

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA**



**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

Faculté des Sciences

Année : 2019/2020

**Département de Mathématiques
Laboratoire de Modélisation Mathématiques et Simulation Numérique**



THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

**ETUDE THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE DE QUELQUES
PROBLÈMES DE LA MÉCANIQUE D'ÉLASTICITÉ**

Option

Équations Différentielles et Applications

**Présentée par
HAFSI Takoua**

DIRECTEUR DE THÈSE : TAALLAH Frekh M.C.A. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT : NOURI Fatma Zohra Prof. UNIV.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Kouche Mehieddine Prof. UNIV.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Djebabla Abdelhak Prof. UNIV.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Bouras Mohamed Chérif Prof. UNIV.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR : Maouni Messaoud Prof. UNIV. SKIKDA

دراسة نظرية ورقمية لبعض مشكلات ميكانيك الليونة

ملخص

موضوع هذه الأطروحة هو نمذجة وتحليل ومحاكاة بعض مشاكل الاتصال في الميكانيك الصلبة وذلك في إطار الليونة الخطية في التشوهات الصغيرة.

تتمثل مساهمتنا في توسيع نطاق تطبيق طريقة الحجم المحدود المستخدمة غالبًا لتقريب مشاكل ميكانيك الموائع وإثبات طريقة تسمح بتطبيقها في مجال ميكانيك المواد الصلبة.

الكلمات المفتاحية: مشكلة الاتصال، الميكانيكا الصلبة، الحجم المحدود، تقدير الخطأ، الليونة.

تصنيف الرياضيات حسب الموضوع (AMS): 65M08، 62N02، 74FXX، 74M15 2010.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse, **Dr. Frekh Taallah**, pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour sa disponibilité et sa patience, pour ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier son esprit de recherche et ses commentaires efficaces. Un grand merci de m'avoir donnée la chance de réaliser ce modeste travail. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à **Pr. Fatma Zohra Nouri** ainsi à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation LMD.

Je tiens à remercier **Pr. F.Z. Nouri** pour l'honneur qu'elle me fait en présidant le jury.

Je remercie **Pr. M.Kouche** , **Pr. A.Djebabla** , **Pr. M.C. Bouras** et **Pr. M. Maouni** d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

Merci à mes parents, mon époux, ma petite fille, ma soeur, mes frères et ma petite belle soeur pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné, à qui je souhaite une vie pleine de bonheur, de santé et de prospérité.

A tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à ce que cette thèse soit réalisée se dirigent ma gratitude et mes pensées.

Etude Théorique et Numérique de Quelques Problèmes de la Mécanique d'élasticité

Résumé

Le sujet de cette thèse est la modélisation, l'analyse et la simulation de certains problèmes de contact en mécanique des solides dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites déformations.

Notre contribution est d'élargir l'application de la méthode des volumes finis souvent utilisée pour l'approximation des problèmes de la mécanique des fluides et de démontrer une voie permettant de l'appliquée dans le domaine de la mécanique des solides.

Mots-clés: Problème de Contact, Mécanique des Solides , Volumes Finis, Estimation d'Erreur, Elasticité.

La Classification Mathématiques par Matières 2010 (AMS): 65M08 , 74M15, 74FXX, 62N02.

Theoretical and Numerical Study of some Problems in elasticity Mechanics

Abstract

The subject of this thesis is the modeling, analysis and simulation of some contact problems in solid mechanics within the framework of linear elasticity in small strains.

Our contribution is to broaden the application of the finite volume method often used for the approximation of the problems of fluid mechanics and to demonstrate a way allowing it to be applied in the field of solid mechanics.

Keywords: Contact Problem, Solid Mechanics, Finite Volume, Error Estimate, Elasticity.

2010 Mathematics Subject Classification (AMS): 65M08 , 74M15, 74FXX, 62N02.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Historique et Préliminaire	3
1.1 Histoire de la mécanique des solides	4
1.2 Contact et frottement en mécanique des solides	9
1.2.1 Problème de l'élasticité linéarisée	10
1.2.2 Conditions de contact	13
1.2.3 Conditions de frottement	14
1.3 Espaces fonctionnelles	19
1.3.1 Notations vectorielles	19
1.3.2 Espaces de Sobolev	20
2 Analyse mathématique d'un problème de contact sans frottement	23
2.1 Position du problème mécanique	23
2.1.1 Formulation variationnelle	25
2.1.2 Existence et unicité de la solution faible	28
2.2 Le problème modèle	29
2.2.1 Formulation variationnelle	30
2.2.2 Existence et unicité de la solution faible	31
3 La méthode des volumes finis	33
3.1 Les principes des volumes finis pour les lois de conservation générales	34

3.2	Maillages et schémas	37
3.2.1	Formulation du schéma volumes finis en 1D	37
3.2.2	Formulation du schéma volumes finis en 2D	39
4	Analyse Numérique du problème discret associé de Signorini	42
4.1	Définitions et notations	42
4.2	Schéma numérique	45
4.2.1	Schéma de volumes finis	45
4.3	Existence et unicité de la solution discrète	46
4.4	Estimation d'erreurs	51
4.5	Résultat numérique	54
4.5.1	Test numérique	54
4.5.2	schéma numérique	55
	Conclusions et perspectives	59
	Annexe	61

Introduction générale

L'étude des phénomènes de la mécanique des solides est un domaine très actif de recherche à cause de ses diverses applications dans la science de l'ingénierie. On peut citer, en architecture, lorsqu'on étudie les structures en béton, dans les procédés géologiques comprenant les phénomènes naturels par exemple certains reliefs montagneux, mouvement rapide des végétaux, etc...

Les problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux matériaux déformables ou entre un matériau déformable et une fondation rigide abondent en industrie et dans la vie quotidienne. Le contact du sabot de frein avec le disque, de la chemise avec le piston, des pneus d'une voiture avec le sol, l'enfoncement progressif d'une personne dans un fauteuil et le contact entre les plaques tectoniques, sont des exemples courants. Vu l'importance de ces phénomènes physiques, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude de ces problèmes de contact. La littérature mathématique consacrée à l'étude des problèmes de contact est assez récente. La raison réside dans le fait que, accompagné de phénomènes physiques et de surfaces complexes, les processus de contact sont modélisés par des problèmes aux limites non-linéaires, très difficiles. L'une des premières publications mathématiques concernant ce sujet est celle de Signorini [70], où le problème de contact sans frottement entre un matériau élastique linéaire et une fondation rigide est formulé. Il s'ensuit le travail de Fichera [31], où le problème de Signorini a été résolu en utilisant quelques arguments sur les inéquations variationnelles de type elliptique. Mais on peut dire sans aucun doute que l'étude mathématique des problèmes de contact a commencé avec le livre de Duvaut et Lions [25], dans lequel on trouve la formulation vari-

ationnelle de plusieurs problèmes de contact ainsi que des résultats d'existence et d'unicité mais dans le cas linéaire.

Dans cette thèse, on considère un problème modèle de contact sans frottement. Notre discrétisation est basée sur la méthode des volumes finis qui au cours des années récentes a été largement utilisée dans le contexte de la mécanique des fluides dû à les propriétés de conservation, mais dans le domaine de la mécanique des solides cette méthode semble difficile à appliquer malgré que d'autres méthodes et approches ont été utilisées telles que: la méthode des éléments finis mixtes [38],[37], la méthode des éléments volumes finis étendue (XMEV) [32] ect...

Il est aussi primordial de souligner que la plupart de ces méthodes sont faciles à mettre en œuvre sur des maillages non conformes ou non structurés; pour plus de détails, voir [27].

En effet, on s'appuie sur ces travaux antérieurs pour discrétiser notre problème.

Cette thèse est composée de trois chapitres, le premier est une synthèse bibliographique sur les problèmes de la mécanique des solides en passant par leur histoire vers quelques notions préliminaire.

Le deuxième chapitre est consacré à la méthode des volumes finis avec une analyse détaillée.

Nos résultats sont présentés dans le dernier chapitre où on a pu approximer le problème de contact modèle par la méthode des volumes finis, aussi on a pu démontrer l'existence et l'unicité de la solution discrète ainsi que la stabilité de cette solution.

Un autre apport de nos résultats est l'estimation d'erreur à priori établi dans le même chapitre. Et on termine ce chapitre par des résultats numériques.

Notre but n'est qu'élargir l'application de telle méthode dans le domaine de la mécanique des solides.

Historique et Préliminaire

Ce chapitre contient un aperçu historique sur la mécanique des solides ainsi l'importance de cette discipline dans la révolution technologique. Outre, on va introduire des notions préliminaires utiles dans l'étude de ces problèmes.

On commence par introduire les équations modélisant le problème de contact unilatéral avec frottement en élasticité d'une manière chronologique. Du fait du grand nombre de recherches sur ce sujet, depuis de nombreuses décennies et de la disparité des théories, la revue bibliographique ne se veut pas exhaustive.

Dans ce qui suit les lettres en gras (par exemple u, v) désignent les vecteurs, alors que les lettres capitales (par exemple V, K, \dots) représentent des ensembles fonctionnels concernant les champs de vecteurs. Comme d'habitude, on note par $(L^2(\cdot))^d$ et par $(H^s(\cdot))^d$, $s \in \mathbb{R}$, $d = \overline{1, 3}$, les espaces de Lebesgue et Sobolev en dimension un, deux ou trois (voir [4] pour la définition de $(H^s(\cdot))^d$, $s \in \mathbb{R}$). La norme usuelle de $(H^s(D))^d$ (norme duale si $s < 0$) est notée par $\|\cdot\|_{s,D}$ et on garde la même notation pour $d = 1$, $d = 2$ ou $d = 3$. Pour simplifier, la norme de $(L^2(D))^d$ est notée par $\|\cdot\|_D$ pour $d = 1$ et $d = 2$.

1.1 Histoire de la mécanique des solides

La partie de la physique qui est la plus ancienne et la plus simple et qui par conséquent, est considérée comme le fondement de la compréhension de beaucoup d'autres parties de cette science, a pour objet l'étude du mouvement et de l'équilibre des masses. Elle porte le nom de "Mécanique".

Cette branche de la physique dont le bagage de principes est à la fois le plus restreint en volume et le plus riche en connaissances utiles.

L'histoire de la Mécanique est l'une des branches les plus importantes de l'histoire de la science. Dès les époques les plus reculées, l'homme a cherché à fabriquer des outils et des mécanismes lui permettant d'augmenter sa puissance d'action ou de se défendre contre les dangers qui le menaçaient. Et ainsi, plus ou moins implicitement, il était amené à se poser des problèmes de Mécanique : aussi voyons-nous dès l'Antiquité les premiers savants réfléchir sur ces problèmes et en aborder plus ou moins heureusement la solution.

L'étude du mouvement des astres qui, des pères Chaldéens aux grands astronomes Grecs et hellénistiques, fut l'une des premières préoccupations de l'humanité pensante, fut aussi l'un des chemins qui, après bien des détours, conduisèrent à la découverte des véritables lois de la Dynamique. Comme on le sait, si les principes de la statique furent déjà correctement pressentis par les savants antiques, ceux de la dynamique longtemps voilés par les fausses conceptions de l'école aristotélicienne n'ont commencé à se faire jour qu'à la fin du moyen âge et au début de l'ère moderne. Puis ce fut le rapide développement de la Mécanique après les mémorables travaux de Képler, de Galilée, de Descartes, d'Huygens et de Newton, la codification de ses lois par des hommes comme Euler, Lagrange, Laplace, l'immense développement de ses diverses branches et le nombre sans cesse croissant de ses applications au XIXe et au XXe siècle où la notion de mécanique englobait aussi bien l'étude scientifique des corps en mouvement que la théorie des machines.

Les principes de la Mécanique étant parvenus à un tel degré de perfection qu'il y a une cinquantaine d'années, on pouvait croire leur évolution pratiquement terminée. C'est alors qu'ont apparu successivement deux prolongements inattendus de la Mécanique classique : la Mécanique relativiste d'une part, la Mécanique quantique et ondulatoire d'autre part.

Elles ont trouvé leur origine dans la nécessité d'interpréter des phénomènes électromagnétiques très délicats ou de rendre compte des processus observables à l'échelle des atomes. Tandis que la Mécanique relativiste, tout en bouleversant nos notions habituelles d'espace et de temps, ne fait pour ainsi dire que compléter et couronner l'œuvre de la Mécanique classique, la Mécanique quantique et ondulatoire nous apporte des idées beaucoup plus radicalement nouvelles et nous force à renoncer à la continuité et au déterminisme absolu des phénomènes élémentaires.

Mécanique relativiste et Mécanique quantique forment aujourd'hui les deux pointes extrêmes des progrès de nos connaissances sur l'ensemble des phénomènes mécaniques.

Dresser un bilan de l'évolution de la Mécanique depuis ses origines jusqu'à l'époque actuelle constitue un gros challenge. Pour cela, on va se diriger vers une partie bien précise de la mécanique appelée : Mécanique des solides.

La mécanique du solide s'intéresse aux objets que l'on ne peut réduire en un point matériel. Cela permet notamment de décrire et modéliser les rotations de l'objet sur lui-même.

L'objet est lui-même composé de points matériels, que ce soit des points discrets par exemple un assemblage de boules reliées par des baguettes de masse négligeable, chaque boule pouvant être modélisée par un point matériel ou un ensemble continu de points.

La mécanique du solide est donc une branche de la mécanique traitant du comportement des mécanismes constitués de pièces rigides en général, et parfois déformables.

L'objectif principal étant la détermination des performances d'un système en vue d'établir un dimensionnement adapté à l'usage envisagé, ou la validation de ces grandeurs.

En général, on suppose le solide indéformable ; dans le cas de la déformation, on se mène à un autre domaine de la mécanique appelé : la mécanique des milieux continus.

La mécanique des milieux continus est le domaine de la mécanique qui s'intéresse à la déformation des solides et à l'écoulement des fluides. Le tableau 1.1 suivant indique les divers domaines couverts par la mécanique des milieux continus.

Table 1.1: Mécanique des milieux continus

Mécanique des milieux continus	Déformation élastique ou Résistance des matériaux	Élasticité	
		Déformation plastique	Rhéologie
	Mécanique des fluides	Fluides non newtoniens	
		Fluides newtoniens	

Différence entre solide et fluide

On différencie entre un solide et un fluide par : [3]

Un fluide: "qui n'est ni solide, ni épais, qui coule aisément".

Un solide: "qui a de la consistance, qui n'est pas liquide".

La base de la mécanique des milieux continus est l'étude des déformations et des phénomènes associés à une transformation d'un milieu. L'hypothèse des milieux continus consiste à considérer des milieux dont les propriétés caractéristiques, c'est-à-dire celles qui nous intéressent: densité, élasticité, etc... sont continues. Une telle hypothèse permet d'avoir recours aux outils mathématiques reposant sur les fonctions continues et/ou dérivables.

Des hypothèses supplémentaires peuvent éventuellement être faites ; ainsi un milieu continu peut être :

- homogène : ses propriétés sont les mêmes en tout point ;
- isotrope : ses propriétés ne dépendent pas du repère dans lequel elles sont observées ou mesurées.

De nombreux matériaux utilisés dans l'industrie sont à la fois homogènes et isotropes (métaux usinés ou bruts de fonderie). Cependant, de nombreux matériaux ne sont pas isotropes (tôles laminées, pièces forgées, pièces tréfilées, etc.) ; par ailleurs, l'utilisation

de plus en plus fréquentes des matériaux composites a amené à étudier les milieux qui ne sont ni homogènes (sandwiches), ni isotropes (fibres de verre, de carbone ou de kevlar maintenues dans une résine) mais pour lesquels l'hypothèse de continuité (tout au moins par morceaux) reste valable.

La notion de déformation sert à quantifier de quelle manière les longueurs ont été dilatées ou compressées et les angles ont changé dans le milieu.

Une manière simple pour chercher à quantifier la déformation, est de regarder l'allongement relatif d'un segment dans le solide, ou la variation d'angle entre deux directions.

Pour l'allongement relatif ϵ , encore appelé déformation

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1.1.1)$$

l_0 étant la longueur initiale et Δl l'allongement ; ϵ est sans unité.

On pourra remarquer que lors d'une sollicitation en traction, ϵ est positif, et que lors d'une compression, il est négatif.

Cette notion introduite ici est « globale » en cela que l'on regarde l'allongement relatif pour un segment de longueur l_0 .

Pour introduire une notion locale, il faut considérer la limite de l'allongement relatif lorsque la longueur du segment tend vers 0 :

$$\epsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\delta l}{l} \quad (1.1.2)$$

On se rend alors compte que la notion d'allongement relatif est assez pauvre, car au cœur du volume d'un solide, on peut considérer une infinité de directions pour les segments. Cette notion est cependant suffisante pour appréhender l'étude des poutres.

Les sollicitations sont quantifiées par la notion de contrainte σ , qui est l'effort surfacique exercé sur une partie de la pièce en un point par le reste de la pièce. Cette contrainte, si on la suppose uniforme dans la section, peut s'assimiler à la contrainte moyenne :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.1.3)$$

où F représente les forces surfaciques et S une partie du solide. Alors σ est homogène à une pression et est exprimé en mégapascals (MPa) ou en newtons par millimètre carré (N/mm^2).

Le fait d'utiliser ϵ et σ permet d'écrire des lois locales et non globales, on peut alors écrire l'équilibre de chaque point du milieu et décrire son comportement (loi liant la contrainte et la déformation).

Le matériau est caractérisé par des coefficients d'élasticité, qui représentent la difficulté à déformer ; le principal est le module de Young E , lié à la contrainte et la déformation par la loi de Hooke :

$$\sigma = E.\epsilon \quad (1.1.4)$$

E est homogène à une pression et est exprimé en mégapascals (MPa), gigapascals (GPa) ou en kilonewtons par millimètre carré (kN/mm^2).

D'un point de vue microscopique, l'état solide est l'état de la matière dans lequel les molécules sont fortement liées les unes aux autres, et caractérisé à l'échelle macroscopique par un volume et une forme déterminés, constants en l'absence de toute force extérieure.

Corps solide

Un corps S est dit solide si les distances mutuelles de tous ses éléments matériels restent constantes. Cette notion doit être considérée comme une modélisation de la réalité physique: un corps dans l'état solide est toujours déformable.

Qu'est-ce que l'élasticité ?

La mécanique des corps solides déformables par opposition à la mécanique des corps indéformables s'appelle la mécanique d'élasticité. Cette dernière étudie la réponse d'un corps solide à des forces ou moments appliqués et s'intéresse exclusivement à la déformation. Par contre, la mécanique du solide indéformable étudie la translation et la rotation.

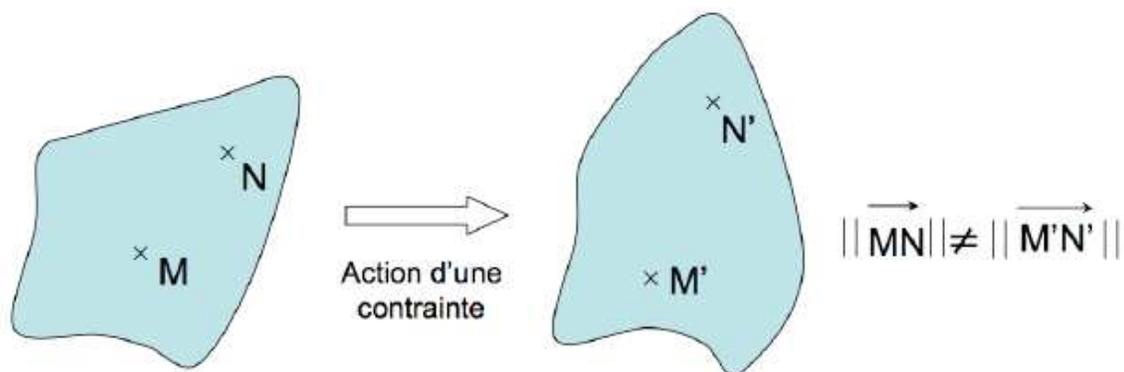


FIG.1.1. Déformation d'un corps élastique soumis à une contrainte.

On distingue deux catégories d'élasticité: linéaire et non linéaire. Dans tout ce travail de thèse, on s'intéresse à l'élasticité linéaire.

1.2 Contact et frottement en mécanique des solides

Les phénomènes de contact impliquant des corps déformables abondent dans l'industrie, notamment dans les structures mécaniques, ils sont variés, fortement non linéaires et complexes. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment réagissent les structures lorsqu'elles subissent ces forces. Le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure, sa déformation, son mouvement,..... Les problèmes de contact étant non linéaires, la modélisation des phénomènes de contact pose des difficultés.

L'approximation numérique de problèmes de contact avec frottement se produisant en mécanique des structures est généralement traité avec la méthode des éléments finis (voir [14],[13],[69],[66]). En effet, elle est facile à implémenter en pratique et elle est aussi précise d'un point de vue théorique. Une étude détaillée de plusieurs méthodes par éléments finis mixtes pour le problème de contact sans ou avec frottement peut être trouvé dans [69]. L'analyse numérique et la convergence ont été étudiées dans [73].

Il existe diverses formulations spécifiques de problèmes de contact fournissant la base pour une méthode d'analyse numérique. On va présenter dans un premier temps le problème du contact avec frottement dans le cadre de l'élasticité linéaire. Après quelques rappels sur le problème d'élasticité, on introduira les conditions de contact puis de frottement par différentes lois.

1.2.1 Problème de l'élasticité linéarisée

Nous nous limitons au cas d'un solide élastique frottant sur une surface rigide plane immobile pour simplifier la présentation. L'introduction de géométries plus complexes fait apparaître des problèmes délicats dans la détermination de la surface de contact.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine polygonal borné représentant la configuration de référence d'un corps élastique. Les ensembles Γ_D , Γ_N et Γ_C forment une partition disjointe de la frontière régulière $\partial\Omega$. Le corps est soumis à des forces volumiques, par exemple son poids. Le champ de déplacement est connu sur la partie de mesure non nulle Γ_D . On peut par exemple supposer que le solide est encastré sur Γ_D . La partie Γ_N est soumise à une condition de Neumann. La partie restante Γ_C est la "zone de contact" avec ou sans frottement entre le corps et une fondation rigide plane.

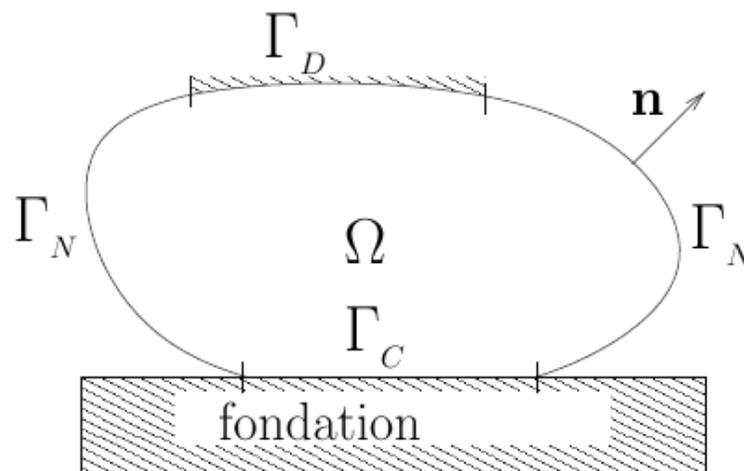


FIG.1.2. Description du domaine Ω .

La loi de comportement de l'élasticité linéaire reliant le tenseur des contraintes $\sigma(u)$ et le tenseur des déformations linéarisées $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u)$ est :

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u) \quad (1.2.1)$$

Notons par $u = (u_i)_{1 \leq i \leq 2}$ le vecteur déplacement, a_{ijhk} les composantes du tenseur de Hooke A du quatrième ordre et par $\sigma = (\sigma_i)_{1 \leq i \leq 2}$ le tenseur de contraintes tel que :

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijhk} \frac{\partial u_h}{\partial x_k}, \quad i, j, h, k \in \{1, 2\} \quad (1.2.2)$$

où on adopte la convention de sommation des indices répétés. Les fonctions $a_{ijhk} \in L^\infty(\Omega)$ représentent les propriétés élastiques du matériau. On suppose que A est symétrique : $a_{ijhk} = a_{jihk} = a_{hki j}$.

Un résultat important est l'inégalité de Korn :[35]

Théorème 1.2.1 *Soit Ω un domaine régulier borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 . Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que, pour toute fonction $v \in (H^1(\Omega))^n$, on a :*

$$\|v\|_{1,\Omega} = C \left(\int_{\Omega} (\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v)) d\Omega + \|v\|_{\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.3)$$

et le produit scalaire est toujours noté par (\cdot, \cdot) . Lorsque Γ_D est de mesure nulle, des difficultés supplémentaires apparaissent (voir [14] et [15]). On supposera par la suite que Γ_D a une mesure superficielle non nulle. On a alors le résultat suivant qui découle de l'inégalité de Korn d'où découle deux propriétés du tenseur de déformation qui sont la coercivité et la symétrie.

Lemme 1.2.1

Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n de classe C^1 . Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :

$$\int_{\Omega} (\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v)) d\Omega \geq C \|v\|_{V_0}^2 \quad (1.2.4)$$

pour tout v dans $V_0 = \{v \in (H^1(\Omega))^n \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$. Ainsi la condition d'ellipticité de A a lieu : $\exists \alpha > 0$ tel que :

$$a_{ijhk}\xi_{ij}\xi_{hk} \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \quad (1.2.5)$$

De plus le tenseur de déformation est diagonalisable c'est à dire qu'en chaque point, il existe une base dans laquelle seuls les éléments diagonaux sont non nuls. Aussi, la trace du tenseur de déformation est invariante par changement de base d'où on a

$$\text{trace} [\varepsilon (u)] = \text{div } u \quad (1.2.6)$$

Pour simplifier, le corps est encastré sur Γ_D . Pour un problème d'élasticité sans contact ni frottement, le déplacement $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ du corps satisfait aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div } \sigma (u) + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma (u) = A\varepsilon (u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma (u) n = g & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (1.2.7)$$

où $f = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$ représente la densité des forces volumiques (poids), $g = (g_1, g_2) \in (L^2(\Gamma_N))^2$ désigne les forces surfaciques imposées sur Γ_N , $n = (n_1, n_2)$ est la normale unitaire sortante de Ω sur $\partial\Omega$, $\sigma : \Omega \longrightarrow S_2$ où S_2 désigne l'espace des tenseurs symétriques du second ordre, le tenseur linéarisé des déformations $\varepsilon (u)$ et div représente l'opérateur divergence des fonctions à valeurs vectorielles. La première équation correspond à l'équation d'équilibre à laquelle on ajoute la relation de comportement et les conditions de Dirichlet et Neumann.

Afin d'introduire les équations sur la zone de contact, on choisit pour vecteur unitaire tangentiel $t = (-n_2, n_1)$. Sur Γ_C , on décompose le déplacement et le vecteur de contraintes en composantes normale et tangentielle comme suit :

$$u = u_n n + u_t t \quad \text{et} \quad \sigma (u) n = \sigma_n (u) n + \sigma_t (u) t \quad (1.2.8)$$

pour donner un sens à la décomposition précédente, on suppose que Γ_C est de régularité C^1 . On suppose aussi qu'il n'y a pas de distance initiale entre le solide et la fondation rigide sur Γ_C .

Les relations d'interaction dans la direction normale sont associées au problème de contact unilatéral et celles dans la direction tangentielle au problème de frottement. Pour étudier l'interaction dans la direction normale, on s'intéresse d'abord au cas du contact unilatéral sans frottement.

1.2.2 Conditions de contact

La littérature mathématique dédiée à l'étude des phénomènes de contact est assez récente. C'est en 1933 que Signorini pose le problème général de l'équilibre d'un corps élastique en contact sans frottement sur une fondation rigide. Les conditions de contact unilatéral ont été formulées par Signorini [70] en 1959. Il s'ensuit le travail de Fichera [31] en 1964 où le problème de Signorini a été résolu en utilisant des arguments des inéquations variationnelles de type elliptique. Le problème de contact unilatéral sans frottement montre la non-linéarité sur le bord correspondant à la non-pénétration des matériaux sur la zone de contact ce qui mène à une inégalité variationnelle du premier ordre. Fichera donne la preuve de l'existence et de la régularité d'une solution faible et discute le problème de l'unicité. Dans [6], une synthèse concernant le cas d'un solide déformable en contact avec un socle rigide est présentée. Duvaut et Lions [24] présentent la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact accompagnée des résultats d'existence et d'unicité. Ciarlet et Necas (1984, 1987) ont aussi traité le cas sans frottement. la condition de contact unilatéral est exprimée par la relation de complémentarité suivante :

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n(u) \leq 0, \quad \sigma_n(u) u_n = 0 \quad (1.2.9)$$

Cette condition exprime qu'en cas de contact c'est le corps qui se déforme et qu'il ne peut y avoir d'interpénétration entre le solide et la fondation. De plus, la réaction du support sur le solide est dirigée vers l'intérieur du solide. Si le point est en contact alors $u_n = 0$ et $\sigma_n(u) < 0$ et si le point quitte la fondation $\sigma_n(u) = 0$ et $u_n < 0$, ce qui établit le graphe de la loi de contact unilatéral. On voit sur ce graphe (FIG.1.3) la très forte non-linéarité de la loi.

L'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par :

$$\sigma_t(u) = 0. \quad (1.2.10)$$

Cette façon de voir le contact implique que la force de contact tangentielle est nulle dans la zone de contact. On est dans le cas d'un glissement parfait. Néanmoins cette force tangentielle est non nulle dans la plupart des contacts réels. On introduit alors des lois complémentaires, les lois de frottement qui relient la composante tangentielle aux autres variables du système.

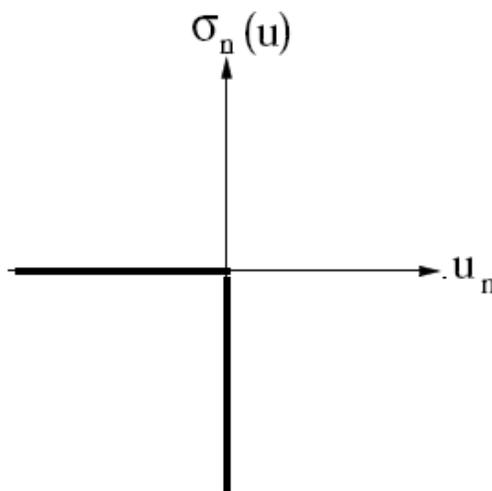


FIG.1.3. Les conditions de contact.[21],[53]

1.2.3 Conditions de frottement

Les premiers travaux sur le frottement ont été réalisés par Léonard de Vinci au début du XVI^{ème} siècle. Il donne ainsi la première valeur (0.25) du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. La compréhension des mécanismes entrant en jeu est restée très lacunaire et il faut attendre deux siècles pour qu'Amontons (1699) et Coulomb (1785) reprennent et développent les études de Léonard de Vinci en énonçant les premières lois de frottement[61]. Historiquement, G. Amontons proposa une loi de proportionnalité entre les composantes normale et tangentielle des contraintes.

Coulomb confirme les lois d'Amontons à partir d'expériences. On n'abordera pas ici les lois de frottement dynamique développées par Euler grâce à des expériences de solides glissant sur un plan incliné. Les travaux de Bowden et Tabor [18] font une synthèse et améliorent les résultats obtenus sur l'analyse du frottement.

Plusieurs lois de frottement existent. Nous allons énoncer quelques lois associés aux phénomènes de contact et de frottement dans le cadre d'un contact entre un corps déformable et une fondation rigide. En considérant le frottement additionné au problème de contact, des non-linéarités supplémentaires doivent être prises en compte. Énonçons tout d'abord la plus simple.

Frottement de Tresca

La plus simple (en apparence) est la loi de Tresca. Dans [24], le frottement a été rajouté aux problèmes de contact et le problème a été écrit sous forme d'un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas d'un frottement de Tresca. Les conditions de frottement de Tresca [7] sont :

$$\begin{aligned} s_i \quad u_t &= 0, & |\sigma_t(u)| &\leq s, \\ s_i \quad u_t &\neq 0, & \sigma_t(u) &= -s \frac{u_t}{|u_t|} \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

où $s \in L^\infty(\Gamma_C)$, $s \geq 0$ désigne le seuil de glissement fixe qui est supposé connu et qui ne dépend pas de la contrainte normale. Le graphe de cette loi est tracé dans la Fig 1.4. Le fait que la contrainte normale n'apparaisse pas dans la limite de glissement limite l'utilisation de cette loi. Le problème est plutôt réservé aux applications où la contrainte tangentielle est connue sur le bord de frottement. Le problème de contact avec le frottement de Tresca admet une solution unique.

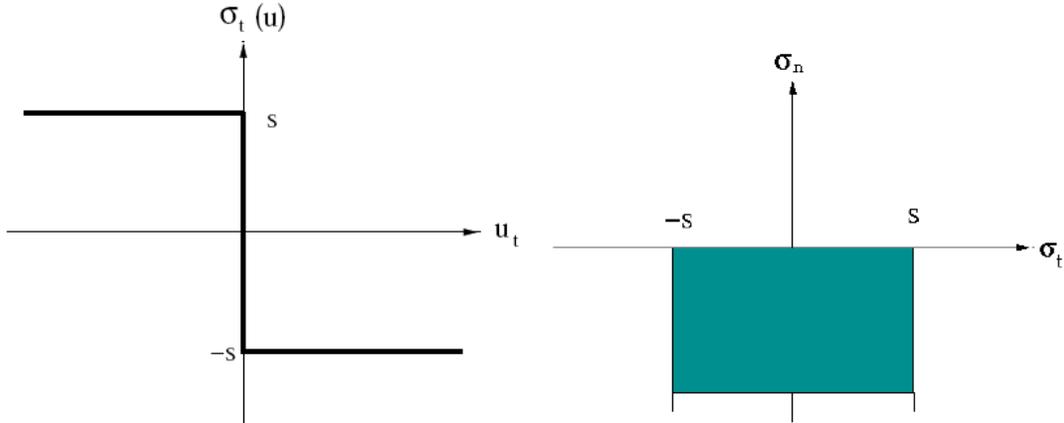


FIG.1.4. Représentation de la loi de Tresca.[21],[53]

Frottement de Coulomb

Pour décrire la dépendance du seuil s à l'intensité des efforts normaux, on utilise une loi de Tresca dont le seuil s est proportionnel à l'effort normal. Il s'agit de la loi de Coulomb. La loi a été développée au départ sur des modèles avec des solides rigides puis ensuite sur des corps déformables avec notamment les travaux de Duvaut-Lions [24],[25] sur les inégalités variationnelles. En notant μ le coefficient de frottement qui dépend des matériaux en présence ($\mu \geq 0$), la condition de frottement de Coulomb est :

$$\begin{aligned} si \quad u_t = 0, \quad & |\sigma_t(u)| \leq -\sigma_n(u) \mu, \\ si \quad u_t \neq 0, \quad & \sigma_t(u) = \sigma_n(u) \mu \frac{u_t}{|u_t|} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Cette condition représente deux situations physiques qui sont l'adhérence quand $u_t = 0$ et le glissement quand $u_t \neq 0$. En effet, quand le multiple du module de la composante normale est atteint, le corps peut glisser dans la direction de la composante tangentielle. Le coefficient de frottement est le rapport maximal entre force tangentielle et force normale au point de contact. Le lieu géométrique de l'extrémité du vecteur force de contact à la forme d'un cône dont l'ouverture dépend du coefficient de frottement : il s'agit du cône de Coulomb. L'enveloppe de ce cône est la surface de seuil de glissement.

Il existe plusieurs lois dérivées intégrant un coefficient de frottement μ variable (par exemple par rapport au déplacement tangentiel).

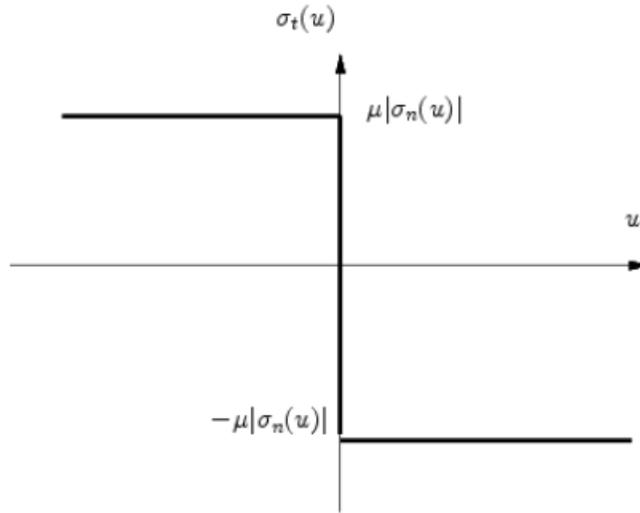


FIG.1.5. Représentation de la loi de Coulomb.[21],[53]

Remarque 1.2.1

$\mu = 0$, on obtient $\sigma_t(u) = 0$ sur Γ_C . Il s'agit du cas sans frottement.

Frottement avec déflexion ou compliance normale

Ces lois ont été initiées par J.-T. Oden et J.-A.-C. Martins [56] et [57] en 1985. Ils proposent une loi de frottement qui inclue une non-proportionnalité entre la force normale et la force tangentielle de frottement et prend en compte l'écrasement normal entre le corps et la fondation en se basant sur les études expérimentales de [19].

Dans cette sous-section, On considère un corps élastique qui occupe une région Ω de \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$). Le corps est fixe sur une partie Γ_D du bord $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_C$, peut entrer en contact avec la fondation réactive sur la partie Γ_C et est soumis à des forces volumiques $f \in (L^2(\Omega))^n$. Sur la surface de contact on utilise une condition de compliance normale. Le problème de contact et frottement avec compliance normale en élasto-statique est de trouver le champ de déplacement u satisfaisant les équations auxquelles on ajoute la relation de comportement :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(u) + f &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Alors les conditions de compliance normale avec frottement sur Γ_C sont :

$$\begin{cases} \sigma_n(u) = -c_N (u_n)_+^{m_N} \\ \text{si } u = 0, \quad |\sigma_t(u)| \leq c_T (u_n)_+^{m_T} \\ \text{si } u \neq 0, \quad \sigma_t(u) = c_T (u_n)_+^{m_T} \frac{u_t}{|u_t|} \end{cases} \tag{1.2.14}$$

où $(\cdot)_+$ désigne la partie positive. Ainsi $(u_n)_+$ représente la pénétration du corps dans la fondation. les constantes $m_N \geq 1$, $m_T \geq 1$ ainsi que les coefficients de compliance positifs c_N et c_T dans $L^\infty(\Gamma_C)$ désignent des paramètres d'interface caractérisant le comportement vis à vis du contact entre le corps et la fondation rigide. Les équations aux dérivées partielles associées [17] présentent de nombreuses difficultés mathématiques qui demeurent irrésolues.

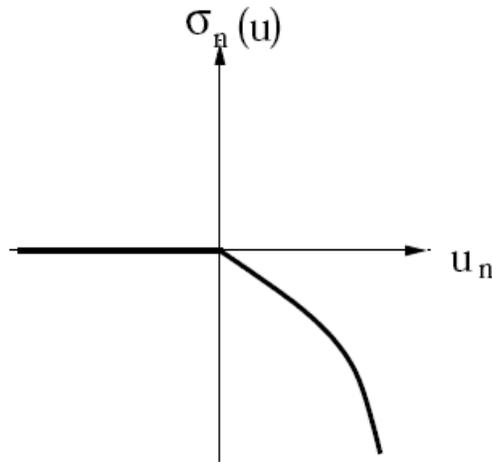


FIG.1.6. Représentation des conditions de contact pour le modèle avec compliance normale.[21],[53]

Remarque 1.2.2

cas $m_N = m_T$ correspond au modèle de frottement de Coulomb où le coefficient de frottement vaut $\frac{c_T}{c_N}$.

1.3 Espaces fonctionnelles

Le but de cette section est de rappeler quelques notions sur les espaces fonctionnelles [19].

1.3.1 Notations vectorielles

Dans cette section, Ω est un domaine polygonal borné dans \mathbb{R}^d , ayant une frontière assez régulière.

Le gradient d'une fonction scalaire $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est un vecteur défini par

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq d}$$

et celui d'une fonction vectorielle $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une matrice donnée par

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$$

La divergence d'une fonction scalaire $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est un scalaire donné par

$$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

La divergence d'une fonction vectorielle $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un scalaire défini par

$$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

et celle d'une matrice $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ est un vecteur donné par

$$\nabla \cdot A = \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq d}$$

Le Laplacien d'une fonction scalaire $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est représenté par

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Par conséquent, pour une fonction vectorielle $u = (u_i)_{1 \leq i \leq d}$, on a

$$\Delta u = (\Delta u_i)_{1 \leq i \leq d}$$

Le produit scalaire entre deux vecteurs u et v est donné par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^d u_i v_i$$

1.3.2 Espaces de Sobolev

L'espace vectoriel $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions carré intégrables

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ est mesurable} : \int_{\Omega} u^2 dx < \infty \right\}$$

c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On étend ces définitions pour des fonctions vectorielles $u = (u_i)_{1 \leq i \leq d}$ et $v = (v_i)_{1 \leq i \leq d}$

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot v dx ; \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^d \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On introduit l'espace de Sobolev

$$H^m(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega), \mathcal{D}^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall 0 \leq |\alpha| \leq m \}$$

où \mathcal{D}^α est la dérivée au sens des distributions d'ordre $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ définie par

$$\forall \phi \in D(\Omega) \quad \mathcal{D}^\alpha u(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}$$

et si u est assez régulière, on peut écrire

$$\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d}$$

qui est la dérivée usuelle.

En particulier, on a

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &= \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d \right\} \\ H^2(\Omega) &= \left\{ u \in H^1(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \in L^2(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

Le produit scalaire associé à l'espace $H^m(\Omega)$ est

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \mathcal{D}^\alpha u \mathcal{D}^\alpha v dx$$

La norme associée à l'espace $H^m(\Omega)$ est

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et la semi-norme associée est

$$|u|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.3.1 (de trace)

Soit Ω un domaine borné avec un bord polygonal $\partial\Omega$. Il existe des opérateurs surjectifs de trace définis par

$$\gamma_0 : H^s(\Omega) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad \text{pour } s > \frac{1}{2}$$

telles que

$$\forall u \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$$

où n est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$.

Par conséquent, si $u \in H^1(\Omega)$, sa trace $\gamma_0 u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, qui vérifie

$$H^1(\partial\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$$

Dans ce cas, $\gamma_1 u$ peut ne pas être définie.

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0 . En particulier, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

De même, l'application γ_1 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_1 . En particulier, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H^2(\Omega)$, on a

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Théorème 1.3.2 (*Formule de Green généralisée*) [2]

donné un domaine borné Ω et n le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$, on a pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$

$$-\int_{\Omega} (\nabla \cdot F \nabla u) v dx = \int_{\Omega} F \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} F \nabla u \cdot n v d\sigma \quad (1.3.1)$$

où F est une fonction matricielle. En particulier, si $F = I$

$$-\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n v d\sigma$$

Rappelons que cette formule a été établie pour des fonctions de $D(\overline{\Omega})$ [67], et grâce à la densité de $D(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on obtient cette formule pour des fonctions $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$.

Pour plus de détails sur ces espaces fonctionnels on réfère à [19].

Analyse mathématique d'un problème de contact sans frottement

Nous considérons dans ce chapitre un problème de contact sans frottement entre un matériau déformable et une fondation rigide. Nous supposons que le processus est statique et la loi de comportement de ce matériau est élastique linéaire.

Dans ce chapitre, on va décrire le modèle mathématique du problème mécanique ensuite on dérive sa formulation variationnelle et on prouve l'existence et l'unicité de la solution faible. La preuve est basée sur le théorème de Lax-Milgram.

2.1 Position du problème mécanique

Considérons un matériau élastique dont les particules occupent un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$; ($d = 2$ ou 3), dont le bord $\partial\Omega$ est partitionné en trois parties mesurables disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 tels que $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$.

Le matériau est encastré sur la portion Γ_1 , des tractions superficielles de densité F ; agissent sur Γ_2 et des forces volumiques de densité f agissent à l'intérieur du matériau. Nous supposons que les forces et les réactions changent lentement avec le temps de sorte

que l'accélération du système soit négligeable. Le matériau est entré en contact sans frottement avec une fondation rigide le long de Γ_3 de plus les conditions de contact sont celles de Signorini (voir FIG.2.1):

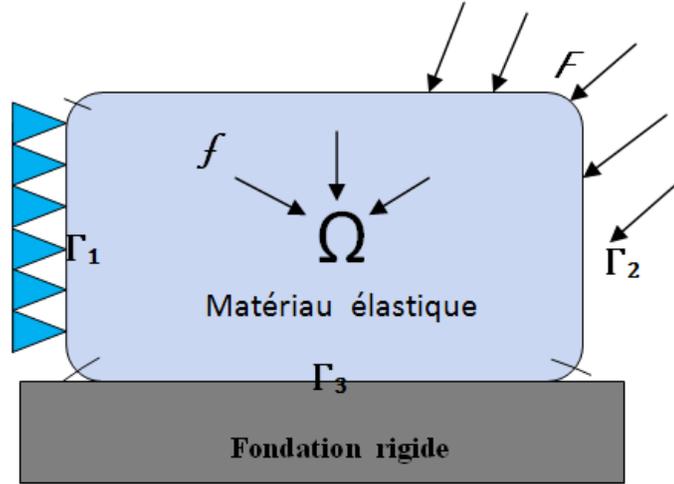


FIG.2.1. Présentation du problème mécanique.

Avec ces conditions, le problème mécanique peut être formulé de la façon suivante:

Problème (P): Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ du corps qui satisfait les équations suivantes :

$$-\operatorname{div} \sigma(u) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1.1)$$

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.1.3)$$

$$\sigma(u)\eta = F \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (2.1.4)$$

$$u_n \leq 0, \quad \sigma_n(u) \leq 0, \quad \sigma_n(u) u_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.1.5)$$

L'équation (2.1.1) est l'équation d'équilibre, (2.1.2) est la loi de comportement qui lie les contraintes et les déplacements, (2.1.3) indique que le matériau est encastré sur la partie Γ_1 , (2.1.4) indique que des tractions superficielles F s'appliquent sur Γ_2 ; Les conditions (2.1.5) représentent les conditions de contact de Signorini.

η : est le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$.

u_n : est la composante normale du déplacement.

σ_n : est la composante normale de la contrainte.

2.1.1 Formulation variationnelle

On se place sous des hypothèses de régularité suffisante pour les fonctions considérées, c'est à dire, en pratique dans le cadre des espaces de Hilbert (fonctions à carré sommable et de dérivée à carré sommable).

Nous introduisons le convexe V qui est l'espace des déplacements admissibles, c'est à dire compatibles avec les liaisons (conditions aux limites et conditions unilatérales) tel que:

$$V = \{v \in M / v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (2.1.6)$$

avec

$$M = \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^2 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\} \quad (2.1.7)$$

La forme variationnelle du problème continu (P) s'écrit alors sous la forme d'une inéquation variationnelle comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V \text{ tel que:} \\ a(u, v - u) \geq l(v - u), \quad \forall v \in V \end{array} \right. \quad (\text{PV})$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) \varepsilon(v) dx \quad (2.1.8)$$

$$= \int_{\Omega} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(v) dx, \quad \forall u, v \in V \quad (2.1.9)$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} F v ds \quad (2.1.10)$$

C'est l'élimination des efforts de contact qui transforme l'équation variationnelle en inéquation puisque ceux-ci sont caractérisés par des inégalités.

Démonstration de l'équivalence

Implication1 : u solution de $(P) \implies u$ solution de (PV)

En multipliant l'équation (2.1.1) par $v - u, \forall v \in V$ et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\forall v \in V, \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) (v - u) dx = - \int_{\Omega} f (v - u) dx \quad (2.1.11)$$

En utilisant la formule de Green, on trouve

$$\int_{\Gamma} \sigma(u) \eta (v - u) dS - \int_{\Omega} \sigma(u) \nabla (v - u) dx = - \int_{\Omega} f (v - u) dx \quad (2.1.12)$$

Si on pose

$$\begin{aligned} a(u, v - u) &= \int_{\Omega} \sigma(u) \nabla (v - u) dx \\ &= \int_{\Omega} A \varepsilon(u) \varepsilon(v - u) dx \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Alors, on a

$$a(u, v - u) = \int_{\Gamma} \sigma(u) \eta (v - u) dS + \int_{\Omega} f (v - u) dx \quad (2.1.14)$$

et comme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, on décompose $\int_{\Gamma} \sigma(u) \eta (v - u) dS$ de la manière suivante

$$\int_{\Gamma} \sigma(u) \eta (v - u) dS = \int_{\Gamma_1} \sigma(u) \eta (v - u) dS + \int_{\Gamma_2} \sigma(u) \eta (v - u) dS + \int_{\Gamma_3} \sigma(u) \eta (v - u) dS \quad (2.1.15)$$

avec

- $\int_{\Gamma_1} \sigma(u) \eta (v - u) dS = 0$ car $\begin{cases} u \in V \\ v \in V \end{cases} \implies u = v = 0$ sur Γ_1 .
- $\int_{\Gamma_2} \sigma(u) \eta (v - u) dS = \int_{\Gamma_2} F (v - u) ds$ car $\sigma(u) \eta = F$ sur Γ_2 .
- Comme $\sigma(u) = \sigma_n(u) \eta + \sigma_t(u)$ sur Γ_3 et le problème est sans frottement c'est à dire $\sigma_t(u) = 0$ et par l'hypothèse donnée par (2.1.5), on a $\int_{\Gamma_3} \sigma(u) \eta (v - u) dS \geq 0$.

D'où

$$a(u, v - u) \geq l(v - u), \quad \forall u, v \in V \quad (2.1.16)$$

avec

$$l(v - u) = \int_{\Gamma_2} F(v - u) dS - \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad (2.1.17)$$

Implication2 : u solution de (PV) $\implies u$ solution de (P)

Soit

$$\forall u, v \in V : a(u, v - u) \geq l(v - u) \quad (2.1.18)$$

Utilisant la formule de Green, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) (v - u) dx + \int_{\Gamma} \sigma(u) \eta (v - u) dS - \int_{\Gamma_2} F(v - u) dS - \int_{\Omega} f(v - u) dx \geq 0 \quad (2.1.19)$$

- on choisit $v = u \pm \varphi$ où $\varphi \in (D(\Omega))^2$.

φ est à support compact donc les intégrales de contour sont nulles, d'où

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) \varphi dx = - \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \text{p.p } \varphi \quad (2.1.20)$$

en effet : $\begin{cases} v = u + \varphi \text{ est négatif} \\ v = u - \varphi \text{ est positif} \end{cases}$
ce qui implique que

$$\operatorname{div} \sigma(u) = -f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1.21)$$

- on choisit $\begin{cases} v = u \text{ sur } \Gamma_3 \\ v = u \pm \varphi \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$ d'où

$$\int_{\Gamma_2} \sigma(u) \eta \varphi dS = \int_{\Gamma_2} F \varphi dS, \quad \text{p.p } \varphi \quad (2.1.22)$$

ce qui entraîne

$$\sigma(u) \eta = F \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (2.1.23)$$

Il reste

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_n(u) (v_n - u_n) dS \geq 0$$

- on choisit $v_n = 0$, donc

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_n(u) \cdot u_n dS \leq 0 \quad (2.1.24)$$

- on choisit $v_n = 2u_n$, alors

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_n(u) \cdot u_n dS \geq 0 \quad (2.1.25)$$

D'après (2.1.24) et (2.1.25), on a

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_n(u) \cdot u_n dS = 0 \quad (2.1.26)$$

d'où

$$\sigma_n(u) \cdot u_n = 0 \quad \text{p.p} \quad (2.1.27)$$

et

$$\forall v_n \leq 0, \int_{\Gamma_3} \sigma_n(u) \cdot v_n dS \geq 0 \quad (2.1.28)$$

ce qui implique que

$$\sigma_n(u) \leq 0 \quad \text{p.p} \quad (2.1.29)$$

d'où, on établit l'équivalence entre le problème continu (P) et le problème variationnel (PV).

On peut se rapporter aux références [62] et [63] pour l'établissement rigoureux de l'équivalence des problèmes (P) et (PV).

2.1.2 Existence et unicité de la solution faible

On se réfère à [62] et [63] pour le détails de la démonstration.

Pour l'étude de l'existence et l'unicité de la solution faible on utilise le théorème de Lax-Milgram , cependant on a :

- Pour la continuité des deux formes on utilise l'inégalité de Cauchy Schwartz.
- Pour la coersivité on utilise l'hypothèse de stabilité du tenseur d'élasticité qui est un résultat de l'inégalité de Korn donnée dans le lemme 1.2.1.

2.2 Le problème modèle

Nous considérons dans cette section un contact unilatéral d'un corps solide occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 , avec une fondation rigide qui satisfait les équations suivantes

$$-\operatorname{div} [a(x) \nabla u] = f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.2.2)$$

$$a(x) \nabla u \cdot \eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (2.2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \geq \alpha \\ a(x) \nabla u \cdot \eta \geq \beta \\ (u - \alpha)(a(x) \nabla u \cdot \eta - \beta) = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.2.4)$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Ω est un sous ensemble de polygone ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 .
2. La frontière $\partial\Omega$ de Ω est décomposée de trois parties vides disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , tel que $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3} = \partial\Omega$.
3. $f \in L^2(\Omega)$, η est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.
4. $\alpha \in \mathbb{R}_-$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
5. Sous les hypothèses précédentes, on donne des hypothèses sur a :
 - a est une fonction C^1 par morceaux de $\overline{\Omega}$ vers $\mathbb{R}^{d \times d}$ tel que pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $a(x)$ est une matrice symétrique.
 - Il existe $a_0, a_\infty \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a_0 \leq a(x) \xi \cdot \xi \leq a_\infty$ presque pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

L'idée de prendre $A\sigma(u) = a(x)\nabla u$ est dû à [77] où il ont analysé le même modèle avec la méthode d'éléments volumes finis; ce qui nous a mené à prendre la même équation d'équilibre avec certaines hypothèses afin de pouvoir approximer le problème de contact par la méthode de volumes finis. Dans le sens mécanique c'est la propriété de diagonalisation du tenseur de déformation.

Dans tous ce qui suit le problème défini par ((2.2.1) – (2.2.4)) est noté par (PM) .

2.2.1 Formulation variationnelle

Afin d'écrire la formulation variationnelle, on doit spécifier d'abord les espaces fonctionnels de la solution faible.

Soit

$$V_\alpha = \{v \in M / v \geq \alpha \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (2.2.5)$$

avec

$$M = \left\{ v \in [H^1(\Omega)]^2 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\} \quad (2.2.6)$$

Multipliant l'équation (2.2.1) par $v \in V_\alpha$ puis intégrant sur Ω , on obtient

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} [a(x)\nabla u] v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall u \in V_\alpha \quad (2.2.7)$$

Utilisant la formule de Green, on peut écrire

$$\int_{\Omega} a(x)\nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma} a(x)\nabla u \cdot \eta v ds \quad (2.2.8)$$

et comme $\int_{\Gamma} a(x)\nabla u \cdot \eta v ds = \int_{\Gamma_1} a(x)\nabla u \cdot \eta v ds + \int_{\Gamma_2} a(x)\nabla u \cdot \eta v ds + \int_{\Gamma_3} a(x)\nabla u \cdot \eta v ds$ avec u vérifiant les conditions (2.2.2) – (2.2.4), alors la formulation variationnelle du problème modèle (PM) s'écrit sous forme d'inéquation variationnelle comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in V_\alpha \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega} a(x)\nabla u \cdot \nabla v dx \geq \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_3} \beta v ds \end{array} \right. \quad (PMV)$$

avec

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a(x)\nabla u \cdot \nabla v dx \quad (2.2.9)$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_3} \beta \cdot v ds \quad (2.2.10)$$

2.2.2 Existence et unicité de la solution faible

Pour l'étude d'existence et d'unicité de la solution faible on utilise le théorème de Lax-Milgram.

cependant, démontrons la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ ainsi que la continuité de la forme linéaire $l(v)$.

Continuité de $a(., .)$:

On cherche à majorer $|a(u, v)|$, d'où

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \quad (2.2.11)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$|a(u, v)| \leq \left(\int_{\Omega} a(x) \nabla u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \nabla v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.12)$$

Sous les hypothèses 5 de la section 2.2, on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.2.13)$$

d'où la continuité de la forme bilinéaire $a(u, v)$.

Continuité de $l(.)$:

On cherche à majorer $|l(v)|$, donc

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_3} \beta \cdot v ds \right| \quad (2.2.14)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$|l(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v dx \right| + \left| \int_{\Gamma_3} \beta \cdot v ds \right| \quad (2.2.15)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on trouve

$$|l(v)| \leq \left(\int_{\Omega} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + |\beta| \left(\int_{\Gamma_3} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.16)$$

Alors

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\beta| \|v\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (2.2.17)$$

Utilisant le théorème de trace et l'inégalité de Poincaré, on aboutit à

$$|l(v)| \leq c_1 \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (2.2.18)$$

tel que c_1 dépend de $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ et $|\beta|$.

Coercivité de $a(\cdot, \cdot)$:

Sous l'hypothèse qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a(x) \xi \cdot \xi \geq a_0$ presque pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, alors en déduit que

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} a(x) \nabla u^2 \cdot dx \\ &\geq a_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

d'où la coercivité de la forme $a(u, v)$.

D'après la théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique du problème variationnel (PMV).

Lemme 2.2.1 *Toute solution du problème (PM) est solution du problème (PMV) et inversement.*

Preuve. Pour la preuve, on procède par le même raisonnement de la démonstration de l'équivalence donné dans la sous-section 2.1.1. ■

La méthode des volumes finis

En analyse numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation (on parle aussi de formulation faible).

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints en 3D (des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence

sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés car en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

Présentons la méthode plus précisément sur des exemples simples, puis décrivons la discrétisation des lois de conservation générales.

3.1 Les principes des volumes finis pour les lois de conservation générales

En physique, une loi de conservation exprime qu'une propriété mesurable particulière d'un système physique reste constante au cours de l'évolution de ce système. Certaines lois de conservation n'ont jamais été mises en défaut :

- conservation de l'énergie (y compris l'énergie de masse en relativité) .
- conservation de la quantité de mouvement .
- conservation du moment angulaire.
- conservation de la charge électrique.
- conservation de la charge de couleur.
- conservation du flux magnétique.
- conservation du nombre baryonique.
- conservation du nombre leptonique.

On s'intéresse dans ce chapitre aux lois de conservation, dont la forme générale est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = f; \forall (x; t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (3.1.1)$$

à laquelle on ajoute des conditions aux limites et des conditions initiales, et où ρ la densité est l'inconnue, J le flux associé, f le terme source, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 . De plus, J est de la forme suivante : $J = F(t, x, \rho, \nabla \rho)$. On citera par exemple :

Le flux de convection / transport : $J = v(x; t) g(\rho)$, où :

- $v(x; t) \in \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 , le champ de vecteur donné.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Le flux de diffusion : $J = -k(x; t) \nabla \rho$, où :

$k(x; t) \in \mathbb{R}$ dans le cas classique.

$k(x; t) \in M_d(\mathbb{R})$ (matrice $d \times d$) dans certains cas, comme on va proposer dans notre problème modèle.

Le flux de convection et diffusion : $J = v(x; t) g(\rho) - k(x; t) \nabla \rho$.

Grâce au travail du physicien, le problème peut être résolu en introduisant des lois de comportement qui concernent ρ , J et f avec un scalaire ou un vecteur inconnu $u(x, t)$, fonction de la variable d'espace x et du temps t .

La discrétisation par la méthode de volumes finis peut se faire en temps qu'en espace. Pour cela; on se donne un exemple pour décrire les principes de la méthode.

L'équation (3.1.1) peut être vue comme l'expression de la conservation de ρ dans un domaine infinitésimal; il est formellement équivalent à l'équation :

$$\begin{aligned} & \int_K \rho(x; t_2) dx - \int_K \rho(x; t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial K} J(x; t) \eta_K(x) d\gamma(x) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_K f(x; t) dx dt \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Pour tout sous ensemble K et pour tous les temps t_1 et t_2 , où $\eta_K(x)$ est le vecteur normal unitaire à ∂K au point x extérieur à K . L'équation (3.1.2) exprime la loi de

conservation dans le sous ensemble K entre t_1 et t_2 . Dans tous ce qui suit, dx est le symbole d'intégration pour la mesure de Lebesgue de dimension d en \mathbb{R}^d et $d\gamma$ est le symbole d'intégration de la dimension $(d - 1)$ sur la frontière considérée.

Dans la formulation (3.1.2), la loi de conservation (3.1.1) est intégrée sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ et un volume de contrôle K d'espace.

On peut également faire une intégration spatiale est ce en approchant la dérivée temporelle par un schéma de différences finies avec le schéma d'Euler explicite (des schémas implicites et d'ordre supérieur peuvent également être utilisés).

Afin de réaliser une discrétisation en espace par volumes finis de l'équation (3.1.1), un maillage \mathcal{T} du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sur lequel la loi de conservation est étudiée, est introduit. Le maillage est tel que $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \overline{K}$, où l'élément K de \mathcal{T} est un sous ensemble ouvert de Ω et s'appelle un volume de contrôle. Des hypothèses sur les mailles seront nécessaires pour la définition des schémas; ils dépendent également du type d'équation à discrétiser.

Pour les schémas de volumes finis considérés, les inconnues discrètes au temps t_n sont désignées par $u^n(K)$, $K \in \mathcal{T}$. La valeur $u^n(K)$ est une approximation de u sur le volume de contrôle K à l'instant t_n . Le principe de base de la méthode classique des volumes finis est d'intégrer l'équation (3.1.1) sur chaque volume de contrôle K du maillage \mathcal{T} . On obtient une loi de conservation sous une forme non locale (liée à l'équation (3.1.2)) écrite pour le volume de contrôle K . En utilisant la discrétisation du temps d'Euler, cela donne

$$\int_K \frac{\rho^{(n+1)}(x) - \rho^{(n)}(x)}{h} dx + \int_{\partial K} J(x; t_n) \eta_K(x) d\gamma(x) = \int_K f(x; t_n) dx \quad (3.1.3)$$

La dernière étape pour définir le schéma des volumes finis est donc l'approximation du «flux» $J(x; t_n) \eta_K(x)$ sur chaque ∂K de chaque volume de contrôle K qui est approché par une certaine quantité $F_{K,L}^{(n)}$, où $K, L \in \mathcal{T}$ tel que $K \setminus L = \overline{K} \cap \overline{L}$.

Les deux caractéristiques importantes de la méthode des volumes finis sont :

1. La conservativité, c'est-à-dire $F_{K,L}^{(n)} = -F_{L,K}^{(n)}$ pour tout $K, L \in \mathcal{T}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La consistance de l'approximation de $J(x; t_n) \eta_K(x)$ qui est définie pour chaque type de relation entre J et les inconnues. (Pour plus de détails voir [27])

3.2 Maillages et schémas

Dans cette section, on va présenter les schémas de volumes finis pour certains exemples académique en une dimension et en deux dimensions.

3.2.1 Formulation du schéma volumes finis en 1D

Considérons le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x); x \in [0; 1] \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Si $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, il existe une solution unique $u \in C^2([0; 1], \mathbb{R})$ du problème (3.2.1).

Notons que l'équation $-u_{xx} = f$ peut être écrite sous la forme $\text{div } J = f$ avec $J = -u_x$.

Pour calculer la solution approchée de cette équation, définissons un maillage noté \mathcal{T} , de l'intervalle $[0; 1]$ constitué de: N volumes de contrôle noté K_i , $i = 1, \dots, N$ et N points de $[0; 1]$, notés $x_i, i = 1, \dots, N$, vérifiant les hypothèses suivantes:

Définition 3.2.1 (*Maillage admissible en 1-D*): Un maillage admissible de $[0; 1]$ noté \mathcal{T} est donné par une famille $(K_i)_{i=1, \dots, N}$, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K_i = [x_{i-1}; x_{i+1}]$ et par une famille $(x_i)_{0, \dots, N+1}$ tel que

$$x_0 = x_{\frac{1}{2}} = 0 < x_1 < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_N < x_{N+\frac{1}{2}} = x_{N+1} = 1$$

avec

$$\begin{aligned} h_i &= m(K_i) = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, i = 1, \dots, N \\ h_i^- &= x_i - x_{i-\frac{1}{2}}, h_i^+ = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i, i = 1, \dots, N \\ h_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, N \\ h_{i-\frac{1}{2}} &= x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, N + 1 \\ \text{size}(\mathcal{T}) &= h = \max\{h_i, i = 1, \dots, N\} \end{aligned}$$

Comme dans l'équation (3.1.3), en intégrant la première équation de (3.2.1) sur chaque volumes de contrôle K_i , on a

$$-u_x \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + u_x \left(x_{i-\frac{1}{2}} \right) = \int_{K_i} f(x) dx \quad (3.2.2)$$

En approximant $-u_x \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right)$ par différence finis progressive, on obtient l'approximation du flux suivante

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, i = 1, \dots, N - 1 \quad (3.2.3)$$

Cette approximation est consistente c'est à dire si $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, alors

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} = -u_x \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + 0(h) \quad (3.2.4)$$

avec $0(h) \leq Ch, C \in \mathbb{R}_+$.

En utilisant les conditions aux bords et par intégration numérique on obtient une approximation de $\int_{K_i} f(x) dx$, d'où le schéma volumes finis du problème (3.2.1) est donné par

$$F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}} = h_i f_i, i = 1, \dots, N \quad (3.2.5)$$

avec

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x) dx, i = 1, \dots, N \quad (3.2.6)$$

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}, i = 1, \dots, N - 1 \quad (3.2.7)$$

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{u_1}{h_{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.8)$$

$$F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} \quad (3.2.9)$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \quad (3.2.10)$$

Le schéma numérique (3.2.5) – (3.2.10) peut être écrit sous forme matricielle $AU = B$, avec $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)^t$ et $B = (B_1, B_2, \dots, B_N)^t$ tel que

$$(AU)_i = \frac{1}{h_i} \left(-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right), i = 1, \dots, N \quad (3.2.11)$$

$$(B)_i = \frac{1}{h_i K_i} \int f(x) dx, i = 1, \dots, N \quad (3.2.12)$$

3.2.2 Formulation du schéma volumes finis en 2D

Selon le domaine Ω on peut définir le maillage structuré ou non structuré.

Si Ω est un rectangle ou un parallélépipède, alors les volumes de contrôle sont soit rectangulaire ou parallélépipédiques. Dans ce cas, le schéma volumes finis unidimensionnel peut facilement être généralisé.

Soit $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ et $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Soit $\mathcal{T} = (K_{i,j})_{i=1, \dots, N_1; j=1, \dots, N_2}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ un maillage admissible de Ω qui satisfait les hypothèses suivantes :

- Soit $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, $h_1, \dots, h_{N_1} > 0, k_1, \dots, k_{N_2} > 0$ tel que $\sum_{i=1}^{N_1} h_i = 1, \sum_{j=1}^{N_2} k_j = 1$ et $h_0 = h_{N_1+1} = 0, k_0 = k_{N_2+1} = 0$.
- Pour $i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2$, $\left(x_{\frac{1}{2}} = 0, x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i-\frac{1}{2}} + h_i, x_{N_1+\frac{1}{2}} = 1 \right)$, $\left(y_{\frac{1}{2}} = 0, y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j-\frac{1}{2}} + k_j, y_{N_2+\frac{1}{2}} = 1 \right)$ et $K_{i,j} = [x_{i-1}; x_{i+1}] \times [y_{j-1}; y_{j+1}]$.
- Soit $(x_i)_{0, \dots, N_1+1}$ et $(y_j)_{0, \dots, N_2+1}$ tels que pour $i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2$:

$$x_0 = x_{\frac{1}{2}} = 0 < x_1 < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{i-\frac{1}{2}} < x_i < x_{i+\frac{1}{2}} < \dots < x_{N_1} < x_{N_1+\frac{1}{2}} = x_{N_1+1} = 1$$

$$y_0 = y_{\frac{1}{2}} = 0 < y_1 < y_{\frac{3}{2}} < \dots < y_{j-\frac{1}{2}} < y_j < y_{j+\frac{1}{2}} < \dots < y_{N_2} < y_{N_2+\frac{1}{2}} = y_{N_2+1} = 1$$

- Soit $x_{ij} = (x_i, y_j)$ pour $i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2$; on pose

$$\begin{aligned} h_i^- &= x_i - x_{i-\frac{1}{2}}, h_i^+ = x_{i+\frac{1}{2}} - x_i, h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, N_1 \\ k_j^- &= y_j - y_{j-\frac{1}{2}}, k_j^+ = y_{j+\frac{1}{2}} - y_j, k_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j, j = 0, \dots, N_2 \\ \text{size}(\mathcal{T}) &= h = \max \{ (h_i, i = 1, \dots, N_1), (k_j, j = 1, \dots, N_2) \} \end{aligned}$$

En intégrant la première équation de (3.2.13) sur chaque volumes de contrôle $K_{i,j}$, on

a

$$\begin{aligned} & - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_x \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y \right) dy + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} u_x \left(x_{i-\frac{1}{2}}, y \right) dy \\ & - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_y \left(x, y_{j+\frac{1}{2}} \right) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_y \left(x, y_{j-\frac{1}{2}} \right) dx \\ & = \int_{K_{i,j}} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

En approximant les dérivées par différences finis, le schéma volumes finis peut s'écrire comme suit

$$F_{i+\frac{1}{2},j} - F_{i-\frac{1}{2},j} + F_{i,j+\frac{1}{2}} - F_{i,j-\frac{1}{2}} = h_{i,j} f_i, i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2 \quad (3.2.14)$$

avec

$$h_{i,j} = h_i \times k_j \quad (3.2.15)$$

$$f_{i,j} = \frac{1}{h_{i,j} K_i} \int f(x, y) dx dy, i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2 \quad (3.2.16)$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{k_j}{h_{i+\frac{1}{2}}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}), i = 1, \dots, N_1 - 1; j = 1, \dots, N_2 \quad (3.2.17)$$

$$F_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{h_i}{k_{j+\frac{1}{2}}} (u_{i,j+1} - u_{i,j}), i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2 - 1$$

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{u_1}{h_{\frac{1}{2}}} \quad (3.2.18)$$

$$F_{N+\frac{1}{2}} = -\frac{u_N}{h_{N+\frac{1}{2}}} \quad (3.2.19)$$

$$u_{0,j} = u_{N_1+1,j} = u_{i,0} = u_{i,N_2+1} = 0 \quad (3.2.20)$$

Le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 est un domaine non structuré, on va le prendre en considération dans le chapitre 4.

Analyse Numérique du problème discret associé de Signorini

Ce chapitre est consacré à l'analyse du modèle discret associé au problème de Signorini où on a proposé pour la discrétisation la méthode des volumes finis dans tout le domaine Ω . Notre but est de prouver l'existence et d'unicité aussi démontrer la stabilité de la solution discrète. Ce travail a fait l'objet de l'article [34].

4.1 Définitions et notations

Dans ce qui suit, on suppose que la partie de contact du solide avec l'obstacle rigide est Γ_C .

Définition 4.1.1 *Un maillage admissible de Ω au sens des volumes finis, noté par \mathcal{T} est donné par une famille finie de "volumes de contrôle", qui sont un sous-ensemble de polygones convexes ouverts disjoints de Ω , une famille finie de sous-ensembles disjoints Ω contenus dans des hyperplans de \mathbb{R}^d , notés \mathcal{E} (ce sont les côtés des volumes de contrôle), avec une mesure dimensionnelle strictement positive $(d - 1)$ et une famille de points de Ω noté \mathcal{P} satisfaisant les propriétés suivantes:*

- (i) La fermeture de l'union de tous les volumes de contrôle est $\overline{\Omega}$.
- (ii) Pour tout $K \in \mathcal{T}$, il existe un sous-ensemble \mathcal{E}_K de \mathcal{E} tel que $\partial K = \overline{K} \setminus K = \cup_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \overline{\sigma}$ et $\cup_{K \in \mathcal{T}} \mathcal{E}_K = \mathcal{E}$.
- (iii) Pour tout $(K, L) \in \mathcal{T}^2$ avec $K \neq L$, la mesure de Lebesgue dimensionnelle $(d-1)$ de $\overline{K} \cap \overline{L}$ est 0 ou $\overline{K} \cap \overline{L} = \overline{\sigma}$ pour certains $\sigma \in \mathcal{E}$, qu'on note dans tous ce qui suit par $K \setminus L$.
- (iv) La famille $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}}$ est telle que $x_K \in K$ (pour tout $K \in \mathcal{T}$) et si K et L sont deux volumes de contrôle voisins, on suppose que $x_K \neq x_L$ et la droite $\mathcal{D}_{K,L}$ passant par x_K et x_L est supposée orthogonale $K \setminus L$.
- (v) Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$ tel que $\sigma \subset \partial\Omega$, il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\sigma \subset \Gamma_i$ avec $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3} = \partial\Omega$.
- (vi) Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$ tel que $\sigma \subset \partial\Omega$, soit K un volume de contrôle tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et soit $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ la droite passant par x_K et orthogonale à σ ; ensuite $y_\sigma = \mathcal{D}_{K,\sigma} \cap \sigma$.
- (vii) Pour tout $K \in \mathcal{T}$, la restriction $a|_K$ de la fonction a à un volume de contrôle donné K appartient à $C^1(\overline{K})$.

De plus, si a est une fonction C^1 par morceaux de $\overline{\Omega}$ vers $\mathbb{R}^{d \times d}$, les conditions d'orthogonalité (iv) et (vi) doivent être modifiées en:

- (iv) Pour tout $K \in \mathcal{T}$ soit a_K la valeur moyenne de a dans K , c'est à dire

$$a_K = \left| \frac{1}{m(K)} \int_K a(x) dx \right| \quad (4.1.1)$$

L'ensemble \mathcal{T} est tel qu'il existe une famille de points $\mathcal{P} = (x_K)_{K \in \mathcal{T}}$ tel que $x_K = \cap_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathcal{D}_{K,\sigma,a} \in \overline{K}$.

Où $\mathcal{D}_{K,\sigma,a}$ est la droite perpendiculaire à σ par rapport au produit scalaire induit par a_K^{-1} tel que $\mathcal{D}_{K,\sigma,a} \cap \mathcal{D}_{L,\sigma,a} \neq \emptyset$ si $\sigma = K \setminus L$. Et si $\sigma = K \setminus L$, soit $y_\sigma = \mathcal{D}_{K,\sigma,a} \cap \sigma (= \mathcal{D}_{L,\sigma,a} \cap \sigma)$ et supposons que $x_K \neq x_L$.

(vi) Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$, soit K un volume de contrôle tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$ et soit $\mathcal{D}_{K,\sigma}$ la droite passant par x_K et orthogonale à σ par rapport au produit scalaire induit par a_K^{-1} ; alors il existe $y_\sigma \in \sigma \cap \mathcal{D}_{K,\sigma,a}$; et soit $g_\sigma = g(y_\sigma)$.

1. Soit $\text{mes}(\mathcal{T}) = \sup\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}\}$.

2. Pour tout $K \in \mathcal{T}$ et $\sigma \in \mathcal{E}$, $m(K)$ est la mesure de Lebesgue de dimension d de K et $m(\sigma)$ est la mesure de Lebesgue de dimension $(d-1)$ de σ .
3. L'ensemble des arêtes intérieures (resp. délimitées) est noté par \mathcal{E}_{int} (resp. \mathcal{E}_{ext}), c'est-à-dire $\mathcal{E}_{int} = \{\sigma \in \mathcal{E}; \sigma \subset \partial\Omega\}$. L'ensemble des voisins de K est noté $N(K)$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(K) = \{L \in \mathcal{T}; \exists \sigma \in \mathcal{E}_K : \sigma = \overline{K} \cap \overline{L}\}$.
4. Si $\sigma = K \setminus L$, on note par d_σ ou $d_{K \setminus L}$ la distance Euclidienne entre x_K et x_L . Si $\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{ext}$, on note par d_σ la distance Euclidienne entre x_K et y_σ . Pour tout volume de contrôle K et tout arête $\sigma \in \mathcal{E}_K$, on note par $d_{K,\sigma}$ la distance entre x_K et σ .
5. Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}$; la transmissivité à travers σ est définie par $\tau_\sigma = \frac{m(\sigma)}{d_\sigma}$.

Définition 4.1.2 Soit Ω un sous-ensemble polygonal ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , et \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1. Nous définissons $X(\mathcal{T})$ comme l'ensemble de fonctions de $\Omega_{\mathcal{T}} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K \cup (\bigcup_{\sigma \subset \Gamma_3} \sigma)$ vers \mathbb{R} qui sont constantes sur chaque volume de contrôle K du maillage et sur chaque arête de \mathcal{E}_{ext} qui est inclus dans Γ_3 .

Définition 4.1.3 Soit Ω un sous-ensemble polygonal ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , et \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1. Nous définissons l'opérateur γ de $X(\mathcal{T})$ vers $L^2(\partial\Omega)$ tel que: soit $u \in X(\mathcal{T})$, soit u_K la valeur de u dans le volume de contrôle K et u_σ la valeur de u sur l'arête σ , pour $\sigma \subset \Gamma_3$; d'où

$$\begin{cases} \gamma(u) = u_\sigma \text{ sur } \sigma, & \text{si } \sigma \subset \Gamma_3 \\ \gamma(u) = u_K \text{ sur } \sigma, & \text{si } \sigma \subset \Gamma_2 \text{ et } \sigma \in \mathcal{E}_K \\ \gamma(u) = 0 \text{ sur } \sigma, & \text{si } \sigma \subset \Gamma_1 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Définition 4.1.4 Soit Ω un sous-ensemble polygonal ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 et \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1. Pour $u \in X(\mathcal{T})$ la norme discrète H_0^1 est définie par

$$\|u\|_{1,\mathcal{T}} = \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \tau_\sigma (D_\sigma u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.3)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} |D_\sigma u| = |u_K - u_L| \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K \setminus L \\ D_\sigma u = -u_K \quad \text{si } \sigma \subset \Gamma_1, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ D_\sigma u = 0 \quad \text{si } \sigma \subset \Gamma_2 \\ D_\sigma u = u_\sigma - u_K \quad \text{si } \sigma \subset \Gamma_3, \sigma \in \mathcal{E}_K \end{array} \right. \quad (4.1.4)$$

Lemme 4.1.1 Soit Ω un sous-ensemble polygonal ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 et \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1 et $u \in X(\mathcal{T})$, alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{1,\mathcal{T}} \quad (4.1.5)$$

Lemme 4.1.2 Soit Ω un sous-ensemble polygonal ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , et \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1. Soit u_K la valeur de u dans le volume de contrôle K et u_σ la valeur de u sur l'arête σ , pour $\sigma \subset \Gamma_3$. Soit $\gamma(u) \in L^2(\partial\Omega)$ (voir définition 4.1.3), il existe une constante C qui dépend seulement de Ω , tel que

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{1,\mathcal{T}} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (4.1.6)$$

4.2 Schéma numérique

4.2.1 Schéma de volumes finis

Pour obtenir le schéma de volumes finis du problème modèle, intégrant la première équation du problème (PM) sur chaque volume de contrôle K et en approximant la dérivée normale sur chaque cellule du maillage par des différences finies, en tenant compte des conditions sur frontière du problème (PM), le schéma de volume fini obtenu est le suivant

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = m(K) f_K \quad (4.2.1)$$

où

$$f_K = \frac{1}{m(K)} \int_K f(x) dx \quad (4.2.2)$$

et $F_{K,\sigma}$ est défini sur les arêtes internes et sur la frontière comme suit

- Les arêtes internes:

$$F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (u_L - u_K) \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K \setminus L \quad (4.2.3)$$

avec

$$\tau_\sigma = \begin{cases} m(\sigma) \frac{a_{K,\sigma} a_{L,\sigma}}{a_{K,\sigma} d_{L,\sigma} + a_{L,\sigma} d_{K,\sigma}} & \text{si } y_\sigma \neq x_K \text{ et } y_\sigma \neq x_L \\ m(\sigma) \frac{a_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} & \text{si } y_\sigma \neq x_K \text{ et } y_\sigma = x_L \end{cases} \quad (4.2.4)$$

- Les arêtes du bords:

$$F_{K,\sigma} = \begin{cases} -\tau_\sigma (u_\sigma - u_K) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ F_{K,\sigma} = \tau_\sigma u_K, \forall \sigma \subset \Gamma_1, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ F_{K,\sigma} = 0, \forall \sigma \subset \Gamma_2, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (u_\sigma - u_K), \forall \sigma \subset \Gamma_3, \sigma \in \mathcal{E}_K \end{cases} \quad (4.2.5)$$

avec

$$\tau_\sigma = m(\sigma) \frac{a_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} \quad (4.2.6)$$

$$u_\sigma \geq \alpha, \forall \sigma \subset \Gamma_3 \quad (4.2.7)$$

$$-F_{K,\sigma} \geq m(\sigma) \beta, \forall \sigma \subset \Gamma_3 \quad (4.2.8)$$

$$(u_\sigma - \alpha) \left(\frac{F_{K,\sigma}}{m(\sigma)} + \beta \right) = 0, \forall \sigma \subset \Gamma_3 \quad (4.2.9)$$

4.3 Existence et unicité de la solution discrète

Pour montrer l'existence et l'unicité de $U = ((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ où u_K et u_σ satisfont les équations (4.2.1) – (4.2.9), nous donnons une formulation variationnelle équivalente.

Lemme 4.3.1 *Sous les hypothèses 1-5 (chapitre 2, section 2), soit \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1; et soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ défini par $u_{\mathcal{T}} = u_K$ presque pour tout $x \in K$, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_\sigma$ presque pour tout $x \in \sigma$,*

pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$. Alors $((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ est solution du problème défini par (4.2.1) – (4.2.9) si et seulement si $u_{\mathcal{T}}$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}} = \{v \in X(\mathcal{T}), \text{ s.t. } v_\sigma \geq \alpha, \forall \sigma \subset \Gamma_3\} \text{ tq:} \\ A(u_{\mathcal{T}}, v - u_{\mathcal{T}}) \geq L(v - u_{\mathcal{T}}) \quad \forall v \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

avec

$$A(u, v) = \sum_{\sigma=K \setminus L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_\sigma (u_K - u_L) (v_K - v_L) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma (D_\sigma u) (D_\sigma v) \quad \forall u, v \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}} \quad (4.3.2)$$

et

$$L(u) = \sum_{\sigma \subset \Gamma_3} \beta u_\sigma m(\sigma) + \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K \quad \forall u \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}} \quad (4.3.3)$$

Où τ_σ est défini par (4.2.4).

Preuve. Soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ (voir Définition 4.1.2) définie par $u_{\mathcal{T}} = u_K$ pour $x \in K$, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_\sigma$ pour $x \in \sigma$, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$.

Supposons que $((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ satisfait le problème défini par (4.2.1) – (4.2.9), et supposons que $f_K = 0$, montrons que $u_{\mathcal{T}}$ satisfait le problème (4.3.1).

Il est clair que $u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$. Soit $v \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$, multiplions (4.2.1) par $(v_K - u_K)$ et faisons la somme sur K , on trouve

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} (v_K - u_K) = 0 \quad (4.3.4)$$

ce qui donne

$$A(u_{\mathcal{T}}, v - u_{\mathcal{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} \tau_\sigma (D_\sigma u_{\mathcal{T}}) (v_\sigma - u_\sigma) \quad (4.3.5)$$

montrons que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} \tau_\sigma (D_\sigma u_{\mathcal{T}}) (v_\sigma - u_\sigma) \geq L(v - u_{\mathcal{T}}). \quad (4.3.6)$$

Soit $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$ et $K \in \mathcal{T}$ tel que $\sigma \in \mathcal{E}_K$, alors

$$\begin{aligned} -F_{K,\sigma} (v_\sigma - u_\sigma) &= (-F_{K,\sigma} - m(\sigma)\beta) (v_\sigma - \alpha) + (-F_{K,\sigma} - m(\sigma)\beta) (\alpha - u_\sigma) \\ &\quad + m(\sigma)\beta (v_\sigma - u_\sigma) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

utilisant l'équation (4.2.9), on obtient

$$(-F_{K,\sigma} - m(\sigma)\beta) (\alpha - u_\sigma) = 0 \quad (4.3.8)$$

et

$$(-F_{K,\sigma} - m(\sigma)\beta)(v_\sigma - \alpha) \geq 0 \quad (4.3.9)$$

Cependant, $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$, on a

$$\tau_\sigma(D_\sigma u_{\mathcal{T}})(v_\sigma - u_\sigma) \geq m(\sigma)\beta(v_\sigma - u_\sigma) \quad (4.3.10)$$

Il s'ensuit que $u_{\mathcal{T}}$ satisfait le problème (4.3.1).

Maintenant supposons que $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ satisfait le problème (4.3.1).

Montrons que $((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ est solution du problème (4.2.1) – (4.2.9).

Premièrement, soit $K_0 \in \mathcal{T}$ et montrons que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_0}} F_{K_0,\sigma} = 0 \quad (4.3.11)$$

Pour cela, soit $v = u_{\mathcal{T}} \pm w, v \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ avec $w \in X(\mathcal{T})$ tel que

$$\begin{cases} w_{K_0} = 1 \\ w_K = 0 \end{cases}, \forall K \in \mathcal{T}, K \neq K_0$$

et $w_\sigma = 0, \forall \sigma \in \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$.

Si on prend $v = u_{\mathcal{T}} + w$ (respectivement $v = u_{\mathcal{T}} - w$) dans (4.3.1), on obtient

$A(u_{\mathcal{T}}, w) \geq 0$ (respectively $A(u_{\mathcal{T}}, w) \leq 0$).

Donc, $A(u_{\mathcal{T}}, w) = 0$.

Ce qui implique que

$$A(u_{\mathcal{T}}, w) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{K_0}} F_{K_0,\sigma} = 0$$

Aussi, si $u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ il est claire que $u_{\mathcal{T}}$ satisfait les équations (4.2.1) – (4.2.9).

D'autre part, vérifions que $u_{\mathcal{T}}$ satisfait (4.3.1).

Soit $\sigma_0 \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_K, \sigma_0 \subset \Gamma_3$ et soit $v = u_{\mathcal{T}} + w, v \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ avec $w \in X(\mathcal{T})$ tel que $w_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$ et

$$\begin{cases} w_{\sigma_0} = 1 \\ w_\sigma = 0 \end{cases}, \forall \sigma_0 \subset \Gamma_3, \sigma_0 \neq \sigma$$

En substituant v dans l'inéquation (4.3.1), on aboutit à

$$\tau_{\sigma_0}(u_{\sigma_0} - u_K) \geq \beta m(\sigma_0)$$

Soit $\Gamma_\alpha = \{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3 \text{ tq } u_\sigma \geq \alpha\}$, $\sigma_0 \in \Gamma_\alpha$ et soit $v = u_{\mathcal{T}} - \mu w$, $v \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ avec $w \in X(\mathcal{T})$ tel que $w_K = 0, \forall K \in \mathcal{T}$ et

$$\begin{cases} w_{\sigma_0} = 1 \\ w_\sigma = 0 \end{cases}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3, \sigma \neq \sigma_0$$

où $\mu = u_{\sigma_0} - \alpha$.

En remplaçant v dans (4.3.1), on obtient

$$\tau_{\sigma_0}(u_{\sigma_0} - u_K) \geq \beta m(\sigma_0)$$

d'où, on conclut que

$$\tau_{\sigma_0}(u_{\sigma_0} - u_K) = \beta m(\sigma_0)$$

■

On va utiliser ce lemme pour établir l'existence et l'unicité.

Proposition 4.3.1 (*Existence, Unicité et Stabilité*): *Sous les hypothèses 1-5, soit \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1; il existe une solution unique $((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ du problème défini par (4.2.1) – (4.2.9). cependant, on peut définir $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ par $u_{\mathcal{T}} = u_K$ presque pour tout $x \in K$, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_\sigma$ presque pour tout $x \in \sigma$, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$. Il existe $c > 0$ qui dépend de Ω, f et β tel que*

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq c \text{ et } \|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \quad (4.3.12)$$

où $\|\cdot\|_{1,\mathcal{T}}$ est défini par la définition 4.1.4.

Preuve. *Etape 1 (Existence et unicité)*

La forme bilinéaire A définie par (4.3.2) et la forme linéaire L définie par (4.3.3) sont continues dans l'espace de Hilbert $X(\mathcal{T})$.

Aussi $A(u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}}) = \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2, \forall u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$.

Alors par le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique $u_{\mathcal{T}}$ du problème (4.3.1).

Et on utilisant le résultat du lemme 4.3.1, on montre qu'il existe une solution unique

$((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ du problème décrit par (4.2.1) – (4.2.9).

Etape 2 (Stabilité)

Maintenant, montrons les inégalités (4.3.12). Soit $u_{\mathcal{T}}$ une solution de (4.3.1). En prenant $v = 0$, on a

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq L(u_{\mathcal{T}}) \quad (4.3.13)$$

et d'après l'équation (4.3.3), utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|L(u_{\mathcal{T}})| \leq \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} \beta u_\sigma m(\sigma) \right| + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K \right| \quad (4.3.14)$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} \beta u_\sigma m(\sigma) \right| \leq |\beta| \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} u_\sigma^2 m(\sigma) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} m(\sigma) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.15)$$

et

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K \right| \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) u_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.16)$$

Alors, on obtient

$$\left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} \beta u_\sigma m(\sigma) \right| \leq |\beta| \sqrt{m(\Gamma_3)} \|\gamma(u_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (4.3.17)$$

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K u_K \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.3.18)$$

Par les résultats des lemmes 4.1.1 et 4.1.2, on trouve

$$|L(u_{\mathcal{T}})| \leq c \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \quad (4.3.19)$$

Utilisant le lemme 4.1.1 (Inégalité de Poincaré discrète), on a

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \quad (4.3.20)$$

■

4.4 Estimation d'erreurs

Théorème 4.4.1 *Sous les hypothèses 1-5, soit \mathcal{T} un maillage de volume fini admissible au sens de la définition 4.1.1; admettons qu'il existe une solution unique $((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ du problème défini par (4.2.1) – (4.2.9). Soit $\lambda = \min_{x \in K} \min_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{d_{K,\sigma}}{\text{diam}(K)}$ et $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ défini par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ presque pour tout $x \in K$, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_\sigma$ presque pour tout $x \in \sigma$, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$ où $((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ est la solution du problème donnée par (4.2.1) – (4.2.9).*

Supposons que la solution variationnelle unique du problème (PM) satisfait $u \in H^2(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{T}$, soit $e_K = u(x_K) - u_K$ et pour chaque $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ tel que $\sigma \subset \Gamma_3$ soit $e_\sigma = u(y_\sigma) - u_\sigma$ et $e_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ défini par $e_{\mathcal{T}}(x) = e_K$ presque pour tout $x \in K$, pour tout $K \in \mathcal{T}$ et par $e_{\mathcal{T}}(x) = e_\sigma$ presque pour tout $x \in \sigma$, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$.

Alors, il existe $C \in \mathbb{R}$ qui dépend de $u, \beta, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, f$ et Ω tel que

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \text{mes}(\mathcal{T}) \quad (4.4.1)$$

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \text{mes}(\mathcal{T}) \quad (4.4.2)$$

où $\text{mes}(\mathcal{T}) = \sup_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ satisfont

$$\lambda_1 (\text{mes}(\mathcal{T}))^2 \leq m(K) \leq \lambda_2 (\text{mes}(\mathcal{T}))^2 \quad (4.4.3)$$

$$\lambda_1 \text{mes}(\mathcal{T}) \leq m(\sigma) \leq \lambda_2 \text{mes}(\mathcal{T})$$

$$\lambda_1 \text{mes}(\mathcal{T}) \leq d_\sigma \leq \lambda_2 \text{mes}(\mathcal{T})$$

Preuve. Soit $u_{\mathcal{T}} \in X(\mathcal{T})$ définie dans Ω par $u_{\mathcal{T}}(x) = u_K$ presque pour tout $x \in K$, pour tout $K \in \mathcal{T}$ and by $u_{\mathcal{T}}(x) = u_\sigma$ presque pour tout $x \in \sigma$, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3$ où $((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \subset \Gamma_3})$ est solution du problème discret (4.2.1) – (4.2.9).

Donc pour tout $K \in \mathcal{T}$, nous définissons le flux de diffusion exacte par $\bar{F}_{K,\sigma}$ où $\bar{F}_{K,\sigma} = - \int_{\sigma} a(x) \nabla u(x) \eta_{K,\sigma} d\gamma(x)$, et supposons que pour tout $K \in \mathcal{T}$, $\sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) f_K = 0$.

Alors, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \bar{F}_{K,\sigma} = 0 \quad (4.4.4)$$

Soit $F_{K,\sigma}^*$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{K,\sigma}^* = -\tau_\sigma (u(x_L) - u(x_K)) \quad \text{if } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K \setminus L \\ F_{K,\sigma}^* = \tau_\sigma u(x_K) \quad , \forall \sigma \subset \Gamma_1, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ F_{K,\sigma}^* = 0 \quad , \forall \sigma \subset \Gamma_2, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ F_{K,\sigma}^* = -\tau_\sigma (u(y_\sigma) - u(x_K)) \quad , \forall \sigma \subset \Gamma_3, \sigma \in \mathcal{E}_K \end{array} \right. \quad (4.4.5)$$

Cependant, l'erreur de consistance sur le flux de diffusion peut être défini comme suit

$$R_{K,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)} (\bar{F}_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}^*) \quad (4.4.6)$$

Supposons que la solution variationnelle unique u du problème (PM) appartient à $H^2(\Omega)$ et grâce à la régularité de u . Alors, il existe $C_1 \in \mathbb{R}_+$ qui dépend seulement de $\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}$, λ et λ_2 tel que

$$m(\sigma) d_\sigma |R_{K,\sigma}|^2 \leq C_1 (\text{size}(\mathcal{T}))^2, \quad \forall K \in \mathcal{T}, \forall \sigma \in \mathcal{E}_K \quad (4.4.7)$$

Substituons (4.2.1) dans l'équation (4.4.4), et utilisons (4.4.6) et la régularité de u nous donne

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (F_{K,\sigma}^* - F_{K,\sigma}) = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) R_{K,\sigma} \quad (4.4.8)$$

Soit $H_{K,\sigma} = F_{K,\sigma}^* - F_{K,\sigma}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (e_L - e_K) \quad \text{if } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K \setminus L \\ H_{K,\sigma} = \tau_\sigma e_K \quad , \forall \sigma \subset \Gamma_1, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ H_{K,\sigma} = 0 \quad , \forall \sigma \subset \Gamma_2, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ H_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (e_\sigma - e_K) \quad , \forall \sigma \subset \Gamma_3, \sigma \in \mathcal{E}_K \end{array} \right. \quad (4.4.9)$$

Multiplions l'équation (4.4.8) par e_K , faisons la somme pour $K \in \mathcal{T}$, et grace à la propriété de conservativité de $H_{K,\sigma}$ où $H_{K,\sigma} = -H_{L,\sigma}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ tel que $\sigma = K \setminus L$, alors

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} H_{K,\sigma} e_\sigma + \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} m(\sigma) R_{K,\sigma} e_\sigma \quad (4.4.10)$$

où $\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}$ est défini par (4.1.3) – (4.1.4).

En réordonnant les termes de l'équation (4.4.10), et utilisant aussi la propriété de conservativité de $H_{K,\sigma}$, on a pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ tel que $\sigma = K \setminus L$

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} (-H_{K,\sigma} - m(\sigma) R_{K,\sigma}) e_{\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) |R_{K,\sigma}| |D_{\sigma} e_{\mathcal{T}}| \quad (4.4.11)$$

Maintenant, utilisant le fait que

$$(-H_{K,\sigma} - m(\sigma) R_{K,\sigma}) e_{\sigma} = (F_{K,\sigma} - \bar{F}_{K,\sigma}) \quad (4.4.12)$$

et utilisant la dernière équation du problème (PM) et (4.2.9), on obtient

$$\begin{aligned} (-H_{K,\sigma} - m(\sigma) R_{K,\sigma}) e_{\sigma} &= (F_{K,\sigma} + m(\sigma) \beta) (u(y_{\sigma}) - \alpha) \\ &+ (F_{K,\sigma} + m(\sigma) \beta) (\alpha - u_{\sigma}) \\ &+ \int_{\sigma} (a(x) \nabla u(x) \eta_{K,\sigma} d\gamma(x) - \beta) (u(y_{\sigma}) - \alpha) \\ &+ \int_{\sigma} (a(x) \nabla u(x) \eta_{K,\sigma} d\gamma(x) - \beta) (\alpha - u_{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

introduisant les conditions de Signorini citées dans le problème (PM) et par (4.2.7) – (4.2.9), l'équation précédente devient

$$(-H_{K,\sigma} - m(\sigma) R_{K,\sigma}) e_{\sigma} \leq \int_{\sigma} (a(x) \nabla u(x) \eta_{K,\sigma} d\gamma(x) - \beta) (u(y_{\sigma}) - \alpha) \quad (4.4.14)$$

Si $u \neq \alpha$ sur σ , pour une arrête donnée σ , alors $a(x) \nabla u(x) \eta_{K,\sigma} d\gamma(x) = 0$ sur σ , donc

$$(-H_{K,\sigma} - m(\sigma) R_{K,\sigma}) e_{\sigma} \leq 0 \quad (4.4.15)$$

et si $u \neq \alpha$ sur un ensemble d'arrêtes σ de mesure non nulle, alors par la régularité de u , il existe $C_2 > 0$ qui dépend seulement de D^2u , u et β tel que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \subset \Gamma_3} (-H_{K,\sigma} - m(\sigma) R_{K,\sigma}) e_{\sigma} \leq C_2 m(\Gamma_3) (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \quad (4.4.16)$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la dernière inégalité, on obtient l'estimation suivante

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m(\sigma) d_{\sigma} |R_{K,\sigma}|^2 |D_{\sigma} e_{\mathcal{T}}| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{m(\sigma)}{d_{\sigma}} |D_{\sigma} e_{\mathcal{T}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_3 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \quad (4.4.17)$$

Utilisant l'inégalité (4.4.7), il existe $C_4 > 0$ qui dépend seulement de u , λ , λ_1 , λ_2 et Ω , tel que

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq C_4 \text{size}(\mathcal{T}) \|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} + C_3 (\text{size}(\mathcal{T}))^2 \quad (4.4.18)$$

Utilisant l'inégalité de Young, il existe $C > 0$ dépendant uniquement de u , β , λ , λ_1 , λ_2 et Ω , tel que

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad (4.4.19)$$

En utilisant Lemme 4.1.1, on aboutit directement à

$$\|e_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad (4.4.20)$$

■

4.5 Résultat numérique

4.5.1 Test numérique

Pour satisfaire l'étude théorique, on considère le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}[a(x)\nabla u] = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ a(x)\nabla u \cdot \eta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ u \geq \alpha \\ a(x)\nabla u \cdot \eta \geq \beta \\ (u - \alpha)(a(x)\nabla u \cdot \eta - \beta) = 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.5.1)$$

avec $\Omega =]0, x_m[\times]0, y_m[$, la frontière $\partial\Omega$ de Ω est décomposée de trois parties non vides disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 tel que

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \text{ tq } x = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \text{ tq } x = x_m\} \cup \{(x, y) \in \bar{\Omega} \text{ tq } y = y_m\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \bar{\Omega} \text{ tq } y = 0\}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$, η est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieur à Ω .

Pour certain $\alpha, \beta < 0$, u satisfait le problème (4.5.1) avec $f \in C(\overline{\Omega})$.

La fonction f et la matrice $a(x)$ sont choisit tel que le problème (4.5.1) ait une solution u qui satisfait

1. $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
2. $u(x, 0) \geq \alpha, a(x) \nabla u(x, 0) \cdot \eta = \beta, \forall x \in [0, \frac{x_m}{2}]$.
3. $u(x, 0) = \alpha, a(x) \nabla u(x, 0) \cdot \eta \geq \beta, \forall x \in [\frac{x_m}{2}, x_m]$.
4. $a(x) \nabla u(x, y) \cdot \eta = 0, \forall x \in \Gamma_2$.

4.5.2 schéma numérique

Soit \mathcal{T} un maillage admissible au sens de la définition 4.1.1; on choisit x_m au centre de volume de controle $K \in \mathcal{T}$ et supposons que chaque volume de controle est rectangulaire.

Le schéma de volumes finis du problème (4.5.1) est donnée comme suit

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = m(K) f_K, \quad \forall K \in \mathcal{T} \quad (4.5.2)$$

avec

$$f_K = \frac{1}{m(K)} \int_K f(x) dx \quad (4.5.3)$$

- Les arrêtes internes

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (u_L - u_K) \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \sigma = K \setminus L \\ \text{avec } \tau_\sigma = m(\sigma) \frac{a_{K,\sigma} a_{L,\sigma}}{a_{K,\sigma} d_{L,\sigma} + a_{L,\sigma} d_{K,\sigma}} \quad \text{si } y_\sigma \neq x_K \text{ et } y_\sigma \neq x_L \\ \text{et } \tau_\sigma = m(\sigma) \frac{a_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} \quad \text{si } y_\sigma \neq x_K \text{ et } y_\sigma = x_L \end{array} \right. \quad (4.5.4)$$

- Les arrêtes au bords

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (u_\sigma - u_K) \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ \text{avec } \tau_\sigma = m(\sigma) \frac{a_{K,\sigma}}{d_{K,\sigma}} \\ F_{K,\sigma} = \tau_\sigma u_K, \quad \forall \sigma \subset \Gamma_1, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ F_{K,\sigma} = 0, \quad \forall \sigma \subset \Gamma_2, \sigma \in \mathcal{E}_K \\ F_{K,\sigma} = -\tau_\sigma (u_\sigma - u_K), \quad \forall \sigma \subset \Gamma_3, \sigma \in \mathcal{E}_K \end{array} \right. \quad (4.5.5)$$

$$u_\sigma \geq \alpha, \forall \sigma \in \Gamma_3 \quad (4.5.6)$$

$$-F_{K,\sigma} \geq m(\sigma)\beta, \forall \sigma \in \Gamma_3 \quad (4.5.7)$$

$$(u_\sigma - \alpha) \left(\frac{F_{K,\sigma}}{m(\sigma)} + \beta \right) = 0, \forall \sigma \in \Gamma_3 \quad (4.5.8)$$

Pour le calcul de la solution $U = ((u_K)_{K \in \mathcal{T}}, (u_\sigma)_{\sigma \in \Gamma_3})$ du problème (4.5.2) – (4.5.8), on propose de construire un algorithme itératif qui converge vers la solution U .

Pour cela, on va décomposer l'ensemble $\{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \in \Gamma_3\}$ en deux ensembles disjoints \mathcal{E}_α et \mathcal{E}_β avec $\mathcal{E}_\alpha = \{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \in \Gamma_3 \text{ tq } u_\sigma = \alpha \text{ et } -F_{K,\sigma} \geq m(\sigma)\beta\}$ et $\mathcal{E}_\beta = \{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \in \Gamma_3 \text{ tq } u_\sigma \geq \alpha \text{ et } F_{K,\sigma} = -m(\sigma)\beta\}$.

Alors, le problème (4.5.2) – (4.5.8) est équivalent au problème composé par (4.5.2) – (4.5.5) et

$$u_\sigma = \alpha, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_\alpha \quad (4.5.9)$$

$$F_{K,\sigma} = -m(\sigma)\beta, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_\beta \quad (4.5.10)$$

L'algorithme détermine \mathcal{E}_α et \mathcal{E}_β par les étapes suivantes :

- Initialisation : $\mathcal{E}_\alpha^{(0)} = \{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \sigma \in \Gamma_3\}$ et $\mathcal{E}_\beta^{(0)} = \emptyset$.
- Etape (j) : on suppose que les ensembles $\mathcal{E}_\alpha^{(j)}$ et $\mathcal{E}_\beta^{(j)}$ sont connus. Soit $U^{(j)} = \left(\left(u_K^{(j)} \right)_{K \in \mathcal{T}}, \left(u_\sigma^{(j)} \right)_{\sigma \in \Gamma_3} \right)$ la solution du problème composé par (4.5.2) – (4.5.5) et

$$u_\sigma^{(j)} = \alpha, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_\alpha^{(j)} \quad (4.5.11)$$

$$F_{K,\sigma}^{(j)} = -m(\sigma)\beta, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_\beta^{(j)} \quad (4.5.12)$$

- On définit $\mathcal{E}_\alpha^{(j+1)}$ et $\mathcal{E}_\beta^{(j+1)}$ comme suit :

- Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_\alpha^{(j)}$, si $-F_{K,\sigma} \geq m(\sigma)\beta$ alors $\sigma \in \mathcal{E}_\alpha^{(j+1)}$ sinon $\sigma \in \mathcal{E}_\beta^{(j+1)}$.
- Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_\beta^{(j)}$, si $u_\sigma^{(j)} \geq \alpha$ alors $\sigma \in \mathcal{E}_\beta^{(j+1)}$ sinon $\sigma \in \mathcal{E}_\alpha^{(j+1)}$.

- S'il existe j tel que $-F_{K,\sigma} \geq m(\sigma)\beta, \forall \sigma \in \mathcal{E}_\alpha^{(j)}$ et $u_\sigma^{(j)} \geq \alpha, \forall \sigma \in \mathcal{E}_\beta^{(j)}$ la méthode converge, d'où $\mathcal{E}_\alpha^{(j+1)} = \mathcal{E}_\alpha^{(j)}, \mathcal{E}_\beta^{(j+1)} = \mathcal{E}_\beta^{(j)}, U^{(j+1)} = U^{(j)}$.
- Cependant, on définit $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha^{(j)}$ et $\mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}_\beta^{(j)}$ et $U = U^{(j)}$.

Alors U est l'unique solution du problème (4.5.2) – (4.5.8). (Pour la démonstration de la convergence voir [30],[36]).

La figure 4.1 présente le solide dans l'état statique.

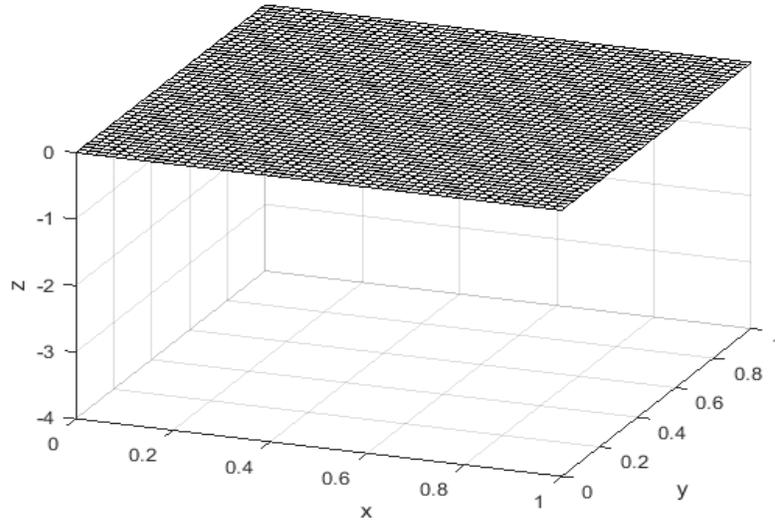


FIG.4.1. Présentation du solide avant déformation.

Les figures présentés ci-dessus présente la solution u et la trace de u sur Γ_3 .

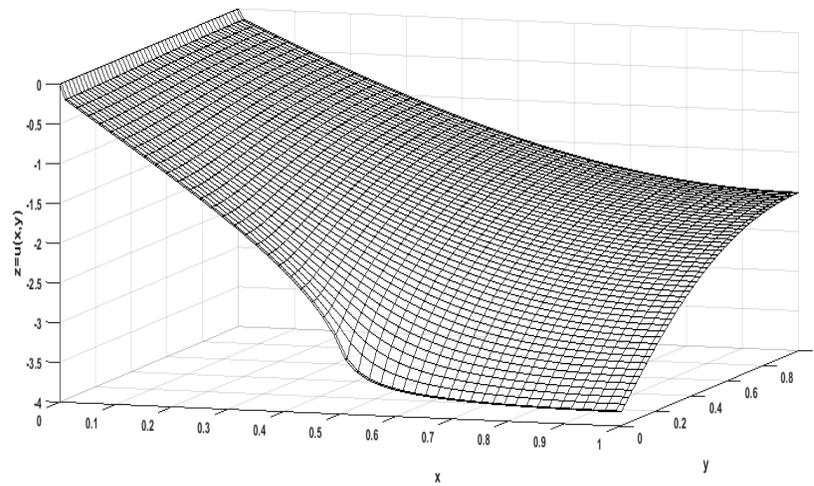


FIG.4.2. $z = u(x, y); \forall (x, y) \in \Omega$.

La figure 4.2 représente une configuration du solide déformé.

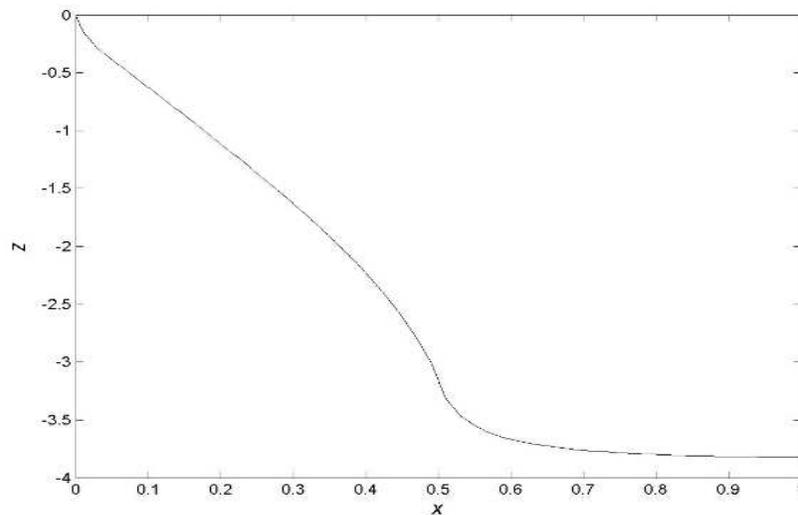


FIG.4.3. $z = u(x, 0); \forall x \in [0, x_m]$.

La figure 4.3 illustre la déformation sur l'axe des x , où on remarque que la solution les valeur de la solution u dépend de α qui est négatif.

Conclusions et perspectives

Conclusions

On a considéré un problème de la mécanique d'élasticité qui correspond au contact sans frottement d'un corps solide avec une fondation rigide dit le problème de Signorini et on a proposé la méthode de volumes finis pour le discrétiser. Une première partie de notre travail est de donner des hypothèses sur le problème modèle pour prouver l'existence et l'unicité de la solution. Un deuxième point de notre plan de travail est de pouvoir réaliser un schéma numérique fiable pour valider nos résultats théoriques.

On conclut que:

1. Un résultat d'existence et d'unicité de la solution discrète du problème modèle (chapitre 4, section 3) a été prouvé et a fait l'objet de [34]. Ce résultat nous a validé que le choix de cette méthode est suffisant.
2. Des estimations d'erreur ont été démontrées (chapitre 4, section 4), [34].
3. Ces résultats ont été validés par des simulations numériques (FIG.(4.1 - 4.2)).

Perspectives

Les résultats obtenus dans ce travail nous laissent entrevoir plusieurs pistes de recherche. De nombreuses questions peuvent être posées. Tout d'abord au sujet du modèle considéré et des résultats obtenus.

- Peut-on étendre ces résultats au cas général, par exemple le modèle classique de Signorini, le problème de contact avec frottement, etc...
- On espère améliorer les résultats numériques en prenant en compte des schémas numériques plus adaptés aux géométries des domaines physiques.
- On propose d'établir les résultats d'existence et d'unicité de la solution discrète du problème modèle avec frottement en utilisant la méthode des éléments volumes finis. Après faire une comparaison entre les résultats obtenus.

Annexe

Code de calcul

Programme principale

```
pasbon=1;
iter=0;
format long;
clc;
while pasbon & iter<8
iter=iter+1;
clear n p u Uafr xafr U x y t pp M F u0ab u0cd pasbon1 pasbon2
alpha=-4*rand;
beta=4*rand-2;
clf;
L=1;
a=84;
n=50;
p=80;

f=-90;
h=L/n;
m_sigma=h;
dk_sigma=h;
tau_sigma=a*(m_sigma/dk_sigma);
```

```

[M,pp]=grandematrice(n,p);
M=-tau_sigma*M;
for i=1:n-1
M(i*n,i*n+1)=0;
M(i*n+1,i*n)=0;
end
F=cotedroit(n,pp,h,f,m_sigma,tau_sigma,beta,alpha);
u=zeros(n^2,1);
u=M\F;
t=(1:2:(2*n-1))/(2*n);
x=t;
y=x;
U=reshape(u,[n,n]);
u0ab(:)=;
u0ab(:)=-2*ones(1:pp+1,1)*beta/tau_sigma+u(1:pp+1,1);
pasbon1=any(u0ab(:)==alpha);
u0cd(:)=alpha*ones(n-pp-1,1);
pasbon2=any(-2*tau_sigma*u0cd(:)-u(pp+2:n,1)==beta);
pasbon=~(pasbon1*pasbon2);
end
Zs=surf(x,y,U,'FaceAlpha',0.5,'FaceColor','w');
Uafr=[u0ab,u0cd;U];
yafr=t(1:n+1);
Zs=surf(x,yafr,Uafr,'FaceAlpha',0.5,'FaceColor','w');
iter
pasbon
alpha
beta
Z1=plot(x,Uafr(1,:), 'b');

```

```

xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('u_{xy}');
hold on
Z2=plot(yafr,Uafr(:,1),'b');
%nouvelle solution
UU=[0,U(1,:) U(1,n);zeros(n,1) U U(:,n);0,U(n,:) U(n,n)];
clear t x y
t=(1:2:(2*n-1))/(2*n);
x=[0 ;t ;1];
y=x;
Zs=surf(x,y,UU,'FaceAlpha',0.5,'FaceColor','w');
%save my_data50.out UU -ASCII
Calcul de la matrice de rigidité
function [M,pp]=grandematrice(n,varargin)
if (nargin==2)
p1 = varargin{1} ;
end
%n est la taille de la petite matrice
%la matrice grande M sera de taille  $n^2 \times n^2$ 
%varargin si specifié est p1 le nombre de matrice B et p2 sera calculé après
%n1 est n-1 si n est impair
n1=n-(mod(n,2));
%p est le nombre de matrice B et C en cas ou p1 est faux ou non specifie
p=n1/2-1;
if p1>n-3
p1=p;
end
a=-7/2*ones(n,1);

```

```

a(1)=-5/2;
a(n)=-5/2;
b=-4*ones(n,1);
b(1)=-3;
b(n)=-3;
c=b;
c(1)=-7/2;
d=-3*ones(n,1);
d(1)=-5/2;
d(n)=-2;
%m est la taille de la matrice des 1 tridiag
m=n^2-1;
%o est la taille de la matrice des n tridiag
o=n^2-n;
A=diag(a);
D=diag(d);
b1=repmat(b,p1);
B=diag(b1(:,1));
p2=n-2-p1;
c1=repmat(c,p2);
C=diag(c1(:,1));
M=blkdiag(A,B,C,D)+diag(ones(m,1),1)+diag(ones(m,1),-1)+diag(ones(o,1),n)+diag(ones(o,1),-
n);
pp=p1;
end

Calcul du travail des charges

function F=cotedroit(n,p1,h,f,m_sigma,tau_sigma,beta,alpha)
f1=h^2*f;
f2=(h/2)*beta;

```

```
f3=1/2*tau_sigma*alpha;
n1=n-(mod(n,2));
a=f1*ones(n,1);
c=a;
a(1)=a(1)+f2;
b=a;
c(1)=f1+f3;
d=c;
B1= repmat(b,p1);
b1=B1(:,1);
p2=n-2-p1;
C1= repmat(c,p2);
c1=C1(:,1);
F=[a;b1;c1;d];
```

Bibliographie

- [1] P. Alart, A. Curnier, A Mixed Formulation For Frictional Contact Problems Prone to Newton Like Solution Methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92 (1991) 353-375, North-Holland.
- [2] G. Allier, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Ecole polytechnique, Paris 2005.
- [3] A. Assala, F. Z. Nouri, A Study of a Problem Coupling Surfacic and Underground Flows, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 7 (2013), no. 50, 2475 - 2489.
- [4] R.E. Bank, D.J Rose, Some error estimate for the box method. *SIAM J. Numer. Anal.* 24 (1987), 777-787.
- [5] G. Bayada, M. Chambat, K. Lhalouani et T. Sassi, Éléments finis avec joints pour des problèmes de contact avec frottement de Coulomb non local, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série I, p. 1323-1329, 1997.
- [6] Z. Belhachmi, F. Hecht et S. Tahir, 2008, Adaptive nite element for a fictitious domain formulation of some variational inequalities, Preprint LMAM, 2008.
- [7] Z. Belhachmi, J. M. Sac-Ep ee et J. Sokolowski, Mixed nite element methods for smooth domain formulation of crack problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(2005), PP. 1295-1320.

-
- [8] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, Approximation of the Unilateral Contact Problem by the Mortar Finite Element Method, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 123-127, 1997.
- [9] F. Ben Belgacem and Y. Renard, Hybrid Finite Element Methods For The Signorini Problem, Mathematics of Computation, Volume 72, Number 243, pages 1117-1145.
- [10] C. Bernardi, Y. Maday and F. Rapetti, Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Collection "Mathématiques et Applications" 45, Springer-Verlag, ISBN: 3540213694, (2004), 310.
- [11] I. Bijelonja, A Numerical Method For Almost Incompressible Body Problem, DAAAM International, Volume 22, No. 1, ISSN 1726-9679, Vienna, Australia, EU, 2011.
- [12] I. Bijelonja, I. Demirdžić, S. Muzaferija, A Finite Volume Method For Incompressible Linear Elasticity, Computer methods in applied mechanics and engineering, 195(2006) 6378-6390.
- [13] A. Blouza, Etude de quelques problèmes de coques en élasticité, Thèse de l'Université Paris 6, Juin 1996.
- [14] A. Blouza et H. Le Dret, Naghdi's shell model : Existence, uniqueness and continuous dependence on the midsurface, Journal of Elasticity 64, 2001, 199-216.
- [15] A. Blouza, L. El Alaoui et S. Mani, A posteriori analysis of penalized and mixed formulations of a Koiter shell model, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 296, April 2016, Pages 138-155.
- [16] D. Boffi, F. Brezzi and M. Fortin, Mixed Finite Element Methods and Applications, Springer Series in Computational Mathematics 44, ISSN 0179-3632.
- [17] V. Bostan, W. Han, 2006, A posteriori error analysis for finite element solutions of a frictional contact problem, Comp. Methods Appl. Mech. Engrg., 195(2006), pp. 1252-1274.

-
- [18] F.-P. Bowden et D. Tabor, The area of contact between stationary and between moving surfaces, Proc. Soc. London, A169(1966), pp. 1521-1544.
- [19] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983.
- [20] H. Brezis and G. Stampacchia, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), 153-180.
- [21] L. Champaney, Contact unilatéral entre solides élastiques, Notes du cours "Eléments finis" du DESS .
- [22] Marius Cocou, Sur la modélisation mathématique de conditions unilatérales en mécanique du contact, 19ème Congrès Français de Mécanique, Marseille, 24-28 août 2009.
- [23] Patrice Coorevits, Patrick Hild, Khalid Lhalouani and Taoufik Sassi, Mixed Finite Element Methods For Unilateral Problems: Convergence Analysis and Numerical Studies, Mathematics of Computation, Volume 71, Number 237, pages 1-25.
- [24] G. Duvaut et J.-L. Lions, les in equations en m ecanique et en physique, Dunod, 1972.
- [25] G. Duvaut, Problèmes Unilatéraux En Mécanique des Milieux Continus, Actes, Congrès inter. Math., 1970. Tome 3, p. 71à 77.
- [26] G. Duvaut, 1980, Equilibre d'un solide elastique avec contact unilat eral et frottement de Coulomb, C. R. Acad. Sci. Paris 290, Serie A, 263-265.
- [27] Robert Eymard, Thierry Gallouët and Rapha'ele Herbin, Finite Volume Methods, Handbook of Numerical Analysis, 1997, vol 7, pp 713-1020.
- [28] R.Eymard, T.Gallouët, R.Herbin, Convergence of finite volume schemes for semilinear convection diffusion equations, Numerische Mathematik , Numer. Math. (1999) 82:91-116.

- [29] R.Eymard, T.Gallouët, R.Herbin, Finite volume approximation of elliptic problems and convergence of an approximate gradient, *Applied Numerical Mathematics*, April 2001, volume 37, pages 31-53.
- [30] Robert Eymard, Thierry Gallouët, Raphael Herbin, Anthony Michel, Convergence of a finite volume scheme for nonlinear degenerate parabolic equations, *Numer. Math.* (2002) 92: 41–82.
- [31] G. Fichera, Existence theorems in elasticity-boundary value problem of elasticity with unilateral constraints, *Encyclopedia of Physics*, 2(1972), pp. 347-427.
- [32] Thomas-Peter Fries and Ted Belytschko, The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 00:1-6.
- [33] T.Gallouët, R.Herbin and M.Hélène Vignal, Error Estimates on the Approximate Finite Volume Solution of Convection Diffusion Equations With General Boundry Conditions, November 1999, www.researchgate.net/publication/2310737.
- [34] Takoua Hafsi, Frekh Taallah, Finite Volume Approximation of the Signorini Problem, to appear in "*International Journal of Applied Mathematics*", volume 49, issue 4, 20 Novembre 2019.
- [35] Raphaële Herbin and Emmanuelle Marchand, Finite volume approximation of a class of variational inequalities, *IMA Journal of Numerical Analysis*(2001) 21, 553-585.
- [36] Raphaële Herbin and Emmanuelle Marchand, Numerical approximation of a non-linear problem with a Signorini boundary condition, *IMACS*, October 7, 1997, pp. 1-5.
- [37] Jaroslav Haslinger and Ivan Hlaváček, Approximation of The Signorini Problem with Friction by a Mixed Finite Element Method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 86, 99-122 (1982).

-
- [38] Jaroslav Haslinger and Taoufik Sassi, Mixed Finite Element Approximation of 3D Contact Problems with given Friction: Error Analysis and Numerical Realization, ESAIM : M2AN, Vol. 38, No. 3, 2004, pp. 563-578.
- [39] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Necas, Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics, In: Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, NORTH-Holland, Amsterdam, (1996).
- [40] J. Haslinger, R. Kučera and T. Sassi, A Domain Decomposition Algorithm for Contact Problems : Analysis and Implementation, Math. Model. Nat. Phenom., Vol.4, No.1, 2009, pp. 123-146.
- [41] Riad Hassani, Patrick Hild, Ioan R. Ionescu, Nour-Dine Sakki, A Mixed Finite Element Method and Solution Multiplicity For Coulomb Frictional Contact, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192 (2003) 4517-4531.
- [42] Patrick Hild, A Propos d'Approximation par éléments finis optimale pour les problèmes de contact unilatéral, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 1233-1236, 1998.
- [43] A. Klarbring, Linköping, Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems with friction, Ingenieur-Archiv 60 (1990) 529-541.
- [44] A. Klarbring, A. Mikelie et M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, Internat. J. Engrg. Sci., 26(1988), pp. 811-832.
- [45] A. Klarbring, A. Mikelie et M. Shillor, On friction problems with normal compliance, Nonlinear Anal., 13(1989), pp. 49-60.
- [46] Lascaux P., Theodor R., 1987, Analyse numérique matricielle appliquée a l'art de l'ingenieur, Masson, Paris.
- [47] Latil J.C., Raous M., 1990, Module Gyptis Version 1.0 : Contact unilatéral avec frottement en mécanique des structures- Inéquations variationnelles, Publication LMA, 132, CNRS.

-
- [48] T. Laursen, Computational contact and impact mechanics, Springer, 2002.
- [49] Randall J. Leveque, Finite Volume Methods For Hyperbolic Problems, Cambridge Texts in Applied Mathematics, ISBN 987-0-521-00924-9.
- [50] Lions, J.L. and G. Stampacchia, Variational inequalities, 1967, Commun. Pure Applied. Math., 20: 493-519. DOI: 10.1002/cpa.3160200302.
- [51] Alejandro C. Limache and Sergio R. Idelson, On The Development of Finite Volume Methods for Computational Solid Mechanics, Mecánica Computacional Vol XXVI, pp.827-843, Córdoba, Argentina, Octubre 2007.
- [52] Fushen Liu, Ronaldo I. Borja, Stabilized low-order finite elements for frictional contact with the extended finite element method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199 (2010) 2456-2471.
- [53] Lleras Vanessa, Modélisation, analyse et simulation de problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides, Thèse de doctorat, Université de Franche Comté-Besançon, 20 Novembre 2009.
- [54] Amir Malika, Etude et Approximation de Problèmes de Contact Unilatéral, Mémoire de Magister en Mathématique, USTHB Alger.
- [55] Andaluzia Matei, An Existence Result For a Mixed Variational Problem Arising From Contact Mechanics, Nonlinear Analysis: Real World Applications 20(2014) 74-81.
- [56] J.-A.-C. Martins et J.-T. Oden, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 52(1985), pp. 527-634.
- [57] J.-A.-C. Martins et J.-T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, Nonlinear Anal., 11(1987), pp. 407-428.
- [58] J.-A.-C. Martins et E.-B. Pires, Free boundary problems : theory and applications, Longman Scientific et Technical J.-M. Chadam et H. Rasmussen Editors, 1(1990), pp. 323-328.

-
- [59] Moreau J., 1988, Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, CISM Courses and Lectures, 302, Springer-Verlag, 1-82.
- [60] A. Munnier, Espaces de Sobolev et Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles, Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, 2007-2008.
- [61] Elana Polpova, Valentin L. Popov, The research works of Coulomb and Amontons and generalized laws of friction, Short Communication, Friction 3(2):183-190(2015), DOI 10.1007/s40544-015-0074-6.
- [62] Raous M., Moreau J., Jean M., 1995, Contact Mechanics, Plenum Publisher, New York.
- [63] Raous M., Chabrand P., Lebon F., 1988, Numerical methods for solving unilateral contact problems with friction, dans [Raous, editeur, 1988].
- [64] Raous M., 2000, Constitutive models and numerical methods for frictional contact, Section 8.6 in J. Lemaitre (Ed.), Handbook of Materials Behavior - Non linear models and Properties, Academic Press, pp. 777-786.
- [65] G. Raugel, Résolution numérique par la méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un polygone, C.R. Acad. Sci. Paris S er. A-B 286 (1978) A791-A784.
- [66] P.R. Raviard, J.M Thomas, A mixed finite element method for second order elliptic problems. In: Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics, 606, Springer, 1977, pp. 292-315
- [67] B. Rivière, Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations, Theory and Implementation, Frontiers in Applied Mathematics, Houston, Texas, 2008.
- [68] Andreas Schröder, Heiko Kleemann and Heribert Blum, Mixed Finite Element Methods For Two-body Contact Problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 283(2015) 58-70.

-
- [69] L. Slimane, A Bendali, P. Laborde, Mixed formulations for a class of variational inequalities, *Modél. Math. Anal. Numér.* , Vol. 38, No. 1, 2004, pp. 177-201.
- [70] A. Signorini, Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata, *Rend.de Matematica*, 18(1959), pp. 95-139..
- [71] F. Taallah, F.Z Nouri, A Study the Existence and Uniqueness of systems of variational inequalities, (*AJMP*, volume 1, issue 2 (2012), pp.8-16).
- [72] F. Taallah, Existence of solutions for a class of variational inequalities, (DOI: 10.3844/JMSS, volume 9, issue 4 (2013), pp.305-309).
- [73] M. Vohralik. A posteriori error estimation in the conforming finite element method based on its local conservativity and using local minimization. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 346 (2008), pp. 687-690.
- [74] B.I. Wohlmuth, An a posteriori error estimator for two body contact problems on non-matching meshes. *J. Sci. Computing*, 33 (2007), pp. 25-45.
- [75] Yongke Wu, Xiaoping Xie and Long Chen, Hybrid Stress Finite Volume Method For Linear Elasticity Problems, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, Volume 10, Number 3, Pages 634-656.
- [76] Fabien Mesmin Youbissi, Résolution par Éléments Finis du Problème de Contact Unilatéral par des Méthodes d'Optimisation Convexe, Thèse pour l'obtention du grade Ph.D, Université Laval Québec, 2006.
- [77] Tie Zhang, Zheng Li, An analysis of finite volume elemnt method for solving the Signorini problem, *Applied Mathematics and Computation* 270(2015) 830-841.