.4.1.** Soient  $\Psi_0$  un élément quelconque du processus itératif proposé ci-dessus et  $u^k$  la  $k$ -ième solution approchée. Alors on a :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t) - u^k(\cdot, t)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

**Preuve.**

1. Pour  $t = 0$ , on a :

$$\|u(0) - u^k(0)\| = \|R(0)G^k(\Psi_0 - u(0))\|.$$

Comme  $R(0) = 1$  et en utilisant le théorème (3.2.2), on conclut que :

$$\|u(0) - u^k(0)\| = \|G^k(\Psi_0 - u(0))\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.4.25)$$

2. Pour  $t > 0$ , de même, d'après le théorème (3.2.2) et l'estimation (3.3.19), on a :

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^k(t)\| &= \|R(t)G^k(\Psi_0 - u(0))\| \\ &\leq \|R(t)\| \|G^k(\Psi_0 - u(0))\| \\ &\leq m_1 \underbrace{\|G^k(\Psi_0 - u(0))\|}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

De (3.4.25) et (3.4.26), on conclut que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u^k(t)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

■

En général, la solution exacte  $u(\cdot, 0) = \Psi \in H$  doit satisfaire une condition de régularité dite **condition de source**, sinon la convergence de la méthode de **régularisation** peut être lente. Afin d'accélérer la méthode de **régularisation**, on impose la condition de source suivante :

$$(\Psi_0 - u(\cdot, 0)) \in H^\gamma, \quad \gamma > 1.$$

**Théorème 3.4.2.** Soient  $\Psi_0$  un élément quelconque du processus itératif proposé ci-dessus et  $u^k$  la  $k$ -ième solution approchée. Si  $(\Psi_0 - u(0)) \in H^\gamma$ , i.e.,

$$\sum_{n \geq 1} \lambda_n^{2\gamma} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \leq E^2 < +\infty,$$

alors le **taux de convergence** de cette méthode est donné par :

$$\|u(t) - u^k(t)\| \leq \beta \frac{E}{(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

où  $\beta$  est une constante positive.

**Preuve.**

1. Pour  $t = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \|u(0) - u^k(0)\|^2 &= \|R(0)G^k(\Psi_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \|R(0)\|^2 \|G^k(\Psi_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-2y} \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \{1 - \omega \chi_T(\lambda_n)\}^{2k}. \end{aligned}$$

On pose

$$\phi(\lambda_n) = \{1 - \omega \chi_T(\lambda_n)\}^k \leq \{1 - \omega E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha)\}^k,$$

il en résulte que :

$$\|u(0) - u^k(0)\|^2 \leq \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-2y} \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \{1 - \omega E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha)\}^{2k},$$

avec  $0 < \omega E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) < 1$ .

En effet, on sait que  $0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|K\|} = \frac{1}{\|R(T)\|}$  et on a :

$$\|u(x, T)\| = \|R(T)\Psi\| = \sum_{n \geq 1} |w_n| [\chi_T(\lambda_n)],$$

où

$$\chi_T(\lambda_n) \geq E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) \Rightarrow \|R(T)\| \geq E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) \Rightarrow \omega < \frac{1}{\|R(T)\|} \leq \frac{1}{E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha)}.$$

Il s'ensuit que

$$0 < \omega E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha) < \frac{E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha)}{E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha)} = 1.$$

En utilisant les deux lemmes (3.2.4) et (3.2.3), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|u(0) - u^k(0)\|^2 &\leq \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} r_k^2(\lambda) \lambda_n^{-2y} \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} r_k^2(\lambda) \left( \frac{C}{E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha)} \right)^{-y} \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{4}{l^2} \left( \frac{C^{-1}}{\omega} \right)^y \sum_{n \geq 1} \left( r_k(\lambda) \underbrace{(\omega E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha))^\frac{y}{2}}_\lambda \right)^2 \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{4}{l^2} \left( \frac{C^{-1}}{\omega} \right)^y \left( \theta_\frac{y}{2}(k+1)^{-\frac{y}{2}} \right)^2 \|\Psi_0 - u(0)\|_y^2 \\ &\leq \left( \frac{2}{l} \left( \frac{C^{-1}}{\omega} \right)^\frac{y}{2} \right)^2 E^2 \left( \theta_\frac{y}{2}(k+1)^{-\frac{y}{2}} \right)^2, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|u(0) - u^k(0)\| &\leq \frac{2}{l} \left(\frac{C^{-1}}{\omega}\right)^{\frac{y}{2}} E \theta_{\frac{y}{2}}(k+1)^{-\frac{y}{2}} \\ &\leq L \frac{E}{(k+1)^{\frac{y}{2}}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

avec  $L = \theta_{\frac{y}{2}} \frac{2}{l} \left(\frac{C^{-1}}{\omega}\right)^{\frac{y}{2}}$ .

2. Pour  $t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^k(t)\|^2 &= \|R(t)G^k(\Psi_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \|R(t)\|^2 \|G^k(\Psi_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq m_1^2 \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-2y} \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), \phi_n \rangle|^2 \{1 - \omega \chi_T(\lambda_n)\}^{2k}. \end{aligned}$$

On suit la même démarche que celle employée dans le premier cas et en utilisant les deux lemmes (3.2.4) et (3.2.3), on obtient que :

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^k(t)\|^2 &\leq m_1^2 \frac{4}{l^2} \sum_{n \geq 1} r_k^2(\lambda) \lambda_n^{-2y} \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{4m_1^2}{l^2} \left(\frac{C^{-1}}{\omega}\right)^y \sum_{n \geq 1} \left(r_k(\lambda) \underbrace{(\omega E_\alpha(-\mathfrak{k}^2 \lambda_n^2 T^\alpha))}_{\lambda}\right)^{\frac{y}{2}} \lambda_n^{2y} |\langle \Psi_0 - u(0), e_n \rangle|^2 \\ &\leq \frac{4m_1^2}{l^2} \left(\frac{C^{-1}}{\omega}\right)^y \left(\theta_{\frac{y}{2}}(k+1)^{-\frac{y}{2}}\right)^2 \|\Psi_0 - u(0)\|_y^2 \\ &\leq \frac{4m_1^2}{l^2} \left(\left(\frac{C^{-1}}{\omega}\right)^{\frac{y}{2}}\right)^2 E^2 \left(\theta_{\frac{y}{2}}(k+1)^{-\frac{y}{2}}\right)^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^k(t)\| &\leq \frac{2m_1}{l} \left(\frac{C^{-1}}{\omega}\right)^{\frac{y}{2}} E \theta_{\frac{y}{2}}(k+1)^{-\frac{y}{2}} \\ &\leq \mathcal{M} \frac{E}{(k+1)^{\frac{y}{2}}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

avec  $\mathcal{M} = \theta_{\frac{y}{2}} \frac{2m_1}{l} \left(\frac{C^{-1}}{\omega}\right)^{\frac{y}{2}}$ .

De (3.4.27) et (3.4.28), on conclut le résultat désiré. ■

**Théorème 3.4.3.** Soient  $0 < \omega < \omega^*$ ,  $\Psi_0 \in H$  un élément arbitraire de la méthode itérative proposée et  $u^k$  (resp.  $u_\delta^k$ ) est la  $k$ -ième approximation pour la donnée exacte  $g$  (resp. perturbée  $g^\delta$ ) telle que :

$$\|g - g^\delta\| \leq \delta.$$

Sous la condition  $\Psi_0 - u(0) \in H^{\gamma}$ , alors on a l'estimation d'erreur :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_{\delta}^k(t)\| \leq J(k, \delta).$$

**Preuve.**

1. Pour  $t = 0$ , on a :

$$\|u(0) - u_{\delta}^k(0)\| \leq \underbrace{\|u(0) - u^k(0)\|}_{\Delta_1} + \underbrace{\|u^k(0) - u_{\delta}^k(0)\|}_{\Delta_2},$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \|u(0) - u^k(0)\| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u^k(t)\| \\ &\leq L \frac{E}{(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \|u^k(0) - u_{\delta}^k(0)\| = \|R(0)(\Psi^k - \Psi_{\delta}^k)\| \\ &= \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i (\mathcal{g} - \mathcal{g}^{\delta}) \right\| \\ &\leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i (\mathcal{g} - \mathcal{g}^{\delta}) \right\| \\ &\leq \omega \delta k. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|u(0) - u_{\delta}^k(0)\| \leq L \frac{E}{(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}} + \omega \delta k = J(k, \delta).$$

$$\text{avec : } L = \theta_{\frac{\gamma}{2}} \frac{2}{l} \left( \frac{C^{-1}}{\omega} \right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

2. Pour  $t > 0$ , on a :

$$\|u(t) - u_{\delta}^k(t)\| \leq \underbrace{\|u(t) - u^k(t)\|}_{\Delta_1} + \underbrace{\|u^k(t) - u_{\delta}^k(t)\|}_{\Delta_2},$$

où

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \|u(t) - u^k(t)\| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u^k(t)\| \\ &\leq \mathcal{M} \frac{E}{(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 &= \|u^k(t) - u_\delta^k(t)\| = \|R(t)(\Psi^k - \Psi_\delta^k)\| \\
 &= \left\| \omega R(t) \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^\delta) \right\| \\
 &\leq m_1 \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^\delta) \right\| \\
 &\leq m_1 \omega \delta k.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\|u(t) - u_\delta^k(t)\| \leq \mathcal{M} \frac{E}{(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}} + m_1 \omega \delta k = \mathcal{J}(k, \delta).$$

$$\text{avec : } \mathcal{M} = \theta_{\frac{\gamma}{2}} \frac{2m_1}{l} \left( \frac{C^{-1}}{\omega} \right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Si on choisit  $k = k(\delta)$  tel que  $\omega k \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ , alors

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_\delta^k(t)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

■

### 3.5 Tests numériques

#### Equation bi-fractionnaire (Méthode itérative KM)

Dans cet exemple, on fixe les paramètres du problème comme suit :  $(0, l) = (0, \pi)$ ,  $\tau = 1$ ,  $\hat{k} = 1$ ,  $T = 1$  et  $\alpha = 0.5$ .

Comme données, on prend la donnée finale  $u(x, T) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$ , on trouve la donnée initiale (exacte)

$$u(x, 0) = \left( \frac{1}{2E_{0.5}(-1) - E_{0.5}(-2)} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x).$$



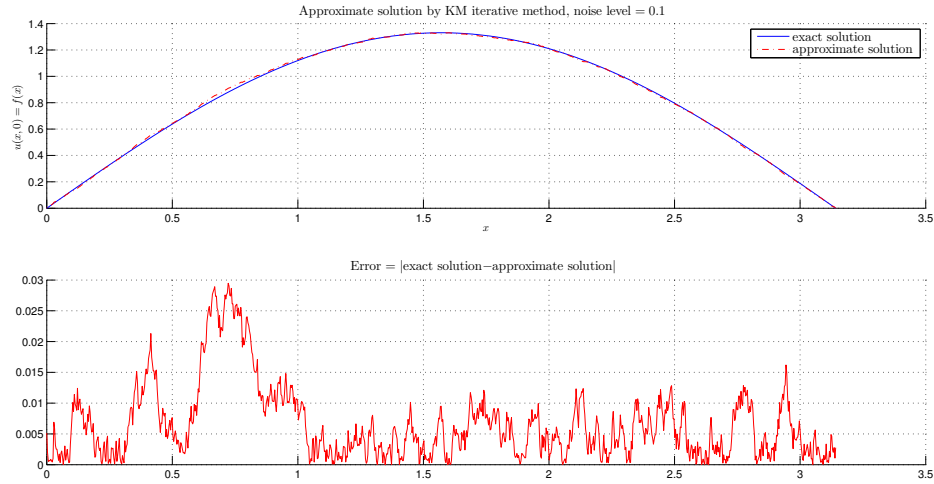


FIGURE 3.1 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.1$ ,  $k = 6$ , Preconditioner parameter :  $r = 0.5$ , Relative error :  $E_R = 0.0095$

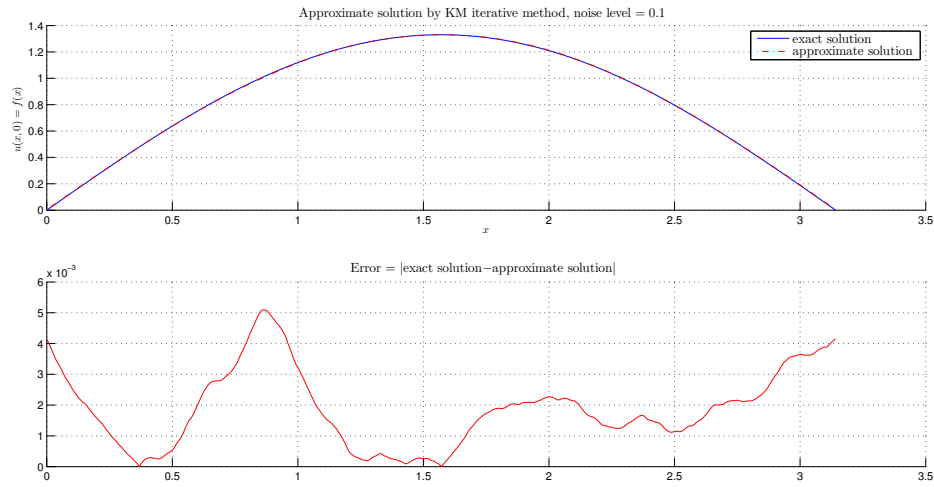


FIGURE 3.2 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.1$ ,  $k = 6$ , Preconditioner parameter :  $r = 1$ , Relative error :  $E_R = 0.0024$

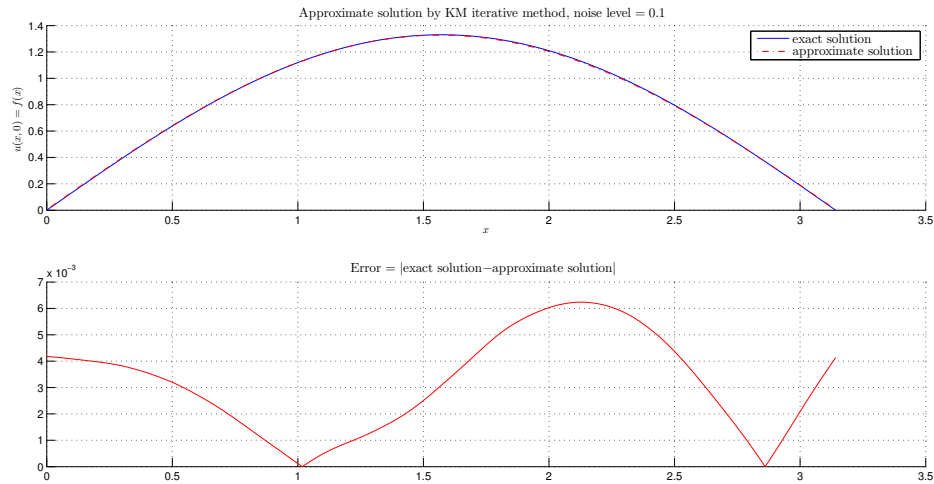


FIGURE 3.3 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.1$ ,  $k = 6$ , Preconditioner parameter :  $r = 1.5$ , Relative error :  $E_R = 0.0039$

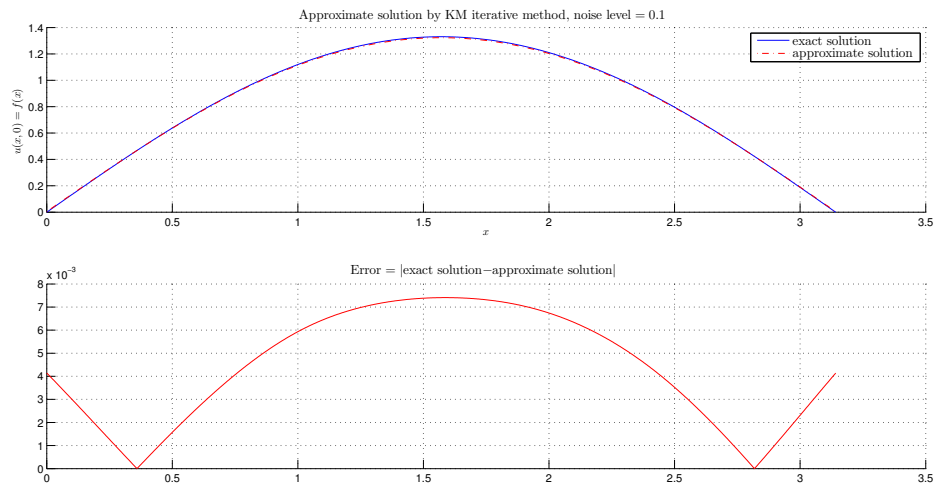


FIGURE 3.4 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.1$ ,  $k = 6$ , Preconditioner parameter :  $r = 2$ , Relative error :  $E_R = 0.0053$

Les résultats numériques pour cet exemple avec un bruit fort  $\delta = 0.1$ , montrent bien que les solutions approchées (régularisées) coïncident avec la solution exacte.

## Régularisation d'un problème elliptique généralisé

### 4.1 Formulation du problème

On note par  $\mathcal{L}(H)$  l'algèbre de Banach des opérateurs **linéaires bornés** sur  $H$ . Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur strictement **positif, auto-adjoint et à résolvante compacte**, où  $H$  est un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et de la norme  $\|\cdot\|$ . Les vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles de l'opérateur  $A$  sont notés par le couple propre  $(\phi_n, \lambda_n)$  :

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (\phi_i, \phi_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty.$$

On considère le problème suivant [22] :

$$\begin{cases} \partial_y^2 u - Au = 0, & 0 < y < +\infty, \\ u(0) = f, \\ u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où  $f$  est la fonction inconnue qu'on veut déterminer en utilisant la donnée supplémentaire suivante :

$$u(L) = g \in H, \quad 0 < L < +\infty. \quad (4.1.2)$$

Un exemple de l'équation (4.1.1)-(4.1.2) est le problème aux limites associé à l'équation de Laplace définie sur la bande infinie  $(0, +\infty) \times (0, 1)$ , où l'opérateur  $A$  est donné par

$$Au(y, x) = -u_{xx}(y, x), \quad \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1) \subset H = \mathbb{L}^2(0, 1).$$

Dans ce cas, l'équation (4.1.1) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} u_{yy}(y, x) + u_{xx}(y, x) = 0, & x \in ]0, 1[, y \in ]0, +\infty[, \\ u(y, 0) = 0 = u(y, 1), & y \in ]0, +\infty[, \\ u(0, x) = f(x), & x \in ]0, 1[, \\ u(+\infty, x) = 0, & x \in ]0, 1[, \end{cases} \quad (4.1.3)$$

où  $f(x)$  est la fonction inconnue à déterminer à partir de la donnée interne :

$$u(L, x) = g(x), \quad 0 < L < +\infty. \quad (4.1.4)$$

Le problème de trouver  $(u(x), u(0))$  dans (4.1.1) - (4.1.2) est bien connu comme étant un problème **mal posé** au sens de HADAMARD; c'est-à-dire que la solution ne dépend pas continûment des données. En raison de l'importance de ce modèle, il existe de nombreuses méthodes numériques différentes dans la littérature. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à [16, 56].

Au cours des deux dernières décennies, un grand nombre de publications ont montré que les modèles de **diffusion anormale**, dans lesquels la variance quadratique moyenne croît plus rapidement (**super-diffusion**) ou plus lentement (**sous-diffusion**) que dans un processus gaussien dans certaines situations, peuvent offrir une bonne modélisation (voir [15, 98, 100, 137]) pour la physique et les applications pratiques.

Le modèle étudié dans ce chapitre sera assez différent de (4.1.1)- (4.1.2); on cherche à remplacer l'équation elliptique classique dans le problème (4.1.1) par un opérateur de **sous-diffusion fractionnaire** dans lequel la dérivée spatiale  $\partial_y^2 u$  devient  $D_y^\alpha D_y^\alpha u$  où  $0 < \alpha < 1$ .

Par conséquent, on s'intéresse au modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\alpha u - Au = 0, & 0 < y < +\infty, \\ u(0) = f, \\ u(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Le but est de trouver  $(u(y), u(0))$  satisfaisant (4.1.5)- (4.1.2), où  $f$  est la condition aux limites inconnue à déterminer à partir des données internes (4.1.2).

On peut trouver en pratique ce problème dans les études hydrologiques, le paramètre  $\alpha$  est utilisé pour caractériser l'hétérogénéité du milieu poreux [37]. Théoriquement, ce paramètre peut être déterminé à partir d'un problème d'optimisation stochastique, mais souvent dans la pratique il est déterminé à partir d'une analyse de données expérimentales [58, 57].

La notation  $D_y^\alpha$  représente l'opérateur de dérivée **fractionnaire** de Liouville-Caputo d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ , pour les fonctions différentiables, défini par :

$$D_y^\alpha u(y, x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^y (y - s)^{-\alpha} u'_y(s, x) ds,$$

La dérivée **fractionnaire** a été étudiée de manière approfondie par M.M. Djrbashyan, dans son livre de 1966 (en russe) [42]; une traduction anglaise de celui-ci est parue en 1993

[41]. En 1967, le géophysicien Michel Caputo [32] a utilisé cette version de la dérivée *fractionnaire* comme un outil pour comprendre les phénomènes sismologiques, et plus tard avec Francesco Mainardi en viscoélasticité, où l'effet mémoire de ces dérivées était crucial [31]. Comme livre de base lié aux dérivées *fractionnaires*, on renvoie le lecteur à [11].

Une question intéressante est de savoir comment la physique non locale derrière les processus de **diffusion anormaux** influencera le comportement et les propriétés des *problèmes inverses*, tels que l'unicité, la stabilité et le degré de l'instabilité. Ce degré est particulièrement important pour l'élaboration de procédures pratiques de reconstruction numérique. Outre leur importance appliquée dans la modélisation, il existe une autre motivation pour l'étude des équations *fractionnaires*, et en particulier leur inversion. En effet, il y a quelques différences fondamentales entre les **équations elliptiques** et les équations de **sous-diffusion**. La plus importante de celles-ci de notre point de vue est le comportement de la solution de (4.1.1)- (4.1.2) qui est exponentiel dans l'espace et ceci conduit à un problème fortement *mal posé* (problème rétrograde), contrairement à la solution du problème (4.1.5) qui possède une décroissance polynomiale, et qui produit un problème rétrograde *faiblement mal posé*.

Parallèlement à ce qu'on a dit dans le chapitre 2, il y'a des données manquantes pour certains problèmes pratiques que l'on veut déterminer par des mesure supplémentaires qui donneront lieu à certains *problèmes inverses* de **diffusion fractionnaire**. Pour plus de détails sur le sujet, on renvoie le lecteur à [10, 71, 63, 66, 74, 92, 36, 110, 143, 145, 146, 147, 156].

Ce travail est une continuité du travail développé par notre groupe de recherche [22] en remplaçant la dérivée classique par la dérivée *fractionnaire* d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$ .

Il est important de noter ici que le premier travail consacré aux problèmes *mal posés* gouvernés par des équations elliptiques généralisées a été récemment développé dans le travail [144]. Pour une étude récente sur les équations **elliptiques généralisées bien posées**, on renvoie le lecteur à [148].

L'utilisation d'une méthode itérative a l'avantage de permettre de prendre facilement en compte toute contrainte physique directement dans le schéma itératif, et aussi la simplicité de la mise en oeuvre pour les opérateurs linéaires et non linéaires. Un inconvénient possible de ce type de méthodes est le grand nombre d'itérations qui intervient pour atteindre la convergence. Pour ces raisons, on a décidé dans ce travail d'envisager une version préconditionnée de l'algorithme de Kozlov-Mazyra. Cette méthode a été utilisée avec succès pour résoudre diverses classes de problèmes *mal posés* (elliptique, parabolique, biparabolique, hyperbolique et *fractionnaire*) [13, 22, 89, 43, 151, 155, 157].

Pour le cas simple, *i.e.*, lorsque les couples propres de l'opérateur  $A$  sont faciles à calculer, on propose une autre méthode de *régularisation* basée sur la méthode de troncature spectrale.

## 4.2 Résultats préliminaires

Les résultats qu'on va utiliser le long de ce chapitre sont les mêmes notions qu'on a défini précédemment dans le chapitre 2. Pour faciliter la lecture, on rappelle le résultat suivant qui sera utilisé par la suite.

**Lemme 4.2.1.** [71] (*Estimation uniforme de la fonction de Mittag-Leffler*). Pour tout  $0 < \alpha < 1$ , et pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$ , on a l'estimation :

$$\frac{1}{1 + c_1(\alpha)y} \leq E_\alpha(-y) \leq \frac{1}{1 + c_2(\alpha)y}, \quad (4.2.6)$$

avec des constantes optimales données par

$$c_1(\alpha) = \Gamma(1 - \alpha), \quad c_2(\alpha) = \Gamma(1 + \alpha)^{-1}. \quad (4.2.7)$$

En utilisant (4.2.6), on obtient les estimations suivantes :

$$\frac{\tau_1}{\lambda} \leq E_\alpha(-\lambda L^\alpha) \leq \frac{\tau_2}{\lambda}, \quad \forall \lambda \geq \lambda_1 > 0, \quad (4.2.8)$$

avec

$$\tau_1 := \frac{1}{\lambda_1^{-1} + c_1(\alpha)L^\alpha}, \quad \tau_2 := \frac{1}{c_2(\alpha)L^\alpha}. \quad (4.2.9)$$

On introduit le théorème suivant :

**Théorème 4.2.1.** (*Théorème généralisé de Picard*) [Prilepko, [114], p. 502]. Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $S$  un opérateur linéaire non borné, auto-adjoint positif sur  $H$ , et  $\Theta : \sigma(S) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, telle que :

$$\Theta(S) = \int_0^{+\infty} \Theta(\lambda) dE_\lambda \in \mathcal{L}(H),$$

où  $\sigma(S)$  est le spectre de  $S$  et  $\{E_\lambda, \lambda \geq 0\}$  est la **représentation spectrale** de l'identité associée à  $S$ .

Soit  $Z(\Theta) = \{\lambda \in \sigma(S) : \Theta(\lambda) = 0\}$  l'ensemble des zéros de la fonction caractéristique  $\Theta(\lambda)$ , qu'on suppose de mesure nulle au sens de Lebesgue (vide ou au plus dénombrable), alors l'équation :

$$\Theta(S)u = v,$$

est **correctement solvable** si et seulement si :

1.  $Z(\Theta) \cap \sigma(S) = \emptyset$  (Unicité).
2.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{|\Theta(\lambda)|^2} d\|E_\lambda v\|^2 < +\infty$  (Existence).

On introduit l'échelle de Hilbert  $\{H^s, s \in \mathbb{R}\}$  induite par  $A$  comme suit :

$$H^s = \mathcal{D}(A^s) = \left\{ h \in H : \|h\|_{H^s}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2s} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

$$\mathcal{E}^s = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{E_\alpha^{2s}(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |(h, \phi_n)|^2 < +\infty \right\}.$$

Soient  $0 < \theta_1 < \theta_2$  et  $0 < \theta_3 < \theta_4$ , alors on a les inclusions topologiques suivantes :

$$H^{\theta_2} \subset H^{\theta_1} \subset H^0 = H \subset H^{-\theta_3} \subset H^{-\theta_4}.$$

**Remarque 4.2.1.**

1. Pour  $s > 0$ , l'espace de Hilbert  $H^{-s}$  est le dual topologique de  $H^s$ , i.e.,

$$H^{-s} = (H^s)'.$$

2. Du lemme (4.2.1), on déduit que  $\frac{1}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} L^\alpha)} \approx \sqrt{\lambda_n}$  et par conséquent, on a

$$H^{\frac{s}{2}} = \mathcal{E}^s.$$

## 4.3 Analyse du problème

### 4.3.1 Caractère mal posé du problème

On considère le problème direct suivant

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\alpha u - Au = 0, & 0 < y < +\infty, \\ u(0) = f, \\ u(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.3.10)$$

En utilisant le développement de Fourier, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u(y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) \phi_n, \\ f &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \phi_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) \phi_n, \\ u(+\infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(+\infty) \phi_n = 0. \end{aligned}$$

En substituant ces dernières formules dans le problème (4.3.10), on obtient la famille des problèmes :

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\alpha u_n - \lambda_n u_n = 0, & 0 < y < +\infty, \\ u_n(0) = f_n, \\ u_n(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.3.11)$$

Pour trouver la solution de ce problème, on applique la méthode citée dans l'article [148, p. 1245, Pb. (4.5)-(4.7)].

Considérons l'équation différentielle :

$$D_y^\alpha D_y^\alpha X(y) - a^2 X(y) = (D_y^\alpha X(y) - aX(y))(D_y^\alpha X(y) + aX(y)) = 0, \quad (4.3.12)$$

où  $a > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

Il est bien connu que la solution fondamentale de l'équation différentielle<sup>1</sup>

$$(D_y^\alpha X(y) + aX(y)) = 0,$$

est donnée par l'expression  $X(y) = E_\alpha(a y^\alpha)$ . Pour l'équation différentielle

$$(D_y^\alpha X(y) - aX(y)) = 0,$$

sa solution fondamentale est donnée par  $X(y) = E_\alpha(-a y^\alpha)$ .

L'ensemble  $\{E_\alpha(-a y^\alpha), E_\alpha(a y^\alpha)\}$  est un système fondamental pour (4.3.12), d'où, la solution générale de (4.3.12) est donnée par l'expression

$$X(y) = c_1 E_\alpha(-a y^\alpha) + c_2 E_\alpha(a y^\alpha), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.3.13)$$

En vertu de (4.3.13), la solution générale  $u_n(y)$  sera donnée par la formule

$$u_n(y) = \left[ c_1 E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} y^\alpha) + c_2 E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} y^\alpha) \right] f_n.$$

En utilisant les conditions aux limites et les propriétés de la fonction de Mittag-Leffler (3.2.1), on trouve que  $c_1 = 0$  et  $c_2 = 1$ . En effet, on a :

$$u_n(+\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} y^\alpha) = +\infty \Rightarrow c_1 = 0,$$

d'où  $u_n(y)$  devient

$$u_n(y) = c_2 E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} y^\alpha) f_n.$$

En injectant  $y = 0$ , on trouve que

$$u_n(0) = c_2 E_\alpha(0) f_n = f_n \Rightarrow c_2 = 1.$$

1. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.



Donc la solution du problème (4.3.11) est donnée par la formule suivante :

$$u_n(\mathcal{Y}) = E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} \mathcal{Y}^\alpha \right) f_n, \quad (4.3.14)$$

il en résulte que la solution du problème (4.3.10) est donnée par :

$$u(\mathcal{Y}) = \sum_{n \geq 1} E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} \mathcal{Y}^\alpha \right) f_n \phi_n = S_\alpha(\mathcal{Y}) f, \quad (4.3.15)$$

où  $S_\alpha(\mathcal{Y}) = E_\alpha \left( -\sqrt{A} \mathcal{Y}^\alpha \right)$  est une fonction continue définie par la diagonalisation spectrale de  $A$ .

**Théorème 4.3.1.** *Pour tout  $f \in H$ , le problème (4.3.10) admet une solution unique généralisée donnée par l'expression (4.3.15), de plus, on a l'estimation de stabilité :*

$$\sup_{\mathcal{Y} \geq 0} \|u(\mathcal{Y})\| = \sup_{\mathcal{Y} \geq 0} \|S_\alpha(\mathcal{Y}) f\| \leq \|f\|. \quad (4.3.16)$$

**Preuve.** En effet, d'après la propriété de la fonction de Mittag-Leffler (lemme (3.2.1)), on a

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(\mathcal{Y}) f\|^2 &= \sum_{n \geq 1} E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} \mathcal{Y}^\alpha \right)^2 |f_n|^2 \\ &\leq \sum_{n \geq 1} |f_n|^2 = \|f\|^2. \end{aligned}$$

■

Le **problème inverse** proposé consiste à déterminer  $u(0) = f$  à partir de la condition supplémentaire  $u(L) = g$ . D'où, le problème est équivalent à l'équation opérationnelle suivante :

$$u(L) = S_\alpha(L) f = E_\alpha \left( -\sqrt{A} L^\alpha \right) f = \sum_{n \geq 1} E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} L^\alpha \right) f_n \phi_n = g = \sum_{n \geq 1} g_n \phi_n, \quad (4.3.17)$$

ce qui donne

$$f_n = \frac{g_n}{E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} L^\alpha \right)}, \quad f = \sum_{n \geq 1} \frac{g_n}{E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} L^\alpha \right)} \phi_n. \quad (4.3.18)$$

En substituant (4.3.18) dans la solution du problème (4.3.10) donnée par (4.3.15), on obtient :

$$u(\mathcal{Y}) = \mathcal{R}_\alpha(\mathcal{Y}) g = \sum_{n \geq 1} \frac{E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} \mathcal{Y}^\alpha \right)}{E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} L^\alpha \right)} g_n \phi_n. \quad (4.3.19)$$

La représentation (4.2.6), on a :

$$\frac{1}{1 + c_1(\alpha) L^\alpha \sqrt{\lambda}} \leq E_\alpha \left( -L^\alpha \sqrt{\lambda} \right) \leq \frac{1}{1 + c_2(\alpha) L^\alpha \sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \geq \lambda_1, \quad (4.3.20)$$

$$1 + c_2(\alpha)L^\alpha\sqrt{\lambda} \leq \frac{1}{E_\alpha(-L^\alpha\sqrt{\lambda})} \leq 1 + c_1(\alpha)L^\alpha\sqrt{\lambda}, \quad \lambda \geq \lambda_1, \quad (4.3.21)$$

$$\frac{1}{1 + c_1(\alpha)\mathcal{Y}^\alpha\sqrt{\lambda}} \leq E_\alpha(-\mathcal{Y}^\alpha\sqrt{\lambda}) \leq \frac{1}{1 + c_2(\alpha)\mathcal{Y}^\alpha\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda \geq \lambda_1, \mathcal{Y} \geq \varepsilon > 0, \quad (4.3.22)$$

ceci implique que

$$\frac{1 + c_2(\alpha)L^\alpha\sqrt{\lambda}}{1 + c_1(\alpha)\mathcal{Y}^\alpha\sqrt{\lambda}} \leq \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}\mathcal{Y}^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}L^\alpha)} \leq \frac{1 + c_1(\alpha)L^\alpha\sqrt{\lambda}}{1 + c_2(\alpha)\mathcal{Y}^\alpha\sqrt{\lambda}}. \quad (4.3.23)$$

En posant

$$A(\lambda) = \frac{1 + c_1(\alpha)L^\alpha\sqrt{\lambda}}{1 + c_2(\alpha)\mathcal{Y}^\alpha\sqrt{\lambda}}.$$

Il est facile de voir que

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_1} A(\lambda) \leq M(\alpha) = \frac{c_1(\alpha)}{c_2(\alpha)} \left( \frac{L}{\mathcal{Y}} \right)^\alpha. \quad (4.3.24)$$

De cette dernière inégalité, on déduit que

$$\|\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{Y})\| = M(\alpha) = \frac{c_1(\alpha)}{c_2(\alpha)} \left( \frac{L}{\mathcal{Y}} \right)^\alpha, \quad (4.3.25)$$

$$\|\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{Y})\| = M(\alpha) = \frac{c_1(\alpha)}{c_2(\alpha)} \left( \frac{L}{\mathcal{Y}} \right)^\alpha \leq 1, \quad \mathcal{Y} \geq L, \quad (4.3.26)$$

et

$$\|\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{Y})\| \leq \kappa(\varepsilon, L, \alpha) = \frac{c_1(\alpha)}{c_2(\alpha)} \left( \frac{L}{\varepsilon} \right)^\alpha, \quad 0 < \varepsilon \leq \mathcal{Y} < L. \quad (4.3.27)$$

Par conséquent

$$\forall \mathcal{Y} \geq \varepsilon > 0, \|\mathcal{R}_\alpha(\mathcal{Y})g\| \leq M(\alpha)\|g\|. \quad (4.3.28)$$

A partir de cette estimation, on remarque que :

- $u(\mathcal{Y})$  est stable sur l'intervalle  $[L, +\infty[$  et on a  $\sup_{\mathcal{Y} \in [L, +\infty[} \|u(\mathcal{Y})\| \leq \|g\|$ ;
- $u(\mathcal{Y})$  est stable sur  $[\varepsilon, L]$ ,  $\varepsilon > 0$  et on a  $\|u(\mathcal{Y})\| \leq \kappa(\varepsilon, L, \alpha)\|g\|$ ;
- $u(\mathcal{Y})$  est instable sur  $[0, \varepsilon[$ . Ceci découle des hautes fréquences

$$\omega_n = \frac{1}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n}L^\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

et

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = \sum \omega_n g_n \phi_n.$$

En effet, comme  $\sqrt{\lambda_n} L^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , alors d'après la propriété 4 citée dans (3.2.8), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} L^\alpha \right) = 0,$$

ce qui montre que

$$\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

### 4.3.2 Stabilité du problème (4.1.5)

**Corollaire 4.3.1.** *L'équation opérationnelle (4.3.17) est correctement résoluble (existence et unicité) si et seulement si  $g \in H^{\frac{1}{2}}$ .*

**Théorème 4.3.2.** *Pour tout  $g \in H^{\frac{1}{2}}$ , le problème (4.1.5) admet une solution généralisée donnée par :*

$$u(y) = \mathcal{R}_\alpha(y)g = \sum_{n \geq 1} \frac{E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} y^\alpha \right)}{E_\alpha \left( -\sqrt{\lambda_n} L^\alpha \right)} g_n \phi_n. \quad (4.3.29)$$

De plus, on a les estimations de stabilité suivantes :

$$\sup_{L \leq y \leq +\infty} \|u(y)\| \leq \|g\|. \quad (4.3.30)$$

$$\sup_{\varepsilon \leq y \leq L} \|u(y)\| \leq \frac{c_1(\alpha)}{c_2(\alpha)} \left( \frac{L}{\varepsilon} \right)^\alpha \|g\|, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.3.31)$$

Maintenant, on suppose que  $u(0) = f \in H^{\frac{\theta}{2}}$ ,  $\theta > 0$ .

**Remarque 4.3.1.** Remarquons que

$$\|A^{\frac{\theta}{2}} u(0)\|^2 = \sum_{n \geq 1} \lambda_n^\theta f_n^2 \approx \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{(\theta+1)} |g_n|^2 < +\infty \iff g \in H^{\frac{\theta+1}{2}}.$$

**Théorème 4.3.3.** *Soit  $u(0) = f \in H^{\frac{p}{4}}$ ,  $p > 0$ . Si  $\|f\|_{H^{\frac{p}{4}}} \leq E$ , alors*

$$\|f\| \leq M E^{\frac{2}{p+2}} \|g\|^{\frac{p}{p+2}},$$

où  $M$  est une constante positive.

**Preuve.** En utilisant l'inégalité d'Hölder, on peut écrire que

$$\|f\|^2 = \sum_{n \geq 1} |f_n|^2 = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{|g_n|}{E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} \right)^2 \leq (Y_1)^{\frac{p}{p+2}} (Y_2)^{\frac{2}{p+2}},$$

où

$$Y_2 = \sum_{n \geq 1} |g_n|^2, \quad (4.3.32)$$

et

$$Y_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{|g_n|^2}{E_\alpha^{p+2}(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} = \sum_{n \geq 1} |f_n|^2 \frac{1}{E_\alpha^p(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})}. \quad (4.3.33)$$

En utilisant l'inégalité (4.3.20), la quantité  $Y_1$  peut être estimée comme suit

$$Y_1 \leq c_3(p, L, \alpha) \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{\frac{p}{2}} |f_n|^2 = c_3(p, L, \alpha) \|f\|_{\frac{p}{4}}^2, \quad (4.3.34)$$

où  $c_3(p, L, \alpha) = \left( \frac{1}{1 + c_2(\alpha)L^\alpha} \right)^p$ . De (4.3.32) et (4.3.34), on trouve que

$$\|f\|^2 \leq \left\{ c_3(p, L, \alpha) \|f\|_{\frac{p}{4}}^2 \right\}^{\frac{2}{p+2}} \left\{ \|g\|^2 \right\}^{\frac{p}{p+2}} \leq M^2 E^{\frac{4}{p+2}} \|g\|^{\frac{2p}{p+2}}, \quad (4.3.35)$$

avec  $M = (c_3(p, L, \alpha))^{\frac{1}{p+2}}$ . ■

## 4.4 Méthodes de régularisation

Dans cette section on applique la méthode de troncature spectrale et la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya pour construire des solutions approchées stables pour le problème *mal posé* en question.

### 4.4.1 Méthode de troncature spectrale

La manière standard de stabiliser un problème *mal posé* est d'éliminer les hautes fréquences et de considérer la solution tronquée comme une approximation de la solution instable.

**Définition 4.4.1.** Pour  $N > 0$ , la solution régularisée du problème (4.3.10) est donnée par :

$$f_N = \sum_{n \leq N} \left[ \frac{1}{E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} \right] g_n \phi_n, \quad (4.4.36)$$

$$u_N(y) = \sum_{n \leq N} \left[ \frac{E_\alpha(-y^\alpha \sqrt{\lambda_n})}{E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} \right] g_n \phi_n. \quad (4.4.37)$$

**Remarque 4.4.1.** Si le paramètre  $N$  est suffisamment grand,  $f_N$  est proche de la solution exacte  $f$ . D'autre part, si le paramètre  $N$  est fixé,  $f_N$  est bornée. Le nombre entier positif  $N$  joue le rôle du paramètre de *régularisation*.

*Remarque 4.4.2.* Comme

$$\|u(\mathcal{Y}) - u_N(\mathcal{Y})\| = \|S(\mathcal{Y})(f - f_N)\| \leq \|f - f_N\|,$$

alors pour  $g \in H^{\frac{1}{2}}$ ,  $\|(f - f_N)\| \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow +\infty$ ; ceci implique que

$$\|u - u_N\|_{+\infty} \leq \|f - f_N\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \|u(\mathcal{Y}) - u_N(\mathcal{Y})\| &= \|S(\mathcal{Y})(f - f_N)\| = \sum_{n \geq N+1} \frac{E_\alpha^2(-\mathcal{Y}^\alpha \sqrt{\lambda_n})}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_n|^2 \\ &\leq \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_n|^2 \\ &\leq \sum_{n \geq N+1} \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\underline{C}} \right)^2 |g_n|^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{\underline{C}} \right)^2 \sum_{n \geq N+1} (\sqrt{\lambda_n})^2 |g_n|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\|u - u_N\|_\infty = \sup_{\mathcal{Y} \in [0, +\infty[} \|u(\mathcal{Y}) - u_N(\mathcal{Y})\| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty.$$

Puisque les données  $g$  viennent en général de l'expérience et ne sont pas connues de manière exacte, alors on suppose qu'on a des données entachées du bruit  $g^\delta$  proches des données  $g$  telles que  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ , où  $\delta$  désigne le niveau de bruit.

Soit  $(f_N^\delta, u_N^\delta)$  la solution régularisée du problème (4.1.5)-(4.1.2) avec les données perturbées  $g^\delta$  :

$$f_N^\delta = \sum_{n \leq N} \frac{g_n^\delta}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} L^\alpha)} \phi_n, \quad g_n^\delta = (g^\delta, \phi_n). \quad (4.4.38)$$

$$u_N^\delta(\mathcal{Y}) = \sum_{n \leq N} \frac{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} \mathcal{Y}^\alpha)}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} L^\alpha)} g_n^\delta \phi_n. \quad (4.4.39)$$

Pour établir les estimations d'erreurs, on suppose que la solution recherchée satisfait la condition de régularité supplémentaire suivante :

$$\|A^{\frac{r}{2}} f\|^2 \leq E^2 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^r \frac{1}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_n|^2 \leq E^2 < +\infty, \quad (4.4.40)$$

où  $E > 0$  est une constante donnée, et  $r$  est un réel positif.

**Remarque 4.4.3.** Soient  $f_{1,N}$  et  $f_{2,N}$  les solutions régularisées associées respectivement aux données exactes  $g_1$  and  $g_2$ , alors on a :

$$\begin{aligned} \|f_{2,N} - f_{1,N}\|^2 &= \sum_{n \leq N} \frac{1}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_{2,n} - g_{1,n}|^2 \leq \frac{1}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_N})} \|g_2 - g_1\|^2 \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{\lambda_N}}{\underline{C}} \right)^2 \|g_2 - g_1\|^2. \end{aligned}$$

Le résultat principal de cette méthode est le suivant :

**Théorème 4.4.1.** Soient  $f_N^\delta$  la solution régularisée donnée par (4.4.38), et  $f$  la solution exacte donnée par (4.3.18). Si  $\|A^{\frac{r}{2}} f\| \leq E$ ,  $r > 0$ , et si on choisit  $N$  tel que  $\sqrt{\lambda_N} \approx \frac{\theta}{L} \delta^{-\frac{1}{2}}$ ,  $0 < \theta < 1$ , alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \right]^r E + \frac{\lambda_N}{\underline{C}} \delta. \quad (4.4.41)$$

**Preuve.** On sait que

$$\|f - f_N^\delta\|^2 \leq \underbrace{\|f - f_N\|^2}_{\Delta_1} + \underbrace{\|f_N - f_N^\delta\|^2}_{\Delta_2}.$$

Par des calculs directs, on trouve que

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 = \|f_N - f_N^\delta\|^2 &\leq \sum_{n \leq N} \frac{1}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_n - g_n^\delta|^2 \\ &\leq \left[ \frac{\sqrt{\lambda_N}}{\underline{C}} \right]^2 \delta^2, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\Delta_2 \leq \frac{\sqrt{\lambda_N}}{\underline{C}} \delta.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= \|f - f_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_n|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n^{2r}}}{\sqrt{\lambda_n^{2r}} E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_n|^2 \\ &\leq \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} \right)^{2r} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \lambda_n^r \frac{1}{E_\alpha^2(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})} |g_n|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\Delta_1 \leq \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \right)^r E.$$

Par conséquent

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \right]^r E + \frac{\sqrt{\lambda_N}}{\underline{C}} \delta.$$

En choisissant  $\sqrt{\lambda_N} \approx \frac{\theta}{L} \delta^{-\frac{1}{2}}$ ,  $0 < \theta < 1$ , on obtient que

$$\|f - f_N^\delta\| \leq \left( \frac{L}{\theta} \right)^r \delta^{\frac{r}{2}} E + \frac{\theta}{L\underline{C}} \delta^{\frac{1}{2}}.$$

■

Finalement, à partir des expressions (4.3.17) et (4.4.41), on déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 4.4.1.** Soient  $u_N^\delta$  la solution régularisée donnée par (4.4.39), et  $u$  la solution exacte donnée par (4.3.19). Si  $\|A^{\frac{r}{2}} f\| \leq E$ ,  $r > 0$ , et si on choisit  $\sqrt{\lambda_N} \approx \frac{\theta}{L} \delta^{-\frac{1}{2}}$ ,  $0 < \theta < 1$ , alors on a :

$$\|u - u_N^\delta\|_\infty = \sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u_N^\delta(y)\| \leq \|f_N - f_N^\delta\| \leq \left( \frac{L}{\theta} \right)^r \delta^{\frac{r}{2}} E + \frac{\theta}{L\underline{C}} \delta^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4.42)$$

**Preuve.** On sait que

$$\|u - u_N^\delta\|_\infty^2 = \sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u_N^\delta(y)\|^2,$$

et on a

$$\|u(y) - u_N^\delta(y)\|^2 \leq \underbrace{\|u(y) - u_N(y)\|^2}_{\Lambda_1} + \underbrace{\|u_N(y) - u_N^\delta(y)\|^2}_{\Lambda_2}.$$

D'une part, de la remarque (4.4.2) on a :

$$\Lambda_1 = \|u(y) - u_N(y)\|^2 \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty,$$

et d'autre part, d'après les propriétés de la fonction de Mittag-leffler (3.2.1) et le théorème (4.4.1), on a

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \|u_N(y) - u_N^\delta(y)\|^2 = \sum_{n \leq N} E_\alpha^2(-y^\alpha \sqrt{\lambda_n}) |f_n - f_n^\delta|^2 \\ &\leq \sum_{n \leq N} E_\alpha^2(-y^\alpha \sqrt{\lambda_n}) |f_n - f_n^\delta|^2 = \|f - f_N^\delta\| \\ &\leq \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \right]^r E + \frac{\sqrt{\lambda_N}}{\underline{C}} \delta. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|u(y) - u_N^\delta(y)\| \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 \leq \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}} \right]^r E + \frac{\sqrt{\lambda_N}}{C} \delta,$$

d'où on obtient le résultat désiré avec  $\sqrt{\lambda_N} \approx \frac{\theta}{L} \delta^{-\frac{1}{2}}$ ,  $0 < \theta < 1$ . ■

#### 4.4.2 Méthode itérative de Kozlov Maz'ya

Dans cette section, on donne une approximation stable de la solution du problème **mal posé** (4.1.5)-(4.1.2) en utilisant une méthode itérative de type Kozlov-Maz'ya. En 1990, Kozlov et Maz'ya ont proposé la méthode itérative alternée [83] pour résoudre certains problèmes **mal posés** ainsi que le problème de Cauchy pour des opérateurs **fortement elliptiques** auto-adjoints avec des données manquantes sur une partie de la frontière. Ces algorithmes préservent les équations différentielles et chaque étape nécessite la résolution de deux problèmes **bien posés** pour l'équation différentielle d'origine.

##### ■ Description de la méthode :

L'algorithme itératif pour résoudre le problème **mal posé** (4.1.5)-(4.1.2) commence par le choix de l'élément arbitraire  $f_0 \in H$ . La première approximation  $u^0(y)$  est la solution du **problème direct** (**bien posé**) suivant :

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\alpha u^0(y) - Au^0(y) = 0, & 0 < y < +\infty, \\ u^0(0) = f_0, \\ u^0(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.4.43)$$

Une fois la paire  $(u^k, f_k)$  est construite, on définit

$$f_{k+1} = f_k - \omega (u^k(L) - g), \quad (4.4.44)$$

où  $0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|K\|}$  avec

$$\|K\| = \sup_n (E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})) \leq E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_1}) < 1. \quad (4.4.45)$$

Enfin,  $u^{k+1}$  s'obtient en résolvant le problème :

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\alpha u^{k+1}(y) - Au^{k+1}(y) = 0, & 0 < y < +\infty, \\ u^{k+1}(0) = f_{k+1}, \\ u^{k+1}(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.4.46)$$

Posons  $G = I - \omega K$ . Si on itère l'algorithme (4.4.44), on obtient :

$$\begin{aligned} f_k &= G^k f_0 + (I - G^k)u(0), \\ f_k - u(0) &= G^k(f_0 - u(0)), \\ u^k(y) - u(y) &= S_\alpha(y)G^k(f_0 - u(0)). \end{aligned}$$



**Proposition 4.4.1.** *L'opérateur  $G = I - \omega K$  est **auto-adjoint et quasi-contractant** sur  $H$  (1 n'est pas une valeur propre de  $G$ ). De plus, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a*

$$\left\| \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|G^i\| \leq k.$$

**Théorème 4.4.2.** *Soient  $f_0 \in H$  un élément quelconque du processus itératif proposé ci-dessus et  $u^k$  la  $k$ -ième solution approchée. On a :*

$$\sup_{\gamma \in [0, +\infty[} \|u(\gamma) - u^k(\gamma)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

**Preuve.** Il découle immédiatement du théorème (3.2.2) et l'estimation (4.4.45) que

$$\begin{aligned} \|u(\gamma) - u^k(\gamma)\| &= \|S_\alpha(\gamma)G^k(f_0 - u(0))\| \\ &\leq \|S_\alpha(\gamma)\| \|G^k(f_0 - u(0))\| \\ &\leq \underbrace{\|G^k(f_0 - u(0))\|}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{0}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \tag{4.4.47}$$

■

**Théorème 4.4.3.** *Soient  $f_0$  un élément quelconque du processus itératif proposé ci-dessus et  $u^k$  la  $k$ -ième solution approchée. Si  $(f_0 - u(0)) \in H^{\gamma/4}$ ,  $\gamma > 0$ , alors le taux de convergence de cette méthode est donnée par :*

$$\|u(\gamma) - u^k(\gamma)\| \leq \kappa \frac{E}{(k+1)^{\frac{\gamma}{2}}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \tag{4.4.48}$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \|u(\gamma) - u^k(\gamma)\|^2 &= \|S(\gamma)G^k(f_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \|S(\gamma)\|^2 \|G^k(f_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-\frac{\gamma}{2}} \lambda_n^{\frac{\gamma}{2}} |(f_0 - u(0), \phi_n)|^2 \{1 - \omega E_\alpha(-\gamma^\alpha \sqrt{\lambda_n})\}^{2k}. \end{aligned}$$

On pose  $r_k(\mu_n) = (1 - \mu_n)^k$ , où

$$0 \leq \mu_n = \omega E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n}) < 1,$$

et en tenant en compte que

$$(1 - \omega E_\alpha(-\gamma^\alpha \sqrt{\lambda_n}))^k \leq (1 - \omega E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n}))^k,$$

alors on peut écrire

$$\|u(y) - u^k(y)\|^2 \leq \sum_{n \geq 1} \lambda_n^{-\frac{y}{2}} \lambda_n^{\frac{y}{2}} |(f_0 - u(0), \phi_n)|^2 \{1 - \omega E_\alpha(-L^\alpha \sqrt{\lambda_n})\}^{2k}.$$

Maintenant, en utilisant le lemme (3.2.4) et l'inégalité (4.2.8), on a :

$$\begin{aligned} \|u(y) - u^k(y)\|^2 &\leq \sum_{n \geq 1} r_k^2(\mu_n) \lambda_n^{-\frac{y}{2}} \lambda_n^{\frac{y}{2}} |(f_0 - u(0), \phi_n)|^2 \\ &\leq \sum_{n \geq 1} r_k^2(\mu_n) \left( \frac{\tau_1}{E_\alpha(-\sqrt{\lambda_n} L^\alpha)} \right)^{-y} \lambda_n^{\frac{y}{2}} |(f_0 - u(0), \phi_n)|^2 \\ &\leq \left( \frac{\tau_1^{-1}}{\omega} \right)^y \sum_{n \geq 1} \left( r_k(\mu_n) \underbrace{(\omega E_\alpha(\sqrt{\lambda_n} L^\alpha))}_{\mu_n} \right)^{\frac{y}{2}} \lambda_n^{\frac{y}{2}} |(f_0 - u(0), \phi_n)|^2 \\ &\leq \left( \frac{\tau_1^{-1}}{\omega} \right)^y \left( \theta_{\frac{y}{2}}(k+1)^{-\frac{y}{2}} \right)^2 \|f_0 - u(0)\|_{H^{\frac{y}{4}}}^2 \\ &\leq \left( \left( \frac{\tau_1^{-1}}{\omega} \right)^{\frac{y}{2}} \right)^2 E^2 \left( \theta_{\frac{y}{2}}(k+1)^{-\frac{y}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u(y) - u^k(y)\| &\leq \left( \frac{\tau_1}{\omega} \right)^{\frac{y}{2}} E \theta_{\frac{y}{2}}(k+1)^{-\frac{y}{2}} \\ &\leq \kappa \frac{E}{(k+1)^{\frac{y}{2}}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned} \tag{4.4.49}$$

avec  $\kappa = \theta_{\frac{y}{2}} \left( \frac{\tau_1^{-1}}{\omega} \right)^{\frac{y}{2}}$ . ■

**Théorème 4.4.4.** Soient  $0 < \omega < \omega^*$  et  $f_0 \in H$  un élément arbitraire de la méthode itérative proposée et  $u^k$  (resp.  $u_\delta^k$ ) la  $k$ -ième approximation associée à la donnée exacte  $g$  (resp. perturbée  $g^\delta$ ) telle que  $\|g - g^\delta\| \leq \delta$ . Alors sous la condition  $f_0 - u(0) \in H^{y/4}$ , on a

$$\sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u_\delta^k(y)\| \leq \Theta(k, \delta) = \kappa \frac{E}{(k+1)^{\frac{y}{2}}} + \omega \delta k. \tag{4.4.50}$$

**Preuve.** On a

$$\|u(y) - u_\delta^k(y)\| \leq \underbrace{\|u(y) - u^k(y)\|}_{\Delta_1} + \underbrace{\|u^k(y) - u_\delta^k(y)\|}_{\Delta_2},$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \|u(y) - u^k(y)\| &\leq \sup_{y \in [0, +\infty[} \|u(y) - u^k(y)\| \\ &\leq \kappa \frac{E}{(k+1)^{\frac{y}{2}}}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \|u^k(\gamma) - u_\delta^k(\gamma)\| = \|S_\alpha(\gamma)G^k(f^k - f_\delta^k)\| \\ &= \left\| \omega S_\alpha(\gamma) \sum_{i=0}^{k-1} G^i(g - g^\delta) \right\| \\ &\leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i(g - g^\delta) \right\| \leq k\omega\delta.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|u(\gamma) - u_\delta^k(\gamma)\| \leq \kappa \frac{E}{(k+1)^{\frac{r}{2}}} + \omega\delta k. \quad (4.4.51)$$

Si on choisit  $k = k(\delta)$  tel que  $\omega k \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ , alors

$$\sup_{\gamma \in [0, +\infty[} \|u(\gamma) - u_\delta^k(\gamma)\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

■

**Remarque 4.4.4.** Pour accélérer la méthode itérative proposée, on utilise une variante préconditionnée de cette méthode [43, 138], qui est décrite comme suit :

$$f_{k+1} = f_k - \omega S(u^k(L) - g), \quad (4.4.52)$$

où  $S = A^{-r}$  est le conditionneur, et  $r \geq 0$ . Le paramètre de relaxation  $\omega$  est choisi de façon qu'il vérifie l'inégalité suivante :

$$0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|SE_\alpha(-L^\alpha \sqrt{A})\|}.$$

En utilisant les mêmes techniques pour établir le Théorème (4.4.3), on montre le théorème suivant.

**Théorème 4.4.5.** Soient  $0 < \omega < \omega^*$  et  $f_0 \in H$  un élément arbitraire de la méthode itérative proposée et  $u^k$  la  $k$ -ième approximation. Si  $(f_0 - u(0)) \in H^{\frac{r}{2}}$ ,  $r > 0$ , alors le taux de convergence de la méthode préconditionnée est donnée par :

$$\|u(\gamma) - u^k(\gamma)\| \leq \frac{C}{(1+k)^{\frac{r}{2r+1}}}, \quad (4.4.53)$$

$$\text{où } C = \theta_{\frac{r}{2r+1}} \left( \frac{1}{\tau_1 \omega} \right)^{\frac{r}{2r+1}} E.$$

## 4.5 Tests numériques

### Problème elliptique généralisé (Méthode itérative KM)

Dans cette partie, on donne un exemple numérique pour illustrer la faisabilité et l'efficacité de la méthode proposée. On prend des exemples académiques simples pour simplifier la tâche du calcul au logiciel MATLAB et on utilise la fonction-Matlab `ml(z,alpha,beta,gama)` programmée par R. Garrappa (Numerical evaluation of two and three parameters). Homepage : <http://www.dm.uniba.it/Members/garrappa>.

On considère le *problème inverse* suivant

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\alpha u(x, y) + u_{xx}(x, y) = 0, & x \in (0, \pi), y \in (0, +\infty), \alpha = \frac{1}{2}, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), u(x, +\infty) = 0, & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (4.5.54)$$

où  $f(x)$  est la condition inconnue et  $u(x, 1) = g(x)$  est la condition supplémentaire.

On sait que

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

est un opérateur **auto-adjoint, positif et à résolvante compacte** ( $A$  est diagonalisable). Ces couples propres  $(\lambda_n, \phi_n)$  sont donnés par

$$\lambda_n = n^2, \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce qui suit, on considère un exemple qui a une solution exacte  $(u(x, y), f(x))$ .

Si  $u(x, 0) = \frac{1}{E_{\frac{1}{2}}(-1)} \sqrt{2/\pi} \sin(x)$ , alors  $u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{y})}{E_{\frac{1}{2}}(-1)} \sin(x)$  est la solution

exacte du problème (4.5.54). Par conséquent, on a  $g(x) = u(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$ .

En ajoutant une perturbation aléatoire (obtenue par la commande de Matlab `randn`) aux données, on obtient le vecteur  $g^\delta$  :

$$g^\delta = g + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(g)),$$

où  $\varepsilon$  indique le niveau de bruit des données, la fonction "`randn(.)`" génère des valeurs aléatoires normalement distribuées dont la moyenne est égale à 0, la variance  $\sigma^2 = 1$ , et l'écart-type  $\sigma = 1$ . "`randn(size(g))`" renvoie un tableau d'entrées aléatoires de la même taille que  $g$ . La taille de l'erreur  $\delta$  est mesurée au sens de l'**erreur quadratique moyenne (EQM)** par

$$\delta = \|g^\delta - g\|_* = \left( \frac{1}{M+1} \sum_{i=1}^{M+1} (g(x_i) - g^\delta(x_i))^2 \right)^{1/2}.$$

L'erreur relative  $E_R(f)$  est donnée par

$$E_R(f) = \frac{\|f_k^\delta - f\|_*}{\|f\|_*}. \quad (4.5.55)$$

Dans ce cas, la formule de (4.3.18) prend la forme

$$f^\delta(x) = u(x, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{E_{\frac{1}{2}}(-n)} \left( \int_0^\pi g_\delta(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx). \quad (4.5.56)$$

En utilisant la méthode de différence finie centrale avec un pas  $h = \frac{\pi}{N+1}$  pour approcher la première dérivée  $u_x$  et la deuxième dérivée  $u_{xx}$ , on obtient le problème semi-discret suivant (equation différentielle ordinaire) :

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\alpha(x_i, y) - \mathbb{A}_h(x_i, y) = 0, & x_i = ih, i = 1, \dots, N, y \in (0, +\infty), \alpha = \frac{1}{2}, \\ u(x_0 = 0, y) = u(x_{N+1} = \pi, y) = 0, & y \in (0, +\infty), \\ u(x_i, 0) = f(x_i), u(x_i, +\infty) = 0, & x_i = ih, i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.5.57)$$

avec  $\mathbb{A}_h$  est la matrice de discrétisation associée à l'opérateur  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$  :

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),$$

est une matrice symétrique définie positive. On suppose que les erreurs de discrétisation sont faibles par rapport à l'incertitude  $\delta$ ; et que  $\mathbb{A}_h$  est une bonne approximation de l'opérateur différentiel  $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ , dans le sens que le caractère non-borné se reflète par la grande norme de  $\mathbb{A}_h$ . Les couples propres  $(\mu_k, e_k)$  de  $\mathbb{A}_h$  sont donnés par

$$\mu_k = 4 \left( \frac{N+1}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{k\pi}{2(N+1)} \right), \quad e_k = \left( \sin \left( \frac{jk\pi}{N+1} \right) \right)_{j=1}^N, \quad k = 1 \dots N.$$

L'approximation itérative discrète de (4.5.57) prend la forme suivante :

$$f_k^\delta(x_j) = (I - \omega A_h^{-r} E_{\frac{1}{2}}(\sqrt{A_h}))^k f_0(x_j) + \omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega A_h^{-r} E_{\frac{1}{2}}(\sqrt{A_h}))^i A_h^{-r} g^\delta(x_j), \quad (4.5.58)$$

pour  $j = 1 \dots N = 1000, k = 1, 2, 3 \dots$ . Pour simplifier les calculs, on prend  $f_0 = 0$ .

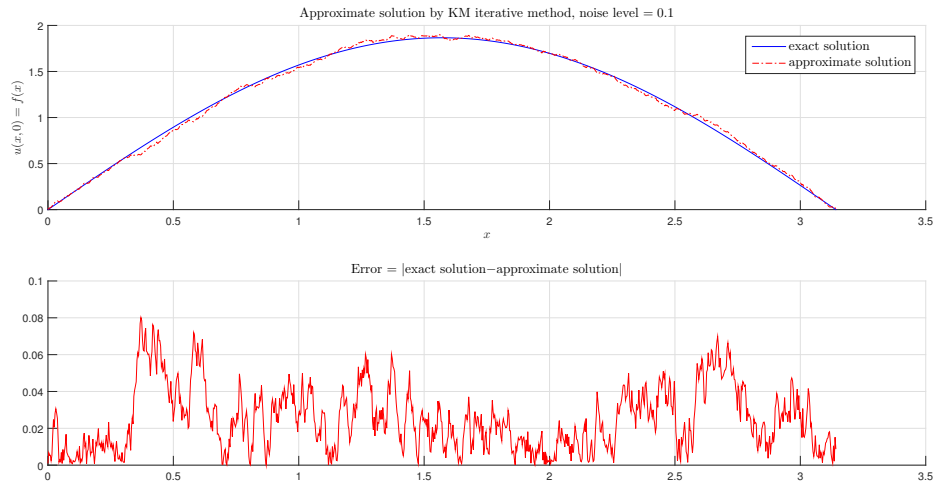


FIGURE 4.1 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.1$ ,  $k = 15$ , Preconditioner parameter :  $r = 0.5$ , Relative error :  $E_R = 0.0231$

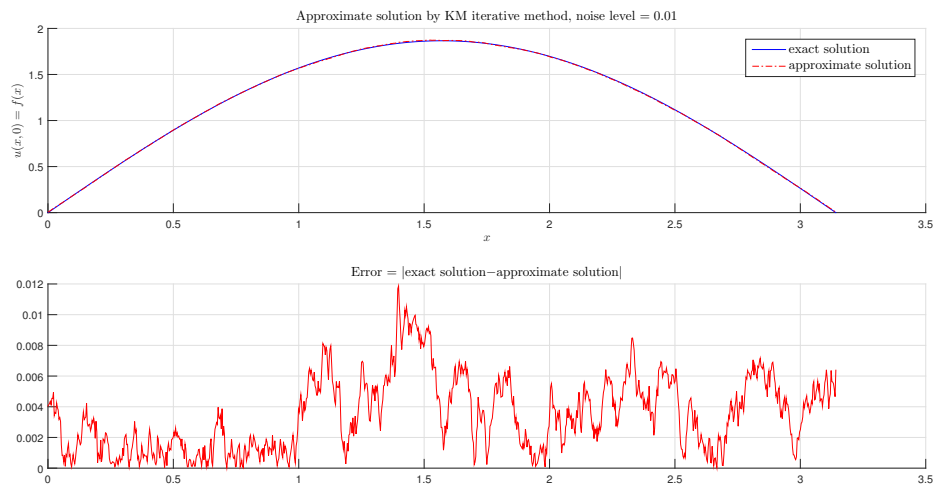


FIGURE 4.2 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.01$ ,  $k = 15$ , Preconditioner parameter :  $r = 0.5$ , Relative error :  $E_R = 0.0032$

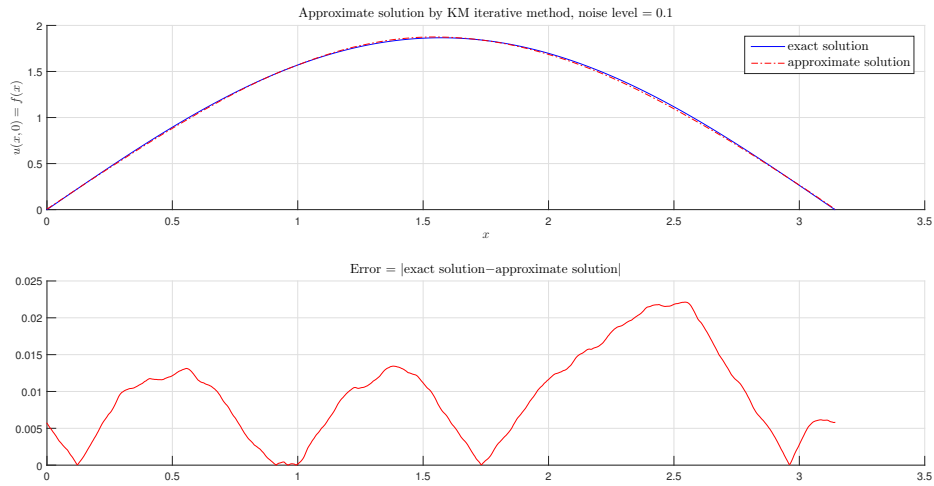


FIGURE 4.3 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.1$ ,  $k = 15$ , Preconditioner parameter :  $r = 1$ , Relative error :  $E_R = 0.0085$

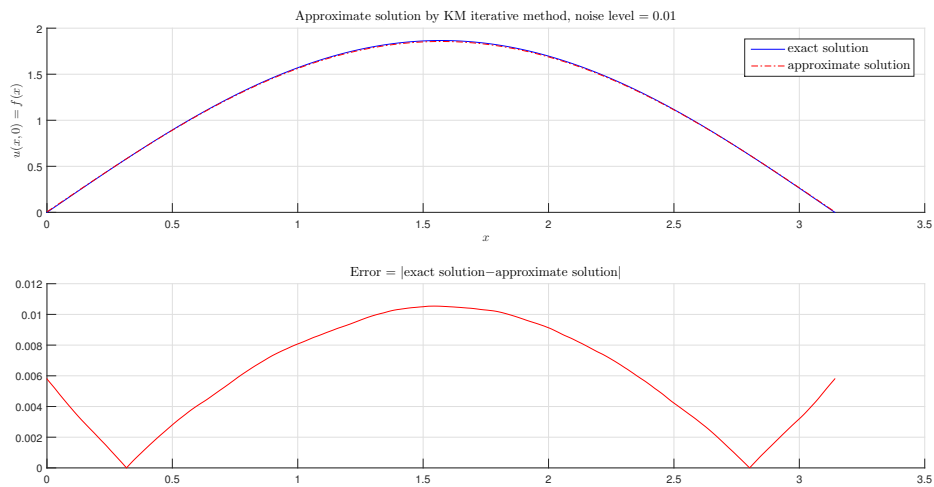


FIGURE 4.4 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.01$ ,  $k = 15$ , Preconditioner parameter :  $r = 1$ , Relative error :  $E_R = 0.0052$

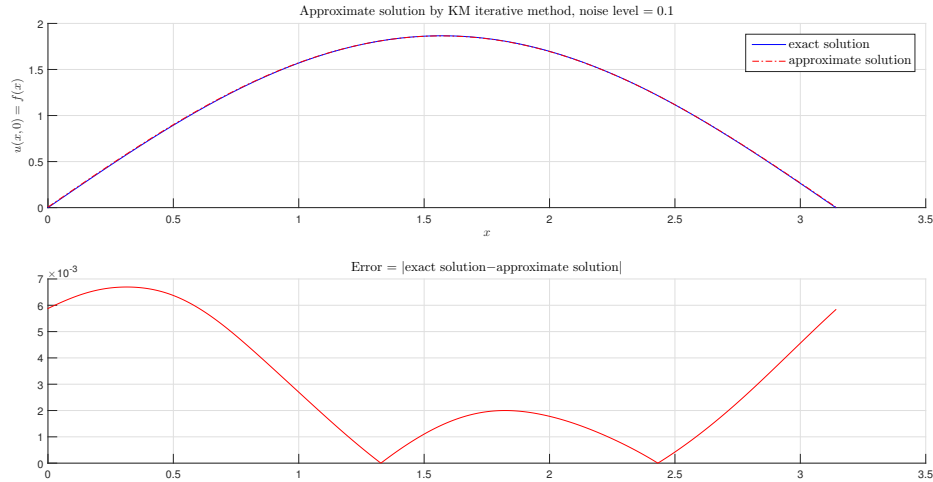


FIGURE 4.5 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.1$ ,  $k = 15$ , Preconditioner parameter :  $r = 2$ , Relative error :  $E_R = 0.0028$

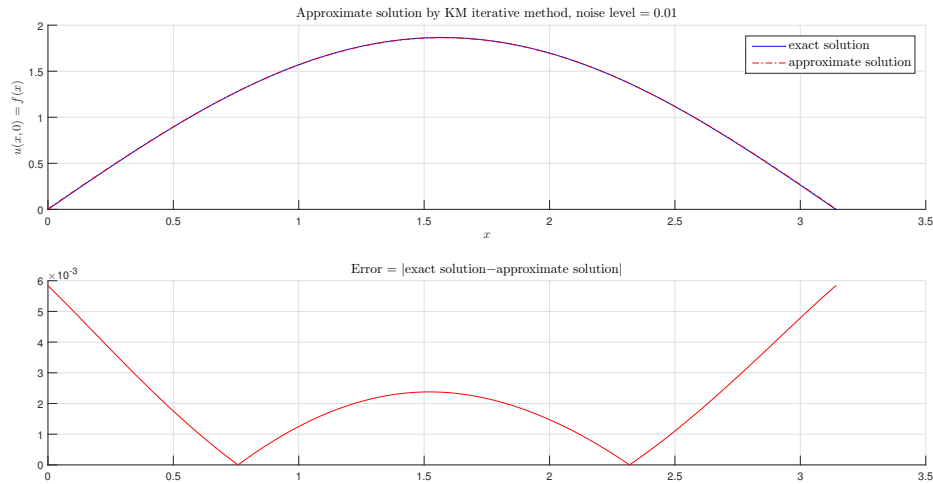


FIGURE 4.6 - Preconditioning KM iteration method : Number of iterations : Noise level :  $\delta = 0.01$ ,  $k = 15$ , Preconditioner parameter :  $r = 2$ , Relative error :  $E_R = 0.0020$

Les résultats numériques (figures 4.3, 4.4 :  $r = 1$ , 4.5, 4.6 :  $r = 2$ ) sont satisfaisants. Même avec un niveau de bruit agressif  $\delta = 0.1$ , les solutions numériques sont toujours proches de la solution exacte. Dans le cas où  $r = 0.5$  (figures 4.1, 4.2), la méthode est sensible et les résultats numériques obtenus peuvent être améliorés pour certains choix optimaux de paramètres  $N$ ,  $k$ ,  $\omega$ ,  $r$  et  $\delta$ .



## *Conclusion et perspectives*

Dans cette thèse, des méthodes de régularisation pour certaines classes d'équations de diffusion relaxée avec arguments déviés ont été développées. Dans ce contexte, deux stratégies de régularisation ont été développées. La première procédure repose sur un schéma itératif avec conditionnement appliqué à deux problèmes de diffusion relaxée (équation elliptique généralisée, équation bi-fractionnaire) et la deuxième procédure est une variante de la méthode de quasi-réversibilité, connue sous le nom "régularisation pseudo-parabolique" appliquée à une classe de problèmes paraboliques avec arguments déviés.

Comme perspectives, on projette de développer un choix du paramètre de régularisation basé sur une stratégie à posteriori accompagnée par des tests numériques. On souhaite aussi essayer d'autres méthodes, comme la méthode de projection de Krylov, et faire une étude comparative entre ces trois approches de régularisation.

On projette d'étudier des exemples définis sur des géométries de  $\mathbb{R}^3$  en utilisant des outils sophistiqués, comme les éléments finis et d'autres techniques d'approximation numérique.

Il est intéressant aussi d'étudier le problème elliptique généralisé suivant :

$$\begin{cases} D_y^\alpha D_y^\beta u - Au = 0, & 0 < y < +\infty, \\ u(0) = f, \\ u(+\infty) = 0, \end{cases}$$

où  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

On se propose d'utiliser les fonctions de Mittag-Leffer à deux paramètres et la fonction de Wright pour explorer cette piste d'approche dans l'étude de ce problème.

De manière analogue, il est intéressant d'étudier le problème inverse *fractionnaire* avec deux paramètres :

$$L_{\alpha,\beta} = \tau_1(D_t^\alpha - a_1\Delta) + \tau_2(D_t^\beta - a_2\Delta) + \mu(D_t^\alpha - a_1\Delta)(D_t^\beta - a_2\Delta),$$

et de regarder l'influence de ces deux paramètres sur le caractère d'instabilité.

Ces questions sont un peu difficiles, mais elles méritent d'être étudiées, parce que, ces modèles peuvent être considérés comme des approximations (modèles *presque réversibles*) de certains modèles classiques, lorsque  $\alpha \rightarrow 1$  et  $\beta \rightarrow 1$ . Cette motivation est inspirée des travaux récents :

[Réf.1] B. Kaltenbacher and W. Rundell, *Regularization of a backwards parabolic equation by fractional operators*, Inverse Probl. Imaging, 2019; 13(2), 401-430.

[Réf.2] G. Floridia, Zhiyuan Li, M. Yamamoto, *Well-posedness for the backward problems in time for general time-fractional diffusion equation*, arXiv :submit/3019468 [math.AP] 26 Jan 2020.

---

## Bibliographie

- [1] Abdulkerimov LS. Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space. *Azerbaijan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat.* 1977; 1, 32-36. (MR0492645) (in Russian).
- [2] Ahmad B, Alsaedi A, Kirane M, Tapdigoglu RG. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation. *Quaestiones Mathematicae*. 2017; 40(2) : 151-160.
- [3] Ames KA. On the comparison of solutions of related properly and improperly posed Cauchy problems for first order operator equations. *SIAM J. Math. Anal.* 1982; 13, 594-606.
- [4] Ames KA, Payne LE. Continuous Dependence on Modeling for Some Well-posed Perturbations of the Backward Heat Equation. *J. of Inequal and Appl.* 1999; Vol. 3, 51-64.
- [5] Ames KA, Straughan B. Non-Standard and Improperly Posed Problems. *Academic Press* 1997.
- [6] Al-Salti N, Kirane M, Torebek BT. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. 2019; 48 :3, 669-681.
- [7] Al-Salti N, Kerbal S, Kirane M. Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2019; 14, 312.
- [8] Ashyralyev A, Sarsenbi AM. Well-posedness of an elliptic equation with involution. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2015; Vol. 2015, No. 284, 1-8.
- [9] Ashyralyev A, Sarsenbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 2017; 38.10, 1295-1304.
- [10] Au VV, Kirane M, Tuan NH, On a terminal value problem for a system of parabolic equations with nonlinear-nonlocal diffusion terms, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*. 2020; 1-27, .
- [11] Baleanu D, Diethelm K, Scalas E, Trujillo JJ. Fractional Calculus : Models and Numerical Methods, *World Scientific* 2012.
- [12] Bastay G. Iterative Methods for Ill-posed Boundary Value Problems. Linköping Studies in Science and Technology. *Linköping University, Linköping*. 1995; Dissertations No. 392 .

- [13] Baumeister J, Leitao A. On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2001 ; **9**(1), 13-29.
- [14] Belan EP. Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument, *Cybernetics and Systems Analysis.* 2010 ; Vol. 46, No. 5, 772-783.
- [15] Berkowitz B, Cortis A, Dentz M, Scher H. Modeling non-Fickian transport in geological formations as a continuous time random walk. *Rev. Geophys.* 2006 ; **44**(2) :RG2003, 49 pp.
- [16] Benrabah A, Boussetila N, Rebbani F. Regularization method for an ill-posed Cauchy problem for elliptic equations. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems.* 2017 ; Vol. 25, Issue 3, 311-329.
- [17] Bonito A, Lei W and Pasciak JE. Numerical approximation of space-time fractional parabolic equations. *Comput. Methods Appl. Math.* 2017 ; **17**, 679-705.
- [18] Bourgeois L. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse Problems.* 2006 ; **22**, 413-430.
- [19] Boussetila N, Rebbani F. Optimal regularization method for ill-posed Cauchy problems. *Electron. J. Differential Equations.* 2006 ; **147**, 1-15.
- [20] Boussetila N. Thèse de Doctorat : Etude de problèmes non locaux et régularisation de problèmes mal posés en EDP, Annaba 2006.
- [21] Bouzaroura A. Etude d'une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de banach. Thèse de Doctorat (LMD), Annaba 2014.
- [22] Bouzitouna A, Boussetila N. Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type. *Bound. Value Probl.* 2013 ; **2013**, 178.
- [23] Bouzitouna A. Sur quelques méthodes itératives appliquées à certains problèmes inverses. Thèse de Doctorat (LMD), Annaba 2014.
- [24] Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. *Springer New York Dordrecht Heidelberg London* . 2011.
- [25] Brézis H. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983 .
- [26] Bulavatsky VM. Fractional of biparabolic evolution equation and some its applications. *Cybernetics and systems analysis.* 2016 ; Vol. 52, No. 5, 737-747.
- [27] Bulavatsky VM. Some nonlocal boundary-value problems for the biparabolic evolution equation and its fractional-differential analog. *Cybernetics and systems analysis.* 2019 ; Vol. 55, No. 5, 796-804.
- [28] Burlutskaya MSh, Khromov AP. Substantiation of Fourier method in mixed problem with involution. *Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform.* 2011 ; Vol.11, Issue 4, 3-12.
- [29] Burlutskaya MSh, Khromov AP. Mixed problem for simplest hyperbolic first order equations with involution. *Izv. Saratov. Univ. Mat. Mekh. Inform.* 2014 ; Vol.14, Issue 1, 10-20.
- [30] Cabada A, Tojo AF. Equations with involutions. *Atlantis Press*, 2015.

- 
- [31] Caputo M, Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure Appl. Geophys.* 1971; 91, 134-147.
- [32] Caputo M. Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent-II. *Geophys. J. Int.* 1967, 13, 529-539.
- [33] Carslaw GHS, Jaeger JC. *Conduction of Heat in solis* (Oxford Science Publications), Oxford University Press. 1986.
- [34] Chebli H. *Analyse Hilbertienne*. Centre des Publication Universitaire, Tunis 2001.
- [35] Chen DH, Hofmann B, Zou B. Regularization and convergence for ill-posed backward evolution equations in Banach spaces. *J. Differential Equations.* 2018; 265, 3533-3566.
- [36] Cheng J, Nakagawa J, Yamamoto M, Yamazaki T. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation. *Inverse Problems.* 2009; 25(11) :115002, 16.
- [37] Clarke DD, Meerschaert MM, Wheatcraft SW. Fractal travel time estimates for dispersive contaminants. *Groundwater.* 2005; 3, 401-407.
- [38] Colton D, Engel HW, Louis AK, Mc Laughlin JR, Rundell W (editors). Survey on solution methods for inverse problems. *Springer, Wien, New York.* 2000.
- [39] Courant R, Hilbert D. *Methods of mathematical physics* (2 volumes). Interscience. 1953.
- [40] Deng Y and Liu Z. Iteration methods on sideways parabolic equations. *Inverse Probl.* 2009; 25, 095004.
- [41] Djrbashian MM. *Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain*. Birkhäuser, Basel. 1993.
- [42] Dzharbashyan MM. *Integral Transformations and Representation of Functions in a Complex Domain*. In Russian, Moscow, 1966.
- [43] Egger H. Preconditioning CGNE iteration for inverse problems. *Numer. Linear Algebra Appl.* 2007; 14, 183-196.
- [44] Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geäforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Phys.* 1905; 322(8) :549-560.
- [45] Engl HW, Hanke M, Neubauer A. *Regularization of inverse problems*. Kluwer P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht. 1996.
- [46] Ewing RE. The approximation of certain parabolic equations backward in time by sobolev equations. *Siam J. Math. Anal.* 1975; Vol. 6, No. 2, 283-294.
- [47] Engel HW, Rundel W, eds. Inverse problems in diffusion processes. *SIAM, Philadelphia.* 1995.
- [48] Engel HW, Hanke M and Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. *Kluwer Academic.* 2000.
- [49] Fattorini HO. The Cauchy Problem, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. *Cambridge University Press* 1983.

- [50] Fushchich VI, Galitsyn AS, Polubinskii AS. A new mathematical model of heat conduction processes. *Ukr. Math. J.* 1990; vol.42, No.2, 210-216.
- [51] Floridia G, Li Z, Yamamoto M. Well-posedness for the backward problems in time for general time-fractional diffusion equation. *arXiv :submit/3019468* [math.AP] 26 Jan 2020.
- [52] Gajewski H, Zaczarias K. Zur regularisierung einer klass nichtkorrekter probleme bei evolutiongleichungen. *J. Math.Anal.Appl.* 1972; Vol. 38, 784-789.
- [53] Hadamard J. *Lecture note on Cauchy's problem in linear partial differential equations.* Yale Uni Press, New Haven. 1923.
- [54] Hamida S. Etude de certains problèmes inverses elliptiques et paraboliques, PhD Thesis, Annaba 2015.
- [55] Hào DN, Duc NV, Lesnic D. A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations. *Inverse Problems.* 2009; 25, 055002(27pp).
- [56] Hào DN, Giang LTT, Kabanikhin S, Shishlenin M, A finite difference method for the very weak solution to a Cauchy problem for an elliptic equation, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2018, <https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0060>
- [57] Hatano Y, Hatano N. Dispersive transport of ions in column experiments : An explanation of long-tailed profiles. *Water Res. Research.* 1998; 34(5) :1027-1033.
- [58] Hatano Y, Nakagawa J, Wang S, Yamamoto M. Determination of order in fractional diffusion equation. *J. Math. Industry.* 2013; 5(A) :51-57.
- [59] Hengartner W, Lambert M, Reischer C. *Introduction à l'analyse fonctionnelle.* Les Presses de l'Université du Québec. 1981.
- [60] Higgins JR. *Completeness and basis properties of sets of special functions.* Cambridge University Press 1977.
- [61] Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. *Germany : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.* 2000.
- [62] Huang Y, Zheng Q. Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems. *Proc. Amer.Math.Soc.* 2005; 133, 3005-3012.
- [63] Huynh LN, Zhou Y, O'Regan D, Tuan NHH, Fractional Landweber method for an initial inverse problem for time-fractional wave equations, *Applicable Analysis.* 2019, DOI : 10.1080/00036811.2019.1622682 .
- [64] Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. *Springer-Verlag.* 2006.
- [65] Jin B, Lazarov R, Liu Y, Zhou Z. The Galerkin finite element method for a multi-term time-fractional diffusion equation. *J. Comput. Phys.* 2015; 281, 825-843.
- [66] Jin B, Rundell W. A tutorial on inverse problems for anomalous diffusion processes. *Inverse Problems.* 2015; 31, 035003, 40pp.
- [67] Kalmenov TSh. Shaldanbaev A.h. Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Strong Solution for a Parabolic Equation in Reverse Time. *Vestn. Kazakh. Nar. Univ.* 2007; No. 2 (53), 58-72.

- [68] Kalmenov TSh, Iskakova UA. A Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation. *Doklady Mathematics*. 2007 ; Vol. 75, No. 3, 370-373.
- [69] Kalmenov TSh, Iskakova UA. Criterion for the Strong Solvability of the Mixed Cauchy Problem for the Laplace Equation, *Differential Equations*. 2009; Vol. 45, No. 10, 1460-1466.
- [70] Kaliev IA, Mugafarov MF, Fattahova OV. Inverse problem for forward-backward parabolic equation with generalized conjugation conditions. *Ufa Math. J.* 2011; 3 (2), 33-41.
- [71] Kaltenbacher B, Rundell W. Regularization of a backwards parabolic equation by fractional operators. *Inverse Problems and Imaging*. 2019; 13 (2), 401-430.
- [72] Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. University of California, Berkeley, Berlin Heidelberg New York. 1980.
- [73] Keller JB. Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*. 1976; 83 : 107-118.
- [74] Kirane M, Nane E, Tuan NH. On a backward problem for multidimensional Ginzburg-Landau equation with random data. *Inverse Prob.* 2018; 34(1) :21. 015008.
- [75] Kirane M, Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation. *J. Nonlinear Sci. Appl.* 2016; 9, 1243-1251.
- [76] Kirane M , Samet B, Torebek BT. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2017; 257, 1-13.
- [77] Kirane M, Sadybekov MA, Sarsenbi AA. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2019; 42 :6, 2043-2052.
- [78] Kirsch A, An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, *Springer*. 2011.
- [79] Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and applications of fractional differential equations. *Elsevier. Amsterdam* . 2006.
- [80] Khelili B. Thèse de Doctorat : Sur quelques méthodes de régularisation appliquées à une classe de problèmes de Cauchy inverses. Annaba 2018.
- [81] Klibanov MV, Santosa F. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation. *SIAM J. Appl. Math.* 1991; 51, 1653-1675.
- [82] Kolmogorov A, Fomine S. *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse Fonctionnelle*. Édition Mir. Moscou. 1973.
- [83] Kozlov VA, Maz'ya VG. On iterative procedures for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations. *Leningr. Math. J.* 1990; 1, 1207-1228.
- [84] Kozlov, VA, Maz'ya, VG, Fomin AV. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *USSR Comput. Math. Phys.* 1991; 31(1), 45-52.

- [85] Krasnosel'skii MA, Vainikko GM, Zabreiko PP, Rutitskii YB. *Approximate Solutions of Operator Equations*. Noordhoff, Groningen 1972.
- [86] Kress R, Colton D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. *Applied Mathematical Sciences, Springer* 2010.
- [87] Kulkarni SH, Nair MT. A characterization of closed range operators. *Indian J. Pure Appl. Math.* 2000; 31(4), 353-361.
- [88] Kulkarni SH, Nair MT, Ramesh G. Some properties of unbounded operators with closed range. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 2008; Vol. 118, No. 4, 613-625.
- [89] Lakhdari A, Boussetila N. An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem. *Boundary Value Problems*. 2015; 1 : 55.
- [90] Lakhdari A. Sur Quelques Méthodes de Régularisation Itératives pour une Classe de Problèmes Inverses en EDP. Thèse de doctorat (LMD), Guelma 2015.
- [91] Lattès R, Lions JL. The method of quasi-reversibility; Applications to partial differential equations. *Elsevier, New York*. 1969.
- [92] Liu JJ, Yamamoto M. A backward problem for the time-fractional diffusion equation. *Appl. Anal.* 2010; 89, 1769-1788.
- [93] Luchko Y. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation. *Comput. Math. Appl.* 2010; 59, 1766-1772.
- [94] Luchko Y. Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2011; 14, 110-124.
- [95] Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity : An Introduction to Mathematical Models. *World Scientific, Singapore*. 2010.
- [96] Mainardi F, Pagnini G, Gorenflo R. Some aspects of fractional diffusion equations of single and distributed order. *Appl. Math. Comput.* 2007; 187, 295-305.
- [97] Magin R, Feng X, Baleanu D. Fractional Calculus in NMR. *The international federation of automatic control. Seoul, Korea*. 2008.
- [98] Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity : An Introduction to Mathematical Models. *World Scientific, Singapore*. 2010.
- [99] Meerschaert M, Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004; vol. 172, no. 1,65-77.
- [100] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach. *Phys. Rep.* 2000; 339, 1-77.
- [101] Miller KS, Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1993.
- [102] Montroll EW, Weiss GH. Random walks on lattices. II. *J. Math. Phys.* 1965; 6(2) :167-181.

- [103] Morozov VA. Methods for Solving Incorrectly Posed Problems. *Springer-Verlag*. 1984.
- [104] Morozov VA. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Math. Doklady*. 1966; 7, 414-417.
- [105] Murio DA. Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations. *Comput. Math. Appl.* 2008; 56, 1138-1145.
- [106] Murio DA. Stable numerical solution of a fractional-diffusion inverse heat conduction problem. *Comput. Math. Appl.* 2007; 53, 1492-1501.
- [107] Murio DA. Time fractional IHCP with Caputo fractional derivatives. *Comput. Math. Appl.* 2008; 56, 2371-2381.
- [108] Murio DA. Stable numerical evaluation of Grünwald-Letnikov fractional derivatives applied to a fractional ihcp. *Inverse Probl. Sci. Engrg.* 2009; 17, 229-243.
- [109] Nair MT. Linear operator equations : approximation and regularization. *World Scientific*. 2009.
- [110] Nguyen AT, Au VV, Long LD, Baleanu D, Tuan NH. Regularization of a terminal value problem for time fractional diffusion equation. *Math Meth Appl Sci*. 2020; 1-29. <https://doi.org/10.1002/mma.6159>
- [111] Oldham KB, Spanier J. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York. 1974.
- [112] Podlubny I. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York. 1999.
- [113] Pollard H. The completely monotonic character of the mittag-leffler function  $E_\alpha(-x)$ . *Bull Am Math Soc*. 1948; 54, 1115-1116.
- [114] Prilepko AI, Orlovsky DG, Vasin IA. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. *New York, NY : Marcel Dekker*. 2000.
- [115] Przeworska-Rolewicz D. Sur les équations involutives et leurs applications. *Studia Mathematica*. 1961; 20, 95-117.
- [116] Przeworska-Rolewicz D. On equations with different involutions of different orders and their applications to partial differential-difference equations. *Studia Mathematica*. 1969; 32, 101-111.
- [117] Przeworska-Rolewicz D. On equations with reflection. *Studia Mathematica*. 1969; 33, 197-206.
- [118] Przeworska-Rolewicz D. On equations with rotations. *Studia Mathematica*. 1970; 35, 51-68.
- [119] Przeworska-Rolewicz D. Right invertible operators and functional-differential equations with involutions. *Demonstration Math*. 1973; 5, 165-177.
- [120] Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument. An Algebraic Approach. *Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, Elsevier Scientific Publishing and PWN-Polish Scientific Publishers, Amsterdam and Warsaw*. 1973.



- [121] Przeworska-Rolewicz D. On linear differential equations with transformed argument solvable by means of right invertible operators. *Annales Polinici Mathematici*. 1974; 29, 141-148.
- [122] Razgulin AV. The Problem of Control of a Two-Dimensional Transformation of Spatial Arguments in a Parabolic Functional-Differential Equation. *Differential Equations*. 2006; vol. 42, no. 8, 1140-1155.
- [123] Razgulin AV, Romanenko TE, Rotating Waves in Parabolic Functional-Differential Equations with Rotation of Spatial Argument and Time Delay. *Comput. Math. Math. Phys.* 2013; vol. 53, no. 11, 1626-1643.
- [124] Ruzhansky M, Tokmagambetov N, Torebek BT. Inverse source problems for positive operators. I : Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2019; 27(6) : 891-911.
- [125] Sassane R, Boussetila N, Rebbani F, Benrabah A. Iterative regularization method for an abstract ill-posed generalized elliptic equation. *Asian-European Journal of Mathematics*. 2021; 2150069 (22 pages), DOI : 10.1142/S1793557121500698.
- [126] Roumaïssa S, Nadjib B, Faouzia R. A variant of quasi-reversibility method for a class of heat equations with involution perturbation. *Math Meth Appl Sci*. 2020;1-11. <https://doi.org/10.1002/mma.6780>
- [127] Sabatier J, Agrawal OP, and Machado JAT. *Advances in Fractional Calculus*. Springer Netherlands. 2007.
- [128] Sadybekov M A, Sarsenbi AM. Criterion for the Basis Property of the Eigenfunction System of a Multiple Differentiation Operator with an Involution. *Differential Equations*. 2012; Vol. 48, No. 8, 1112-1118.
- [129] Sakamoto K, Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl.* 2011; 382, 426-447.
- [130] Samarskii AA, Vabishchevich PN. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Walter de Gruyter Berlin New York. 2007.
- [131] Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Longhorne, PA. 1993.
- [132] Kabanikhin SI. *Inverse and ill-posed problems, theory and applications*. Novosibirsk, Russia /Almaty, Kazakhstan. 2011.
- [133] Scherer, Kalla SL, Boyadjiev L and Al-Saqabi B. Numerical treatment of fractional heat equations. *Appl. Numer. Math.* 2008; 58, 1212-1223.
- [134] Shlapunov A. On iterations of non-negative operators and their applications to elliptic systems. *Math. Nachr.* 2000; 218, 165-174.
- [135] Showalter, RE, Ting TW. Pseudo-parabolic partial differential equations. *SIAM J. Math. Anal.* 1970; 1, 1-26.

- [136] Sokolov IM, Klafter J, and Blumen A. Fractional kinetics. *Physics Today*. 2002; 55(11),48-54.
- [137] Sokolov IM and Klafter J. From diffusion to anomalous diffusion : A century after Einsteins Brownian motion. *Chaos*. 2005 ; 15, 1-7.
- [138] Strand ON. Theory and methods related to the singular-function expansion and Landweber's iteration for integral equations of the first kind. *IAM J. Numer. Anal*. 1974;11 (4), 798-825.
- [139] Tapdigoglu R, Torebek BT. Global existence and blow-up of solutions of the time-fractional space-involution reaction-diffusion equation. *Turkish Journal of Mathematics*. 2020; 44 :3, 960-969.
- [140] Tikhonov AN, Arsenin VY. *Solution of Ill-posed Problems*. Winston & Sons, Washington, DC. 1977.
- [141] Tojo A, Torres P. Green's functions of partial differential equations with involutions. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 2017 ; Vol. 7, No. 3, 1127-1138.
- [142] Torebek BT, Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2017 ; 40 :18, 6468-6479.
- [143] Tuan NH, Long LD, Tatar S. Tikhonov regularization method for a backward problem for the inhomogeneous time-fractional diffusion equation. *Applicable Analysis*. 2017. <http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2017.1293815>
- [144] Tuan NH, Xuan TD, Triet NA, Lesnic D. On the Cauchy problem for a semilinear fractional elliptic equation. *Appl. Math. Lett*. 2018; doi.org/10.1016/j.aml.2018.03.016.
- [145] Tuan NH, Huynh LN, Baleanu D, Can NH. On a terminal value problem for a generalization of the fractional diffusion equation with hyper-Bessel operator. *Math Meth Appl Sci*. 2019; 1-25. <https://doi.org/10.1002/mma.6087>
- [146] Tuan NH, Baleanu D, Thach TN. On a backward problem for fractional diffusion equation with Riemann-Liouville derivative. *Math Meth Appl Sci*. 2019; 1-21. <https://doi.org/10.1002/mma.5943>
- [147] Tuan NH, Au VV, Huynh LN, Zhou Y. Regularization of a backward problem for the inhomogeneous time-fractional wave equation. *Math Meth Appl Sci*. 2020; 1-14. <https://doi.org/10.1002/mma.6285>
- [148] Turmetov BKh. Torebek BT. On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation. *New York J. Math*. 2014; 20, 1237-1251.
- [149] Varfolomeev EM. On Some Properties Of Elliptic And Parabolic Functional Differential Operators Arising In Nonlinear Optics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2008; Vol. 153, No. 5, 649-682.
- [150] Vilenkin NJa. *Functional analysis*. Wolters-Noordhoff Publishing. 1972.
- [151] Wang JG, Wei T. An iterative method for backward time-fractional diffusion problem. *Numer. Methods Partial Differ. Equ*. 2014; 30(6), 2029-2041.

- [152] Whitney ML, Theoretical and numerical study of tikhonov's regularization and Morozov's discrepancy principle, Ph.D. Thesis, Georgia State University. 2009.
- [153] Wiener J. *Generalized Solutions of Functional Differential Equations*. World Scientific Publishing. 1993.
- [154] Wyss W. The fractional diffusion equation. *J. Math. Phys.* 1986; 27, 2782-2785.
- [155] Zhang HW, Wei T. Two iterative methods for a Cauchy problem of the elliptic equation with variable coefficients in a strip region. *Numer. Algorithms*. 2014; 65, 875-892.
- [156] Zhou Y, He J, Ahmad B, Tuan NH. Existence and regularity results of a backward problem for fractional diffusion equations. *Math Meth Appl Sci*. 2019; 1-16.
- [157] Zouyed F, Djemoui S. An Iterative Regularization Method for Identifying the Source Term in a Second Order Differential Equation. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015; Article ID 713403, 1-9.