

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat  
Option: Mathématiques Appliquées

### *Cycles limites des systèmes différentiels ordinaires*

Présentée par:

**DJEDID Djamila**

**DIRECTEUR DE THÈSE :** MAKHLOUF Amar Prof. Univ. Annaba

**Devant le jury**

**PRESIDENT:** LAOUAR Abdelhamid Prof. Univ. Annaba

**EXAMINATEURS:** BRADJI Abdallah Prof. Univ. Annaba

MAOUNI Messaoud Prof. Univ. Skikda

SALMI Abdelouaheb M.C.A Univ. Annaba

**Année universitaire: 2020/2021**

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

En second lieu, Je voudrais remercier tout particulièrement Monsieur Makhlouf Amar, Professeur à l'Université Badji-Mokhtar Annaba, qui m'a dirigé tout au long de ses années de thèse.

Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Enfin, ses nombreuses relectures et corrections de cette thèse ont été très appréciables. Cette thèse lui doit beaucoup, pour tout cela merci.

Mes respectueux remerciements à Monsieur Laouar Abdelhamid, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury : Monsieur Bradji Abdallah, Professeur à l'Université Badji-Mokhtar Annaba, Monsieur Maouni Messaoud, Professeur à l'Université de skikda, Monsieur Salmi Abdelouaheb, Maitre de conférences à l'Université Badji Mokhtar-Annaba pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.

# Dédicace

**J**e dédie ce travail à :

**A**mes très chers parents **Hakima et Nabil**, qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffèrent et se sont sacrifiés pour que je sois heureuse, par leurs conseils, leur affection et leurs encouragements.

**J**e vous remercie pour tout vos efforts fournis pour moi, que Dieu vous garde, vous protège, et vous bénisse la vie.

Et je le dédie :

**A**tous les membres de ma famille, mes sœurs « **Hanen** » et « **Djihad** », mon frère « **Abedrahmen** » et Mon neveux garçon " **Isehak** ".

**A**tous mes amis et mes collègues « **Achref** », « **Marwa** » et « **Afef** » avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.

**M**erci à tous.

DJEDID DJAMILA

# Résumé

Dans la première partie, nous étudions un système quadratique dans  $\mathbb{R}^5$ , en utilisant la théorie de moyennisation du second ordre pour obtenir le nombre maximum de cycles limites recherché par zero-Hopf bifurcation à l'origine.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions le système quadratique mais dans  $\mathbb{R}^4$  pour obtenir le nombre maximum de cycles limites qui se produit par bifurcation de Hopf à l'origine, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre trois.

Dans la troisième partie, nous étudions les cycles limites et leur stabilité des systèmes de Kolmogorov dans le plan, de la forme

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = yg(x, y), \quad (1)$$

où  $f$  et  $g$  sont des polynômes de degré supérieur à 1.

En utilisant la théorie de la moyennisation du second ordre, nous fournissons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un cycle limite bifurquant d'un point d'équilibre zero-Hopf bifurcation des systèmes polynomiaux de Kolmogorov de degré arbitraire de dimension 2.

**Mots-clés :** Bifurcation de Hopf, Cycle limite, Système différentiel de Kolmogorov, Théorie de moyennisation.

# Abstract

In this thesis, we first study another differential system but this time in  $\mathbb{R}^5$  using the averaging theory of second order to get the maximum number of limit cycles which bifurcate by a Hopf bifurcation from the origin.

Secondly, we study the quadratic differential system in  $\mathbb{R}^4$  to get the maximum number of limit cycles which bifurcate by a Hopf bifurcation from the origin via averaging theory of the third order.

Thirdly, we study the limit cycles and their stability of Kolmogorov systems in the plane, of the form :

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = yg(x, y), \quad (1)$$

where  $f$  and  $g$  are polynomials of degree large than 1.

By using the averaging theory of second order, we prove the necessary and sufficient conditions for the existence of the limit cycle bifurcating from a Hopf equilibrium of 2-dimensional polynomial Kolmogorov systems of arbitrary degree.

**Key-words :** Averaging theory, Hopf bifurcation, Limit cycle, Polynomial Kolmogorov system.

## ملخص

في الجزء الأول من هذه الأطروحة سندرس جملة تربيعية في  $\mathbb{R}^5$  بإستعمال نظرية المتوسط من الرتبة الثانية للحصول على العدد الأعظمي للدورات المنتهية التي تتفرع من المركز بتشعب هوف.

في الجزء الثاني سندرس جملة تربيعية لكن هذه المرة في  $\mathbb{R}^4$  للحصول على العدد الأعظمي للدورات المنتهية التي تتفرع من المركز بتشعب هوف بإستعمال نظرية المتوسط من الرتبة الثالثة.

الجزء الثالث يتركز على دراسة الحلول الدورية واستمرارها لجملة معادلات كلوهوفوف في المستوي من الشكل .

$$(1) \quad \dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = yg(x, y),$$

حيث  $f$  و  $g$  كثير حدود ذو درجة أكبر من 1، بإستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الثانية نقوم بإعطاء الشروط الضرورية الكافية لوجود الحلول الدورية المعزولة التي تتفرع من نقطة التوازن هوف-2 لمجموعة المعادلات كلوموقوف من درجة  $k$  كيفية.

# Table des matières

Introduction générale . . . . .	2
<b>Chapitre 1 Notions préliminaires</b>	<b>9</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	9
1.2 Notion du flot . . . . .	10
1.2.1 Systèmes d'équations différentielles non linéaires . . . . .	10
1.3 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes . . . . .	11
1.3.1 Point critique et linéarisation . . . . .	11
1.3.2 Classification et nature des points critiques . . . . .	12
1.3.3 Plan et portrait de phase . . . . .	14
1.3.4 Orbites périodiques et cycles limites . . . . .	14
1.3.5 Existence et unicité de la solution . . . . .	17
1.3.6 Existence et non-existence des cycles limites . . . . .	18
1.4 Bifurcation de Hopf . . . . .	20
1.5 Théorème de Bezout . . . . .	24
<b>Chapitre 2 Théorie de moyennisation</b>	<b>25</b>
2.1 Théorie de moyennisation dans le cas périodique . . . . .	25
2.1.1 Théorie de moyennisation du premier ordre . . . . .	27
2.1.2 Théorie de moyennisation du second ordre . . . . .	30
2.2 Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer . . . . .	33
2.2.1 Rappels sur le degré de Brouwer . . . . .	34
2.2.2 Théorie de moyennisation d'ordre un, deux et trois dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	35
<b>Chapitre 3 bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique en dimension 5</b>	<b>40</b>

3.1	Nombre maximum de cycles limites obtenus par bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique dans $\mathbb{R}^5$ par la théorie de moyennisation d'ordre deux . . . . .	41
<b>Chapitre 4 bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique en dimension 4</b>		<b>53</b>
4.1	Nombre maximum de cycles limites obtenus par bifurcation de zero-Hopf pour un système différentiel quadratique dans $\mathbb{R}^4$ par la théorie de moyennisation d'ordre trois . . . . .	54
<b>Chapitre 5 Cycle limite bifurquant d'un point d'équilibre d'un système de Kolmogorov de degré arbitraire</b>		<b>69</b>
5.0.1	Introduction . . . . .	70
5.0.2	Résultats principaux . . . . .	72
Conclusion et Perspective . . . . .		80
Bibliographie . . . . .		82





# INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des systèmes dynamiques joue un rôle essentiel en mathématique. Généralement, un système dynamique est représenté par des équations différentielles. Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de la différentiation auquel l'une des fonctions a été soumise. Les équations différentielles sont importantes pour la modélisation des systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques. Cette notion est apparue chez les mathématiciens à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle.

Un des principaux problèmes de la théorie des équations différentielles dynamiques est l'étude des orbites périodiques, leurs existences, leurs nombres et leurs stabilités. Un cycle limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de l'équation différentielle. Les cycles limites ont été introduits en 1881 par **H.Poincaré** dans son mémoire "Sur les courbes définies par une équation différentielle". Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles.

Un des plus importants théorèmes de la dynamique non linéaire est le théorème de Poincaré Bendixon qui confirme que dans une région compacte et bornée du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique.

A la fin de 1920, **Liénard**, **Andronov** et **Van der pol** ont déterminé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation dans un circuit de tube vide était un cycle limite. De plus,

le statisticien **Lotka** et le mathématicien italien **Volterra** élaborèrent un modèle qui décrit des systèmes cohabitant un prédateur et sa proie. Ce modèle est constitué d'une équation différentielle qui traduit l'évaluation des populations de chaque espèce.

Le mathématicien **D. Hilbert** présenta le problème numéro 16. Ce problème est de savoir la position et le nombre maximal des cycles limites d'un système différentiel de degré  $n$ , on note par  $H(n)$  ce nombre maximal.

En 1923 **Dulac** proposa une démonstration montrant que  $H(n)$  de cycles limites est fini dans tous les cas, sauf dans un point d'accumulation à l'infini.

En 1985 **Ilyashenko** a décelé une erreur dans le travail de **Dulac**. Quelques années plus tard la résolution de ce problème de **Dulac** ne vint que lorsque **Ilyashenko** en 1991 puis **Ecalte** en 1992 montrèrent d'une façon indépendante les affirmations de Dulac.

Le centenaire d'après, **V.I. Arnold** a invité plusieurs mathématiciens pour choisir une liste des problèmes importants. En 1997 à l'occasion du soixantième anniversaire d'**Arnold**, **Steve Smale** a proposé 18 problèmes mathématiques parmi eux le 16<sup>ème</sup> problème qui correspond au 13<sup>ème</sup> problème de **Hilbert**.

Les chercheurs considèrent une classe spéciale d'équations différentielles : le système de Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -G(x), \end{cases} \quad (2)$$

où  $F(x)$  et  $G(x)$  sont deux polynômes de degré  $m$  et  $n$  respectivement, et  $H(m, n)$  le nombre maximal des cycles limites qui peuvent exister simultanément pour le système (2)

- En 1928 l'ingénieur **Liénard** a établi un théorème d'existence et d'unicité d'une solution périodique pour le système (2). **Liénard** montra que si  $G(x) = x$  et si  $F(x)$  est une fonction continue et impaire, qui a une unique racine positive en  $x = a$  et qui est strictement croissante pour  $x \geq a$ , alors le système (2) possède un unique cycle limite.
- En 1975, **Rychkov** [64] a montré que si le polynôme  $F(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$  et si de

plus  $G(x) = x$ , alors le système (2) a au plus deux cycles limites.

- En 1977, **Lins, De Melo et Pugh** [41] ont montré, que si  $m = 3$  et  $n = 1$ , alors il existe unique cycle limite, sous certaines conditions. De plus ils ont conjecturé que si  $G(x) = x$ , alors il y a au plus  $E\left(\frac{m-1}{2}\right)$  cycles limites ( $E(x)$  est la partie entière du réel  $x$ ). Mais cette conjecture est fautive pour  $n \geq 6$ .
- En 1981, **Zhang** [74] a étudié le résultat de **Rychkov** (1975) à des fonctions non polynômiales :
  - si  $G(x) = x$ , et  $F(x)$  est continue;
  - si la dérivée de  $F(x)$ , noté  $f(x)$ , est continue et paire et a deux racines positives  $a_1, a_2$  telle que  $a_1 < a_2$  avec  $F(a_1) > 0$ , et  $F(a_2) < 0$ ;
  - si  $f(x)$  est strictement croissante pour  $x > a_2$ .

Alors le système (2) a au plus deux cycles limites.

- En 1983, **Xianwu** [72] a montré la conjecture pour le cas  $m = 4$  et  $n = 1$ .
- En 1990, **Dumortier et Rousseau** [26] ont prouvé que  $H(3, 1) = 1$ .
- En 1997, **Duman et Li** [25] ont prouvé que  $H(2, 2) = 1$ .
- En 2001, **Perko** ont démontré que si  $F(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^{2n+1} a_i x^i$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit le système (2) peut avoir au plus  $n$  cycles limites.
- En 2002, **Wang et Jing** [71] ont prouvé que  $H(3, 2) = 3$ .
- En 2012, **Li, Chengzhi et J. Llibre** [17] ont prouvé que  $H(1, 3) = 1$ .

Il y a beaucoup de chercheurs qui essaient de trouver des valeurs minimales de  $H(m, n)$  en ne considérant que des cycles limites de petite amplitude qui seraient créés par bifurcation de Hopf autour d'un point d'équilibre. Ils ont trouvé ce nombre maximum de cycles limites locaux noté  $\hat{H}(m, n)$  de cycles limites locaux appelés cycles limites de faible amplitude.

Le terme de bifurcation a été introduit en 1892 par **Poincaré** [62] pour décrire les changements qualitatifs des points d'équilibres d'une équation obtenue selon une faible variation d'un paramètre. Ensuite, elle a été étudiée par **Andronov et Witt** [6] et leurs collègues à partir de 1930.

Dans cette thèse, on s'intéresse à un type de bifurcation locale qui est la bifurcation de

Hopf. Cette dernière est valable pour des systèmes d'ordre supérieur ou égal à deux. Avec cette considération, effectivement plusieurs chercheurs ont obtenu de nombreux résultats. Citons ceux correspondant au système de **Liénard** généralisé

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -g(x) - f(x)y, \end{cases} \quad (3)$$

où  $f$  et  $g$  sont deux polynômes de degré  $n$  et  $m$  respectivement.

**Blows, Lloyd** [9] en 1984 et **Lynch** [56, 57] (1988, 1995) ont montré que

- Si  $g$  est impair alors  $\hat{H}(m, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

- Si  $f$  est pair alors  $\hat{H}(m, n) = n$ , quelque soit  $g$ .

- Si  $f$  est impair alors  $\hat{H}(m, 2n + 1) = \lfloor \frac{(m-2)}{2} \rfloor + n$ .

- Si  $g(x) = x + g_e(x)$  où  $g_e$  est pair, alors  $\hat{H}(2m, 2) = m$ .

• En 1998, **Gasull et Torregrosa** [32] ont amélioré certains résultats et ont obtenu une borne supérieure pour  $\hat{H}(7, 6)$ ,  $\hat{H}(6, 7)$ ,  $\hat{H}(7, 7)$  et  $\hat{H}(4, 20)$ .

• En 1999, **Christopher et Lynch** [18, 58] ont montré que

•  $\hat{H}(m, 2) = \lfloor \frac{(2m+1)}{3} \rfloor$ .

•  $\hat{H}(2, n) = \lfloor \frac{(2n+1)}{3} \rfloor$ .

•  $\hat{H}(m, 3) = 2 \lfloor \frac{(3m+2)}{8} \rfloor$ , pour tout  $1 < m \leq 50$ , avec  $m \in \mathbb{N}$ .

•  $\hat{H}(3, n) = 2 \lfloor \frac{(3n+2)}{8} \rfloor$ , pour tout  $1 < n \leq 50$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .

•  $\hat{H}(4, k) = \hat{H}(k, 4)$ , pour  $k = 6, 7, 8, 9$  et  $\hat{H}(5, 6) = \hat{H}(6, 5)$ .

• En 2006, **Yu et Han** [73] ont prouvé que  $\hat{H}(m, n) = \hat{H}(n, m)$  pour  $n = 4$ ,

$m = 10, 11, 12, 13$ ;  $n = 5, m = 6, 7, 8, 9$ ;  $n = 6, m = 5, 6$ , (voir aussi **Llibre** [52] pour un tableau avec toutes les valeurs spécifiques).

Cependant, certains chercheurs furent intéressés au nombre maximum de cycles limites noté  $\tilde{H}(m, n)$  appelé "Medium limit cycles".

En 2009, **J. Llibre, A.C.Meureu et M.A.Teixeira**. [52] ont réussi à obtenir des bornes inférieures pour le nombre de cycles limites pour  $m, n \geq 1$  du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k (f_n^k(x)y + g_n^k(x)), \end{cases} \quad (4)$$

et selon ces estimations, ils ont trouvé que  $\tilde{H}_k(m, n) \leq \hat{H}(m, n)$  pour  $k = 1, 2, 3$  pour des valeurs dans lesquelles  $\hat{H}(m, n)$  sont connus, où  $\tilde{H}_k(m, n)$  est une borne inférieure de  $H(m, n)$  (c-à-d le nombre maximum de cycles limites).

La théorie de moyennisation est l'une des plus importantes théories perturbatives utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. C'est une théorie classique qui donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Elle s'applique aux systèmes de la forme  $\dot{x} = \varepsilon f(t, x)$ , où  $\varepsilon$  est suffisamment petit et  $f(t, x)$  est  $T$ -périodique en la première variable.

Les contributions théoriques essentielles de la théorie de moyennisation ont été établies en 1930 par **Krylov** et **Bogoliubov** [11]. En 1937, cette théorie a permis de trouver le premier ordre de la solution d'équations différentielles non linéaires, telles qu'un oscillateur linéaire perturbé par une force extérieure. Ensuite, elle est reformulée en 1945 par **Bogoliubov** [10], et par **Bogoliubov** et **Mitropolsky** en 1961 [12]. En 1966, **Roseau** [63] donna une démonstration basée sur le lemme de Gronwall. Une étape importante a été franchie ensuite par **Krylov** et **Bogoliubov** qui ont traité le cas quasi-périodique. Pour plus de précision voir le livre de **Sanders, Verhulst** [66].

**Buică** et **Llibre** [13], en 2004, se sont intéressés aussi au problème de la recherche des solutions périodiques pour des systèmes différentiels perturbés. Ils ont réussi à introduire une nouvelle approche pour ce problème. En effet, pour montrer ce résultat, ils ont remplacé le théorème des fonctions implicites par la théorie du degré de Brouwer en utilisant des méthodes topologiques pour résoudre des équations d'opérateurs équivalant à ce problème, sachant que ces équations d'opérateurs peuvent avoir une dimension finie ou infinie. De plus, ils ont donné pour la première fois un résultat sur la moyennisation d'ordre trois pour des équations différentielles d'ordre un.

En 2013, **Giné, Grau** et **Llibre** [33], dans un travail récent ont introduit la moyennisation d'ordre arbitraire  $k$  pour des équations différentielles d'ordre un.

En 2014, **Llibre, Novaes** et **Teixeira** [51], ont présenté un résultat général qui est la théorie de moyennisation pour la recherche des solutions périodiques d'ordre arbi-

traire  $k$  pour des équations différentielles continues de dimension  $n$ .

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude des cycles limites pour trois types des systèmes différentiels non linéaires, dit en anglais, comme suit :

- i) 5-dimensional Zero-Hopf bifurcation of quadratic homogeneous nonlinearities via averaging theory.
- ii) 4-dimensional zero-Hopf bifurcation via averaging theory.
- iii) Periodic orbits bifurcating from a Hopf equilibrium of 2-dimensional polynomial Kolmogorov systems of arbitrary degree.

On a étudié le nombre maximum de cycles limites pour le premier type ainsi que le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude pour le deuxième type.

On a fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un cycle limite pour le troisième type.

Enfin, on a utilisé la théorie de moyennisation. Cette théorie permet de prouver l'existence des solutions périodiques pour les systèmes périodiques.

Cette thèse est scindée en cinq chapitres :

**Dans le premier chapitre**, quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques et des équations différentielles ordinaires sont présentées. On rappellera ainsi des définitions comme celles : le système dynamique, flot, les points critiques et leurs natures, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaire au voisinage des points d'équilibre, d'un portrait de phase, d'une orbite périodique, d'un cycle limite ainsi que des théorèmes fondamentaux sur l'existence et la non-existence des cycles limites. On fera aussi un rappel succinct sur la bifurcation de Hopf.

**Dans le second chapitre**, on présentera une introduction sur la théorie de moyennisation du premier, second et troisième ordre. Cette théorie a permis ces dernières années de faire un pas très important dans l'étude des cycles limites.

**Dans le troisième chapitre**, nous étudions l'existence de cycles limites issue d'une bifurcation zero-Hopf d'un point équilibre nul pour un système différentiel polynomial dans  $\mathbb{R}^5$  avec des non-linéarités homogènes quadratiques en utilisant la théorie de la moyennisation du premier et du second ordre. Nous traitons ce système pour montrer

qu'il a quatre cycles limites à l'aide de la théorie de moyennisation d'ordre un, et 27 cycles pour le second ordre. De plus nous donnons un exemple pour lequel ce nombre est atteint. cet travail est soumis pour publication sous l'intitulé "*5-dimensional Zero-Hopf bifurcation of quadratic homogeneous nonlinearities via averaging theory*".

**Dans le quatrième chapitre,** on s'intéresse à l'étude de la bifurcation de Hopf qui se produit à l'origine d'un système quadratique dans  $\mathbb{R}^4$ . Dans cette étude, on montre l'existence de deux cycles limites, de neuf cycles limites et de 25 cycles limites si on utilise respectivement la théorie de moyennisation d'ordre un, deux et trois. De plus nous donnons un exemple pour lequel ce nombre est atteint dans le cas du second ordre. Cette étude a fait l'objet d'une publication intitulée : "*4-dimensional zero-Hopf bifurcation of quadratic polynomial differential system, via averaging theory of third order*". au journal "*Dynamical and control systems(2020)*".

**Dans le dernier chapitre,** nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes d'existence des cycles limites pour les systèmes de Kolmogorov dans le plan de degré arbitraire, en utilisant la méthode de moyennisation du second ordre. Cette étude a fait l'objet d'une publication intitulée : "*Periodic orbits bifurcating from a Hopf equilibrium of 2-dimensional polynomial Kolmogorov systems of arbitrary degree*". au journal "*Chaos, Solitons and Fractals (2020)*".



# CHAPITRE

## 1

# NOTIONS PRÉLIMINAIRES

## 1.1 Systèmes dynamiques

**Définition 1.1** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application*

*$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que*

- 1)  $U(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- 2)  $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- 3)  $U(0, x) = x$ .
- 4)  $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.1** *Soit le système linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

*où  $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$  et  $A$  est une matrice constante.*

Soit  $x(t) = e^{tA}x_0$  une solution du système (1.1). Il est simple de vérifier que cette solution engendre un système dynamique  $U(t, x) = e^{tA}x$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2** Un système dynamique  $U$  sur  $\mathbb{R}^n$  est linéaire si :

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y),$$

pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

## 1.2 Notion du flot

On représente la notion du **flot** pour deux types de systèmes d'équations différentielles.

**Définition 1.3** L'ensemble des applications  $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé le **flot** du système (??).

**Définition 1.4** Si toutes les valeurs propres de  $A$  ont des parties réelles non nulles alors le flot  $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dit **hyperbolique** et dans ce cas le système (??) est dit **système linéaire hyperbolique**.

### 1.2.1 Systèmes d'équations différentielles non linéaires

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

On note par  $I(x_0)$  l'intervalle maximum d'existence de la solution  $\Phi(t, x_0)$  du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

**Définition 1.5** Soit  $E$  un sous ensemble ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(E)$ , et soit pour  $x_0 \in E$  la solution  $\Phi(t, x_0)$  du problème (1.2) définie sur  $I(x_0)$ . Alors pour  $t \in I(x_0)$ , l'ensemble des applications  $\Phi_t$  définit par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le **flot** du système différentiel (1.2).

## 1.3 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes

Dans cette section, on considère le système non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

### 1.3.1 Point critique et linéarisation

**Définition 1.6 (Point critique).** On appelle point critique (ou point d'équilibre et aussi un point singulier) du système (1.3), tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$f(x_0) = 0.$$

Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

**Définition 1.7** Un point critique  $x = a$  du système (1.3) est appelé attracteur positif s'il existe un voisinage  $V_a$  de  $a$  tel que si :

$$x(t_0) \in V_a \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a.$$

Si cette implication est satisfaite quand  $t \rightarrow -\infty$ , alors  $x = a$  est appelé attracteur négatif.

**Définition 1.8 (Linéarisation).** Considérons le système non linéaire (1.3).

Le système

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.4)$$

où

$$A = Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est appelé le système linéarisé de (1.3) en  $x_0$ .

**Exemple 1.2** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 + 4, \\ \dot{y} &= y. \end{cases} \quad (1.5)$$

alors les points critiques sont  $(2, 0)$  et  $(-2, 0)$ .

Les matrices jacobiennes associée à (1.5)

1) Au point  $(2, 0)$

$$Df(2, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

le système linéarisé est donné par : Au point  $(2, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x, \\ \dot{y} = y, \end{cases}$$

2) Au point  $(-2, 0)$

$$Df(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

le système linéarisé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x, \\ \dot{y} = y, \end{cases}$$

On a utilisé la linéarisation pour étudier la nature des points critiques.

**Définition 1.9** On appelle point critique hyperbolique de (1.3), tout point critique  $x_0$  tel que aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x_0)$  n'a de partie réelle nulle.

### 1.3.2 Classification et nature des points critiques

**Définition 1.10** On considère le système :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et soit  $x_0$  son point critique.

- Le point critique  $x_0$  est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive, ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.
- Le point  $x_0$  est dit **puits** ("sink") si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives.
- Le point  $x_0$  est dit **source** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles positives.

**Exemple 1.3** Soit le système non linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y^2, \\ \dot{y} = 3x^4 - y. \end{cases} \quad (1.6)$$

Le système (1.6) a un seul point d'équilibre qui est l'origine  $(0, 0)$ , et le système linéarisé en ce point est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ce système a deux valeurs propres réelles négatives  $\lambda_1 = -3$  et  $\lambda_2 = -1$ . Alors le point d'équilibre  $(0, 0)$  est un nœud stable.

Pour un système plan à coefficients constants

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

où  $A$  est une matrice carré constante, l'origine  $(0, 0)$  est le seul point critique. Considérons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de la matrice  $A$ . On distingue les différents cas selon les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

- (1) Si  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  sont réelles et de signes différents, l'origine est une selle et est toujours instable.
- (2) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de même signe, alors on a trois cas :
  - Si  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ , l'origine est un nœud stable.
  - Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ , l'origine est un nœud instable.
  - Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , l'origine est un nœud propre ; il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .
- (3) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées, alors l'origine est un foyer. Il est stable si  $Re(\lambda_{1,2}) < 0$  et instable si  $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ .
- (4) Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont imaginaires pures, alors l'origine est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable.

### 1.3.3 Plan et portrait de phase

**Définition 1.11** Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$  à coefficients réels de degré  $d$ .

Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.7) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites .

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ses points critiques représentée dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

### 1.3.4 Orbites périodiques et cycles limites

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8)$$

**Définition 1.12 (Orbite périodique).** Une orbite périodique est une trajectoire fermée  $\phi(t, x)$  du système (1.8) vérifiant

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x).$$

Le plus petit  $T > 0$  qui vérifie cette égalité est appelé période.

**Proposition 1.1** Toute solution périodique entoure au moins un point d'équilibre.

**Définition 1.13 (Cycle limite).** Pour un système plan, un cycle limite est une orbite périodique fermée isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.

**Définition 1.14 (Amplitude).** L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la norme de la variable  $x$  du cycle limite.

**Théorème 1.1 (Stabilité des cycles limites).** La courbe  $C$  étant la trajectoire correspondante au cycle limite, et soit toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de  $C$  s'enroulant en spirales autour de  $C$  pour  $t \rightarrow \pm\infty$ .

1. Le cycle limite est dit **stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers  $C$ .

2. Le cycle limite est dit **instable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de  $C$ .

**Exemple 1.4** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y + 3x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - 3y + 3y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.9)$$

En coordonnées polaires  $x = r \cos(t)$  et  $y = r \sin(t)$  avec  $r > 0$ , le système (1.9) devient ainsi :

$$\begin{cases} \dot{r} = -3r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

d'où

$$\dot{r} = 0 \implies r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

Comme  $r > 0$ , on n'accepte que la racine positive  $r = 1$ . Donc, pour  $r = 1$  on a la solution périodique  $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$ , avec  $\theta(0) = \theta_0$ .

Dans le plan de phase, il y a un seul cycle limite instable d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et d'amplitude  $r = 1$ .

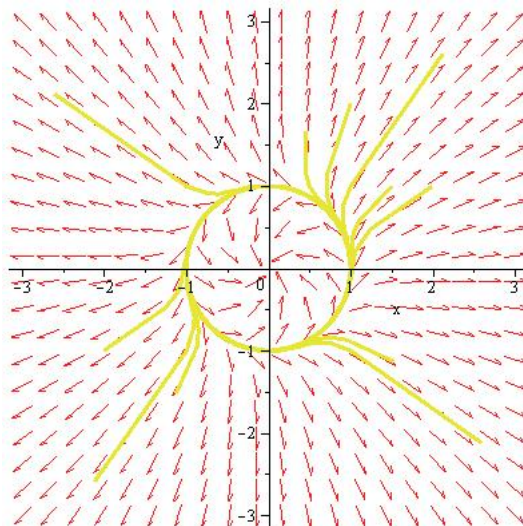


FIGURE 1.1 – Cycle limite du système (1.9).

**Proposition 1.2 (Cycle limite hyperbolique).** *Supposons que le système (1.7) a une orbite périodique  $(x(t), y(t))$  de période  $T$ . Soit l'exposant caractéristique donné par*

$$S = \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt \quad (1.10)$$

*Si  $S > 0$  (respectivement  $S < 0$ ), alors l'orbite périodique  $(x(t), y(t))$  est un cycle limite instable (respectivement stable). L'orbite périodique  $(x(t), y(t))$  est dite un cycle limite hyperbolique si  $S \neq 0$ .*

**Exemple 1.5** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + 3y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.11)$$

*En coordonnées polaires,  $x = r \cos(t)$ ,  $y = r \sin(t)$  avec  $r > 0$ , le système (1.11) devient :*

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

*d'où*

$$\dot{r} = 0 \implies r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

*pour  $r = 1$  on a*

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

*alors*

$$\begin{cases} S = \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos(t), \sin(t)) dt, \\ = \int_0^{2\Pi} (4 - 8 \cos(t)^2 - 8 \sin(t)^2) dt, \\ = \int_0^{2\Pi} -4 dt, \\ = -8\Pi < 0, \end{cases}$$

*Donc, le système (1.11) a un cycle limite hyperbolique  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$  qui est stable.*



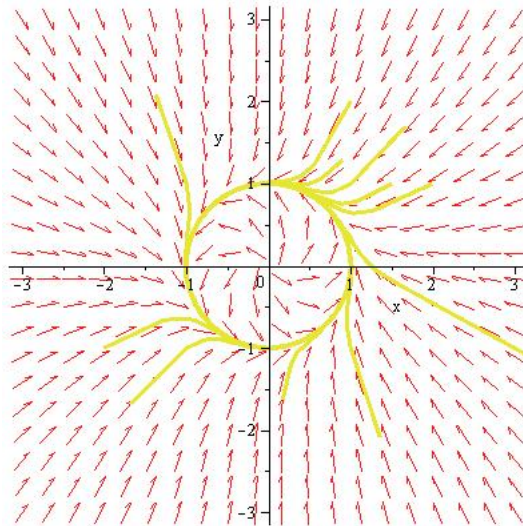


FIGURE 1.2 – Cycle limite du système (1.11) .

### 1.3.5 Existence et unicité de la solution

Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $t_0 < t < t_0 + T$ ,  $x \in D$  et  $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.15** On dit que la fonction  $f(t, x)$  est Lipschitzienne par rapport à  $x$  si  $\exists K > 0$  telle que :

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times D.$$

La constante  $K$  est appelée constante de Lipschitz.

**Théorème 1.2** On considère le problème à valeur initiale :

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0,$$

où  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 < t < t_0 + T$ , et on suppose que

1.  $f(t, x)$  est continue par rapport à  $t$  et  $x$  sur  $G = [t_0, t_0 + T] \times D$ ;
2.  $f(t, x)$  satisfait la condition de Lipschitz en  $x$ .

Alors le problème à valeur initiale admet une solution unique.

### 1.3.6 Existence et non-existence des cycles limites

Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^k$ , sur  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , donné par l'application  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$

$$X : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)). \quad (1.12)$$

On lui associe le système différentiel

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n, \quad (1.13)$$

où les fonctions  $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(x)$  (appelées composantes du champ de vecteurs  $X$ ) sont des fonctions de classe  $C^k$  sur l'ouvert  $U$ .

**Définition 1.16** *L'orbite  $\gamma$  du champ de vecteurs  $X$  passant par le point  $x_0$  est la courbe différentiable formée des points  $x(t)$  de  $U$  donnés par la solution  $\Phi(x_0, t)$  du système (1.13) avec la donnée initiale  $x_0$ . Cette courbe est orientée selon le sens de variation de  $t$ . On distingue éventuellement l'orbite positive  $\gamma_+(x_0) = \{\Phi(x_0, t), t \geq 0\}$  et l'orbite négative  $\gamma_-(x_0) = \{\Phi(x_0, t), t \leq 0\}$  passant par le point  $x(0) = x_0$ .*

**Théorème 1.3** [60](Poincaré-Bendixson). *Soit le système plan suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.14)$$

*Supposons que  $f$  et  $g$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $E$ , où  $E$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , le système (1.14) a une orbite  $\gamma$  telle que l'orbite positive  $\gamma_+(p) = \{\Phi(p, t), t \geq 0\}$  passant par le point  $p$  est contenue dans un sous ensemble compact  $F$  de  $E$ . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :*

- *Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers un point d'équilibre.*
- *Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers une orbite périodique.*
- *Soit  $\gamma_+(p)$  est une orbite périodique.*

*Si  $F$  contient de points critiques, alors il existe une orbite périodique du système (1.14).*

**Théorème 1.4** [60] (**Critère de Bendixson**). Soient le système plan

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

et  $F = (f, g)^T \in C^1(E)$  où  $E$  est une région simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$ . Si la divergence du champ de vecteur  $F$  (notée  $\operatorname{div}F$ ) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $E$ , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans  $E$ .

**Exemple 1.6** Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 2y^4, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit  $F = (2xy - 2y^4, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T$ . On calcule la divergence du champ de vecteur  $F$ , on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{div}F &= \frac{\partial}{\partial x} (2xy - 2y^4) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 2y - 3x^2y^2 = -3x^2y^2 < 0. \end{aligned}$$

D'où, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 1.5 (Critère de Dulac)**. Soit  $F = (f, g)^T \in C^1(E)$  où  $E$  est une région simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$ . S'il existe une fonction  $B \in C^1(E)$  telle que  $\operatorname{div}(BF)$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $E$ , alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

n'admet aucune orbite fermée entièrement contenue dans  $E$ .

preuve : (voir [60])

Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2. \end{cases}$$

On doit vérifier la non-existence de cycle limite pour ce dernier système.

Soit  $B(x, y) = be^{-2\beta x}$  et  $F = (y, -ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2)^T$ , calculant la divergence de  $BF$ , on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(BF) &= \frac{\partial}{\partial x}(be^{-2\beta x}y) + \frac{\partial}{\partial y}be^{-2\beta x}(-ax - by + \alpha x^2 + \beta y^2) \\ &= -2\beta be^{-2\beta x}y - b^2e^{-2\beta x} + 2\beta be^{-2\beta x}y = -b^2e^{-2\beta x} < 0. \end{aligned}$$

Donc, il n'existe pas de cycle limite pour ce système.

## 1.4 Bifurcation de Hopf

Les systèmes d'équations différentielles qui dépendent de paramètres peuvent avoir un changement du comportement qualitatif de ces derniers à cause du choix de paramètres et aussi des différents comportements asymptotiques en fonction des valeurs de leurs paramètres; par exemple, ils peuvent tendre vers un cycle limite. Donc, il y a des valeurs pour lesquelles on observe que le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre. Ainsi, ce changement d'état qualitatif est une "*bifurcation*" et la valeur du paramètre associée est appelée "*valeur de bifurcation*".

Il existe deux types de bifurcations : les bifurcations locales et les bifurcations globales dues aux collisions. Alors, les bifurcations "locales" paraissent à partir d'une collision de deux objets. Ces bifurcations peuvent être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution. De plus, dans ce cas le critère de détection utilisé s'intéresse aux valeurs propres du jacobien. Par contre, les bifurcations "globales" correspondent à la collision de deux variétés. Elles sont appelées globales car les linéarisations locales au voisinage de la solution ne seront d'aucune aide. Notons que ces bifurcations, ne sont pas abordées dans cette thèse.

Dans cet travail, on s'intéresse à une bifurcation locale appelée la *bifurcation de Hopf*. Cette bifurcation qui cause l'apparition d'un cycle limite avec une amplitude infinitésimale, mais une période finie, n'existe que pour des systèmes d'ordre supérieur ou égal à deux.

**Définition 1.17** Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

On dira qu'il y a une bifurcation en  $\mu^*$ , si une valeur  $\mu$  arbitrairement "proche" de  $\mu^*$ , il existe une dynamique qualitativement différente de celle en  $\mu^*$ .

Considérant l'exemple du système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2. \end{cases}$$

Ce système donne un point d'équilibre stable pour  $\mu < 0$ , une famille de cercles pour  $\mu = 0$  et un point d'équilibre instable pour  $\mu > 0$ . On dit que le paramètre  $\mu = 0$  dans cet exemple est une valeur de bifurcation.  $\mu$  est la partie réelle de deux valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$  de la matrice définissant le système précédent. Quand ce paramètre change de signe le système change de stabilité et passe de stable à instable.

La théorie de la bifurcation de Hopf s'intéresse à des systèmes différentiels de la forme suivante

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

où  $\mu$  est un paramètre réel.

### **Théorème 1.6 (Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf dans $\mathbb{R}^2$ )**

Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu), \\ \dot{y} = g(x, y, \mu), \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\mu$  est un paramètre réel.

Supposons que  $(x, y) = (x_0, y_0)$  est un point d'équilibre qui dépend de  $\mu$ . Soit  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$  les valeurs propres du système linéarisé de (1.16) au voisinage de ce point d'équilibre. Supposons que pour  $\mu = \mu^*$ , les conditions suivantes sont satisfaites

1.  $\alpha(\mu^*) = 0, \beta(\mu^*) = \omega \neq 0$ , où  $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn} \left[ (\partial g / \partial x) \Big|_{\mu=\mu^*} (x_0, y_0) \right]$  (condition de non hyperbolicité).

2.  $\frac{\partial \alpha(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu^*} = d \neq 0$  (condition de transversalité).

3.  $a \neq 0$ , les coefficients de généricité sont donnés par

$$a = \frac{1}{16} (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) + \frac{1}{16\omega} (f_{xy} (f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy} (g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}), \text{ où } f_{xy} = (\partial^2 f / \partial x \partial y) \Big|_{\mu=\mu^*} (x_0, y_0), \text{ etc...}, \text{ (condition de généricité).}$$

Alors, un cycle limite bifurque du point d'équilibre pour  $\mu > \mu^*$  si  $ad < 0$ , ou bien pour  $\mu < \mu^*$  et si  $ad > 0$ .

De plus, le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est stable pour  $\mu > \mu^*$  (resp  $\mu < \mu^*$ ) et instable pour  $\mu < \mu^*$  (resp  $\mu > \mu^*$ ) si  $d < 0$  (resp  $d > 0$ ).

Le cycle limite est stable (resp instable) si le point d'équilibre est instable (resp stable) autour de  $\mu^*$  où les solutions périodiques existent. L'amplitude du cycle limite augmente comme  $\sqrt{|\mu - \mu^*|}$  lorsque leur période tends vers  $\frac{2\pi}{|\omega|}$  quand  $\mu \rightarrow \mu^*$ .

La bifurcation est dite **bifurcation de Hopf super-critique** si le cycle limite est stable et **bifurcation de Hopf sous-critique** s'il est instable.

Preuve : (voir[67]) Ce théorème est prouvé en dimension quelconque arbitraire.

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y - x^3 - xy^2, \\ \dot{y} = -x + \mu y - x^2y - y^3. \end{cases} \quad (1.17)$$

Ce dernier admet un point d'équilibre unique qui est l'origine. Ce système est composé de deux parties : une partie linéaire et une partie non linéaire. Le système linéarisé au voisinage de l'origine est

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y, \\ \dot{y} = -x + \mu y. \end{cases}$$

Les valeurs propres de la matrice Jacobienne calculées au point d'équilibre  $(0, 0)$  sont complexes conjuguées et égales à  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ . La partie réelle des valeurs propres est  $\alpha(\mu) = \mu$ , et la partie imaginaire est  $\beta(\mu) = \pm 1$ . On a  $\alpha(\mu) = 0 \iff \mu^* = 0$ ,  $\text{sgn}(\omega) = \text{sgn}[-1]$ ,  $\beta(\mu^*) = -1 = \omega \neq 0$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \Big|_{\mu^*=0} = 1 = d \neq 0$  et  $a = -1$ .

Donc, on a une bifurcation de Hopf et la valeur de la bifurcation est  $\mu^* = 0$ .

D'après le Théorème (1.6), on a  $ad = -1 < 0$ , donc il existe un cycle limite pour  $\mu > 0$ .

Comme  $d = 1 > 0$ , l'origine est stable pour  $\mu < 0$  et instable pour  $\mu > 0$ .

Pour  $\mu > 0$  le cycle limite est stable d'amplitude  $\sqrt{\mu}$ . On dit alors qu'on a une **bifurcation de Hopf super-critique**.

En passant en coordonnées polaires, on peut confirmer ce résultat.

En effet, pour  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  le système (1.17) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2), \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

La deuxième équation admet comme solution  $\theta(t) = -t + \theta(0)$ .

Pour  $\mu \leq 0$ ,  $\dot{r} < 0 \implies r(t) \searrow$  donc l'origine est un foyer stable. Voir la figure (1.3) et la figure (1.4).

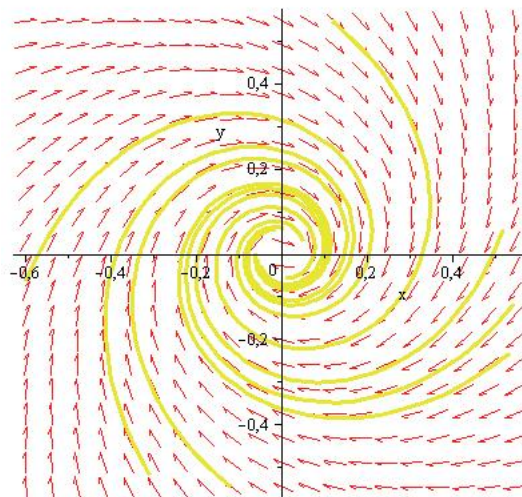


FIGURE 1.3 – Portrait de phase pour  $\mu = -0.2$ .

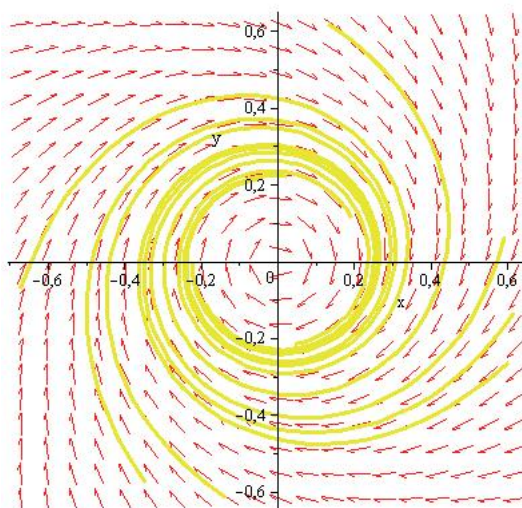


FIGURE 1.4 – Portrait de phase pour  $\mu = 0$ .

Pour  $\mu > 0$ , l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite stable  $\Gamma = \sqrt{\mu}(\cos \theta, \sin \theta)^T$  d'amplitude  $\sqrt{\mu}$ . Voir la figure (1.5).

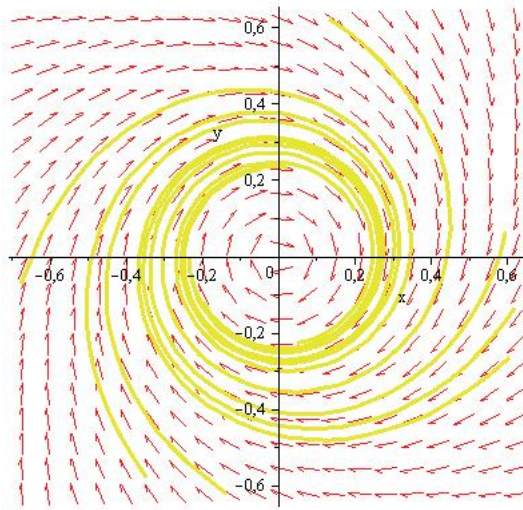


FIGURE 1.5 – Portrait de phase pour  $\mu = 0.01$ .

On voit que ce cycle limite est apparu pour  $\mu > 0$ , donc on a une **bifurcation de Hopf super-critique**.

## 1.5 Théorème de Bezout

Soient  $P_j, j = 1..n$  des polynômes de variables  $(x_1, \dots, x_d)$  de degré  $d_i$ , où  $i = 1..d$ .  
Considérons le système polynomial suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ P_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \end{array} \right. \quad (1.18)$$

où  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ .

Si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par  $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_d$ .



## CHAPITRE

# 2

# THÉORIE DE MOYENNISATION

## 2.1 Théorie de moyennisation dans le cas périodique

On considère le problème à valeur initiale

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

Supposons que  $f(t, x)$  est  $T$ -périodique en  $t$  et on introduit la moyenne

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt. \quad (2.2)$$

Considérons le problème à valeur initiale pour l'équation moyennée

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0. \quad (2.3)$$

**Théorème 2.1** [69] *Considérons les problèmes aux valeurs initiales (2.1) et (2.3) avec  $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ . Supposons que*

- a.**  $f, g$  et  $D_x f$  sont continues et bornées par une constante indépendante de  $\varepsilon$  dans  $[0, +\infty) \times D$ .

**b.**  $g$  est Lipschitzienne en  $x \in D$ .

**c.**  $f(t, x)$  est  $T$ -périodique en  $t$ , où  $T$  est indépendante de  $\varepsilon$ .

**d.**  $y(t) \in D$  pendant un temps d'échelle  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Alors, on a  $x(t) - y(t)$  est de l'ordre  $O(\varepsilon)$  pendant un temps d'échelle  $1/\varepsilon$ .

Preuve, (voir [69]).

On considère l'équation de Mathieu

$$\ddot{x} + (1 + 2\varepsilon \cos(2t))x = 0, \quad (2.4)$$

avec les valeurs initiales  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ .

On effectue le changement de variables

$$\begin{cases} x(t) = y_1(t) \cos(t) + y_2(t) \sin(t), \\ \dot{x}(t) = -y_1(t) \sin(t) + y_2(t) \cos(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

on obtient alors le système

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2\varepsilon \sin(t) \cos(2t) (y_1 \cos(t) + y_2 \sin(t)), & y_1(0) = x_0, \\ \dot{y}_2 = -2\varepsilon \cos(t) \cos(2t) (y_1 \cos(t) + y_2 \sin(t)), & y_2(0) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Remarquons que le membre droite du système (2.6) est  $2\pi$ -périodique en  $t$ , donc nous avons le système moyenné

$$\begin{cases} \dot{y}_{10} = -\frac{1}{2}\varepsilon y_{20}, \\ \dot{y}_{20} = -\frac{1}{2}\varepsilon y_{10}. \end{cases} \quad (2.7)$$

En résolvant le système moyenné (2.7), on obtient les solutions

$$\begin{cases} y_{10}(t) = \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} + \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}, \\ y_{20}(t) = \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} - \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}. \end{cases}$$

L'approximation de  $x(t)$  au temps d'échelle  $1/\varepsilon$  est

$$x_a(t) = \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} (\cos(t) + \sin(t)) + \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} (\cos(t) - \sin(t)).$$

### 2.1.1 Théorie de moyennisation du premier ordre

On considère le système différentiel

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.8)$$

où  $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D$  est un domaine borné et  $t \geq 0$ .

Supposons que  $F(t, x)$  et  $R(t, x, \varepsilon)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques en  $t$ . Le système moyenné associé au système (2.8) est

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.9)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) \, ds. \quad (2.10)$$

**Théorème 2.2** [66] *Soit le système (2.8). On suppose que  $F, R, D_x F, D_x^2 F$  et  $D_x R$  sont continues et bornées par une constante  $M$  dans  $[0, \varepsilon) \times D$  avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Supposons aussi que  $F$  et  $R$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ , où  $T$  est indépendante de  $\varepsilon$ . Alors :*

(a) *Si  $p$  est un point critique pour le système (2.9) tel que*

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0. \quad (2.11)$$

*Alors pour  $|\varepsilon|$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  du système (2.8) telle que  $x(0, \varepsilon) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

(b) *Si le point critique  $y = p$  du système moyenné (2.9) est hyperbolique, alors pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $x(t, \varepsilon)$  du système (2.8) est unique, hyperbolique et de même stabilité que  $p$ .*

**Preuve.** Voir [66].

*L'équation de Van Der Pol.*

Soit

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad (2.12)$$

où  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit.

L'équation (2.12) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases}$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  avec  $r > 0$ , ce système devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta) (1 - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta) (1 - r^2 \cos^2(\theta)). \end{cases} \quad (2.13)$$

Le système (2.13) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (2.14)$$

On note que l'équation (2.14) est sous la forme standard (2.8) pour appliquer la théorie de moyennisation si on prend

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(t, x) = -r (1 - r^2 \cos^2(\theta)^2) \sin^2(\theta).$$

On calcule l'équation (2.10), on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} r (r^2 - 4).$$

$f^0(r)$  a une unique racine positive  $r = 2$ . Puisque  $(df^0/dr)(2) = 1$ , par l'hypothèse (a) du théorème l'équation de Van Der Pol (2.12) a pour  $|\varepsilon| \neq 0$  une orbite périodique d'amplitude  $r = 2$  du système non perturbé avec  $\varepsilon = 0$ . De plus, puisque  $(df^0/dr)(2) = 1 > 0$  par l'hypothèse (b) du théorème, ce cycle limite est instable. Voir la figure (2.1).

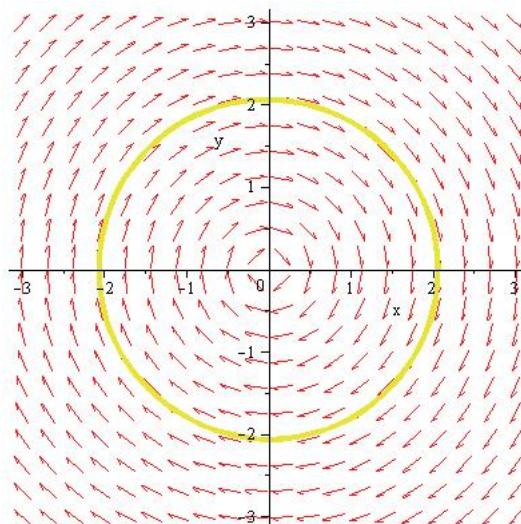


FIGURE 2.1 – Cycle limite instable de l'équation (2.12) pour  $\varepsilon = 0.01$ .

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + xy + z^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-y + yz), \\ \dot{z} = \varepsilon(x^2 + yz - 1), \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit.

En coordonnées cylindriques  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  et  $z = z$ , le système (2.15) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{1}{r}\varepsilon(rz \cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta)z^2 + \cos^3(\theta)r^2 - r^2 \cos(\theta)), \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases}$$

Pour écrire le système (2.15) sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation, on considère  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, d'où

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)z^2 - r + rz - rz \cos^2(\theta)), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r^2 \cos^2(\theta) + rz \sin(\theta) - 1). \end{cases} \quad (2.16)$$

Le système (2.16) est de la forme

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2(r, \theta, z) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

où  $F_1, F_2$  sont périodiques de période  $2\pi$ .

Calculons maintenant le système moyenné, on obtient

$$\begin{cases} f_1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r(z - 2), \\ f_2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z) d\theta = \frac{1}{2}r^2 - 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

On résout le système (2.17), on obtient les deux racines

$$(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2), \quad (r_2, z_2) = (-\sqrt{2}, 2).$$

Comme  $r > 0$ , la solution  $(\sqrt{2}, 2)$  c'est la seule qui fournit un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

$$D(r_1, z_1) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z - 1 & \frac{1}{2}r \\ r & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)} = -1 \neq 0.$$

D'après le théorème, le système (2.15) a pour  $|\varepsilon|$  suffisamment petit un seul cycle limite. Le point singulier  $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$  du système moyenné (2.17) est hyperbolique, donc le cycle limite est de même stabilité que  $(r_1, z_1) = (\sqrt{2}, 2)$ . Les valeurs propres  $\pm 1$  de  $D_{r,z}f^0$  sont de signes différents, alors le point singulier est un point selle qui est toujours instable. Donc, le cycle limite est instable. Voir la figure (2.2).

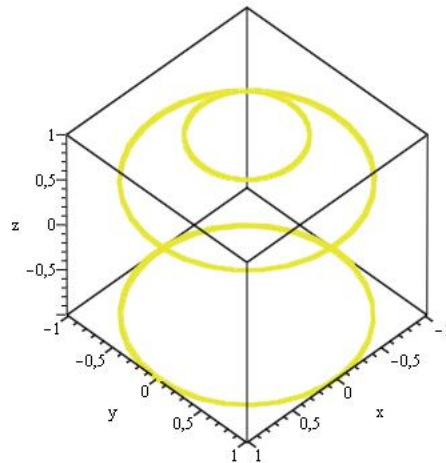


FIGURE 2.2 – Cycle limite instable du système (2.15) pour  $\varepsilon = 0.001$ .

## 2.1.2 Théorie de moyennisation du second ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du second ordre pour les solutions de certains systèmes différentiels périodiques.

**Théorème 2.3** [66] *On considère les deux problèmes de Cauchy*

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.18)$$

et

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) + \varepsilon^2 [f^{10}(y) + g^0(y)], \quad y(0) = x_0, \quad (2.19)$$

où  $F_1, F_2 : [0, +\infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : [0, +\infty) \times D \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions continues  $T$ -périodique en la première variable  $t$ , et  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  $f^0, f^{10}$  et  $g^0$  sont des fonctions moyennées correspondantes à  $F_1, F_2$  et  $G$  respectivement.

Soit

$$f_1(t, x) = \frac{\partial F_1}{\partial x} y_1(t, x) - \frac{\partial y_1}{\partial x} f^0(x),$$

où

$$y_1(t, x) = \int_0^t [F_1(s, x) - f^0(x)] ds + z(x),$$

et  $z(x)$  est une fonction différentiable de moyenne nulle. Supposons que

- (a)  $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ ,  $F_2$  et  $G$  sont Lipschitziennes relativement à  $x$  et continues dans leur domaine de définition.
- (b)  $|G(t, x, \varepsilon)|$  est bornée par une constante  $M$  positive dans  $[0, \frac{M}{\varepsilon}] \times D \times (0, \varepsilon_0]$ .
- (c)  $T$  est indépendante de  $\varepsilon$ .
- (d)  $y(t) \in D$  pendant un temps d'échelle  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Alors

$$x(t) = y(t) + \varepsilon y_1(t, y(t)) + O(\varepsilon^2),$$

pendant un temps d'échelle  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

**Corollaire 2.1** Si les hypothèses du théorème [66] sont satisfaites, et de plus

$$f^0(y) = 0.$$

Alors

1. Si  $p$  est un point d'équilibre du système moyenné (2.19) tel que

$$\frac{\partial}{\partial y} (f^{10}(y) + g^0(y))_{y=p} \neq 0, \quad (2.20)$$

alors, il existe une solution  $T$ -périodique  $\phi(t, \varepsilon)$  du système (2.18) telle que  $\phi(0, \varepsilon) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

2. Si (2.20) est négative, la solution périodique  $\phi(t, \varepsilon)$  du système (2.18) est asymptotiquement stable pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Si (2.20) est positive, cette solution est instable.

**Exemple 2.1** Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (x^2 - 4xy), \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2 (y^2x + y^5x - 2y + 6y^3 - y^5). \end{cases} \quad (2.21)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  avec  $r > 0$ , on obtient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-4r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta)) + \varepsilon^2(r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) - r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ \quad + 2r \cos^2(\theta) - r^6 \cos^7(\theta) + r^5 \cos^6(\theta) - 2r + 6r^3 + r^6 \cos(\theta) - r^5 - 3r^6 \cos^3(\theta) \\ \quad + 3r^5 \cos^2(\theta) - 12r^3 \cos^2(\theta) + 3r^6 \cos^5(\theta) - 3r^5 \cos^4(\theta) + 6r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(4r \cos(\theta) - 4r \cos^3(\theta) - r \cos^2(\theta) \sin(\theta)) + \varepsilon^2(-\cos(\theta)r^4 \sin(\theta) \\ \quad + \sin(\theta)r^5 \cos^6(\theta) - 6 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^2 + \sin(\theta)r^5 \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \quad - 2 \sin(\theta)r^5 \cos^4(\theta) - \cos^4(\theta)r^2 - \sin(\theta) \cos^5(\theta)r^4 + r^2 \cos^2(\theta) + 2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)r^4 \\ \quad + 6r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)). \end{cases}$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme la variable indépendante, on obtient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + O(\varepsilon^3), \quad (2.22)$$

où

$$F_1(r, \theta) = -4r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^3(\theta),$$

$$\begin{aligned} F_2(r, \theta) &= 15r^3 \sin(\theta) \cos^3(\theta) - 15r^3 \cos(\theta)^5 \sin(\theta) + r^3 \cos(\theta) \sin(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos^5(\theta) \\ &\quad - r^5 \sin^2(\theta) \cos^4(\theta) - 8r^3 \cos^4(\theta) \sin^2(\theta) - 2r^6 \sin^2(\theta) \cos^3(\theta) + 2r^5 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ &\quad - 6r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + r^6 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - r^5 \sin^2(\theta) - 2r \sin^2(\theta) + 6r^3 \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème, on calcule la fonction moyennée

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0.$$

On peut passer à la théorie de moyennisation d'ordre deux, on calcule

$$\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) = -8r \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2r \cos^3(\theta),$$

ensuite

$$\int_0^\theta F_1(r, s) ds = -\frac{4}{3}r^2 + \frac{4}{3}r^2 \cos^3(\theta) + \frac{1}{3}r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + \frac{2}{3}r^2 \sin(\theta).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, s) ds + F_2(r, \theta) \right] d\theta \\ &= r \left( -\frac{5}{16}r^4 + \frac{7}{4}r^2 - 1 \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$



Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation (2.23) et on obtient deux racines positives  $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 + 10\sqrt{29})}$ ,  $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 - 10\sqrt{29})}$ .

Comme

$$\frac{d}{dr}f^{10}(r) = -\frac{25}{16}r^4 + \frac{21}{4}r^2 - 1.$$

D'où

$$\frac{d}{dr}f^{10}(r_1) = -13.33923079 \neq 0,$$

et

$$\frac{d}{dr}f^{10}(r_2) = 1.739230730 \neq 0.$$

Donc il existe deux cycles limites, et d'après l'hypothèse (2) du corollaire on a

$\frac{d}{dr}f^{10}(r_1) = -13.33923079 < 0$  et  $\frac{d}{dr}f^{10}(r_2) = 1.739230730 > 0$ . Alors, le premier cycle limite est stable d'amplitude  $r_1 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 + 10\sqrt{29})}$  et le deuxième cycle limite est instable d'amplitude  $r_2 = \frac{1}{5}\sqrt{(70 - 10\sqrt{29})}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Voir la figure (2.3) et la figure (2.4).

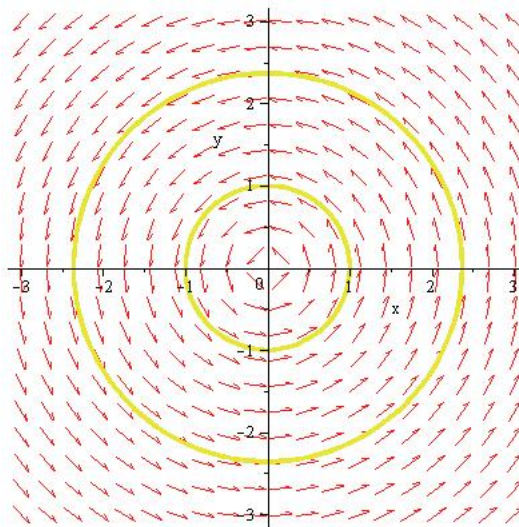


FIGURE 2.3 – Deux cycles limites du système (2.21) pour  $\varepsilon = 0.001$ .

## 2.2 Théorie de moyennisation suivant le degré de Brouwer

Dans cette section, on s'intéresse à la théorie de moyennisation pour la recherche des solutions périodiques d'un système différentiel suivant le degré de Brouwer.

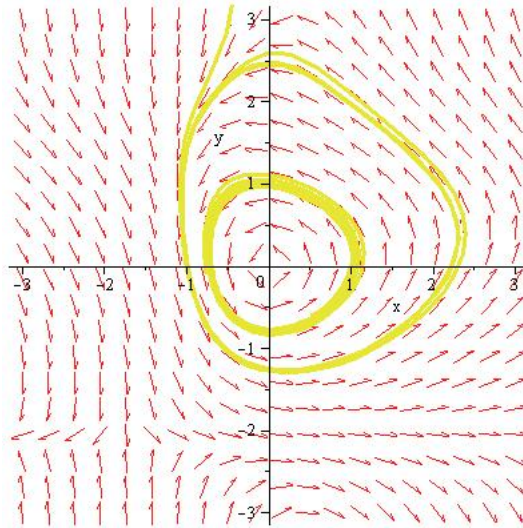


FIGURE 2.4 – Deux cycles limites du système (2.21) pour  $\varepsilon = 0.18$ .

### 2.2.1 Rappels sur le degré de Brouwer

**Définition 2.1 (Degré de Brouwer).** Soit  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $V$  un sous ensemble ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $V \subset D$ , et soit  $f : \bar{V} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction telle que  $0 \notin f(\partial V, \varepsilon)$  pour un certain  $\varepsilon$ . Nous appelons  $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$  le **degré de Brouwer** de la fonction  $f(\cdot, \varepsilon)$  par rapport à l'ensemble  $V$  et le point 0.

**Proposition 2.1** Si  $d_B(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) \neq 0$  alors l'équation  $f(\cdot, \varepsilon) = 0$  a une solution dans  $V$ .

**Définition 2.2 (Voir [55]) (Degré de Brouwer pour des fonctions de classe  $C^1$ ).**

Soit  $g \in C^1(t)$ ,  $\bar{V} \subset D$  et  $Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\}$ . Supposons aussi que  $J_g(z) \neq 0$  pour tout  $z \in Z_g$  où  $J_g(z)$  est le déterminant jacobien de  $g$  en  $z$ . Ce qui assure que  $Z_g$  est fini, alors

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)).$$

**Remarque 2.1** Soit  $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$ , avec  $g(a) = 0$ , où  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in D$ . Si  $J_g(a) \neq 0$ , il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que  $g(z) \neq 0$  pour tout  $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$  et on a

$$d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}.$$

## 2.2.2 Théorie de moyennisation d'ordre un, deux et trois dans $\mathbb{R}^n$

**Théorème 2.4** [51] *On considère le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.24)$$

où  $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques en la première variable, et  $D$  un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- (i)  $F_1(t, \cdot) \in C^2(D)$ ,  $F_2(t, \cdot) \in C^1(D)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  $F_1, F_2, F_3, R, D_x^2 F_1, D_x F_2$  sont localement Lipschitziennes par rapport à  $x$ , et  $R$  est deux fois différentiable par rapport à  $\varepsilon$ .

On définit  $F_{k0} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  pour  $k = 1, 2, 3$ , de manière suivantes :

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds,$$

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) \cdot y_1(s, z) + F_2(s, z)] ds,$$

$$F_{30}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} y_1(s, z)^T \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}(s, z) y_1(s, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial z}(s, z) y_2(s, z) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(s, z) (y_1(s, z)) + F_3(s, z) \right] ds,$$

où

$$y_1(s, z) = \int_0^s F_1(t, z) dt,$$

et

$$y_2(s, z) = \int_0^s \left[ \frac{\partial F_1}{\partial z}(t, z) \int_0^t F_1(r, z) dr + F_2(t, z) \right] dt.$$

- (ii) Pour  $V \subset D$  un sous ensemble ouvert et pour chaque  $\varepsilon \in (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \setminus \{0\}$ , il existe  $a_\varepsilon \in V$  telle que

$$F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) + \varepsilon^2 F_{30}(a_\varepsilon) = 0 \text{ et } d_B(F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}, V, a_\varepsilon) \neq 0.$$

Alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  du système (2.24) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$ .

L'expression  $d_B(F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}, V, a_\varepsilon) \neq 0$  signifie que le degré de Brouwer de la fonction  $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  au point d'équilibre  $a_\varepsilon$  est non nul.

Si  $F_{10}$  est non nulle. Alors les racines de  $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}$  sont principalement les racines de  $F_{10}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas le résultat précédent est celui de la *Théorie de moyennisation d'ordre un*.

Si  $F_{10}$  est nulle et  $F_{20}$  est non nulle. Alors les racines de  $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}$  sont principalement les racines de  $F_{20}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas le résultat précédent est celui de la *Théorie de moyennisation d'ordre deux*.

Si  $F_{10}$  et  $F_{20}$  sont nulles et  $F_{30}$  est non nulle. Alors les racines de  $F_{10} + \varepsilon F_{20} + \varepsilon^2 F_{30}$  sont principalement les racines de  $F_{30}$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. Dans ce cas le résultat précédent est celui de la *Théorie de moyennisation d'ordre trois*.

Notons que l'hypothèse (i) du Théorème (2.3) affirme l'existence et l'unicité de la solution pour chaque problème à valeur initiale sur l'intervalle  $[0, T]$ , (voir [13]). d'où, pour chaque  $z \in D$  on note par  $x(\cdot, z, \varepsilon)$  la solution du (2.24) avec la valeur initiale  $x(\cdot, z, \varepsilon) = z$ .

On considère la fonction  $\xi : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$  définit par

$$\xi(z, \varepsilon) = \int_0^T (\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 F_3(t, x) + \varepsilon^4 R(t, x, \varepsilon)) dt.$$

Pour chaque  $z \in D$ , on a

$$x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon) = \xi(z, \varepsilon).$$

De plus, la fonction  $\xi$  peut s'écrire sous la forme

$$\xi(z, \varepsilon) = \varepsilon F_{10}(z) + \varepsilon^2 F_{20}(z) + \varepsilon^3 F_{30}(z) + O(\varepsilon^4),$$

où  $F_{10}$ ,  $F_{20}$  et  $F_{30}$  sont définies dans le théorème 2.3.1, et  $O(\varepsilon^4)$  est une fonction bornée sur chaque sous ensemble compact de  $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$  multiplié par  $\varepsilon^4$ .

La stabilité des cycles limites associés à la racine simple  $a_\varepsilon$  est déterminée suivant les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $\xi(z, \varepsilon)$  évaluées en  $a_\varepsilon$  et d'après le théorème 3.5.1 de [66], on sait que le cycle limite associé à la racine  $a_\varepsilon$  de  $F_{30}$  quand  $F_{10} = 0$  et  $F_{20} = 0$  est donné par l'expression

$$x(t, a_\varepsilon, \varepsilon) = a_\varepsilon + \varepsilon y_1(t, a_\varepsilon) + \varepsilon^2 y_2(t, a_\varepsilon) + O(\varepsilon^3). \quad (2.25)$$

**Exemple 2.2** On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(x^2 - 2x^4), \\ \dot{y} = -x - \varepsilon^3(x^2 + y - y^3). \end{cases} \quad (2.26)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ ,  $r > 0$ , le système (2.26) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-r^2 \cos^3(\theta) + 2r^4 \cos^5(\theta)) + \varepsilon^3(-\sin(\theta)r^2 \cos^2(\theta) - r + r^3 \\ \quad - 2r^3 \cos^2(\theta) + r \cos^2(\theta) + r^3 \cos^4(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(-2 \sin(\theta)r^3 \cos^4(\theta) + \sin(\theta)r \cos^2(\theta)) + \varepsilon^3(\cos(\theta) \times \\ \quad r^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)r^2 \cos^3(\theta) - \cos(\theta) \sin(\theta) - r \cos^3(\theta)). \end{cases} \quad (2.27)$$

En considérant  $\theta$  comme nouvelle variable, le système (2.27) devient

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + \varepsilon^2 F_2(r, \theta) + \varepsilon^3 F_3(r, \theta) + O(\varepsilon^4), \quad (2.28)$$

où

$$F_1(r, \theta) = r^2 \cos^3(\theta) - 2r^4 \cos^5(\theta),$$

$$F_2(r, \theta) = 4 \sin(\theta) \cos^9(\theta) r^7 - 4 \sin(\theta) \cos^7(\theta) r^5 + \sin(\theta) \cos^5(\theta) r^3,$$

$$\begin{aligned} F_3(r, \theta) &= \sin(\theta) r^2 \cos^2(\theta) - 8r^{10} \cos^{13}(\theta) \sin^2(\theta) + 12r^8 \cos^{11}(\theta) \sin^2(\theta) \\ &\quad - 6r^6 \cos^9(\theta) \sin^2(\theta) + r^4 \cos^7(\theta) \sin^2(\theta) + r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ &\quad - r^3 \sin^2(\theta) + r \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Premièrement, on calcule

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, \theta) d\theta = 0,$$

ensuite on doit calculer  $f_2$  et pour cela, on calcule l'expression  $\frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \int_0^\theta F_1(r, t) dt$ , et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \int_0^\theta F_1(r, t) dt &= r(2 \cos^3(\theta) - 8r^2 \cos^5(\theta)) \cdot \left( \frac{r^2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r^2}{3} \sin(\theta) + r^4 \left( -\frac{2}{5} \cos^4(\theta) \sin(\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{8}{15} \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} \sin(\theta) \right) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot \int_0^\theta F_1(r, t) dt + F_2(r, \theta) \right] d\theta = 0.$$

Maintenant, en appliquant la théorie de moyennisation d'ordre trois et pour cela, on calcule la fonction moyennée suivante

$$f_3(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(r, \theta) \cdot (y_1(r, \theta))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_2(r, \theta) + \frac{\partial F_2}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_1(r, \theta) + F_3(r, \theta) \right] d\theta,$$

où

$$y_1(r, \theta) = \int_0^\theta F_1(r, s) ds,$$

$$y_2(r, \theta) = \int_0^\theta \left[ \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, s) \cdot \int_0^s F_1(r, t) dt + F_2(r, s) \right] ds.$$

On calcule d'abord

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2}(r, \theta) \cdot (y_1(r, \theta))^2 &= (\cos^3(\theta) - 12r^2 \cos^5(\theta)) \cdot \left( \frac{1}{3} \sin(\theta) r^2 \cos^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta) - \frac{2}{5} r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{8}{15} r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} r^4 \sin(\theta)^2 \right), \end{aligned}$$

ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_2(r, \theta) &= \left( \frac{1}{2} (2r \cos^3(\theta) - 8r^3 \cos^5(\theta)) \right) \cdot \left( \frac{602}{225} r^7 - \frac{38}{15} r^5 + \frac{11}{18} r^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{18}{25} r^7 \cos^1 0(\theta) + \frac{14}{15} r^5 \cos^8(\theta) - \frac{8}{15} r^7 \cos^8(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{18} r^3 \cos^6(\theta) - \frac{64}{45} r^7 \cos^6(\theta) + \frac{16}{15} r^5 \cos^6(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{15} r^5 \cos^4(\theta) - \frac{1}{3} r^3 \cos^4(\theta) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial r}(r, \theta) \cdot y_1(r, \theta) &= (28 \sin(\theta) \cos^9(\theta) r^6 - 20 \sin(\theta) \cos^7(\theta) r^4 \\ &\quad + 3 \sin(\theta) \cos^5(\theta) r^2) \cdot \left( \frac{r^2}{3} \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \frac{2}{3} r^2 \sin(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{5} r^4 \cos^4(\theta) \sin(\theta) - \frac{8}{15} r^4 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \frac{16}{15} r^4 \sin(\theta) \right). \end{aligned}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout l'équation

$$f_3(r) = \frac{1}{2} r \left( 1 - \frac{3}{4} r^2 \right) = 0. \quad (2.29)$$

L'équation (2.29) a une seule racine positive  $r = \frac{2}{3} \sqrt{3}$ . Selon le théorème, pour avoir un cycle limite on doit vérifier que  $\left. \frac{d}{dr} f_3(r) \right|_{r=\frac{2}{3}\sqrt{3}} = -1 \neq 0$ , ce qui est fait.

On conclut que le système (2.26) a un seul cycle limite d'amplitude  $r = \frac{2}{3} \sqrt{3}$ . Voir la figure (2.5).

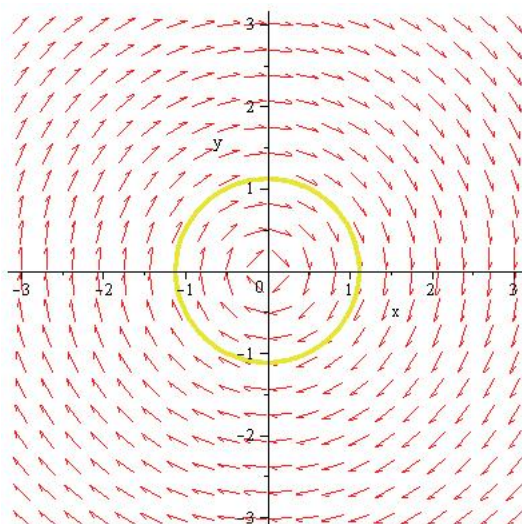


FIGURE 2.5 – Cycle limite du système (2.26) pour  $\varepsilon = 0.001$ .

## CHAPITRE

### 3

# BIFURCATION DE HOPF POUR UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUADRATIQUE EN DIMENSION 5

Dans ce chapitre, nous appliquons la théorie de moyennisation d'ordre deux à un système différentiel polynomial quadratique dans  $\mathbb{R}^5$  afin d'étudier la bifurcation de Hopf qui se produit à l'origine pour ce type de système. On prouve qu'au plus 27 cycles limites peuvent apparatre par bifurcation de Hopf d'un point d'équilibre ayant 5 valeurs propres trois sont des zero et deux sont des imaginairesb pures. En plus, on donne un exemple d'un système différentiel polynomial quadratique pour lequel exactement 27 cycles limites bifurquent de l'origine.



### 3.1 Nombre maximum de cycles limites obtenus par bifurcation de Hopf pour un système différentiel quadratique dans $\mathbb{R}^5$ par la théorie de moyennisation d'ordre deux

Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier l'existence de cycles limites qui peuvent bifurquer à partir d'un équilibre zéro-Hopf d'un système différentiel polynomial dans  $\mathbb{R}^5$  avec des non-linéarités quadratiques en utilisant la théorie de moyennisation.

Dans la référence [45], les auteurs ont étudié la bifurcation de Hopf en dimension  $n > 2$ , en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Ils ont prouvé qu'au moins  $2^{n-3}$  cycles limites peuvent bifurquer à partir d'une singularité avec des valeurs propres  $\pm bi$  et  $n - 2$  zéros. Ils ont prouvé pour la première fois que le nombre de cycles limites bifurqués dans une bifurcation de Hopf peut grandir de manière exponentielle avec la dimension du système, (on se référer à [59]).

Dans la référence [28], les auteurs ont étudié la bifurcation zéro-Hopf dans  $\mathbb{R}^4$  avec un polynôme cubique de dimension 4. Ils ont montré qu'il y a 9 cycles limites bifurquant de l'origine en appliquant la théorie de la moyennisation du second ordre.

Dans [50], les auteurs ont étudié la bifurcation de zero-Hopf produisant des systèmes différentiels polynomiaux dans  $\mathbb{R}^3$  avec des non-linéarités homogènes quadratiques et ils ont montré qu'il y a 3 cycles limites.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à étudier la bifurcation zéro-Hopf pour des champs de vecteurs polynomiaux quadratiques dans  $\mathbb{R}^5$  en utilisant la théorie de la moyennisation du premier et second ordre.

Nous allons étudier la bifurcation de zero-Hopf à l'origine des coordonnées de sys-

tèmes différentiels polynomiaux quadratiques dans  $\mathbb{R}^5$ .

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, u, w), \\
 \dot{y} &= (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, u, w), \\
 \dot{z} &= (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, u, w), \\
 \dot{u} &= (B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^2)u + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j U_j(x, y, z, u, w), \\
 \dot{w} &= (A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, u, w),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$\begin{aligned}
 X_j(x, y, z, u, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}xy + a_{j2}xz + a_{j3}xu + a_{j4}xw + a_{j5}y^2 + a_{j6}yz \\
 &\quad + a_{j7}yu + a_{j8}yw + a_{j9}z^2 + a_{j10}zu + a_{j11}zw + a_{j12}u^2 \\
 &\quad + a_{j13}uw + a_{j14}w^2.
 \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, u, w)$ ,  $Z_j(x, y, z, u, w)$ ,  $U_j(x, y, z, u, w)$  et  $W_j(x, y, z, u, w)$  ont la même expression que  $X_j(x, y, z, u, w)$  en remplaçant  $a_{ji}$  respectivement par  $b_{ji}$ ,  $c_{ji}$  pour  $j = 0, 1, 2$  et  $i = 0, 1, \dots, 14$ . Les coefficients  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c_1, c_2, B_1, B_2, A_1, A_2$  sont des paramètres avec  $b \neq 0$ . Notons que le système (3.1) pour  $\varepsilon = 0$  à l'origine a des valeurs propres  $\pm bi, 0, 0, 0$ . Donc pour  $\varepsilon = 0$  une bifurcation de zero- Hopf peut se produire.

D'après [45], nous savons qu'au moins  $2^{5-3} = 4$  cycles limites peuvent bifurquer à partir de l'origine du système différentiel polynomial quadratique (3.1) pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit. Ici, nous améliorons ce résultat en prouvant qu'au moins 27 cycles limites peuvent naître d'une bifurcation de zero- Hopf à partir de l'origine du système (3.1). Notre résultat principal est

**Théorème 3.1** *le système (3.1) admet :*

- (a) *Au plus 4 cycles limites bifurquent de l'origine de système (3.1) quand  $\varepsilon = 0$ , en appliquant la théorie de la moyennisation du premier ordre, et cette borne supérieure est atteinte.*

(b) Au plus 27 cycles limites bifurquent de l'origine du système (3.1) quand  $\varepsilon = 0$ , en appliquant la théorie de la moyennisation du second ordre, et cette borne supérieure est atteinte.

**Preuve de l'affirmation (a) du Théorème (3.1)** Nous redimensionnons d'abord les variables  $(x, y, z, u, w)$  en faisant le changement de variables  $(x, y, z, u, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon U, \varepsilon W)$ . Deuxièmement, nous passons aux coordonnées cylindriques en faisant  $(X, Y, Z, U, W) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta, \xi, \zeta)$ , et troisièmement, nous prenons l'angle  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante. Le système (3.1) prend la forme normale pour appliquer la théorie de la moyennisation. Ainsi par rapport aux variables  $(\rho, \eta, \xi, \zeta)$  le système (3.1) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{d\xi}{d\theta} &= \varepsilon F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3) \\ \frac{d\zeta}{d\theta} &= \varepsilon F_{14}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + \varepsilon^2 F_{24}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Prenons

$$x = (\rho, \eta, \xi, \zeta),$$

$$t = \theta,$$

$$F_1(t, x) = (F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{14}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta)),$$

$$F_2(t, x) = (F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta), F_{24}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta)),$$

et  $T = 2\pi$ , ainsi le système (3.2) équivaut au système (2.1).

Pour  $i = 1, 2, 3, 4$  et de (2.2) posons  $f_i = (f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, f_{i4})$  où

$$f_{1i}(\rho, \eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{1i}(\theta, \rho, \eta, \xi, \zeta) d\theta.$$

En calculant les fonctions moyennées du premier ordre, on obtient

$$\begin{aligned}
 f_{11}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{2b}(\rho(2a_1 + (a_{02} + b_{06})\eta + (a_{03} + b_{07})\xi + (a_{04} + b_{08})\zeta)) = 0, \\
 f_{12}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{2b}((c_{00} + c_{05})\rho^2 + 2c_{09}\eta^2 + 2c_{012}\xi^2 + 2c_{014}\zeta^2 + 2(c_1 \\
 &\quad + c_{011}\zeta + c_{010}\xi)\eta + 2c_{013}\xi\zeta) = 0, \\
 f_{13}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{2b}((B_{00} + B_{05})\rho^2 + 2B_{09}Z\eta^2 + 2B_{012}\xi^2 + 2B_{014}\zeta^2 + 2(B_1 \\
 &\quad + B_{013}\zeta + B_{010}\eta)\xi + 2B_{011}\eta\zeta) = 0, \\
 f_{14}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{2b}((A_{00} + A_{05})\rho^2 + 2A_{09}\eta^2 + 2A_{012}\xi^2 + 2A_{014}\zeta^2 + 2(A_1 \\
 &\quad + A_{013}\xi + A_{011}Z)\zeta + 2A_{010}\eta\zeta) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

résolvons le système (3.3) par rapport à  $\rho, \eta, \xi$  et  $\zeta$  où  $\rho > 0$ ,  $\eta, \xi$  et  $\zeta$  sont réels. Tout d'abord, résolvons  $f_{11} = 0$  par rapport à  $\eta$ , ceci donne

$$\eta = \frac{-2a_1 - (a_{03} + b_{07})\xi - (a_{04} + b_{08})\zeta}{a_{02} + b_{06}}$$

substituons cette dernière expression de  $\eta$  dans  $f_{22}, f_{23}$  et  $f_{24}$ , nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{[U_1\rho^2 + U_2\xi^2 + U_3\zeta^2 + U_4\xi\zeta + U_5\xi + U_6\zeta + U_7]}{2b(a_{02} + b_{06})^2}, \\
 g_2 &= \frac{[V_1\rho^2 + V_2\xi^2 + V_3\zeta^2 + V_4\xi\zeta + V_5\xi + V_6\zeta + V_7]}{2b(a_{02} + b_{06})^2}, \\
 g_3 &= \frac{[W_1\rho^2 + W_2\xi^2 + W_3\zeta^2 + W_4\xi\zeta + W_5\xi + W_6\zeta + W_7]}{2b(a_{02} + b_{06})^2},
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 U_1 &= (c_{00} + c_{05})(a_{02} + b_{06})^2, \\
 U_2 &= 2c_{012}(a_{02} + b_{06})^2 + 2c_{09}(a_{03} + b_{07})^2 - 2c_{010}(a_{03} + b_{07})(a_{02} + b_{06}), \\
 U_3 &= 2c_{014}(a_{02} + b_{06})^2 + 2c_{09}(a_{04} + b_{08})^2 - 2c_{011}(a_{04} + b_{08})(a_{02} + b_{06}), \\
 U_4 &= 2c_{013}(a_{02} + b_{06})^2 + 4c_{09}(a_{03} + b_{07})(a_{04} + b_{08}) - 2c_{011}(a_{03} + b_{07}) \\
 &\quad (a_{02} + b_{06}) - 2c_{010}(a_{04} + b_{08})(a_{02} + b_{06}), \\
 U_5 &= 8a_1c_{09}(a_{03} + b_{07}) - 2(a_{03} + b_{07})c_1(a_{02} + b_{06}) - 4a_1c_{010}(a_{02} + b_{06}), \\
 U_6 &= 8a_1c_{09}(a_{04} + b_{08}) - 2(a_{04} + b_{08})c_1(a_{02} + b_{06}) - 4a_1c_{011}(a_{02} + b_{06}), \\
 U_7 &= 8a_1^2c_{09} - 4a_1c_1(a_{02} + b_{06}), \\
 V_1 &= (B_{00} + B_{05})(a_{02} + b_{06}), \\
 V_2 &= 2B_{012}(a_{02} + b_{06})^2 + 2B_{09}(a_{03} + b_{07})^2 - 2B_{010}(a_{03} + b_{07})(a_{02} + b_{06}), \\
 V_3 &= 2B_{014}(a_{02} + b_{06})^2 + 2B_{09}(a_{04} + b_{08})^2 - 2B_{011}(a_{04} + b_{08})(a_{02} + b_{06}), \\
 V_4 &= 2B_{013}(a_{02} + b_{06})^2 + 4B_{09}(a_{03} + b_{07})(a_{04} + b_{08}) - 2B_{011}(a_{03} + b_{07}) \\
 &\quad (a_{02} + b_{06}) - 2B_{010}(a_{04} + b_{08})(a_{02} + b_{06}), \\
 V_5 &= 8a_1B_{09}(a_{03} + b_{07}) + 2(a_{03} + b_{07})B_1(a_{02} + b_{06}) - 4a_1B_{010}(a_{02} + b_{06}), \\
 V_6 &= 8a_1B_{09}(a_{04} + b_{08}) - 4a_1B_{011}(a_{02} + b_{06}), \\
 V_7 &= 8a_1^2B_{09}, \\
 W_1 &= (A_{00} + A_{05})(a_{02} + b_{06}), \\
 W_2 &= 2A_{012}(a_{02} + b_{06})^2 + 2A_{09}(a_{03} + b_{07})^2 - 2A_{010}(a_{03} + b_{07})(a_{02} + b_{06}), \\
 W_3 &= 2A_{014}(a_{02} + b_{06})^2 + 2A_{09}(a_{04} + b_{08})^2 - 2A_{011}(a_{04} + b_{08})(a_{02} + b_{06}), \\
 W_4 &= 2A_{013}(a_{02} + b_{06})^2 + 4A_{09}(a_{03} + b_{07})(a_{04} + b_{08}) - 2A_{011}(a_{03} + b_{07}) \\
 &\quad (a_{02} + b_{06}) - 2A_{010}(a_{04} + b_{08})(a_{02} + b_{06}), \\
 W_5 &= 8a_1A_{09}(a_{03} + b_{07}) - 4a_1A_{010}(a_{02} + b_{06}), \\
 W_6 &= 8a_1A_{09}(a_{04} + b_{08}) + 2A_1(a_{02} + b_{06})^2 - 4a_1A_{011}(a_{02} + b_{06}), \\
 W_7 &= 8a_1^2A_{09},
 \end{aligned}$$

et

$$(a_{02} + b_{06}) \neq 0.$$

Comme les coefficients du système  $g_1 = 0, g_2 = 0$  et  $g_3 = 0$  sont indépendants, ils

doivent être sélectionnés de manière à ce que le nombre de solutions réelles fournies par le théorème de Bezout soit 8. Puisque ce système dépend de  $\rho^2$ , nous pouvons obtenir 4 vraies solutions où  $\rho > 0$ . En supposant que le déterminant de la matrice jacobienne évaluée en ces 4 solutions est non nul, alors il y a 4 cycles limites qui bifurquent à partir de l'origine quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Donnons maintenant un exemple du résultat (a) du théorème 3.1 ayant 4 cycles limites qui bifurquent à partir d'une bifurcation zéro-Hopf.

**Exemple 3.1** *Considérons le système différentiel polynomial quadratique suivant :*

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= -\frac{3}{2}\sqrt{10}\varepsilon x - y + x^2 + xz + xw - y^2 + \varepsilon(x^2 + xu \\
 &\quad -y^2 + z^2 + zu - zw + u^2), \\
 \frac{dy}{dt} &= x + \frac{3}{2}\sqrt{10}\varepsilon y + x^2 + 5yu + \varepsilon(2xy + zu), \\
 \frac{dz}{dt} &= 6\sqrt{10}\varepsilon z - 2y^2 + z^2 + 2zw - 3u^2 + w^2 + \varepsilon(2xy + zu), \\
 \frac{du}{dt} &= \varepsilon^2 u + x^2 + y^2 + \frac{27}{10}\sqrt{10}zw + u^2 + \frac{27}{2}\sqrt{10}uw - \varepsilon xz, \\
 \frac{dw}{dt} &= -\frac{6}{5}\sqrt{10}\varepsilon x + x^2 + y^2 + \frac{1}{5}z^2 + 2zu + \frac{27}{10}\sqrt{10}zw + 5u^2 \\
 &\quad + \frac{27}{2}\sqrt{10}uw - \frac{1}{5}w^2 + \varepsilon y^2.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Les valeurs propres du point singulier  $(0, 0, 0, 0, 0)$  du système (3.4) sont  $-\frac{3\varepsilon}{2}\sqrt{10} \pm i$ ,  $-\frac{6}{5}\sqrt{10}\varepsilon$ ,  $6\sqrt{10}\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$ .

Tout d'abord, faisons le changement de variables  $(x, y, z, u, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon U, \varepsilon W)$ . Ensuite, on passe aux coordonnées cylindriques  $(X, Y, Z, U, W) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta, \xi, \zeta)$ . Prenons  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante et calculons les fonctions moyennées  $f_{1i}(\rho, Z, U, W)$  avec  $i = \overline{1..4}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 f_{11}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{\rho}{2}[3\sqrt{10} + \eta + \zeta + 5\xi] = 0, \\
 f_{12}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{2}[-2\rho^2 + 2\eta^2 - 6\xi^2 + 4\eta\zeta + 2\zeta^2 + 12\sqrt{10}\eta] = 0, \\
 f_{13}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{2}[2\rho^2 + 27\sqrt{10}\xi\zeta + 2\xi^2 + \frac{27}{5}\sqrt{10}\eta\zeta] = 0, \\
 f_{14}(\rho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{2}[2\rho^2 + 4\eta\xi + \frac{27}{5}\sqrt{10}\eta\zeta + \frac{2}{5}\eta^2 + 27\sqrt{(10)}\xi\zeta + 10\xi^2 - \frac{2}{5}\zeta^2 - \frac{12}{5}\sqrt{10}\zeta] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

résolvons  $f_{11}(\rho, \eta, \xi, \zeta) = 0$  par rapport à  $\eta$ , ceci donne

$$\eta = -3\sqrt{10} - \zeta - 5\xi.$$

On remplace  $\eta$  dans les autres fonctions moyennées, on obtient

$$\begin{aligned} g1 &= -\rho^2 + 22\xi^2 - 6\sqrt{10}\zeta - 90 = 0, \\ g2 &= \rho^2 - \frac{27}{10}\sqrt{10}\zeta^2 + \xi^2 - 81\zeta = 0, \\ g3 &= \rho^2 - \frac{27}{10}\sqrt{10}\zeta^2 - 81\xi + 18 = 0. \end{aligned}$$

En résolvons ce dernier système par rapport aux variables  $\rho, \xi$  et  $\zeta$  avec  $\rho > 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\rho_1^*, \eta_1^*, \xi_1^*, \zeta_1^*) &= \left( \frac{1}{3}\sqrt{3564 + 60.10^{\frac{1}{4}} - 6\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}} - 3\sqrt{10}, \right. \\ &\quad + \frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 - \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} - 15\sqrt{2}, \\ &\quad \left. 3\sqrt{2}, -\frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 - \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} \right), \\ (\rho_1^*, \eta_1^*, \xi_1^*, \zeta_1^*) &= \left( \frac{1}{3}\sqrt{3564 + 60.10^{\frac{1}{4}} + 6\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}} - 3\sqrt{10} \right. \\ &\quad + \frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 + \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} - 15\sqrt{2}, \\ &\quad \left. 3\sqrt{2}, -\frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 + \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} \right), \\ (\rho_1^*, \eta_1^*, \xi_1^*, \zeta_1^*) &= \left( \frac{1}{3}\sqrt{3564 + 60.10^{\frac{1}{4}} - 6\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}} - 3\sqrt{10} \right. \\ &\quad + \frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 - \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} - 15\sqrt{2}, \\ &\quad \left. - 3\sqrt{2}, -\frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 - \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} \right), \\ (\rho_1^*, \eta_1^*, \xi_1^*, \zeta_1^*) &= \left( \frac{1}{3}\sqrt{3564 + 60.10^{\frac{1}{4}} + 6\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}} - 3\sqrt{10} \right. \\ &\quad + \frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 + \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} - 15\sqrt{2}, \\ &\quad \left. - 3\sqrt{2}, -\frac{1}{60}\left(\frac{20}{3}.10^{\frac{1}{4}} + 90 + \frac{2}{3}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}\right)\sqrt{10} \right), \end{aligned}$$

Le calcul de

$$D_i = \det\left(\frac{\partial(f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24})}{\partial(\rho, \eta, \xi, \zeta)}\Big|_{\rho^*, \eta^*, \xi^*, \zeta^*}\right), i = 1, 2, 3, 4.$$

on a

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 44064\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}} - 13776\sqrt{20} - 48\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} \\
 &\quad - \frac{7128}{5}\sqrt{2}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} + 43740\sqrt{2} - 240\sqrt{2}.10^{\frac{3}{4}} + 24\sqrt{2} \\
 &\quad \sqrt{10}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}), \\
 D_2 &= 44064\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}} - 13776\sqrt{20} + 48\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} \\
 &\quad + \frac{7128}{5}\sqrt{2}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} + 43740\sqrt{2} - 240\sqrt{2}.10^{\frac{3}{4}} - 24\sqrt{2} \\
 &\quad \sqrt{10}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}), \\
 D_3 &= -44064\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}} + 13776\sqrt{20} + 48\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} \\
 &\quad + \frac{7128}{5}\sqrt{2}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} - 43740\sqrt{2} + 240\sqrt{2}.10^{\frac{3}{4}} - 24\sqrt{2} \\
 &\quad \sqrt{10}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}), \\
 D_4 &= -44064\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}} + 13776\sqrt{20} - 48\sqrt{2}.10^{\frac{1}{4}}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} \\
 &\quad - \frac{7128}{5}\sqrt{2}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225} - 43740\sqrt{2} + 240\sqrt{2}.10^{\frac{3}{4}} + 24\sqrt{2} \\
 &\quad \sqrt{10}\sqrt{100\sqrt{10} + 12420.10^{\frac{1}{4}} + 18225}).
 \end{aligned}$$

puisque,  $D_i \neq 0$  il existe 4 solutions périodiques  $(\rho_i(\theta, \varepsilon), \eta_i(\theta, \varepsilon), \xi_i(\theta, \varepsilon), \zeta_i(\theta, \varepsilon))$  bifurquant de l'origine quand  $\varepsilon = 0$ , tel que

$$(\rho_i(\theta, \varepsilon), \eta_i(\theta, \varepsilon), \xi_i(\theta, \varepsilon), \zeta_i(\theta, \varepsilon)) = (\rho_i^*(0, \varepsilon), \eta_i^*(0, \varepsilon), \xi_i^*(0, \varepsilon), \zeta_i^*(0, \varepsilon))$$

et qui sont isolées. Il existe donc 4 cycles limites.

### Preuve de l'affirmation (b) du théorème (3.1)

Pour passer la moyennisation du second ordre, il faut rendre la fonction moyennée du premier ordre identique à zéro. Alors nous devons prendre

$$\begin{aligned}
 a_{04} &= -b_{08}, & a_{02} &= -b_{06}, & a_{03} &= -b_{07}, & a_1 &= 0, \\
 c_{014} &= c_{011} = c_{013} = c_{09} = c_{010} = c_{012} = c_1 = 0, & c_{00} &= -c_{05}, \\
 A_1 &= A_{014} = A_{011} = A_{013} = A_{09} = A_{010} = A_{012} = 0, & A_{00} &= -A_{05}, \\
 B_{014} &= B_{011} = B_{013} = B_{09} = B_{010} = B_{012} = B_1 = 0, & B_{00} &= -B_{05}.
 \end{aligned}$$



En substituant ces coefficients dans les fonctions  $F_{1i}$  et  $F_{2i}$  où  $i = \overline{1..4}$ , et en calculant les secondes fonctions moyennées, on obtient :

$$\begin{aligned}
 f_{21} &= \frac{\rho}{8b^2}(I_1\rho^2 + I_2\eta\xi + I_3\xi\zeta + I_4\eta\zeta + I_5\eta + I_6\xi + I_7\zeta + I_8\zeta^2 + I_9\eta^2 + I_{10}\xi^2 + I_{11}), \\
 f_{22} &= \frac{1}{2b^2}(J_1\zeta^3 + J_2\xi^3 + J_3\eta^3 + J_4\eta\xi\zeta + J_5\rho^2\xi + J_6\rho^2\zeta + J_7\rho^2\eta + J_8\zeta^2\eta \\
 &\quad + J_9\eta^2\zeta + J_{10}\eta^2\xi + J_{11}\xi^2\zeta + J_{12}\zeta^2\xi + J_{13}\xi^2\eta + J_{14}\xi\zeta + J_{15}\eta\zeta \\
 &\quad + J_{16}\eta\xi + 2c_{112}b\xi^2 + 2bc_{19}\eta^2 + 2bc_{114}\zeta^2 + 2bc_2\eta + b(c_{10} + c_{15})\rho^2), \\
 f_{23} &= \frac{-1}{2b^2}(K_1\zeta^3 + K_2\xi^3 + K_3\eta^3 + K_4\eta\xi\zeta + K_5\rho^2\xi + K_6\rho^2\zeta + K_7\rho^2\eta \\
 &\quad + K_8\zeta^2\eta + K_9\eta^2\zeta + K_{10}\eta^2\xi + K_{11}\xi^2\zeta + K_{12}\zeta^2\xi + K_{13}\xi^2\eta \\
 &\quad - b(B_{10} + B_{15})\rho^2 - 2bB_{111}\eta\zeta - 2bB_{110}\eta\xi - 2bB_{113}\xi\zeta - 2bB_{112}\xi^2 \\
 &\quad - 2bB_{19}\eta^2 - 2bB_2\xi - 2bB_{114}\zeta^2), \\
 f_{24} &= \frac{-1}{2b^2}(M_1\zeta^3 + M_2\xi^3 + M_3\eta^3 + M_4\eta\xi\zeta + M_5\rho^2\xi + M_6\rho^2\zeta + M_7\rho^2\eta \\
 &\quad + M_8\zeta^2\eta + M_9\eta^2\zeta + M_{10}\eta^2\xi + M_{11}\xi^2\zeta + M_{12}\zeta^2\xi + M_{13}\xi^2\eta \\
 &\quad - b(A_{10} + A_{15})\rho^2 - 2bA_{19}\eta^2 - 2bA_{114}\zeta^2 - 2bA_2\zeta - 2bA_{112}\xi^2 \\
 &\quad - 2bA_{19}\eta^2 - 2bA_{110}\eta\xi - 2bA_{113}\xi\zeta - 2bA_{111}\eta\zeta),
 \end{aligned}$$

où les coefficients  $I_i$ ,  $J_j$  et  $M_j$  avec  $i = \overline{1..15}$  et  $j = \overline{0..13}$  sont grands et prennent un grand espace.

En éolvant la fonction  $f_{21} = 0$  par rapport à  $\rho^2$ , on a

$$\rho^2 = -\frac{(I_1\rho^2 + I_2\eta\xi + I_3\xi\zeta + I_4\eta\zeta + I_5\eta + I_6\xi + I_7\zeta + I_8\zeta^2 + I_9\eta^2 + I_{10}\xi^2 + I_{11})}{I_1}.$$

En substituant cette dernière dans les fonctions  $f_{2i}$  avec  $i = \overline{2..4}$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 g_1 &= I_{11}\zeta^3 + I_{12}\xi^3 + I_{13}\eta^3 + I_{14}\eta^2\xi + I_{15}\xi^2\zeta + I_{16}\eta\xi\zeta + I_{17}\eta\xi + I_{18}\xi^2 \\
 &\quad + I_{19}\xi\zeta + I_{20}\xi\zeta^2 + I_{21}\eta\xi^2 + I_{22}\eta\zeta^2 + I_{23}\eta\zeta + I_{24}\zeta^2 + I_{25}\zeta + I_{26}\eta^2\zeta \\
 &\quad + I_{27}\eta^2 + I_{28}\eta + I_{29}\xi + I_{30}, \\
 g_2 &= J_{11}\zeta^3 + J_{12}\xi^3 + J_{13}\eta^3 + J_{14}\eta^2\xi + J_{15}\xi^2\zeta + J_{16}\eta\xi\zeta + J_{17}\eta\xi + J_{18}\xi^2 \\
 &\quad + J_{19}\xi\zeta + J_{20}\xi\zeta^2 + J_{21}\eta\xi^2 + J_{22}\eta\zeta^2 + J_{23}\eta\zeta + J_{24}\zeta^2 + J_{25}\zeta + J_{26}\eta^2\zeta \\
 &\quad + J_{27}\eta^2 + J_{28}\eta + J_{29}\xi + J_{30}, \\
 g_3 &= M_{11}\zeta^3 + M_{12}\xi^3 + M_{13}\eta^3 + M_{14}\eta^2\xi + M_{15}\xi^2\zeta + M_{16}\eta\xi\zeta + M_{17}\eta\xi + M_{18}\xi^2 \\
 &\quad + M_{19}\xi\zeta + M_{20}\xi\zeta^2 + M_{21}\eta\xi^2 + M_{22}\eta\zeta^2 + M_{23}\eta\zeta + M_{24}\zeta^2 + M_{25}\zeta + M_{26}\eta^2\zeta \\
 &\quad + M_{27}\eta^2 + M_{28}\eta + M_{29}\xi + M_{30},
 \end{aligned}$$

où  $I_i, J_i$  et  $M_i$ , avec  $i = \overline{11..30}$ , sont de grands coefficients dépendant des coefficients du système (3.1). Puisque ces coefficients sont indépendants en appliquant le théorème de Bezout, nous obtenons 27 solutions périodiques.

Nous donnons maintenant un exemple de système différentiel polynomial avec des champs de vecteurs quadratiques qui ont 27 cycles limites.

**Exemple 3.2**

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\frac{1}{4}\varepsilon^2x - y - \frac{5}{8}xy - \frac{1}{2}xw - yz - \frac{1}{2}yu + yd + z^2 + uw \\
 &\quad + \varepsilon(xy - \frac{1}{4}xz - \frac{1}{8}xu) + \varepsilon^2(x^2 + xu - zu + uw), \\
 \dot{y} &= x - \frac{1}{4}\varepsilon^2y + \frac{5}{8}xy + xz - xw + \frac{1}{2}yu + z^2 - uw \\
 &\quad + \varepsilon(xy - \frac{1}{8}yu - \frac{1}{4}yw) + \varepsilon^2(xu - 2zu + uw), \\
 \dot{z} &= 2\varepsilon^2z + \frac{1}{4}xz - \frac{1}{4}yz + \varepsilon(-xz + \frac{3}{2}z^2) + \varepsilon^2(-x^2 - xu - 2zu), \\
 \dot{u} &= \frac{7}{4}\varepsilon^2u - x^2 - \frac{1}{8}xu + \frac{1}{4}xw + y^2 + \frac{1}{8}yu + \frac{1}{4}yw + \varepsilon(-xy + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}uw) \\
 &\quad + \varepsilon^2(-2x^2 + xu + zu), \\
 \dot{w} &= 3\varepsilon^2w + xy + \frac{1}{8}xu - \frac{1}{8}xw + \frac{1}{8}yu + \frac{1}{8}yw + \varepsilon(\frac{1}{4}zw - \frac{1}{4}uw \\
 &\quad + \frac{1}{4}w^2) + \varepsilon^2(-yw + z).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

*En utilisant la théorie de la moyennisation du second ordre, nous obtenons les fonctions moyennes du seconde ordre suivantes*

$$\begin{aligned}
 f_{21}(\varrho, \eta, \xi, \zeta) &= -\frac{1}{8}\varrho(-\varrho^2 + 2 + \zeta + \xi + \eta^2 + \xi^2 + \eta + 2\zeta^2) \\
 f_{22}(\varrho, \eta, \xi, \zeta) &= -\frac{1}{2}\eta(-3\eta + \eta^2 - 4) \\
 f_{23}(\varrho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{4}\xi(\zeta + \eta^2 + 2\zeta^2 + \xi + 7 - \varrho^2) \\
 f_{24}(\varrho, \eta, \xi, \zeta) &= \frac{1}{4}\zeta(-\xi + 12 + \zeta + \eta + \eta^2 + \xi^2 - \varrho^2).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

*Résolvons le système (3.7) par rapport aux variables  $\varrho, \eta, \xi$  et  $\zeta$  avec  $\varrho > 0$ , obtenons les pro-*

chaines 27 solutions

$$(\varrho_1^*, \eta_1^*, \xi_1^*, \zeta_1^*) = (\sqrt{2}, 0, 0, 0),$$

$$(\varrho_2^*, \eta_2^*, \xi_2^*, \zeta_2^*) = (\sqrt{12 + \sqrt{5}}, 0, 0, \sqrt{5}),$$

$$(\varrho_3^*, \eta_3^*, \xi_3^*, \zeta_3^*) = (\sqrt{12 - \sqrt{5}}, 0, 0, -\sqrt{5}),$$

$$(\varrho_4^*, \eta_4^*, \xi_4^*, \zeta_4^*) = (\sqrt{7 + \sqrt{5}}, 0, \sqrt{5}, 0),$$

$$(\varrho_5^*, \eta_5^*, \xi_5^*, \zeta_5^*) = (\sqrt{7 - \sqrt{5}}, 0, -\sqrt{5}, 0),$$

$$(\varrho_6^*, \eta_6^*, \xi_6^*, \zeta_6^*) = (\sqrt{2}, -1, 0, 0),$$

$$(\varrho_7^*, \eta_7^*, \xi_7^*, \zeta_7^*) = (\sqrt{22}, 4, 0, 0),$$

$$(\varrho_8^*, \eta_8^*, \xi_8^*, \zeta_8^*) = (\sqrt{24}, 4, 1, 0),$$

$$(\varrho_9^*, \eta_9^*, \xi_9^*, \zeta_9^*) = (\sqrt{22}, 4, -1, 0),$$

$$(\varrho_{10}^*, \eta_{10}^*, \xi_{10}^*, \zeta_{10}^*) = (\sqrt{34}, 4, 1, 2),$$

$$(\varrho_{11}^*, \eta_{11}^*, \xi_{11}^*, \zeta_{11}^*) = (\sqrt{30}, 4, 1, -2),$$

$$(\varrho_{12}^*, \eta_{12}^*, \xi_{12}^*, \zeta_{12}^*) = (\sqrt{12 + \sqrt{5}}, -1, 0, \sqrt{5}),$$

$$(\varrho_{13}^*, \eta_{13}^*, \xi_{13}^*, \zeta_{13}^*) = (\sqrt{12 - \sqrt{5}}, -1, 0, -\sqrt{5}),$$

$$(\varrho_{14}^*, \eta_{14}^*, \xi_{14}^*, \zeta_{14}^*) = (\sqrt{32 + \sqrt{5}}, 4, 0, \sqrt{5}),$$

$$(\varrho_{15}^*, \eta_{15}^*, \xi_{15}^*, \zeta_{15}^*) = (\sqrt{32 - \sqrt{5}}, 4, 0, -\sqrt{5}),$$

$$(\varrho_{16}^*, \eta_{16}^*, \xi_{16}^*, \zeta_{16}^*) = (\sqrt{34 + \sqrt{6}}, 4, -1, \sqrt{6}),$$

$$(\varrho_{17}^*, \eta_{17}^*, \xi_{17}^*, \zeta_{17}^*) = (\sqrt{34 - \sqrt{6}}, 4, -1, -\sqrt{6}),$$

$$(\varrho_{18}^*, \eta_{18}^*, \xi_{18}^*, \zeta_{18}^*) = (\sqrt{8 + \sqrt{6}}, -1, \sqrt{6}, 0),$$

$$(\varrho_{19}^*, \eta_{19}^*, \xi_{19}^*, \zeta_{19}^*) = (\sqrt{8 - \sqrt{6}}, -1, -\sqrt{6}, 0),$$

$$(\varrho_{20}^*, \eta_{20}^*, \xi_{20}^*, \zeta_{20}^*) = \left( \sqrt{17 - \sqrt{5} + \sqrt{5 - \sqrt{5}}}, 0, \sqrt{5}, \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right),$$

$$(\varrho_{21}^*, \eta_{21}^*, \xi_{21}^*, \zeta_{21}^*) = \left( \sqrt{17 - \sqrt{5} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}, 0, \sqrt{5}, -\sqrt{5 - \sqrt{5}} \right),$$

$$(\varrho_{22}^*, \eta_{22}^*, \xi_{22}^*, \zeta_{22}^*) = \left( \sqrt{17 + \sqrt{5} + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}, 0, -\sqrt{5}, \sqrt{5 + \sqrt{5}} \right),$$

$$(\varrho_{23}^*, \eta_{23}^*, \xi_{23}^*, \zeta_{23}^*) = \left( \sqrt{17 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + \sqrt{5}}}, 0, -\sqrt{5}, -\sqrt{5 + \sqrt{5}} \right),$$

$$(\varrho_{24}^*, \eta_{24}^*, \xi_{24}^*, \zeta_{24}^*) = \left( \sqrt{18 - \sqrt{6} + \sqrt{5 - \sqrt{6}}}, -1, \sqrt{6}, \sqrt{5 - \sqrt{6}} \right),$$

$$(\varrho_{25}^*, \eta_{25}^*, \xi_{25}^*, \zeta_{25}^*) = \left( \sqrt{18 - \sqrt{6} - \sqrt{5 - \sqrt{6}}}, -1, \sqrt{6}, -\sqrt{5 - \sqrt{6}} \right),$$

$$(\varrho_{26}^*, \eta_{26}^*, \xi_{26}^*, \zeta_{26}^*) = \left( \sqrt{18 + \sqrt{6} + \sqrt{5 + \sqrt{6}}}, -1, -\sqrt{6}, \sqrt{5 + \sqrt{6}} \right),$$

$$(\varrho_{27}^*, \eta_{27}^*, \xi_{27}^*, \zeta_{27}^*) = \left( \sqrt{18 + \sqrt{6}} - \sqrt{5 + \sqrt{6}}, -1, -\sqrt{6}, -\sqrt{5 + \sqrt{6}} \right).$$

Les déterminants

$$D_i = \det \left( \frac{\partial(f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24})}{\partial(\rho, \eta, \xi, \zeta)} \Big|_{(\rho, \eta, \xi, \zeta) = (\rho^*, \eta^*, \xi^*, \zeta^*)} \right) \quad (3.8)$$

évalué respectivement en  $(\rho_i^*, \eta_i^*, \xi_i^*, \zeta_i^*)$  avec  $i = \overline{1..27}$  sont égales :  $\frac{25}{8}, -\frac{75}{2} \pm \frac{25}{8}\sqrt{5}, -\frac{75}{4} \mp \frac{5}{4}\sqrt{5}, -\frac{75}{16}, -\frac{275}{8}, 60, \frac{165}{2}, -170, -150, \frac{225}{4} \mp \frac{75}{16}\sqrt{5}, 100 \mp \frac{25}{8}\sqrt{5}, -255 \pm \frac{15}{2}\sqrt{6}, \frac{255}{8} \pm \frac{45}{16}\sqrt{6}, \pm \frac{5}{4}\sqrt{5}\sqrt{5 - \sqrt{5}} + \frac{225}{2} - \frac{55}{2}\sqrt{5} \mp \frac{25}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}}, \mp \frac{5}{4}\sqrt{5}\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \frac{225}{2} + \frac{55}{2}\sqrt{5} \mp \frac{25}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5}}, \mp \frac{15}{8}\sqrt{6}\sqrt{5 - \sqrt{6}} - 180 + \frac{345}{8}\sqrt{6} \pm \frac{75}{8}\sqrt{5 - \sqrt{6}}, \pm \frac{15}{8}\sqrt{6}\sqrt{5 + \sqrt{6}} - 180 - \frac{345}{8}\sqrt{6} \pm \frac{75}{8}\sqrt{5 + \sqrt{6}}$ . . Puisque tous ces déterminants sont différents de zéro, il y a 27 cycles limites.

## CHAPITRE

### 4

# BIFURCATION DE HOPF POUR UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUADRATIQUE EN DIMENSION 4

Dans ce chapitre, nous appliquons la théorie de moyennisation d'ordre trois à un système différentiel polynomial quadratique dans  $\mathbb{R}^4$  pour étudier la bifurcation de Hopf qui se produit à l'origine pour ce type de système. On prouve qu'au plus 25 cycles limites peuvent bifurquer par bifurcation de Hopf d'un point d'équilibre ayant des valeurs propres de la forme  $\pm bi$  et  $(0, 0)$ . De plus, on donnera un exemple d'un système différentiel polynomial quadratique pour lequel exactement 9 cycles limites bifurquent de l'origine par la méthode de moyennisation de second ordre. Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal "*Dynamical and Control Systems (2020)*".

## 4.1 Nombre maximum de cycles limites obtenus par bifurcation de zero-Hopf pour un système différentiel quadratique dans $\mathbb{R}^4$ par la théorie de moyennisation d'ordre trois

### MAXIMUM DE CYCLES LIMITES OBTENUS PAR BIFURCATION DE HOPF

On étudie dans ce chapitre la bifurcation de Hopf pour des champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^4$ . On s'intéresse à l'étude du nombre maximum de cycles limites obtenus par une bifurcation de zero-Hopf autour de l'origine d'un système quadratique dans  $\mathbb{R}^4$ . En général, la bifurcation de zero-Hopf est étudiée pour des points singuliers ayant des valeurs propres de la forme  $\alpha(\varepsilon) \pm \beta(\varepsilon)i$  avec  $\alpha(0) = 0$  et  $\alpha'(0) \neq 0$ . La bifurcation de Hopf des cycles limites a été considérée par plusieurs auteurs, voir [34, 35, 37]. Dans notre travail, on considère des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques dans  $\mathbb{R}^4$ , dont la partie linéaire du point d'équilibre à l'origine  $(0, 0, 0, 0)$  a des valeurs propres de la forme  $(a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3) \pm i(b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3)$ ,  $c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3$  et  $d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + d_3\varepsilon^3$ , où  $\varepsilon$  est un petit paramètre.

Le système étudié est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)x - (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j X_j(x, y, z, w), \\ \dot{y} = (b + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3)x + (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3)y + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Y_j(x, y, z, w), \\ \dot{z} = (c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3)z + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j Z_j(x, y, z, w), \\ \dot{w} = (d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + d_3\varepsilon^3)w + \sum_{j=0}^2 \varepsilon^j W_j(x, y, z, w), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où

$$\begin{aligned} X_j(x, y, z, w) &= a_{j0}x^2 + a_{j1}xy + a_{j2}xz + a_{j3}xw + a_{j4}y^2 \\ &\quad + a_{j5}yz + a_{j6}yw + a_{j7}z^2 + a_{j8}zw + a_{j9}w^2, \end{aligned}$$

$Y_j(x, y, z, w)$ ,  $Z_j(x, y, z, w)$  et  $W_j(x, y, z, w)$  ont la même expression que  $X_j(x, y, z, w)$  en remplaçant  $a_{ji}$  respectivement par  $b_{ji}$ ,  $c_{ji}$  et  $d_{ji}$  pour  $j = 0, 1, 2$  et  $i = 0, 1, \dots, 9$ . Les co-

efficients  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$  sont des paramètres réels avec  $b \neq 0$ .

L'objectif de cette partie, consiste á utiliser la théorie de moyennisation d'ordre trois, pour étudier la bifurcation de Hopf pour des champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^4$ . On obtient un résultat sur le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent de l'origine du système différentiel polynomial quadratique (4.1).

Notre résultat est le suivant

**Théorème 4.1** *En appliquant la théorie de moyennisation d'ordre trois, on obtient 25 cycles limites bifurquant de l'origine du système (4.1) quand  $\varepsilon = 0$ .*

**Preuve**

En posant  $(x, y, z, w) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, \varepsilon W)$  et en passant aux coordonnées cylindriques  $(X, Y, Z, W) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \eta, \xi)$ , et de plus, en considérant  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, le système (4.1) devient

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^3 F_{31}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{d\eta}{d\theta} = \varepsilon F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^3 F_{32}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{d\xi}{d\theta} = \varepsilon F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^2 F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi) + \varepsilon^3 F_{33}(\theta, \rho, \eta, \xi) + O(\varepsilon^4), \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$\begin{aligned} x &= (\rho, \eta, \xi), \\ t &= \theta, \\ F_1(t, x) &= (F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi), F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi), F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi)), \\ F_2(t, x) &= (F_{21}(\theta, \rho, \eta, \xi), F_{22}(\theta, \rho, \eta, \xi), F_{23}(\theta, \rho, \eta, \xi)), \\ F_3(t, x) &= (F_{31}(\theta, \rho, \eta, \xi), F_{32}(\theta, \rho, \eta, \xi), F_{33}(\theta, \rho, \eta, \xi)), \end{aligned}$$

et  $T = 2\pi$ . Le système (4.2) obtenu est sous la forme standard relativement la théorie de moyennisation.

Appliquons la théorie de moyennisation d'ordre un et commençons par calculer la fonction moyennée suivante

$$f_{1i}(\rho, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{1i}(\theta, \rho, \xi) d\theta,$$

pour  $i = 1, 2, 3$ . On obtient

$$\begin{cases} f_{11}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{b}(\rho(2a_1 + (a_{03} + b_{06})\xi + (a_{02} + b_{05})\eta)) = 0, \\ f_{12}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{b}((c_{00} + c_{04})\rho^2 + 2(c_{09}\xi^2 + \eta(c_1 + c_{08}\xi + c_{07}\eta))) = 0, \\ f_{13}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{b}((d_{00} + d_{04})\rho^2 + 2(\xi(d_1 + d_{09}\xi) + d_{08}\xi\eta + d_{07}\eta^2)) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce système a deux racines positives simples induisent, pour le système (4.3) deux cycles limites qui bifurquent de l'origine.

Pour appliquer la théorie de moyennisation d'ordre deux, on annule  $(f_{11}(\rho, \eta, \xi), f_{12}(\rho, \eta, \xi), f_{13}(\rho, \eta, \xi))$  et pour ceci on considère

$$\begin{aligned} a_1 = d_1 = c_1 = 0, \quad b_{06} = -a_{03}, \quad b_{05} = -a_{02}, \quad c_{09} = c_{08} = c_{07} = 0, \\ d_{04} = -d_{00}, \quad d_{09} = d_{08} = d_{07} = 0, \quad c_{04} = -c_{00}. \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule l'expression suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{13}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^s F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \\ \int_0^s F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \\ \int_0^s F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{21}(s, \rho, \eta, \xi) \\ F_{22}(s, \rho, \eta, \xi) \\ F_{23}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix}.$$

On intègre cette expression entre 0 et  $2\pi$  et on la divise par  $2\pi$ , on obtient le système suivant

$$\begin{cases} f_{21}(\rho, \eta, \xi) = \frac{\rho}{8b^2}(U_0 + U_1\rho^2 + U_2\xi + U_3\xi^2 + U_4\eta + U_5\xi\eta + U_6\eta^2), \\ f_{22}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{2b^2}(V_0\rho^2 + V_1\rho^2\xi + V_2\xi^2 + V_3\xi^3 + V_4\eta + V_5\rho^2\eta \\ + V_6\xi\eta + V_7\xi^2\eta + V_8\eta^2 + V_9\xi\eta^2 + V_{10}\eta^3), \\ f_{23}(\rho, \eta, \xi) = \frac{1}{2b^2}(W_0\rho^2 + W_1\xi + W_2\rho^2\xi + W_3\xi^2 + W_4\xi^3 + W_5\rho^2\eta \\ + W_6\xi\eta + W_7\xi^2\eta + W_8\eta^2 + W_9\xi\eta^2 + W_{10}\eta^3), \end{cases} \quad (4.4)$$

où

$$U_0 = 8a_2b,$$

$$U_1 = a_{00}a_{01} + a_{01}a_{04} - 2a_{00}b_{00} - b_{00}b_{01} + 2a_{04}b_{04} - b_{01}b_{04} + a_{05}c_{00} + b_{02}c_{00} - a_{02}c_{01} + a_{06}d_{00} + b_{03}d_{00} - a_{03}d_{01},$$



$$U_2 = 4b(a_{13} + b_{16}),$$

$$U_3 = 4(a_{01}a_{09} + 2a_{09}b_{04} - 2a_{00}b_{09} - b_{01}b_{09} + b_{08}c_{03} - a_{08}c_{06} + 2b_{09}d_{03} - 2a_{09}d_{06}),$$

$$U_4 = 4b(a_{12} + b_{15}),$$

$$U_5 = 4(a_{01}a_{08} + 2a_{08}b_{04} - 2a_{00}b_{08} - b_{01}b_{08} + b_{08}c_{02} + 2b_{07}c_{03} - a_{08}c_{05} - 2a_{07}c_{06} + 2b_{09}d_{02} + b_{08}d_{03} - 2a_{09}d_{05} - a_{08}d_{06}),$$

$$U_6 = 4(a_{01}a_{07} + 2a_{07}b_{04} - 2a_{00}b_{07} - b_{01}b_{07} + 2b_{07}c_{02} - 2a_{07}c_{05} + b_{08}d_{02} - a_{08}d_{05}),$$

et

$$V_0 = b(c_{10} + c_{14}),$$

$$V_1 = -(a_{06}c_{00} + b_{03}c_{00} - a_{03}c_{01} + b_{00}c_{03} + b_{04}c_{03} - c_{03}c_{05} - a_{00}c_{06} - a_{04}c_{06} + c_{02}c_{06} - c_{06}d_{03} + c_{03}d_{06}),$$

$$V_2 = 2bc_{19},$$

$$V_3 = -2(b_{09}c_{03} - a_{09}c_{06}),$$

$$V_4 = 2bc_2,$$

$$V_5 = -(a_{05}c_{00} + b_{02}c_{00} - a_{02}c_{01} + b_{00}c_{02} + b_{04}c_{02} - a_{00}c_{05} - a_{04}c_{05} - c_{06}d_{02} + c_{03}d_{05}),$$

$$V_6 = bc_{18},$$

$$V_7 = -2(b_{09}c_{02} + b_{08}c_{03} - a_{09}c_{05} - a_{08}c_{06}),$$

$$V_8 = 2bc_{17},$$

$$V_9 = -2(b_{08}c_{02} + b_{07}c_{03} - a_{08}c_{05} - a_{07}c_{06}),$$

$$V_{10} = -2(b_{07}c_{02} - a_{07}c_{05}),$$

et

$$W_0 = b(d_{10} + d_{14}),$$

$$W_1 = 2bd_2,$$

$$W_2 = -(a_{06}d_{00} + b_{03}d_{00} - a_{03}d_{01} + c_{06}d_{02} + b_{00}d_{03} + b_{04}d_{03} - c_{03}d_{05} - a_{00}d_{06} - a_{04}d_{06}),$$

$$W_3 = 2bd_{19},$$

$$W_4 = -2(b_{09}d_{03} - a_{09}d_{06}),$$

$$W_5 = -(a_{05}d_{00} + b_{02}d_{00} - a_{02}d_{01} + b_{00}d_{02} + b_{04}d_{02} + c_{05}d_{02} - a_{00}d_{05} - a_{04}d_{05} - c_{02}d_{05} + d_{03}d_{05} - d_{02}d_{06}),$$

$$W_6 = 2bd_{18},$$

$$W_7 = -2(b_{09}d_{02} + b_{08}d_{03} - a_{09}d_{05} - a_{08}d_{06}),$$

$$W_8 = 2bd_{17},$$

$$W_9 = -2(b_{08}d_{02} + b_{07}d_{03} - a_{08}d_{05} - a_{07}d_{06}),$$

$$W_{10} = -2(b_{07}d_{02} - a_{07}d_{05})\eta^3.$$

Donc, à partir de la première équation du système (4.4) et en évitant les solutions avec

$\rho = 0$ , on isole  $\rho^2$  et on le substitue dans  $f_{2i}(\rho, \eta, \xi) = 0$  pour  $i = 2, 3$ . Ainsi on obtient les deux équations suivantes

$$\begin{cases} g_{21} = C_0 + C_1\eta + C_2\xi + C_3\eta^2 + C_4\eta\xi + C_5\xi^2 + C_6\eta^3 + C_7\eta^2\xi + C_8\eta\xi^2 + C_9\xi^3, \\ g_{22} = D_0 + D_1\eta + D_2\xi + D_3\eta^2 + D_4\eta\xi + D_5\xi^2 + D_6\eta^3 + D_7\eta^2\xi + D_8\eta\xi^2 + D_9\xi^3, \end{cases}$$

où  $C_i$  et  $D_i$  pour  $i = 0, \dots, 9$  sont des constantes réels.

$$C_0 = \frac{-V_0U_0}{U_1},$$

$$C_1 = \frac{-V_0U_4 - V_5U_0 + V_4U_1}{U_1},$$

$$C_2 = \frac{-V_0U_2 - V_1U_0}{U_1},$$

$$C_3 = \frac{-V_0U_6 - V_5U_4 + V_8U_1}{U_1},$$

$$C_4 = \frac{V_6U_1 - V_0U_5 - V_1U_4 - V_5U_2}{U_1},$$

$$C_5 = \frac{-V_0U_3 - V_1U_2 + V_2U_1}{U_1},$$

$$C_6 = \frac{-V_5U_6 + V_{10}U_1}{U_1},$$

$$C_7 = \frac{-V_1U_6 - V_5U_5 + V_9U_1}{U_1},$$

$$C_8 = \frac{-V_1U_5 - V_5U_3 + V_7U_1}{U_1},$$

$$C_9 = \frac{-V_1U_3 + V_3U_1}{U_1},$$

et

$$D_0 = \frac{-W_0U_0}{U_1},$$

$$D_1 = \frac{-W_0U_4 - W_5U_0}{U_1},$$

$$D_2 = \frac{-W_0U_2 - W_2U_0 + W_1U_1}{U_1},$$

$$D_3 = \frac{-W_0U_6 - W_5U_4 + W_8U_1}{U_1},$$

$$D_4 = \frac{W_6U_1 - W_0U_5 - W_2U_4 - W_5U_2}{U_1},$$

$$D_5 = \frac{-W_0U_3 - W_2U_2 + W_3U_1}{U_1},$$

$$D_6 = \frac{-W_5U_6 + W_{10}U_1}{U_1},$$

$$D_7 = \frac{-W_2U_6 - W_5U_5 + W_9U_1}{U_1},$$

$$D_8 = \frac{-W_2U_5 - W_5U_3 + W_7U_1}{U_1},$$

$$D_9 = \frac{-W_2U_3 + W_4U_1}{U_1}.$$

Puisque tous les coefficients des deux équations  $g_{21}(\eta, \xi) = 0$  et  $g_{22}(\eta, \xi) = 0$  sont indépendants, ils peuvent être choisis de manière arbitraire. D'après le théorème de Bezout, le système  $g_{21}(\eta, \xi) = 0$ ,  $g_{22}(\eta, \xi) = 0$  a neuf racines réelles, et le système (4.4) a neuf racines réelles avec  $\rho > 0$ .

**Exemple 4.1** *Considérons le système différentiel polynomial quadratique dans  $\mathbb{R}^4$*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2\varepsilon^2 x - y - x^2 + yz + 2xz - 2xw - yw + \frac{1}{2}zw \\ \quad + \varepsilon(z^2 - xz + xw) + \varepsilon^2(x^2 - yz), \\ \frac{dy}{dt} = -2\varepsilon^2 y + x - 2yz + xz + xw + 2yw + zw + \varepsilon(xy - yz + yw) \\ \quad + \varepsilon^2(xz + yw), \\ \frac{dz}{dt} = 12\varepsilon^2 z - 2x^2 - 2y^2 - 2xz - 4xw + \varepsilon(x^2 - y^2 + 8z^2 - 2zw) + \varepsilon^2 z^2, \\ \frac{dw}{dt} = 24\varepsilon^2 w + 2x^2 - 2y^2 + 2xy - 2xz - 2xw + \varepsilon(-2w^2 - 2zw) \\ \quad + \varepsilon^2(x^2 + xw). \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Le système (5.11) a un seul point critique qui est l'origine  $(0, 0, 0, 0)$ , et les valeurs propres en ce point sont  $-2\varepsilon^2 \pm i$ ,  $12\varepsilon^2$  et  $24\varepsilon^2$ . En utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux pour le système (5.11) et on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{21}(\rho, \eta, \xi) = \rho(-2 - \eta + \xi - \eta^2 - 2\xi^2 + \rho^2 - \eta\xi) = 0, \\ f_{22}(\rho, \eta, \xi) = 12\eta + 8\eta^2 - 2\eta\xi + 4\xi^2\eta + 2\xi\eta^2 - 2\rho^2\eta = 0, \\ f_{23}(\rho, \eta, \xi) = 24\xi - 2\xi^2 - 2\eta\xi + 2\xi^2\eta + 2\xi\eta^2 - 2\rho^2\xi = 0. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Maintenant pour déterminer les cycles limites, on résout le système (4.6), et on obtient

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sqrt{2}, 0, 0), \quad P_2 = (\sqrt{12 - \sqrt{5}}, 0, \sqrt{5}), \quad P_3 = (\sqrt{12 + \sqrt{5}}, 0, -\sqrt{5}), \\ P_4 &= (\sqrt{22}, 4, 0), \quad P_5 = (\sqrt{27}, 4, 1), \quad P_6 = (\sqrt{14 - 2\sqrt{6}}, -1, \sqrt{6}), \\ P_7 &= (\sqrt{14 + 2\sqrt{6}}, -1, -\sqrt{6}), \quad P_8 = (\sqrt{2}, -1, 0), \quad P_9 = (\sqrt{21}, 4, -1). \end{aligned}$$

On vérifie que le déterminant

$$D(\bar{\rho}, \bar{\eta}, \bar{\xi}) = \det \begin{pmatrix} -2 - \bar{\eta} + \bar{\xi} - \bar{\eta}^2 & & & \\ -2\bar{\xi}^2 + 3\bar{\rho}^2 - \bar{\eta}\bar{\xi} & \bar{\rho}(-1 - 2\bar{\eta} - \bar{\xi}) & \bar{\rho}(1 - 4\bar{\xi} - \bar{\eta}) & \\ & -4\bar{\rho}\bar{\eta} & 12 + 16\bar{\eta} - 2\bar{\xi} + 4\bar{\xi}^2 + 4\bar{\xi}\bar{\eta} - 2\bar{\rho}^2 & -2\bar{\eta} + 8\bar{\xi}\bar{\eta} + 2\bar{\eta}^2 \\ & -4\bar{\rho}\bar{\xi} & -2\bar{\xi} + 2\bar{\xi}^2 + 4\bar{\xi}\bar{\eta} & 24 - 4\bar{\xi} - 2\bar{\eta} + 4\bar{\xi}\bar{\eta} \\ & & & +2\bar{\eta}^2 - 2\bar{\rho}^2 \end{pmatrix},$$

calculé en ces racines est non nul.

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_1} &= 640 \neq 0, \det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_{23}} = -7680 \pm 640\sqrt{5} \neq 0, \\ \det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_4} &= -7040 \neq 0, \det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_5} = 17280 \neq 0, \\ \det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_{67}} &= 13440 \pm 1920\sqrt{6} \neq 0, \det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_8} = -960 \neq 0, \\ \det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{13})}{\partial(\rho, \eta, \xi)} \right) \Big|_{P_9} &= 13440 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc, le système (5.11) a exactement neuf cycles limites qui bifurquent de l'origine.

**Le travail qui suit, et qui représente à notre contribution principale, a pour d'étudier les cycles limites en appliquant la théorie de moyennisation d'ordre trois.**

Pour ce faire, on annule le système moyenné du second ordre  $(f_{21}(\rho, \eta, \xi), f_{22}(\rho, \eta, \xi), f_{23}(\rho, \eta, \xi))$ , et on pose

$$\begin{aligned} a_2 = c_2 = d_2 = 0, \quad a_{00} = a_{04} = a_{07} = a_{08} = a_{09} = 0, \quad a_{05} = -b_{02}, \quad a_{13} = -b_{16}, \\ b_{07} = b_{08} = b_{09} = 0, \quad a_{06} = -b_{03}, \quad a_{06} = -b_{03}, \quad b_{00} = -b_{04}, \quad a_{12} = -b_{15}, \\ c_{01} = c_{03} = c_{06} = 0, \quad d_{01} = d_{02} = d_{05} = 0, \quad c_{14} = -c_{10}, \quad d_{14} = -d_{10}. \\ c_{17} = c_{18} = c_{19} = 0, \quad d_{17} = d_{18} = d_{19} = 0. \end{aligned}$$

Pour appliquer la théorie de moyennisation d'ordre trois, on calcule d'abord les trois quantités suivantes :

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \left( y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \quad y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \quad y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \rho \partial \eta} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \rho \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \eta \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \eta \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 F_{11}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \end{array} \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial \eta} \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \right) \cdot \begin{pmatrix} y_{21}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{22}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{23}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \end{array} \right] + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{21}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{21}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{21}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix}$$

$$+ F_{31}(s, \rho, \eta, \xi),$$

et

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \left( y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \quad y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \quad y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \rho \partial \eta} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \rho \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \eta \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \eta \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 F_{12}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \end{array} \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} \quad \frac{\partial F_{12}}{\partial \eta} \quad \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \right) \cdot \begin{pmatrix} y_{21}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{22}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{23}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \end{array} \right] + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{22}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{22}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{22}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix}$$

$$+ F_{32}(s, \rho, \eta, \xi),$$

et

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) & y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) & y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \rho \partial \eta} & \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \rho \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \eta \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \eta \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \xi \partial \rho} & \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 F_{13}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \right] +$$

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{13}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{21}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{22}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{23}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{23}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{23}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{23}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix}$$

$$+ F_{33}(s, \rho, \eta, \xi),$$

où

$$\begin{pmatrix} y_{11}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{12}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{13}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^s F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \\ \int_0^s F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \\ \int_0^s F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{21}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{22}(s, \rho, \eta, \xi) \\ y_{23}(s, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} = \left( \int_0^s \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_{13}}{\partial \rho} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \eta} & \frac{\partial F_{13}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^t F_{11}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \\ \int_0^t F_{12}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \\ \int_0^t F_{13}(\theta, \rho, \eta, \xi) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{21}(t, \rho, \eta, \xi) \\ F_{22}(t, \rho, \eta, \xi) \\ F_{23}(t, \rho, \eta, \xi) \end{pmatrix} \right] dt \right)$$

Ensuite, en intégrant ces trois quantités entre 0 et en  $2\pi$  et divisant par  $2\pi$ , on obtient

le système moyenné

$$\left\{ \begin{aligned} f_{31}(\rho, \eta, \xi) &= \frac{1}{8b^3} \rho (8a_3 b^2 + A_1 \eta + A_2 \xi + A_3 \xi^2 + A_4 \eta^2 + A_5 \eta \xi \\ &\quad + A_6 \rho^2 + A_7 \rho^2 \eta + A_8 \rho^2 \xi), \\ f_{32}(\rho, \eta, \xi) &= \frac{1}{8b^3} (8c_3 \eta b^2 + B_1 \rho^2 \xi + B_2 \rho^2 \eta + B_3 \eta^2 + B_4 \xi^2 + B_5 \eta^4 \\ &\quad + B_6 \eta \xi + B_7 \rho^2 \eta \xi + B_8 \rho^2 + B_9 \eta^3 + B_{10} \rho^2 \eta^2 + B_{11} \eta \xi^2 + B_{12} \eta^2 \xi), \\ f_{33}(\rho, \eta, \xi) &= \frac{1}{8b^3} (8d_3 \xi b^2 + K_1 \eta \xi + K_2 \rho^4 + K_3 \rho^2 \eta + K_4 \rho^2 \eta \xi + K_5 \rho^2 \xi^2 \\ &\quad + K_6 \eta^2 \xi + K_7 \eta \xi^2 + K_8 \xi^2 + K_9 \eta^2 + K_{10} \rho^2 \xi + K_{11} \xi^3 + K_{12} \rho^2), \end{aligned} \right. \quad (4.7)$$

où

$$A_1 = 4(b_{25}b^2 + a_{22}b^2),$$

$$A_2 = 4(b_{26}b^2 + a_{23}b^2),$$

$$A_3 = -4b_{19}b_{01}b + 4a_{19}a_{01}b + 8d_{03}b_{19}b - 8d_{06}a_{19}b + 8b_{04}a_{19}b,$$

$$A_4 = -4b_{17}b_{01}b + 4a_{17}a_{01}b + 8c_{02}b_{17}b - 8c_{05}a_{17}b + 8b_{04}a_{17}b,$$

$$A_5 = -4a_{18}c_{05}b + 4b_{18}c_{02}b + 4d_{03}b_{18}b - 4d_{06}a_{18}b + 8b_{04}a_{18}b + 4a_{18}a_{01}b - 4b_{18}b_{01}b,$$

$$A_6 = d_{00}a_{16}b + d_{00}b_{13}b - a_{02}c_{11}b + c_{00}b_{12}b + a_{14}a_{01}b + 2a_{14}b_{04}b + 2b_{04}a_{10}b + a_{10}a_{01}b \\ - b_{14}b_{01}b - b_{10}b_{01}b - a_{03}d_{11}b + c_{00}a_{15},$$

$$A_7 = a_{02}c_{05}^2 - a_{02}c_{02}^2 + a_{02}a_{01}^2 - a_{02}b_{01}^2 + c_{05}b_{01}b_{02} + 2a_{02}a_{01}b_{04} + 2a_{02}c_{02}b_{01} \\ - 2a_{02}c_{05}b_{04} - 2a_{02}c_{05}a_{01} - a_{01}c_{02}b_{02} - 2b_{02}c_{02}b_{04},$$

$$A_8 = -a_{03}d_{03}^2 + a_{03}d_{06}^2 + a_{03}a_{01}^2 - a_{03}b_{01}^2 + d_{06}b_{01}b_{03} + 2a_{03}a_{01}b_{04} + 2a_{03}d_{03}b_{01} \\ - 2a_{03}d_{06}b_{04} - 2a_{03}d_{06}a_{01} - a_{01}d_{03}b_{03} - 2b_{03}d_{03}b_{04},$$

et

$$B_1 = -4b_{13}c_{00}b - 4a_{16}c_{00}b - 4c_{02}c_{16}b + 4c_{13}c_{05}b + 4a_{03}c_{11}b + 4d_{03}c_{16}b - 4d_{06}c_{13}b,$$

$$B_2 = -4b_{12}c_{00}b - 4a_{15}c_{00}b + 4c_{05}a_{10}b - 4b_{14}c_{02}b - 4b_{10}c_{02}b + 4a_{02}c_{11}b + 4c_{05}a_{14}b,$$

$$B_3 = 8c_{27}b^2,$$

$$B_4 = 8c_{29}b^2,$$

$$B_5 = -c_{00}c_{02}^2 + c_{00}c_{05}^2 + b_{01}c_{00}c_{02} - a_{01}c_{00}c_{05},$$

$$B_6 = 8c_{28}b^2,$$

$$B_7 = 4d_{06}b_{03}c_{02} - 4a_{03}b_{01}c_{02} + 4a_{03}c_{02}d_{03} + 4a_{03}a_{01}c_{05} - 4a_{03}d_{06}c_{05} - 4b_{03}c_{05}d_{03},$$

$$B_8 = 4c_{20}b^2 + 4c_{24}b^2,$$

$$B_9 = 8a_{17}c_{05}b - 8b_{17}c_{02}b,$$

$$B_{10} = 4a_{02}c_{02}^2 - 4a_{02}c_{05}^2 - 4b_{01}c_{02}a_{02} + 4a_{01}a_{02}c_{05},$$

$$B_{11} = 8a_{19}c_{05}b - 8b_{19}c_{02}b,$$

$$B_{12} = 8a_{18}c_{05}b - 8b_{18}c_{02}b,$$

et

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 8d_{28}b^2, \\
 K_2 &= -d_{00}d_{03}^2 + d_{00}d_{06}^2 + b_{01}d_{00}d_{03} - a_{01}d_{00}d_{06}, \\
 K_3 &= -4b_{12}d_{00}b - 4a_{15}d_{00}b - 4d_{03}d_{15}b + 4d_{12}d_{06}b + 4a_{02}d_{11}b + 4c_{02}d_{15}b - 4c_{05}d_{12}b, \\
 K_4 &= -4d_{06}b_{02}c_{02} + 4a_{02}d_{03}c_{02} + 4a_{01}a_{02}d_{06} + 4b_{02}d_{03}c_{05} - 4a_{02}d_{06}c_{05} - 4b_{01}a_{02}d_{03}, \\
 K_5 &= 4a_{03}d_{03}^2 - 4a_{03}d_{06}^2 - 4b_{01}d_{03}a_{03} + 4a_{01}a_{03}d_{06}, \\
 K_6 &= 8a_{17}d_{06}b - 8b_{17}d_{03}b, \\
 K_7 &= 8a_{18}d_{06}b - 8b_{18}d_{03}b, \\
 K_8 &= 8d_{29}b^2, \\
 K_9 &= 8d_{27}b^2, \\
 K_{10} &= -4b_{13}d_{00}b - 4a_{16}d_{00}b + 4d_{06}a_{10}b - 4b_{14}d_{03}b - 4b_{10}d_{03}b + 4a_{03}d_{11}b + 4d_{06}a_{14}b, \\
 K_{11} &= 8a_{19}d_{06}b - 8b_{19}d_{03}b, \\
 K_{12} &= 4d_{20}b^2 + 4d_{24}b^2.
 \end{aligned}$$

Pour trouver les cycles limites, on résout le système

$$\begin{cases} f_{31}(\rho, \eta, \xi) = 0, \\ f_{32}(\rho, \eta, \xi) = 0, \\ f_{33}(\rho, \eta, \xi) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

En résolvant la première équation par rapport à  $\rho$ , en considérant  $\rho > 0$ , on obtient les deux solutions

$$\rho^2 = -\frac{A_4\eta^2 + A_3\xi^2 + A_1\eta + A_2\xi + A_5\eta\xi + 8a_3b^2}{A_6 + A_8\xi + A_7\eta}.$$

En remplaçant  $\rho^2$  dans  $f_{3i}(\rho, \eta, \xi) = 0$  pour  $i = 2, 3$ , on obtient le système suivant

$$\begin{cases} g_{31} = \frac{1}{8(A_6 + A_7\eta + A_8\xi)^2b^3} (I_0 + I_1\xi\eta + I_2\eta^2\xi + I_3\eta\xi^2 + I_4\eta^2 + I_5\eta^4 + I_6\xi^2 + I_7\xi^4 \\ + I_8\eta^3 + I_9\eta^5 + I_{10}\eta + I_{11}\xi^3 + I_{12}\eta^2\xi^2 + I_{13}\eta^3\xi + I_{14}\eta\xi^3 + I_{15}\xi + I_{16}\eta^3\xi^2 \\ + I_{17}\eta\xi^4 + I_{18}\eta^4\xi + I_{19}\eta^2\xi^3), \\ g_{32} = \frac{1}{8(A_6 + A_7\eta + A_8\xi)^2b^3} (J_0 + J_1\xi\eta + J_2\eta\xi^2 + J_3\eta^2\xi + J_4\eta^3 + J_5\xi^3 + J_6\eta^2\xi^2 \\ + J_7\eta^2 + J_8\eta^4 + J_9\xi^4 + J_{10}\xi^5 + J_{11}\eta^4\xi + J_{12}\eta^2\xi^3 + J_{13}\eta^3\xi^2 + J_{14}\eta\xi^4 \\ + J_{15}\xi^2 + J_{16}\eta + J_{17}\xi + J_{18}\eta^3\xi + J_{19}\eta\xi^3), \end{cases}$$



où

$$\begin{aligned}
 I_0 &= 64B_5a_3^2b^4 - 8B_8a_3b^2A_6, \\
 I_1 &= 16c_3b^2A_6A_8 - 8B_1a_3b^2A_7 - 8B_2a_3b^2A_8 + 16B_5a_3b^2A_5 - 8B_7a_3b^2A_6 + B_6A_6^2 \\
 &\quad - B_1A_1A_6 + 2B_5A_1A_2 - B_2A_2A_6 - B_8A_1A_8 - B_8A_2A_7 - B_8A_5A_6, \\
 I_2 &= 16c_3b^2A_7A_8 - 8B_7a_3b^2A_7 - 8B_{10}a_3b^2A_8 + B_{12}A_6^2 - B_{10}A_2A_6 - B_1A_1A_7 \\
 &\quad - B_1A_4A_6 - B_2A_1A_8 - B_2A_2A_7 - B_2A_5A_6 + 2B_3A_6A_8 + 2B_5A_1A_5 + 2B_5A_2A_4 \\
 &\quad + 2B_6A_6A_7 - B_7A_1A_6 - B_8A_4A_8 - B_8A_5A_7, \\
 I_3 &= 8c_3b^2A_8^2 - 8B_7a_3b^2A_8 + B_{11}A_6^2 - B_1A_1A_8 - B_1A_2A_7 - B_1A_5A_6 - B_2A_2A_8 \\
 &\quad - B_2A_3A_6 + 2B_4A_6A_7 + 2B_5A_1A_3 + 2B_5A_2A_5 + 2B_6A_6A_8 - B_7A_2A_6 - B_8A_3A_7 \\
 &\quad - B_8A_5A_8, \\
 I_4 &= B_3A_6^2 + B_5A_1^2 - B_2A_1A_6 - B_8A_1A_7 - B_8A_4A_6 + 16c_3b^2A_6A_7 - 8B_2a_3b^2A_7 \\
 &\quad + 16B_5a_3b^2A_4 - 8B_{10}a_3b^2A_6, \\
 I_5 &= B_3A_7^2 + B_5A_4^2 - B_2A_4A_7 + 2B_9A_6A_7 - B_{10}A_1A_7 - B_{10}A_4A_6, \\
 I_6 &= B_4A_6^2 + B_5A_2^2 - B_1A_2A_6 - B_8A_2A_8 - B_8A_3A_6 - 8B_1a_3A_8b^2 + 16B_5a_3b^2A_3, \\
 I_7 &= B_4A_8^2 + B_5A_3^2 - B_1A_3A_8, \\
 I_8 &= B_9A_6^2 + 8c_3b^2A_7^2 - B_2A_1A_7 - B_2A_4A_6 + 2B_3A_6A_7 + 2B_5A_1A_4 - B_8A_4A_7 \\
 &\quad - B_{10}A_1A_6 - 8B_{10}a_3A_7b^2, \\
 I_9 &= B_9A_7^2 - B_{10}A_4A_7, \\
 I_{10} &= 8c_3b^2A_6^2 - B_8A_1A_6 - 8B_2a_3A_6b^2 + 16B_5a_3A_1b^2 - 8B_8a_3A_7b^2, \\
 I_{11} &= -B_1A_2A_8 - B_1A_3A_6 + 2B_4A_6A_8 + 2B_5A_2A_3 - B_8A_3A_8, \\
 I_{12} &= B_3A_8^2 + B_4A_7^2 + B_5A_5^2 - B_1A_4A_8 - B_1A_5A_7 - B_2A_3A_7 - B_2A_5A_8 + 2B_5A_3A_4 \\
 &\quad + 2B_6A_7A_8 - B_7A_1A_8 - B_7A_2A_7 - B_7A_5A_6 - B_{10}A_2A_8 - B_{10}A_3A_6 + 2B_{11}A_6A_7 \\
 &\quad + 2B_{12}A_6A_8, \\
 I_{13} &= B_6A_7^2 - B_1A_4A_7 - B_2A_4A_8 - B_2A_5A_7 + 2B_3A_7A_8 + 2B_5A_4A_5 - B_7A_1A_7 \\
 &\quad + 2B_9A_6A_8 - B_7A_4A_6 - B_{10}A_1A_8 - B_{10}A_2A_7 - B_{10}A_5A_6 + 2B_{12}A_6A_7, \\
 I_{14} &= B_6A_8^2 - B_1A_3A_7 - B_1A_5A_8 - B_2A_3A_8 + 2B_4A_7A_8 + 2B_5A_3A_5 - B_7A_2A_8 \\
 &\quad - B_7A_3A_6 + 2B_{11}A_6A_8,
 \end{aligned}$$

$$I_{15} = -B_8 A_2 A_6 - 8B_1 a_3 A_6 b^2 + 16B_5 a_3 A_2 b^2 - 8B_8 a_3 A_8 b^2,$$

$$I_{16} = B_9 A_8^2 + B_{11} A_7^2 - B_7 A_4 A_8 - B_7 A_5 A_7 - B_{10} A_3 A_7 - B_{10} A_5 A_8 + 2B_{12} A_7 A_8,$$

$$I_{17} = B_{11} A_8^2 - B_7 A_3 A_8,$$

$$I_{18} = B_{12} A_7^2 - B_7 A_4 A_7 - B_{10} A_4 A_8 - B_{10} A_5 A_7 + 2B_9 A_7 A_8,$$

$$I_{19} = B_{12} A_8^2 - B_7 A_3 A_7 - B_7 A_5 A_8 - B_{10} A_3 A_8 + 2B_{11} A_7 A_8,$$

et

$$\begin{aligned}
 J_0 &= 64K_2a_3^2b^4 - 8K_{12}a_3b^2A_6, \\
 J_1 &= 16d_3b^2A_6A_7 - 8K_3a_3b^2A_8 - 8K_4a_3b^2A_6 + 16K_2a_3b^2A_5 - 8K_{10}a_3b^2A_7 \\
 &\quad + K_1A_6^2 - K_3A_2A_6 + 2K_2A_1A_2 - K_{10}A_1A_6 - K_{12}A_1A_8 - K_{12}A_2A_7 - K_{12}A_5A_6, \\
 J_2 &= 16d_3b^2A_7A_8 - 8K_4a_3b^2A_8 - 8K_5a_3b^2A_7 + K_7A_6^2 - K_3A_2A_8 - K_3A_3A_6 \\
 &\quad - K_4A_2A_6 - K_5A_1A_6 - K_{10}A_1A_8 - K_{10}A_2A_7 + 2K_1A_6A_8 + 2K_2A_1A_3 + 2K_2A_2A_5 \\
 &\quad + 2K_8A_6A_7 - K_{10}A_5A_6 - K_{12}A_3A_7 - K_{12}A_5A_8, \\
 J_3 &= 8d_3b^2A_7^2 - 8K_4a_3b^2A_7 + K_6A_6^2 - K_3A_1A_8 - K_3A_2A_7 - K_3A_5A_6 - K_4A_1A_6 \\
 &\quad - K_{10}A_1A_7 + 2K_1A_6A_7 + 2K_2A_1A_5 + 2K_2A_2A_4 + 2K_9A_6A_8 - K_{10}A_4A_6 \\
 &\quad - K_{12}A_4A_8 - K_{12}A_5A_7, \\
 J_4 &= -K_3A_1A_7 - K_3A_4A_6 + 2K_9A_6A_7 + 2K_2A_1A_4 - K_{12}A_4A_7, \\
 J_5 &= K_{11}A_6^2 + 8d_3b^2A_8^2 - K_5A_2A_6 - K_{10}A_2A_8 + 2K_2A_2A_3 + 2K_8A_6A_8 - K_{10}A_3A_6 \\
 &\quad - K_{12}A_3A_8 - 8K_5a_3A_8b^2, \\
 J_6 &= K_2A_5^2 + K_8A_7^2 + K_9A_8^2 - K_3A_3A_7 - K_3A_5A_8 - K_4A_1A_8 - K_4A_2A_7 + 2K_1A_7A_8 \\
 &\quad + 2K_2A_3A_4 - K_4A_5A_6 - K_5A_1A_7 - K_5A_4A_6 - K_{10}A_4A_8 - K_{10}A_5A_7 + 2K_6A_6A_8 \\
 &\quad + 2K_7A_6A_7, \\
 J_7 &= K_2A_1^2 + K_9A_6^2 - K_3A_1A_6 - K_{12}A_1A_7 - K_{12}A_4A_6 - 8K_3a_3A_7b^2 + 16K_2a_3b^2A_4, \\
 J_8 &= K_2A_4^2 + K_9A_7^2 - K_3A_4A_7, \\
 J_9 &= K_8A_8^2 + K_2A_3^2 - K_5A_2A_8 + 2K_{11}A_6A_8 - K_5A_3A_6 - K_{10}A_3A_8, \\
 J_{10} &= K_{11}A_8^2 - K_5A_3A_8, \\
 J_{11} &= K_6A_7^2 - K_4A_4A_7, \\
 J_{12} &= K_6A_8^2 + K_{11}A_7^2 - K_4A_3A_7 - K_4A_5A_8 - K_5A_4A_8 - K_5A_5A_7 + 2K_7A_7A_8, \\
 J_{13} &= K_7A_7^2 - K_4A_4A_8 - K_4A_5A_7 - K_5A_4A_7 + 2K_6A_7A_8, \\
 J_{14} &= K_7A_8^2 - K_4A_3A_8 - K_5A_3A_7 - K_5A_5A_8 + 2K_{11}A_7A_8, \\
 J_{15} &= K_2A_2^2 + K_8A_6^2 - K_{10}A_2A_6 - K_{12}A_2A_8 - K_{12}A_3A_6 + 16d_3b^2A_6A_8 - 8K_5a_3b^2A_6 \\
 &\quad + 16K_2a_3b^2A_3 - 8K_{10}a_3b^2A_8, \\
 J_{16} &= -K_{12}A_1A_6 - 8K_3a_3A_6b^2 + 16K_2a_3A_1b^2 - 8K_{12}a_3A_7b^2, \\
 J_{17} &= 8d_3b^2A_6^2 - K_{12}A_2A_6 - 8K_{10}a_3A_6b^2 + 16K_2a_3A_2b^2 - 8K_{12}a_3A_8b^2, \\
 J_{18} &= K_1A_7^2 - K_3A_4A_8 - K_3A_5A_7 - K_4A_1A_7 + 2K_6A_6A_7 + 2K_9A_7A_8 - K_{10}A_4A_7 \\
 &\quad - K_4A_4A_6 + 2K_2A_4A_5, \\
 J_{19} &= K_1A_8^2 - K_3A_3A_8 - K_4A_2A_8 - K_4A_3A_6 + 2K_2A_3A_5 + 2K_7A_6A_8 - K_5A_1A_8 \\
 &\quad + 2K_{11}A_6A_7 - K_5A_2A_7 - K_5A_5A_6 - K_{10}A_3A_7 - K_{10}A_5A_8 + 2K_8A_7A_8.
 \end{aligned}$$

Comme tous les coefficients des deux équations  $g_{31}(\eta, \xi) = 0$  et  $g_{32}(\eta, \xi) = 0$  sont indépendants, ils peuvent être choisis de manière arbitraire. Par le théorème de Bezout, le système  $g_{31}(\eta, \xi) = 0$ ,  $g_{32}(\eta, \xi) = 0$  a 25 racines réelles, et donc le système (4.7) a au plus 25 racines réelles avec  $\rho > 0$ .

## CHAPITRE

### 5

# CYCLE LIMITE BIFURQUANT D'UN POINT D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE KOLMOGOROV DE DEGRÉE ARBITRAIRE

Dans ce chapitre, nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de cycles limites pour des systèmes de Kolmogorov planaire de degré arbitraire de la forme :

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = yg(x, y), \quad (5.1)$$

où  $f$  et  $g$  sont des polynômes de degré supérieur à 1.

Ceci en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux. Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal "*Chaos, Solitons and Fractals* (2020)".

### 5.0.1 Introduction

La bifurcation de Hopf a été étudiée dans [22, 43] pour certaines classes particulières des systèmes différentiels polynomiaux de Kolmogorov de dimension 3 et en dimension 2, il partiellement dans [3, 48]. L'objectif de cette étude est de caractériser la bifurcation générique de Hopf des systèmes différentiels polynomiaux de Kolmogorov en dimension deux. Plus précisément, nous fournissons des conditions suffisantes pour l'existence d'une bifurcation de zerp-Hopf et les estimations de la taille de l'orbite périodique qui bifurque pour contrôler le type de stabilité ou d'instabilité.

Un système différentiel polynomial

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

en  $\mathbb{R}^2$  est de degré  $n$  si le maximum des degrés des polynômes  $P$  et  $Q$  est  $n$ . Un polynôme de champ vecteur quadratique  $X = (P, Q)$  avec  $x$  un facteur de  $P$  et  $y$  un facteur de  $Q$  est un système de Lotka-Volterra. Alors qu'un polynôme de champ vecteur  $n$ -degré  $X = (P, Q)$  avec  $x$  un facteur de  $P$  et  $y$  un facteur de  $Q$  est un système de Kolmogorov.

Les systèmes Lotka–Volterra ont été initialement considéré, indépendamment par Alfred J. Lotka en 1925 [44] et par Vito Volterra en 1926 [70], comme modèle pour l'étude des interactions entre deux espèces. Plus tard, Kolmogorov [38] en 1936 a étendu ces systèmes pour une dimension arbitraire et de degré arbitraire. Ces types de systèmes sont maintenant appelés systèmes de Kolmogorov.

De nombreux phénomènes naturels peuvent être modélisés par les systèmes de Kolmogorov, comme l'évolution dans le temps des espèces en conflit en biologie [46], réactions chimiques [29], hydrodynamique [14], économie [65], le couplage des ondes dans le laser physique [39], l'évolution des électrons, des ions et des neutres espèces en physique des plasmas [42], intégrabilité [2], etc.

Nous étudions ici les systèmes polynomiaux de Kolmogorov dans le plan, c'est-à-dire les systèmes différentiels de la forme

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = yg(x, y), \quad (5.2)$$

où  $f$  et  $g$  sont des polynômes de degré supérieur à 1. En fait, nous nous intéressons

à l'existence, dans le quadrant positif du plan de cycles limites des systèmes de Kolmogorov, et par conséquent entourant certains points d'équilibre (voir par exemple Théorème 1.31 de [23]) qui se trouvent dans le quadrant positif. Rappelons qu'un cycle limite d'un système de Kolmogorov est une solution périodique du système (5.2) isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de (5.2). En général, la détection de l'existence de cycles limites est un problème difficile.

Un point d'équilibre de Hopf d'un système différentiel dans  $\mathbb{R}^2$  est un point d'équilibre dont la partie linéaire a des valeurs propres imaginaires pures  $\pm\omega i$  avec  $\omega \neq 0$ . Ici, une bifurcation de Hopf signifie que certains cycles limites bifurquent d'un point d'équilibre de Hopf lorsqu'un paramètre d'un système différentiel varie, mais dans la littérature, une bifurcation de Hopf n'a pas toujours cette signification, voir par exemple [1].

Notre objectif est de fournir les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un cycle limite bifurquant d'un point équilibre de Hopf d'un système "2-dimensionnel polynomial Kolmogorov" de degré arbitraire, en utilisant la théorie de la moyenne du second ordre. Nous prouvons également la stabilité du petit cycle limite qui naît dans la bifurcation de Hopf, et donnons une estimation de la taille en fonction du paramètre de la bifurcation.

Nous translatons un point d'équilibre  $(a, b)$  du quadrant positif au point  $(1, 1)$  en effectuant le redimensionnement  $(x, y) \rightarrow (x/a, y/b)$ , et obtenons que tout système de Kolmogorov dans le plan de degré 2, c'est-à-dire tout système de Lotka–Volterra peut s'écrire

$$\dot{x} = x(a_1(x-1) + a_2(y-1)), \quad \dot{y} = y(b_1(x-1) + b_2(y-1)). \quad (5.3)$$

Il s'agit d'un système différentiel polynomial quadratique avec deux lignes droites invariantes, nous savons que de tels systèmes différentiels (voir Bautin [68]) n'ont pas de cycles limites, (on peut aussi consulter la référence ([16]), section 5 pour la preuve de Bautin).

Un système de Kolmogorov ayant un point d'équilibre dans le quadrant positif

peut-être écrit comme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_1(x-1) + a_2(y-1) + a_3(x-1)^2 + a_4(x-1)(y-1) + a_5(y-1)^2), \\ \dot{y} &= y(b_1(x-1) + b_2(y-1) + b_3(x-1)^2 + b_4(x-1)(y-1) + b_5(y-1)^2),\end{aligned}\tag{5.4}$$

si son degré est 3, et il peut être écrit comme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(a_1(x-1) + a_2(y-1) + a_3(x-1)^2 + a_4(x-1)(y-1) + a_5(y-1)^2 + \\ &\quad a_6(x-1)^3 + a_7(x-1)^2(y-1) + a_8(x-1)(y-1)^2 + a_9(y-1)^3 + h.o.t.), \\ \dot{y} &= y(b_1(x-1) + b_2(y-1) + b_3(x-1)^2 + b_4(x-1)(y-1) + b_5(y-1)^2 + \\ &\quad b_6(x-1)^3 + b_7(x-1)^2(y-1) + b_8(x-1)(y-1)^2 + b_9(y-1)^3 + h.o.t.),\end{aligned}\tag{5.5}$$

si son degré est supérieur à 3, où h.o.t. désigne les termes d'ordre supérieur en  $x-1$  et  $y-1$ , c'est-à-dire des conditions d'ordre au moins quatre en les variables  $x-1$  et  $y-1$ .

## 5.0.2 Résultats principaux

**Proposition 5.1** *Soit  $\omega$  un nombre réel positif et  $b_1 \neq 0$ . Un système de Kolmogorov (5.4) ou (5.5) a un point d'équilibre de Hopf en  $(1, 1)$  avec des valeurs propres  $\pm\omega i$  (ici  $i = \sqrt{-1}$ ) si et seulement si*

$$a_1 = -b_2, \quad a_2 = -\frac{b_2^2 + \omega^2}{b_1}.$$

Le polynôme caractéristique de la partie linéaire du système Lotka-Volterra (5.4) au point d'équilibre  $(1, 1)$ , est

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + a_1b_2 - a_2b_1.$$

En posant que  $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2$ , on obtient le système

$$a_1 + b_2 = 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 = \omega^2.$$

En résolvant ce système, nous obtenons la famille de points d'équilibres zéro-Hopf décrit dans la proposition 5.1. Ceci complète la preuve.

Nous définissons les quantités

$$\begin{aligned}A &= -2a_3^2b_1b_2^3 - 2a_3^2b_1b_2\omega^2 + 3a_3a_4b_1^2b_2^2 + a_3a_4b_1^2\omega^2 - 2a_3a_5b_1^3b_2 + a_3b_1^2b_2^3 + a_3b_1^2b_2\omega^2 + \\ &\quad a_3b_1b_2^4 + a_3b_1b_2^3b_4 + 3a_3b_1b_2^2\omega^2 + a_3b_1b_2b_4\omega^2 + 2a_3b_1\omega^4 - 2a_3b_2^4b_3 - 4a_3b_2^2b_3\omega^2 - 2a_3b_3\omega^4 -\end{aligned}$$



$$a_4^2 b_1^3 b_2 + a_4 a_5 b_1^4 - a_4 b_1^3 b_2^2 - a_4 b_1^3 b_2 b_5 - a_4 b_1^2 b_2^3 - a_4 b_1^2 b_2 \omega^2 + a_4 b_1 b_2^3 b_3 + a_4 b_1 b_2 b_3 \omega^2 + a_5 b_1^4 b_2 + 2a_5 b_1^4 b_5 + a_5 b_1^3 b_2^2 - a_5 b_1^3 b_2 b_4 + b_1^3 b_2^2 b_5 + 2b_1^3 b_2 b_5^2 + 2b_1^3 b_5 \omega^2 - b_1^2 b_2^3 b_4 + b_1^2 b_2^3 b_5 - 3b_1^2 b_2^2 b_4 b_5 - b_1^2 b_2 b_4 \omega^2 + b_1^2 b_2 b_5 \omega^2 - b_1^2 b_4 b_5 \omega^2 + b_1 b_2^4 b_3 - b_1 b_2^4 b_4 + 2b_1 b_2^3 b_3 b_5 + b_1 b_2^3 b_4^2 + b_1 b_2^2 b_3 \omega^2 - b_1 b_2^2 b_4 \omega^2 + 2b_1 b_2 b_3 b_5 \omega^2 + b_1 b_2 b_4^2 \omega^2 + b_2^5 b_3 - b_2^4 b_3 b_4 + 2b_2^3 b_3 \omega^2 - 2b_2^2 b_3 b_4 \omega^2 + b_2 b_3 \omega^4 - b_3 b_4 \omega^4, \text{ et}$$

$$C = A + b_1 \omega^2 (3a_6 b_2^2 + 3a_6 \omega^2 - 2a_7 b_1 b_2 + a_8 b_1^2 + 3b_1^2 b_9 - 2b_1 b_2 b_8 + b_2^2 b_7 + b_7 \omega^2).$$

**Théorème 5.1** *Considérons les systèmes de Kolmogorov (5.4) ou (5.5) avec*

$$a_1 = -b_2 + \varepsilon^2 B, \quad a_2 = -\frac{b_2^2 + \omega^2}{b_1}, \quad (5.6)$$

avec  $\omega > 0$ ,  $b_1 \neq 0$  et  $\varepsilon$  un petit paramètre (le paramètre de bifurcation).

(a) *Le système (5.4) a un cycle limite  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  bifurquant d'un point d'équilibre de Hopf  $(1, 1)$ , quand  $\varepsilon = 0$ , si et seulement si  $b_1 AB < 0$ . Ce cycle limite est stable si  $B > 0$  et instable si  $B < 0$ . De plus*

$$(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon)) = \left( 1 + O(\varepsilon^2), 1 - \varepsilon \frac{b_1 \omega r^*}{b_2^2 + \omega^2} + O(\varepsilon^2) \right), \quad (5.7)$$

où

$$r^* = 2\omega \sqrt{-\frac{b_1 B (b_2^2 + \omega^2)}{A}}.$$

Voir ce cycle limite bifurqué dans la figure 5.1.

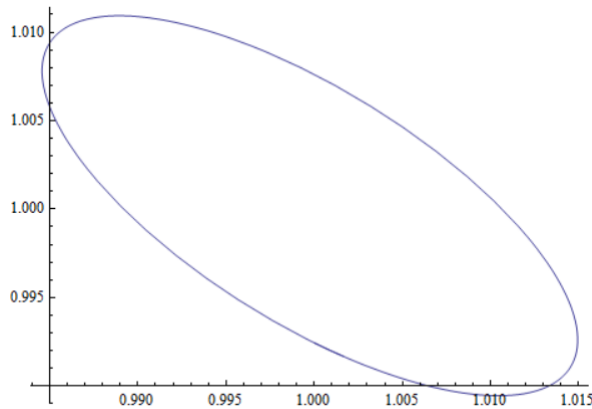


FIGURE 5.1 – Cycle limite stable pour le système (5.4).

Pour le système (5.4) les valeurs des paramètres sont  $a_3 = a_4 = a_5 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = \omega = B = 1$  et  $\varepsilon = 1/50$ .

(b) Le système (5.5) a un cycle limite  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  bifurquant d'un point d'équilibre de Hopf  $(1, 1)$ , quand  $\varepsilon = 0$ , si et seulement si  $b_1 C B < 0$ . Ce cycle limite est stable si  $B > 0$  et instable si  $B < 0$ . De plus, l'égalité (5.7) est vérifiée. Voir ce cycle limite bifurqué dans la figure 5.2.

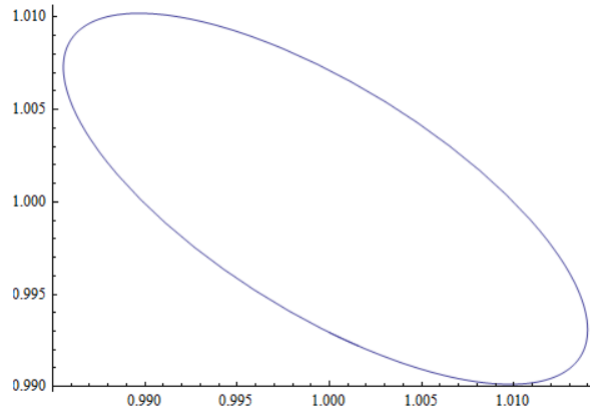


FIGURE 5.2 – Cycle limite instable pour le système (5.5).

Pour le système (5.5) les valeurs des paramètres sont  $B = -1$ ,  $a_6 = a_7 = a_8 = b_7 = b_8 = b_9 = 1$  et  $a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = b_6 = b_{10} = b_{11} = b_{12} = b_{13} = b_{14} = 0$ .

Le théorème 5.1 est prouvé dans la preuve 5.0.2 en utilisant la théorie de moyennisation du second ordre. Un bref résumé de la théorie du moyennisation, nécessaire pour prouver le théorème 5.1 est donné dans la sous-section 2.1.2.

Notons que le Théorème 5.1 fournit des conditions suffisantes pour qu'un cycle limite bifurque à partir d'un point d'équilibre de Hopf localisé dans le quadrant positif d'un système de Kolmogorov planaire de degré arbitraire, et que (5.7) donne une estimation de la taille du petit cycle limite qui bifurque du point d'équilibre  $(1, 1)$  en fonction du paramètre de bifurcation  $\varepsilon$ .

Nous prouverons qu'une orbite périodique bifurque du point d'équilibre zéro-Hopf  $(1, 1)$  du système de Kolmogorov (5.4) pour les paramètres du système (5.4) indiqués dans la proposition 5.1.

Perturbons le système (5.4) avec les paramètres donnés dans (5.6), et translons le point d'équilibre  $(1, 1)$  à l'origine en effectuant le changement de variables  $x = X +$

1,  $y = Y + 1$ . Le système (5.4) devient

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{1}{b_1}(1+X)((B\varepsilon^2 - b_2)b_1X - (b_2^2 + \omega^2)Y + a_3b_1X^2 + a_4b_1XY + a_5b_1Y^2), \\ \dot{Y} &= (1+Y)(b_1X + b_2Y + b_3X^2 + b_4XY + b_5Y^2).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Afin de simplifier l'application de la théorie de la moyennisation, en calculant la bifurcation de Hopf, nous écrivons la partie linéaire de système (5.8) avec  $\varepsilon = 0$  au point d'équilibre  $(0, 0)$  dans sa forme normale jordanienne réelle, c'est-à-dire dans la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, en faisant le changement de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b_2}{\omega} & -\frac{b_2^2 + \omega^2}{b_1\omega} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

dont l'inverse est

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_1\omega}{b_2^2 + \omega^2} & -\frac{b_1b_2}{b_2^2 + \omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

Le système différentiel (5.8) avec les nouvelles variables  $(u, v)$  décrit

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{1}{b_1\omega(b_2^2 + \omega^2)^2} \left( (a_5b_1^3b_2^3 - a_4b_1^2b_2^4 + a_3b_1b_2^5 + b_2^6b_3 - b_1b_2^5b_4 + b_1^2b_2^4b_5)v^2 + (a_5b_1^3b_2^3 \right. \\ &\quad - a_4b_1^2b_2^4 + a_3b_1b_2^5 - b_1b_2^5b_3 + b_1^2b_2^4b_4 - b_1^3b_2^3b_5)v^3 + (2a_5b_1^3b_2^2 - a_4b_1^2b_2^3 + b_1^2b_2^4 + b_1b_2^5 \\ &\quad - b_1b_2^4b_4 + 2b_1^2b_2^3b_5)uv\omega + (2a_5b_1^3b_2^2 - a_4b_1^2b_2^3 - b_1b_2^4b_3 + 2b_1^2b_2^3b_4 - 3b_1^3b_2^2b_5)u^2\omega + \\ &\quad (a_5b_1^3b_2 + b_1^2b_2^3 + b_1^2b_2^2b_5)u^2\omega^2 + b_1b_2^4v\omega^2 + (a_5b_1^3b_2 + b_1^2b_2^2b_4 - 3b_1^3b_2b_5)u^2v\omega^2 + \\ &\quad (-a_4b_1^2b_2^2 + 2a_3b_1b_2^3 - b_1^2b_2^3 + 3b_2^4b_3 - 2b_1b_2^3b_4 + b_1^2b_2^2b_5)v^2\omega^2 + (-a_4b_1^2b_2^2 + 2a_3b_1b_2^3 \\ &\quad - 2b_1b_2^3b_3 + b_1^2b_2^2b_4)v^3\omega^2 - b_1^3b_5u^3\omega^3 + (-a_4b_1^2b_2 + 2b_1b_2^3 - 2b_1b_2^2b_4 + 2b_1^2b_2b_5)uv\omega^3 \\ &\quad + (2b_1^2b_2b_4 - a_4b_1^2b_2 - 2b_1b_2^2b_3)uv^2\omega^3 + (b_1^2b_2 + b_1^2b_5)u^2\omega^4 + 2b_1b_2^2v\omega^4 + b_1^2b_4u^2v\omega^4 \\ &\quad + (a_3b_1b_2 - b_1^2b_2 + 3b_2^2b_3 - b_1b_2b_4)v^2\omega^4 + (a_3b_1b_2 - b_1b_2b_3)v^3\omega^4 + (b_1b_2 - b_1^2 - \\ &\quad b_1b_4)uv\omega^5 - b_1b_3uv^2\omega^5 + b_1v\omega^6 + b_3v^2\omega^6 \left. \right) - \varepsilon^2 \frac{1}{\omega} Bb_2v(1+v), \\ \dot{v} &= \frac{(1+v)}{(b_2^2 + \omega^2)^2} \left( (a_5b_1^2b_2^2 - a_4b_1b_2^3 + a_3b_2^4)v^2 + b_2^4u\omega + (2a_5b_1^2b_2 - a_4b_1b_2^2)uv\omega + \omega^2 \right. \\ &\quad a_5b_1^2u^2 + (-a_4b_1b_2 + 2a_3b_2^2)v^2\omega^2 + 2b_2^2u\omega^3 - a_4b_1uv\omega^3 + a_3v^2\omega^4 + u\omega^5 \left. \right) \\ &\quad + \varepsilon^2 Bv(1+v).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Effectuer le scaling des variables  $(u, v) = (\varepsilon U, \varepsilon V)$ . Le système (5.9) devient

$$\begin{aligned}
 \dot{U} = & -V\omega - \varepsilon \frac{1}{b_1\omega(b_2^2 + \omega^2)^2} \left( (a_5b_1^3b_2^3 - a_4b_1^2b_2^4 + a_3b_1b_2^5 + b_2^6b_3 - b_1b_2^5b_4 + b_1^2b_2^4b_5)V^2 \right. \\
 & + (2a_5b_1^3b_2^2 - a_4b_1^2b_2^3 + b_1^2b_2^4 + b_1b_2^5 - b_1b_2^4b_4 + 2b_1^2b_2^3b_5)UV\omega + (a_5b_1^3b_2 + b_1^2b_2^3 + \\
 & b_1^2b_2^2b_5)U^2\omega^2 + (-a_4b_1^2b_2^2 + 2a_3b_1b_2^3 - b_1^2b_2^3 + 3b_2^4b_3 - 2b_1b_2^3b_4 + b_1^2b_2^2b_5)V^2\omega^2 + \\
 & (-a_4b_1^2b_2 + 2b_1b_2^3 - 2b_1b_2^2b_4 + 2b_1^2b_2b_5)UV\omega^3 + (b_1^2b_2 + b_1^2b_5)U^2\omega^4 + (a_3b_1b_2 - \\
 & b_1^2b_2 + 3b_2^2b_3 - b_1b_2b_4)V^2\omega^4 + (-b_1^2 + b_1b_2 - b_1b_4)UV\omega^5 + b_3V^2\omega^6 \left. \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{\omega(b_2^2 + \omega^2)^2} \\
 & \left( -Bb_2^5V + (-a_5b_1^2b_2^3 + a_4b_1b_2^4 - a_3b_2^5 + b_2^5b_3 - b_1b_2^4b_4 + b_1^2b_2^3b_5)V^3 - (2a_5b_1^2b_2^2 \right. \\
 & - a_4b_1b_2^3 - b_2^4b_3 + 2b_1b_2^3b_4 - 3b_1^2b_2^2b_5)UV^2\omega - 2Bb_2^3V\omega^2 - (a_5b_1^2b_2 + b_1b_2^2b_4 - \\
 & 3b_1^2b_2b_5)U^2V\omega^2 + (a_4b_1b_2^2 - 2a_3b_2^3 + 2b_2^3b_3 - b_1b_2^2b_4)V^3\omega^2 + b_1^2b_5U^3\omega^3 + (a_4b_1b_2 \\
 & + 2b_2^2b_3 - 2b_1b_2b_4)UV^2\omega^3 - Bb_2V\omega^4 - b_1b_4U^2V\omega^4 + (b_2b_3 - a_3b_2)V^3\omega^4 + b_3UV^2\omega^5 \left. \right) \\
 & + O(\varepsilon^3), \\
 \dot{V} = & U\omega + \varepsilon \frac{1}{(b_2^2 + \omega^2)^2} \left( (a_5b_1^2b_2^2 - a_4b_1b_2^3 + a_3b_2^4)V^2 + (2a_5b_1^2b_2 - a_4b_1b_2^2 + b_2^4)UV\omega \right. \\
 & + a_5b_1^2U^2\omega^2 + (-a_4b_1b_2 + 2a_3b_2^2)V^2\omega^2 + (-a_4b_1 + 2b_2^2)UV\omega^3 + a_3V^2\omega^4 + UV\omega^5 \left. \right) \\
 & + \varepsilon^2 \frac{1}{(b_2^2 + \omega^2)^2} V \left( Bb_2^4 + (a_5b_1^2b_2^2 - a_4b_1b_2^3 + a_3b_2^4)V^2 + (2a_5b_1^2b_2 - a_4b_1b_2^2)UV\omega \right. \\
 & \left. + 2Bb_2^2\omega^2 + a_5b_1^2U^2\omega^2 + (-a_4b_1b_2 + 2a_3b_2^2)V^2\omega^2 - a_4b_1UV\omega^3 + B\omega^4 + a_3V^2\omega^4 \right) + O(\varepsilon^3).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Nous devons passer aux coordonnées polaires pour introduire l'angle  $\theta$  que nous prendrons par la suite comme nouvelle variable indépendante afin que le système différentiel (5.10) devienne périodique en  $\theta$  et que nous puissions appliquer la théorie de la

moyennisation, où  $(r, \theta)$  sont définis par  $U = r \cos \theta$  et  $V = r \sin \theta$ , et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = & -\varepsilon \frac{1}{b_1 \omega (b_2^2 + \omega^2)^2} r^2 \left( b_1^2 \omega^2 (a_5 b_1 b_2 + (b_2 + b_5)(b_2^2 + \omega^2)) \cos^3 \theta - b_1 \omega (a_5 b_1^2 (-2b_2^2 + \omega^2) \right. \\
 & + (b_2^2 + \omega^2)(a_4 b_1 b_2 - (b_2 - b_4)(b_2^2 + \omega^2) + b_1(-b_2^2 - 2b_2 b_5 + \omega^2))) \cos^2 \theta \sin(\theta) + (a_5 b_1^3 b_2 \\
 & (b_2^2 - 2\omega^2) + (b_2^2 + \omega^2)(b_2^4 b_3 - b_1 b_2^3 b_4 + b_1^2 b_2^2 b_5 - b_1^2 b_2 \omega^2 - b_1 b_2^2 \omega^2 + 2b_2^2 b_3 \omega^2 - b_1 b_2 b_4 \omega^2 \\
 & - b_1 \omega^4 + b_3 \omega^4 + a_4 b_1^2 (-b_2^2 + \omega^2) + a_3 b_1 b_2 (b_2^2 + \omega^2))) \cos \theta \sin^2 \theta - b_1 \omega (a_5 b_1^2 b_2^2 + \\
 & (b_2^2 + \omega^2)(-a_4 b_1 b_2 + a_3 (b_2^2 + \omega^2))) \sin^3 \theta \left. \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{\omega (b_2^2 + \omega^2)^2} \left( b_1^2 b_5 r^2 \omega^3 \cos(\theta)^4 - b_1 r^2 \right. \\
 & \omega^2 (a_5 b_1 b_2 + b_4 b_2^2 - 3b_1 b_2 b_5 + b_4 \omega^2) \cos^3 \theta \sin \theta + r^2 \omega (b_2^4 b_3 - 2b_1 b_2^3 b_4 + 3b_1^2 b_2^2 b_5 + 2b_2^2 \\
 & b_3 \omega^2 - 2b_1 b_2 b_4 \omega^2 + b_3 \omega^4 + a_5 b_1^2 (-2b_2^2 + \omega^2) + a_4 b_1 b_2 (b_2^2 + \omega^2)) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \omega \sin^2 \theta \\
 & (B(b_2^2 + \omega^2)^2 + r^2 (a_5 b_1^2 b_2^2 + (b_2^2 + \omega^2)(-a_4 b_1 b_2 + a_3 (b_2^2 + \omega^2))) \sin^2 \theta) - \cos \theta \sin \theta (B b_2 \\
 & (b_2^2 + \omega^2)^2 + r^2 (a_5 b_1^2 b_2 (b_2^2 - 2\omega^2) + a_4 b_1 (-b_2^4 + \omega^4) + b_2 (-b_2^4 b_3 + b_1 b_2^3 b_4 + b_1 b_2 b_4 \omega^2 - b_3 \omega^4 \\
 & + a_3 (b_2^2 + \omega^2)^2 - b_2^2 (b_1^2 b_5 + 2b_3 \omega^2))) \sin^2 \theta \left. \right) + O(\varepsilon^3), \\
 \dot{\theta} = & \omega + \varepsilon \frac{1}{b_1 \omega (b_2^2 + \omega^2)^2} r \left( a_5 b_1^3 \omega^3 \cos^3 \theta + b_1 \omega^2 (3a_5 b_1^2 b_2 - (a_4 b_1 - b_1 b_2 - b_2^2 - b_1 b_5 - \omega^2)(b_2^2 + \right. \\
 & \omega^2)) \cos^2 \theta \sin \theta + b_1 \omega (3a_5 b_1^2 b_2^2 + (b_2^2 + \omega^2)(-2a_4 b_1 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3 - b_2^2 b_4 + 2b_1 b_2 b_5 - b_1 \omega^2 \\
 & + b_2 \omega^2 - b_4 \omega^2 + a_3 (b_2^2 + \omega^2))) \cos \theta \sin^2 \theta + (a_5 b_1^3 b_2^3 + (b_2^2 + \omega^2)(-a_4 b_1^2 b_2^2 + b_2^4 b_3 - b_1 b_2^3 b_4 \\
 & + b_1^2 b_2^2 b_5 - b_1^2 b_2 \omega^2 + 2b_2^2 b_3 \omega^2 - b_1 b_2 b_4 \omega^2 + b_3 \omega^4 + a_3 b_1 b_2 (b_2^2 + \omega^2))) \sin^3 \theta \left. \right) + \varepsilon^2 \frac{1}{2\omega (b_2^2 + \omega^2)^2} \\
 & \sin \theta \left( \omega \cos \theta + b_2 \sin \theta \right) \left( (b_2^2 + \omega^2) (2B(b_2^2 + \omega^2) + r^2 (a_5 b_1^2 - a_4 b_1 b_2 + a_3 b_2^2 - b_2^2 b_3 + b_1 b_2 b_4 \right. \\
 & - b_1^2 b_5 + a_3 \omega^2 - b_3 \omega^2)) - r^2 (a_3 b_2^4 - b_2^4 b_3 + b_1 b_2^3 b_4 - b_1^2 b_2^2 b_5 + 2a_3 b_2^2 \omega^2 - 2b_2^2 b_3 \omega^2 + b_1 b_2 b_4 \omega^2 + \\
 & b_1^2 b_5 \omega^2 + a_3 \omega^4 - b_3 \omega^4 + a_5 b_1^2 (b_2^2 - \omega^2) - a_4 b_1 b_2 (b_2^2 + \omega^2)) \cos(2\theta) + b_1 r^2 \omega (2a_5 b_1 b_2 + b_2^2 b_4 - \\
 & 2b_1 b_2 b_5 + b_4 \omega^2 - a_4 (b_2^2 + \omega^2)) \sin(2\theta) \left. \right) + O(\varepsilon^3).
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Considérons maintenant  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, ainsi le système (5.11) devient sous la forme standard pour appliquer la théorie de la moyennisation

sation

$$\begin{aligned}
 \dot{r} = & -\varepsilon \frac{1}{b_1 \omega^2 (b_2^2 + \omega^2)^2} r^2 \left( b_1^2 \omega^2 (a_5 b_1 b_2 + (b_2 + b_5)(b_2^2 + \omega^2)) \cos^3 \theta - b_1 \omega (a_5 b_1^2 (-2b_2^2 + \omega^2) \right. \\
 & + (b_2^2 + \omega^2)(a_4 b_1 b_2 - (b_2 - b_4)(b_2^2 + \omega^2) + b_1(-b_2^2 - 2b_2 b_5 + \omega^2))) \cos^2 \theta \sin \theta + (a_5 b_1^3 b_2 \\
 & (b_2^2 - 2\omega^2) + (b_2^2 + \omega^2)(b_2^4 b_3 - b_1 b_2^3 b_4 + b_1^2 b_2^2 b_5 - b_1^2 b_2 \omega^2 - b_1 b_2^2 \omega^2 + 2b_2^2 b_3 \omega^2 - b_1 b_2 b_4 \omega^2 \\
 & - b_1 \omega^4 + b_3 \omega^4 + a_4 b_1^2 (-b_2^2 + \omega^2) + a_3 b_1 b_2 (b_2^2 + \omega^2)) \cos \theta \sin^2 \theta - b_1 \omega (a_5 b_1^2 b_2^2 + (b_2^2 + \\
 & \omega^2)(-a_4 b_1 b_2 + a_3 (b_2^2 + \omega^2))) \sin^3 \theta \left. \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{b_1^2 \omega^4 (b_2^2 + \omega^2)^4} r^3 (b_1^2 \omega^2 (a_5 b_1 b_2 + (b_2 + b_5) \right. \\
 & (b_2^2 + \omega^2)) \cos^3 \theta - b_1 \omega (a_5 b_1^2 (-2b_2^2 + \omega^2) + (b_2^2 + \omega^2)(a_4 b_1 b_2 - (b_2 - b_4)(b_2^2 + \omega^2) + b_1 \\
 & (-b_2^2 - 2b_2 b_5 + \omega^2))) \cos^2 \theta \sin \theta + (a_5 b_1^3 b_2 (b_2^2 - 2\omega^2) + (b_2^2 + \omega^2)(b_2^4 b_3 - b_1 b_2^3 b_4 + b_1^2 b_2^2 b_5 \\
 & - b_1^2 b_2 \omega^2 - b_1 b_2^2 \omega^2 + 2b_2^2 b_3 \omega^2 - b_1 b_2 b_4 \omega^2 - b_1 \omega^4 + b_3 \omega^4 + a_4 b_1^2 (-b_2^2 + \omega^2) + a_3 b_1 b_2 (b_2^2 + \\
 & \omega^2)) \cos \theta \sin^2 \theta - b_1 \omega (a_5 b_1^2 b_2^2 + (b_2^2 + \omega^2)(-a_4 b_1 b_2 + a_3 (b_2^2 + \omega^2))) \sin^3 \theta (a_5 b_1^3 \omega^3 \\
 & \cos^3 \theta + b_1 \omega^2 (3a_5 b_1^2 b_2 - (a_4 b_1 - b_1 b_2 - b_2^2 - b_1 b_5 - \omega^2)(b_2^2 + \omega^2)) \cos^2 \theta \sin \theta + b_1 \omega \\
 & (3a_5 b_1^2 b_2^2 + (b_2^2 + \omega^2)(-2a_4 b_1 b_2 + b_1 b_2^2 + b_2^3 - b_2^2 b_4 + 2b_1 b_2 b_5 - b_1 \omega^2 + b_2 \omega^2 - b_4 \omega^2 + a_3 \\
 & (b_2^2 + \omega^2))) \cos \theta \sin^2 \theta + (a_5 b_1^3 b_2^3 + (b_2^2 + \omega^2)(-a_4 b_1^2 b_2^2 + b_2^4 b_3 - b_1 b_2^3 b_4 + b_1^2 b_2^2 b_5 - b_1^2 b_2 \\
 & \omega^2 + 2b_2^2 b_3 \omega^2 - b_1 b_2 b_4 \omega^2 + b_3 \omega^4 + a_3 b_1 b_2 (b_2^2 + \omega^2))) \sin^3 \theta \left. \right) + \frac{1}{\omega^2 (b_2^2 + \omega^2)^2} r (b_1^2 b_5 r^2 \omega^3 \\
 & \cos^4 \theta - b_1 r^2 \omega^2 (a_5 b_1 b_2 + b_2^2 b_4 - 3b_1 b_2 b_5 + b_4 \omega^2) \cos^3 \theta \sin \theta + r^2 \omega (b_2^4 b_3 - 2b_1 b_2^3 b_4 + \\
 & 3b_1^2 b_2^2 b_5 + 2b_2^2 b_3 \omega^2 - 2b_1 b_2 b_4 \omega^2 + b_3 \omega^4 + a_5 b_1^2 (-2b_2^2 + \omega^2) + a_4 b_1 b_2 (b_2^2 + \omega^2)) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \\
 & + \omega \sin^2 \theta (B(b_2^2 + \omega^2)^2 + r^2 (a_5 b_1^2 b_2^2 + (b_2^2 + \omega^2)(-a_4 b_1 b_2 + a_3 (b_2^2 + \omega^2))) \sin^2 \theta) - \cos \theta \\
 & \sin \theta (B b_2 (b_2^2 + \omega^2)^2 + r^2 (a_5 b_1^2 b_2 (b_2^2 - 2\omega^2) + a_4 b_1 (-b_2^4 + \omega^4) + b_2 (-b_2^4 b_3 + b_1 b_2^3 b_4 + b_1 b_2 b_4 \\
 & \omega^2 - b_3 \omega^4 + a_3 (b_2^2 + \omega^2)^2 - b_2^2 (b_1^2 b_5 + 2b_3 \omega^2))) \sin^2 \theta) \left. \right) + O(\varepsilon^3).
 \end{aligned}$$

(5.12)

En appliquant la théorie de la moyennisation décrite dans la sous-section 2.1.2 pour le système différentiel (5.12), en utilisant la notation de cette sous-section c-à-d 2.1.2 on a  $t = \theta$ ,  $T = 2\pi$ ,  $\mathbf{x} = r$ . Il faut immédiatement vérifier que le système (5.12) satisfait à toutes les hypothèses de la théorie de la moyennisation, et nous obtenons

$$f_1(r) = 0,$$

$$f_2(r) = \frac{1}{8b_1 \omega^3 (b_2^2 + \omega^2)} r (4b_1 B \omega^2 (b_2^2 + \omega^2) + A r^2).$$

$f_2(r) = 0$  a une unique solution positive

$$r^* = 2\omega \sqrt{-\frac{b_1 B (b_2^2 + \omega^2)}{A}}.$$

La dérivée de  $f_2(r)$  en  $r^*$  est égale  $A r^* / (4b_1 \omega^3 (b_2^2 + \omega^2))$ . Par conséquent, on en déduit, de la sous-section 2.1.2 que le cycle limite est stable si  $B > 0$ , et instable si  $B < 0$ .

En revenant aux variables  $x, y$ , on obtient l'expression (5.7). Ceci complète la preuve de l'énoncé (a) du théorème.

En suivant, pour le système (5.5), les mêmes étapes que celles effectuées pour le système (5.4), on obtient que les fonctions moyennées  $f_1$  et  $f_2$  égales

$$f_1(r) = 0,$$

$$f_2(r) = \frac{1}{8b_1\omega^3(b_2^2 + \omega^2)} r(4b_1B\omega^2(b_2^2 + \omega^2) + Cr^2).$$

L'équation  $f_2(r) = 0$  a une unique solution positive

$$r^* = 2\omega\sqrt{-\frac{b_1B(b_2^2 + \omega^2)}{C}},$$

et la dérivée de  $f_2(r)$  en  $r^*$  est égale  $Cr^*/(4b_1\omega^3(b_2^2 + \omega^2))$ , par conséquent, les résultats de (b) sont similaires ceux de (a).

# CONCLUSION ET PERSPECTIVE

L'objectif de ces trois travaux que nous avons effectués dans cette thèse porte sur l'étude de l'existence et du nombre maximum de cycles limites pour des systèmes dynamiques non linéaires.

La théorie de moyennisation était un outil très important, qui nous a permis de trouver les résultats. Présent cette théorie a été utilisée beaucoup ces dernières années pour l'étude des cycles limites des systèmes perturbés.

Dans le premier travail, on a étudié un système quadratique dans  $\mathbb{R}^5$  en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre deux et on a montré un résultat sur le nombre maximum de cycles limites de faible amplitude obtenu par une bifurcation de Hopf autour de l'origine et on a trouvé qu'il y a au plus 27 cycles limites. De plus, on a aussi donné un exemple de systèmes ayant 27 cycles limites, où la borne est atteinte.

Dans le second travail, on a étudié un système quadratique dans  $\mathbb{R}^4$  et on a montré un résultat sur le nombre maximum de cycles limites obtenu par une bifurcation de Hopf autour de l'origine pour ce type de système. L'utilisation de la théorie de moyennisation d'ordre trois, a permis de trouver qu'il y a au plus 25 cycles limites.

L'intérêt du troisième travail concerne l'étude des systèmes de Kolmogorov pour lequel nous avons fourni les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un



cycle limite bifurquant d'un point équilibre de Hopf des systèmes de Kolmogorov polynomiaux de degré arbitraire de dimension 2. Nous avons également fourni une estimation du petit cycle limite bifurquant et nous avons caractérisé la stabilité de ce cycle limite.

Nous entendons continuer nos recherches sur l'existence des cycles limites des systèmes de Lotka Volterra, en utilisant la théorie de la moyennisation d'ordre trois.

Nous notons que les calculs dans cette thèse ont été faits par le logiciel mathématique Maple.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ALARCÓN AND R. RABANAL, *Hopf bifurcation at infinity and dissipative vector fields of the plane*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), 3033–3046.
- [2] A. ALGABA, C. GARCÍA AND M. REYES, *Analytical integrability problem for perturbations of cubic Kolmogorov systems*, Chaos Solitons Fractals **113** (2018), 1–10.
- [3] A. ALGABA, C. GARCÍA AND J. GINÉ, *Nondegenerate centers and limit cycles of cubic Kolmogorov systems*, Nonlinear Dynam. **91** (2018), 487–496.
- [4] ALAVEZ-RAMIREZ J, BLÉ G, LLIBRE J, LOPEZ-LOPEZ J, *On the maximum number of limit cycles of a class of generalized Liénard differential systems*, Int J Bifurcation Chaos, (2012), 22 : 1250063-14.
- [5] ANDRONOV A.A, LEONTOVITCH E.A AND GORDON II. MAYER A.G, *Etude qualitative des systèmes dynamiques d'ordre deux*, En Russe, Nouka Moxau, (1966).
- [6] ANDRONOV A.A, WITT A, *Sur la théorie mathématiques des auto oscillations*, C.R.Acad. Sct. Paris, (1930), 190 : 256-258.
- [7] ANDRONOV A.A, WITT A.A AND KHAIKINS, *Theory of oscillators*, Pergamon Press, (1966).
- [8] N.N. BAUTIN, *On periodic solutions of a system of differential equations (R)*, Prikl. Math. meh. **18** (1954), 128.

- [9] BLOWS TR, LLYOD NG], *The number of small- amplitude limit cycles of Liénard equation*. MATH PROC CAMB PHIL SOC, (1984), 95 : 359-66.
- [10] N.N. BOGOLIUBOV, *On some statistical methods in mathematical physics*, IZV. VO AKAD. NAUK UKR. SSR, KIEV, (1945).
- [11] N.N. BOGOLIUBOV, N. KRYLOV, *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*, PUBL. 8 OF THE UKRAINIAN ACAD. SCI. KIEV, (1934).
- [12] BOGOLIUBOV N.N AND MITROPOLSKY YU. AN, *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*, GORDON AND BREACH, NEW YORK, (1961).
- [13] BUICĂ A, LLIBRE J, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, BULL SCI MATH, (2004), 128 : 7–22.
- [14] F.H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route*, IN H. HAKEN, EDITOR, CHAOS AND ORDER IN NATURE, BERLIN, HEIDELBERG, SPRINGER BERLIN HEIDELBERG, (1981), PP 36–44.
- [15] BUZZI C.A. LLIBRE J AND SILVA P.R.DA, *3-Dimensional Hopf bifurcation via averaging theory*, DISCRETE CONTIN. DYN. SYST, (2007), 17 : 529–540.
- [16] W.A. COPPEL, *A survey of quadratic systems*, J. DIFFERENTIAL EQUATIONS 2 (1966), 293–304.
- [17] CHENGZHI LI AND LLIBRE J, *Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four*, J DIFFER EQU (2012), 252 : 3142–62.
- [18] CHRISTOPHER C.J AND LYNCH S, *Small amplitude limit cycle bifurcation for Liénard systems with quadratic or cubic damping and restoring forces*, NONLINEARITY, (1999), 12 : 1099–1112.
- [19] LOBRY C, *La théorie des bifurcations dynamiques*, EPI MERE MONTPELLIER, (2010).
- [20] D. DJEDID ,J. LLIBRE AND A. MAKHLOUF, *Periodic orbits bifurcating from a Hopf equilibrium of 2–dimensional polynomial Kolmogorov systems of arbitrary degree*, CHAOS, SOLITONS AND FRACTALS, (2020).

- [21] D. DJEDID, E. BENDIB AND A. MAKHLOUF, *4-dimensional zero-Hopf bifurcation of quadratic polynomial differential system, via averaging theory of third order*. DYNAMICAL AND CONTROL SYSTEMS, (2020).
- [22] C. DU, Q. WANG AND W. HUANG, *Three-dimensional Hopf bifurcation for a class of cubic Kolmogorov model*, INTERNAT. J. BIFUR. CHAOS APPL. SCI. ENGRG. **24** (2014), NO. 3, 1450036, 11 pp.
- [23] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, SPRING-VERLAG, BERLIN, (2006).
- [24] DULAC H, *Sur les cycles limites*, BULL. SOC. MATH. FRANCE, (1923), 51 : 45–188.
- [25] DUMORTIER F, LI C, *Quadratic Liénard equations with quadratic damping*, J DIFFER EQU, (1997), 139 : 41-59.
- [26] DUMORTIER F, ROUSSEAU C, *Cubic Liénard equations with linear damping*. NON-LINEARITY, (1990), 3 : 1015-39.
- [27] ECALLE J, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. PARIS, FRANCE HERMANN, (1992).
- [28] A. FEDDAOUI, J. LLIBRE AND A. MAKHLOUF , *A4-dimensional zero-Hopf bifurcation for polynomial differentials systems with cubic homogeneous nonlinearities via averaging theory*, (2019).
- [29] R. HERING, *Oscillations in Lotka–Volterra systems of chemical reactions*, J. MATH. CHEM. **5** (1990), 197–202.
- [30] ILYASHENKO Y, *Finiteness theorems for limit cycles*. PROVIDENCE, RI : AMERICAN MATH. SOCIETY, (1991).
- [31] IRISSON J, *L'analyse de bifurcations*, ECOLE PRATIQUE DES HAUTES ETUDES, UMR-CNRS 8046.
- [32] GASULL A AND TORREGROSA J, *Small-amplitude limit cycles in Liénard systems via multiplicity*, J DIFFER EQU (1998), 159 : 1015-39.
- [33] GINÉ J, GRAU M AND LLIBRE J, *Averaging theory at any order for computing periodic orbits*, PHYS, (2013), 250 : 58-65.

- [34] GUCKENHEIMER J, *On a codimension two bifurcation*, LECTURE NOTES IN MATH, (1980), 898 : 99-142.
- [35] GUCKENHEIMER J, HOLMES P, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, REVISED AND CORRECTED REPRINT OF THE 1983 ORIGINAL. APPLIED MATHEMATICAL SCIENCES, 42. NEW YORK : SPRINGER-VERLAG, (1990).
- [36] KRYLOV N. M ET BOGOLIUBOV N. N, *Introduction à la mécanique nonlinéaire : Les méthodes approchées et asymptotiques*, VOL. 1-2 OF UKRAINSKA AKAD. NAUK INST. MEC. PARIS : CHAIRE DE PHYS. MATH. ANNALES, (1937).
- [37] KUZNETSOV YA, *Elements of applied bifurcation theory*, THIRD EDITION. APPLIED MATHEMATICAL SCIENCES, 112. NEW YORK : SPRINGER-VERLAG, (2004).
- [38] A. KOLMOGOROV, *Sulla teoria di Volterra della lotta per lesistenza*, GIORNALE DELL ISTITUTO ITALIANO DEGLI ATTUARI 7 (1936), 74–80.
- [39] W.E. LAMB, *Theory of an optical maser*, PHYS. REV. **134** (1964), 1429–1450.
- [40] LIÉNARD A, *Étude des oscillations entretenues*, REVUE GÉN' ÉLECTRO, (1928), 23 : 946-54.
- [41] LINS A, DE MELO W, PUGH CC, *On Liénard's equation*, LECTURE NOTES IN MATHEMATICS. BERLIN : SPRINGER, (1977), 597 : 335-57.
- [42] G. LAVAL AND R. PELLAT, *Plasma physics (Les Houches)*, PROC. SUMMER SCHOOL OF THEORETICAL PHYSICS, 1975, PP 261.
- [43] X. LIANG AND J. JIANG, *The dynamical behaviour of type-K competitive Kolmogorov systems and its application to three-dimensional type-K competitive Lotka-Volterra systems*, NONLINEARITY **16** (2003), NO. 3, 785–801.
- [44] A.J. LOTKA, *Elements of physical biology*, SCIENCE PROGRESS IN THE TWENTIETH CENTURY (1919-1933), **21**(82) (1926), 341–343.
- [45] J. LLIBRE AND X. ZHANG, *Hopf bifurcation in higher dimensional differential systems via the averaging method differential system in  $\mathbb{R}^d$* , PACIFIC J. MATH. **240** (2009), 321–341.
- [46] R.M. MAY, *Stability and complexity in model ecosystems*, PRINCETON UNIVERSITY PRESS PRINCETON, N.J, (1973).

- [47] J.E. MARSDEN AND M. MCCRACKEN, *The Hopf bifurcation and its applications, Applied Mathematical Sciences, New York, Springer-Verlag, (1976).*
- [48] S. MURATORI AND S. RINALDI, *Limit cycles and Hopf bifurcations in a Kolmogorov type system, MIC—Modeling Identification Control* **10** (1989), no. 2, 91–99.
- [49] LLIBRE J, *Periodic Solutions Via Averaging Theory, (2014).*
- [50] LLIBRE J, MAKHLOUF A, BADI S, *3-dimensional Hopf bifurcation via averaging theory of second order, Discrete Contin Dynam Syst* (2009), 25 : 1287-1295.
- [51] LLIBRE J, NOVAES D.D AND TEIXEIRA M.A , *Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree, IOP Pub Ltd, London Mathematical Society, (2014), 27 : 563-583.*
- [52] LLIBRE J, MEREU AC, TEIXEIRA M A, *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations, Math Proc Cambridge Philos Soc* (2010), 148 : 363-383.
- [53] LLIBRE J, VALLS C *On the number of limit cycles of a class of polynomial differential systems. Proc A : R Soc* (2012), 468 : 2347-60.
- [54] LLIBRE J, VALLS C, *Limit cycles for a generalization of polynomial Liénard differential systems, Chaos, Soltions Fractals* (2013), 46 : 65-74.
- [55] LLOYD N.G, *Degree Theory, Cambridge University Press, (1978).*
- [56] LLOYD N.G. LYNCH S, *Small-amplitude limit cycles of certain Liénard systems. Proc R Soc Lond Ser A* (1988), 418 : 199-208.
- [57] LYNCH S, *Limit cycles of generalized Liénard equation, Appl Math Lett* (1995), 8 : 15-7.
- [58] LYNCH S. AND CHRISTOPHER C, *Limit cycles in highly non-linear differential equations. J. Sound Vib, (1999), 224 : 505-517.*
- [59] MARSDEN JE, MCCRACKEN M, *The Hopf bifurcation and its applications, Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag, (1976).*
- [60] PERKO L, *Differential Equations and Dynamical Systems, Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, (2001).*
- [61] POINCARÉ H, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle,(première partie), Journal Mathématique, (1881).*

- [62] POINCARÉ H, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Vol I Paris, 1892.*
- [63] ROSEAU M, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité. (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer- Verlag, Berlin-New York, (1966).*
- [64] RYCHKOV GS, *The maximum number of limit cycle of the system  $\dot{x} = y - a_1x^3 - a_2x^5$ ,  $\dot{y} = -x$  is two. DifferUraon (1975), 11 : 380–91.*
- [65] S. SOLOMON AND P. RICHMOND,  
*Stable power laws in variable economies, Lotka-Volterra implies pareto-zipf, The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems, 27(2) (2002), 257–261.*
- [66] SANDERS JA, VERHULST F, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems, Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag, (1985).*
- [67] VAN DER HEIJDEN, G, *Hopf Bifurcation, <http://www.ucl.ac.uk/ucesgvd/hopf.pdf>.*
- [68] VAN DER POL B, *Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance. London, Edinburgh and Dublin Philos. Mag, (1927).*
- [69] VERHULST F, *Nonlinear differential equations and dynamical systems. University, Berlin : Springer-Verlag, (1996).*
- [70] V. VOLTERRA, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, Memoire della R. Accademia Nazionale dei Lincei, CCCCXXIII(II) (1926), 558–560.*
- [71] WANG Y. AND JING Z, *Cubic Liénard equations with quadratic damping(II), Acta Mathematicae Applicatae Sinica, (2002), 18 : 103-116.*
- [72] XIANWU Z, *Remarks on the uniqueness of limit cycles, Kexue Tongbao, (1983), 28 : 452-455.*
- [73] YU P, HAN M, *Limit cycles in generalized Liénard systems. Chaos solutions Fract, (2006), 30 : 1048-68.*
- [74] ZHANG Z, *On the existence of exactly two limit cycles for the Liénard equation. Acta Math. Sinica, (1981), 24 : 710-716.*