



جامعة باجبي مختار -
عنابة

BADJI MOKHTAR - ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR - ANNABA

كلية العلوم

FACULTY OF SCIENCES
FACULTE DES SCIENCES

قسم الرياضيات
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences
Spécialité : Mathématiques
Option : Statistique

**Sur Les modèles bilinéaires des séries chronologiques
Estimation et Simulation**

Par:

LAICHE Nabil

Sous la direction de

ZEGHDOUDI Halim

Prof: U. B. M. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT : Merzougui Mouna

MCA. U. B. M. Annaba

EXAMINATEUR : Ezzebsa Abdelali

MCA. U. Guelma

EXAMINATEUR : Brahim Brahim

Prof. U. Biskra

Année : 2021

**UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR –ANNABA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

En vue l'obtention du Diplôme de
Doctorat en Mathématiques

Présentée et soutenue par
NABIL LAICHE

**SUR LES MODELES BILINÉAIRES DES SÉRIES
CHRONOLOGIQUES
"ESTIMATION ET SIMULATION"**

Directeur de Thèse : Prof. Halim ZEGHDOUDI *U. Annaba*

Jury

Président : MERZOUGUI MOUNA M.C.A. **U. B. M. Annaba**

Examineur : EZZEBSA ABDELALI M.C.A. **U. Guelma**

Examineur : BRAHIMI BRAHIM Prof. **U. Biskra**

Année 2021

Remerciements

*Cette thèse est le fruit d'années de travail . Et je voudrais ici remercier **Dieu** et les nombreuses personnes qui, à des titres divers, ont participé à son élaboration. Le bon déroulement de cette thèse jusqu'à son heureux dénouement a grace mon directeur de thèse le professeur **Halim Zeghdoudi**, qui m'a dirigé et qu'il m'a laissé une certaine liberté d'action, et j'ai d'ailleurs beaucoup apprécié la confiance qu'il m'a faite. Je le remercie vivement et chaleureusement pour sa disponibilité, son dynamisme et sa patience. Je tiens ma gratitude les membres du **jury** qui ont accepté de discuter la thèse pour améliorer ce travail. et pour leur présence et leurs remarques constructives.*

*C'est aussi l'occasion de remercier mes chers **parents** et mon cher frère **Mourad** qui m'a aidé dans toutes mes périodes de vie et surtout dans des circonstances difficiles, ma femme Kaouthar et mes fille **Nada allaa et Maria**, mes sœurs et mes amis et en particulier **Jalal Bouzid** et **Mouhamed Bouazzouz**. Enfin je remercie le public pour leur présence.*

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut. . .

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, L'amour, le respect, la reconnaissance. . .

Aussi, c'est tout simplement que

Je dédie cette thèse . . .

À ma très chère soeur NADIA

À mon Père Mourad

À ma très chère épouse KAOUTHAR.

NABIL LAICHE

Résumé

Notre contribution dans cette thèse est basée sur l'estimation d'échantillons de modèles bilinéaires des séries chronologiques avec différentes méthodes ou approches (méthode de moindres carrés, maximum de vraisemblance et moments empiriques). Nous orienterons les échantillons des modèles bilinéaires avec des bruits blancs différents comme ARCH et GARCH modèles. Et pour faire une comparaison nous viserons généralement deux types de coefficients des modèles bilinéaires, le premier à coefficients constants et le deuxième à coefficients variés avec le temps. Alors ce travail permet d'étudier le comportement asymptotique des estimateurs selon chaque méthode. Puis nous validerons cette thèse par des simulations, des illustrations numériques et graphiques. L'objectif principal étant de faire une comparaison entre les méthodes d'estimation et de déterminer l'impact de la nature de bruit blanc sur les coefficients estimés des modèles.

Mots clés

Bruit blanc ARCH, modèles GARCH, Estimateurs asymptotiquement normaux, méthode des moindres carrés, modèles bilinéaires à coefficients variant dans le temps.

Abstract

Our contribution in this thesis based on the estimation of samples of bilinear models of time series with different methods or approaches (least squares method, maximum likelihood and empirical moments). We will orient samples of bilinear models with different white noise like ARCH and GARCH models. Moreover, to make a comparison we will generally aim at two types of coefficients of bilinear models, the first with constant coefficients and the second with coefficients varying with time. This work makes it possible to study the asymptotic behavior of the estimators according to each method. Then we will validate this thesis by simulations, digital and graphic illustrations. The main objective is to make a comparison between estimation methods and to determine the impact of the nature of white noise on the estimated coefficients of the models.

Key words

White noise ARCH, GARCH, Asymptotically normal estimators, least squares method, bilinear models with time varying coefficients.

ملخص

تعتمد مساهمتنا في هذه الأطروحة على تقدير عينات من النماذج ثنائية الخطوط من السلاسل الزمنية بطرق أو مناهج مختلفة (طريقة المربعات الصغرى، والاحتمالية القصوى، واللحظات التجريبية). سنقوم بتوجيه عينات النماذج ثنائية الخطوط بضوضاء بيضاء مختلفة مثل نماذج ARCH و GARCH. ولإجراء مقارنة، سنهدف بشكل عام إلى نوعين من معاملات النماذج ثنائية المعاملات، الأول له معاملات ثابتة والثاني مع معاملات متغيرة مع مرور الزمن لذا فإن هذا العمل يجعل من الممكن دراسة السلوك المقارب للمقربين وفقاً لكل طريقة. ثم سنتحقق من صحة البناء في هذه الأطروحة عن طريق المحاكاة والرسوم التوضيحية العددية والرسوم البيانية. الهدف الرئيسي هو إجراء مقارنة طرق التقدير وتحديد تأثير طبيعة الضوضاء البيضاء على المعاملات المقدره للنماذج السلاسل الزمنية

الكلمات المفتاحية

لضجيج الأبيض ARCH ، GARCH المقدرات العادية المقاربة، طريقة المربعات الصغرى، النماذج ثنائية الخطوط مع معاملات زمنية مختلفة..

Table des matières

0.1	Notations	8
0.2	Introduction	9
1	Aperçu globale sur les modèles non linéaires des séries chronologiques	12
1.1	Les modèles linéaires des séries chronologiques	12
1.1.1	Processus moyenne mobile (MA)	12
1.1.2	Processus autorégressif (AR)	13
1.1.3	Processus autorégressif moyenne mobile (ARMA)	13
1.2	Les modèles non linéaires des séries chronologiques	13
1.2.1	Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH)	14
1.2.2	Les modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisés (GARCH)	15
1.2.3	Les modèles bilinéaires des séries chronologiques (BL)	16
1.2.4	Les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (RCAR)	16
1.2.5	Les modèles autorégressifs produits (PAR)	17
1.2.6	Les modèles autorégressifs fractionnaires (FAR)	17
2	Théorie de quelques modèles bilinéaires et leur inférence statistique	18
2.1	Théorème d'existence d'une solution strictement stationnaire	19
2.1.1	Modèle bilinéaire BL(1,0,1,1)	19
2.1.2	Modèle bilinéaire BL(p,0,p,1)	20
2.2	La condition de stabilité selon la représentation vectorielle	21
2.2.1	Le modèle BL(p,q,p,2)	22
2.2.2	Condition de modèle bilinéaire purement diagonal DBL(I)	24
2.3	Inversibilité des modèles bilinéaires	25

3	Estimation des modèles bilinéaires des séries chronologiques à coefficients variant dans le temps	27
3.1	La construction des coefficients variant dans le temps	27
3.2	Etude particulière	28
3.2.1	La condition sur le cas de bruit blanc gaussien	31
3.3	Méthode de maximum de vraisemblance	32
3.4	Simulations	35
3.5	Estimation des modèles bilinéaires des séries chronologiques avec un bruit blanc GARCH	37
3.5.1	La méthode de moindres carrés	37
3.5.2	Théorème de Klimko Nilsen et l'approche d'estimation	41
3.5.3	Méthode du maximum de vraisemblance pour modèle GARCH	44
3.6	Modèles bilinéaires à coefficients ARCH	51
3.6.1	Approche du maximum de vraisemblance	56
3.7	Estimation d'un échantillon des modèles bilinéaires des séries chronologiques avec un bruit blanc ARCH	59
3.8	La méthode des moments empiriques dans l'espace des modèles bilinéaires des séries chronologique	64
3.8.1	Représentation vectorielle et propriétés dans L^2	66
3.8.2	Expression des moments et estimation des paramètres	66
3.8.3	Expression des moments	67
3.8.4	Comportement asymptotique des estimateurs	67
3.8.5	Normalité asymptotique.	69
3.9	Estimation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec approche des moments empiriques	69
3.9.1	Modèle avec une puissance de bruit	70
3.10	Modèles bilinéaires de séries chronologiques à coefficients trigonométriques	74
3.10.1	Introduction	74
3.10.2	Conclusion générale	77
4	Simulation des modèles bilinéaires et illustration numérique	78
4.1	Les critères de comparaison de modèles	78

4.2	Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec la méthode de maximum de vraisemblance	79
4.3	Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec la méthode des moments . . .	81
4.4	Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec la méthode de moindres carrés	83
4.5	Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec un bruit blanc ARCH	86
4.6	Simulation d'un modèle bilinéaire avec la méthode des moments	90
4.6.1	Commentaire	91
4.7	Annexe de quelques programmes de simulation avec l'outil Matlab	92
4.7.1	Programme d'un modèles bilinéaires avec des coefficients périodiques	92
4.7.2	Programme d'un modèle bilinéaire (7 coefficients périodiques)	95
4.7.3	Programmes d'un modèle bilinéaires avec deux régimes	98
4.7.4	Programme d'un bruit blanc GARCH	100
4.7.5	Programme d'un modèle bilinéaire avec un bruit blanc GARCH	100

0.1 Notations

E : Espérance mathématique

Var : Variance d'un échantillon

σ : Ecart type d'un échantillon

T : Transposée d'une matrice

(Ω, Γ, P) : Un espace probabilisé où Ω est un ensemble, Γ est la tribu définie sur l'ensemble Ω et P est une mesure de probabilité.

$[x]$: Partie entière de la valeur x

\otimes : Produit de Kronecker

ε_t : Bruit blanc

$Cov(X, Y)$: La covariance entre X et Y

$X \sim L$: X suit la loi L

$\|\cdot\|$: La norme d'une matrice

$X | Y$: X sachant (conditionnellement à) Y

χ : La fonction indicatrice

I_n : Matrice identité de taille $n \times n$

O_n : Matrice nulle de taille $n \times n$

0.2 Introduction

Il ne fait aucun doute que la plupart des travaux traitant de l'analyse des séries chronologiques ont principalement concerné les modèles linéaires, jusqu'à une époque récente, la théorie des modèles autorégressifs et des modèles à moyenne mobile ou les modèles autorégressifs à moyenne mobile (**ARMA**) a été bien développée voir [8]. Au cours des trois dernières décennies, une révolution en économie et en finance a ouvert la voie vers de nombreuses opportunités pour les entreprises et les sociétés, et comme les prévisions sont toujours vitales pour le monde des entreprises qui souhaitent anticiper leurs activités, leurs besoins et les moyens de répondre à la demande des clients, ce comportement a poussé la modernisation de la modélisation dans le domaine des séries temporelles. L'incompétence des modèles classiques de séries chronologiques linéaires dans la modélisation ou l'interprétation des données pour plusieurs phénomènes a provoqué à l'émergence d'une classe des modèles non linéaires.

Historiquement, L'étude des séries économiques, financières ou microéconomiques qui a conduit parallèlement statisticiens et mathématiciens à développer des modèles non linéaires, et cette innovation est née parce que la plupart des modèles en économie prennent une structure non linéaire. Et après cette période les mathématiciens ont constaté que les applications des modèles non linéaires touchent plusieurs domaines comme la biologie, l'hydrologie, la météorologie qui présentent des phénomènes proches de la théorie des oscillations. Donc l'apparition des modèles non linéaires est donc un besoin urgent de trouver des solutions aux cas non modélisés dans un cadre linéaire. Et comme les applications de ces modèles dans la vie sont infinies.

Parmi ces modèles, il y a les modèles bilinéaires des séries chronologiques qui n'ont pas fait l'objet d'une grande attention uniquement de la part des statisticiens et économistes mais des biologistes et chimistes et physiciens ... etc. Ces modèles ont introduit par **Granger** et **Andersen** en 1978 voir [16]. L'étude des modèles bilinéaires de séries chronologiques a connu un grand développement pendant presque trente ans, d'abord parce que le développement de l'économie et la finance dans le monde et aussi d'une autre manière que le phénomènes économiques et financières ont poussé les chercheurs à comprendre le comportement de l'économie et à créer leurs processus sous des formes modélisées pour en régir leurs mouvements, les applications des modèles bilinéaires sont innombrables dans plusieurs spécialités. Les applications les plus importantes des modèles bilinéaires existent en biologie, en médecine et en ingénierie, et plus précisément l'approche des modèles bilinéaires a été aussi la force de coordination de plusieurs disciplines en sciences de l'atome, ces modèles sont appropriés pour de nombreuses maladies

d'aujourd'hui qui sont de nature plus sociale voir la référence [29].

En effet, il existe aujourd'hui un très grand nombre de modèles non linéaires qui déterminent la position de plusieurs phénomènes dans la vie réelle, et on peut donner un exemple par des modèles bilinéaires lorsque ces modèles étaient un type prédominant dans l'espace des comptes chronologiques de séries expliquant la population distributions dans certains pays.

Il y a un grand nombre des problèmes ouverts concernant l'approche probabiliste et l'approche statistique restent non résolus, car la structure de plupart des modèles bilinéaires pose un problème d'étudier leurs stabilité, un certain nombre des modèles sont à généraliser. D'autre part il y a un problème d'estimation des modèles constituent plusieurs paramètres.

On peut présenter ici quelques mathématiciens célèbres qui montrent leurs trace dans ce champ, Et le plus important d'entre eux T. Subba Rao et M. M. Gabr (1984) qui ont établi des stratégies et des programmes pour estimer les coefficients des modèles bilinéaires, où leur ouvrage est une référence fondamentale pour construire une connaissance respectée dans ce domaine. Aussi T. Pham Dinh (1987) qui a utilisé une méthode appelée par la représentation markovienne qui permet d'estimer les modèles. Et D. Guegan (1984) a étudié les comportements asymptotiques des estimateurs fondés, il a laissé une thèse d'une valeur expérimentale constructive, et on n'oublie jamais le mathématicien A. Bibi qui a excellait dans cet art, il développa l'étude de certains modèles d'un côté généralisé voir [3], [4], [5].

Plusieurs études ont contribué à les modèles bilinéaires des séries chronologiques. Mais, la majorité de ces études ont été abordées théoriquement. Pour cette raison, notre objectif principal dans ce travail de thèse et de faire une estimation et simulation pour quelques échantillons des modèles bilinéaires, et ensuite on applique la programmation avec un outil de programmation (Matlab).

Présentation de mémoire

L'objet principal de cette thèse est d'établir le besoin d'une classe mathématique de modèles non linéaires appelés modèles de séries chronologiques bilinéaires. Et le contenu est présenté de manière efficace et pragmatique, ce qui le rend très accessible aux chercheurs intéressés par ce type de modèles chronologiques. Ce manuscrit est organisé en quatre chapitres. Nous commençons principalement par une introduction qui illustre généralement la valeur des modèles non linéaires de séries chronologiques, et en **premier chapitre** nous donnerons un aperçu global sur les modèles non linéaires les plus célèbres dans la littérature stochastique des séries chronologiques, avec une certaine précision par rapport aux modèles ARCH et GARCH. Dans **deuxième chapitre**, nous présenterons la théorie fondamentale des modèles bilinéaires pour utiliser l'impact de plusieurs concepts tels que la condition nécessaire de

stabilité ou de stationnarité, et la trace de la représentation vectorielle pour extraire les conditions de stationnarité. Et on abordera notre contribution dans le **troisième chapitre** où nous étudions des cas particuliers de modèles bilinéaires de modèles à temps variés et nous estimons les coefficients d'un échantillon de modèles bilinéaires avec un bruit ARCH et GARCH équilibré. Dans le **quatrième chapitre**, nous avons simulé avec des applications numériques et des types de programmes de certains modèles pour identifier certains comportements et propriétés de la théorie des estimateurs dans l'espace des modèles bilinéaires de séries temporelles.

CHAPITRE 1

Aperçu globale sur les modèles non linéaires des séries chronologiques

L'un des objectifs du statisticien est à partir de l'étude de collections d'observations de trouver un modèle qui approxime le mieux possible le vrai processus aléatoire à ces observations. Pour mener cette étude le statisticien a besoin de la notion de modèles de probabilité et donc des processus stochastiques. Dans cette section, nous donnerons un aperçu global sur les modèles des séries chronologiques les plus célèbres de la littérature statistique. Pour construire une idée principale sur des modèles non linéaires et remarquer la différence entre les modèles linéaires et non linéaires parce que le modèle cible appartient à l'ensemble des modèles non linéaires, nous commencerons par certains types de modèles linéaires.

1.1 Les modèles linéaires des séries chronologiques

Les modèles linéaires occupent une place prépondérante dans la théorie des séries chronologiques. Dans la pratique on trouve plusieurs modèles linéaires de séries chronologiques, on cite : modèles AR, modèles MA et modèles ARMA.

1.1.1 Processus moyenne mobile (MA)

Définition 1.1.1 *On appelle processus moyenne mobile d'ordre n , noté $MA(n)$, un processus $(z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant une expression de type*

$$z_t = \sum_{i=1}^n \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

Où les ψ_i sont des nombres réels et ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_t^2 .

1.1.2 Processus autorégressif (AR)

Définition 1.1.2 On appelle processus autorégressif d'ordre m , noté $AR(m)$, un processus $(z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifiant une relation du type

$$z_t = \sum_{i=1}^m \phi_i z_{t-i} + \varepsilon_t$$

Où les ϕ_i sont des nombres réels et ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_t^2 .

1.1.3 Processus autorégressif moyenne mobile (ARMA)

La plus grande partie des travaux traitant de l'analyse des séries chronologiques concernait essentiellement les modèles linéaires implicitement et explicitement les modèles gaussiens. La théorie des modèles linéaires comme les modèles autorégressifs, les modèles-moyenne mobile ou les modèles autorégressifs-moyenne mobile (ARMA) a été bien développée. En statistique on peut aussi appeler modèles ARMA par des modèles de Box-Jenkins, sont les principaux modèles de séries temporelles, le modèle ARMA est un outil pour comprendre et prédire, éventuellement, les valeurs futures des séries chronologiques. Le modèle ARMA est composé de deux parties : une part autorégressive (AR) et une part moyenne-mobile (MA).

Définition 1.1.3 On dit que le processus $(z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suit un modèle autorégressif moyenne mobile d'ordre (r, s) , noté $ARMA(r, s)$ chaque modèle vérifie l'équation stochastique suivante

$$z_t = \sum_{i=1}^r \alpha_i z_{t-i} + \sum_{j=1}^s \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Où les parties $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq r\}$ et $\{\beta_j, 1 \leq j \leq s\}$ sont des coefficients, et ε_t est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_t^2 .

1.2 Les modèles non linéaires des séries chronologiques

Les recherches des statisticiens et des économistes dans le domaine des séries temporelles, au cours des trois dernières décennies ont connu un grand succès, la croissance des applications dans l'économie pousse le développement de la modélisation d'une manière extraordinaire. Et parmi ces types de séries chronologiques, on trouve des modèles non linéaires. En 1978, Jones D. A, a introduit la classe des modèles non linéaires. Il est bien connu que les modèles de séries chronologiques non linéaires jouent un rôle utile dans la description des mécanismes ou du comportement de plusieurs phénomènes. Ainsi,

la célébrité des modèles non linéaires est apparue en raison de l'insuffisance des modèles linéaires à interpréter les données afin de créer le modèle dominant du phénomène comme par exemple les séries financières.

D'un point de vue algébrique la linéarité d'un modèle ou d'un système se traduit par les équations où n'intervienne que des sommes par contre la non linéarité va se traduire en introduisant dans les équations des multiplications entre les variable, comme la littérature des séries chronologiques est riche par des travaux modernes donc pour obtenir une meilleur connaissance des modèles bilinéaires on va prendre un 'aperçu historique globale de ces modèles. Pour la création des modèles non linéaires, on distingue deux points de vu, le premier va consister à ne considérer que des modèles dont la structure ne sera plus linéaire, l'autre est celui qui prend en compte des modèles évolutifs (ce sont des modèles non stationnaires pour lesquels la moyenne et la covariance dépendent de temps), le cas des problème issus de l'économie, de l'hydrologie, de la météorologie. Dans la suite, nous donnons les principales définitions de modèles non linéaires les plus utilisés en pratique. Premièrement on la définition générale suivante

Définition 1.2.1 *Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit autorégressif général d'ordre k s'il est généré par l'équation suivante*

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k}, \varepsilon_t), t \in \mathbb{Z}$$

Où f est une fonction non linéaire de \mathbb{R}^{k+1} à valeurs dans \mathbb{R} et ou $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc, et ε_t est indépendante de X_t pour tout $k < t$.

1.2.1 Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques (ARCH)

En économétrie, les modèles ARCH sont utilisés pour caractériser et modéliser des séries chronologiques. Ces modèles sont souvent appelés les modèles ARCH (Engle, 1982), bien qu'une variété d'autres acronymes sont appliqués à des structures particulières du modèle qui ont une base similaire. Les modèles ARCH sont employés couramment dans la modélisation de séries temporelles financières, qui comportent des volatilités variables c'est-à-dire des périodes agitées suivies par des périodes de calme relatif. Dans ces modèles, la variance conditionnelle au temps t est variable. Elle dépend par exemple du carré des réalisations précédentes du processus ou du carré des innovations. L'approche

ARCH GARCH est introduit pour éviter la lacune majeur des modèles ARMA. Cette approche est un outil puissant pour traiter les phénomènes non linéaires et les mouvements imprévisibles ou volatils du marché financier. Plus précisément, elles permettent de présenter et modéliser les séries financières. Engle inventé la généralisation du «Modèle ARCH» pour résoudre des problèmes de prévision statistique dans le domaine de la finance.

Définition 1.2.2 *Le modèle $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est défini sur un espace probabilisé (Ω, Γ, P) , est noté par $ARCH(q)$ s'il satisfait son équation suivante*

$$\varepsilon_t = z_t h_t$$

tel que

$$h_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^q \psi_i h_{t-i}^2$$

Où z_t loi de gaussienne avec moyenne nulle et variance 1, z_t est indépendant de ε_t et $\{\gamma_0, \psi_i, i = 1, \dots, q\}$ sont des coefficients de modèle, par exemple ARCH (1), nous avons

$$\varepsilon_t^2 = z_t^2 (\gamma_0 + \psi \varepsilon_{t-1}^2)$$

On peut déduire que

$$E(\varepsilon_t) = E(z_t \sqrt{\gamma_0 + \psi \varepsilon_{t-1}^2}) = E(z_t) E(\sqrt{\gamma_0 + \psi \varepsilon_{t-1}^2}) = 0$$

Et

$$E(\varepsilon_t^2) = E(z_t^2) E(\gamma_0 + \psi \varepsilon_{t-1}^2) = \gamma_0 + \psi E(\varepsilon_{t-1}^2)$$

1.2.2 Les modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive généralisés (GARCH)

En 1986, le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique généralisé GARCH (p,q) d'ordre p et q est suggéré par Bollerslev, et ce modèle est une généralisation de modèle ARCH

Définition 1.2.3 *Le modèle $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est défini sur un espace probabilisé (Ω, Γ, P) , est noté par $GARCH(p, q)$ s'il satisfait son équation suivante*

$$\varepsilon_t = z_t h_t$$

tel que

$$h_t^2 = \gamma_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{t-j}^2$$

Où z_t loi de gaussienne avec moyenne nulle et variance 1, z_t est indépendant de ε_t et $\gamma_0, \{\beta_i, i = 1, \dots, q\}$ et $\{\alpha_i, i = 1, \dots, p\}$ sont des coefficients positifs de modèle.

1.2.3 Les modèles bilinéaires des séries chronologiques (BL)

les modèles bilinéaires des séries chronologiques ont vu le jour grâce à Granger et Andersen (1978), et l'année 1985 représente une révolution scientifique et essentielle dans l'étude des modèles bilinéaires des séries chronologiques et une nouvelle orientation se dessine. En effet les recherches dans ce domaine sont très difficiles. Jusqu'à une époque récente

L'intérêt et le goût des modèles bilinéaires nous sont venus alors que nous découvrons les séries chronologiques linéaires et les limites de leur champs d'applications.

Définition 1.2.4 Le modèle $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est défini sur un espace de probabilité (Ω, F, P) , est appelé un modèle bilinéaire des séries chronologiques à coefficients constants ordre (p, q, r, s) et noté par $BL(p, q, r, s)$ si et seulement s'il satisfait à l'équation stochastique suivante

$$x_t = \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \Phi_{ij} x_{t-i} \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t$$

Où $\{a_i, i = 1, \dots, p\}$, $\{b_j, j = 1, \dots, q\}$ et $\{\Phi_{ij}, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, s\}$ sont des coefficients du modèle, et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ la partie de bruit blanc n'est pas nécessairement une variable normale $N(0, 1)$.

1.2.4 Les modèles autorégressifs à coefficients aléatoires (RCAR)

Définition 1.2.5 On dit que le processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus autorégressif d'ordre q à coefficients aléatoires, noté $ARCA(q)$ s'il est défini par une équation du type suivant

$$x_t = \sum_{i=1}^q \{B_i + \Phi_i(t)\} x_{t-i} + \varepsilon_t$$

Où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc, et les $\{B_i, i = 1, \dots, q\}$ sont des réels, et $\Phi_i(t)$ sont des variables aléatoires, $\{\Phi(t), t \in \mathbb{Z}\}$ est indépendante de $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Ces modèles ont été introduits par Andel, Nickolls et Quinn.

1.2.5 Les modèles autorégressifs produits (PAR)

Définition 1.2.6 *Les modèles autorégressifs produits ont pour expression*

$$X_t = \xi_t X_{t-1}^\alpha$$

Tel que $\alpha \in [0, 1]$ et $\xi_t = \exp(\varepsilon_t)$ où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc. Ces modèles ont été introduits par Meckenzi et actuellement presque existe des applications connues en biologie.

1.2.6 Les modèles autorégressifs fractionnaires (FAR)

Un processus $(x_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un modèle autorégressifs fractionnaires si et seulement si son équation s'écrit sous forme stochastique suivante

$$x_t = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^r a_i x_{t-i}}{b_0 + \sum_{j=1}^s b_j x_{t-j}} + \varepsilon_t$$

ε_t est un bruit blanc, et avec des condition sur les coefficients, ces modèles ont été traduisés par Jones avec une étude expérimentale pour la prediction non linéaires en météorologie voir [18]

CHAPITRE 2

Théorie de quelques modèles bilinéaires et leur inférence statistique

Construire des modèles de probabilité pour les données de séries chronologiques est une activité importante, qui permet au statisticien de comprendre le mécanisme aléatoire sous-jacent générant la série et mieux encore, ils fournissent une aide inestimable pour la prévision. On plusieurs repères historiques à la recherche dans les modèles bilinéaires par exemple, certaines références de représentation sont Andel (1976) et Nicholls et Quinn (1982), Haggan et Ozaki (1981), Tong (1983). L'une des approches de la modélisation des séries chronologiques non linéaires est le modèle bilinéaire dans le contexte des séries chronologiques. Parmi les plus célèbres de ces modèles figurent ceux qui sont connus par les modèles de séries chronologiques bilinéaires comme on peut dire l'extension de l'ARMA. Mais Subba Rao et Gabr (1981) ont donné quelques discussions générales sur les propriétés des modèles bilinéaires, notamment la stationnarité, l'invertibilité, les méthodes d'estimation. De l'autre côté la stationnarité de ces modèles, il existe de nombreuses idées différentes pour résoudre le problème d'estimation comme Pham et Tran (1981), Subba Rao et Da Silva 1989, Liu (1990), Liu et Chen (1990), les plus méthodes fréquentées appliquées pour estimer les paramètres du processus sont la méthode LS des moindres carrés Guguan et Pham (1989). Et méthode des moments MM Tang et Mohler (1988), Kim et Billard (1990). Nous commençons cette section par quelques définitions du base

Définition 2.0.1 *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit stationnaire au second-ordre si et seulement si $\forall t, h \in \mathbb{Z}$*

1. $E \{X_t^2\} < +\infty$
2. $E \{X_t\} = m$
3. $cov(X_{t+h}, X_t) = \gamma(h)$ (γ est indépendante de t)

Définition 2.0.2 *Un processus stationnaire fort est celui que l'on appelle bruit blanc : un tel processus est une suite des variables aléatoires d'espérances mathématiques nulles non corrélées*

Définition 2.0.3 *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit strictement stationnaire si les vecteurs $(X_1, \dots, X_k)'$ et $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})'$ ont même loi jointe pour tout entier k , et pour tout entier relatif h .*

Les principaux thèmes qui ont retenu l'attention des chercheurs sont l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire, l'inversibilité et l'ergodicité, la structure de la covariance et l'existence de moments d'ordre supérieur. Et de la complexité structurelle des quelques modèles peu de résultats sont généraux.

On peut distinguer trois sous classes de modèles bilinéaires

Les modèles bilinéaires diagonaux pour lesquels $b_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$, les modèles bilinéaires superdiagonaux pour lesquels $b_{ij} = 0$ si $j < i$, et les modèles bilinéaires sousdiagonaux pour lesquels $b_{ij} = 0$ si $j > i$.

La plupart des résultats dont nous disposons actuellement ne concernent en fait qu'une ou deux de ces sous-classes. Par exemple, si solution stationnaire existe alors sera un problème résolu pour certains modèles de même type.

2.1 Théorème d'existence d'une solution strictement stationnaire

2.1.1 Modèle bilinéaire BL(1,0,1,1)

Ce modèle a été étudié par Subba Rao 1981.

$$X_t = aX_{t-1} + bX_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

Théorème 2.1.1 (*Pham et Tran 1981*)

L'existence d'un processus strictement stationnaire X satisfaisant au modèle bilinéaire (2.1) si la condition $a^2 + \sigma^2 b^2 < 1$ est vérifiée, il existe alors une solution stationnaire unique qui peut être écrite comme une série infinie impliquant uniquement le présent et le passé de la forme

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-i}) \right\} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

La preuve.

On peut écrire le modèle de manière récurrente

$$\begin{aligned}
 X_t &= (a + b\varepsilon_{t-1})X_{t-1} + \varepsilon_t \\
 X_{t-1} &= (a + b\varepsilon_{t-2})X_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \\
 X_{t-2} &= (a + b\varepsilon_{t-3})X_{t-3} + \varepsilon_{t-2} \\
 &\vdots \\
 X_{t-k} &= (a + b\varepsilon_{t-k-1})X_{t-k-1} + \varepsilon_{t-k}
 \end{aligned}$$

Donc

$$X_t = \prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-i-1}) X_{t-k-1} + \sum_{j=1}^k \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-i}) \right\} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Lorsque K tend vers ∞ , nous constatons que

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \left[\prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-i-1}) \right]$$

Nous allons maintenant prouver que cette série est presque sûrement convergente, il suffit de démontrer que

$$\begin{aligned}
 E \left[\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-i-1}) \right] &\leq \sum_{j=1}^{\infty} E \left[\left\{ \prod_{i=0}^{j-1} |(a + b\varepsilon_{t-i-1})| \right\} \varepsilon_{t-j} \right] \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \max |\varepsilon_{t-j}| \prod_{i=0}^{j-1} E |a + b\varepsilon_{t-i-1}|
 \end{aligned}$$

Si $d = E |a + b\varepsilon_{t-i-1}| \leq \{E(a + b\varepsilon_{t-i-1})^2\}^{\frac{1}{2}} < a^2 + b^2 E(\varepsilon_{t-i-1}^2)$ implique que $d \leq a^2 + b^2 \sigma^2 < 1$, dans ce cas la somme sera une série géométrique de base inférieure à 1, ce qui montre que la solution est une séries convergente.

2.1.2 Modèle bilinéaire BL(p,0,p,1)

On peut aussi extraire la même condition de stabilité de modèle d'ordre BL(p,0,p,1), ce modèle on peut dire que c'est une généralisation de modèle BL(1,0,1,1) et a été discuté par Bibi et Oyet dans la référence [6]. Où ils ont montré que le modèle prends la même condition de stabilité selon Pham et Tran

$$X_t = aX_{t-p} + bX_{t-p}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Et nous allons étudier ce type des modèles bilinéaires avec extension mais avec des coefficients de temps variés, et à l'aide de [6] on trouve que son écriture récurrence sera

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor - 1} \varepsilon_{t-pj} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-ip-1}) \right\}$$

Théorème 2.1.2 *Quinn en 1982 a donné la condition suffisante et nécessaire d'existence de la solution de même modèle (2.1)*

$$E \{ \ln |a + b\varepsilon_t| \} < 0$$

Preuve. On a par recurrence

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^r \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-i}) \right\} \varepsilon_{t-j} + \left\{ \prod_{i=0}^r (a + b\varepsilon_{t-i}) \right\} X_{t-r-1}$$

Et par l'inégalité de Jensen on trouve que $E \{ \ln |a + b\varepsilon_t| \} \leq \ln E |a + b\varepsilon_t|$, et à l'aide d'inégalité de Schwartz ce sera

$$\ln \{ E(a + b\varepsilon_t)^2 \}^{0.5} \leq \ln \sqrt{(a^2 + \sigma_t^2 b^2)} < 0$$

Ce qui implique la condition de théorème précédent (Pham et Tran). ■

2.2 La condition de stabilité selon la représentation vectorielle

Subba Rao et Gabr (1981) ont donné un ensemble de conditions suffisantes pour l'existence d'un processus stationnaire X_t du second ordre satisfaisant la formule généralisée

$$X_t + \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

Il est opportun de réécrire (2.2) sous forme vectorielle, et sous cette forme vecteur nous donnons une condition suffisante pour l'existence d'un processus strictement stationnaire satisfaisant (2.2). En outre, nous pouvons facilement identifier les modèles regroupés par Subba Rao et Gabr, Pham et Tran (1981) et Guegan, comme cas spéciaux pour cette forme vectorielle générale, premièrement on a X_t^T de taille $1 \times p$ tel que $\mathbf{X}_t^T = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})$, $\mathbf{A}_{p \times p}$ et $\mathbf{B}_{p \times p}^j$ sont définis avec ordre $p \times p$ où

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{p-1} & -a_p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{p \times p} \text{ et } \mathbf{B}_{p \times p}^j = \begin{pmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \dots & b_{pj} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}_{p \times p}$$

Alors on peut voir que (2.2) est équivalent à l'équation suivante

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{C}\varepsilon_t + \mathbf{A}\mathbf{X}_{t-1} + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}^j \mathbf{X}_{t-1} \varepsilon_{t-j}$$

Pour cela on cite le théorème suivant (2.2)

Théorème 2.2.1 *La condition $\rho(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + \sigma_t^2 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) < 1$ assure l'existence de la solution de (2.2) est généré par son équation suivante*

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{C}\varepsilon_t + \sum_{r \geq 1} \prod_{j=1}^r (\mathbf{A} + \mathbf{B}\varepsilon_{t-j}) \mathbf{C}\varepsilon_{t-r}$$

Où ρ représente la valeur propre de la matrice $\mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + \sigma_t^2 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$, et ε_t une séquence de variables aléatoires indépendantes réparties de façon identique définies sur l'espace un espace de probabilité tel que $E\varepsilon_t = 0$ et $E\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2$, Lorsque le produit kronecker est défini comme suit

Définition 2.2.1 *Pour deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ d'ordre $m \times n$ et $r \times s$ respectivement. On définit le produit de kronecker de A et B par :*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

$A \otimes B$ est une matrice de taille $mr \times ns$.

Preuve. . Voir [2]. ■

2.2.1 Le modèle BL(p,q,p,2)

Le théorème suivant donne une condition suffisante

$$\underline{X}_t = \mathbf{A}\underline{X}_{t-1} + (B_1\varepsilon_{t-1} + B_2\varepsilon_{t-2})\underline{X}_{t-1} + \underline{\eta}_t \quad (2.3)$$

admette une solution stationnaire au second ordre

Théorème 2.2.2 (*Liu et Brockwell*) Soit le processus $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par 2.3 .posons :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A \otimes A + \sigma^2 B_1 \otimes B_1 & A \otimes B_2 + B_2 \otimes A & B_2 \otimes B_2 \\ \sigma^2(A \otimes B_1 + B_1 \otimes A) & \sigma^2(B_2 \otimes B_1 + B_1 \otimes B_2) & 0 \\ \sigma^2(A \otimes A + 3\sigma^2 B_1 \otimes B_1) & \sigma^2(A \otimes B_2 + B_2 \otimes A) & \sigma^2(B_2 \otimes B_2) \end{pmatrix}$$

Si

$$\lambda = \rho(\Gamma) < 1 \quad (2.4)$$

Alors l'équation 2.3 admet une unique solution causale stationnaire au second ordre donné par

$$\underline{X}_t = \underline{\eta}_t + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^n (A + B_1 \varepsilon_{t-j} + B_2 \varepsilon_{t-j-1}) \right\} \underline{\eta}_{t-n} \quad (2.5)$$

La solution est aussi strictement stationnaire, nous énonçons quelques corollaires.

Tel que λ sont des valeurs propres de Γ .

Corollaire 2.2.1 Considérons le modèle $X_t = a_1 X_{t-1} + b_{11} X_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$, tel que $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 . Alors la condition donnée se réduit dans ce

cas on a $A = a_1$ et $B_1 = b_{11}$ et $B_2 = 0$, donc

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1^2 + \sigma^2 b_{11} & 0 & 0 \\ 2\sigma^2 a_1 b_{11} & 0 & 0 \\ \sigma^2 a_1^2 + 3\sigma^4 b_{11}^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est un simple calcul montre que les valeurs propres de la matrice Γ sont $\{0, 0, a_1^2 + \sigma^2 b_{11}^2\}$, d'ou le résultat.

Corollaire 2.2.2 pour le modèle $BL(p, q, p, 1)$.

$$\underline{X}_t = A \underline{X}_{t-1} + B_1 \underline{X}_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \underline{\eta}_t \quad (2.6)$$

la condition de stabilité de ce modèle sera $\rho(A \otimes A + \sigma^2 B_1 \otimes B_1) < 1$

Preuve. Dans ce cas ,la matrice Γ prend la forme

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A \otimes A + \sigma^2 B_1 \otimes B_1 & 0 & 0 \\ \sigma^2(A \otimes B_1 + B_1 \otimes A) & 0 & 0 \\ \sigma^2(A \otimes A + 3\sigma^2 B_1 \otimes B_1) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et par conséquent ,les valeurs propres non nulles de Γ sont les même que celles de $A \otimes A + \sigma^2 B_1 \otimes B_1$.

Ainsi $\rho(\Gamma) = \rho(A \otimes A + \sigma^2 B_1 \otimes B_1)$. ■

Corollaire 2.2.3 Dans les modèles $ARMA(p, q)$, la condition 2.4 se réduit à la condition $\rho(A) < 1$.

Preuve. Dans ce cas ,les coefficients b_{ij} sont nuls et la matrice Γ prend la forme

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A \otimes A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma^2 A \otimes A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent ,les valeurs propres non nulles de Γ sont celles de $A \otimes A$.Ainsi $\rho(\Gamma) = \rho(A \otimes A) = \rho(A)$

■

Exemple Considérons le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ bilinéaire superdiagonal $BL(0, 0, p, 1)$

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p b_{i1} X_{t-i} \varepsilon_{t-1}, t \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

Où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 .soient les vecteurs $\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})'$,

$H = (1, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^p$ et les matrices carrés d'ordre p .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{21} & \cdots & b_{p1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} X_t &= H' \underline{X}_t \\ \underline{X}_t &= H \varepsilon_t + A \underline{X}_{t-1} + B \underline{X}_{t-2} \varepsilon_{t-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

La condition $\sigma^2(b_{21}^2 + \cdots + b_{p1}^2) < 1$ est nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité d'un processus stationnaire au second ordre .

Exemple [Pham et Tran] Soit le modèle bilinéaire diagonal $BL(1, 0, 1, 1)$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + b_{11} X_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.9)$$

$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2 .Alors ,une condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité d'un processus strictement stationnaire vérifiant l'équation précédente est $a_1^2 + \sigma b_{11}^2 < 1$.

2.2.2 Condition de modèle bilinéaire purement diagonal DBL(1)

On définit le modèle bilinéaire purement diagonal d'ordre l

$$X_t + \sum_{j=1}^l a_j X_{t-j} = \sum_{j=1}^l b_j X_{t-j} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2.10)$$

$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien *i.i.d.* $N(0,1)$, on a :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_l \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{B}_j = \begin{pmatrix} b_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{x}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-l+1} \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec ces notations on peut écrire le modèle (2.10) avec cette formule :

$$\begin{cases} \underline{X}_t = \underline{A}\underline{X}_{t-1} + \sum_{j=1}^l \underline{B}_j \underline{X}_{t-j} \varepsilon_{t-j} + \underline{c}\varepsilon_t \\ X_t = \underline{H} \underline{X}_t \end{cases} \quad (2.11)$$

Théorème 2.2.3 $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire asymptotiquement d'ordre un si et seulement si :

$$P(\underline{A}) = \max_{1 \leq i \leq l} \{\lambda_i(\underline{A})\} < 1 \quad (2.12)$$

$\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq l}$: Sont des valeurs propres de \underline{A} , avec cette condition est satisfait que

$$\underline{\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\mu}_t = (\underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}\underline{C} \quad (2.13)$$

On a $\underline{\mu} = E(\underline{X}_t)$, $\underline{\mu}_t = E(\underline{X}_t)$

Remarque 2.2.1 La moyenne asymptotique de X_t est

$$\underline{\mu} = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\underline{X}_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{H}' \underline{\mu}_t = \sum_{j=1}^l b_j / (1 + \sum_{j=1}^l a_j) \quad (2.14)$$

2.3 Inversibilité des modèles bilinéaires

L'inversibilité est une notion très importante dans l'étude des modèles tant linéaires que non linéaires car elle permet d'une part, de faire des prévisions et d'autre part, d'estimer dans certains cas, les paramètres des modèles, donc on s'intéresse le type de modèle

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} + (c + \sum_{i=1}^p b_i X_{t-i}) \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.15)$$

$(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien. Le modèle 2.15 peut s'écrire sous la forme vectorielle

$$\underline{X}_t = \underline{A}\underline{X}_{t-1} + \underline{B}_1 \underline{X}_{t-1} \varepsilon_{t-1} + c \underline{H} \varepsilon_{t-1} + \underline{H} \varepsilon_t \quad (2.16)$$

Et $X_t = H' \underline{X}_t$, Notons que la généralisation des résultats aux modèles bilinéaires généraux, nécessite simplement une écriture matricielle.

Théorème 2.3.1 Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc gaussien de variance σ^2 . Alors sous les conditions du corollaire de stationnarité le modèle 2.15 est inversible si et seulement si

$$E \left\{ \log \left| c + \sum_{j=1}^p b_j X_{t-j} \right| \right\} < 0 \quad (2.17)$$

Remarque 2.3.1 La présence de la partie autorégressive $\sum_{i=1}^p a_i X_{t-j}$ n'a aucun impact sur l'inversibilité du modèle. D'autre part la condition 2.17 n'est rien d'autre que l'exposant de Lyapunov associé à l'équation

$$\varepsilon_t = -\left(c + \sum_{j=1}^p b_j X_{t-j}\right) \varepsilon_{t-j} + \left(X_t - \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j}\right) \quad (2.18)$$

Remarque 2.3.2 Une condition suffisante pour l'inversibilité de modèle bilinéaire 2.17 pour chaque $t \in \mathbb{Z}$

$$c^2 + 2c\mu \sum_{j=1}^p b_j + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^p b_k b_j E \{X_{t-k} X_{t-j}\} < 1 \quad (2.19)$$

Où $\mu = E \{X_t\}$

Exemple

Soit le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ généré par $X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=2}^p b_i X_{t-i} \varepsilon_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$. Alors la condition nécessaire et suffisamment pour $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ soit stationnaire au second ordre est que $\sigma^2 \sum_{i=2}^p b_i^2 < 1$. D'autre part pour ce modèle on a $\mu = 0$ et

$$E(X_{t-k} X_{t-j}) = \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2 \sum_{i=2}^p b_i^2} \text{ si } k = j \text{ et } E(X_{t-k} X_{t-j}) = 0 \text{ si } k \neq j$$

Donc d'après 2.19 une condition suffisante d'inversibilité est $2\sigma^2 \sum_{i=2}^p b_i^2 < 1$

CHAPITRE 3

Estimation des modèles bilinéaires des séries chronologiques à coefficients variant dans le temps

Il y a plusieurs phénomènes en économie ou en physique, qui se rebellent sur les lois classiques connues représentées par les modèles stochastiques, et parmi ces modèles stochastiques nous avons les modèles avec des coefficients variant dans le temps, et parmi aussi les cas de temps varié, les coefficients périodiques et les coefficients alternatifs. Cette section est consacrée à l'étude, et à l'estimation de deux types de modèles bilinéaires connus dans la littérature statistique sous forme généralisée. Parmi les mathématiciens qui ont largement discuté de ce domaine, nous avons A. Bibi voir [6].

3.1 La construction des coefficients variant dans le temps

Définition 3.1.1 *Le processus $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ défini sur un espace de probabilité (Ω, F, P) est appelé un modèle bilinéaire à coefficients variant dans le temps des séries chronologiques d'ordre (p, q, p_0, q_0) et noté $BL(p, q, p_0, q_0)$ s'il satisfait l'équation suivante*

$$u_t = \sum_{i=1}^p a_i(a)u_{t-i} + \sum_{j=1}^q c_j(c)\varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{j=1}^{q_0} b_{ij}(b)u_{t-i}\varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Où $\{a_i(a), c_j(c), b_{ij}(b)\}$ sont des coefficients variant avec le temps, et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ le bruit blanc, se vent on peut écrire le bruit blanc sous forme $\varepsilon_t = h_t \eta_t$ où $(h_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont des nombres strictement positifs, et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une variable suit une loi gaussienne $N(0, \sigma_t^2)$, $E(\eta_t) = E(\eta_t^3) = 0$, $E(\eta_t^2) = 1$ et $E(\eta_t^4) < \infty$, et soient a, c et b des vecteurs où $a \in \mathbb{R}^{d_1}$, $c \in \mathbb{R}^{d_2}$ et $b \in \mathbb{R}^{d_3}$, alors il existe un ouvert Θ , telque $\beta = (a, c, b) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2+d_3}$. Et pour illustrer la notion des coefficients variant dans le temps, nous considérons l'exemple suivant

Exemple. Soit le le modèle bilinéaire à coefficients alternatifs d'ordre $BL(0, 0, 2, 1)$ tel que

$$u_t = b_t(b)u_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.2)$$

Et soit le vecteur $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, alors le coefficient $b_t(b) = \begin{cases} b_1 & \text{si } t \in 2\mathbb{N} \\ b_2 & \text{si } t \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$, dans ce cas on peut écrire le coefficient sous forme $b_t(b) = \frac{1+(-1)^t}{2}b_1 + \frac{1-(-1)^t}{2}b_2$, ce comportement est alternatif des coefficients.

Définition 3.1.2 On dit que $\hat{\beta}_N$ est un estimateur de β si et seulement $\hat{\beta}_N$ est une solution de

$$\arg \min q_N(\beta)$$

Où $q_N(\beta)$ présente la fonction de pénalité est définie avec son expression

$$q_N(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2(\beta)$$

Définition 3.1.3 On désigne $u_{t|t-1}(\beta)$ la projection orthogonale de u_t sur les observations jusqu'au temps $t - 1$ où

$$\varepsilon_t(\beta) = u_t - u_{t|t-1}(\beta)$$

La méthode des moindres carrés est basée sur la formule de **Taylor** du second degré, donc on a

$$q_N(\beta) = q_N(\beta^0) + (\beta - \beta^0) \frac{\partial q_N}{\partial \alpha^T}(\beta^0) + \frac{1}{2}(\beta - \beta^0) \left\{ \frac{\partial^2 q_N}{\partial \beta^T \partial \beta}(\beta^*) - \frac{\partial^2 q_N}{\partial \beta^T \partial \beta}(\beta^0) \right\} (\beta - \beta^0)^T$$

est valable à condition que $\|\beta^* - \beta^0\| < \delta$ où $\delta > 0$, β^* est un point intermédiaire entre β et β^0 , et nous donnerons les techniques de dérivation dans les exemples suivants. On appelle aussi $u_{t|t-1}(\beta)$ le prédicteur

3.2 Etude particulière

Soit le modèle bilinéaire d'ordre $BL(s, 0, s, 1)$ à coefficients variant dans le temps

$$u_t = a_t(a)u_{t-s} + b_t(b)u_{t-s}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.3}$$

Il est possible d'écrire d'une façon récurrente ce modèle proposé (3.13) comme suit

$$u_t = \sum_{j=1}^{\lfloor t/s \rfloor - 1} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} a_{t-is}(a) + b_{t-si}(b)\varepsilon_{t-is-1} \right\} \varepsilon_{t-sj} + \varepsilon_t$$

Le cas $s = 1$ donne le modèle de Pham et Gran où

$$u_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} a_{t-i}(a) + b_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1} \right\} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Et d'une manière récurrente la séquence ε_t sera

$$\varepsilon_t = u_t - \left[a_t(a)u_{t-s} + \left\{ \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{j-1} b_{t-i}(b) \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-s} \right\} \times (u_{t-j} - a_{t-j}(a)u_{t-j-s}) \right]$$

Nous supposons que nous avons N observations $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$, d'un processus $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant une condition de stabilité si et seulement si

$$a_t^2(a) + \sigma_t^2 b_t^2(b) < 1$$

C'est à dire

$$|a_t(a)| + \sigma_t |b_t(b)| < 1$$

Et soit a et b deux vecteurs telque $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, σ_t^2 la variance d'échantillon par rapport t , alors le paramètre que nous estimerons ici sera $\beta = (a, b)$ inclus dans un ouvert Θ de \mathbb{R}^{n+m} . Le problème d'intérêt comment utiliser les observations pour construire des estimateurs selon la méthode de moindres carrés pour le paramètre β , nous supposos aussi que l'ouvert Θ contient la valeur véritable β^0 . Et d'autre façon soit Φ_t la tribu engendrée par les observations $\{u_1, u_2, \dots, u_N\}$. Théorème de **Klimko** et **Nilsen** que nous allons présenter ici montrent les conditions nécessaires de l'existence et de l'unicité des estimateurs.. Nous allons écrire $\beta_1 = a_1, \beta_2 = a_2, \dots, \beta_n = a_n, \beta_{n+1} = b_1, \beta_{n+2} = b_2, \dots, \beta_{n+m} = b_m$.

Théorème 3.2.1 Soit $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stable généré par l'équation stochastique 3.13 tel que $u_{t|t-1}(\beta)$ est presque sûrement continu et différentiable dans le domaine Θ qui contient la valeur véritable β_0 de vecteur β . On suppose les constantes positives C_1 et C_2 alors les hypothèse suivants

$$\mathbf{H}_1 : E_{\beta_0} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i} \right\}^4 \leq C_1, \forall i = 1, \dots, n+m.$$

$$\mathbf{H}_2 : E_{\beta_0} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} - E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \mid \Phi_{t-1} \right) \right\}^2 \leq C_2, \forall i, j = 1, \dots, n+m.$$

$\mathbf{H}_3 : \frac{1}{2N} E_{\beta_0} \left\{ \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \mid \Phi_{t-1} \right\}$ converger comme sûrement pour la matrice M_{ij} où $1 \leq i, j \leq n+m$, et cette matrice est strictement positive des constantes.

$\mathbf{H}_4 : \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N\delta} \left| \left\{ \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right\}_{\beta=\beta^*} - \left\{ \sum_{t=1}^N \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right\}_{\beta=\beta_0} \right| < \infty$ où $i, j = 1, \dots, n+m$, et β^* est le point qui vérifie la condition $\|\beta^* - \beta_0\| < \delta$.

Alors, il existe un estimateur $\hat{\beta} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_m) \in \Theta \subset \mathbb{R}^{n+m}$ où cet estimateur adopte un comportement asymptotique vers β_0 comme $N \rightarrow \infty$, et plus de cela si

$$\mathbf{H}_5 : \frac{1}{N} \left[\left\{ \sum_{t=1}^N E_{\beta_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta^T} \mid \Phi_{t-1} \right) \right\} - \left\{ \sum_{t=1}^N E_{\beta_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta} \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta^T} \right) \right\} \right] \rightarrow 0 \text{ où } N \rightarrow \infty.$$

Preuve. Dans le cas généralisé voir [22].

Pour donner quelques discussions de la preuve de théorème, on a les théorèmes suivants

Théorème 3.2.2 *Selon la condition de stabilité de modèle (3.13), La quantité $E \left| \frac{u_{t|t-1}}{u_{t-s}} \right| < 1 < \infty$.*

La preuve. Selon le modèle généré par l'équation (3.13) on a

$$u_t = a_t(a)u_{t-s} + b_t(b)u_{t-s}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{t|t-1} &= \{a_t(a) + b_t(b)\varepsilon_{t-1}\} u_{t-s} \\ \frac{u_{t|t-1}}{u_{t-s}} &= a_t(a) + b_t(b)\varepsilon_{t-1} \end{aligned}$$

Et à travers de dernière équation on a

$$E \left| \frac{u_{t|t-1}}{u_{t-s}} \right| = E |a_t(a) + b_t(b)\varepsilon_{t-1}|$$

En utilisant l'inégalité de Shwartz

$$\begin{aligned} E \left| \frac{u_{t|t-1}}{u_{t-s}} \right| &\leq \{E |a_t(a) + b_t(b)\varepsilon_{t-1}|^2\}^{0.5} \\ &\leq a_t^2(a) + 2a_t(a)b_t(b)E(\varepsilon_{t-1}) + b_t^2(b)E(\varepsilon_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Et comme $E(\varepsilon_{t-1}) = 0$ et $E(\varepsilon_{t-1}^2) = \sigma_t^2$ on trouvera que

$$E \left| \frac{u_{t|t-1}}{u_{t-s}} \right| \leq a_t^2(a) + b_t^2(b)\sigma_t^2 < 1 < \infty$$

Cela montre que le prédicteur $u_{t|t-1}$ et u_{t-s} sont de même nature selon d'Alembert.

Théorème 3.2.3 *Sous la condition de stabilité du modèle (3.13), alors l'esperance de son prédicteur sera borné*

La preuve. On met d'abord $M = \max |\varepsilon_{t-sj}|$, et d'après l'écriture récurrente de modèle on a

$$\begin{aligned} E |u_{t|t-1}| &\leq M \sum_{j=1}^{[t/s]-1} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} E |a_{t-is}(a) + b_{t-si}(b)\varepsilon_{t-is-1}| \right\} \\ &\leq M \sum_{j=1}^{[t/s]-1} \prod_{i=0}^{j-1} \{E |a_{t-is}(a) + b_{t-si}(b)\varepsilon_{t-is-1}|^2\}^{0.5} \end{aligned}$$

Nous avons auparavant cela $\{E |a_{t-is}(a) + b_{t-si}(b)\varepsilon_{t-is-1}|^2\}^{0.5} \leq \xi < 1$, dans ce cas on trouve

$$E |u_{t,t-1}| \leq M \sum_{j=1}^{[t/s]-1} \prod_{i=0}^{j-1} \xi = M \sum_{j=1}^{[t/s]-1} \xi^j \leq M \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j$$

La dernière série est une série géométrique de base $\xi \in]0, 1[$, ce qui garantit que $E |u_{t,t-1}| < \infty$ est borné.

Théorème 3.2.4 *Si premières, deuxièmes et troisièmes dérivées partielles des coefficients $a_t(a)$ et $b_t(b)$ de modèle (3.13) existent, et bornées, alors le prédicteur $u_{t,t-1}$ accepte les trois dérivées partielles et sera borné.*

La preuve. Nous allons d'abord déterminer la dérivée de l'ordre par rapport à a_k , où $k = 1, \dots, n$, et pour $s = 1$ écriture récurrente de prédicteur sera

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{t,t-1}}{\partial a_k} &= \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \frac{\partial}{\partial a_k} \prod_{i=0}^{j-1} \{a_{t-i}(a) + b_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_{t-j} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq r}}^{j-1} \{a_{t-i}(a) + b_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}\} \frac{\partial a_{t-r}(a)}{\partial a_k} \end{aligned}$$

Et où $m = \max |\varepsilon_{t-j}|$ et comme $\left| \frac{\partial a_{t-r}(a)}{\partial a_k} \right| \leq C_0$, nous arriverons

$$E \left| \frac{\partial u_{t,t-1}}{\partial a_k} \right| \leq m C_0 \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq r}}^{j-1} E \{a_{t-i}(a) + b_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}\} < \infty$$

3.2.1 La condition sur le cas de bruit blanc gaussien

Si nous prenons $M = \max(a_t(a), b_t(b))$, et comme $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien, donc $|\varepsilon_t|$ est borné par K_0 , et K_0 pourrait à peu près égal à 4, donc $|a_t(a) + \varepsilon_t b_t(b)| \leq |a_t(a)| + |\varepsilon_t| |b_t(b)| \leq M + M K_0 = (1 + K_0)M = 5M$, où $|a_t(a) + \varepsilon_t b_t(b)| < 1$, alors on trouvera $M < \frac{1}{5}$.

On a aussi les dérivées partielles suivantes, alors $\forall i, j \in \{1, \dots, n + m\} : \varepsilon_t(\beta_i) = u_t - u_{t,t-1}(\beta_i)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i} &= -2\varepsilon_t(\beta) \frac{\partial u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} &= 2 \left\{ \frac{\partial u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_j} \frac{\partial u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} - \varepsilon_t(\beta) \frac{\partial^2 u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right\} \\ \frac{\partial^3 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_l} &= 2 \left\{ \frac{\partial^2 u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_l} \frac{\partial u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_j} + \frac{\partial u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \frac{\partial^2 u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_l} - \varepsilon_t(\beta) \frac{\partial^3 u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_l} \frac{\partial u_{t,t-1}(\beta)}{\partial \beta_j} \right\} \end{aligned}$$

Pour illustrer la dérivation on va prendre

$$u_{t|t-1}(\beta) = \left[a_t(a)u_{t-s} + \left\{ \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{j-1} b_{t-i}(b) \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-s} \right\} \times (u_{t-j} - a_{t-j}(a)u_{t-j-s}) \right]$$

3.3 Méthode de maximum de vraisemblance

Il existe déjà des méthodes établies dans la littérature pour estimer les paramètres des modèles bilinéaires des séries chronologiques stationnaires et ergodiques, les méthodes les plus fréquemment utilisées étant la méthode des moments et des moindres carrés, dans cette situation, nous appliquons la méthode du maximum de vraisemblance. Et supposons que nous ayons les observations u_1, u_2, \dots, u_N de modèle (3.13). Donc sous condition de stabilité du modèle, nous pouvons obtenir la fonction de densité $F(u_1, u_2, \dots, u_N, \Omega)$, Ω est le paramètre que nous allons estimer, tel que $\Omega = (a, b)$, cette fonction est définie comme suit

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, \dots, u_N, \Omega) &= \prod_{t=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \prod_{t=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(u_{t|t-1} - u_t)^2}{2\sigma^2} \right\} \end{aligned}$$

Pour estimer les coefficients, nous voulons obtenir une solution Ω , qui maximise la fonction de vraisemblance du logarithme Φ

$$\Phi(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} = \ln F(u_1, u_2, \dots, u_N, \Omega)$$

Alors

$$\begin{aligned} \Phi(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} &= \ln \left[\prod_{t=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(u_{t|t-1} - u_t)^2}{2\sigma^2} \right\} \right] \\ &= -N \ln \sigma - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N (u_{t|t-1} - u_t)^2 \end{aligned}$$

Si nous remplaçons la formule prédictive, nous trouvons

$$\Phi(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} = -N \ln \sigma - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{s} \rfloor - 1} \left\{ \prod_{i=1}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-pj} - x_t \right]^2$$

Et comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N}}{\partial a_l} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{s} \rfloor - 1} \left\{ \prod_{t=1}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} - x_t \right] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{s} \rfloor - 1} \frac{\partial}{\partial a_l} \left\{ \prod_{t=1}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial a_l} \left\{ \prod_{t=1}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} = \varepsilon_{t-kj} \frac{\partial}{\partial a_l} \left\{ \prod_{t=1}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\}$$

With the partial derivation

$$\alpha = \sum_{l=0}^{j-1} \varepsilon_{t-kj} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \frac{\partial p_{t-ik-l}(a)}{\partial a_l}$$

où l'entier l change entre 1 et n .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N}}{\partial b_h} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor - 1} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} - x_t \right] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor - 1} \frac{\partial}{\partial b_h} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} \end{aligned}$$

Où

$$\beta = \frac{\partial}{\partial b_h} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} = \varepsilon_{t-kj} \frac{\partial}{\partial b_h} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\}$$

On trouve

$$\beta = \sum_{h=0}^{j-1} \varepsilon_{t-kj} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq h}}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-ik-1} \frac{\partial q_{t-ik}(b)}{\partial b_h}$$

Où l'entier h change entre 1 et m . Alors $\forall (a_l, b_h) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N}}{\partial a_l \partial b_h} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=1}^N \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor - 1} \frac{\partial}{\partial b_h} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} \right] \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor - 1} \frac{\partial}{\partial a_l} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor - 1} \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial b_h} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} \\ &\quad \times \sum_{t=1}^N \left[\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor - 1} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} \right] \end{aligned}$$

Donc

$$\gamma = \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial b_h} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \varepsilon_{t-kj} = \varepsilon_{t-kj} \frac{\partial^2}{\partial a_l \partial b_h} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\}$$

Then

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{j-1} \varepsilon_{t-kj} \frac{\partial}{\partial b_h} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq l}}^{j-1} (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \right\} \frac{\partial p_{t-ik-l}(a)}{\partial a_l} \\ &= \sum_{l=0}^{j-1} \varepsilon_{t-kj} \frac{\partial p_{t-ik-l}(a)}{\partial a_l} \sum_{h=0}^{j-1} \left[\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq l \\ i \neq h}}^{j-1} \{ (p_{t-ik}(a) + \varepsilon_{t-ik-1} q_{t-ik}(b)) \} \right] \varepsilon_{t-ik-1} \frac{\partial q_{t-ik-h}(b)}{\partial b_h} \end{aligned}$$

Et puis quand on obtient les dérivées partielles de $\Phi(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N}$, nous allons donc estimer les coefficients du modèle. Laissez maintenant $\Omega = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \theta_{n+1}, \dots, \theta_{n+m})$

$$\mathbf{L}(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} = \left(\frac{\partial \Phi(u_i, \Omega)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \Phi(u_i, \Omega)}{\partial \theta_n}, \frac{\partial \Phi(u_i, \Omega)}{\partial \theta_{n+1}}, \dots, \frac{\partial \Phi(u_i, \Omega)}{\partial \theta_{n+m}} \right)^T$$

Et nous présentons une matrice de dérivées partielles de second ordre

$$\mathbf{O}(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} = \left(\frac{\partial^2 \Phi(u_i, \Omega)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n+m\}$$

Et avec l'utilisation de l'expression de Taylor pour trouver ou approcher la valeur estimée $\hat{\Omega}$, supposons donc tout d'abord que la valeur initiale de ce programme peut également dire la vraie valeur Ω^0 , tquand on cherche la solution de l'équation suivante où l'on peut trouver l'estimation de la valeur

$$\mathbf{L}(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} + \mathbf{O}(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} (\hat{\Omega} - \Omega) = 0$$

Donc, cette équation peut être réécrite comme

$$\hat{\Omega} = \Omega - \mathbf{O}^{-1}(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} \mathbf{L}(u_i, \Omega)_{i=1, \dots, N}$$

Ce programme est basé pour approximer la valeur estimée où nous pouvons appliquer l'itératif de Newton-Raphson voir [31]. La valeur de cette méthode numérique constitue la liberté de choisir la valeur initiale mais on ne peut pas quitter les conditions de stationnarité du modèle, nous posons $\Omega = \Omega^0$ alors le programme viendra

$$\begin{aligned} \Omega^1 &= \Omega^0 - \mathbf{O}^{-1}(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} \mathbf{L}(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} \\ \Omega^2 &= \Omega^1 - \mathbf{O}^{-1}(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} \mathbf{L}(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} \\ &\vdots \\ \Omega^q &= \Omega^{q-1} - \mathbf{O}^{-1}(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} \mathbf{L}(x_i, \Omega)_{i=1, \dots, N} \end{aligned}$$

Où la répétition des itératifs à chaque fois peut donner une meilleure approximation et si q tend vers l'infini alors Ω^q convergera vers la valeur estimée $\hat{\Omega}$.

3.4 Simulations

Dans cette section, nous donnerons quelques illustrations et simulations numériques d'un exemple de modèle bilinéaire avec des coefficients variant dans le temps, ce modèle est défini avec sa formule stochastique dans la partie théorique (3.13) dans le cas s=1

$$u_t = a_t(a)u_{t-1} + b_t(b)u_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \geq 1$$

Où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est le processus de bruit blanc gaussien, et $\{a_t(a), b_t(b)\}$ est une séquence de coefficients variant dans le temps où $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ sont définis par leurs expressions suivantes, et nous supposons que vérifie la condition de stabilité

$$a_t(a) = \begin{cases} a_1 & \text{si } t \in 2\mathbb{N} + 1 \\ a_2 & \text{si } t \in 2\mathbb{N} + 2 \end{cases}$$

Et

$$b_t(b) = \begin{cases} \max(b_1, b_2) & \text{si } t \in 2\mathbb{N} + 1 \\ \min(b_1 - b_2, b_2 - b_1) & \text{si } t \in 2\mathbb{N} + 2 \end{cases}$$

On a les tableaux suivants

Tableau 01 : Nombre de simulations NS=250

Taille (N)	Valeur véritable $\Omega^0 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$	Valeur estimée $\hat{\Omega} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
50	$\Omega^0 = (0.02, 0.45, 0.12, 0.25)$	(0.0304, 0.3891, 0.1651, 0.1532)
100		(0.0281, 0.4212, 0.1670, 0.1763)
250		(0.0217, 0.4348, 0.1608, 0.1880)
500		(0.0144, 0.4403, 0.1634, 0.1914)
1000		(0.0192, 0.4430, 0.1634, 0.2468)

Tableau 02 : Nombre de simulations NS=500

Taille (N)	Valeur véritable $\Omega^0 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$	Valeur estimée $\hat{\Omega} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
50	$\Omega^0 = (0.02, 0.45, 0.12, 0.25)$	(0.0226, 0.3990, 0.1215, 0.1722)
100		(0.0184, 0.4118, 0.1280, 0.2285)
250		(0.0243, 0.4276, 0.1482, 0.1835)
500		(0.0204, 0.4495, 0.1269, 0.2411)
1000		(0.0219, 0.4435, 0.1590, 0.1886)

Tableau 03 : Nombre de simulations NS=1000

Taille (N)	Valeur véritable $\Omega^0 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$	Valeur estimée $\hat{\Omega} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
50	$\Omega^0 = (0.02, 0.45, 0.12, 0.25)$	(0.0031, 0.3865, 0.1482, 0.1709)
100		(0.0057, 0.4072, 0.1545, 0.1769)
250		(0.0092, 0.4287, 0.1524, 0.1811)
500		(0.0176, 0.4391, 0.1570, 0.1849)
1000		(0.0187, 0.4436, 0.1569, 0.1884)

Tableau 04 : Où nombre des simulations NS=500

Taille (N)	Valeur véritable $\Omega^0 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$	Valeur estimée $\hat{\Omega} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
300	$\Omega^0 = (0.001, 0.55, 0.30, 0.05)$	(0.0073, 0.5278, 0.3572, 0.0371)
900		(0.0033, 0.5447, 0.3405, 0.0387)
2000		(0.0032, 0.5447, 0.3251, 0.0385)
3000		(-0.0001, 0.5467, 0.3032, 0.0484)
5000		(0.0023, 0.5529, 0.3102, 0.0493)

Tableau 05 : Où nombre des simulations NS=1000

Taille (N)	Valeur véritable $\Omega^0 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$	Valeur estimée $\hat{\Omega} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
500	$\Omega^0 = (0.82, 0.22, 0.09, 0.17)$	(0.7718, 0.2159, 0.0960, 0.1525)
1000		(0.8493, 0.2168, 0.0962, 0.1553)
2000		(0.8693, 0.2142, 0.0907, 0.1499)
5000		(0.7906, 0.2191, 0.0956, 0.1677)
10000		(0.8181, 0.2207, 0.0913, 0.1594)

Commentaires

Nos résultats présentés sur les tableaux avec une vision généralisée montrent que le comportement asymptotique des estimateurs est vérifié, où l'on constate que si la taille de l'échantillon est élevée alors les valeurs estimées convergeront vers les vraies valeurs. On constate dans le tableau que la meilleure approximation des valeurs estimées vers les vraies valeurs dans les dimensions où le nombre de simulations $s = 500$ et la taille $N = 500$.

On peut également noter que les petites valeurs vraies et leurs estimateurs sont presque identiques, en particulier pour les très grands échantillons. Il y a aussi une perturbation dans les résultats de simulation où les valeurs estimées dans le cas $s = 1000$ présentent une petite divergence par rapport aux valeurs réelles, car les coefficients prennent une situation alternative.

3.5 Estimation des modèles bilinéaires des séries chronologiques avec un bruit blanc GARCH

Méthode la moindres carrée (MC), cette méthode est une explosion de connaissances et ses applications ne sont pas terminées jusqu'à aujourd'hui, mais sa réalisation en sous-ensemble de séries chronologiques bilinéaires avec les modèles GARCH est très peu dans les références statistiques mais avec ARCH on peut voir Weiss (1986) et Pantulla (1988) voir [38], et l'estimation du GARCH avec des coefficients variant dans le temps n'existe presque pas.

3.5.1 La méthode de moindres carrés

Notre contribution dans cette section est basée d'estimer un échantillon modèles bilinéaires des séries chronologiques où leur bruit blanc suit un modèle GARCH à coefficients variables dans le temps. Nous allons construire la domiane de stationnarité pour ces modèles et nous créons une approche pour estimer leurs coefficients. Les applications de ces mmodèles ont prend une place prépondérante en finance et économie.

Définition 3.5.1 *Nous définissons le modèle GARCH(1,1) variant dans le temps par son équation stochastique suivante*

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t \eta_t \\ h_t^2 = \gamma_0 + \alpha_t(\alpha) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_t(\beta) h_{t-1}^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Où la distribution η_t suit la loi gaussienne $N(0, 1)$, les séquences $\alpha_t(\alpha)$ et $\beta_t(\beta)$ sont des coefficients variant dans le temps coefficients tout en conservant $\gamma_0 > 0$ comme une constante. h_t est indépendant du la trébu engendré par $\{\eta_{t+k}, k \geq 0\}$. Et ε_t est la fonction mesurable des variables $\eta_{t-\ell}, \ell \geq 0$. Il est bien connu que le modèle GARCH(1,1) est strictement stationnaire si et seulement si

$$-\infty \leq E \log |\alpha_t(\alpha) \eta_t^2 + \beta_t(\beta)| < 0 \quad (3.5)$$

Nous définissons la fonction φ comme suit $\varphi(\eta_t^2) = \alpha_t(\alpha) \eta_t^2 + \beta_t(\beta)$, et grâce à cette fonction, nous

pouvons écrire h_t^2 de forme

$$\begin{aligned} h_t^2 &= \gamma_0 + \alpha_t(\alpha)h_{t-1}^2\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\beta)h_{t-1}^2 \\ &= \gamma_0 + \{\alpha_t(\alpha)\eta_{t-1}^2 + \beta_t(\beta)\} h_{t-1}^2 \\ &= \gamma_0 + \varphi(\eta_{t-1}^2)h_{t-1}^2 \end{aligned}$$

La dernière expression peut s'écrire de manière récurrente sous forme

$$h_t^2 = \gamma_0 + \gamma_0 \sum_{i=1}^q \left\{ \prod_{j=1}^i \varphi(\eta_{t-j}^2) \right\} + \left\{ \prod_{j=1}^{q+1} \varphi(\eta_{t-j}^2) \right\} h_{t-q-1}^2$$

Selon les conditions de stabilité, nous pouvons démontrer que $E(h_t^2) < \infty$, la preuve sera vérifiée lorsqu'il suffit de montrer que le produit suivant est borné. On va employer l'inégalité de Jensen dans la démonstration, premièrement quand q tends vers ∞ on a

$$h_t^2 = \gamma_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^i \varphi(\eta_{t-j}^2) \right\} \right]$$

Nous pouvons prouver que $\lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{j=1}^{q+1} \varphi(\eta_{t-j}^2) \right\} = 0$, il est clair que

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow \infty} E \left\{ \prod_{j=1}^{q+1} \varphi(\eta_{t-j}^2) \right\} &\leq \prod_{j=1}^{\infty} E \{ \varphi(\eta_{t-j}^2) \} \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \{ \alpha_t(\alpha) + \beta_t(\beta) \} \end{aligned}$$

Comme $\alpha_t(\alpha) + \beta_t(\beta) = \delta < 1$ il assurera alors que $\prod_{j=1}^{\infty} \delta$ devient nul, ce qui démontre

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{j=1}^{q+1} \varphi(\eta_{t-j}^2) \right\} = 0$$

Et d'une autre manière, nous pouvons prouver que la série h_t^2 est presque sûrement convergente, si nous prenons le terme général de la série et que nous appliquons le critère de convergence de **Cauchy**, nous trouvons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{j=1}^n \varphi(\eta_{t-j}^2) \right\}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \varphi(\eta_{t-j}^2)}$$

Si v_t est une séquence variables aléatoires gaussiennes admettant une attente qui peut être infinie, alors la somme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$ est approximative vers $E(v_1)$, donc à travers cette construction en utilisant l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \varphi(\eta_{t-j}^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{E(\ln \varphi(\eta_{t-1}^2))} \\ &\leq e^{\ln E\varphi(\eta_{t-1}^2)} \\ &= e^{\ln(\alpha_t(\alpha) + \beta_t(\beta))} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Ce qui montre que la série est convergente.

Théorème 3.5.1 *le modèle $\varepsilon_t = h_t^{0.5} \eta_t$ est la solution stationnaire unique pour (3.4) sous condition de stabilité (3.5).*

Etude de stationnarité

Le modèle bilinéaire que nous allons proposer ici est

$$X_t = \phi_t(a) X_{t-s} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.6}$$

ε_t le bruit blanc suit le modèle *GARCH*(1,1) avec des coefficients variant dans temps, où a a été défini ci-dessus avec l'expression (3.4), et $\{\phi_t(a), t \in \mathbb{Z}\}$ la séquence des coefficients et a est un vecteur, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ inclus dans le sous-ensemble Θ de \mathbb{R}^m . Il est bien connu que des solutions stationnaires existent pour ce modèle si $\phi_t^2(a) E(\varepsilon_t^2) < 1$, où l'on peut donner quelques extensions de stabilité en fonction du bruit blanc, et de d'une façon récurrente ε_t s'écrit

$$\varepsilon_t = X_t + \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k \left\{ \prod_{i=0}^{k-1} \phi_{t-k-i}(a) \right\} \left(\prod_{i=0}^{k-1} X_{t-i-s} \right) X_{t-k}$$

Dans cette situation

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= E(\eta_t^2) E(h_t^2) = E(h_t^2) \\ &= \gamma_0 + \alpha_t(\alpha) E(h_{t-1}^2) E(\eta_{t-1}^2) + \beta_t(\beta) E(h_{t-1}^2) \\ &= \gamma_0 + \alpha_t(\alpha) E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_t(\beta) E(\varepsilon_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Et comme $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ on trouve $E(\varepsilon_t^2) = \frac{\gamma_0}{1 - \alpha_t(\alpha) - \beta_t(\beta)}$, tel que $\alpha_t(\alpha) + \beta_t(\beta) < 1$ alors la condition nécessaire à la stabilité du modèle sera

$$\frac{\phi_t^2(a)\gamma_0}{1 - \alpha_t(\alpha) - \beta_t(\beta)} < 1$$

Et l'expression récurrente du modèle au cas $s \neq 1$ sera

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{[t/s]-1} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \{\phi_{t-is}(a)\varepsilon_{t-is-1}\} \right] \varepsilon_{t-sj}$$

Where $[y]$ denote the integer part of value y , le modèle (3.6) sous condition de stabilité accepte l'unique solution récurrente quand $s = 1$ écrit sous forme

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \{\phi_{t-i}(a)\varepsilon_{t-i-1}\} \right] \varepsilon_{t-j} \quad (3.7)$$

Théorème 3.5.2 *La série solution de modèle (3.7) avec la condition de stabilité est presque sûrement convergente.*

Théorème 3.5.3 *Le cas $s = 1$ dans le modèle (3.6) orienté par le bruit blanc ARCH(1), et si*

$$\alpha_t(\alpha) \in [0, 1[, |\phi_t(a)| \sqrt{\frac{\gamma_0}{1 - \alpha_t(\alpha)}} < 1$$

alors le modèle accepte une solution s'écrit

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} \phi_t(a)\varepsilon_{t-i-1} \right\} \varepsilon_{t-j} = f$$

converge presque sûrement et cette solution unique et strictement stationnaire.

Théorème 3.5.4 *La condition $E \ln |\phi_t(a)\varepsilon_t| \in [-\infty, 0[$ où $s = 1$ dans le modèle (3.6) orienté par le bruit ARCH (1) implique une condition*

$$|\phi_t(a)| \sqrt{\frac{\gamma_0}{1 - \alpha_t(\alpha)}} < 1$$

Où $\alpha_t(\alpha) \in [0, 1[$.

En utilisant l'inégalité de Jensen, nous avons

$$E \ln |\phi_t(a)\varepsilon_t| \leq \ln E |\phi_t(a)\varepsilon_t|$$

et selon l'inégalité de Shwartz

$$\begin{aligned} \ln E |\phi_t(a)\varepsilon_t| &\leq \ln \{E |\phi_t(a)\varepsilon_t|^2\}^{0.5} \\ &\leq \ln \left| \phi_t(a) \left\{ \frac{\gamma_0}{1 - \alpha_t(\alpha)} \right\}^{0.5} \right| < 0 \end{aligned}$$

où l'on trouve que $\left| \phi_t(a) \left\{ \frac{\gamma_0}{1 - \alpha_t(\alpha)} \right\}^{0.5} \right| < 1$, qui termine la démonstration.

Théorème 3.5.5 *La condition $|\alpha_t(\alpha)| < 1$ et $\gamma_0 = 0$ dans le modèle ARCH(1) assure que le modèle sera borné*

On a $\varepsilon_t = \eta_t h_t$, et comme $h_t = \alpha_t(\alpha)\varepsilon_{t-1}$ on trouve avec sa formule récurrente que

$$h_{t-i} = \prod_{k=1}^i \alpha_t(\alpha)\varepsilon_{t-i-1}$$

alors $\lim_{i \rightarrow \infty} h_{t-i} = 0$ où démontrent qu'il existe M tel que $\varepsilon_t \leq M$.

3.5.2 Théorème de Klimko Nilsen et l'approche d'estimation

Ce théorème a joué un rôle fondamental pour prouver l'existence et l'unicité des estimateurs, ainsi que ses comportements asymptotiques selon l'approche des moindres carrés et avant donner son texte sous forme d'hypothèses voici quelques constructions. Premièrement on pose $H_N(X_t)$ le champs σ -tribu généré par l'ensemble des observations $\{X_t, t = 1, \dots, N\}$, les vecteurs $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n_1})$, la même chose pour les coefficients de bruit blanc que nous considérons ici les vecteurs $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_2})$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_3})$, où l'image de ces vecteurs avec leurs fonctions existe en \mathbb{R} . Ensuite, le paramètre que nous allons estimer sera $\omega = (a, \gamma_0, \alpha, \beta)$, et nous supposons ω_0 est une vraie valeur de ω inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n_1+n_2+n_3+1}$. Nous introduisons le prédicteur ou projection orthogonale $\rho_{t|t-1}$ sur les observations à temps $t - 1$ par la différence

$$\rho_{t|t-1}(\omega) = X_t - \varepsilon_t(\omega)$$

Donc, le principe de la méthode des moindres carrés est basé sur la recherche du paramètre ω , à l'aide de l'algorithme standard de la méthode de moindres carrés. On pose ici $\omega_1 = a_1, \dots, \omega_{n_1} = a_{n_1}$,

$$\omega_{n_1+1} = \gamma_0, \omega_{n_1+2} = \alpha_1, \dots, \omega_{n_1+n_2+1} = \alpha_{n_2},$$

$$\omega_{n_1+n_2+2} = \beta_1, \dots, \omega_{n_1+n_2+n_3+1} = \beta_{n_3}.$$

Théorème 3.5.6 *Sous condition de stabilité de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ généré par l'équation (3.6), et en ajoutant que $|\phi(a)| < 1$, et son bruit blanc suit un GARCH (1,1), défini par l'équation (3.4), nous supposons que $\rho_{t|t-1}(\omega)$ est presque sûrement deux fois continu différenciablement dans un sous-ensemble ouvert qui contient la vraie valeur ω_0 de vecteur ω . Nous supposons deux constantes K_0 et K_1 telles que*

- a) $E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i} \right\}^4 \leq K_0, i = n_1 + n_2 + n_3 + 1.$
- b) $E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} - E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \mid H_{t-1} \right\} \right\}^2 \leq K_1, i, j = n_1 + n_2 + n_3 + 1.$
- c) $\frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \mid H_{N-1} \right\}$ converger presque sûrement vers la matrice $M(\omega)$ strictement positif.
- d) $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{\delta \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\delta N} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right)_{\omega=\tilde{\omega}} - \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right)_{\omega=\omega_0} \right] \right| \right\} < \infty$, où $\|\omega - \omega_0\| < \delta, \delta > 0.$

Il existe alors un estimateur où $\hat{\omega}_N \rightarrow \omega_0$ quand $N \rightarrow \infty$ et si ces conditions sont remplies on arrivera l'hypothèse suivante

e) $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega^T} \mid H_{t-1} \right\} - E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega^T} \right\} \right] \rightarrow 0$ as $N \rightarrow \infty.$

Preuve

Nous prouverons quelques éléments de ce théorème selon le modèle proposé. Tout d'abord, nous allons donner quelques techniques pour calculer les dérivés, nous avons donc

$\frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i} = -2\varepsilon_t(\omega) \frac{\partial \varepsilon_t(\omega)}{\partial \omega_i} = -2\varepsilon_t(\omega) \frac{\partial \rho_{t|t-1}(\omega)}{\partial \omega_i}$, alors $\delta E_{\omega_0} \{ \varepsilon_t^4(\omega) \} E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial \rho_{t|t-1}(\omega)}{\partial \omega_i} \right\}^4$ dans le cas $s = 1$ nous trouverons

$$\rho_{t|t-1}(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \{ \phi_{t-i}(a) \varepsilon_{t-i-1} \} \right] \varepsilon_{t-j}$$

D'après la situation $\omega_p = a_p, p = 1, \dots, n$ nous utiliserons

$$\frac{\partial \rho_{t|t-1}(\omega)}{\partial \omega_i} = \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k \left\{ \frac{\partial}{\partial a_i} \prod_{i=0}^{k-1} \phi_{t-k}(a) \right\} \left(\prod_{i=0}^{k-1} X_{t-i-s} \right) X_{t-k}$$

Et comme $Z_1 = \frac{\partial}{\partial a_p} \prod_{i=0}^{k-1} \phi_{t-k}(a) = \sum_{p=0}^{k-1} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right\} \frac{\partial \phi_{t-p}(a)}{\partial a_p}$, on pose $q = \max \left\{ \frac{\partial \phi_{t-i}(a)}{\partial a_p} \right\}$ et $|\phi_{t-i}(a)| \leq \theta < 1$ alors ce sera

$$|Z_1| \leq q(k)\theta^{k-1}$$

Nous constaterons que

$$\left| \frac{\partial \rho_{t|t-1}(\omega)}{\partial \omega_i} \right| \leq \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k q(k)\theta^{k-1} \left(\prod_{i=0}^{k-1} |X_{t-i-s}| \right) |X_{t-k}| < \infty$$

$E \left| \frac{\partial \rho_t |t-1(\omega)}{\partial \omega_i} \right| < \infty$. Auparavant, nous avons où $E \{ \varepsilon_t^2(\omega) \} = E \{ \eta^2 \} E(h_t^2)$, $E(h_t^2)$ toujours borné alors, $E \{ \varepsilon_t^4(\omega) \} < \infty$, alors nous arriverons $E_{\omega_0} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_i} \right\}^4 \leq K_0$ ce qui finalisera correctement l'hypothèse. Comme l'ont montré Weiss (1986) et Pantula (1988), les estimateurs des moindres carrés pour les modèles ARCH sont uniformes et asymptotiquement normaux, mais moins efficaces que la méthode généralisée des moments (GMM) et l'estimation du maximum de vraisemblance (MLE) voir Hamilton (1994) d'après la référence [20]. Mais ici nous appliquerons la méthode des moindres carrés en situation de coefficients variant dans le temps.

Définition 3.5.2 Nous disons $\hat{\omega}_N$ un estimateur pour ω si et seulement si $\hat{\omega}_N$ soit une solution pour l'expression

$$\arg \min_{\omega \in \Omega} q_N(\omega)$$

Où $q_N(\omega)$ est la fonction de pénalité définie par l'expression

$$q_N(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2(\omega)$$

La méthode des moindres carrés est basée sur la formule de Taylor, donc pour tout $i, j \in \{1, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + 1\}$ on a

$$q_N(\omega) = q_N(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{\partial q_N}{\partial \omega^T}(\omega_0) + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0) \frac{\partial^2 q_N}{\partial \omega^T \partial \omega}(\tilde{\omega}) (\omega - \omega_0)^T$$

Où T représente la transposée d'une matrice, et $\tilde{\omega}$ est un point intermédiaire entre ω et ω_0 au sens de la norme que nous avons $\|\omega - \tilde{\omega}\| \leq \delta$, $\delta > 0$, il est clair que le dérivée $\frac{\partial q_N(\omega)}{\partial \omega_i}$ est un vecteur avec $n_1 + n_2 + n_3 + 1$ coordonnées, et $\frac{\partial^2 q_N(\omega)}{\partial \omega_i \partial \omega_j}$ la matrice de taille $(n_1 + n_2 + n_3 + 1)^2$, nous donnerons ici les techniques de dérivation pour illustrer le principe de l'approche. Pour être $\omega_\ell = a_\ell$, $\ell = 1, \dots, n_1$ on a $\frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_\ell} = 2\varepsilon_t(\omega) \frac{\partial \varepsilon_t(\omega)}{\partial \omega_\ell}$ Où

$$\frac{\partial \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_\ell} = \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right\} \frac{\partial \phi_{t-\ell}(a)}{\partial a_\ell} \right\} \left(\prod_{i=0}^{k-1} X_{t-i-s} \right) X_{t-k}$$

Pour la dérivée seconde pour tout $\omega_\ell = a_\ell$ et $\omega_u = a_u$ tel que $\ell, u \in \{1, \dots, n_1\}$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\omega)}{\partial \omega_\ell \partial \omega_u} = \sum_{k=1}^{t-1} (-1)^k \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial \omega_u} \left\{ \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right) \frac{\partial \phi_{t-\ell}(a)}{\partial a_\ell} \right\} \left(\prod_{i=0}^{k-1} X_{t-i-s} \right) X_{t-k}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial \omega_u} \left\{ \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right) \frac{\partial \phi_{t-\ell}(a)}{\partial a_\ell} \right\} = \frac{\partial}{\partial \omega_u} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right) \frac{\partial \phi_{t-\ell}(a)}{\partial a_\ell} + \frac{\partial^2 \phi_{t-\ell}(a)}{\partial a_\ell \partial a_u} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right)$$

Tel que

$$\frac{\partial}{\partial a_u} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right) = \sum_{n=0}^{k-1} \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq p, i \neq z}}^{k-1} \phi_{t-i}(a) \right) \frac{\partial \phi_{t-n}(a)}{\partial a_u}$$

Nous appliquons la formule du bruit blanc $\varepsilon_t = \eta_t h_t$. Et nous avons connu précédent sous condition de stabilité de ε_t que $E(h_t^2) < \infty$. Puis avec l'inégalité de schwartz $E|h_t| \leq \{E(h_t^2)\}^{0.5} < \infty$ qui assure $|h_t| < \infty$, cette information montrent qu'il existe une convergence entre h_t et h_{t-1} dans le cas , nous pouvons renforcer cette idée dans une situation où $\gamma_0 = 0$, ce cas, l'expression récurrente donnera

$$h_{t-i}^2 = \prod_{k=1}^i \frac{\alpha_{t-k}(\alpha)}{1 - \beta_{t-k}(\beta)} \varepsilon_{t-i-1}^2$$

Le résultat sera donc $\lim_{i \rightarrow \infty} h_{t-i}^2 = 0$, alors.

3.5.3 Méthode du maximum de vraisemblance pour modèle GARCH

L'approche du maximum de vraisemblance (MMV) a été appliquée dans certaines références où les modèles bilinéaires prennent un bruit GARCH blanc, mais l'étude d'une situation où ses coefficients changent avec le temps n'existe presque pas, le concept de coefficients variables dans le temps prend plusieurs dimensions dans les applications, car il y a des phénomènes physiques qui se rebellent sur les lois de la physique classique, où l'on constate que les coefficients ne sont pas des constantes mais prennent une situation variable dans le temps. En finance plusieurs modèles prennent la situation de variation des coefficients dans le temps, par exemple les modèles les plus connus sous forme de coefficients variables dans le temps, il existe des modèles à coefficients alternatifs. Nous allons estimer les coefficients en utilisant (MMV), soit le modèle bilinéaire défini par son expression suivante Among the best estimation approaches

$$x_t = ax_{t-s} + bx_{t-s}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.8}$$

L'ordre de ce modèle est $BL(s, 0, s, 1)$ où $s \geq 1$, et son bruit blanc suit un modèle $GARCH(1, 1)$ défini avec son équation

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \eta_t h_t \\ h_t^2 = \gamma_0 + \beta_t(\beta) \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_t(\alpha) h_{t-1}^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Si l'on considère $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ alors, la condition nécessaire de stabilité du modèle (3.8) sera $a^2 + \sigma_t^2 b^2 < 1$ see [6], et il est bien clair que la condition de stabilité est équivalente à la condition $|a| + |b| \sigma_t < 1$, nous pouvons écrire le modèle sous l'expression récurrente suivante

$$x_t = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{s} \rfloor} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (a + b \varepsilon_{t-si-1}) \right\} \varepsilon_{t-sj} + \varepsilon_t \quad (3.10)$$

Où nous désignons $\lfloor \frac{t}{s} \rfloor$ pour la valeur entière de $\frac{t}{s}$, donc globalement le paramètre que nous allons estimer $\theta = (a, b, \gamma_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, et nous supposons que le bruit blanc suit la loi $N(0, E(\varepsilon_t^2))$, d'abord pour construire le principe de l'approche d'estimation que nous avons

$$E(\varepsilon_t^2) = E(\eta_t^2) E(h_t^2) = E(h_t^2)$$

Parce qu'auparavant, nous avons $E(\eta_t^2) = 0$, et d'une autre manière, nous constatons que

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t^2) &= E \{ \gamma_0 + \beta_t(\beta) \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_t(\alpha) h_{t-1}^2 \} \\ &= \gamma_0 + \beta_t(\beta) E(\varepsilon_{t-1}^2) + \alpha_t(\alpha) E(h_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Et comme $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$, ce qui nous pousse à déduire l'expression suivante

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\gamma_0}{1 - \beta_t(\beta) - \alpha_t(\alpha)}$$

Dans cette situation, la condition de stabilité du modèle sera

$$|a| + \frac{|b| \gamma_0}{1 - \beta_t(\beta) - \alpha_t(\alpha)} < 1$$

Où $\beta_t(\beta) + \alpha_t(\alpha) < 1$ et selon le théorème suivant qui assure la stabilité du bruit blanc GARCH (1,1), nous savons déjà que la condition $C = E \log \{ \alpha_t(\alpha) h_t^2 + \beta_t(\beta) \} \in [-\infty, 0[$ assure l'existence de la solution unique et stationnaire pour GARCH (1,1) model (la condition C équivalente de condition $-\infty \leq E \log \{ \alpha_t(\alpha) h_t^2 + \beta_t(\beta) \} < 0$).

Preuve voir [10].

Proposition 3.5.1 *Le modèle généré par son expression (3.8) est convergent par sa condition de stabilité.*

Preuve

Il suffit de démontrer que $\rho = E\{|x_t|\} < \infty$, aet il suffit également de prouver la proposition de $s = 1$, et avec l'application de l'inégalité de Schwartz, nous constaterons que

$$\begin{aligned} \rho &= E \left| \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (a + b\varepsilon_{t-i-1}) \right\} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \{E(\varepsilon_{t-j}^2)\}^{0.5} \prod_{i=0}^{j-1} \{E(a + b\varepsilon_{t-i-1})^2\}^{0.5} \end{aligned}$$

Nous donnons ici un peu de preuves

$$\begin{aligned} E(a + b\varepsilon_{t-i-1})^2 &= E(a^2 + b^2\varepsilon_{t-i-1}^2 + 2ab\varepsilon_{t-i-1}) \\ &= a^2 + b^2E(\varepsilon_{t-i-1}^2) \end{aligned}$$

Et selon la condition de stabilité $a^2 + b^2E(\varepsilon_{t-i-1}^2) \leq \delta < 1$ et nous avons mis $M = \max E(\varepsilon_{t-j}^2)$ alors

$$\rho \leq M \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \delta = M \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \leq \frac{M\delta}{1 - \delta}$$

Ce qui finalise la preuve.

Dans cette section nous allons estimer a et b du modèle fourni par un bruit blanc GARCH (1,1) selon la méthode du maximum de vraisemblance, afin de vérifier l'impact ou la trace de ce bruit blanc sur l'estimation. Et aussi pour faire une extension de l'estimation, nous supposons que les coefficients prennent une situation alternative comme ci-dessus, et nous résumons l'expression des coefficients comme suit

$$\beta_t(\beta) = \begin{cases} \beta_1, & t \text{ impair} \\ \beta_2, & t \text{ pair} \end{cases}, \quad \alpha_t(\alpha) = \begin{cases} \alpha_1, & t \text{ impair} \\ \alpha_2, & t \text{ pair} \end{cases}$$

Où $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. Bibi et Oyet dans référence [?] a constaté que le bruit blanc du modèle (3.8) peut être écrit de façon récurrente sous forme

$$\varepsilon_t = x_t - ax_{t-s} + \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j b^j \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} x_{t-i-s} \right\} (x_{t-j} - ax_{t-j-s}) \tag{3.11}$$

Nous estimerons les coefficients en utilisant (MMV) pour le modèle suivant, nous supposons les observations $\{x_t, t = 1, \dots, N\}$. Le point de départ est la spécification de la densité conditionnelle des

résidus ε_t , nous avons d'abord la distribution normale a été supposée. Soyons le modèle proposé dans ce papier, où nous supposons la forme de densité conditionnelle suivante

$$\Phi_{\theta}(\varepsilon_t | F_{t-1}) = \prod_{i=0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi y_t(\theta)}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{y_t(\theta)} \right\}$$

ε_t est le bruit blanc GARCH (1,1) défini par son équation 3.9. On peut résumer ici les coefficients sur \mathbb{N}^* avec ces expressions

$$\beta_t(\beta_1, \beta_2) = \frac{1 - (-1)^t}{2} \beta_1 + \frac{1 + (-1)^t}{2} \beta_2, t \geq 1$$

Et

$$\alpha_t(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1 - (-1)^t}{2} \alpha_1 + \frac{1 + (-1)^t}{2} \alpha_2, t \geq 1$$

La construction $y_t(\theta)$ est donné lorsque nous définissons $h_{t-1} = h_t$, où cette construction permet d'estimer les coefficients du modèle (3.8). Donc quand on met $y_t = h_t^2$ nous arriverons

$$y_t = \frac{\gamma_0 + \beta_t(\beta) \varepsilon_{t-1}^2}{1 - \alpha_t(\alpha)}$$

Pour estimer les paramètres du modèle, nous voulons obtenir une solution θ qui maximisent la fonction de vraisemblance du logarithme

$$G(\theta) = \ln \{ \Phi_{\theta}(\varepsilon_t | F_{t-1}) \}$$

Alors

$$G(\theta) = \sum_{t=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \ln(y_t(\theta)) - \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2y_t(\theta)} \right\} - N \ln 2\pi$$

Pour illustrer les techniques de dérivation que nous avons

$$\Psi_t(\theta) = -\frac{1}{2} \ln(y_t(\theta)) - \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2y_t(\theta)}$$

De cette situation, nous allons extraire l'algorithme qui permet de calculer les dérivées partielles avec les coordonnées de θ , et nous donnerons les dérivés partielles 1 et 2 de $G(\theta)$ par rapport à θ , donc on

a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial a} = \left\{ -\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2y_t^2(\theta)} \right\} \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial a} - \frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial a} \frac{\varepsilon_t(\theta)}{y_t(\theta)}. \\ \frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial \theta_2} &= \frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial b} = \left\{ -\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2y_t^2(\theta)} \right\} \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial b} - \frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial b} \frac{\varepsilon_t(\theta)}{y_t(\theta)}. \\ \frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial \theta_3} &= \frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial \gamma_0} = \left\{ -\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2y_t^2(\theta)} \right\} \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial \gamma_0}. \text{ Où } \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial \gamma_0} = \frac{1}{1 - \alpha_t(\alpha)}. \end{aligned}$$

Pour les paramètres θ_4, θ_5 ce qui signifie $\alpha_i, i = 1, 2$.

$$\frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial \alpha_i} = \left\{ -\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2y_t^2(\theta)} \right\} \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial \alpha_i} \text{ tel que } \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial \alpha_i} = \frac{\gamma_0 + \beta_t(\beta)\varepsilon_{t-1}^2(\theta)}{(1-\alpha_t(\alpha))^2}$$

Pour les paramètres θ_6, θ_7 ce qui signifie $\beta_i, i = 1, 2$.

$$\frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial \beta_i} = \left\{ -\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2(\theta)}{2y_t^2(\theta)} \right\} \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial \beta_i}, \text{ tel que } \frac{\partial y_t(\theta)}{\partial \beta_i} = \frac{\varepsilon_{t-1}^2(\theta)}{1-\alpha_t(\alpha)}.$$

Pour indication en utilisant la formule (3.11) on peut calculer les deux dérivées $\frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial a}, \frac{\partial \Psi_t(\theta)}{\partial b}$ où

$$\frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial a} = -x_{t-s} - \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j b^j \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} x_{t-i-s} \right\} (x_{t-j-s})$$

Et

$$\frac{\partial \varepsilon_t(\theta)}{\partial b} = \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j (j b^{j-1}) \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} x_{t-i-s} \right\} (x_{t-j} - a x_{t-j-s})$$

Nous déterminons maintenant les dérivées secondes, nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_t(\theta)}{\partial a \partial a} &= \left\{ \frac{1}{2y_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{y_t^3} \right\} \left(\frac{\partial y_t}{\partial a} \right)^2 + \left\{ -\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2y_t^2} \right\} \frac{\partial^2 y_t}{\partial a \partial a} \\ &+ \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial a \partial a} \frac{\varepsilon_t}{y_t} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{y_t^2} \frac{\partial y_t}{\partial a} + \frac{1}{y_t} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial a} - \frac{\varepsilon_t}{y_t} \frac{\partial y_t}{\partial a} \right) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_t(\theta)}{\partial b \partial b} &= \left\{ \frac{1}{2y_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{y_t^3} \right\} \left(\frac{\partial y_t}{\partial b} \right)^2 + \left\{ -\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2y_t^2} \right\} \frac{\partial^2 y_t}{\partial b \partial b} \\ &+ \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial b \partial b} \frac{\varepsilon_t}{y_t} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{y_t^2} \frac{\partial y_t}{\partial b} + \frac{1}{y_t} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial b} - \frac{\varepsilon_t}{y_t} \frac{\partial y_t}{\partial b} \right) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial b} \end{aligned}$$

Nous pouvons généraliser pour tous $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_i} &= \left(\frac{1}{2y_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{y_t^3} \right) \left(\frac{\partial y_t}{\partial \theta_i} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2y_t^2} \right) \frac{\partial^2 y_t}{\partial \theta_i \partial \theta_i} \\ &+ \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial \theta_i \partial \theta_i} \frac{\varepsilon_t}{y_t} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{y_t^2} \frac{\partial y_t}{\partial \theta_i} + \frac{1}{y_t} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i} - \frac{\varepsilon_t}{y_t} \frac{\partial y_t}{\partial \theta_i} \right) \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i}. \end{aligned}$$

D'où l'expression (3.11) on peut donner les dérivés $\frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial \theta_i \partial \theta_i}$.

$$\frac{\partial^2 \Psi_t(\theta)}{\partial \gamma_0 \partial \gamma_0} = \left(\frac{1}{2y_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{y_t^3} \right) \left(\frac{\partial y_t}{\partial \gamma_0} \right)^2 = \left(\frac{1}{2y_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{y_t^3} \right) \left(\frac{1}{1-\alpha_t(\alpha)} \right)^2$$

Et pour tous $i = 1, 2$.

$$\frac{\partial^2 \Psi_t(\theta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} = \frac{\partial^2 y_t}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \left(-\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2y_t^2} \right) + \left(\frac{1}{2y_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{y_t^3} \right) \frac{\partial y_t}{\partial \beta_i} \frac{\partial y_t}{\partial \beta_j}$$

Et la même chose pour tous $i = 1, 2$.

$$\frac{\partial^2 \Psi_t(\theta)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_t}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \left(-\frac{1}{2y_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2y_t^2} \right) + \left(\frac{1}{2y_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{y_t^3} \right) \frac{\partial y_t}{\partial \alpha_i} \frac{\partial y_t}{\partial \alpha_j}$$

Avec la même généralisation, nous donnons les 49 dérivés pour chacun $i, j \in \{1, 2, \dots, 7\}$. Ensuite, il est facile d'obtenir les matrices de dérivées partielles

$$L(\theta) = \left\{ \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta_i} \right\}_{i=1, \dots, 7}^T, \quad O(\theta) = \left\{ \frac{\partial^2 G(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\}_{i, j=1, \dots, 7}$$

La valeur de ce programme peut également indiquer la vraie valeur θ^0 , puis nous recherchons la solution de l'équation suivante où nous pouvons trouver la valeur estimée $\hat{\theta}$, la construction d'un algorithme est basée pour donner une meilleure approximation de la valeur estimée $\hat{\theta}$, à travers la vraie valeur proposée θ^0 . Cet algorithme est connu en analyse numérique par la méthode d'approximation de Newton-Raphson voir [31], nous avons donc l'équation

$$L(\hat{\theta}) = L(\theta) + O(\theta)(\hat{\theta} - \theta) = 0$$

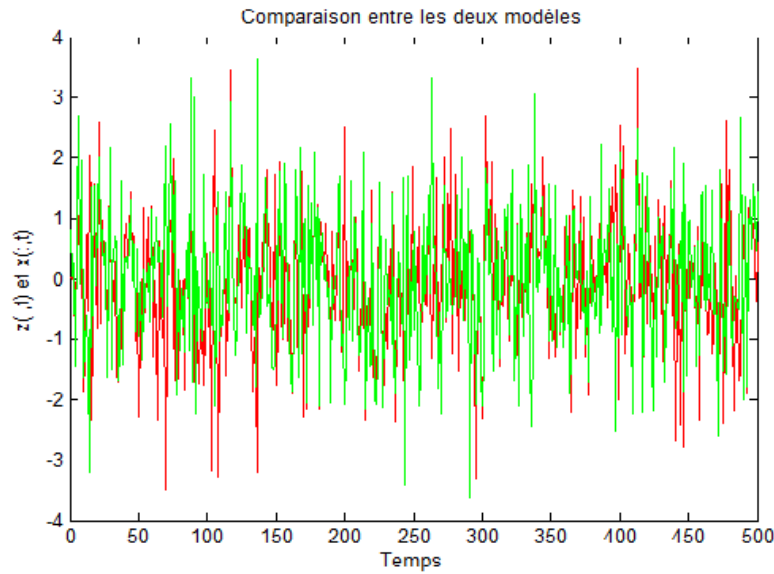
Pour trouver la solution approximative de la solution, nous demanderons cette expression récursive

$$\hat{\theta} = \theta - O^{-1}(\theta)L(\theta)$$

Nous appliquons maintenant la méthode d'approximation de Newton-Raphson

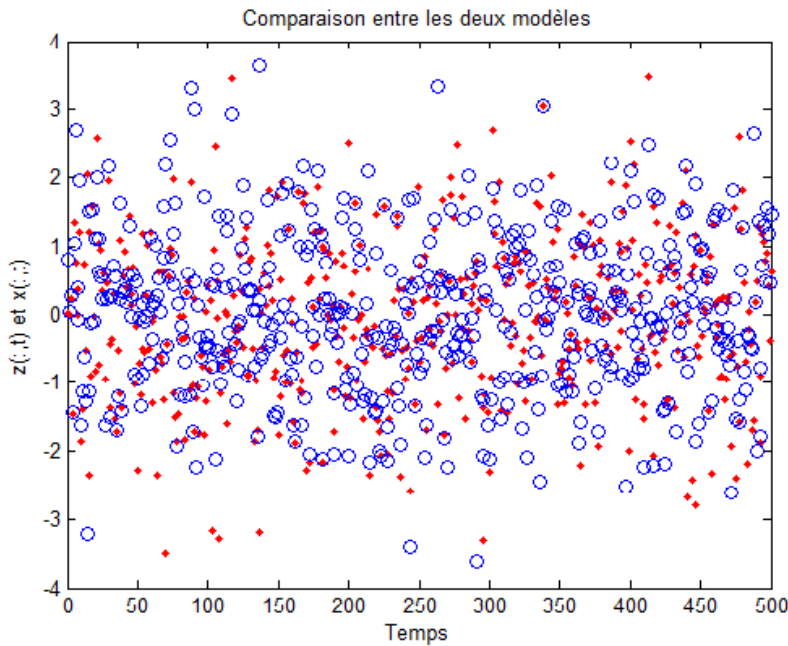
$$\begin{aligned} \theta^1 &= \theta^0 - O^{-1}(\theta^0)L(\theta^0) \\ \theta^2 &= \theta^1 - O^{-1}(\theta^1)L(\theta^1) \\ &\vdots \\ \theta^m &= \theta^{m-1} - O^{-1}(\theta^{m-1})L(\theta^{m-1}) \end{aligned}$$

Où la répétition des répétitions à chaque fois peut donner une meilleure approximation et si m tend vers à ∞ , alors θ^m convergera vers la valeur estimée $\hat{\theta}$.



$x(:,t)$: représente le modèle avec les coefficients vrais en rouge

$z(:,t)$: représente le modèles avec leurs coefficients estimés en vert



$x(:,t)$: représente le modèle avec les coefficients vrais en points rouges

$z(:,t)$: représente le modèles avec leurs coefficients estimés en cercles

A partir des deux graphiques nous observons qu'il y a convergence entre les modèles lorsque nous changeons les coefficients avec leurs coefficients estimés, nous trouverons à peu près le même graphique qui montre qu'il y a un comportement asymptotique des estimateurs, et nous voyons le graphique par des points et des cercles montre que les deux modèles sont presque identiques. On peut dire que la méthode de représentation graphique est un test de convergence approximatif généralisé, il reste à

démontrer ce commentaire numériquement dans le chapitre simulation.

3.6 Modèles bilinéaires à coefficients ARCH

Définition 3.6.1 Une séquence aléatoire générale $\{\varphi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un modèle ARCH(\mathbf{p}) s'il existe une séquence ε_t de Gauss de moyenne 0 et une variance σ_t^2 tel que

$$\varphi_t = h_t \varepsilon_t, \quad h_t = c_0 + \sum_{i=1}^p c_i \varphi_{t-i}^2$$

Où $c_i, i = 0, \dots, p$ sont des coefficients, soit notre modèle bilinéaire d'ordre BL($q, 0, q, 1$)

$$u_t = \varphi_t(a)u_{t-q} + \varphi_t(b)u_{t-q}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.12)$$

Et

$$u_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{t-i}(a) + \varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}) \right\} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Tel que $(a, b) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, et $\varphi_t(a), \varphi_t(b)$ sont des coefficients ARCH (1) variant dans le temps définis comme suit $c_{0,t}(a), c_{1,t}(a) : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}, c_{1,t}(b), c_{1,t}(b) : \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}$, nous définissons le vecteur que nous estimerons comme $\beta = (a, b)$

$$\varphi_t(a) = h_t(a)\varepsilon_t = \varepsilon_t \sqrt{c_{0,t}(a) + c_{1,t}(a)\varphi_{t-1}^2}$$

Et

$$\varphi_t(b) = h_t(b)\varepsilon_t = \varepsilon_t \sqrt{c_{0,t}(b) + c_{1,t}(b)\varphi_{t-1}^2}$$

ε_t est indépendant de φ_t , et $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 < 1, E(\varphi_t) = 0$, et comme pour tout t les coefficients variant dans le temps seront $c_{0,t}(a) > 0$, et $c_{1,t}(a) \in]0, 1[$, alors $E(\varphi_t^2) = E(\varepsilon_t^2)E\{c_{0,t}(a) + c_{1,t}(a)\varphi_{t-1}^2(\beta)\}$ nous constatons donc que la variance inconditionnelle est donnée par $\delta = V(\varphi_t) = E(\varphi_t^2) - E(\varphi_t)^2 = \sigma_t^2 \{c_{0,t}(a) + c_{1,t}(a)E\varphi_{t-1}^2\}$, et comme $E(\varphi_t^2) = E(\varphi_{t-1}^2)$ nous viendrons

$$E(\varphi_t^2(a)) = \frac{\sigma_t^2 c_{0,t}(a)}{1 - c_{1,t}(a)}$$

C'est la même chose pour $\varphi_t(b)$, et d'une autre manière, nous pouvons donner la variance conditionnelle des valeurs de décalage de φ_t , tel que $V(\varphi_t) = E(\varphi_t^2 | \varphi_{t-1}, \varphi_{t-2}, \dots, \varphi_1) = \sigma_t^2 \{c_{0,t}(a) + c_{1,t}(b)\varphi_{t-1}^2\}$

Il est bien connu que le modèle (3.12) est stable si $\varphi_t^2(a) + \sigma_t^2 \varphi_t^2(b) < 1$ alors

$$\varepsilon_t^2 \{c_{0,t}(a) + c_{1,t}(a)\varphi_{t-1}^2\} + \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 \{c_{0,t}(b) + c_{1,t}(b)\varphi_{t-1}^2\} < 1$$

On peut aussi déduire $|\varphi_t(a)| + \sigma_t |\varphi_t(b)| < 1$.

$$u_t = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{q} \rfloor - 1} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{t-iq}(a) + \varphi_{t-iq}(b)\varepsilon_{t-iq-1}) \right\} \varepsilon_{t-jq}$$

Et

$$\varepsilon_t(\beta) = u_t - \left[\varphi_t(a)u_{t-q} + \left\{ \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-q} \right\} \times (u_{t-j} - \varphi_{t-j}(a)u_{t-j-q}) \right] \quad (3.13)$$

Selon les conditions de stabilité et comme $q = 1$ nous avons

$$u_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{t-i}(a) + \varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}) \right\} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Soit F est tribu définie par les observations $\{u_t, t = 1, \dots, n\}$, Nous définissons le prédicteur $h_{t|t-1}(\beta)$

$$h_{t|t-1}(\beta) = u_t - \varepsilon_t(\beta)$$

Proposition 3.6.1 *Sous condition de stabilité, nous avons $\gamma = Eh_{t|t-1}(\beta) < \infty$*

Dans cette preuve, nous appliquerons d'abord l'inégalité de Schwartz $K = \max(\varepsilon_{t-j})$ on a

$$\begin{aligned} \gamma &\leq K \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} E |\varphi_{t-i}(a) + \varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}| \right\} \\ &\leq K \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \{E |\varphi_{t-i}(a) + \varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}|\} \\ &\leq K \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left[\{E |\varphi_{t-i}(a)|^2\}^{\frac{1}{2}} + \{E |\varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}|^2\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq K \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left[\{E |\varphi_{t-i}(a)|^2\}^{\frac{1}{2}} + \{E |\varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}|^2\}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq K \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left[\left\{ \frac{c_{0,t}(a)}{1 - c_{1,t}(a)} \right\}^{\frac{1}{2}} + \sigma_t \left\{ \frac{c_{0,t}(b)}{1 - c_{1,t}(b)} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

In this situation we put $\mathbf{m} = \min(c_{1,t}(a), c_{1,t}(b))$ and $\mathbf{M} = \max(c_{0,t}(a), c_{0,t}(b))$ then

$$E |p(t)| \leq K \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} (1 - \sigma_t) \left\{ \frac{\mathbf{M}}{1 - \mathbf{m}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Si $(1 - \sigma_t) \left\{ \frac{\mathbf{M}}{1 - \mathbf{m}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \theta < 1$, nous verrons que cette somme est une somme de séquence géométrique de base $\theta \in]0, 1[$, ce qui montre effectivement que $E |p(t)|$ sera

$$E |p(t)| \leq K \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \theta = K \sum_{j=1}^{\infty} \theta^j \leq \frac{K\theta}{1 - \theta} < \infty$$

Parmi les meilleures approches d'estimation de la méthode des moindres carrés (LS), cette méthode est une explosion de connaissances et ses applications ne sont pas terminées jusqu'à aujourd'hui, mais sa réalisation avec des modèles ARCH est cohérente et asymptotiquement normale comme le montrent Weiss (1986) et Pantulla (1988). Mais comme pour l'approche de la méthode du maximum de vraisemblance MLE, cette méthode a été appliquée dans certaines références où le modèle sera ARCH mais avec des coefficients constants comme Hamilton (1994), donc ici notre contribution est basée d'abord pour estimer les coefficients d'un type de bilinéaire série chronologique où ces coefficients sont un modèle ARCH avec des coefficients variant dans le temps. De plus aussi la notion de coefficients variant dans le temps prend plusieurs dimensions dans les applications car il y a par exemple des phénomènes physiques se rebellant sur les lois de la physique classique, comme cet exemple de cet échantillon de modèles où l'on constate que les coefficients ne sont pas des constantes mais prennent une situation variée au fil du temps comme l'exemple suivant

Soit le vecteur $v = (v_1, v_2)$ dans le cas $s = 1$. On a

$$c_t(v) = \frac{1 - (-1)^t}{2} v_1 + \frac{1 + (-1)^t}{2} v_2$$

La méthode des moindres carrés est basée sur la formule de Taylor du deuxième degré, donc pour tout $i, j \in \{1, \dots, d_1 + d_2\}$ on a

$$q_N(\beta) = q_N(\beta^0) + (\beta - \beta^0) \frac{\partial q_N}{\partial \beta^T}(\beta^0) + \frac{1}{2} (\beta - \beta^0) \frac{\partial^2 q_N}{\partial \beta^T \partial \beta}(\beta^*) (\beta - \beta^0)^T$$

β^* est un point intermédiaire entre β et β^0 , $\|\beta - \beta^*\| \leq \delta$, $\delta > 0$. On va vérifier les hypothèses de théorème de Klimko-Nilsen dans cette situation

Théorème 3.6.1 Soit $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un modèle stable généré par (3.12), tel que $h_{t|t-1}(\beta)$ est presque sûrement deux fois différentiable en continu dans un sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$, et comme

on peut dire des dérivés d'ordre 1 et 2 pour $h_{t|t-1}(\beta)$ sont bornés, et qui contient la vraie valeur β_0 de β , C_1 et C_2 sont des constants, donc si les quatre hypothèses suivantes sont vérifiées

$$\mathbf{H}_1 : E_{\alpha_0} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i} \right\}^4 \leq C_1, \forall i = 1, \dots, d_1 + d_2$$

$$\mathbf{H}_2 : E_{\beta_0} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_i} - E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_i} \mid F_{t-1} \right) \right\}^2 \leq C_2, \forall i = 1, \dots, d_1 + d_2$$

Et \mathbf{H}_3 , \mathbf{H}_4 et \mathbf{H}_5 sont vérifiés

Preuve. Voir [22].

Nous prouvons le théorème selon le modèle proposé dans l'article. Nous avons d'abord $\frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i} = -2\varepsilon_t(\beta) \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i}$, nous pouvons appliquer l'inégalité de Schwartz pour $E_{\beta_0} \left(\frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i} \right)$ alors

$$V_1 = E_{\beta_0} \left\{ -2\varepsilon_t(\beta) \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \right\}^4 \leq 16 \left\{ E_{\beta_0} \varepsilon_t^2(\beta) \right\}^{0.5} \left\{ E_{\beta_0} \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \right\}^{0.5}$$

Pour obtenir l'inégalité, il suffit de démontrer que $E_{\beta_0} \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i}$ est borné, il est facile de montrer que $\frac{\partial \varphi_t(\beta)}{\partial \beta_i}$ est borné $\left| \frac{\partial \varphi_t(\beta)}{\partial \beta_i} \right| \leq K, \forall \beta_i = a_i$ ou bien b_i , pour $q = 1$ nous avons la formule récurrente

$$h_{t|t-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{t-i}(a) + \varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1}) \right\} \varepsilon_{t-j}$$

Nous trouvons donc par dérivation que où $\max \varepsilon_{t-j} = e$ et $\varphi_{t-i}(a) + \varphi_{t-i}(b)\varepsilon_{t-i-1} = f_t(\beta)$, et aussi que la condition $|f_t(\beta)| \leq x < 1$ est vérifiée et nous pouvons observer à travers le théorème que

$$\left| \frac{\partial f_t(\beta)}{\partial \beta_s} \right| \leq \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h_{t|t-1}}{\partial \beta_s} \right| &\leq e \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{j-1} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq s}}^{j-1} |f_t(\beta)| \right\} \left| \frac{\partial f_t(\beta)}{\partial \beta_s} \right| \right] \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} x^{j-1} < \frac{e\mathbf{R}}{1-x} \end{aligned}$$

Parce que la base x de la série géométrique est incluse dans $]0, 1[$, donc cette série est alors convergente

$$V_1 = E_{\beta_0} \left\{ -2\varepsilon_t(\beta) \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \right\}^4 \leq C_1$$

Mais pour la quantité $V_2 = E_{\alpha_0} \left\{ \frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_i} - E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_i} \mid F_{t-1} \right) \right\}^2$ et $E \varepsilon_t^2(\beta) = \sigma_t^2 < \infty$, on a

$$\begin{aligned} V_2 &= 4E \left\{ \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_j} - \varepsilon_t(\beta) \frac{\partial^2 h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right\}^2 \\ &= 4E \left\{ \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_j} \right\}^2 - 4\sigma_t^2 E \left\{ \frac{\partial^2 h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right\}^2 \end{aligned}$$

On peut remarquer que V_2 est borné par l'inégalité d'application de Schwartz

$$E \left\{ \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_j} \right\}^2 \leq \left\{ E \left(\frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \right)^2 \right\}^{0.5} \left\{ E \left(\frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_j} \right)^2 \right\}^{0.5}$$

Donc

$$V_2 \leq C_2$$

Le reste de la preuve faite de la même chose par des références voir [22]. ■

Nous donnons ici quelques techniques de dérivation

$$\frac{\partial \varepsilon_t^2(\beta)}{\partial \beta_i} = -2\varepsilon_t(\beta) \frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} \text{ et comme}$$

$$\frac{h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_i} = \frac{\partial}{\partial \beta_i} \left[\varphi_t(a)u_{t-q} + \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-q} \right\} \times (u_{t-j} - \varphi_{t-j}(a)u_{t-j-q}) \right]$$

Pour $\beta_i = a_i$ la dérivée partielle sera

$$\frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial a_i} = u_{t-q} \frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial a_i} + \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-q} \right\} u_{t-j} \frac{\partial \varphi_{t-j}(a)}{\partial a_i}$$

Dans le cas $\beta_l = b_l$ on a

$$\frac{\partial h_{t|t-1}(\beta)}{\partial b_l} = \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial b_l} \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-q} \right\} (u_{t-j} - \varphi_{t-j}(a)u_{t-j-q})$$

Tel que

$$\frac{\partial}{\partial b_s} \left\{ \prod_{i=1}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} = \sum_{s=0}^{j-1} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq s}}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} \frac{\partial \varphi_{t-r}(b)}{\partial b_s}$$

Sinon, nous continuons la dérivation selon deux paramètres, dans cette situation, nous avons des cas, peuvent être les deux paramètres du vecteur a ou b , et le cas où chaque paramètre de son vecteur nous donnerons ici le dernier cas $\frac{\partial^2 h_{t|t-1}(\beta)}{\partial \beta_\ell \partial \beta_j}$, $\beta_\ell = a_\ell$, $\ell = 1, \dots, d_1$ et $\beta_s = b_s$, $s = 1, \dots, d_2$ donc

$$\frac{\partial^2 h_{t|t-1}(\beta)}{\partial a_\ell \partial b_s} = \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \left[\sum_{s=0}^{j-1} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ s \neq i}}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} \frac{\partial \varphi_{t-r}(b)}{\partial b_s} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-q} \right\} u_{t-j} \frac{\partial \varphi_{t-j}(a)}{\partial a_\ell} \right]$$

Mais le cas où $\beta_\ell = b_\ell$ et $\beta_s = b_s$ la dérivée sera

$$\frac{\partial^2 h_{t|t-1}(\beta)}{\partial b_s \partial b_\ell} = \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial b_s \partial b_\ell} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} u_{t-i-p} \right\} \times (u_{t-j} - \varphi_{t-j}(a)u_{t-j-p}) \right]$$

Où

$$\frac{\partial^2}{\partial b_s \partial b_\ell} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} = \sum_{z_0=0}^{j-1} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq z_0}}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} \frac{\partial^2 \varphi_{t-z_0}(b)}{\partial b_s \partial b_\ell} + \sum_{z_1=0}^{j-1} \sum_{z_2=0}^{j-2} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ z_1 \neq i, z_2 \neq i}}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \right\} \frac{\partial \varphi_{t-z_1}(b)}{\partial b_s} \frac{\partial \varphi_{t-z_2}(b)}{\partial b_\ell}$$

Et avec le même sens de dérivation et pour simplifier l'application car dans la dernière étape on va faire quelques simulations, si on met $\sigma_t^2 = 1$ et $d = \frac{c_{0,t}(a)}{1-c_{1,t}(b)}$ dans la relation $E(\varphi_t^2)$

$$\prod_{i=1}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) = \prod_{i=1}^{j-1} \{c_{0,t-i}(b) + c_{1,t-i}(b)\varphi_{t-i-1}(b)\}^{0.5}$$

Où $|c_{0,t-i}(b)| + |c_{1,t-i}(b)| |\varphi_{t-i-1}(b)| \leq \lambda < 1$ alors c'est

$$\prod_{i=1}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) \leq \lambda^{j-1} \text{ et } \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{j-1} \varphi_{t-i}(b) = 0$$

3.6.1 Approche du maximum de vraisemblance

Dans ce cas on considère l'estimation des paramètres par MLE pour le même modèle bilinéaire proposé, on suppose les observations $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Le point de départ est la spécification de la densité conditionnelle des résidus ε_t , dans la plupart des applications, la distribution normale a été supposée, de sorte que la densité conditionnelle prend la forme

$$\rho_n(\varepsilon_t | F_{t-1}) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_t^2(\beta)}{2\sigma_t^2} \right\}$$

Pour estimer les paramètres du modèle, nous voulons obtenir une solution β qui maximise la fonction de vraisemblance du logarithme

$$\begin{aligned} g_n(\beta) &= \ln \{\rho_n\} \\ &= -\sum_{t=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \ln(\sigma_t) + \frac{\varepsilon_t^2(\beta)}{2\sigma_t^2} \right\} - \frac{n}{2} \ln(2\pi) \end{aligned}$$

En situation $\sigma_t^2 = 1$, et $E(\varphi_t^2) = \frac{c_{0,t}(a)}{1-c_{1,t}(b)}$, on pose $\frac{1}{2} \ln(\sigma_t) + \frac{\varepsilon_t^2(\beta)}{2\sigma_t^2} = y_t(\beta)$ nous présentons donc quelques dérivées partielles pour illustrer les mécanismes d'approche d'estimation où la dernière dérivée a été utilisée précédemment

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n(\beta)}{\partial a_i} &= \frac{\partial y_t(\beta)}{\partial a_i} = \frac{\varepsilon_t(\beta)}{\sigma_t^2} \frac{\partial \varepsilon_t(\beta)}{\partial a_i} = -\frac{\varepsilon_t(\beta)}{\sigma_t^2} \frac{\partial h_{t,t-1}(\beta)}{\partial a_i} \\ \frac{\partial g_n(\beta)}{\partial b_i} &= \frac{\partial y_t(\beta)}{\partial b_i} = \frac{\varepsilon_t(\beta)}{\sigma_t^2} \frac{\partial \varepsilon_t(\beta)}{\partial b_i} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g_n(\beta)}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 y_t(\beta)}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{1}{\sigma_t^2} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t(\beta)}{\partial a_j} \frac{\partial \varepsilon_t(\beta)}{\partial a_i} + \varepsilon_t(\beta) \frac{\partial^2 \varepsilon_t(\beta)}{\partial a_i \partial a_j} \right\}, \quad i, j = 1, \dots, d_1$$

$$\frac{\partial^2 g_n(\beta)}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{\partial^2 y_t(\beta)}{\partial b_i \partial b_j} = \frac{1}{\sigma_t^2} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_t(\beta)}{\partial b_j} \frac{\partial \varepsilon_t(\beta)}{\partial b_i} + \varepsilon_t(\beta) \frac{\partial^2 \varepsilon_t(\beta)}{\partial b_i \partial b_j} \right\}, \quad i, j = 1, \dots, d_2$$

Et puis, il est facile d'obtenir les dérivées partielles de $g_n(\beta)$, on pose aussi $\beta = (a_1, \dots, a_{d_1}, b_1, \dots, b_{d_2}) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{d_1}, \beta_{d_1+1}, \dots, \beta_{d_1+d_2})$

$$\mathbf{L}(\beta) = \left[\frac{\partial g_n(\beta)}{\partial \beta_i} \right]_{i=1, \dots, d_1+d_2}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{O}(\beta) = \left[\frac{\partial^2 g_n(\beta)}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \right]_{i=1, \dots, d_1+d_2}$$

$\mathbf{O}(\beta)$ est une matrice de dérivées secondes et la valeur de ce programme peut également indiquer la vraie valeur β^0 , puis on cherche la solution de l'équation suivante où l'on peut trouver la valeur estimée $\hat{\beta}$, ensuite on applique l'algorithme de Newton-Raphson

$$\mathbf{L}(\hat{\beta}) = \mathbf{L}(\beta) + (\hat{\beta} - \beta)\mathbf{O}(\beta) = 0$$

Comme supposé h plus proche de cette équation, peut être réécrit comme

$$\hat{\beta} = \beta - \mathbf{O}^{-1}(\beta)\mathbf{L}(\beta)$$

Où

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \beta^0 - \mathbf{O}^{-1}(\beta^0)\mathbf{L}(\beta^0) \\ \beta^2 &= \beta^1 - \mathbf{O}^{-1}(\beta^1)\mathbf{L}(\beta^1) \\ &\vdots \\ \beta^m &= \beta^{m-1} - \mathbf{O}^{-1}(\beta^{m-1})\mathbf{L}(\beta^{m-1}) \end{aligned}$$

On prend le modèle suivant pour applique l'estimation

$$\begin{cases} u_t = \varphi_t(a)u_{t-1} + \varphi_t(b)u_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varphi_t(a), \varphi_t(b) \rightsquigarrow ARCH(1, 1) \end{cases}$$

On a les vecteurs $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est la loi gaussienne avec une moyenne de 0 et une variance de 1, et les coefficients prennent les expressions

$$c_{1,t}(a) = \frac{1 - (-1)^t}{2} a_1 + \frac{1 + (-1)^t}{2} a_2$$

Et

$$c_{1,t}(b) = \frac{1 - (-1)^t}{2} b_1 + \frac{1 + (-1)^t}{2} b_2.$$

Le tableau 1 selon la méthode des moindres carrés

Tableau 01

Size N	NS	$\beta^0 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$	$\hat{\beta}_{Ls} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
100	200	(0.005, 0.09, 0.15, 0.28)	(0.0047, 0.0775, 0.1722, 0.2238)
250			(0.0055, 0.0812, 0.1671, 0.2296)
500			(0.0071, 0.0885, 0.1586, 0.2743)
1000			(0.0059, 0.0912, 0.1388, 0.2749)
100	500		(0.0081, 0.0951, 0.1341, 0.2546)
250			(0.0069, 0.0932, 0.1424, 0.3133)
500			(0.0089, 0.0096, 0.1574, 0.2894)
1000			(0.0054, 0.0091, 0.1539, 0.2976)
100	100		(0.0019, 0.0811, 0.1663, 0.2312)
250			(0.0043, 0.0882, 0.1581, 0.2589)
500			(0.0048, 0.0883, 0.1576, 0.2602)
1000			(0.0051, 0.0902, 0.1509, 0.2918)

Tableau 02 selon la méthode de maximum de vraisemblance

Tableau 02

Size N	NS	$\beta^0 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$	$\hat{\beta}_{Mle} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2)$
100	200	(0.005, 0.09, 0.15, 0.28)	(0.0038, 0.0897, 0.1621, 0.2361)
250			(0.0042, 0.0930, 0.1538, 0.2516)
500			(0.0098, 0.0905, 0.1586, 0.2743)
1000			(0.0104, 0.0905, 0.1588, 0.2575)
100	500		(0.0046, 0.0890, 0.1722, 0.2469)
250			(0.0054, 0.0803, 0.1559, 0.2569)
500			(0.0078, 0.0912, 0.1616, 0.2823)
1000			(0.0068, 0.0877, 0.1612, 0.2803)
100	100		(-0.0028, 0.0840, 0.1543, 0.2466)
250			(-0.0045, 0.0857, 0.1538, 0.2490)
500			(0.0015, 0.0862, 0.1580, 0.2547)
1000			(0.0057, 0.0892, 0.1583, 0.2786)

Commentaires

On peut remarquer dans ce travail que l'augmentation de la taille de l'échantillon a poussé la convergence des valeurs estimées vers les valeurs vraies proposées, où l'on observe dans certains cas qu'il y a des estimateurs et que leurs vraies valeurs sont identiques, de l'autre donc on trouve que les deux les méthodes dans le cas de temps variés donnent une meilleure approximation d'où nous ne pouvons pas comparer. L'impact du nombre de simulations fait une approximation entre les estimateurs et leurs valeurs. Nous notons que le meilleur ns sera à 500 pour les deux approches. On peut en déduire que les deux méthodes sont efficaces pour l'estimation de ces modèles avec des coefficients ARCH variant dans le temps car dans le cas où le nombre de simulations et la taille de l'échantillon sont importants nous arriverons presque à ce que les estimateurs soient égaux.

3.7 Estimation d'un échantillon des modèles bilinéaires des series chronologiques avec un bruit blanc ARCH

Au cours des dernières années, les efforts d'un nombre croissant de chercheurs ont conduit au développement d'une grande variété de domaines de modèles de séries chronologiques, et en particulier dans les modèles non linéaires. Parce que de nombreux modèles couramment utilisés en finance empirique pour décrire les rendements et la volatilité sont linéaires. Il existe cependant plusieurs indications selon lesquelles les modèles non linéaires pourraient être plus appropriés. Ces modèles jouent un rôle important dans de nombreux domaines de la vie de l'homme (ingénierie, marketing, assurance, chimie, applications industrielles, etc.). Parmi ces modèles, il y a les modèles d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressifs ARCH (q). Les modèles ARCH (q) ont été largement utilisés dans l'analyse des séries temporelles financières, et en particulier dans l'analyse du risque de détention d'un actif, l'évaluation du prix d'une option et les opérations de prévision en économie. Cette chapitre a porté sur l'estimation des modèles de séries chronologiques bilinéaires pilotés par ARCH (1), dans le cas où les coefficients sont constants, mais notre contribution ici est basée essentiellement sur l'estimation d'un échantillon de modèles bilinéaires de séries chronologiques avec des coefficients variant dans le temps comme cas généralisé. Ce type des modèles joue un rôle fondamental dans les applications financières voir [14]. Et nous mettrons en évidence dans cette étude sur l'existence, unicité et forme de solution stationnaire à ces modèle bilinéaire orientés par le bruit blanc ARCH(1) et on va estimer leurs coefficients.

Ce modèle est défini par son expression stochastique suivante

$$\begin{cases} u_t = b_0 u_{t-s} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \sim ARCH(1) \end{cases}$$

Où $\varepsilon_t \sim ARCH(1)$ signifie que

$$\begin{cases} \varepsilon_t = z_t (a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2)^{0.5} \\ z_t \sim \text{loi de Gauss } N(0, 1) \end{cases}$$

Les coefficients $a_0 > 0, a_1 > 0, z_t$ une loi de Gauss de moyenne 0 et variance 1, ce modèle est dénoté par $BL(0, 0, s, 1) - ARCH(1)$, et pour vérifier l'existence de solution stationnaire on a le théorème suivant

Théorème 3.7.1 *On suppose que $\varepsilon_t \sim ARCH(1)$. Si $s = 1$ dans le modèle bilinéaire et $a_1 \in$*

$[0, 2e^c]$ tel que c est la constante d'Euler et $E \ln |b_0 \varepsilon_t| \in [-\infty, 0[$ alors

$$u_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{j-1} b_0 \varepsilon_{t-i-1} \right) \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} b_0^j \left(\prod_{i=1}^{j-1} \varepsilon_{t-i} \right) \varepsilon_{t-j}^2 + \varepsilon_t$$

converge presque sûrement et définit ainsi une solution unique et strictement stationnaire.

Preuve. Voir la référence [31]. ■

Comme $z_t \overset{i.i.d}{\rightsquigarrow} N(0, 1)$, et z_t est indépendant de ε_t nous avons

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

où $a_0 > 0$ et $0 < a_1 < 1$. En revanche, du fait que ε_{t-1} et z_t sont indépendants les uns des autres, donc

$$E(\varepsilon_t) = E(z_t \sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2}) = E(z_t) E(\sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2})$$

Et comme $E(z_t) = 0$, alors $E(\varepsilon_t)$ sera 0. La moyenne conditionnelle de ε_t est $E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_1) = 0$, nous constatons que la variance inconditionnelle

$V(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) - (E(\varepsilon_t))^2 = E\{z_t^2(a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2)\} = a_0 + a_1 E(\varepsilon_{t-1}^2)$ et comme $E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ on trouve

$$V(\varepsilon_t) = \frac{a_0}{1 - a_1}$$

D'autre part, la variance conditionnelle est $V(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_1) = E(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_1) = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2$.

Kurtosis de ARCH(1)

Le kurtosis de $ARCH(1)$ de la distribution inconditionnelle est égale

$$Ku = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{(E(\varepsilon_t^2))^2} = \frac{3 - 3a_1^2}{1 - 3a_1^2}$$

Nous constatons que si le kurtosis tend vers 3 alors a_1 tendra vers 0. On considère tout d'abord dans ce cas le modèle bilinéaire d'ordre $BL(u, 0, u, 1)$ avec des coefficients variant dans le temps $(\alpha(t), \beta(t))_{t \in \mathbb{Z}}$

$$X_t = \alpha(t)X_{t-u} + \beta(t)X_{t-u}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad u \geq 1 \tag{3.14}$$

Et le bruit blanc ε_t suit $ARCH(1)$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

Where z_t follows the Gaussian law $N(0, 1)$, and $a_0 > 0, a_1 > 0$. It is well known that the stability of this model based on the condition

Théorème 3.7.2 Pour $u = 1$ dans le modèle (3.14), où entraîné par le bruit ARCH (1), et si

$$a_1 \in [0, 1[, |\alpha(t)| + |\beta(t)| \sqrt{\frac{a_0}{1 - a_1}} < 1$$

alors le modèle accepte une solution de forme

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{k=0}^{j-1} (\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-k-1}) \right\} \varepsilon_{t-j}$$

Cette solution sera unique et strictement stationnaire

La preuve

Selon la formule du modèle, on a la condition de solution stationnaire, où $\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - a_1}$ précédemment.

$$\{\alpha(t)\}^2 + \sigma^2 \{\beta(t)\}^2 < 1$$

Ensuite, nous constatons que

$$|\alpha(t)| + \sqrt{\frac{a_0}{1 - a_1}} |\beta(t)| < 1$$

Récemment, il est possible d'écrire le modèle ((3.14) si

$$\{\alpha(t)\}^2 + \sigma^2 \{\beta(t)\}^2 < 1.$$

On a

$$X_t = \sum_{j=0}^{[t/k]-1} \varepsilon_{t-jk} \prod_{i=0}^{j-1} \{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\}$$

pour la convergence absolument presque sûrement ainsi que dans la moyenne, nous avons $\max |(\varepsilon_{t-jk})| =$

v

$$\begin{aligned} |X_t| &\leq v \left| \sum_{j=0}^{[t/k]-1} \prod_{i=0}^{j-1} \{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\} \right| \\ &\leq v \sum_{j=0}^{[t/k]-1} \left| \prod_{i=0}^{j-1} \{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\} \right| \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous montrons que $E \left| \prod_{i=0}^{j-1} \{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\} \right| < \infty$, donc

$$E \left| \prod_{i=0}^{j-1} \{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\} \right| = \prod_{i=0}^{j-1} E |\{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\}|$$

Selon la propriété

$$\begin{aligned}
 E |\{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\}| &\leq \sqrt{\{E(\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1})\}^2} \\
 &\leq \sqrt{\{\alpha(t) + \beta(t)\sigma\}^2} \\
 &\leq |\alpha(t)| + |\beta(t)|\sigma \\
 &\leq \zeta < 1
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=0}^{j-1} E |\{\alpha(t) + \beta(t)\varepsilon_{t-ik-1}\}| &\leq \prod_{i=0}^{j-1} (|\alpha(t)| + |\beta(t)|\sigma) \\
 &\leq \prod_{i=0}^{j-1} \xi = \xi^{j-1}
 \end{aligned}$$

Nous trouvons

$$v \prod_{j=0}^{[t/k]-1} \xi^{j-1} = v \frac{1 - \xi^{[t/k]}}{1 - \xi}$$

Où t tend vers ∞ , nous arriverons

$$= \frac{v}{\xi - \xi^2}$$

Cela implique alors que la série est absolument convergente presque sûrement aussi bien que dans la moyenne.

Nous pouvons prendre $a_1 = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, donc

$$X_t(n) = \sum_{j=0}^{[t/k]-1} z_{t-js} \sqrt{a_0 + \frac{1}{n} \varepsilon_{t-js-1}^2} \prod_{i=0}^{j-1} \left\{ \alpha(t-is) + \beta(t-is) z_{t-is-1} \sqrt{a_0 + \frac{1}{n} \varepsilon_{t-is-2}^2} \right\}$$

Nous constatons que la limite où n tend vers ∞ sera

$$X_t(\infty) = \sqrt{a_0} \sum_{j=0}^{[t/k]-1} z_{t-js} (\sqrt{a_0})^j \prod_{i=0}^{j-1} \{\alpha(t-is) + \beta(t-is) z_{t-is-1}\}$$

Et au fait

$$|\alpha(t-is) + \beta(t-is) z_{t-is-1}| \leq \lambda < 1$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |X_t(\infty)| &= \sqrt{a_0} \left| \sum_{j=0}^{\lfloor t/k \rfloor - 1} z_{t-jk} (\sqrt{a_0})^j \prod_{i=0}^{j-1} \{ \alpha(t-ik) + \beta(t-ik) z_{t-ik-1} \} \right| \\
 &\leq \sqrt{a_0} \sum_{j=0}^{\lfloor t/k \rfloor - 1} \left| z_{t-jk} (\sqrt{a_0})^j \prod_{i=0}^{j-1} \{ \alpha(t-ik) + \beta(t-ik) z_{t-ik-1} \} \right| \\
 &\leq \sqrt{a_0} v \sum_{j=0}^{\lfloor t/k \rfloor - 1} (\lambda \sqrt{a_0})^j
 \end{aligned}$$

Et avec $\sqrt{a_0} \leq 1$

$$|X_t(\infty)| \leq \frac{\sqrt{a_0} v}{1 - \lambda \sqrt{a_0}}$$

Soit le modèle bilinéaire suivant à coefficients variant dans le temps

$$X_t = b(t)X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3.15}$$

Nous présenterons quelques théories concernant la solution stationnaire

Théorème 3.7.3 Si $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suit un modèle ARCH(1) et $a_1 \in [0, 2e^c]$, telque $c = 0.5772\dots$, est la constante d'Euler. Et quand cette condition est

$$-\infty < E \{ \ln(b(t)\varepsilon_t) \} < 0$$

Alors le modèle (3.15) accepte une solution

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{u=0}^{j-1} b(t-u) \varepsilon_{t-u-1} \right\} \varepsilon_{t-j}$$

Converge presque sûrement et ainsi défini X_t est la solution strictement stationnaire unique pour l'équation

Preuve. On peut utiliser la même technique de démonstration quand le coefficient de modèle constant.

Théorème 3.7.4 $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suit un bruit ARCH(1) de modèle $X_t = b(t)X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$, et si le sous les restrictions suivantes

$$0 \leq a_1 < 1$$

et

$$2 \ln |b(t)| + \ln(a_0) - \ln(1 - a_1) < 0$$

Théorème 3.7.5 *Ensuite, l'équation de solution strictement stationnaire unique définie par*

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{u=0}^{j-1} b(t) \varepsilon_{t-u-1} \right\} \varepsilon_{t-j}$$

Théorème 3.7.6 *Les restrictions du théorème sont équivalentes pour la condition $|b(t)\sigma| < 1$ pour la stationnarité au modèle (3.15).*

Preuve

Nous pouvons écrire la condition sous forme

$$\begin{aligned} 2 \ln |b(t)| + \ln(a_0) - \ln(1 - a_1) < 0 &\iff \ln \{b(t)\}^2 + \ln \frac{a_0}{1 - a_1} < 0 \\ &\iff \ln \left| b^2(t) \frac{a_0}{1 - a_1} \right| < 0 \\ &\iff \ln |b^2(t)\sigma^2| < 0 \\ &\iff |b^2(t)\sigma^2| < 1 \\ &\iff |b(t)\sigma| < 1 \end{aligned}$$

On peut considérer le modèle bilinéaire général $BL(0, 0, u, 1)$

$$X_t = b(t)X_{t-u}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \quad u \geq 1 \quad (3.16)$$

Il est possible d'écrire ce modèle comme

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{[t/u]-1} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} b(t - iu) \varepsilon_{t-iu-1} \right\} \varepsilon_{t-ju}$$

Et le condition de stationnarité de modèle (3.16) est le même car ce modèle est un cas particulier de modè $u=1$.

3.8 La méthode des moments empiriques dans l'espace des modèles bilinéaires des séries chronologique

Le travail dans les modèles non linéaires de séries chronologiques devient une philosophie qui n'appartient pas aux mathématiciens et statisticiens mais aussi aux physiciens, chimistes, biologistes et économistes, il a été observé que plusieurs séries financières de forme périodique prennent une forme non linéaire, et parmi ces modèles les modèles bilinéaires périodiques méthodes d'estimation utilisées

pour financer la méthode des moments empiriques. Dans cette section, nous ciblerons les dimensions de travail, la première donne un modèle non linéaire généralisé, ce modèle prend une situation bilinéaire pour certains cas et d'autres parties n'est pas bilinéaire, et la deuxième dimension pour faire une estimation pour les deux cas pour faire une comparaison.

Définition 3.8.1 On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ du second ordre dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est un modèle bilinéaire périodique de période $s \in \mathbb{N}^*$ s'il est solution de l'équation

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i(v) X_{st+v-i} + \sum_{i=1}^q c_i(v) \varepsilon_{st+v-i} + \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^Q b_{jk}(v) X_{st+v-j} \varepsilon_{st+v-k} + \varepsilon_{st+v} \quad (3.17)$$

Pour tout $v \in \{1, 2, \dots, s\}$. On note $X_t \rightsquigarrow PBL(p, q, P, Q)_s$ où les entiers p, q, P, Q désignent les ordres de modèle, les suites $\{a_i(v)\}_{1 \leq i \leq p}$, $\{c_i(v)\}_{1 \leq i \leq q}$ et $\{b_{jk}(v)\}_{1 \leq j \leq P, 1 \leq k \leq Q}$ sont des valeurs réelles représentent les coefficients périodiques de modèle durant la v ième saison. Les séquences de bruit blanc $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ constituent une suite des variables aléatoires centrées **non-corrélées** de variance périodique $E(\varepsilon_{st+v}^2) > 0$. On suppose de plus que ε_t et X_u sont indépendants pour tout $u < t$, la notation X_{st+v} fait une référence à la variable X_t durant la v ième saison de la t ième années de période s .

Le modèle 3.17 représente une extension naturelle des modèles *ARMA* périodique obtenus en fixant $b_{ij}(\cdot) = 0$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, P\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$, Cette classe des modèles appartient aux processus de second ordre périodique ment corrélés caractérisés par les deux propriétés

Définition 3.8.2 Remarque 3.8.1

$$E(X_t) = E(X_{t+s})$$

et

$$E[\{X_t - E(X_t)\} \{X_l - E(X_l)\}] = E[\{X_{t+s} - E(X_{t+s})\} \{X_{l+s} - E(X_{l+s})\}]$$

Les processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ purement bilinéaires périodiques (de période s connue) et strictement **super-diagonaux**, noté $PBL(0, 0, P, 1)_s$ et défini par :

$$X_{st+v} = \sum_{i=1}^P b_i(v) X_{st+v-i} \varepsilon_{st+v-1} + \varepsilon_{st+v} \quad (3.18)$$

Pour tout $v \in \{1, \dots, s\}$, ou $P \geq 2$ est connu et $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ forme une suite de variables aléatoires telles que $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^3) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = 1$ et $E(\varepsilon_t^4) < \infty$. Ce modèle bien étudié par A. Bibi.

L'objectif de cette classe des modèles bilinéaires est double : premièrement, il s'agit d'étudier quelques propriétés probabilistes fondamentales de la classe des processus $PBL(0, 0, P, 1)_s$ (existence et unicité d'une solution non-anticipative, inversibilité, moment d'ordre supérieure); deuxièmement nous traitons le problème de l'inférence statistique de modèle 3.18 à partir d'une approche fondée sur les moments empiriques d'ordre 2 et 3. Des expériences de simulation illustrent les résultats théoriques.

3.8.1 Représentation vectorielle et propriétés dans L^2

Dans cette partie, nous construisons tout'abord une représentation vectorielle bilinéaires du processus 3.18. Ensuite, les propriétés de stationnarité.

Représentation vectorielle

Soient $\underline{X}_t = \{X_t(1), \dots, X_t(s)\}'$ et $\underline{\varepsilon}_t = \{\varepsilon_t(1), \dots, \varepsilon_t(s)\}'$ et pour tout $v = 1, \dots, s$, on a $\varepsilon_t(v) = \varepsilon_{st+v}$ et $X_t(v) = X_{st+v}$. Avec ces notations, nous sommes en mesure d'énoncer le lemme suivant

Lemme 3.8.1 *Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par 3.18 admet la représentation vectorielle*

$$\underline{X}_t = C_0(\underline{\varepsilon}_t)\underline{X}_t + \sum_{j=1}^{P^*} C_j(\underline{\varepsilon}_t, \underline{\varepsilon}_{t-1})\underline{X}_{t-j} + \underline{\varepsilon}_t \quad (3.19)$$

Tel que $P^* = [(P - 1)/s] + 1$, $C_0(\underline{\varepsilon}_t)$ est une matrice $s \times s$ aléatoire, triangulaire inférieure dont le terme générique de la $l - ième$ ligne et de la $k - ième$ colonne est définie par

$$\{C_0(\underline{\varepsilon}_t)\}_{l,k} = b_{l-k}(l)\varepsilon_{st+l-1}\mathbb{I}_{\{k < l\}}$$

Et pour tout $j = 1, \dots, P^*$, $C_j(\underline{\varepsilon}_t, \underline{\varepsilon}_{t-1})$ est une matrice $s \times s$ aléatoire dont le terme générique est donné par

$$\{C_j(\underline{\varepsilon}_t, \underline{\varepsilon}_{t-1})\}_{l,k} = b_{s+j+l-k}(l)\varepsilon_{st+l-1}$$

Avec la convention $b_j(v) = 0$ pour $j > P$ ou $j < 2$.

3.8.2 Expression des moments et estimation des paramètres

Cette section est consacrée à l'estimation des paramètres du modèle 3.18 à partir d'une réalisation (X_1, X_2, \dots, X_N) . Dans la littérature statistique, plusieurs méthodes ont été proposées pour estimer les paramètres des modèles bilinéaires stationnaires ergotiques généraux à coefficients. Parmi ces méthodes : la première méthodes de moindres carrés (**pham et tran, 1981**) tandis que la deuxième est basée sur la

méthode des moments (**Subba R , Akamanam et Subramanyam,1986**) ,et dans cette section on applique méthode des moments .

3.8.3 Expression des moments

Nous nous intéressons à l'expression des moments théoriques d'ordre 1, 2 et 3 du modèles **3.18** voir [4]. **Francq (1999)** a examiné cette question dans le cas du modèle 3.18 à coefficients constants. On va faire ici des coefficients périodiques

$$C_v(i) = E(X_{st+v}X_{st+v-i}) \quad (3.20)$$

et

$$C_v(i, j) = E(X_{st+v}X_{st+v-i}X_{st+v-j}) \quad (3.21)$$

Pour tous entiers i et j nous remarquons tout d'abord que les fonctions $C_v(i)$ et $C_v(i, j)$ vérifient les relations

$$C_v(i) = C_{v+i}(i) , C_v(i, j) = C_v(j, i) , C_v(-i, j) = C_{v+i}(i + j, i) .$$

$$C_v(i, -j) = C_{v+j}(j, i + j) \text{ et } C_v(-i, -j) = C_{v+i}(i, i - j) = C_{v+i}(j, j - i).$$

Ces relations permettent de calculer les fonctions $C_v(i)$ et $C_v(i, j)$ uniquement pour les $i \geq j \geq 0$.

Proposition 3.8.1 *Sous la condition ,l'unique processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ verifiant 3.18 est tel que pour tout $v = 1, \dots, s$.*

a) $E(X_{st+v}) = 0$;

b) $C_v(0) = \sum_{j=2}^P b_j^2(v)C_{v-j}(0) + 1$ et $C_v(i) = 0, \forall i \neq 0$;

c) $\forall j > P, C(0, 0) = C(1, 1) = C_v(1, j) = 0$;

d) $\forall j \geq i > 1, C_v(i, j) = 0$;

e) $\forall 2 \leq j \leq P, C_v(1, j) = b_j(v)C_v(0)$;

f) $\forall j \geq 2P, C_v(0, j) = \sum_{i=2}^P b_i^2(v)C_{v-i}(0, j - i)$;

g) $\forall j \geq 1, C_v(0, j) = \sum_{i=2}^P b_i^2(v)C_{v-i}(0, j - i) + 2 \sum_{2 \leq l < k \leq P} b_l(v)b_k(v)C_{v-k}(l - k, j - k)$.

3.8.4 Comportement asymptotique des estimateurs

Nous étudions les propriétés asymptotiques (convergence forte et normalité) des estimateurs empiriques des moments. Comme dans le cas stationnaire à partir de la série d'observations (X_1, X_2, \dots, X_N) d'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ généré par le modèle 3.18. On suppose sans perte de généralité que la taille de la série

d'observations N est un multiple de la périodicité s , de telle sorte que $N = sT$ ou $T \in \mathbb{N}^*$, on introduit les estimateurs sans biais empiriques $\hat{C}_{v,N}(0)$ et $\hat{C}_{v,N}(1, j)$ de $C_v(0)$ et de $C_v(1, j)$, respectivement définis par :

$$\hat{C}_{v,N}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_{st+v}^2 \quad (3.22)$$

et

$$\hat{C}_{v,N}(1, j) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_{st+v} X_{st+v-1} X_{st+v-j} \quad (3.23)$$

Pour tout $v = 1, \dots, s$. Et j entier fixé, en posant $X_t = 0$ pour tout $t \notin \{1, \dots, N\}$. Considérons le processus vectoriel $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de L^4 défini par la formule vectorielle de processus 3.18, et introduisons les processus $(\underline{X}_t^{\otimes 2})_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(\underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j})_{t \in \mathbb{Z}}$ où i, j sont deux entiers fixés, posons $\Gamma^{(2)} = E(\underline{X}_t^{\otimes 2})$ et $\Gamma^{(3)}(i, j) = E(\underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j})$.

Il est clair que les estimateurs $\hat{C}_{v,N}(0)$ et $\hat{C}_{v,N}(1, j)$ peuvent être obtenus (selon les valeurs de j et v) par des transformations linéaires simples à partir des estimateurs empiriques :

$$\hat{R}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \underline{X}_t^{\otimes 2} \quad (3.24)$$

et

$$\hat{R}_N(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j} \quad (3.25)$$

Par ailleurs, puisque les processus $(\underline{X}_t^{\otimes 2})_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(\underline{X}_t \otimes \underline{X}_{t-i} \otimes \underline{X}_{t-j})_{t \in \mathbb{Z}}$ sont strictement stationnaires ergodiques donc nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.8.2 *Si $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus de L^4 généré par 3.18, alors pour tout $v = 1, \dots, s$, les estimateurs $\hat{C}_{v,N}(0)$ et $\hat{C}_{v,N}(1, j)$ définis par 3.22 et 3.23 convergent presque sûre respectivement vers $C_v(0)$ et $C_v(1, j)$ quand $N \rightarrow \infty$. Nous pouvons déduire de la proposition que l'expression d'un estimateur du coefficient $b_i(v)$ de l'équation de modèle $i = 2, \dots, P$ sera*

$$\hat{b}_{i,N}(v) = \frac{\hat{C}_{v,N}(1, i)}{\hat{C}_{v,N}(0)} \quad (3.26)$$

Où $\hat{C}_{v,N}(0)$ et $\hat{C}_{v,N}(1, i)$ sont respectivement les moments empiriques d'ordre 2 et 3 introduits en 3.22 et 3.23.

Proposition 3.8.3 *Sous les hypothèses de la proposition, pour tout $i = 2, \dots, P$ et pour tout $v = 1, \dots, s$. Donc $\hat{b}_{i,N}(v)$ converge presque sûrement vers $b_i(v)$ lorsque $N \rightarrow \infty$ ou $\hat{b}_{i,N}(v)$ est défini par 3.26.*

3.8.5 Normalité asymptotique.

Dans la suite, nous considérons le cas particulier de modèle 3.18 avec $P = 2$ pour ne pas alourdir les notations et les démonstrations. Il est cependant évident que les résultats obtenus peuvent être réécrits pour des ordres $P > 0$. Dans le cas $PBL(0, 0, 2, 1)_s$ processus $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ s'écrit sous la forme

Théorème 3.8.1 *Le processus $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par 3.18 admet une unique solution stationnaire au second ordre, non anticipative et ergodique si et seulement si*

$$\max \left\{ \prod_{v=0}^{[s/2]} b_2^2(2v+1), \prod_{v=1}^{[s/2]} b_2^2(2v+2) \right\} < 1.$$

Preuve voir [6].

Considérons le modèle tel que $v = 1, 2$.

$$X_{st+v} = b_i(v) X_{st+v-2} \varepsilon_{st+v-1} + \varepsilon_{st+v} \tag{3.27}$$

Corollaire 3.8.1 *Considérons le modèle 3.27. Alors,*

- i. $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire dans L^2 , ergodique et causal si et seulement si $\max_{v=1,2} \{b^2(v)\} < 1$,*
- ii. $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire dans L^4 , si et seulement si $\max_{v=1,2} \{3b^4(v)\} < 1$,*
- iii. $(\underline{X}_t)_{t \in \mathbb{Z}} \in L^6$, si et seulement si $\max_{v=1,2} \{15b^6(v)\} < 1$.*

3.9 Estimation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec approche des moments empiriques

Le travail dans les modèles non linéaires de séries chronologiques devient une philosophie qui n'appartient pas aux mathématiciens et statisticiens mais aussi aux physiciens, chimistes, biologistes et économistes, il a été observé que plusieurs séries financières prennent une forme non linéaire. Et d'autre part, la plupart des modèles de séries chronologiques fonctionnent bien, que ce soit en simulation ou en modélisation par rapport aux modèles linéaires où leurs résultats sont encore très raisonnables, et parmi les méthodes d'estimation utilisées pour financer la méthode des moments empiriques. Dans cette

section, nous ciblerons les dimensions de travail, la première donne un modèle non linéaire généralisé, ce modèle prend une situation bilinéaire pour certains cas et d'autres parties n'est pas bilinéaire, et la deuxième dimension pour faire une estimation pour les deux cas pour faire une comparaison

3.9.1 Modèle avec une puissance de bruit

Soit le processus $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ défini sur un espace probabilisé (Ω, A, P) par son équation stochastique suivante

$$u_t = \sum_{k=0}^m c_k(t) \varepsilon_{t-1}^k u_{t-k} + \varepsilon_t$$

Nous supposons que le bruit blanc suit les conditions suivantes $E(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^3) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ et $E(\varepsilon_t^4) < \infty$. La séquence $\{c_k(t), k = 1, \dots, m\}$ représente les coefficients variant dans le temps, si on met $\varepsilon_t^k = \eta_t^k$, il en résultera que $\varepsilon_t = \eta_t^{\frac{1}{k}}$ où $k \geq 1$ alors l'expression du modèle devient

$$u_t = \sum_{k=0}^m c_k(t) \eta_{t-1} u_{t-k} + \varepsilon_t$$

Et cette expression sera classée sous la forme d'un modèle bilinéaire avec ordre $BL(0, 0, m, 1)$, dans le cas où $m = 1$ nous trouvons

$$u_t = c_0(t)u_t + c_1(t)\varepsilon_{t-1}u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Dans cette situation, le modèle sera écrit sous la formule

$$u_t = \frac{1}{1 - c_0(t)} \{c_1(t)\varepsilon_{t-1}u_{t-1} + \varepsilon_t\} \tag{3.28}$$

Et pour généraliser la formule du modèle récurrent que nous avons $u_t(1) = \frac{1}{1 - c_0(t)} \{c_1(t)\varepsilon_{t-1}u_{t-1} + \varepsilon_t\}$, et lors de la création récursive de modèle de terme généralisé, donc dans le cas m nous avons

$$u_t(m) = \frac{1}{1 - c_0(t)} \left\{ \sum_{k=1}^m c_k(t) \varepsilon_{t-1}^k u_{t-k} + \varepsilon_t \right\}$$

Théorème 3.9.1 Nous supposons $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$, $E(\varepsilon_t) = 0$ et si $\sigma_t^2 \left\{ \frac{c(t)}{1 - c_0(t)} \right\}^2 < 1$ alors, le modèle (??) sera écrit avec la formule de série suivante

$$u_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=0}^{j-1} \left\{ \frac{c_1(t)}{1 - c_0(t)} \varepsilon_{t-i-1} \right\} \right] \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Et la série converge presque sûrement et dans cette situation, nous pouvons dire que u_t définira une solution unique et strictement stationnaire.

La preuve

Nous pouvons prouver que cette série est convergente à l'aide de la démonstration que $E(|u_t|) < \infty$, nous avons d'abord $\max(\varepsilon_{t-j}) = R, \forall t$, parce que le bruit blanc est une variable et chaque variable est bornée, alors

$$E(|u_t|) \leq R \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} E \left\{ \left| \frac{c_1(t)}{1 - c_0(t)} \varepsilon_{t-i-1} \right| \right\}$$

Et en utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons

$$E(|u_t|) \leq R \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \left\{ \left| \frac{c_1(t)}{1 - c_0(t)} \right| \sqrt{E(\varepsilon_{t-i-1}^2)} \right\}$$

Et selon $\sqrt{E(\varepsilon_{t-i-1}^2)} = \sigma_t$ et $\left| \frac{c_1(t)}{1 - c_0(t)} \right| \sigma_t = \delta < 1$ nous arriverons

$$E(|u_t|) \leq R \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \leq \frac{R\delta}{1 - \delta}$$

Qui fournit la stabilité du modèle en utilisant la condition du théorème.

Périodicité et approche

La périodicité dans l'étude des modèles de séries temporelles non linéaires est un concept très essentiel car le comportement d'une grande partie des séries temporelles non linéaires est périodiquement fréquenté, et les applications dans ce domaine sont très larges car plusieurs phénomènes prennent une forme périodique, donc p représente la période et $h \in \{1, 2, \dots, p\}$. Le processus sous forme périodique est caractérisé par les deux propriétés selon Gladyshev 1961

$$E(u_{t+p}) = E(u_t)$$

Et deuxièmement

$$E [\{u_t - E(u_t)\} \{u_s - E(u_s)\}] = E [\{u_{t+p} - E(u_{t+p})\} \{u_{s+p} - E(u_{s+p})\}]$$

Nous étudierons ce modèle dans le cadre périodique puis la formule deviendra

$$u_{pt+h} = c_0(h)u_{pt+h} + c_1(h)\varepsilon_{pt+h-1}u_{pt+h-1} + \varepsilon_{pt+h}$$

Donc dans cette situation

$$u_{pt+h} = \frac{c_1(h)}{1 - c_0(q)} \varepsilon_{pt+h-1} u_{pt+h-1} + \frac{1}{1 - c_0(q)} \varepsilon_{pt+h}$$

$$u_{pt+h} = \sum_{i=1}^m \frac{c_i(h)}{1 - c_0(h)} \varepsilon_{pt+h-1} u_{pt+h-i} + \frac{1}{1 - c_0(q)} \varepsilon_{pt+h}$$

Soit le théorème suivant qui expose les conditions de stationnarité dans le cadre périodique, nous désignons d'abord par $\vec{u}_t = (u_{pt+1}, u_{pt+2}, \dots, u_{pt+p})^T$ et $\vec{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{pt+1}, \varepsilon_{pt+2}, \dots, \varepsilon_{pt+p})^T$

Théorème 3.9.2 *Le processus $(u_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par l'expression*

$$u_{pt+h} = \sum_{k=2}^m c_k(h) \varepsilon_{pt+h-1}^k u_{pt+h-k} + \varepsilon_{pt+h}$$

prendre la représentation vectorielle suivante où $\varepsilon_t^k = \eta_t$, $\bar{m} = \frac{(m-1)}{p} + 1$

$$\vec{u}_t = (I_p - A_0)^{-1} + \sum_{j=1}^C B_j \vec{u}_{t-j} + \vec{\eta}_t$$

$A_0(l, w)$ et $B_j(l, w)$ matrices, où $A_0(l, w) = c_{l-w}(l) \eta_{pt+l-1} \chi(w < l)$, (l, w) couple représente ligne et la colonne de matrice, et χ est la fonction d'indicateur

$$B_j(l, w) = c_{pj+l-w}(l) \eta_{pt+l-1}$$

avec la convention $c_j(r) = 0$ si $j > m$ et $j < 2$.

Et le modèle accepte une solution de second ordre si et seulement si

$$\det(I_p - \sum_{j=0}^{\bar{m}} z^j B_j) \neq 0, \quad \forall z \in C, \quad \text{où } |z| < 1.$$

La preuve. Voir [4].

Théorème 3.9.3 *Si le modèle prend le cas $m = 1$ alors le modèle sera un modèle de série chronologique bilinéaire d'ordre BL $(0,0,1,1)$*

$$u_{pt+h} = \frac{c_1(h)}{1 - c_0(h)} \varepsilon_{pt+h-1} u_{pt+h-1} + \frac{1}{1 - c_0(q)} \varepsilon_{pt+h} \tag{3.29}$$

Et si on met le coefficient $\frac{c_1(h)}{1 - c_0(q)} = v(h)$ alors la condition nécessaire de stabilité selon la période p sera

$$\max \left\{ \prod_{h=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1} v^2(2h + 1), \prod_{h=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1} v^2(2h + 2) \right\} < 1$$

Nous serons intéressés à estimer les coefficients du modèle en utilisant la méthode des moments (moments théoriques 1, 2 et 3) et par définition nous avons tout ce que i et j

$$m_i(h) = E(u_{pt+h}u_{pt+h-i})$$

Et

$$m_{i,j}(h) = E(u_{pt+h}u_{pt+h-i}u_{pt+h-j})$$

Il est facile de démontrer les relations suivantes

Définition 3.9.1 *Nous définissons les estimateurs empiriques de $m_0(h)$ et $m_{1,j}(h)$ fourni par un échantillon de taille N respectivement*

$$\hat{m}_0(h) = \sum_{t=0}^{N-1} u_{pt+h}^2$$

Et

$$\hat{m}_{1,j}(h) = \sum_{t=0}^{N-1} u_{pt+h}u_{pt+h-1}u_{pt+h-j}$$

Et en utilisant les définitions suivantes des moments, nous avons la proposition suivante

Proposition 3.9.1 *Soit $v(h)$ la vraie valeur, donc la valeur estimée $\hat{v}(h)$ est définie avec l'expression suivante*

$$\hat{v}_N(h) = \frac{\hat{m}_{1,j}(h)}{\hat{m}_0(h)}$$

Proposition 3.9.2 *L'estimateur $\hat{v}_N(h)$ converger presque vers $v_N(h)$ quand N tend vers l'infini.*

Voir [4].

Proposition 3.9.3 *Estimateurs $\hat{c}_1(h)$ et $\hat{c}_0(h)$ convergent presque vers $c_1(h)$ and $c_0(h)$ respectivement lorsque N tend vers ∞ .*

Nous pouvons appliquer la proposition ci-dessus, nous avons donc $\hat{v}_N(h) - v_N(h)$ se rapprochent 0, où N tend vers l'infini

La preuve

$$\hat{v}_N(h) - v_N(h) = \frac{\hat{c}_1(h)}{1-\hat{c}_0(h)} - \frac{c_1(h)}{1-c_0(h)} = \frac{\hat{c}_1(h)-\hat{c}_1(h)c_0(h)-c_1(h)+c_1(h)\hat{c}_0(h)}{\{1-\hat{c}_0(h)\}\{1-c_0(h)\}} \rightarrow 0$$

Alors $\hat{c}_1(h) - c_1(h) + c_1(h)\hat{c}_0(h) - \hat{c}_1(h)c_0(h) \rightarrow 0$ ce qui garantit que

$\hat{c}_1(h) \rightarrow c_1(h)$ et $\hat{c}_0(h) \rightarrow c_0(h)$ où N va à l'infini.

3.10 Modèles bilinéaires de séries chronologiques à coefficients trigonométriques

3.10.1 Introduction

L'analyse de la dynamique en économie est basée sur des observations de processus stochastiques

Nous définissons ce type de modèles avec leurs équations stochastiques comme une séquence exemplaire

$$x_t = \cos(t)x_{t-s} + \sin(t)x_{t-s}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.30)$$

Où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc prend souvent une loi normale $N(0, \sigma_t^2)$, l'ordre de modèle est $BL(s, 0, s, 1)$, alors notre condition de stationarité selon notre partie théorique de cet échantillon des modèles sera

$$\cos^2(t) + \sigma_t^2 \sin^2(t) < 1$$

Donc la condition est vérifiée si et seulement si la variance σ_t^2 est inférieure à 1. On peut écrire le bruit ε_t avec une formule récurrente suivante

$$\begin{aligned} \varepsilon_t = & x_t - \cos(t)x_{t-s} - \sum_{j=1}^{t-1} (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{t-1} \sin(t-i) \prod_{i=0}^{j-1} x_{t-i-s} \\ & \times \{x_{t-j} - \cos(t-j)x_{t-j-s}\} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si on suppose le bruit blanc de modèle (3.30) est un modèle ARCH(1) avec ses coefficients γ_0 et γ_1

$$\varepsilon_t = \xi_t(\gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2)^{0.5}$$

Où ξ_t est une loi normale $N(0, 1)$, et les constants $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 \geq 1$.

Et soit le modèle bilinéaire d'ordre $BL(0, 0, 1, 1)$

$$x_t = \sin(t)x_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.32)$$

Théorème 3.10.1 *Nous supposons que ce modèle bilinéaire (3.32) orienté par un bruit blanc $\{\varepsilon_t\} \sim ARCH(1)$, tel que $\gamma_1 \in [0, 2e^E[$ où $E = 0.5772\dots$. Et quand*

$$-\infty \leq E \ln |b\varepsilon_t| < 0$$

Alors notre modèle (3.32) accepte une solution

$$x_t = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} \sin(t-i)\varepsilon_{t-i-1} \right\} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Cette solution strictement unique et convergente.

Pour donner la preuve de ce théorème on utilise quelques lemmes

Lemme 3.10.1 Si $\{\varepsilon_t\} \sim ARCH(1)$, Où $\gamma_1 \in [0, 2e^E[$ où la constante d'Euler $E = 0.5772\dots$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{(P(|\varepsilon_t| > X))}{X^{-\beta}} = C$$

Pour un nombre positif β donné par une expression

$$\Gamma\left(\frac{\beta + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{(\sqrt{2\gamma_1})^\beta}$$

Preuve. Voir la référence [?]. ■

Nous avons précédemment que la condition $-\infty \leq E \ln |b\varepsilon_t| < 0$ est équivalente à la condition

$$|\sin^2(t)E(\varepsilon_t^2)| < 1 \tag{3.33}$$

Selon cette condition, il suffit de montrer que $E|x_t| < \infty$, dans ce cas on a

$$E|x_t| \leq E \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{j-1} |\sin(t-i)\varepsilon_{t-i-1}| \right\} |\varepsilon_{t-j}| \right]$$

Et nous prenons $\max(|\varepsilon_{t-j}|) = M$, et d'après l'utilisation d'inégalité de Schwarz on a

$$E|x_t| \leq M \left[\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \{E|\sin(t-i)\varepsilon_{t-i-1}|^2\}^{0.5} \right]$$

Et d'après la condition (3.33), nous poserons

$$\{E|\sin(t-i)\varepsilon_{t-i-1}|^2\}^{0.5} = \delta < 1$$

$$E|x_t| < M \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j < \infty$$

Ce qui montre que x_t est convergente.

Notre contribution dans ce type de modèles est basée d'estimer les coefficients de ARCH(1) selon la méthode de Maximum de vraisemblance, alors on a

$$\varepsilon_t^2 = \xi_t^2(\gamma_0 + \gamma_1\varepsilon_{t-1}^2)$$

Tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t-1} = & x_{t-1} - \cos(t-1)x_{t-1-s} - \sum_{j=1}^{t-2} (-1)^{j-1} \prod_{i=0}^{t-2} \sin(t-1-i) \prod_{i=0}^{j-1} x_{t-1-i-s} \\ & \times \{x_{t-1-j} - \cos(t-1-j)x_{t-1-j-s}\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nous dénotons $\gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 = \varphi_t$, et on suppose les observation $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, et d'après la fonction qui a été donnée précédemment

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{t=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi_t}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t} \right\}$$

Pour estimer les paramètres, nous voulons obtenir une solution $\theta = (\gamma_0, \gamma_1)$ qui maximise logarithmique de maximum vraisemblance de la fonction $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Le paramètre que nous allons estimer sera $\theta = (\gamma_0, \gamma_1)$ donc on a

$$Q_N(\theta) = \ln \{F(x_1, x_2, \dots, x_N)\} = \sum_{t=1}^N \left[-\frac{1}{2} \ln(\varphi_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t} \right] - \frac{N}{2} \ln(2\pi)$$

Nous devons calculer les dérivées partielles de $Q_N(t)$, pour simplifier la dérivation on pose

$$L(t) = -\frac{1}{2} \ln(\varphi_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(t)}{\partial \gamma_0} &= -\frac{1}{2\varphi_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t^2} \\ \frac{\partial L(t)}{\partial \gamma_1} &= \varepsilon_{t-1}^2 \left\{ -\frac{1}{2\varphi_t} + \frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t^2} \right\} \end{aligned}$$

Et on va remplacer ε_{t-1} par sa expression (3.34). On aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(t)}{\partial \gamma_0^2} &= \frac{1}{2\varphi_t} - \frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t^3} \\ \frac{\partial^2 L(t)}{\partial \gamma_1^2} &= \varepsilon_{t-1}^4 \left(\frac{1}{2\varphi_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t^3} \right) \\ \frac{\partial^2 L(t)}{\partial \gamma_0 \partial \gamma_1} &= \varepsilon_{t-1}^2 \left(\frac{1}{2\varphi_t^2} - \frac{\varepsilon_t^2}{2\varphi_t^3} \right) \end{aligned}$$

Maintenant, laisse

$$V = \left[\frac{\partial Q_N(t)}{\partial \gamma_0}, \frac{\partial Q_N(t)}{\partial \gamma_1} \right]^T$$

Et

$$W(\theta) = \left[\frac{\partial^2 Q_N(t)}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right]_{i,j=0,1}$$

Dans ce cas notre valeur estimée $\hat{\theta} = (\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1)$ vient de l'équation stochastique

$$V_N(\hat{\theta}) = 0 = V_N(\theta) - W(\theta)(\hat{\theta} - \theta)$$

Et pour approximer à partir de la méthode numérique Newton-Raphson de valeur estimée selon la taille d'échantillon une expression recurente on a

$$\theta^{h+1} = \theta^h - W^{-1}(\theta)V_N(\theta)$$

Où h est l'ensemble des estimations obtenues au h ième des itératives. On peut montrer dans dernier chapitre que avec la simulation et illustration numériques que quand N tends vers ∞ les estimateurs rapprochent vers les valeurs véritables c'est à dire

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \theta^{h+1} = \theta$$

3.10.2 Conclusion générale

Les modèles de séries chronologiques bilinéaires présentent des comportements fondamentaux selon leurs estimateurs et simulations. Ces comportements sont caractérisés parmi plusieurs modèles de la série chronologique par des règles de simulations où les chiffres donnés obligent les staticiens à travailler dans un espace spécial.

Et le goût de manipuler des modèles bilinéaires dans cet espace montre que le champ des séries chronologiques est très large car chaque type nécessiterait une étude différente des autres types de modèles de séries chronologiques. '

On peut en déduire que la recherche en séries chronologiques restera toujours car leurs applications dans plusieurs domaines, comme l'économie est une obligation, et on peut aussi en déduire un retard dans plusieurs domaines de la biologie en raison de l'absence de certaines parties de la série chronologique, on peut prendre un exemple en microéconomie il existe des modèles prendre une formule de calculs fractionnaires différentiels, et ce domaine presque lors de la découverte de cette nature de recherche par des mathématiciens.

CHAPITRE 4

Simulation des modèles bilinéaires et illustration numérique

Dans ce chapitre nous présentons des simulations quelques principaux modèles bilinéaires étudiés dans la partie théorique de thèse, parceque les modèles selon leurs simulations permettent de donner des informations, telles que la moyenne médiane et variances ...etc, pour des variables qui n'ont pas une valeur exacte, mais pour lesquelles nous pouvons connaître, supposer ou calculer une distribution. Si des variables dépendent de ces variables au travers d'une formule établie, elles auront par voie de conséquence aussi une distribution et non une valeur fixe. Les modèles de simulation sont utilisés dans de nombreux domaines tels que la finance et l'assurance, la médecine, la prospection pétrolière et minière, ou la prévision des ventes.

4.1 Les critères de comparaison de modèles

Et pour choisir un meilleur modèle du description le phénomène ou bien déterminer la nature de modèle, on peut utiliser des critères de comparaison entre les modèles, ces critères jouent un rôle important d'évaluer des comportements en économétrie. Soit e_t l'erreur de prévision, alors on a les définitions suivantes

Définition 4.1.1 *L'erreur absolue moyenne (MAE, Mean Absolute Errors)*

$$Mae = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N |e_i|$$

Définition 4.1.2 *L'erreur quadratique moyenne d'un estimateur $\hat{\theta}$ d'un paramètre θ , en anglais mean squared error et noté $Mse(\hat{\theta})$, est une mesure caractérisant la précision de cet estimateur,*

elle est parfois appelée aussi risque quadratique et se définit par son expression

$$Mse(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

Ou bien

$$Mse = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e_t^2$$

Définition 4.1.3 La racine carrée d'un erreur quadratique moyenne (RMSE, Roots Mean Squared Errors) :

$$RMse = \sqrt{Mse}$$

Définition 4.1.4 Le kurtosis est une mesure indirecte de l'aplatissement de la distribution d'une variable aléatoire réelle. Il existe plusieurs mesures de l'acuité et le kurtosis correspond à la méthode de Pearson. On définit Kortosis d'un échantillon par la formule

$$ku = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)^2}$$

Définition 4.1.5 L'asymétrie (skewness en anglais) d'un échantillon, et correspond à une mesure de l'asymétrie de la distribution d'une variable aléatoire réelle, et noté par Sk

$$Sk = \frac{E(x - \mu)^3}{\sigma^2}$$

4.2 Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec la méthode de maximum de vraisemblance

Cette section est consacrée à la simulation d'un cas particulier d'un modèle bilinéaire proposé de formule (3.8), avec un bruit blanc GARCH variant dans le temps déterminé par sa formule (3.9)

$$\begin{cases} x_t = ax_{t-s} + bx_{t-s}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \eta_t h_t, h_t^2 = \gamma_0 + \beta_t(\beta)\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_t(\alpha)h_{t-1}^2 \end{cases}$$

Ce modèle est très efficace dans les applications financières et économiques, et a été discuté en détail par référence au bruit blanc gaussien dans la référence [6], en utilisant la méthode des moindres carrés

(MC), mais ici la simulation se fera selon (MMV). Où le modèle orienté par le bruit blanc GARCH avec leurs coefficients variant dans le temps dans une situation alternative telle que définie ci-dessus. L'outil que nous avons appliqué ici est Matlab 2013, nous allons donner quelques simulations de modèle à partir de changement de nombre des simulations (NS) et la taille d'échantillon (N), nous avons les notations suivantes la vraie valeur θ^0 , la valeur estimée $\hat{\theta}$, nous utilisons ici dans les simulations certains concepts comme le kurtosis (ku), l'asymétrie (sk) et la variance estimée (var), la simulation présente quelques propriétés et remarques illustrées par les tableaux suivants, où chaque tableau donne des remarques ou des observations liées à la théorie de modèles de séries chronologiques bilinéaires. Nous prenons une réelle valeur $\theta^0 = (a, b, \gamma_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (0.15, 0.45, 0.05, 0.01, 0.2, 0.3, 0.4)$.

Tableau 1

$NS = 250$		$s = 1$
N		$\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\gamma}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$
100	θ^0	(0.1704, 0.3702, 0.0536, -0.0037, 0.1990, 0.3281, 0.3299)
250		(0.1755, 0.3634, 0.0625, 0.0010, 0.1978, 0.3225, 0.3430)
500		(0.1769, 0.3788, 0.0698, 0.0065, 0.2004, 0.3275, 0.3571)
1000		(0.1723, 0.3755, 0.0613, 0.0073, 0.1997, 0.3269, 0.3580)
2000		(0.1715, 0.3728, 0.0515, -0.0012, 0.1979, 0.3282, 0.3570)

Tableau 2

$NS = 500$		$s = 1$
N		$\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\gamma}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$
100	θ^0	(0.1521, 0.3509, 0.0488, -0.0046, 0.1775, 0.2952, 0.3409)
250		(0.1675, 0.3631, 0.0532, 0.0011, 0.1841, 0.3202, 0.3522)
500		(0.1748, 0.3694, 0.0581, 0.0001, 0.1942, 0.3285, 0.3514)
1000		(0.1768, 0.3674, 0.0541, 0.0026, 0.1958, 0.3336, 0.3570)
2000		(0.1749, 0.3731, 0.0523, 0.0017, 0.1977, 0.3330, 0.3577)

Tableau 3

$NS = 1000$		$s = 1$
N		$\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\gamma}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$
100	θ^0	(0.1737, 0.3664, 0.0418, -0.0087, 0.1821, 0.3131, 0.3363)
250		(0.1695, 0.3587, 0.0543, -0.0102, 0.1908, 0.3188, 0.3423)
500		(0.1755, 0.3669, 0.0571, -0.0035, 0.1949, 0.3277, 0.3512)
1000		(0.1746, 0.3739, 0.0530, -0.0021, 0.1962, 0.3290, 0.3564)
2000		(0.1725, 0.3763, 0.0512, -0.0010, 0.1986, 0.3293, 0.3584)

Tableau 4

N	NS	order of the model s	coefficients	(\hat{a}, \hat{b})
250	250	$s = 1$	(a, b)	$(0.0197, 0.2966)$
		$s = 2$		$(-0.0064, 0.2401)$
		$s = 3$		$(0.0005, 0.3277)$

Tableau 5

N	NS	(a, b)	$var(\hat{a}, \hat{b})$	$ku(\hat{a}, \hat{b})$	$sk(\hat{a}, \hat{b})$
120	250		$(0.0444, 0.0404)$	$(3.4780, 3.1526)$	$(0.2555, 0.5649)$
480		$(0.2, 0.58)$	$(0.0133, 0.0139)$	$(3.2573, 3.2430)$	$(0.2979, 0.3894)$
900			$(0.0063, 0.0066)$	$(2.9518, 2.9279)$	$(0.0730, 0.2837)$

Commentaires et conclusion

Lorsque nous allons simuler le modèle avec l'outil Matlab, nous observons tout d'abord que les critères significatifs de convergence sont vérifiés, c'est-à-dire quand N tend vers l'infini puis la variance tendra vers zéro, ku tend vers 3 et Sk approximativement à zéro où ces résultats sont illustrés dans Tableau 5. D'un autre côté, si la taille de l'échantillon augmentait, les estimateurs se rapprocheraient des vraies valeurs. Généralement, même si le nombre de simulations est grand, les estimateurs donnent donc une meilleure approximation vers les valeurs réelles, voir les tableaux 1, 2 et 3. De plus, on observe également parmi les ordres du modèle que la meilleure approximation sera donnée où $s = 1$, ce résultat est évident selon le tableau 4. Il y a aussi des perturbations dans la simulation car les coefficients des coefficients de bruit blanc GARCH prennent une situation alternative. Nous observons que si les coefficients sont très faibles, nous constaterons que les valeurs réelles et les valeurs estimées sont identiques voir tableaux. En tant que résultat fondamental, les estimateurs lorsque le modèle prend une expression bilinéaire avec du bruit blanc GARCH, alors les estimateurs suivront les meilleures normes d'estimation. Le comportement asymptotique des estimateurs selon (MMV) avec GARCH est très efficace dans l'approximation, où il y a des cas où les vraies valeurs de leurs estimateurs seront presque identiques. Lorsque nous modifions les coefficients du modèle par leurs estimateurs, alors les deux graphiques seront presque identiques, ils illustrent le comportement asymptotique des estimateurs.

4.3 Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec la méthode des moments

Dans cette section, nous simulerons le modèle pour les trois situations initiales

$$u_{pt+h} = v(h)\varepsilon_{pt+h-1}u_{pt+h-1} + \frac{1}{1 - c_0(h)}\varepsilon_{pt+h}$$

Où $v(h) = \frac{c_1(h)}{1-c_0(h)}$, et le bruit blanc $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ suit une distribution normale. Nous utilisons les notations suivantes (nombre de simulations NS), la taille d'échantillon N , la période p , true values $v(h)$, estimated values $\hat{v}(h)$.

Tableau 1

N	$NS = 250$	$p = 3$
	$v(h) = (v(1), v(2), v(3))$	$\hat{v}(h) = (\hat{v}(1), \hat{v}(2), \hat{v}(3))$
120	(0.05, -0.25, 0.45)	(0.0629, -0.3596, 0.4636)
240		(0.0426, -0.2853, 0.3713)
300		(0.0406, -0.2896, 0.3757)
600		(0.0478, -0.2817, 0.3792)
1200		(0.0488, -0.2738, 0.3769)

Tableau 2

N	$ns = 500$	$p = 3$
	$v(h) = (v(1), v(2), v(3))$	$\hat{v}(h) = (\hat{v}(1), \hat{v}(2), \hat{v}(3))$
120	(0.05, -0.25, 0.45)	(0.0576, -0.2683, 0.3678)
240		(0.0530, -0.2792, 0.3719)
300		(0.0524, -0.2692, 0.3629)
600		(0.0539, -0.2731, 0.3907)
1200		(0.0491, -0.2759, 0.4037)

Tableau 3

N	$ns = 500$	$p = 3$
	$v(h) = (v(1), v(2), v(3))$	$\hat{v}(h) = (\hat{v}(1), \hat{v}(2), \hat{v}(3))$
120	(0.02, 0.40, 0.20)	(0.0114, 0.3346, 0.1910)
240		(0.0170, 0.3453, 0.1958)
300		(0.0177, 0.3470, 0.1939)
600		(0.0235, 0.3518, 0.1974)
1200		(0.0227, 0.3545, 0.1960)

Tableau 4

N	$ns = 1000$	$p = 3$
	$v(h) = (v(1), v(2), v(3))$	$\hat{v}(h) = (\hat{v}(1), \hat{v}(2), \hat{v}(3))$
120	(0.02, 0.40, 0.20)	(0.0217, 0.3428, 0.1360)
240		(0.0204, 0.3393, 0.1922)
300		(0.0240, 0.3464, 0.1946)
600		(0.0236, 0.3516, 0.1963)
1200		(0.0222, 0.3557, 0.1953)

Présentation de quelques critères de convergence de la simulation du modèle

Tableau 5

ns	N	Critères de convergence	Résultats de la simulation
250	120	Var($\hat{v}(1), \hat{v}(2), \hat{v}(3)$)	(0.0497, 0.0406, 0.0719)
	300		(0.0170, 0.0190, 0.0238)
	600		(0.0078, 0.0087, 0.0100)
500	120	Ku($\hat{v}(1), \hat{v}(2), \hat{v}(3)$)	(3.5719, 3.8740, 3.8743)
	300		(3.7087, 2.9867, 3.1688)
	600		(2.7312, 2.7856, 2.8771)
1000	120	Mse($\hat{v}(1), \hat{v}(2), \hat{v}(3)$)	(0.0469, 0.1629, 0.0847)
	300		(0.0182, 0.1365, 0.0594)
	600		(0.0099, 0.1318, 0.0496)

Commentaires et conclusion

Tout d'abord, la question qui se pose de savoir quoi choisir la taille de l'échantillon (120, 240, 300, 600, 1200), car la taille de l'échantillon accepte la division sur la période proposée ici 3 si l'inverse, alors nous trouverons une perturbation dans l'estimation. Dans cette simulation, nous observons quelques remarques principales. Tout d'abord, les critères de convergence ont été vérifiés lorsque la taille de l'échantillon est élevée puis l'erreur quadratique moyenne mse, la variance var tendra vers zéro. On voit également que le kurtosis (ku) a été rapproché de 3 ce qui montre le comportement asymptotique normal des estimateurs. Les valeurs estimées tendent vers les vraies valeurs. on voit aussi qu'il y a compatibilité entre les graphes des modèles, c'est-à-dire avec les coefficients réels et les graphes avec les valeurs estimées. Nous observons également que si les valeurs vraies sont plus petites, alors les valeurs estimées seront plus proches des valeurs vraies, voir les tableaux 3 et 4. Sinon, la variation du nombre de simulations montre qu'il y a des cas où les estimateurs et les valeurs vraies sont plus identiquement, voir par exemple les tableaux 1, 2 et 3, et comme résultat final pour cette simulation, nous pouvons dire que la méthode des moments est très efficace et raisonnable. Pour le cas initial de ce modèle, la méthode a donné de bons résultats mais dans d'autres articles et avec la programmation et la simulation avec Matlab donnera quelques estimations pour les cas non initiaux.

4.4 Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec la méthode de moindres carrés

Soit $a = (a_1, a_2, a_3)$ vecteur de paramètres appartenant à un sous-ensemble ouvert $I_1 \times I_2 \times I_3$ inclus dans \mathbb{R}^3 , l'écriture $t \equiv 1 [3]$ a un sens dans le reste de la division ($t = 3n + 1, n \in \mathbb{N}$), les coefficients

variant dans le temps sont définis par l'expression

$$\phi_t(a) = \begin{cases} a_1, & t \equiv 1 [3] \\ a_2, & t \equiv 2 [3] \\ a_3, & t \equiv 0 [3] \end{cases}$$

Cette section est consacrée à la simulation du modèle (3.6) : $X_t = \phi_t(a)X_{t-s}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$, avec GARCH (1,1) bruit blanc où $\gamma_0 = 0.005$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ tel que $\beta_t(\beta)$ et $\alpha_t(\alpha)$ sont définis par les expressions dans l'étude théorique. Les valeurs véritables (a_1, a_2, a_3) et leurs valeurs estimées $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$. Dans cette simulation, nous prenons $s = 2$ et la formule de bruit blanc GARCH comme suit

$$\varepsilon_t = \eta_t h_t, \quad h_t^2 = 0.005 + \alpha_t(0.3, 0.4)\varepsilon_t^2 + \beta_t(0.003, 0.001)h_t^2$$

Tableau 01

NS	N	les valeurs véritables (a_1, a_2, a_3)	Estimateurs ($\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$)
250	300		(0.0097, 0.3230, 0.3706)
	600		(0.0182, 0.2872, 0.3797)
	900	(0.02, 0.0.25, 0.45)	(0.0129, 0.2879, 0.3802)
500	300		(0.0166, 0.2704, 0.4119)
	600		(0.0225, 0.2787, 0.4152)
	900		(0.0220, 0.2795, 0.4456)

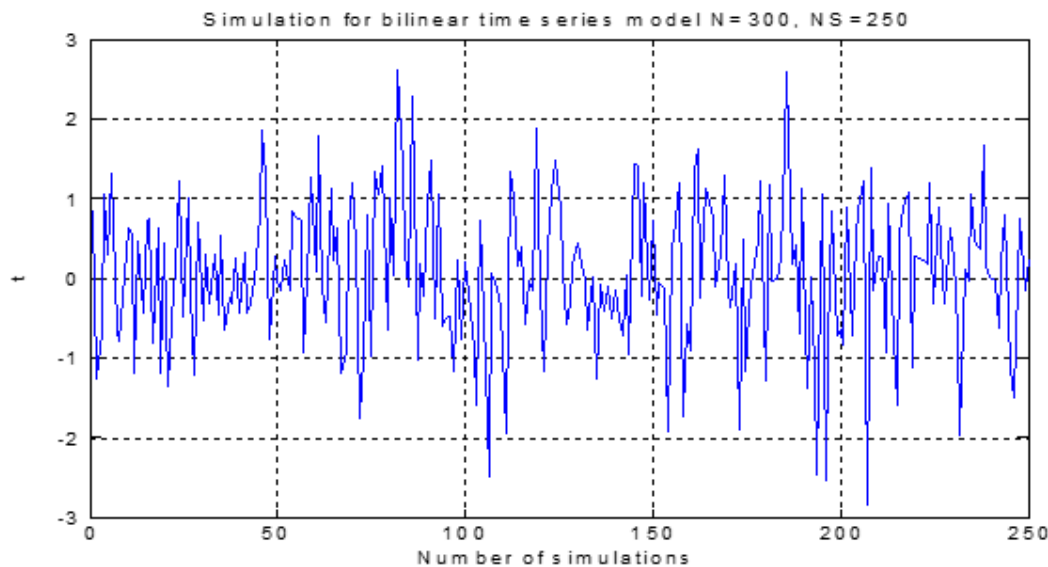
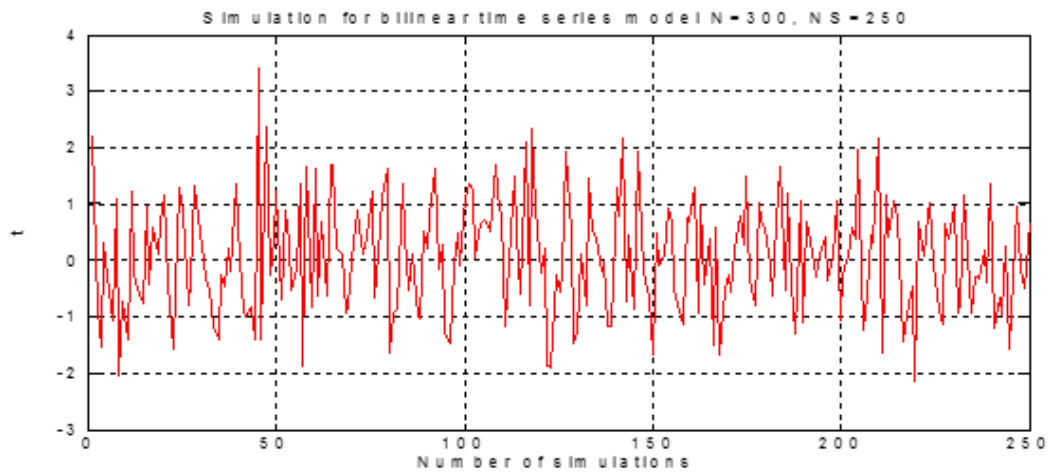
Tableau 2

NS	N	Valeurs véritables ($\gamma_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$)	Estimateurs $\hat{\gamma}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$
250	300		(0.015, 0.098, 0.235, 0.082, 0.033)
	600		(0.009, 0.165, 0.385, 0.007, 0.014)
	900	(0.005, 0.3, 0.4, 0.003, 0.001)	(0.003, 0.263, 0.388, 0.007, 0.014)
500	300		(0.003, 0.369, 0.387, 0.006, 0.003)
	600		(0.003, 0.369, 0.387, 0.006, 0.002)
	900		(0.004, 0.318, 0.407, 0.010, 0.002)

Dans la situation $\beta_t(\beta) = 0$ on trouve

Tableau 3

NS	N	$a_1, a_2, a_3, \gamma_0, \alpha_1, \alpha_2,$	$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{\gamma}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2,$
250	300	(0.02, 0.25, 0.45, 0.005, 0.3, 0.4)	(0.022, 0.234, 0.453, 0.005, 0.289, 0.406)
500	600		(0.0198, 0.252, 0.398, 0.005, 0.301, 0.411)



Commentaires et remarques

Tout d'abord, la question qui se pose ici pourquoi nous avons pris les tailles d'échantillon 300, 600 et 900 nous devons écrire $N = 3P$, car le nombre de paramètres du modèle est 3. L'illustration numérique du modèle démontre que l'augmentation du volume et des échantillons donne une meilleure approximation de les vraies valeurs, en revanche, l'augmentation du nombre de simulation assure l'approximation entre les valeurs estimées et les valeurs réelles, le bruit blanc ARCH (1) fait une bonne approximation des estimateurs par rapport au modèle GARCH(1,1). Dans le cas où $\beta_t = 0$ (tableau 3), alors le bruit blanc sera ARCH (1), on observe qu'il y a presque une compatibilité entre les valeurs et leurs estimateurs. De plus on voit des graphes presque identiques, on note que cette observation est vérifiée dans le cas où les coefficients sont des constantes voir référence [31]. Notre simulation montre donc que l'approche

d'estimation est très efficace lorsque la position des coefficients avec de temps varié.

4.5 Simulation d'un échantillon des modèles bilinéaires avec un bruit blanc ARCH

Cette section est consacrée à la simulation du modèle $X_t = b(t)X_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$, avec la méthode des moments avec bruit blanc gaussien avec zéro moyen et variance 1. Nous utilisons les notations, le nombre de simulations N_s , la taille de l'échantillon N , la vraie valeur du vecteur (b_1, b_2) et valeur estimée (\hat{b}_1, \hat{b}_2) , $ku(1)$ le kurtosis où le modèle suit un bruit blanc aléatoire, $ku(2)$ le kurtosis sur $ARCH(1)$.

Tableau 1

$N_s = 250$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.0653, 0.4931)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.1022, 0.4789)
$N = 1000$		(0.0937, 0.5438)

Tableau 2

$N_s = 500$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.0776, 0.4930)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.0921, 0.5240)
$N = 1000$		(0.0911, 0.5416)

Tableau 3

$N_s = 750$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.0765, 0.4996)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.0864, 0.5323)
$N = 1000$		(0.0872, 0.5419)

Tableau 4

$N_s = 1000$		
the sample size N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.06350, 0.4905)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.07650, 0.5229)
$N = 1000$		(0.0869, 0.5419)

Simulation du modèle avec le bruit ARCH (1) où $a_0 = 0.0004$, $a_1 = 0.33$

Tableau 5

$N_s = 250$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.0779, 0.5214)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.0813, 0.5379)
$N = 1000$		(0.0856, 0.5401)

Tableau 6

$N_s = 500$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.0852, 0.5219)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.0838, 0.5379)
$N = 1000$		(0.0849, 0.5363)

Tableau 7

$N_s = 750$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.0903, 0.5491)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.1051, 0.5456)
$N = 1000$		(0.1012, 0.5489)

Tableau 8

$N_s = 1000$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.0911, 0.5434)
$N = 300$	(0.09, 0.55)	(0.0914, 0.5507)
$N = 1000$		(0.0932, 0.5521)

Dans ces tableaux, nous modifions les vraies valeurs pour prouver l'estimation exacte avec des variables aléatoires bruit blanc

Tableau 9

$N_s = 250$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.6970, 0.1503)
$N = 300$	(0, 85, 0.15)	(0.7282, 0.1772)
$N = 1000$		(0.7805, 0.1215)

Tableau 10

$N_s = 500$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.6607, 0.1275)
$N = 300$	(0.85, 0.15)	(0.7460, 0.1414)
$N = 1000$		(0.7961, 0.1547)

Tableau 11

$N_s = 750$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.7012, 0.1065)
$N = 300$	(0, 85, 0.15)	(0.7596, 0.1092)
$N = 1000$		(0.7911, 0.1213)

Tableau 12

$N_s = 1000$		
the sample size N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.6715, 0.1376)
$N = 300$	(0, 85, 0.15)	(0.7417, 0.1485)
$N = 1000$		(0.7820, 0.1313)

Tableau 13

$N_s = 250$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.7713, 0.1505)
$N = 300$	(0, 85, 0.15)	(0.8021, 0.1502)
$N = 1000$		(0.8165, 0.1510)

Tableau 14

$N_s = 500$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.7958, 0.1507)
$N = 300$	(0.85, 0.15)	(0.8492, 0.1498)
$N = 1000$		(0.8511, 0.1519)

Tableau 15

$N_s = 750$		
the sample size N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.8014, 0.1481)
$N = 300$	(0.85, 0.15)	(0.8488, 0.1515)
$N = 1000$		(0.8501, 0.1493)

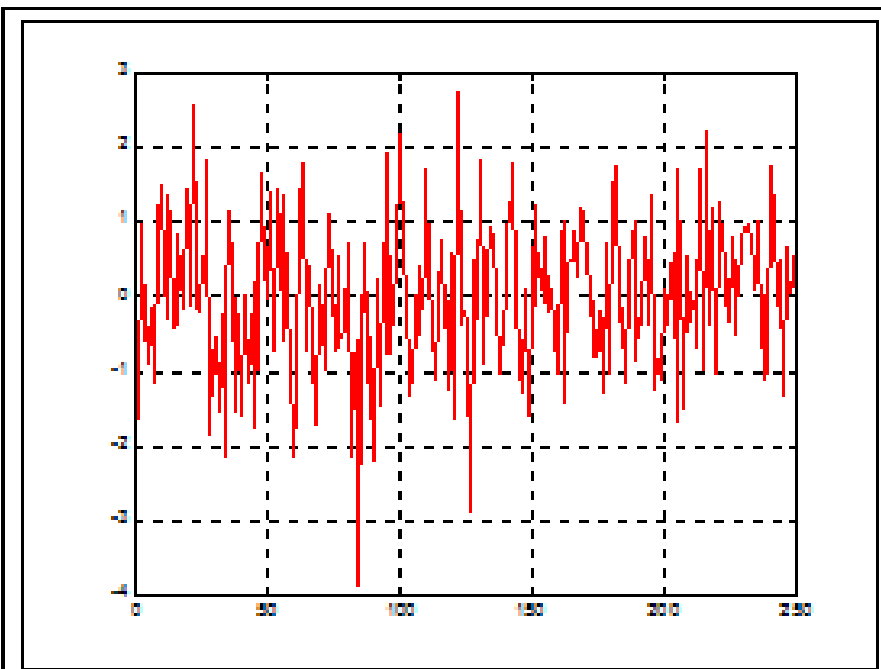
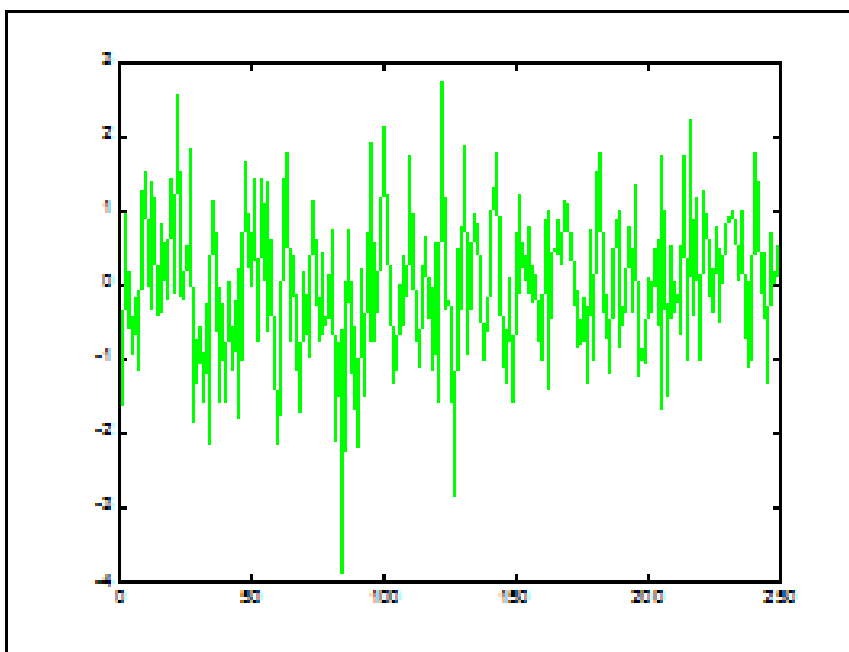
Table 16

$N_s = 1000$		
N	(b_1, b_2)	(\hat{b}_1, \hat{b}_2)
$N = 100$		(0.8166, 0.1490)
$N = 300$	(0.85, 0.15)	(0.8512, 0.1489)
$N = 1000$		(0.8494, 0.1504)

Quelques comparaisons des critères de kurtosis où $(b_1, b_2) = (0.85, 0.15)$.

Table 17

N_s	N	$ku(1)$	$ku(2)$
250	100	(4.2469, 4.4903)	(3.3012, 3.5231)
	300	(2.6610, 3.1036)	(3.2145, 3.0741)
	1000	(3.4688, 2.8920)	(3.0029, 3.0569)
500	100	(3.2358, 4.0170)	(3.1118, 3.1501)
	300	(3.2116, 3.2618)	(3.1392, 3.3047)
	1000	(3.0669, 5.9087)	(3.0593, 3.2753)
750	100	(4.5387, 3.8621)	(3.1187, 3.1422)
	300	(3.1198, 3.6389)	(3.0833, 3.0717)
	1000	(3.1787, 3.5157)	(3.2915, 3.1221)

Graph the model where $N_s = 250$, $N = 1000$ and $\beta^*(0.005, 0.09, 0.15, 0.28)$ 

Coefficients of model replaced by estimated values

L'illustration numérique de la simulation des modèles montre que l'augmentation de la taille des échantillons donne une meilleure approximation des estimateurs vers les vraies valeurs, d'autre part aussi l'augmentation du nombre de simulations assure une convergence entre les valeurs estimées et les valeurs réelles, nous observons les valeurs estimées les plus proches de la valeur réelle est dans le nombre de simulation $N_s = 500$ et la taille $N = 1000$ où le bruit blanc suit la loi gaussienne, mais par

rapport à où le bruit blanc suit ARCH (1), alors nous observons que mieux approximation en $N_s = 750$ et $N = 100$. En termes de comparaison, nous trouvons que la méthode d'estimation avec moments du modèle avec ARCH (1) est la meilleure dans l'approximation.

La valeur statistique de kurtoisis, est un critère inférentiel fondamental dans les statistiques qu'il mesure, sans tenir compte de la dispersion (donnée par l'écart-type), de la distribution des masses de probabilité autour de leur centre, donnée par l'espérance mathématique, c'est-à-dire dans un d'une certaine manière, leur concentration près ou à distance du centre de probabilité.

Ensuite, dans le tableau 17, nous remarquons que kurtoisis est plus proche dans le cas général de 3. ce qui montre la force comportementale asymptotique des estimateurs. Et si nous regardons avec précision, nous constatons que le kurtoisis par rapport au modèle avec bruit blanc converge vers trois de plus que le modèle à variables aléatoires.

4.6 Simulation d'un modèle bilinéaire avec la méthode des moments

Dans cette partie nous avons réalisé des simulations de trois modèles différents :

$$X_{2t+v} = b(v) X_{2(t-1)+v} \varepsilon_{2t+v-1} + \varepsilon_{2t+v} \quad (4.1)$$

Pour $v = 1, 2$, $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc $N(0, 1)$. Il s'agit d'un modèle $PBL(0, 0, 2, 1)_2$. Avec les notations utilisées dans la section (N la taille d'échantillon, var la variance, s la période, b valeur vrai, et \hat{b} leur valeur estimé). Les simulations de ce modèle (4.1) selon la taille d'échantillon et nombre des simulations donnent les résultats suivants

Tableau 1

Pour $N = 500, s = 2$	$ns = 250$
$(b(1), b(2))$	$(0.05, 0.4500)$
$(\hat{b}(1), \hat{b}(2))$	$(0.0515, 0.4542)$
$(\text{var}_{\hat{b}(1)}, \text{var}_{\hat{b}(2)})$	$(0.0100, 0.0098)$
$(\text{mse}(1), \text{mse}(2))$	$(0.1957, 0.0018)$

Tableau 2

pour $N = 1000$ et $s = 2$	et $ns = 500$
$(b(1), b(2))$	$(0.05, 0.45)$
$(\hat{b}(1), \hat{b}(2))$	$(0.0517, 0.4442)$
$(\text{var}_{\hat{b}(1)}, \text{var}_{\hat{b}(2)})$	$(0.0041, 0.0058)$
$(\text{mse}(1), \text{mse}(2))$	$(0.0943, 0.0086)$

On considère maintenant un modèle bilinéaire de période 7

$$X_{7t+v} = b(v) X_{7t+v-2} \varepsilon_{7t+v-1} + \varepsilon_{7t+v} \quad (4.2)$$

Où $v \in \{1, 2, \dots, 7\}$, les simulations de ce modèles sont présentés dans les tableaux suivants

Tableau 3 (ns=500)

N	$b(v)=(0.0100,0.1500,0.3000,0.4000,-0.4000,0.5000,0.7000)$
100	$\hat{b}(v)=(0.0173,0.2255,0.2768,0.3459,-0.3697,0.4447,0.5227)$
500	$\hat{b}(v)=(0.0181,0.2316,0.2786,0.3518,-0.3712,0.4502,0.5159)$
1000	$\hat{b}(v)=(0.0125,0.2307,0.2785,0.3553,-0.3695,0.4512,0.5151)$

Tableau 4 (kurtoisis ku)

N	$b(v)=(0.0100,0.1500,0.3000,0.4000,-0.4000,0.5000,0.7000)$
700	$ku(v)=(4.2013,3.7909,3.7373,5.6398,11.4534,7.0754,4.1555)$
1400	$ku(v)=(4.2153,3.7758,3.7373,4.222,11.0232,7.0712,3.9925)$
2100	$ku(v)=(4.1221,3.3521,3.2331,3.9152,4.0484,3.7472,3.6833)$

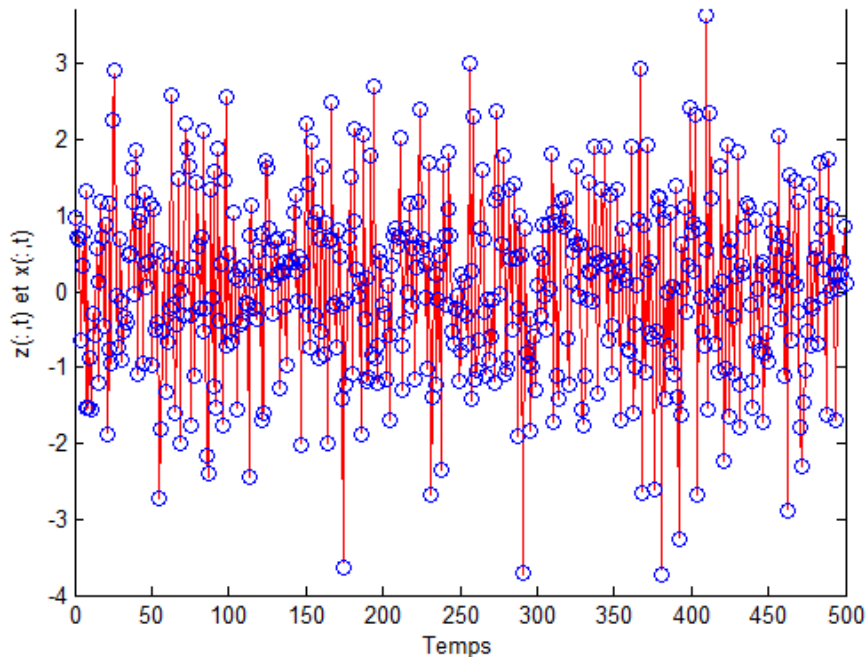
Tableau 5 (variance)

N	$b(v)=(0.0100,0.1500,0.3000,0.4000,-0.4000,0.5000,0.7000)$
700	$var(v)=(0.1789 \ 0.1383 \ 0.1210 \ 0.1352 \ 0.1475 \ 0.1521 \ 0.1623)$
1400	$var(v)=(0.1058 \ 0.0799 \ 0.0674 \ 0.0779 \ 0.0910 \ 0.0911 \ 0.0975)$
2100	$var(v)=(0.1058 \ 0.0799 \ 0.0674 \ 0.0779 \ 0.0910 \ 0.0911 \ 0.0975)$

4.6.1 Commentaire

Cette section est consacrée de présenter les simulations des propriétés théoriques des estimateurs pour deux modèles avec deux périodes différentes. Où on trouve que les résultats empiriques obtenus dans les tableaux permettent d'observer les conclusions suivantes. L'accroissement de la taille d'échantillon N améliore de une façon substantielle les résultats en termes de réduction de biais et de précision pour les estimateurs. En effet, les estimateurs $\hat{b}_{i,N}(v)$ calculés sur les 500 simulations est d'autant plus proche de la vraie valeur $b_i(v)$. En plus quand la taille d'échantillon augmente plus variance des estimations est proche de zéro, ce qui améliore la précision des estimations. Ces résultats numériques confirment la théorie asymptotique et existence de convergence. Plus que l'échantillon élevé la kurtosis tend vers 3 dans le cas gaussien, et l'observation des tableaux souligne que la moyenne des coefficients de kurtosis sur les 500 simulations a tendance à se rapprocher de la valeur de référence 3 lorsque la taille d'échantillon s'accroît. Cette observation empirique précise normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{b}_{i,N}(v)$.

On peut remarquer que les valeurs vrais et les
Valeurs estimés sont compatibles selon le graphe



4.7 Annexe de quelques programmes de simulation avec l'outil Matlab

MATLAB, ou Matrix Laboratory, est un outil informatique utilisé dans le domaine des différents langages de programmation, et leurs applications sont innombrables selon cotés scientifiques, les enquêtes économistes. MATLAB dispose d'un large éventail d'applications, qui permet aux utilisateurs de manipuler et d'analyser des données à travers des images, des graphiques, des tableaux et des algorithmes. Il offre un niveau de précision mathématique plus élevé pour les calculs complexes.

MATLAB contient un support solide pour la précision mathématique, au-dessus et au-delà d'autres programmes qui manipulent et analysent les données. Parce qu'il est rapide d'interpréter les algorithmes et les équations complexes, aussi, MATLAB peut stocker des fichiers avec une plus grande précision. MATLAB peut être programmé pour stocker les informations. On peut dire aussi que Matlab est un outil plus généralisé à plusieurs outils comme (Statistica, R, Eviews, Minitab,... etc).

4.7.1 Programme d'un modèles bilinéaires avec des coefficients périodiques

```
clc;clear all;close all;
```

```
% Initiations des paramètres
```

```

b_1=input('b_1=');
b_2=input('b_2=');
b_3=input('b_3=');
N=input('N=');
% La taille d'échantillon
%N=4k
ns=input('ns=');
b_v=[b_1,b_2,b_3];
%XX=[3*b_1^4,3*b_2^4,b_1^2*b_2^2];
max(XX);
randn('seed',0);
s=3;
NN=N/4;
M=(N-NN)/3;
if max(((b_1)^2)*((b_3)^2),((b_2)^2))<1
%c=zeros(2*maxlag+1,ns);
x=zeros(ns,N+s);xx=zeros(ns,M);yy=zeros(ns,M);
ww=randn(ns,N+s);c=zeros(ns,1);cc=zeros(ns,1);
%Simulation d'une série périodique à deux régimes
Mdl0 = garch('Constant',0.0001,'GARCH',0.5,'ARCH',0.2);
[v,y] = simulate(Mdl0,250);
for t=3:N+s
    v=t+1-3*floor((t)/3);
    x(:,t)=b_v(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
x=x(:,NN-2:N+s);
%Estimation des fonction des covariances
%Le modèle est  $X(t)=b(t)*X(t-2)*u(t-1)+u(t)$ 
%u(t) bruit blanc gaussien
% Après l'estimation on va faire plot(x(:,t))
for v=1:s

```



```

for t=1:M
xx(:,t)=x(:,3*t+v-1).*x(:,3*t+v-1);
yy(:,t)=x(:,3*t+v-1).*x(:,3*t+v-2).*x(:,3*t+v-3);
end
for i=1:ns
% Initiations des moments empiriques
c(i,:)=mean(xx(i,:));
cc(i,:)=mean(yy(i,:));
par(i)=cc(i,:)./c(i,:);
end
b_v_est(v)=mean(par);
var_est(v)=var(par);
mse_est(v)=mse(par);
rmse_est(v)=sqrt(mse(par));
SK_est(v)=skewness(par);
KU_est(v)=kurtosis(par);
max_est(v)=max(par);
min_est(v)=min(par);
end
[b_v(1),b_v(2),b_v(3)]
disp('les paramètres estimés');
[b_v_est(1),b_v_est(2),b_v_est(3)]
disp('leurs variances');
[var_est(1),var_est(2),var_est(3)]
disp('leurs mse')
[mse(b_1),mse(b_2),mse(b_3)]
disp('leurs rmse')
[(mse(b_1))^0.5,(mse(b_2))^0.5,(mse(b_3))^0.5]
disp('leurs kurtosis')
[KU_est(1),KU_est(1),KU_est(3)]
disp('leurs skewness')

```

```

[SK_est(1),SK_est(1),SK_est(3)]
disp('leurs min')
[min_est(1),min_est(1),min_est(3)]
disp('leurs max')
[max_est(1),max_est(1),max_est(3)]
disp('la diférence')
[b_v_est(1)-b_v(1),b_v_est(2)-b_v(2),b_v_est(3)-b_v(3)]
else
    no
end
figure(1)
plot(x(:,t),'r'),
grid
xlabel('nombre de simulation'),
ylabel('t'),
title('SIMULATION DE MODELE BILINAIRE')
figure(2)
plot([v,y],'g'),
grid
figure(3)
plot(t,x(:,t),'r',t,[v,y],'g')

```

4.7.2 Programme d'un modèle bilinéaire (7 coefficients périodiques)

```

clear all;
% s est la période de modèles ici sera 7.
s=7;
ss=4;
% ns est un nombre des simulation
ns=500;
% l nitialisation des coefficients
b_1=0.5;b_2=b_1;b_3=b_1;b_4=b_1;b_5=-0.5;b_6=b_5;b_7=b_5;

```

```

b_v=[b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7];
N=700;
M=N/s;
randn('seed',0);
x=zeros(ns,N+s);
xx=zeros(ns,M);
yy=zeros(ns,M);
ww=randn(ns,N+s);
c=zeros(ns,1);
cc=zeros(ns,1);
%simulation d'une séries périodiques à quatres régimes
for t=3:N+s
    v=t-s*floor((t-1)/s);
    if v<=ss
% Le modèle bilinéaire défini
        x(:,t)=b_v(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
    else
        x(:,t)=b_v(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
    end
end
%Estimation des fonction des covariances
for v=1:s
    for t=1:M
        xx(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v);
        yy(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v-1).*x(:,s*t+v-2);
    end
for i=1:ns
    c(i,:)=mean(xx(i,:));
    cc(i,:)=mean(yy(i,:));
    par(i)=cc(i,:)./c(i,:);
    rms(i)=(b_v(v)-par(i))^2;

```

```

end
max_est(v)=max(par);
min_est(v)=min(par);
b_v_est(v)=mean(par);
Var_est(v)=sqrt(var(par));
rmse(v)=sqrt(mean(rms));
KU(v)=kurtosis(par);
SK(v)=skewness(par);
x(:,t)=b_v_est(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
% Les coefficients réels
y1=[b_v(1),b_v(2),b_v(3),b_v(4),b_v(5),b_v(6),b_v(7)]
% Les coefficients estimés
y2=[b_v_est(1),b_v_est(2),b_v_est(3),b_v_est(4),b_v_est(5),b_v_est(6),b_v_est(7)]
% Les coefficients estimés supérieurs
y3=[max_est(1),max_est(2),max_est(3),max_est(4),max_est(5),max_est(6),max_est(7)]
% Les coefficients estimés inférieurs
y4=[min_est(1),min_est(2),min_est(3),min_est(4),min_est(5),min_est(6),min_est(7)]
% Les variances estimées
y5=[Var_est(1),Var_est(2),Var_est(3),Var_est(4),Var_est(5),Var_est(6),Var_est(7)]
% Les racines des erreurs quadratiques moyennes
y6=[rmse(1),rmse(2),rmse(3),rmse(4),rmse(5),rmse(6),rmse(7)];
% Kurtoisis
y7=[KU(1),KU(2),KU(3),KU(4),KU(5),KU(6),KU(7)]
% Skewnesse
y8=[SK(1),SK(2),SK(3),SK(4),SK(5),SK(6),SK(7)]
figure(1)
plot(x(:,t),'r'),hold on;
plot(z(:,t),'g'),hold off;
title('Comparaison entre les coefficients')
xlabel('Time'),ylabel('x(:,t)')

```

4.7.3 Programmes d'un modèle bilinéaires avec deux régimes

```

clc;clear all;close all;
s=input('s=');
ns=input('ns=');
b1=input('b1=');
b2=input('b2=');
a1=input('a1=');
a2=input('a2=');
ss=input('ss=');
% ss la variance
N=input('N=');
if max(b1^2,b2^2)+ss*max(a1^2,a2^2)< 1
b=[b1,b2];a=[a1,a2];
c_v=[b,a];
M=N/2;
randn('seed',0);
x=zeros(ns,N+s);xx=zeros(ns,M);yy=zeros(ns,M);zz=zeros(ns,M);
ww=randn(ns,N+s);c=zeros(ns,1);cc=zeros(ns,1);ccc=zeros(ns,1);
%simulation d'une séries périodiques à deux régimes
for t=4:N+s
v=t-s*floor((t-1)/s);
x(:,t)=b(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+a(v)*x(:,t-3).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
%Estimation des fonction des covariances
for v=1:s
for t=2:M
xx(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v);
yy(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v-1).*x(:,s*t+v-2);
zz(:,t)=x(:,s*t+v).*x(:,s*t+v-1).*x(:,s*t+v-3);
end

```

```
for i=1:ns
    c(i,:)=mean(xx(i,:));
    cc(i,:)=mean(yy(i,:));
    ccc(i,:)=mean(zz(i,:));
    par1(i)=cc(i,:)./c(i,:);
    par2(i)=ccc(i,:)./c(i,:);
    rms1(i)=(b(v)-par1(i))^2;
    rms2(i)=(a(v)-par2(i))^2;
end

max_best(v)=max(par1);
SK1(v)=skewness(par1);
KU1(v)=kurtosis(par1);
max_aest(v)=max(par2);
SK2(v)=skewness(par2);
KU2(v)=kurtosis(par2);
min_best(v)=min(par1);
min_aest(v)=min(par2);
b_est(v)=mean(par1);
a_est(v)=mean(par2);
Varb_est(v)=sqrt(var(par1));
Vara_est(v)=sqrt(var(par2));
b_rmse(v)=sqrt(mean(rms1));
a_rmse(v)=sqrt(mean(rms2));
end

y1=[c_v(1),c_v(2),c_v(3),c_v(4)]
y2=[b_est(1),b_est(2),a_est(1),a_est(2)]
y3=[max_best(1),max_best(2),max_aest(1),max_aest(2)]
y4=[min_best(1),min_best(2),min_aest(1),min_aest(2)]
y5=[Varb_est(1),Varb_est(2),Vara_est(1),Vara_est(2)]
y6=[(Varb_est(1))^0.5,(Varb_est(2))^0.5,(Vara_est(1))^0.5,(Vara_est(2))^0.5]
y7=[(b_rmse(1))^2,(b_rmse(2))^2,(a_rmse(1))^2,(a_rmse(2))^2]
```

```

y8=[b_rmse(1),b_rmse(2),a_rmse(1),a_rmse(2)]
y9=[KU1(1),KU1(2),KU2(1),KU2(2)]
y10=[SK1(1),SK1(2),SK2(1),SK2(2)]
else
    Le_modele_est_non_stationnaire
end
figure(1)
plot(x(:,t),'r'),
grid
xlabel('nombre de simulation'),
ylabel('t'),
title('SIMULATION DE MODELE BILINAIRE')

```

4.7.4 Programme d'un bruit blanc GARCH

```

Mdl = garch('Constant',0.01,'GARCH',0.7,'ARCH',0.25);
rng default; % For reproducibility
[Vn,Yn] = simulate(Mdl,1000,'NumPaths',2);
Vn(1,:) % Display variances
figure
subplot(2,1,1)
plot(Vn)
xlim([0,1000])
title('Conditional Variances')
subplot(2,1,2)
plot(Yn)
xlim([0,1000])
title('Innovations')

```

4.7.5 Programme d'un modèle bilinéaire avec un bruit blanc GARCH

```

clc;clear all;close all;
b_1=input('b_1=');

```

```

b_2=input('b_2=');
b_3=input('b_3=');
N=input('N=');
%N=4k
ns=input('ns=');
b_v=[b_1,b_2,b_3];
%XX=[3*b_1^4,3*b_2^4,b_1^2*b_2^2];
%max(XX);
randn('seed',0);
s=3;
NN=N/4;
M=(N-NN)/3;
if max(((b_1)^2)*((b_3)^2),((b_2)^2))<1
%c=zeros(2*maxlag+1,ns);
x=zeros(ns,N+s);xx=zeros(ns,M);yy=zeros(ns,M);
ww=randn(ns,N+s);c=zeros(ns,1);cc=zeros(ns,1);
%simulation d'une séries périodiques à deux régimes
Md10 = garch('Constant',0.0001,'GARCH',0.5,'ARCH',0.2);
[v,y] = simulate(Md10,250);
for t=3:N+s
    v=t+1-3*floor((t)/3);
    x(:,t)=b_v(v)*x(:,t-2).*ww(:,t-1)+ww(:,t);
end
x=x(:,NN-2:N+s);
%Estimation des fonction des covariances
%Le modèle est  $X(t)=b(t)*X(t-2)*u(t-1)+u(t)$ 
%u(t) bruit blanc gaussien
%après l'estimation on va faire plot(x(:,t))
for v=1:s
    for t=1:M
        xx(:,t)=x(:,3*t+v-1).*x(:,3*t+v-1);
    end
end

```



```
yy(:,t)=x(:,3*t+v-1).*x(:,3*t+v-2).*x(:,3*t+v-3);
end
for i=1:ns
    c(i,:)=mean(xx(i,:));
    cc(i,:)=mean(yy(i,:));
    par(i)=cc(i,:)./c(i,:);
end
%normplot(par)
%pause
%histfit(par)
%pause
b_v_est(v)=mean(par);
var_est(v)=var(par);
mse_est(v)=mse(par);
rmse_est(v)=sqrt(mse(par));
SK_est(v)=skewness(par);
KU_est(v)=kurtosis(par);
max_est(v)=max(par);
min_est(v)=min(par);
end
[b_v(1),b_v(2),b_v(3)]
disp('les paramètres estimés');
[b_v_est(1),b_v_est(2),b_v_est(3)]
disp('leurs variances');
[var_est(1),var_est(2),var_est(3)]
disp('leurs mse')
[mse(b_1),mse(b_2),mse(b_3)]
disp('leurs rmse')
[(mse(b_1))^0.5,(mse(b_2))^0.5,(mse(b_3))^0.5]
disp('leurs kurtosis')
[KU_est(1),KU_est(1),KU_est(3)]
```

```
disp('leurs skewness')
[SK_est(1),SK_est(1),SK_est(3)]
disp('leurs min')
[min_est(1),min_est(1),min_est(3)]
disp('leurs max')
[max_est(1),max_est(1),max_est(3)]
disp('la diférence')
[b_v_est(1)-b_v(1),b_v_est(2)-b_v(2),b_v_est(3)-b_v(3)]
else
    no
end
% c,b,g,r,y,h,t,m,p,v,k,d
figure(1)
plot(x(:,t),'r'),
grid
xlabel('nombre de simulation'),
ylabel('t'),
title('SIMULATION DE MODELE BILINAIRE')
figure(2)
plot([v,y],'g'),
grid
figure(3)
plot(t,x(:,t),'r',t,[v,y],'g')
```

Bibliographie

- [1] Andersen. T. G. (1994). Stochastic autoregressive volatility : a framework for volatility modeling. *Mathematical Finance* 4 : 75-102.
- [2] Bhaskara Rao. M. And Subba Rao. T. And Walker. M. A. (1983). On the existence of some bilinear time series models. *Journal of Time Series Analysis*. 4(2), 95-110.
- [3] Bibi A (2003). On the covariance structure of time varying bilinear models. *Stochastic Analysis and Applications*. 1, 25-60.
- [4] Bibi A and Antony G. Propriétés dans L^2 et estimation des processus purement bilinéaires et strictement superdiagonaux à coefficients périodiques. *The Canadian Journal of Statistics*. 1, 131-148.
- [5] Bibi A and Oyet A. 2002. A note on the properties of some time varying bilinear models. *Statistics and probability letters*, 12, 399-411.
- [6] Bibi A and Oyet A. J. 2004. Estimation of some bilinear time series models with time varying coefficients. *Stochastic Analysis and Applications*. Vol. 22, part 2, pages 355-376.
- [7] Brockwell P and David R (1981) :Time series. Theory and methods. (second edition). New York. Springer.
- [8] ByoungSeon. Choi. (1992). ARMA Model Identification. Springer-Verlag New York.
- [9] Christian. F. (1999). ARMA models with bilinear innovations. *Stochastic Models*. 15(1), 29-52.
- [10] Christian. F and Zakoian. J. M. (2010). GARCH models : Structure, statistical inference and financial applications. Hoboken, NJ : Wiley.
- [11] Christian. M. Hafner. (1997). Nonlinear time series analysis with applications to foreign exchange rate volatility. Springer
- [12] Chung, K. L. (1974). A course in probability theory, 2nd ed. Academic Press : London.

-
- [13] Doob, J, L.(1953). Stochastic processes. John wiley, New York.
- [14] Evdokia, X and Stavros, D (2010). ARCH Models for Financial Applications. John Wiley.
- [15] Grahn, T. (1995). A conditional least squares approach to bilinear time series. J. Time Series Analysis. 509-529.
- [16] Granger. C. W. J and Andersen. A. P. (1978). An introduction to Bilinear time series models, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.
- [17] Guégan, D. (1981). Etude d'un modèle non linéaire, le modèle superdiagonale d'ordre 1. C.R.Acad. Sc. Paris.
- [18] Guégan, D. (1988). Modèles bilinéaires et polynomiaux de séries chronologiques : étude probabiliste et analyse statistique (Doctoral dissertation, Grenoble 1).
- [19] Guégan, D., Pham, D. T. (1989). A note on the estimation of the parameters of the diagonal bilinear model by the method of least squares. Scandinavian Journal of Statistics, 129-136
- [20] James. D. Hamilton. Time series analysis. Princeton University press. New Jersey.
- [21] Kim. K. and Billard. L. (1990). Asymptotic properties for the first order bilinear time series model. Journal of time series analysis. 11(3) :215 - 229
- [22] Klimko, L. A. And Nelson, P. I. (1978). On conditional least squares estimation for stochastic processes. The Annals of Statistics. 3, p 629-642.
- [23] Kumar, K. (1986) : On the identification of some bilinear time series. Journal Time Series Analysis. 2, 117-122.
- [24] Liu. J. (1989). On the existence of a general multiple bilinear time series. Journal of Time Series Analysis, 4, 341-355.
- [25] Liu. J. (1990). Estimation for some bilinear time series. Stochastic Models. 6, 649-665.
- [26] Mélard. G. (1983). A fast algorithm for the exact likelihood of autoregressive moving average models. Applied Statistics. pp 104-14.
- [27] Mélard. G. (1990). Méthodes de prévision à court terme. Editions Ellipses
- [28] M. Gabr and M. El-Hashash. (2012). Bilinear GARCH time series models. Alexandria University. Alexandria. Egypt.
- [29] Mohler. R. P. (1973). Bilinear control processes. Academic Press.

- [30] Ortega, J. M. (1987) *Matrix theory A Second Course*. New York : Plenum.
- [31] Pan. J, Li. G and Xie. Z. (2002). Stationary solution and parametric estimation for bilinear model driven by ARCH models. *Journal of Science in China*. 12, 1523-1537.
- [32] Pesaran, M. H. (2015). *Time Series and Panel Data Econometrics*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- [33] Pham, D. T and Tran, L. T. (1981). On the first order bilinear time series models. *J. Appl. Prob.* 18, 617-627.
- [34] Subba Rao. T. (1981). On the theory of bilinear models. *J. Roy. Statistics*. 2, 244-255.
- [35] Subba Rao T and M Gabr. (1984). *An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models*. Lecture notes in statistics. Springer verlag.
- [36] Terdik. G. (1999). *Bilinear Stochastic Models and Related Problems of Nonlinear Time Series : A Frequency Domain Approach*. Lecture Notes in Statistics 124, Springer, New York.
- [37] Tjøstheim. D. (1986). Estimation in nonlinear time series models. *Stochastic Process and their applications*. 21, 251-273.
- [38] Tong. H. (1983). *Threshold models in nonlinear time series analysis*. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag.
- [39] Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series (Vol. 543)*. John wiley sons.
- [40] Tsay, R. S. (2013). *Multivariate time series analysis : with R and financial applications*. John Wiley Sons.
- [41] Wasserstein R. L., Lazar, N. A. (2016). The ASA's Statement on p-Values : Context, Process and Purpose, *The American Statistician*, Vol. 70, str. 129–133.
- [42] Wiener. N. (1958). *Non linear problems in random theory*. M.I.T. Press.
- [43] Yohal. V. J, and Maronna. R. A. (1977) Asymptotic behaviour of least-squares estimates for autoregressive processes with infinite variances. *Ann. Statist.* 5, 554-60.
- [44] Yu, Jun 2002. "Forecasting Volatility in the New Zealand Stock Market," *Applied Finan. Econ.* 12, pp. 193–202.
- [45] Zaffaroni, P. (2000). Contemporaneous aggregation of GARCH processes. Preprint.