

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA  
UNIVERSITY  
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2021

Département de Mathématiques

## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de  
Doctorat en Sciences

**APPROXIMATION NUMERIQUE DE CERTAINES EQUATIONS  
INTEGRALES DE PREMIERE ESPECE PAR DES METHODES  
SPECTRALES**

**Option**

Mathématiques pour le développement

**Par :**

**BECHOUAT Tahar**

**DIRECTEUR DE THÈSE :** BOUSSETILA Nadjib

Prof. UNIV. GUELMA

**CO-DIRECTEUR DE THÈSE :** REBBANI Faouzia

Prof. E.S.T.I. ANNABA

Devant le jury

**PRESIDENT :** CHORFI Lahcène Prof U.B.M. ANNABA

**EXAMINATEUR :** KOUCHE Mahieddine Prof U.B.M. ANNABA

**EXAMINATEUR :** ZOUYED Fairouz Prof U.B.M. ANNABA

**EXAMINATEUR :** BENRABAH Abderafik M.C.A UNIV. GUELMA

**UNIVERSITÉ BADJI MOKHTAR-ANNABA**  
**FACULTÉ DES SCIENCES**  
**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

# **THÈSE**

En vue l'obtention du Diplôme de  
**Doctorat en Mathématiques**

Présentée et soutenue par  
**BECHOUAT Tahar**

---

**APPROXIMATION NUMÉRIQUE DE CERTAINES  
ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE PAR  
DES MÉTHODES SPECTRALES**

---

**Directeur de Thèse :** Prof. Boussetila Nadjib (U. Guelma)

**Co-Directeur de Thèse :** Prof. Rebbani Faouzia (ESTI. Annaba)

**Jury**

**Président :** Chorfi Lahcène (Prof., UBM Annaba)

**Examineur :** Kouche Mahieddine (Prof., UBM Annaba)

**Examineur :** Zouyed Fairouz (Prof., UBM Annaba)

**Examineur :** Benrabah Abderafik (MCA., U. Guelma)

**Année 2020**

# ملخص

نهدف من خلال هذه الأطروحة إلى دراسة التقريب الاسقاطي الطيفي المدعم بتعديل تخونوف من اجل إنشاء حلول تقريبية متزنة للمعادلات التكاملية من نمط فريدهولم من الصنف الأول والتميز بالطبيعة المعتلة. نبرز في هذه الدراسة مشروعية المقاربة النظرية لمثل هذه التقريبات مشفوعة بالنتائج العددية المبينة لتقارب الحلول التقريبية نحو الحلول الأصلية.

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التكاملية من نمط فريدهولم من الصنف الأول، التقريب الاسقاطي، طريقة التجميع الطيفي، تعديل تخونوف .

## Abstract

In this thesis, we develop numerical approximation approaches for a class of Fredholm integral equations of the first kind. The adopted regularization strategy is essentially based on Tikhonov method combined with orthogonal projection methods. We show the convergence of these approaches accompanied by a series of numerical experiments justifying the theoretical results obtained and the accuracy of the approximated solutions.

**Keywords:** *Fredholm integral equations of the first kind, Tikhonov regularization, spectral collocation method, projection method.*

## Résumé

Dans cette thèse, on développe des approches d'approximation numérique pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. La stratégie de régularisation adoptée repose essentiellement sur la régularisation de Tikhonov combinée avec les méthodes de projection orthogonale. On donne le cadre théorique qui montre la convergence de ces approches accompagnées d'une série d'expérimentations numériques justifiant les résultats théoriques obtenus et l'exactitude des solutions approchées.

**Mots clés :** *Equations intégrales de Fredholm de première espèce, régularisation de Tikhonov, méthodes spectrales de collocation, méthodes de projection.*

© BECHOUAT Tahar

Doctorat en Sciences : Approximation Numérique de Certaines  
Equations Intégrales de Première Espèce par des Méthodes Spectrales

Université Badji Mokhtar Annaba

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Appliquées (**LMA Annaba**)

Equipe de recherche : **IIPP**

### **Composition du document**

La production de ce document repose sur la programmation lettrée avec LaTeX.

Distribution [TeX Live 2017].

Math Package : *mathdesign*.

Text Package : *Bitstream Charter font*.

*Dès que tu avances sur le chemin, le chemin apparaît.*

*Elève tes mots, pas ta voix. C'est la pluie qui fait grandir les fleurs, pas le tonnerre.*

*Hier j'étais intelligent, alors je voulais changer le monde. Aujourd'hui je suis sage, alors je veux  
changer ma personne.*

*La peur est sans cause. Elle est imagination, et elle vous bloque tout comme un piquet de bois peut  
bloquer une porte. Brûlez ce piquet...*

*La vérité est un miroir tombé de la main de Dieu et qui s'est brisé. Chacun en ramasse un fragment et  
dit que toute la vérité s'y trouve.*

*Fais le bien et jette-le dans la rivière : un jour il te sera rendu dans le désert.*

**Djalal Addine Rumi**

# Remerciements

- Avant tout je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.
- J'adresse mes vifs remerciements à mes Directeurs de thèse : *Prof. Boussetila Nadjib* (U. Guelma) et *Prof. Rebbani Faouzia* (ESTI Annaba). Je leur suis très reconnaissant de la confiance qu'ils m'ont toujours témoigné au cours de ce doctorat. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance pour leur suivi attentif, leur soutien, leurs conseils et leur disponibilité.
- Je tiens également à remercier *M. Chorfi Lahcène* (Prof. U. Annaba) qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi que *Mme. Zouyed Fairouz* (Prof.U. Annaba), *M. Kouche Mahieddine* (Prof.U. Annaba) et *M. Benrabah Abderafik* (MCA. U. Guelma) pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.
- Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques (UBMA Annaba) pour toute l'aide qui m'a été accordée.
- Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation, surtout les enseignants de l'école doctorale (Mathématiques du développement).
- Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

# *Dédicace*

*Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...*

*Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, L'amour, le respect, la reconnaissance...*

*Aussi, c'est tout simplement que*

## *Je dédie cette thèse ...*

*À ma très chère mère NEDJMA*

*À mon Père MOHAMMED*

*À ma très chère épouse OUARDA.*

**BECHOUAT Tahar**

---

## Publication découlant de cette Thèse

---

— Bechouat Tahar, Boussetila Nadjib and Rebbani Faouzia, *A Variant of Projection-Regularization Method for ill-posed linear operator equations*.

— International Journal of Computational Methods.

— IJCM Impact Factor 2019 : 1.716 (Category A).

— Submission date : 07.01.2020.

— Acceptance date : 14.09.2020.

— Online published : 01 Oct 2020 00 :00.

— Article URL : <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0219876221500080>

**Indexation DGRST 2020** : No. 5770, International Journal of Computational Methods WORLD SCIENTIFIC PUBL CO PTE LTD ISSN 0219-8762 E-ISSN 1793-6969.



---

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Thématique de la thèse</b>	<b>1</b>
<b>Contenu de la thèse</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappels et notations</b>	<b>5</b>
1.1 Equations intégrales . . . . .	5
1.1.1 Opérateurs compacts et théorie de Riesz-Fredholm . . . . .	5
1.1.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts . . . . .	7
1.1.3 Equations intégrales de première espèce . . . . .	9
1.2 Problèmes mal posés . . . . .	15
1.2.1 Outils d'analyse des problèmes mal posés . . . . .	19
1.2.2 Méthodes de régularisation . . . . .	20
1.3 Polynômes de Tchebychev . . . . .	24
1.3.1 Formules de quadrature de Gauss-Tchebychev . . . . .	26
1.4 Fonctions d'ondes sphéroïdales . . . . .	27
1.4.1 Polynômes de Legendre . . . . .	30
1.4.2 Approximation numérique des fonctions PSWFs . . . . .	31
<b>2 Méthode de Projection régularisée basée sur les fonctions PSWFs</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	33
2.2 Approximation de rang fini . . . . .	35

---

2.3	Régularisation de Tikhonov en dimension finie . . . . .	37
2.4	Convergence de la méthode et estimations d'erreur . . . . .	40
2.5	Choix a posteriori du paramètre de régularisation . . . . .	44
2.6	Tests numériques . . . . .	46
2.6.1	Conclusion . . . . .	48
2.6.2	Tableaux . . . . .	49
2.6.3	Figures . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Méthode de collocation régularisée basée sur les polynômes de Tchebychev</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction . . . . .	67
3.2	Approximation de rang fini . . . . .	71
3.3	Convergence de la méthode et estimations d'erreur . . . . .	78
3.4	Choix a posteriori du paramètre de régularisation . . . . .	80
3.5	Tests numériques . . . . .	81
3.5.1	Tableaux . . . . .	82
3.5.2	Figures . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Une variante abstraite de la méthode de projection-régularisée</b>	<b>100</b>
4.1	Introduction et motivation . . . . .	100
4.2	Classes de régularité de Jackson-Bernstein . . . . .	104
4.3	Approximation de rang fini . . . . .	107
4.4	Convergence de la méthode et estimations d'erreur . . . . .	112
4.5	Choix du paramètre de régularisation . . . . .	114
4.5.1	Choix a priori du paramètre de régularisation . . . . .	115
4.5.2	Choix a posteriori du paramètre de régularisation . . . . .	115
4.6	Applications . . . . .	122
4.6.1	Application 1 . . . . .	122
4.6.2	Application 2 . . . . .	123
4.7	Tests numériques . . . . .	124

4.7.1 Tableaux . . . . .	127
4.7.2 Figures . . . . .	131
<b>Conclusion et Perspective</b>	<b>142</b>

# Introduction

## Thématique de la thèse

Plusieurs problèmes inverses issus de l'ingénierie peuvent être formulés par des équations linéaires de première espèce de la forme :

$$\mathbb{T}f = g, \quad (\text{E})$$

où  $g$  est la donnée (mesure),  $f$  la quantité physique recherchée et  $\mathbb{T}$  l'opérateur qui modélise le système physique défini entre deux espaces fonctionnels  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  de dimension infinie.

Dans cette étude, on se place dans une structure hilbertienne :  $\mathbb{H}_1 = L^2(I)$  ( $I = ]a, b[, dt$ ) et  $\mathbb{H}_2 = L^2(J)$  ( $J = ]a, b[, wdt$ ) où  $w$  est une fonction poids, et on considère l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\mathbb{T} : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2; \mathbb{T}f(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt = g(s), s \in (-1, 1), \quad (\text{IEFK})$$

où le noyau  $k(.,.) \in L^2(I \times J)$ , qui est en général non dégénéré, la donnée  $g \in \mathbb{H}_2$  et  $f \in \mathbb{H}_1$  l'inconnue recherchée.

Cette catégorie de problèmes (IEFK) est caractérisée par une nature instable (c'est-à-dire, le problème (IEFK) est mal posé au sens de Hadamard), et leur traitement numérique pose des problèmes très délicats<sup>1</sup>.

---

1. Les problèmes mal-posés sont les plus contraignants d'un point de vue pratique mais les plus attrayants d'un point de vue mathématique.

Les équations intégrales de Fredholm de première espèce englobent plusieurs formulations inverses de certains modèles physiques, on peut citer par exemple : la tomographie, la spectroscopie, le rayonnement et le traitement d'images et d'autres applications (cf. [Kir11]).

Les méthodes de résolution numérique consacrées aux problèmes inverses et mal-posés est une branche mathématique très importante et de grand intérêt pour les applications physiques et industrielles.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour résoudre les problèmes (IEFK). On peut citer par exemple : les méthodes multi-échelles [CAX15], les méthodes de collocation-spectrale [Hua11, Nai09], les méthodes SVD [EHN96], les méthodes de collocation-quadrature [NP07, PST18], les méthodes de projection [NBR16, Neu87, KN88, Nai17] et d'autres méthodes intéressantes.

Dans la pratique, on remarque souvent qu'il y a deux méthodes numériques les plus utilisables pour discrétiser cette catégorie de problèmes instables (IEFK) : les méthodes de collocation (les méthodes de Nyström) [KO12, MMA07, MNY07], et les méthodes de Galerkin (les méthodes de Projection, les méthodes spectrales,...) [Hua11, NBR16, Neu87, PLN13, PN11]. La première méthode est basée sur des formules de quadrature, i.e., l'approximation numérique des intégrales par des sommes pondérées supportées sur un ensemble de points (noeuds). La seconde technique consiste à projeter l'équation sur un sous-espace de dimension finie, où la solution recherchée s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base de cet espace.

Parmi les approches de régularisation pour neutraliser le caractère d'instabilité de (IEFK), on trouve la méthode de Tikhonov (méthode LSQ hilbertienne). Cette dernière consiste à reformuler le problème en question sous la forme d'un problème de minimisation quadratique avec un terme de pénalité. La solution produite de cette formulation est appelée solution régularisée et son calcul explicite nécessite le calcul de toutes les valeurs propres de l'opérateur intégral. Il est clair donc que cette approche est purement théorique et elle peut servir uniquement pour des résultats qualitatifs et théoriques.

Pour les problèmes pratiques, on fait appel à des méthodes de régularisation sophistiquées comme les méthodes LSQ projetées, i.e., une méthode de Tikhonov en dimension finie. Cette procédure de

régularisation avec deux paramètres  $\alpha$  et  $N$  ( $\alpha$  le paramètre de régularisation,  $N$  la dimension du sous-espace de projection) nous permet d'améliorer la qualité de la solution approchée régularisée : le paramètre  $N$  participe dans la troncature spectrale pour éliminer les hautes fréquences, et le paramètre  $\alpha$  comme un filtre stabilisateur.

La réalisation de cette stratégie d'approximation-régularisation se fait de deux manières différentes : *schéma RD* (régularisation-discrétisation), *schéma DR* (discrétisation-régularisation). La première approche est bien étudiée dans la littérature, pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [EHN96]. Pour la seconde qui a commencé à se développer ces dernières années, on remarque la rareté des résultats théoriques consacrés aux estimations d'erreur et à l'analyse a posteriori, sauf quelques travaux récents établis sous des conditions trop restrictives. D'où la motivation de cette thèse qui vise de ramener quelques éléments nouveaux dans cette direction et dans un cadre simple et général.

## Contenu de la thèse

Cette thèse porte sur l'étude théorique et numérique d'une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. Elle est composée de quatre chapitres.

Dans le **Chapitre 1**, on rappelle quelques résultats préliminaires d'analyse fonctionnelle de la théorie de Riesz Fredholm, ainsi que les notions de base des problèmes mal posés et la méthode de régularisation de Tikhonov. On donne aussi quelques résultats connus d'analyse numérique pour les fonctions PSWFs et les polynômes orthogonaux de Tchebychev.

Le **Chapitre 2** est consacré à la régularisation et l'approximation numérique d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce (IEFK) par la méthode de LSQ projetée, où le sous-espace de projection est formé par les fonctions PSWFs (*fonctions d'ondes sphéroïdales*). On donne l'analyse théorique (convergence, estimations d'erreur) de cette stratégie de régularisation accompagnée par une série de tests numériques justifiant le choix judicieux de cette base de fonctions qui n'a pas été bien exploitée dans la résolution des (IEFK) jusqu'à nos jours. Pour le paramètre de régularisation on adopte un choix a posteriori basé sur la méthode de Morozov cubique amortie.

Quant au **chapitre 3**, on continue dans la même direction en considérant (IEFK) entre deux

structure hibernées différentes. En utilisant les polynômes de Tchebychev, on construit une méthode LSQ projetée (collocation-régularisée) adaptée à notre cadre fonctionnel, et on montre sa convergence sous certaines conditions de régularité imposées sur le noyau de l'opérateur intégral et la solution recherchée. Cette étude est clôturée par une série de tests numériques où le paramètre de régularisation est sélectionné via la méthode de Morozov cubique amortie.

Dans le **Chapitre 4**, on donne un cadre abstrait de la méthode LSQ projetée dans un cadre hilbertien. Ce volet contient la contribution originale de notre thèse. En utilisant une variante de la méthode de projection et la méthode de régularisation de Tikhonov, on construit une famille d'opérateurs de régularisation de rang fini avec deux paramètres. Pour établir la convergence de cette procédure d'approximation-régularisation, on introduit une nouvelle notion topologique (condition de Jackson-Bernstein) pour mesurer la régularité de l'opérateur. Cette condition nous permet d'établir les estimations d'erreur dans un cadre général, et pour fixer le paramètre de régularisation, on utilise deux stratégies de choix : analyse a priori et analyse a posteriori. Cette étude est clôturée par une série de tests numériques justifiant le choix judicieux de la stratégie de régularisation développée dans cette thèse pour une classe large de problèmes mal-posés linéaires.

# Chapitre

# 1

---

## Rappels et notations

Pour faciliter la lecture du manuscrit, on donne ici un rappel de certaines notions d'analyse fonctionnelle, quelques éléments de la théorie des problèmes mal-posés, ainsi que quelques propriétés de base liées aux polynômes orthogonaux utilisés dans cette thèse. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux références [LP61, LP62, MH02, CHQZ06, Bre99, Nai09, EHN96].

### 1.1 Equations intégrales

#### 1.1.1 Opérateurs compacts et théorie de Riesz-Fredholm

Soient  $(\mathbb{E}_1, \|\cdot\|_1)$  et  $(\mathbb{E}_2, \|\cdot\|_2)$  deux espaces de Banach sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.1.1.** Un opérateur linéaire est une application  $T : \mathcal{D}(T) \subseteq \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$  linéaire, où  $\mathcal{D}(T)$  est le domaine de définition de l'application linéaire  $T$ , qui est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{E}_1$ , que l'on suppose en général dense dans  $\mathbb{E}_1$ . L'opérateur  $T : \mathcal{D}(T) \subseteq \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$  est dit borné si la quantité

$$\|T\| = \sup \{ \|Tu\|_2, u \in \mathcal{D}(T) \text{ et } \|u\|_1 = 1 \}$$

est finie. Dans ce cas  $T$  est une application linéaire continue sur  $\mathcal{D}(T)$ , et lorsque  $\mathcal{D}(T)$  est dense dans  $\mathbb{E}_1$ ,  $T$  s'étend de manière unique à un opérateur borné sur  $\mathbb{E}_1$ .

---



On note par  $\mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$  l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de  $\mathbb{E}_1$  dans  $\mathbb{E}_2$ , que l'on munit de la norme de la convergence uniforme définie par :

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2), \|T\| = \sup_{0 \neq u \in \mathbb{E}_1} \frac{\|Tu\|_2}{\|u\|_1}.$$

Si  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2$ , on note par  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$  les endomorphismes continus de  $\mathbb{E}$ .

**Remarque 1.1.1.** Si  $\mathbb{E}_2$  est un espace de Banach, alors  $\mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$  est un espace de Banach.

► Pour tout opérateur linéaire  $T : \mathcal{D}(T) \subseteq \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$ , on note par :

- 1  $\mathcal{G}(T) = \{(u, Tu), u \in \mathcal{D}(T)\} \subseteq \mathbb{E}_1 \times \mathbb{E}_2$  (graphe de  $T$ ).
- 2  $\mathcal{N}(T) = \{u \in \mathcal{D}(T), Tu = 0\} \subseteq \mathcal{D}(T)$  (noyau de  $T$ ).
- 3  $\mathcal{R}(T) = \{v = Tu, u \in \mathcal{D}(T)\} \subseteq \mathbb{E}_2$  (image de  $T$ ).

**Définition 1.1.2.** L'opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$  ( $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  deux espaces de Banach) est dit compacte si l'image  $T(\mathbf{B}_{\mathbb{E}_1}(0, 1))$  est relativement compacte, i.e.,  $\overline{T(\mathbf{B}_{\mathbb{E}_1}(0, 1))}$  est un ensemble compact pour la topologie forte de  $\mathbb{E}_2$ , où  $\mathbf{B}_{\mathbb{E}_1}(0, 1)$  est la boule unité de  $\mathbb{E}_1$ .

On note par  $\mathcal{K}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$  l'ensemble des applications linéaires compactes de  $\mathbb{E}_1$  dans  $\mathbb{E}_2$ .

**Remarque 1.1.2.** Si  $\dim(\mathcal{R}(T))$  est finie, on dit alors que  $T$  est de rang fini, donc compact. On note par  $\mathcal{K}_0(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$  l'ensemble des applications linéaires de rang fini de  $\mathbb{E}_1$  dans  $\mathbb{E}_2$ .

La proposition suivante donne des propriétés fondamentales de stabilité des opérateurs compacts.

**Proposition 1.1.1.** Soient  $\mathbb{E}_1$  et  $\mathbb{E}_2$  deux espaces de Banach. Alors :

- i)  $\mathcal{K}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ .
- ii) Soient  $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$  et  $\mathbb{E}_3$  des espaces de Banach,  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$  et  $S \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_2, \mathbb{E}_3)$ . Si  $S$  ou  $T$  est compact alors  $ST$  est compact. En particulier,  $\mathcal{K}(\mathbb{E})$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ .

Soient  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $T$  un opérateur dans  $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ .

Le spectre de  $T$  est l'ensemble  $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} \text{ tels que } (T - \lambda I) \text{ n'est pas bijectif sur } \mathbb{H}\}$ .

L'ensemble résolvant  $\rho(T)$  de  $T$  est le complémentaire du spectre  $\sigma(T)$  sur  $\mathbb{H}$ .

Le spectre ponctuel de  $T$  est le sous-ensemble  $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \text{ tels que } \mathcal{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$ .

Les éléments de  $\sigma_p(T)$  sont appelés les valeurs propres de  $T$ .

**Théorème 1.1.1.** Soit  $T : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$  un opérateur continu ( $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  sont deux espaces de Hilbert ). Les trois énoncés suivants sont équivalents :

- i)  $T$  est compact.
- ii) Pour toute suite  $(x_n) \subset \mathbb{H}_1$ , on a  $x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx$ .
- iii) Pour toute suite orthonormale  $(e_n) \subset \mathbb{H}_1$ , on a  $Te_n \rightarrow 0$ .

**Proposition 1.1.2.** Soit  $T$  un opérateur continu de l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}_1$  vers l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}_2$ . Alors  $T$  est compact si et seulement si  $T^*$  est compact, où  $T^*$  est l'opérateur adjoint de l'opérateur  $T$ .

**Théorème 1.1.2.** Pour tout  $T \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$  il existe une suite  $(T_n) \subset \mathcal{K}_0(\mathbb{H})$  telle que  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , c-à-d.,  $\mathcal{K}(\mathbb{H}) = \overline{\mathcal{K}_0(\mathbb{H})}$ .

### 1.1.2 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

**Théorème 1.1.3.** [Alternative de Fredholm : V1]<sup>1</sup> Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$  ( $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  sont deux espaces de Hilbert ). On a les propriétés suivantes :

$$1) \mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp \quad 2) \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^\perp \quad 3) \mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)} \quad 4) \mathcal{N}(T^*)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$$

**Théorème 1.1.4.** [Alternative de Fredholm : V2] Soient  $T \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$  ( $\mathbb{H}$  un espaces de Hilbert ) et  $\lambda \neq 0$ . Alors,

- 1)  $\mathcal{N}(T - \lambda I)$  est de dimension finie et  $\dim(\mathcal{N}(T - \lambda I)) = \dim(\mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I))$ .
- 2)  $\mathcal{R}(T - \lambda I)$  est sous-espace fermé dans  $\mathbb{H}$ .
- 3)  $\mathcal{R}(T - \lambda I) = \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)} = \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I)^\perp$ .
- 4)  $\mathcal{R}(T - \lambda I) = \mathbb{H} \iff \mathcal{N}(T^* - \bar{\lambda} I) = \{0\} \iff \mathcal{N}(T - \lambda I) = \{0\} \iff \mathcal{R}(T^* - \bar{\lambda} I) = \mathbb{H}$ .

**Corollaire 1.1.1.** Soient  $\mathbb{H}$  un espaces de Hilbert de base  $(e_1, e_2, \dots)$  et  $T$  un un opérateur dans  $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ . Si on note  $P_n$  la projection orthogonale sur l'espace  $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n T - T\| = 0.$$

1. Cours d'Analyse Fonctionnelle appliquée : Théorie Spectrale et Applications, J. Chevalier, Université de Liege (1998).

**Théorème 1.1.5.** Soit  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  un opérateur compact avec  $\dim(\mathbb{H}) = \infty$ . Alors on a :

- 1)  $0 \in \sigma(T)$ ,
- 2)  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ ,
- 3) l'une des situations suivantes :
  - a) ou bien  $\sigma(T) = \{0\}$ ,
  - b) ou bien  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  est fini,
  - c) ou bien  $\sigma(T) \setminus \{0\}$  est une suite qui tend vers 0.

**Théorème 1.1.6.** On suppose que  $\mathbb{H}$  est séparable. Soit  $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  un opérateur auto-adjoint compact. Alors  $\mathbb{H}$  admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de  $T$  :

$$\forall x \in \mathbb{H}, \quad x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x_0 \in \mathcal{N}(T), \quad Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \lambda_i e_i. \quad (1.1.1)$$

### Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm

Considérons l'équation

$$T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad (T - \lambda I)f = g, \quad (1.1.2)$$

où  $\mathbb{H}$  est séparable,  $T$  un opérateur auto-adjoint compact donné par sa décomposition spectrale (1.1.1) et  $f$  et  $g$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{H}$  donnés, tels que :

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i, \quad g = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, e_i \rangle e_i.$$

Si  $\lambda \notin \sigma(T)$ , la solution de l'équation (1.1.2) est donnée par :

$$f = -\frac{g_0}{\lambda} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle g, e_i \rangle}{\lambda_i - \lambda} e_i.$$

Si  $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$  c'est-à-dire que  $\lambda = \lambda_s$ , l'équation (1.1.2) n'a de solution que si  $g \in \mathcal{N}(T - \lambda_s I)^\perp$  ( c'est-à-dire  $g_s = 0$  ) et dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = -\frac{g_0}{\lambda_s} + \sum_{s \neq i}^{\infty} \frac{\langle g, e_i \rangle}{\lambda_i - \lambda_s} e_i + G_s,$$

où  $G_s$  est un élément arbitraire de  $\mathcal{N}(T - \lambda_s I)$ .

Si  $0 = \lambda$ , l'équation (1.1.2) admet une solution si  $g \in \mathcal{N}(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T)}$  ( $\Leftrightarrow g_0 = 0$ ) et que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\langle g, e_i \rangle|^2}{\lambda_i^2},$$

soit convergente. Dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle g, e_i \rangle}{\lambda_i} e_i + G_0,$$

où  $G_0$  est un élément arbitraire de  $\mathcal{N}(T)$ .

### 1.1.3 Equations intégrales de première espèce

**Définition 1.1.3. [Opérateurs de Hilbert-Schmidt]** Soit  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert séparable. On dit que  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H})$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne  $\{e_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{H}$  telle que  $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\| < \infty$ .

On note par  $\mathcal{L}_{hs}(\mathbb{H})$  l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt définis sur  $\mathbb{H}$  et on note la quantité  $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|$  par  $\|T\|_{hs}$ .

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts.

Les opérateurs de Hilbert-Schmidt forment une classe remarquable d'opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert.

**Remarque 1.1.3.** Soient  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert séparable, et  $T \in \mathcal{L}_{hs}(\mathbb{H})$ . On a :

1) Si  $\{f_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{H}$  est une autre base hilbertienne de  $\mathbb{H}$ , alors  $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|T^*f_k\|$ .

2) Pour toute base hilbertienne  $\{\hat{e}_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{H}$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|T\hat{e}_k\|$ .

**Théorème 1.1.7.** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $k(.,.) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  une fonction dans  $L^2(\Omega \times \Omega)$ . Alors l'opérateur intégral défini par :

$$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), Kf(s) = \int_{\Omega} k(s, t)f(t)dt$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt donc compact.

Considérons l'équation intégrale de Fredholm de première espèce (resp. de seconde espèce)

$$\int_{\Omega} k(s, t)f(t)dt = g(s), \quad (1.1.3)$$

$$f(s) - \lambda \int_{\Omega} k(s, t)f(t)dt = g(s), \quad (1.1.4)$$

où  $\Omega = (a, b)$ , le noyau  $k$  dans  $L^2(\Omega \times \Omega)$ , la donnée  $g$  dans  $L^2(\Omega)$  et le multiplicateur  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  est donné. Notre but est d'étudier l'existence d'une solution  $f \in L^2(\Omega)$  à ces équations et, si possible, de la représenter. Nous réduirons les équations intégrales (1.1.3) et (1.1.4) aux formes abstraites

$$Kf = g, \quad (I - \lambda K)f = g,$$

où  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  est un opérateur compact.

**Proposition 1.1.3.** Soit  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  l'opérateur défini dans (1.1.3), alors l'adjoint  $K^*$  est donné par :  $K^*g(t) = \int_{\Omega} \overline{k(s, t)}g(s)ds$  et  $\|K\| \leq \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} |k(s, t)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} = \|k(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}$ .

**Définition 1.1.4.** On dit que la valeur  $\lambda \neq 0$  est une valeur singulière de l'opérateur  $K$  si l'équation  $(I - \lambda K)f = 0$  admet une solution  $f \neq 0$  c'est-à-dire  $\mathcal{N}(I - \lambda K) \neq \{0\}$ .

**Remarque 1.1.4.** L'équation  $(I - \lambda K)f = 0$  s'écrit encore  $(\mu I - K)f = 0$ , où  $\mu = 1/\lambda$ , on voit que  $\lambda$  est une valeur singulière de  $K$  si et seulement si  $\mu$  est une valeur propre de  $K$ .

- Les solutions non nulles de l'équation  $(I - \lambda K)f = 0$  seront encore appelées éléments propres et le nombre d'éléments propres linéairement indépendants associés à une même valeur singulière  $\lambda$  définit la multiplicité de celle-ci.
- On sait bien qu'un opérateur compact  $K$  admet un nombre fini ou une suite de valeurs singulières dont les modules tendent vers 0 en décroissance.
- Chaque valeur singulière est de multiplicité finie et  $\lambda$  est valeur singulière de  $K$  si et seulement si  $\bar{\lambda}$  est valeur singulière de  $K^*$ , avec la même multiplicité.

**Théorème 1.1.8.** Soit  $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  un opérateur compact. Alors (pour  $\lambda \neq 0$ )

i) Ou bien l'équation  $(I - \lambda K)f = 0$  n'admet que la solution  $f = 0$  et l'équation  $(I - \lambda K)f = g$  admet une et une seule solution pour tout  $g \in \mathbb{H}$ .

ii) Ou bien l'équation  $(I - \lambda K)f = 0$  admet des solutions  $f \neq 0$  et l'équation  $(I - \lambda K)f = g$  admet une solution si et seulement si le second membre  $g$  est orthogonal aux solutions de l'équation homogène adjointe  $(I - \bar{\lambda}K^*)f = 0$ , c'est-à-dire  $g \in \mathcal{N}(I - \bar{\lambda}K^*)^\perp$ .

Soient  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert séparable et  $K$  un opérateur auto-adjoint compact. Notons  $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$  les valeurs singulières de  $K$ , où  $(\mu_i, e_i)$  sont les couples propres de  $K$ , puisque  $f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$

et  $g = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, e_i \rangle e_i$  où  $f_0, g_0 \in \mathcal{N}(K)$ .

L'équation  $(I - \lambda K)f = g$  s'écrit

$$f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \lambda \mu_i) \langle f, e_i \rangle e_i = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, e_i \rangle e_i.$$

Si  $\lambda$  n'est pas une valeur singulière de  $K \iff \frac{1}{\lambda}$  n'est pas une valeur propre de  $K$ , alors

$$f = g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle g, e_i \rangle}{1 - \lambda \mu_i} e_i,$$

et puisque  $\lambda_i = \frac{1}{\mu_i}$ , alors

$$\begin{aligned} f &= g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i - \lambda + \lambda}{\lambda_i - \lambda} \langle g, e_i \rangle e_i \\ f &= g_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, e_i \rangle e_i + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \langle g, e_i \rangle e_i \\ f &= g + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \langle g, e_i \rangle e_i. \end{aligned}$$

Si  $\lambda$  est une valeur singulière de  $K$  c'est-à-dire il existe  $s \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda = \lambda_s = \frac{1}{\mu_s}$ . Alors l'équation  $(I - \lambda K)f = g$  est résoluble si et seulement si  $g \in \mathcal{R}(K - \mu_s I) = \mathcal{N}(I - \lambda_s K)^\perp$ , et dans ce cas les solutions  $f$  sont données par

$$f = g + \lambda \sum_{i \neq s}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \langle g, e_i \rangle e_i + G_s, \text{ où } G_s \in \mathcal{N}(K - \lambda_s I).$$

Considérons maintenant l'équation de première espèce sous sa forme abstraite  $Kf = g$  avec  $K$  opérateur compact dans  $\mathbb{H}$  séparable. Cette équation n'admet une solution que si  $g \in \mathcal{R}(K)$ .

**Proposition 1.1.4.** *On suppose que  $g \in \overline{\mathcal{R}(K)} = \mathcal{N}(K^*)^\perp$ , alors on a*

$$Kf = g \iff K^*Kf = K^*g. \quad (1.1.5)$$

*Preuve.* Puisque  $Kf = g$ , ce qui implique que  $K^*Kf = K^*g$  et pour l'implication inverse, il suffit de remarquer que

$$K^*Kf = K^*g \implies \langle K^*Kf, h \rangle = \langle K^*g, h \rangle, \forall h \in \mathbb{H},$$

donc,  $\langle Kf, Kh \rangle = \langle g, Kh \rangle, \forall h \in \mathbb{H} \implies \langle Kf, y \rangle = \langle g, y \rangle, \forall y \in \overline{\mathcal{R}(K)} = \mathcal{N}(K^*)^\perp$ , ce qui implique que

$$\langle Kf - g, y \rangle = 0, \forall y \in \overline{\mathcal{R}(K)}. \quad (1.1.6)$$

Puisque  $Kf - g \in \overline{\mathcal{R}(K)}$  et l'égalité (1.1.6) est vraie pour tout  $y \in \overline{\mathcal{R}(K)}$ , en particulier pour  $y = Kf - g$ , il vient donc  $\|Kf - g\| = 0$ , ce qui donne  $Kf - g = 0 \implies Kf = g$ .  $\square$

**Proposition 1.1.5.** *Soit  $K$  un opérateur dans  $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ . Alors*

$$\mathcal{N}(K^*K) = \mathcal{N}(K) \text{ et } \mathcal{N}(KK^*) = \mathcal{N}(K^*).$$

*Preuve.* On a :  $v \in \mathcal{N}(K) \iff Kv = 0 \implies K^*Kv = 0 \iff v \in \mathcal{N}(K^*K)$ , ce qui implique que  $\mathcal{N}(K) \subseteq \mathcal{N}(K^*K)$ . Pour l'autre inclusion on a  $v \in \mathcal{N}(K^*K) \iff K^*Kv = 0 \implies \langle K^*Kv, v \rangle = 0 \implies \|Kv\|^2 = 0 \implies v \in \mathcal{N}(K)$ , ce qui implique que  $\mathcal{N}(K^*K) \subseteq \mathcal{N}(K)$ .

Pour la deuxième égalité, il suffit de remplacer  $K$  par  $K^*$  et d'utiliser l'égalité  $K^{**} = K$ .  $\square$

Soient  $\mathbb{H}$  un espace de Hilbert séparable et  $K$  un opérateur compact. Alors, l'opérateur  $K^*K$  est auto-adjoint compact (donc diagonalisable) et ses valeurs propres sont positives ou nulles. On applique le théorème de diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts, alors, l'opérateur  $K^*K$  admet un nombre fini ou une suite de valeurs propres décroissante vers 0 et si on répète les valeurs propres non nulles  $\sigma_i$  selon leur multiplicité. Notons  $(\sigma_i, \varphi_i)$  les couples propres de  $K^*K$ , i.e.,

$$K^*K\varphi_i = \sigma_i\varphi_i, \quad \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

On pose  $\lambda_i := \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}}$  et  $\psi_i := \lambda_i K\varphi_i$ , d'où

$$K\varphi_i = \sqrt{\sigma_i}\psi_i \text{ et } K^*\psi_i = K^*(\lambda_i K\varphi_i) = \lambda_i K^*K\varphi_i = \sqrt{\sigma_i}\varphi_i.$$

**Théorème 1.1.9.** *La famille  $\{\psi_i\}$  est totale orthonormée dans  $\overline{\mathcal{R}(K)}$  et la famille  $\{\varphi_i\}$  est totale orthonormée dans  $\overline{\mathcal{R}(K^*)}$ .*

*Preuve.* Il est évident que les  $\psi_i$  appartiennent à  $\overline{\mathcal{R}(K)}$  et ils sont orthonormés, puisque

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \langle \lambda_i K\varphi_i, \lambda_j K\varphi_j \rangle = \lambda_i \lambda_j \sigma_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Il sont totaux dans  $\overline{\mathcal{R}(K)}$ , puisque si  $h \in \overline{\mathcal{R}(K)}$  vérifie  $\langle h, \psi_i \rangle = 0$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , il en résulte que  $h = 0$ . En effet, on a

$$0 = \langle h, \psi_i \rangle = \langle h, \lambda_i K\varphi_i \rangle = \lambda_i \langle K^*h, \varphi_i \rangle,$$

pour tout  $i$  avec  $\lambda_i > 0$ , d'où

$$(K^*K)K^*h = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \langle K^*h, \varphi_i \rangle \varphi_i = 0,$$

donc  $KK^*h \in \mathcal{N}(K^*)$  et puisque  $h \in \overline{\mathcal{R}(K)} = \mathcal{N}(K^*)^\perp$ , alors  $\langle KK^*h, h \rangle = \|K^*h\|^2 = 0 \implies h \in \mathcal{N}(K^*)$ .

Donc  $h \in \mathcal{N}(K^*) \cap \mathcal{N}(K^*)^\perp = \{0\}$ , d'où  $h = 0$ .

Passons aux  $\varphi_i$ . Ils appartiennent à  $\overline{\mathcal{R}(K^*)} = \mathcal{N}(K)^\perp$  et sont orthonormés. Il sont totaux dans  $\overline{\mathcal{R}(K^*)}$ , puisque si  $h \in \overline{\mathcal{R}(K^*)}$  vérifie  $\langle h, \varphi_i \rangle = 0$  pour  $\forall i \in \mathbb{N}$  il vient  $h = 0$ . En effet, on a

$$0 = \langle h, \varphi_i \rangle = \langle h, \lambda_i K^*\psi_i \rangle = \lambda_i \langle Kh, \psi_i \rangle,$$

pour tout  $i$  avec  $\lambda_i > 0$ , d'où  $\langle Kh, \psi_i \rangle = 0$ . Par la totalité des  $\psi_i$  dans  $\overline{\mathcal{R}(K)}$  il vient que  $Kh = 0$  pour  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $h \in \mathcal{N}(K) \cap \mathcal{N}(K)^\perp = \{0\}$ , d'où  $h = 0$ .  $\square$

**Remarque 1.1.5.** La suite des triplets  $\{\sigma_i, \varphi_i, \psi_i\}_{i=1}^{\infty}$  est dite système singulier pour l'opérateur compact  $K$ .

**Théorème 1.1.10. [de PICARD]** *On suppose que  $\mathbb{H}$  est un espace de Hilbert séparable. Soient  $K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  un opérateur compact et  $\{\sigma_i, \varphi_i, \psi_i\}_{i=1}^{\infty}$  le système singulier de  $K$ . Alors l'équation  $Kf = g$  admet une solution si et seulement si*



i)  $g \in \overline{\mathcal{R}(\mathbf{K})} = \mathcal{N}(\mathbf{K}^*)^\perp$ .

ii)  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |\langle g, \psi_i \rangle|^2 < \infty$ .

Si  $\mathcal{N}(\mathbf{K}) = \{0\}$ , cette solution est unique et elle est donnée par :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle \varphi_i. \quad (1.1.7)$$

Si  $\mathcal{N}(\mathbf{K}) \neq \{0\}$ , i.e., 0 est une valeur propre  $\mathbf{K}$ , alors la solution générale est donnée par :

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle \varphi_i, \quad f_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{K}). \quad (1.1.8)$$

*Preuve.* Si l'équation  $\mathbf{K}f = g$  admet une solution, alors  $g \in \overline{\mathcal{R}(\mathbf{K})} = \mathcal{N}(\mathbf{K}^*)^\perp$  et  $\mathbf{K}^*\mathbf{K}f = \mathbf{K}^*g$  (cf. Proposition (1.1.4), formule (1.1.5)). L'égalité  $\mathbb{H} = \mathcal{N}(\mathbf{K}^*\mathbf{K}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{K}^*\mathbf{K})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{K})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{K}) \oplus \overline{\mathcal{R}(\mathbf{K}^*)}$ , nous permet d'écrire

$$\forall h \in \mathbb{H}, \quad h = h_0 + h_1 = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle h, \varphi_i \rangle \varphi_i, \quad h_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{K}).$$

Puisque  $\mathbf{K}^*\mathbf{K}f = \mathbf{K}^*g$  il vient

$$\mathbf{K}^*\mathbf{K}f = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i = \mathbf{K}^*g = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, \psi_i \rangle \mathbf{K}^*\psi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\sigma_i} \langle g, \psi_i \rangle \varphi_i,$$

d'où  $\langle f, \varphi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sigma_i}} \langle g, \psi_i \rangle = \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle$  pour  $\forall i \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi la solution  $f$  s'exprime par la série

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle \varphi_i, \quad f_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{K}) = \mathcal{N}(\mathbf{K}^*\mathbf{K})$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |\langle g, \psi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 + \|f_0\|^2 = \|f\|^2,$$

On en déduit

$$\mathbf{K}f = \mathbf{K}f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, \psi_i \rangle \mathbf{K}\varphi_i = \mathbf{K}f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \mathbf{K}f, \psi_i \rangle \psi_i,$$

et, en comparant ce développement avec

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \mathbf{K}f, \psi_i \rangle \psi_i,$$

on obtient  $Kf_0 = 0$ , i.e.,  $f_0 \in \mathcal{N}(K)$ . Ce qui achève d'établir la condition nécessaire et la formule de la solution.

Réciproquement, si les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, l'élément

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle \varphi_i,$$

est bien défini, car  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 |\langle g, \psi_i \rangle|^2 + \|f_0\|^2 < \infty$ . De plus, cet élément  $h$  est une solution de l'équation  $Kf = g$  car

$$Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle g, \psi_i \rangle K\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, \psi_i \rangle \psi_i = g,$$

puisque  $g \in \overline{\mathcal{R}(K)}$  et que les  $\psi_i$  sont totaux. □

## 1.2 Problèmes mal posés

**Définition 1.2.1.** [Hadamard 1923] Soient  $X, Y$  deux espaces de Banach, et  $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$  un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse  $Tx = y$  est **bien posé** au sens de Hadamard si

**Existence** : Pour tout  $y \in Y$  il existe  $x \in X$  tel que  $Tx = y$ .

**Unicité** : Pour tout  $y \in Y$ , il y a au plus une solution  $x \in X$ .

**Stabilité** : La solution  $x$  dépend continûment de la donnée  $y$ .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Le choix des espaces de départ et d'arrivée  $X$  et  $Y$  est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis. La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

**Définition 1.2.2.** [Lavrentiev 1959] Soit  $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$  un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème  $Tx = y$  est **conditionnellement stable** (ou **correct** au sens de Tikhonov) sur  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(T)$  s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait  $\|x_2 - x_1\| \leq \omega(\|Tx_2 - Tx_1\|)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ .

L'ensemble  $\mathcal{M}$  est appelée ensemble des informations a priori (ou ensemble des contraintes). L'appartenance de  $u$  à  $\mathcal{M}$  signifie certaine régularité ou certaine bornitude vérifiée par la solution  $u$ .

**Exemple 1.2.1.** Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \phi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2.1)$$

où  $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

On vérifie aisément que  $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon \sinh\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon(x)$  est une solution du problème (1.2.1). On remarque que (pour tout  $x$  fixé)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x) = 0 \text{ mais } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, y) = \infty.$$

Ce qui prouve que les solutions des problèmes (1.2.1) ne dépendent pas continûment des données initiales, d'où le problème est mal posé au sens de Hadamard.

**Exemple 1.2.2.** Considérons le problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où  $\psi \in L^2(0, \pi)$  est une fonction donnée.

Ce problème consiste à déterminer  $u(x, 0) = u_0(x)$  (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température  $u(x, t)$  vérifié (1.2.2). Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (1.2.2) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où  $\psi_n$  est le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  de  $\psi$ , donnée par :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin(nx) dx \text{ avec } e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit  $\varphi(x) = u(x, 0)$  la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2Tn^2} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (1.2.2) avec des données bruitées  $\psi_k(x) = \psi(x) + \frac{1}{k} e_k(x)$ .

On remarque que

$$\|\psi_k - \psi\| \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow \infty \text{ mais } \|\varphi_k - \varphi\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow \infty \text{ si } k \rightarrow \infty.$$

On voit très clairement que le problème rétrograde pour l'équation de la chaleur ( problème (1.2.2) ) est instable donc mal posé.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initiale  $\varphi(x) = u(x, 0)$ , telle que  $\varphi \in L^2(0, \pi)$  est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \sin(nx) \sin(ny) \right] \varphi(y) dy.$$

Ainsi,  $u$  est solution du problème (1.2.2) si et seulement si  $\varphi$  satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$K\varphi = \psi, \quad \int_0^{\pi} k(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où  $k(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Tn^2} \sin(nx) \sin(ny)$ .

L'opérateur intégral  $K$  est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où  $K^{-1}$  n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (1.2.2).

**Exemple 1.2.3.** Soit l'opérateur  $A$  défini par

$$A : \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), (Au)(x) = \int_0^x u(t) dt, x \in (0, 1).$$

Il est facile de voir que si  $f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$  et  $f(0) = 0$  le problème  $Au = f$  est équivalent à

$$u(t) = (A^{-1}f)(t) = f'(t).$$

On considère maintenant le problème  $Au = f$  avec des données bruitées  $f^\delta(x) = f(x) + \delta \sin(\frac{x}{\delta^2})$  où  $\delta \in (0, 1)$ . On remarque que

$$\|f^\delta - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0 \text{ mais } \|u^\delta - u\|_\infty = \frac{1}{\delta} \left\| \sin\left(\frac{x}{\delta^2}\right) \right\|_\infty = \frac{1}{\delta} \rightarrow \infty \text{ si } \delta \rightarrow 0.$$

On voit très clairement que le problème  $Au = f$  est instable donc mal posé au sens de Hadamard.

**Exemple 1.2.4.** Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) = f(t), & t \in (0, T), \\ u(0) = 0, & \frac{d}{dt}u(0) = 0, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Supposons maintenant que la fonction  $f(t)$  est inconnue, mais la fonction  $u(t)$  peut être mesurée à tout instant  $t$  (ou en certains points de l'intervalle  $(0, T)$ ). Notre question est de reconstruire  $f(t)$  à partir de  $u(t)$ .

Considérons les perturbations de la solution au problème direct :

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} \cos(nt).$$

Ces perturbations correspondent à la fonction  $f_n(t)$ , où

$$f_n(t) = f(t) - n \cos(nt).$$

On remarque que

$$\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty \text{ mais } \|f_n - f\|_\infty \rightarrow \infty \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Le problème inverse de trouver  $f$  à partir de  $u$  est instable donc mal posé.

On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

**1- La non unicité.** Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

**2- L'instabilité.** Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergeant et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. Engel<sup>2</sup>).

### 1.2.1 Outils d'analyse des problèmes mal posés

Considérons les équations suivantes

$$A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2, \quad Au = v, \quad (1.2.4)$$

où  $A$  est un opérateur fermé. Dans l'étude des équations (1.2.4) la fermeture de  $\mathcal{R}(A)$  est une propriété cruciale, pour que l'inverse de  $A$  soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique sur cette question :

**Théorème 1.2.1. [Théorème de Banach sur l'inversion bornée]** Soit  $A : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$ . On suppose que  $A$  est borné et injectif. Alors  $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \rightarrow \mathbb{H}_1$  est borné si et seulement si  $\mathcal{R}(A)$  est fermée.

En général, la vérification de la fermeture de l'image est très difficile dans la pratique et on n'a pas beaucoup d'outils pour étudier cette question. Si la carte spectrale de l'opérateur est bien connue, cette information peut être exploitée pour étudier la fermeture de son image. Le Théorème<sup>3</sup> suivant fournit une caractérisation spectrale sur cette question :

2. Engl. H. W, Hanke, M. Neubauer. A, 1996. Regularization of inverse problems. Vol. 375. Springer Science & Business Media.

3. Kulkarni,SH and Nair, MT : A characterization of closed range operators, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 31(4)2000 353-362.

**Théorème 1.2.2.** Soit  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$  un opérateur fermé densément défini. Alors  $\mathcal{R}(A)$  est fermée si et seulement si il existe  $r > 0$  tel que  $\sigma(A^*A) \subseteq \{0\} \cup [r, \infty[$ .

Si de plus,  $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2$  et  $A^* = A$ , alors  $\mathcal{R}(A)$  est fermée ssi 0 n'est pas un point d'accumulation de  $\sigma(A)$ .

Considérons maintenant le problème inverse

$$T : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2, \quad Tf = g, \quad (1.2.5)$$

où  $T$  un opérateur compact et  $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$  sont deux espaces de Hilbert séparables.

Une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse (1.2.5), consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD) de l'opérateur  $T$ . Cette représentation propose des bases pour les espaces de Hilbert  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

**Remarque 1.2.1.** Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème donné.

Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement mal posés ou faiblement mal posés.

► On dit que le problème (1.2.5) est **faiblement mal posé**, si les valeurs singulières  $s_n$  de  $T$  sont équivalentes à  $Cn^{-p}$  où  $C$  et  $p$  sont des constantes positives.

► On dit que le problème (1.2.5) est **fortement mal posé**, si les valeurs singulières  $s_n$  de  $T$  sont équivalentes à  $C \exp(-n^p)$  où  $C$  et  $p$  sont des constantes positives.

## 1.2.2 Méthodes de régularisation

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à Tikhonov<sup>4</sup> (cf. [TA77]), cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la "solution régularisée" obtenue par "inversion régularisée" dépende continûment des données

4. A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, Solution of Ill-posed Problems, Winston & Sons, Washington, DC, (1977).

et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre "proche dans un sens" du premier et qui est bien posé.

Considérons maintenant le problème inverse  $Tf_1 = f_2$  où  $T : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$  est un opérateur compact injectif.<sup>5</sup> On suppose que  $f_2 \in \mathcal{R}(T)$ , i.e., le problème inverse possède une solution unique.<sup>6</sup>

**Définition 1.2.3.** Une famille d'opérateurs linéaires bornés  $R_\alpha : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_1$ , ( $\alpha > 0$ ) est dite "**famille régularisante**" pour l'opérateur  $T$  si

$$\forall f_1 \in \mathbb{H}_1, \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha T) f_1 = f_1, \text{ i.e., } R_\alpha T \rightarrow I \text{ simplement.}$$

**Remarque 1.2.2.** Si  $R_\alpha$  est une famille régularisante pour l'opérateur  $T : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$  où  $\mathbb{H}_1$  est de dimension infinie, alors les opérateurs  $R_\alpha$  ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite  $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty.$$

La donnée initiale  $f_2 \in \mathbb{H}_2$  n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber.

Notons  $f_2^\delta$  la donnée perturbée où le nombre  $\delta > 0$  est le niveau du bruit, i.e.,  $\|f_2^\delta - f_2\| \leq \delta$ .

Notons  $f_1^{\alpha, \delta} = R_\alpha f_2^\delta$  l'approximation de la solution du problème inverse  $Tf_1 = f_2$  obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur  $\|f_1^{\alpha, \delta} - f_1\|$  on obtient

$$\|f_1^{\alpha, \delta} - f_1\| = \|(f_1^{\alpha, \delta} - R_\alpha f_2) + (R_\alpha f_2 - f_1)\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha f_2 - f_1\|. \quad (1.2.6)$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.2.6) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque (1.2.2), nous avons vu que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha\| = +\infty$ . Il ne faut donc pas choisir  $\alpha$  trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (1.2.6) tend vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0 par définition de  $R_\alpha$ . Nous allons faire tendre le niveau de bruit  $\delta$

5. Le fait de choisir  $T$  injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace  $\mathbb{H}_1$  au complément orthogonal de  $\mathcal{N}(T)$ .

6. Il faut noter que notre problème inverse  $Tf_1 = f_2$  est toujours mal posé à cause de la non continuité de  $T^{-1}$ .



vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution  $f_1$ .

Une stratégie de régularisation  $\alpha = \alpha(\delta)$  est **admissible** si pour tout  $f_1 \in \mathbb{H}_1$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \sup_{f_2^\delta \in \mathbb{H}_2} \{ \|R_{\alpha(\delta)} f_2^\delta - f_1\| \mid \text{tel que } \|Tf_1 - f_2^\delta\| \leq \delta \} \right) = 0. \quad (1.2.7)$$

Les stratégies de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degré de complexité, pour plus de détails (cf. [OKCNO0]). Parmi les méthodes les plus connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

### Méthode de Tikhonov

Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé  $Tf_1 = f_2$  est de choisir comme solution l'élément  $f_1^\alpha$  qui minimise la fonctionnelle

$$\|Tf_1 - f_2\|^2 + \alpha \|f_1\|^2, \quad \alpha > 0. \quad (1.2.8)$$

L'existence et l'unicité du minimum est assurée grâce à la coercivité et stricte convexité de  $f_1 \rightarrow \|f_1\|^2$ . Le paramètre  $\alpha$  est appelé le paramètre de régularisation et le terme  $\|f_1\|^2$  est appelé le terme de correction. Le choix du paramètre  $\alpha$  est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité. On a le Théorème suivant :

**Théorème 1.2.3.** Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ . Alors la fonctionnelle de Tikhonov (1.2.8) admet un unique minimum  $f_1^\alpha$ . L'élément  $f_1^\alpha$  est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_1^\alpha = (T^*T + \alpha I)f_1^\alpha = T^*f_2. \quad (1.2.9)$$

La famille d'opérateurs  $R_\alpha = S_\alpha^{-1}T^* : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_1$  est appelée famille régularisante de Tikhonov.

**Remarque 1.2.3.** L'opérateur  $S_\alpha$  est un opérateur auto-adjoint ( $S_\alpha^* = S_\alpha$ ) et, on a, pour tout  $f \in \mathbb{H}_1$

$$\langle S_\alpha f, f \rangle = \|Tf\|^2 + \alpha \|f\|^2 \geq \alpha \|f\|^2 \implies \sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \implies 0 \in \rho(S_\alpha),$$

ce qui implique que l'opérateur  $S_\alpha$  est inversible et  $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1)$ .

**Proposition 1.2.1.** Soit  $R_\alpha$  la famille régularisante de Tikhonov. Alors

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}},$$

et la stratégie de régularisation  $\alpha = \alpha(\delta)$  est admissible pour

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \text{ et } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha(\delta)}} = 0.$$

Pour les résultats de la vitesse de convergence, on peut consulter la référence [OKCN00] pour plus de détails.

Le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi via le principe d'écart (en anglais : *discrepancy principle*) de Morozov (cf. [Whi09]), ce principe consiste à fixer le paramètre  $\alpha$  tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit.

Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mises en oeuvre (méthodes a priori<sup>7</sup>, méthodes a posteriori<sup>8</sup>).

Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre  $\alpha$  est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit  $\delta > 0$ .

Pour calculer numériquement le paramètre de régularisation  $\alpha(\delta)$ , on résout l'équation (en anglais : *the damped Morozov principle*) :

$$\varphi(\alpha) = \|Tf_1^{\alpha,\delta} - f_2^\delta\|^2 + \alpha^\tau \|f_1^{\alpha,\delta}\|^2 - \delta^2 = 0 \quad (\tau \in [1, \infty]),$$

par l'algorithme de convergence cubique (cf. [WX01]) :

Étape 1. Entrer  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $e_{\max}$ ,  $e = 0$ .

Étape 2. Calculer  $\varphi(\alpha_e)$ ,  $\varphi'(\alpha_e)$ ,  $\varphi''(\alpha_e)$ .

Étape 3. Calculer  $\alpha_{e+1}$  par la formule itérative (1.2.10).

Étape 4. Si  $|\alpha_{e+1} - \alpha_e| \leq \varepsilon$  ou  $e = e_{\max}$  Arrêt, Sinon,  $e = e + 1$ , passer à l'étape 2.

$$\alpha_{e+1} = \alpha_e - \frac{2\varphi(\alpha_e)}{\varphi'(\alpha_e) + \sqrt{\varphi'(\alpha_e)^2 - 2\varphi(\alpha_e)\varphi''(\alpha_e)}}. \quad (1.2.10)$$

7. Utilisent l'information sur le niveau d'erreur  $\delta$  et sur l'opérateur  $T$ .

8. Utilisent aussi les données  $f_2^\delta : \alpha_{opt} := \max \{ \alpha : \|Tf_1^\alpha - f_2^\delta\|^2 \leq \delta \}$ , où  $f_1^\alpha = \min_f \{ \|Tf^\alpha - f_2^\delta\|^2 + \alpha \|f\|^2 \}$

### 1.3 Polynômes de Tchebychev

Dans cette Section, on donne quelques résultats principaux des polynômes de Tchebychev de première espèce, qui seront utilisés par la suite. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur aux références [Boy01, CHQ12, FP68, QV08].

On désigne par  $I$  l'intervalle  $[-1, 1]$  et on note  $\mathbb{P}_N$  l'espace des polynômes de degré  $\leq N$ , soit  $w = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$  une fonction poids de Tchebychev.

**Définition 1.3.1.** On appelle famille de polynômes de Tchebychev, la famille  $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$  de polynômes sur  $I$  deux à deux orthogonaux dans l'espace  $L_w^2(I)$  et tels que, pour tout  $n \geq 0$ , le polynôme  $T_n$  vérifie l'équation différentielle de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} T_n(x)) + n^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x) = 0 \text{ avec } T_n(1) = 1. \quad (1.3.1)$$

Les polynômes de Tchebychev sont définis par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), & n \geq 1, \\ T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = x, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Les polynômes de Tchebychev sont orthogonaux dans l'espace  $L_w^2(I)$ , c'est-à-dire, pour tout entier  $i, j \geq 0$ , le polynôme de Tchebychev vérifie

$$\langle T_i, T_j \rangle_{L_w^2} = \int_{-1}^1 T_i(x)T_j(x)w(x)dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \pi & i = j = 0 \\ \frac{\pi}{2} & i = j \neq 0 \end{cases} \quad (1.3.3)$$

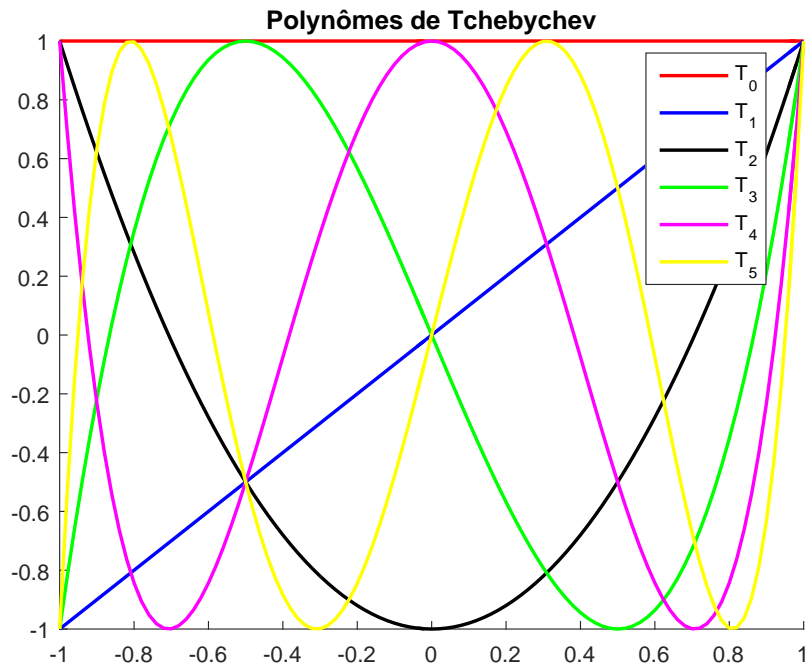


Figure 1.1 – Courbes représentatives des premiers polynômes de Tchebychev de première espèce sur le domaine  $[-1, 1]$ .

Les polynômes de Tchebychev sont orthogonaux sur l'ensemble de points discrets  $\{x_k\}_{k=1}^n$ . Spécifiquement

$$\sum_{k=1}^n T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j (< n) \\ n & i = j = 0 \\ \frac{n}{2} & 0 < i = j < n \end{cases} \quad (1.3.4)$$

où  $\{x_k\}_{k=1}^n$  est l'ensemble des zéros du polynôme de Tchebychev  $T_n$ , donnés par  $x_k = \cos\left(\frac{(k-0.5)\pi}{n}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

La série de Tchebychev d'une fonction  $f$  dans l'espace  $L_w^2(I)$  prend la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n(x) \text{ avec } f_0 = \frac{1}{\pi} \langle f, T_0 \rangle_{L_w^2} \text{ et } f_n = \frac{2}{\pi} \langle f, T_n \rangle_{L_w^2}, n \neq 0. \quad (1.3.5)$$

Pour  $N \in \mathbb{N}$ , on note par  $S_N$  l'opérateur de projection orthogonale de  $L_w^2(I)$  sur  $\mathbb{P}_N(I)$ , donné par

$$S_N f = \sum_{n=0}^N a_n T_n \text{ avec } a_0 = \frac{1}{\pi} \langle f, T_0 \rangle_{L_w^2} \text{ et } f_n = \frac{2}{\pi} \langle f, T_n \rangle_{L_w^2}, 1 \leq n \leq N.$$

**Définition 1.3.2.** Soit  $s \in \mathbb{N}$ . On note par  $\mathcal{H}_w^s(I)$  l'espace des fonctions dans  $L_w^2(I)$  telles que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $s$  appartiennent à  $L_w^2(I)$ , il est muni de la semi-norme

$$|f|_{\mathcal{H}_w^s} = \left\| \frac{d^s}{dx^s} f \right\|_{L_w^2(I)},$$

et de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}_w^s} = \sqrt{\sum_{i=0}^s \left\| \frac{d^i}{dx^i} f \right\|_{L_w^2(I)}}.$$

Les résultats suivants sont donnés pour les erreurs d'interpolation  $\|f - \mathbf{S}_N f\|_{L_w^2(I)}$ . Pour la preuve de ces résultats, voir par exemple ([CHQ12] p.298, [QV08] p. 112).

**Théorème 1.3.1.** On suppose que  $f$  est une fonction dans  $L_w^2(I)$ . Alors

$$\|f - \mathbf{S}_N f\|_{L_w^2(I)} \rightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow \infty. \quad (1.3.6)$$

De plus, si  $f \in \mathcal{H}_w^s(I)$  pour certains  $s \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$\|f - \mathbf{S}_N f\|_{L_w^2(I)} \leq CN^{-s} \|f\|_{\mathcal{H}_w^s}, \quad (1.3.7)$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $N$ .

### 1.3.1 Formules de quadrature de Gauss-Tchebychev

Soit  $f$  une fonction réelle sur l'intervalle  $[a, b]$ . Le calcul explicite de l'intégrale définie

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx$$

peut être difficile, voire impossible.

On appelle formule de quadrature toute formule permettant de calculer une approximation de  $I(f)$ . En général la formule de quadrature est donnée par

$$I(f) \approx I_N = \sum_{k=1}^N A_k f(x_k).$$

Cette formule est une somme pondérée des valeurs de  $f$  aux points  $x_k$ , pour  $k = 1, 2, \dots, N$ . On dit que ces points sont les **noeuds** de la formule de quadrature, et que les nombres  $A_k \in \mathbb{R}$  ont ses coefficients ou encore ses **poids**. Les poids et les noeuds dépendent en général de  $N$ .

La valeur approchée de l'intégrale  $I(f)$  par la formule de **Gauss-Tchebychev** est donnée par

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx \approx \sum_{k=1}^N A_k f(x_k), \quad (1.3.8)$$

où les nœuds  $\{x_k\}_{k=1}^N$  sont les  $N$  zéros de  $T_N$  et les poids  $A_k$  sont donnés par  $A_k = \frac{\pi}{N}$ , pour  $k = 1, 2, \dots, N$ .

**Exemple** Considérons la fonction  $f(x) = x^2$  et  $N = 4$ . Alors

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

a les zéros  $x_1 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ,  $x_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ,  $x_4 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ .

D'où

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^4 x_k^2 = \frac{\pi}{2},$$

qui est la valeur exacte de l'intégrale.

## 1.4 Fonctions d'ondes sphéroïdales

Dans cette Section, on rappelle plusieurs propriétés importantes liées aux fonctions d'ondes sphéroïdales (en anglais : *Prolate spheroidal wave functions*), qui seront utiles par la suite. Le lecteur peut trouver un exposé exhaustif sur ce sujet dans la référence [ORX13].<sup>9</sup>

Soit  $\mathcal{B}_c$  l'espace de Paley-Wiener (espace des fonctions de bande limitée) défini par

$$\mathcal{B}_c = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{support } \mathcal{F}(f) \subseteq [-c, c]\},$$

où  $c > 0$  est un nombre réel, appelé largeur de la bande et  $\mathcal{F}(f)$  désigne la transformée de Fourier de  $f$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de bande limitée de taille  $c > 0$ . On sait bien que cette fonction admet l'écriture suivante : pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , il existe une fonction  $\sigma \in L^2(-1, 1)$  telle que

$$f(t) = \int_{-1}^1 \sigma(s) \exp(icst) ds. \quad (1.4.1)$$

9. Ce rappel est extrait du livre de Osipov Andrei et al :

Osipov, A. Rokhlin, V. Xiao, H, Prolate spheroidal wave functions of order zero, Mathematical tools for bandlimited approximation. Springer(2013).

En d'autres termes,  $f$  est une fonction de bande limitée de taille  $c$ , si le support de la transformée de Fourier de  $f$  est dans l'intervalle  $[-c, c]$ .

On note par  $\psi_c^j(\cdot)$ ,  $j \geq 0$ , les fonctions d'ondes sphéroïdales (PSWFs), qui sont les fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville  $L_c$ <sup>10</sup>, défini par

$$L_c(\psi)(\cdot) = -(1-t^2)\frac{d^2}{dt^2}\psi(\cdot) + 2t\frac{d}{dt}\psi(\cdot) + c^2t^2\psi(\cdot).$$

Ces fonctions (PSWFs) possèdent les propriétés suivantes :

**P1.** Elles forment un système orthogonal de l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ .

**P2.** Elles forment une base orthonormée de  $L^2(-1, 1)$ , c'est-à-dire,

$$\forall j \geq 0, \|\psi_c^j\|_{L^2(-1,1)} = 1, \quad \forall i \neq j \langle \psi_c^j, \psi_c^i \rangle = 0.$$

**P3.** Elles forment une base orthogonale de l'espace  $\mathcal{B}_c$ .

---

10. Opérateur différentiel de Legendre perturbé. Pour le cas particulier  $c = 0$ ,  $L_0$  correspond à l'opérateur de Legendre classique.

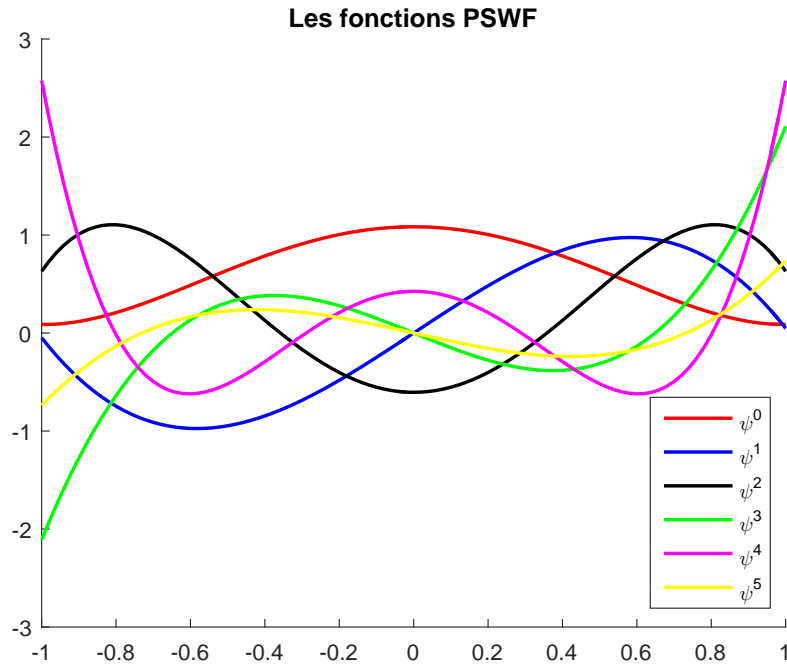


Figure 1.2 – Courbes représentatives des premières fonctions PSWFs sur le domaine  $[-1, 1]$ ,  $m = 4$  et  $c = 5$ .

Soit  $f$  une fonction dans l'espace  $\mathcal{B}_c$ . Pour tout  $t \in [-1, 1]$ , le développement de Fourier de la fonction  $f(t)$  dans la base PSWFs est donné par la formule :

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \psi_c^j(t), \quad (1.4.2)$$

où  $a_j = \int_{-1}^1 f(t) \psi_c^j(t) dt$ .

Dans les travaux (D. Slepian, H. Landau et H. Pollak [[Sle64](#), [Sle65](#), [SP61](#), [Sle78](#), [Grü81](#), [LW80](#)]), il a été démontré une série de résultats très importants liés aux fonctions PSWFs. Parmi ces propriétés, ils ont prouvé que les fonctions PSWFs sont aussi des fonctions propres des opérateurs intégraux  $F_c$  et  $Q_c$  dans l'espace  $L^2(-1, 1)$ , tels que

$$F_c(\psi)(s) = \int_{-1}^1 \exp(isct) \psi(t) dt \quad \text{et} \quad Q_c(\psi)(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin(c(s-t))}{s-t} \psi(t) dt. \quad (1.4.3)$$

De toute évidence, l'opérateur  $Q_c$  est compact. On note ses valeurs propres par  $\lambda_0(c), \lambda_1(c), \dots, \lambda_j(c), \dots$  et on suppose qu'elles sont ordonnées dans l'ordre  $|\lambda_j(c)| \geq |\lambda_{j+1}(c)|$  pour tout  $j \geq 0$ .



On note par  $\mu_j(c)$ ,  $j \geq 0$ , les valeurs propres de l'opérateur  $F_c$ , données par :

$$\mu_j(c) = i^j \sqrt{\frac{2\pi}{c} \lambda_j(c)}, \quad j \geq 0.$$

Les résultats démontrés dans le travail (cf. [BK17]) nous donnent un outil de mesure sur l'approximation spectrale par les fonctions PSWFs dans les fonctions qui appartiennent à l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}_1^s(I) = \mathcal{H}^s(I)$ .

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $c$  un nombre réel positif. Supposons que  $f \in \mathcal{H}^s(I)$ , pour certain  $s > 0$ . Alors, pour tout entier  $N \geq 1$ , on a*

$$\|f - P_N f\|_{L^2(I)} \leq c_0(1 + c^2)^{-s/2} \|f\|_{\mathcal{H}^s} + c_0 \sqrt{\lambda_N(c)} \|f\|_{L^2(I)}, \quad (1.4.4)$$

où  $c_0$  est une constante ne dépendant que de  $s$  et  $P_N f = \sum_{j=0}^N a_j \psi_c^j(t)$ .

**Corollaire 1.4.1.** *Soient  $c \geq 1$ ,  $s > 0$  et  $f \in \mathcal{H}^s(I)$ . Il existe des constantes  $M \geq \sqrt{2}$  et  $\widehat{M}$ ,  $\widehat{M}_s$ ,  $q > 0$ , tel que, lorsque  $N \geq \max(cM, 3)$ , alors*

$$\|f - P_N f\|_{L^2(I)} \leq \widehat{M}_s(1 + N^2)^{-s/2} \|f\|_{\mathcal{H}^s} + \widehat{M} \exp(-qN) \|f\|_{L^2(I)}. \quad (1.4.5)$$

### 1.4.1 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre  $\{L_j\}_{j \geq 0}$  forment un système orthogonal complet dans  $L^2(-1, 1)$ .

Les polynômes de Legendre  $L_0, L_1, \dots, L_j, \dots$  sont définis par la formule

$$\begin{cases} L_j(t) = \frac{2j-1}{j} t L_{j-1}(t) - \frac{j-1}{j} L_{j-2}(t), & j \geq 2, t \in [-1, 1] \\ L_0(t) = 1 \text{ et } L_1(t) = t, & t \in [-1, 1] \end{cases} \quad (1.4.6)$$

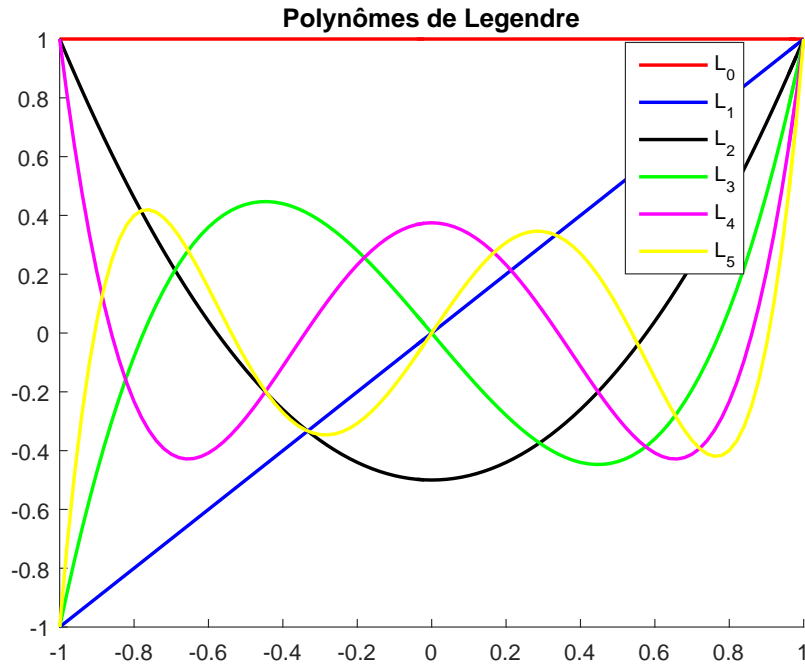


Figure 1.3 – Courbes représentatives des premiers polynômes de Legendre sur le domaine  $[-1, 1]$ .

Pour tout  $j \geq 0$ , Les polynômes de Legendre normalisés sont définis par la formule

$$\widehat{L}_j(t) = \sqrt{j + \frac{1}{2}} L_j(t), \quad j \geq 0 \text{ et } t \in [-1, 1]. \quad (1.4.7)$$

Les polynômes de Legendre normalisés forment une base orthonormée dans l'espace  $L^2(-1, 1)$ .

### 1.4.2 Approximation numérique des fonctions PSWFs

L'algorithme classique pour calculer les fonctions PSWFs  $\psi_c^j$  est basé sur la série des polynômes Legendre normalisés. La méthode d'approximation est donnée par les expressions suivantes :

$$\psi_c^j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^j \widehat{L}_k(t) \approx \sum_{k=0}^m \beta_k^j \widehat{L}_k(t), \quad (1.4.8)$$

où le vecteur  $\beta^j = (\beta_0^j, \beta_1^j, \dots, \beta_m^j, \dots)^t \in l^2$  est un vecteur propre de la matrice tridiagonale  $A$  tels que

$$\begin{cases} A_{k,k} = k(k+1) + \frac{2k(k+1)-1}{(2k+3)(2k-1)}c^2 \\ A_{k,k+2} = \frac{(k+2)(k+1)}{(2k+3)\sqrt{(2k+1)(2k+5)}}c^2 \\ A_{k+2,k} = \frac{(k+2)(k+1)}{(2k+3)\sqrt{(2k+1)(2k+5)}}c^2 \end{cases}$$

pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$ , avec le reste des éléments de la matrice étant égale à zéro. <sup>11</sup>

---

11. Pour plus de détail sur ce sujet, voir le livre :

A.Osipov ,V.Rokhlin, H.Xiao, Prolate Spheroidal Wave Functions of Order Zero, Springer (2013).

# Chapitre

# 2

---

## Méthode de Projection régularisée basée sur les fonctions PSWFs

Dans ce chapitre, on développe une stratégie d'approximation numérique pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. Cette procédure de Projection-Régularisation de type Tikhonov en dimension finie est construite sur la base des fonctions PSWFs.

### 2.1 Introduction

**Notation 2.1.1.** On note par  $\mathbb{H} = L^2([a, b], \mathbb{R})$  l'espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme associée :

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{H}} := \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad \|f\|_{\mathbb{H}}^2 := \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

On note par  $\mathcal{H}^s([a, b]) = H^s([a, b], \mathbb{R})$  l'espace de Sobolev muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{H}^s} = \left( \sum_{i=0}^s \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} f(\cdot) \right\|_{\mathbb{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\int_a^b k(s, t)f(t)dt = g(s), \quad s \in [a, b], \quad (2.1.1)$$

---

où  $k(.,.) \in L^2([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$  est le noyau,  $g \in \mathbb{H}$  est la donnée et  $f$  est l'inconnu recherché dans l'espace  $\mathbb{H}$ .

L'équation (2.1.1) peut être écrite sous la forme :

$$K : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad Kf = g,$$

où l'opérateur  $K$  est donné par

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt, \quad s \in [a, b], \quad (2.1.2)$$

est un opérateur compact d'image  $\mathcal{R}(K)$  non fermée, le noyau  $k(.,.)$  est supposé non dégénéré<sup>1</sup>, alors dans ce cas, l'équation intégrale (2.1.1) décrit une situation d'un problème mal posé.

On suppose dans ce paragraphe que le problème (2.1.1) admet une solution généralisée, i.e., une solution LRN (Least Residual Norm solution) de norme minimale  $\hat{f}$ <sup>2</sup>, donnée par l'inverse généralisé  $K^+$  de l'opérateur  $K$  :  $\hat{f} = K^+g$ . Sous ces conditions l'opérateur  $K^+$  n'est pas continu (car  $\mathcal{R}(K)$  n'est pas fermé) et doit être régularisé pour qu'on puisse le calculer.

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes ont été développées pour construire des solutions approchées pour cette classe d'équations intégrales. On peut citer par exemple : l'approximation par les ondelettes (Goswami et al [GCC95]), la méthode de collocation régularisée (Nair et al [NP07]), la méthode des ondelettes de type Legendre et Sinc (Maleknejad et al [MMTA10], [MM11]), la méthode du noyau dégénéré (Groetsch [Gro90]), la méthode variationnelle homotopique optimale (Almoussa et Ismail [AI13]), la méthode multi-échelles (X. Shang et D. Han [SH07]), la méthode itérative de Landweber (S. Karimi et M. Jozi [KJ15]) et d'autres méthodes qui sont bien exposées dans [YZ19].

Dans ce Chapitre, on propose une méthode de filtrage spectral appartenant à la famille des méthodes de projection-régularisée, où la projection considérée dans cette investigation est de type Kantorovich (elle est appelée aussi projection de Ritz). Cette démarche nous ramène à l'étude

1. On dit que le noyau  $k$  est dégénéré si  $k(s, t) = \sum_{i=1}^n k_1(s)k_2(t)$ .

2. On dit que  $h \in \mathbb{H}_1$  est une LRN solution (solution au sens des moindres carrés) de l'équation  $A : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$ ,  $Au = v$  ( $v \in G = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(A)^\perp \subseteq \mathbb{H}_2$ ) si  $\|Ah - v\|_{\mathbb{H}_2} = \min_{u \in \mathbb{H}} \|Au - v\|_{\mathbb{H}_2}$ .

Une solution LRN de norme minimale est unique.

d'une procédure de régularisation en dimension finie. Dans ce travail, on étudié une variante de la méthode de Projection-régularisée de type Tikhonov basée sur les fonctions PSWFs.

## 2.2 Approximation de rang fini

Soient  $n$  un nombre entier positif et  $\{\varphi_{a,b}^j\}_{j \geq 0}$  une base orthonormée dans l'espace  $\mathbb{H} = L^2(a, b)$ .

On définit les opérateurs  $\mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^n$  par :

$$\mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^n(f) = \left( \langle f, \varphi_{a,b}^0 \rangle_{\mathbb{H}}, \langle f, \varphi_{a,b}^1 \rangle_{\mathbb{H}}, \dots, \langle f, \varphi_{a,b}^n \rangle_{\mathbb{H}} \right)^t, \quad (2.2.1)$$

où  $f$  est une fonction dans  $\mathbb{H}$  et  $\langle f, \varphi_{a,b}^j \rangle_{\mathbb{H}} = \int_a^b f(t) \varphi_{a,b}^j dt$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

L'équation originale (2.1.1) est remplacée par l'équation

$$\mathbb{K}_n(f) = \mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^n(g), \quad (2.2.2)$$

où  $\mathbb{K}_n := \mathcal{T}_{\varphi_{a,b}}^n \mathbb{K}$  est un opérateur de  $\mathbb{H}$  vers  $\mathbb{R}^{n+1}$  et l'opérateur  $\mathbb{K}$  est défini par l'expression (2.1.2).

**Lemme 2.2.1.** Soit  $\mathbb{K}_n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  donné par la formule (2.2.2). Alors  $\mathbb{K}_n$  est un opérateur borné, et son opérateur adjoint  $\mathbb{K}_n^* : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}$  est donné par :

$$\mathbb{K}_n^*(u) = \sum_{j=0}^n u_j \mathbb{K}^*(\varphi_{a,b}^j)(\cdot), \quad u \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (2.2.3)$$

où  $\mathbb{K}^*$  est l'adjoint de  $\mathbb{K}$ .

*Preuve.* i) Pour tout  $f \in \mathbb{H}$ , on a :

$$\|\mathbb{K}_n f\|_2^2 = \sum_{i=0}^n \left| \langle f, \varphi_{a,b}^i \rangle_{\mathbb{H}} \right|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left| \langle \mathbb{K} f, \varphi_{a,b}^i \rangle_{\mathbb{H}} \right|^2.$$

Par l'égalité de Parseval, on obtient

$$\|\mathbb{K}_n f\|_2 \leq \|\mathbb{K} f\|_{\mathbb{H}} \leq \|\mathbb{K}\| \|f\|_{\mathbb{H}}. \quad (2.2.4)$$

Ce qui implique que  $\mathbb{K}_n \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{R}^{n+1})$  et  $\|\mathbb{K}_n\| \leq \|\mathbb{K}\| = \|k(\cdot, \cdot)\|_{L^2([a,b] \times [a,b], \mathbb{R})}$ .

ii) Soit l'opérateur  $K_n$  donné par la formule (2.2.2). Pour tout  $f \in \mathbb{H}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle K_n f, u \rangle_2 &= \sum_{i=1}^n u_i \langle K f, \varphi_{a,b}^i \rangle_{\mathbb{H}} \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \int_a^b \int_a^b k(s, t) f(t) dt \varphi_{a,b}^i(s) ds. \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \langle K_n f, u \rangle_2 &= \int_a^b f(t) \sum_{i=0}^n u_i \int_a^b k(s, t) \varphi_{a,b}^i(s) ds \\ &= \int_a^b f(t) \sum_{i=0}^n u_i (K^* \varphi_{a,b}^i)(t) dt. \\ &= \langle f, K_n^* u \rangle_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre la formule (2.2.3). □

Maintenant, on fixe la base hilbertienne et on considère les  $n + 1$  fonctions de PSWFs  $\{\psi_c^j\}_{j=0}^n$ .

La proposition suivante, nous montre que  $K_n^* K_n$  est une approximation de rang fini de  $K^* K$ , où  $K_n := \mathcal{T}_{\psi_{c,-1,1}}^n K = \mathcal{T}_{\psi_c}^n K$ .

**Proposition 2.2.1.** *On suppose que  $\mathcal{R}(K) \subset \mathcal{H}^s$  pour certains  $s > 0$  et soit l'opérateur  $K_n = \mathcal{T}_{\psi_c}^n K$  défini par la formule (2.2.2), où  $\{\psi_c^j\}_{j=0}^n$  sont les  $n + 1$  fonctions PSWFs, pour certains  $c \geq 1$ . Alors, il existe des constantes  $M \geq \sqrt{2}$  et  $\widehat{M}, \widehat{M}_s, q > 0$ , tel que, pour tout  $n \geq \max(cM, 3)$ , on a*

$$\| (K_n^* K_n - K^* K) f \|_{\mathbb{H}} \leq \gamma(f) \varepsilon(n, s) \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty, \quad (2.2.5)$$

où  $\gamma(f) = 2 \|K\|^2 \max(\widehat{M}_s \|f\|_{\mathcal{H}^s}, \widehat{M} \|f\|_{\mathbb{H}})$  et  $\varepsilon(n, s) = (1 + n^2)^{-s/2} + \exp(-qn)$ .

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} \| (K_n^* K_n - K^* K) f \|_{\mathbb{H}} &= \left\| \sum_{i=1}^n \langle K f, \psi_c^i \rangle_{\mathbb{H}} K^* \psi_c^i - K^* K f \right\|_{\mathbb{H}} \\ &= \left\| K^* \left( \sum_{i=1}^n \langle K f, \psi_c^i \rangle_{\mathbb{H}} \psi_c^i - K f \right) \right\|_{\mathbb{H}} \\ &= \| K^* (P_n - I) K f \|_{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

où  $P_n$  est l'opérateur de projection orthogonale défini par (1.4.4).

Par le Corollaire 1.4.1, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|(K_n^* K_n - K^* K)f\|_{\mathbb{H}} &\leq \|K^*\| (\widehat{M}_s (1+n^2)^{-s/2} \|Kf\|_{\mathcal{H}^s} + \widehat{M} \exp(-qn) \|Kf\|_{\mathbb{H}}) \\ &\leq 2 \|K\|^2 \max(\widehat{M}_s \|f\|_{\mathcal{H}^s}, \widehat{M} \|f\|_{\mathbb{H}}) ((1+n^2)^{-s/2} + \exp(-qn)). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la proposition.  $\square$

Supposons que  $g \in \mathcal{R}(K) \subset \mathcal{H}^s$  et  $g^\delta \in \mathbb{H}$  tels que

$$\|g - g^\delta\|_{\mathbb{H}} \leq \delta, \quad (2.2.6)$$

où  $\delta \in (0, 1)$  est le niveau de bruit.

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $g \in \mathcal{R}(K) \subset \mathcal{H}^s$  et  $g^\delta \in \mathbb{H}$ . Supposons que l'inégalité (2.2.6) est satisfaite pour le niveau de bruit  $\delta$ , alors le niveau d'erreur du vecteur  $\mathcal{T}_{\psi_c}^n g^\delta := g^{n,\delta}$  à partir du vecteur  $\mathcal{T}_{\psi_c}^n g := g^n$  peut être estimé comme suit :*

$$\|g^{n,\delta} - g^n\|_2 \leq \delta. \quad (2.2.7)$$

*Preuve.* Puisque  $g - g^\delta \in \mathbb{H}$ , par l'égalité de Parseval, on obtient

$$\|g - g^\delta\|_{\mathbb{H}}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\langle g - g^\delta, \psi_c^i \rangle_{\mathbb{H}}|^2.$$

Il est clair que

$$\|g^{n,\delta} - g^n\|_2^2 = \sum_{i=0}^n |\langle g - g^\delta, \psi_c^i \rangle_{\mathbb{H}}|^2 \leq \|g - g^\delta\|_{\mathbb{H}}^2.$$

En Utilisant la formule (2.2.6), on obtient (2.2.7).  $\square$

## 2.3 Régularisation de Tikhonov en dimension finie

Considérons le système linéaire (2.2.2) obtenu par à partir de la projection de l'équation (2.1.2) par le biais de l'opérateur  $\mathcal{T}_{\psi_c}^n$ .

Puisque le problème en question est mal posé, il est naturel que la solution généralisée  $f^n := K_n^+ g^n \in \mathcal{N}(K_n)^\perp = \mathcal{R}(K_n^*)$  du problème (2.2.2) serait instable (où  $K_n^+$  désigne l'inverse généralisé



de Moore-Penrose de  $K_n$ ). Pour stabiliser cette solution, on fait appel à la méthode de Tikhonov (cf. [TA77, Tik63a, Tik63b]). Le problème régularisé en dimension finie s'écrit donc sous la forme :

$$(K_n^* K_n + \alpha I) f_\alpha^{n,\delta} = K_n^* g^{n,\delta}, \quad (2.3.1)$$

où  $\alpha > 0$  est le paramètre de régularisation, et  $\delta$  est le niveau d'erreur, tel que l'inégalité (2.2.7) est satisfaite. Il est bien connu que, si le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi en fonction du niveau de bruit  $\delta$  tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} = 0,$$

alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f_\alpha^{n,\delta} - f^n\|_{\mathbb{H}} = 0.$$

**Remarque 2.3.1.** L'expression  $K_n^*(u) = \sum_{j=0}^n u_j K^*(\psi_c^j)(\cdot)$  où  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ , nous permet de conclure que

$$\mathcal{R}(K_n^*) = \text{span}\{K^*\psi_c^j, j = 0, 1, \dots, n\}. \quad (2.3.2)$$

Puisque  $\dim(\mathcal{R}(K_n^*)) \leq n + 1$ , alors  $\mathbb{H}$  se décompose comme suit :

$$\mathbb{H} = \overline{\mathcal{R}(K_n^*)} + \mathcal{R}(K_n^*)^\perp = \mathcal{R}(K_n^*) + \mathcal{N}(K_n).$$

Clairement, la solution régularisée  $f_\alpha^{n,\delta}$  appartient à l'espace  $\mathcal{R}(K_n^* K_n) = \mathcal{R}(K_n^*)$ , ce qui implique que

$$f_\alpha^{n,\delta} = \sum_{i=0}^n d_i K^*\psi_c^i, \quad (2.3.3)$$

où  $d_i (i = 0, 1, \dots, n)$  sont des constantes inconnues à déterminer pour calculer explicitement la solution régularisée  $f_\alpha^{n,\delta}$ .

**Remarque 2.3.2.** On suppose que l'opérateur  $K^*$  est injectif, alors les vecteurs  $K^*\psi_c^i, i = 0, 1, \dots, n$  sont linéairement indépendants, et par conséquent  $\dim(\mathcal{R}(K_n^*)) = n + 1$ .

En remplaçant l'expansion (2.3.3) dans l'équation (2.3.1), on obtient l'équation suivante

$$\sum_{j=0}^n [\alpha d_j + \sum_{i=0}^n d_i \langle K^*\psi_c^i, K^*\psi_c^j \rangle_{\mathbb{H}}] K^*\psi_c^j(t) = \sum_{j=0}^n \langle g^\delta, \psi_c^j \rangle_{\mathbb{H}} K^*\psi_c^j(t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (2.3.4)$$

On peut écrire l'équation (2.3.4) sous la forme

$$\mathbf{K}^* \left( \sum_{j=0}^n [\alpha d_j + \sum_{i=0}^n d_i \langle \mathbf{K}^* \psi_c^i, \mathbf{K}^* \psi_c^j \rangle_{\mathbb{H}} - \langle g^\delta, \psi_c^j \rangle_{\mathbb{H}}] \psi_c^j(t) \right) = 0, \quad t \in [-1, 1].$$

On suppose que l'opérateur  $\mathbf{K}^*$  est injectif, alors

$$\sum_{j=0}^n [\alpha d_j + \sum_{i=0}^n d_i \langle \mathbf{K}^* \psi_c^i, \mathbf{K}^* \psi_c^j \rangle_{\mathbb{H}} - \langle g^\delta, \psi_c^j \rangle_{\mathbb{H}}] \psi_c^j(t) = 0, \quad t \in [-1, 1].$$

Puisque les PSWFs forment un système orthogonal dans  $\mathbb{H}$  (elles sont donc linéairement indépendantes), on obtient l'équation suivante

$$\alpha d_j + \sum_{i=0}^n d_i B_j^i = g_j^{n,\delta}, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (2.3.5)$$

où

$$B_j^i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 k(s, \tau) k(t, \tau) \psi_c^i(s) \psi_c^j(t) ds d\tau dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

et

$$g_j^{n,\delta} = \int_{-1}^1 g^\delta(s) \psi_c^j(s) ds, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

L'équation (2.3.5) peut être écrite comme un système d'équations linéaires

$$\mathbf{A}_n \mathbf{d} = \mathbf{g}_n^\delta, \quad (2.3.6)$$

où  $\mathbf{A}_n = \alpha \mathbf{I} + \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{I}$  est la matrice d'identité dans  $\mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $\mathbf{B} = [B_j^i]_{i,j=0}^n \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  est une matrice,  $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_n)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathbf{g}_n^\delta$  sont des vecteurs dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Théorème 2.3.1.** *Le système (2.3.6) admet une solution unique dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Preuve.* On remarque que pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\langle \mathbf{A}_n u, v \rangle_2 = \langle u, \mathbf{A}_n v \rangle_2$ , c'est-à-dire que la matrice  $\mathbf{A}_n$  est auto-adjointe.

Pour  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , soit

$$E_i(\tau) = u_i \int_{-1}^1 k(t, \tau) \psi_c^i(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

on a

$$\langle \mathbf{A}_n u, u \rangle_2 = \alpha \|u\|_2^2 + \int_{-1}^1 \left( \sum_{i=0}^n E_i(\tau) \right)^2 d\tau. \quad (2.3.7)$$

De la formule (2.3.7) et pour toute valeur positive  $\alpha$  du paramètre de régularisation, la matrice  $A_n$  est un opérateur strictement positif sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Ainsi, pour  $\alpha > 0$ , la matrice  $A_n$  du système (2.3.6) est un opérateur strictement positif et auto-adjoint sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Par conséquent, ce système admet une solution unique.  $\square$

## 2.4 Convergence de la méthode et estimations d'erreur

Dans la régularisation de Tikhonov, les conditions  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} = 0$ , sont suffisantes (et essentiellement nécessaires) pour la convergence. Il est bien connu que le taux de convergence (cf. [EHN96, Eng81, Gro84]) dépend de la régularité de la solution exacte. Si  $\hat{f} \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$ ,  $\nu \in ]0, 1]$  et si  $\alpha := \alpha(\delta) = c_0 \delta^{2/2\nu+1}$  où  $c_0 > 0$ , alors

$$\left\| \hat{f} - f_\alpha^\delta \right\|_{\mathbb{H}} = O(\delta^{2\nu/2\nu+1}).$$

Dans ce Chapitre, on suppose que la solution généralisée  $\hat{f}$  de l'équation (2.1.1) satisfait la condition de source  $\hat{f} := K^+ g \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$  où  $\nu \in ]0, 1]$ . Le lemme suivant nous donne une estimation pour la norme  $\left\| (K_n^* K_n)^\nu - (K^* K)^\nu \right\|_{\mathbb{H}}$ .

**Lemme 2.4.1.** *Soit  $g \in \mathcal{R}(K) \subset \mathcal{H}^s$  pour certain  $s > 0$ . Si  $\hat{f} \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$  où  $\nu \in ]0, 1]$ . Alors, il existe des constantes  $M \geq \sqrt{2}$  et  $\widehat{M}$ ,  $\widehat{M}_s$ , et  $q > 0$ , tels que que, lorsque  $n \geq \max(cM, 3)$  avec  $c \geq 1$ , alors*

$$\left\| (K_n^* K_n)^\nu \hat{f} - (K^* K)^\nu \hat{f} \right\|_{\mathbb{H}} \leq \frac{4}{\pi} (\gamma(f) \varepsilon(n, s))^\nu, \quad (2.4.1)$$

où  $\gamma(f)$  et  $\varepsilon(n, s)$  sont définies dans la proposition 2.2.1.

*Preuve.* Si  $\nu = 1$ , la conclusion est évidente d'après la proposition 2.2.1.

Si  $\nu \in ]0, 1[$ , en utilisant la formule (14.16) dans Krasnoselskii et al [KZPS76] :

$$(D^* D)^\nu - (A^* A)^\nu = -\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^{+\infty} t^\nu [(D^* D + tI)^{-1} - (A^* A + tI)^{-1}] dt,$$

pour  $D = K_n$  et  $A = K$ , on obtient

$$\begin{aligned}
& \| (K_n^* K_n)^v - (K^* K)^v \| \leq \\
& \frac{\sin(\pi v)}{\pi} \int_0^{\|K_n^* K_n - K^* K\|} t^v \| (K_n^* K_n + tI)^{-1} - (K^* K + tI)^{-1} \| dt \\
& + \frac{\sin(\pi v)}{\pi} \int_{\|K_n^* K_n - K^* K\|}^{+\infty} t^v \| (K_n^* K_n + tI)^{-1} - (K^* K + tI)^{-1} \| dt. \tag{2.4.2}
\end{aligned}$$

Puisque

$$(K_n^* K_n + tI)^{-1} - (K^* K + tI)^{-1} = (K_n^* K_n + tI)^{-1} (K^* K - K_n^* K_n) (K^* K + tI)^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\| (K_n^* K_n)^v - (K^* K)^v \| & \leq \frac{\sin(\pi v)}{\pi} \int_0^{\|K_n^* K_n - K^* K\|} t^v \| (K_n^* K_n + tI)^{-1} - (K^* K + tI)^{-1} \| dt \\
& + \frac{\sin(\pi v)}{\pi} \int_{\|K_n^* K_n - K^* K\|}^{+\infty} t^v \| (K_n^* K_n + tI)^{-1} (K^* K - K_n^* K_n) (K^* K + tI)^{-1} \| dt. \tag{2.4.3}
\end{aligned}$$

Puisque les opérateurs  $(K_n^* K_n + tI)^{-1}$  et  $(K^* K + tI)^{-1}$  sont définis positifs et auto adjoints, alors

$$\| (K_n^* K_n + tI)^{-1} - (K^* K + tI)^{-1} \| \leq \max\{ \| (K_n^* K_n + tI)^{-1} \|, \| (K^* K + tI)^{-1} \| \} \leq \frac{1}{t}, \tag{2.4.4}$$

et

$$\| (K_n^* K_n + tI)^{-1} (K^* K - K_n^* K_n) (K^* K + tI)^{-1} \| \leq \frac{1}{t^2} \| K^* K - K_n^* K_n \|. \tag{2.4.5}$$

En injectant les formules (2.4.4) et (2.4.5) dans la formule (2.4.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\| (K_n^* K_n)^v - (K^* K)^v \| & \leq \frac{\sin(\pi v)}{\pi} \left( \int_0^{\|K_n^* K_n - K^* K\|} t^{v-1} dt + \| K^* K - K_n^* K_n \| \int_{\|K_n^* K_n - K^* K\|}^{+\infty} t^{v-2} dt \right) \\
& \leq \frac{\sin(\pi v)}{\pi v(1-v)} \| K_n^* K_n - K^* K \|^v \\
& \leq \frac{4}{\pi} \| K_n^* K_n - K^* K \|^v.
\end{aligned}$$

Pour conclure, en utilisant la formule (2.2.5) de la proposition 2.2.1, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| (K_n^* K_n)^v \widehat{f} - (K^* K)^v \widehat{f} \right\|_{\mathbb{H}} &\leq \frac{4}{\pi} \left\| (K_n^* K_n - K^* K) \widehat{f} \right\|^v \\ &\leq \frac{4}{\pi} (\gamma(f) \varepsilon(n, s))^v, \end{aligned}$$

où  $\gamma(f) = 2 \|K\|^2 \max(\widehat{M}_s \|f\|_{\mathcal{H}^s}, \widehat{M} \|f\|_{\mathbb{H}})$  et  $\varepsilon(n, s) = (1 + n^2)^{-s/2} + \exp(-qn)$ .  $\square$

**Théorème 2.4.1.** Soit  $g \in \mathcal{R}(K) \subset \mathcal{H}^s$  pour un certain  $s > 0$ . Si  $\widehat{f} \in \mathcal{R}((K^* K)^v)$  où  $v \in ]0, 1]$ , alors pour tout  $n \geq \max(cM, 3)$  avec  $c \geq 1$ , on a

$$\left\| \widehat{f} - f_\alpha^{n, \delta} \right\|_{\mathbb{H}} \leq c_1 [(\varepsilon(n, s))^v + \alpha^v + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}], \quad (2.4.6)$$

où  $f_\alpha^{n, \delta} = (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* g^{n, \delta}$ ,  $M \geq \sqrt{2}$  et la constante  $c_1$  ne dépend pas de  $\alpha$ ,  $\delta$  et  $n$ .

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} \widehat{f} - f_\alpha^{n, \delta} &= \widehat{f} - f_\alpha^{n, \delta} + (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* K_n \widehat{f} - (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* K_n \widehat{f} \\ &= (I - (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* K_n) \widehat{f} + (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* (K_n \widehat{f} - g^{n, \delta}), \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

et

$$\begin{aligned} \left\| (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* (K_n \widehat{f} - g^{n, \delta}) \right\|_{\mathbb{H}} &\leq \left\| (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* \right\| \left\| K_n \widehat{f} - g^{n, \delta} \right\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq \left\| (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* \right\| \delta. \end{aligned}$$

Puisque  $K_n^* K_n$  est un opérateur auto-adjoint, en utilisant la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts, on peut écrire

$$\left\| (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* \right\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K_n\|^2]} \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \alpha} \right| = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}},$$

ce qui implique que

$$\left\| (K_n^* K_n + \alpha l)^{-1} K_n^* (K_n \widehat{f} - g^{n, \delta}) \right\|_{\mathbb{H}} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (2.4.8)$$

Pour estimer la première somme dans la formule (2.4.7), on pose  $\widehat{f} = (K^*K)^v u$  où  $u \in \mathcal{H}^s$ . D'où

$$\begin{aligned} (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)\widehat{f} &= (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)(K^*K)^v u \\ &\quad + (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)(K_n^*K_n)^v u \\ &\quad - (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)(K_n^*K_n)^v u \\ &= (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)(K_n^*K_n)^v u \\ &\quad + (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)((K^*K)^v u - (K_n^*K_n)^v u), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)\widehat{f} \right\|_{\mathbb{H}} &\leq \left\| (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)(K_n^*K_n)^v u \right\|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \left\| (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n) \right\| \left\| (K^*K)^v u - (K_n^*K_n)^v u \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (2.4.1) dans le lemme 2.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| (I - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1}K_n^*K_n)\widehat{f} \right\|_{\mathbb{H}} &\leq \sup_{\lambda \in [0, \|(K_n\|^2)]} \left| \frac{\alpha \lambda^v}{\lambda + \alpha} \right| \|u\|_{\mathbb{H}} \\ &\quad + \sup_{\lambda \in [0, \|(K_n\|^2)]} \left| \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \right| \cdot \frac{4}{\pi} (\gamma(u)\varepsilon(n, s))^v \quad (2.4.9) \\ &\leq \alpha^v \|u\|_{\mathbb{H}} + \frac{4}{\pi} (\gamma(u)\varepsilon(n, s))^v. \end{aligned}$$

En injectant (2.4.8) et (2.4.9) dans (2.4.7), on obtient (2.4.6), où  $c_1 = \max(\|u\|_{\mathbb{H}}, \gamma(u), \frac{1}{2})$ .  $\square$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 2.4.2.** Soient  $g \in \mathcal{R}(K) \subset \mathcal{H}^s$  pour un certain  $s > 0$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}((K^*K)^v)$  où  $v \in ]0, 1]$ . Si  $\alpha := \alpha(\delta) = O(\delta^{2/2v+1})$ , alors pour tout  $n \geq \max(cM, 3, \theta_l(\alpha), w_l(\alpha))$  avec  $c \geq 1$ , on a

$$\left\| \widehat{f} - f_\alpha^{n, \delta} \right\|_{\mathbb{H}} \leq O(\delta^{2v/2v+1}), \quad (2.4.10)$$

où  $M \geq \sqrt{2}$ ,  $\theta_l(\alpha) = (1/(l\alpha)^{2/s} - 1)^{1/2}$  et  $w_l(\alpha) = -\ln((1-l)\alpha)/q$  ( $0 < l < 1$ ).

*Preuve.* Puisque  $n \geq \theta_l(\alpha)$  donc  $(1+n^2)^{-s/2} \leq l\alpha < \alpha$  et  $n \geq w_l(\alpha)$ , ce qui implique que  $\exp(-nq) \leq (1-l)\alpha < \alpha$ .

D'après le théorème 2.4.1, on a

$$\left\| \widehat{f} - f_{\alpha}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}} \leq c_1 [(\varepsilon(n,s))^{\nu} + \alpha(\delta)^{\nu} + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}}] \leq c_1 \left( 2\alpha(\delta)^{\nu} + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \right),$$

et pour  $\alpha(\delta) = O(\delta^{2/2\nu+1})$ , on obtient l'estimation (2.4.10).  $\square$

Dans le Théorème 2.4.2, le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi par une stratégie du choix a priori, de telle sorte que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} = 0$ . Par exemple, si  $\alpha(\delta) = O(\delta^{2/3})$ , alors l'ordre optimal de  $\left\| \widehat{f} - f_{\alpha}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}$  est  $O(\delta^{2/3})$ .

## 2.5 Choix a posteriori du paramètre de régularisation

Dans la pratique, le choix a priori du paramètre de régularisation  $\alpha(\delta)$  dans le Théorème 2.4.2 rarement utilisé parce que il est basé sur la régularité de la solution qui est inconnue. L'une des stratégies a posteriori la plus utilisée est basée sur le principe d'écart de Morozov " Discrepancy Principle " [Mor66]. Dans la méthode de Morozov, le paramètre  $\alpha(\delta)$  est choisi selon le critère :

$$\left\| g^{\delta} - \mathbf{K}f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}} = \delta. \quad (2.5.1)$$

Dans cette Section, on s'intéresse à estimer le paramètre  $\alpha(\delta)$  par le principe général de Morozov, donné par

$$\left\| g^{\delta} - \mathbf{K}f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^{\eta}(\delta) \left\| f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 = \delta^2, \quad (2.5.2)$$

où  $\eta \in [1, +\infty]$ . De toute évidence, le principe classique de Morozov (2.5.1) est un cas particulier du cas général (2.5.2).

Wang et Xiao [WX01], proposent un algorithme de convergence cubique pour choisir le bon paramètre de régularisation. Cet algorithme se résume comme suit :

**Algorithme 2.5.1.** *Step 1.* Input  $\alpha_0 > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $e_{\max}$ , set  $e = 0$ ;

*Step 2.* Compute  $f_{\alpha_e}^{n,\delta}$ ,  $\frac{d}{d\alpha} f_{\alpha_e}^{n,\delta}$  and  $\frac{d^2}{d\alpha^2} f_{\alpha_e}^{n,\delta}$ ;

*Step 3.* Compute  $\phi(\alpha_e)$ ,  $\phi'(\alpha_e)$  and  $\phi''(\alpha_e)$  from formulas (2.5.3), (2.5.8) and (2.5.9);

*Step 4.* Solve for  $\alpha_{e+1}$  from iterative formula (2.5.4);

Step 5. If  $|\alpha_{e+1} - \alpha_e| \leq \epsilon$  or  $e = e_{\max}$ , STOP; otherwise, set  $e = e + 1$ , GOTO step 2.

où

$$\phi(\alpha) = \|g^\delta - \mathbb{K}f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha^\eta \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}}^2 - \delta^2, \quad (2.5.3)$$

et

$$\alpha_{e+1} = \alpha_e - \frac{2\phi(\alpha_e)}{\phi'(\alpha_e) + \sqrt{\phi'(\alpha_e)^2 - 2\phi(\alpha_e)\phi''(\alpha_e)}}. \quad (2.5.4)$$

Maintenant, on présente une méthode pratique pour calculer les quantités  $\phi'(\alpha)$  et  $\phi''(\alpha)$  dans l'Algorithme 2.5.1.

Soit  $G(\alpha)$  la fonction donnée par

$$G(\alpha) = \|g^\delta - \mathbb{K}f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}}^2. \quad (2.5.5)$$

La première dérivée de  $G(\alpha)$  est donnée dans [KZ98] par

$$\frac{d}{d\alpha}G(\alpha) = \xi(\alpha), \quad (2.5.6)$$

où  $\xi(\alpha) = \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}}^2$ .

En utilisant (2.5.5) et (2.5.6), on a

$$\frac{d}{d\alpha} \|g^\delta - \mathbb{K}f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}}^2 = -\alpha \frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha). \quad (2.5.7)$$

A partir de (2.5.7), la première et la deuxième dérivée de  $\phi(\alpha)$  sont donnés par les formules

$$\frac{d}{d\alpha} \phi(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha) \frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha) + \eta \alpha^{\eta-1} \xi(\alpha), \quad (2.5.8)$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \phi(\alpha) = (\alpha^\eta - \alpha) \frac{d^2}{d\alpha^2} \xi(\alpha) + (2\eta \alpha^{\eta-1} - 1) \frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha) + \eta(\eta + 1) \alpha^{\eta-2} \xi(\alpha), \quad (2.5.9)$$

où

$$\frac{d}{d\alpha} \xi(\alpha) = 2 \left\langle \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{\mathbb{H}} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} \xi(\alpha) = 2 \left\langle \frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}, f_\alpha^{n,\delta} \right\rangle_{\mathbb{H}} + 2 \left\| \frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2.$$

Dans notre cas, pour les solutions approchées  $f_\alpha^{n,\delta}$ , on donne l'écriture exacte de ces expressions

$\frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}$  et  $\frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}$  dans l'Algorithme 2.5.1. D'après la formule (2.3.3), on a

$$\frac{d^l}{d\alpha^l} f_\alpha^{n,\delta} = \sum_{j=0}^n \frac{d^l}{d\alpha^l} d_j(\alpha) \mathbb{K}^* \psi_c^j = \langle d^{(l)}(\alpha), \Psi \rangle_2 \quad \text{pour } \forall l \geq 0, \quad (2.5.10)$$



où

$$d^{(l)}(\alpha) = \left( \frac{d^l}{d\alpha^l} d_0(\alpha), \frac{d^l}{d\alpha^l} d_1(\alpha), \dots, \frac{d^l}{d\alpha^l} d_n(\alpha) \right)^t \text{ et } \Psi = (K^* \psi_c^0, K^* \psi_c^1, \dots, K^* \psi_c^n)^t.$$

En vertu du Lemme suivant, on donne l'écriture de la dérivée  $\frac{d^l}{d\alpha^l} d_j(\alpha)$  pour  $l \geq 1$ ,  $0 \leq j \leq n$  et pour tous  $\alpha > 0$ .

**Lemme 2.5.1.** Soit  $d(\alpha)$  la solution du système (2.3.6) et soit  $l \geq 1$ , alors la dérivée  $\frac{d^l}{d\alpha^l} d(\alpha)$  est la solution unique du système

$$\mathbf{A}_n \frac{d^l}{d\alpha^l} d(\alpha) = -l \frac{d^{l-1}}{d\alpha^{l-1}} d(\alpha), \quad l \geq 1, \quad (2.5.11)$$

où la matrice  $\mathbf{A}_n$  est définie dans le système (2.3.6).

*Preuve.* Soit  $l \geq 1$ , pour tout  $j = 0, 1, \dots, n$ , d'après la formule (2.3.5), on a

$$l \frac{d^{l-1}}{d\alpha^{l-1}} d_j(\alpha) + \alpha \frac{d^l}{d\alpha^l} d_j(\alpha) + \sum_{i=0}^n B_j^i \frac{d^l}{d\alpha^l} d_i(\alpha) = 0.$$

On voit clairement que ce système peut être écrit sous forme (2.5.11). □

**Remarque 2.5.1.** Dans l'Algorithme 2.5.1, on calcule  $\frac{d}{d\alpha} f_\alpha^{n,\delta}$ ,  $\frac{d^2}{d\alpha^2} f_\alpha^{n,\delta}$  par la résolution des systèmes (2.5.11) (Lemme 2.5.1), pour  $l = 1, 2$ , et la formule (2.3.3).

## 2.6 Tests numériques

Dans cette section, On utilise cette stratégie d'approximation et le logiciel de calcul MATLAB. La précision de la solution a été mesurée en évaluant les normes de la différence entre la solution approchée  $f_\alpha^{n,\delta}$  et la solution exacte  $\hat{f}$  en 100 points. Pour ces tests, on calcule les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}$  et les coefficients du vecteur  $g^N$  par la règle de quadrature trapézoïdale pour 100 points de poids  $w_1 = w_{100} = (b-a)/100$ ,  $w_i = (b-a)/50$ ,  $i = 2, 3, \dots, 99$ . En comparant les résultats numériques avec les solutions exactes, via les normes suivantes

$$\|e_n^\delta\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 100} |\hat{f}(t_i) - f_\alpha^{n,\delta}(t_i)| \text{ et } \|e_n^\delta\|_2 = \left[ \sum_{i=1}^{100} w_i (\hat{f}(t_i) - f_\alpha^{n,\delta}(t_i))^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

où  $t_i = a + i \frac{(b-a)}{100}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 100$  sont les noeuds.

Dans ces tests, on perturbe la donnée  $g$  de l'équation (2.1.1) par la fonction  $\delta \cdot \cos(10t/\delta)$  à et on considère au lieu de  $g$  les données perturbées  $g^{n,\delta}$  :

$$g_j^{n,\delta} \approx \sum_{i=1}^{100} w_i \sum_{k=1}^{100} w_k k(s_k, t_i) (g(s_k) + \delta \cdot \cos(10 \cdot \frac{s_k}{\delta})) \psi_c^j(t_i), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Dans ces exemples, les valeurs du paramètre de régularisation  $\alpha$  sont choisies par l'Algorithme 2.5.1 avec  $\eta = 1$ ,  $\epsilon = 10^{-15}$  ou  $10^{-10}$ ,  $e_{\max} = 100$  et  $\alpha_0$  est choisi dans  $[0.1, 10^{-8}]$ . D'après [WX01], si le terme  $\nabla = \phi'(\alpha_e)^2 - 2\phi(\alpha_e)\phi''(\alpha_e) < 0$ , alors le terme  $\sqrt{\nabla}$  dans la formule (2.5.4) sera remplacé par  $|\text{real}\sqrt{\nabla}|$ .

**Exemple 2.6.1.** Comme premier exemple, considérons l'équation suivante

$$\int_0^1 \exp(st)f(t)dt = \frac{\exp(s+1)-1}{s+1}.$$

La solution exacte de ce problème est  $f(t) = \exp(t)$ .

Pour voir les propriétés qualitatives de notre méthode, on compare nos résultats numériques de l'exemple 2.6.1 par ceux qui ont été obtenus dans les travaux [BLP07, KJ15], pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\delta$  (voir les Tableaux 2.1 - 2.2 et les Figures 2.1 - 2.4).

**Exemple 2.6.2.** On considère l'exemple suivant (cf. [EN85])

$$\int_0^1 k(s,t)f(t)dt = \frac{1}{720}(s^6 - 20s^3 + 45s^2),$$

où le noyau  $k(s,t)$  est donné par

$$k(s,t) = \begin{cases} 0, & s \leq t, \\ s-t, & s > t. \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est  $f(t) = \frac{1}{24}(t^4 - 4t + 3)$ .

Les résultats numériques de l'exemple 2.6.2 sont affichés sur les Tableaux 2.3 - 2.5 et les Figures 2.5 - 2.8.

**Exemple 2.6.3.** On Considère l'exemple suivant

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(s^2 + 3t + 1)f(t)dt = \frac{1}{6} \cos(s^2 + 2) - \frac{\pi}{4} \sin(s^2)$$

La solution exacte est donnée par  $f(t) = \sin(3t + 1)$ .

Les Tableaux 2.6 - 2.9 et les Figures 2.9 - 2.13 résument les résultats numériques de l'exemple 2.6.3, pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\delta$ .

## 2.6.1 Conclusion

Les tableaux 2.1-2.9 et les Figures 2.1 - 2.13 montrent que les résultats numériques concordent bien avec les résultats théoriques. La méthode de projection-ré gularisation développée dans cette étude pour résoudre les équations intégrales de Fredholm de première espèce est très simple, efficace et montre bien que le choix des fonctions PSWFs peut jouer un rôle très important dans la stabilité numérique de la méthode.

A travers ces exemples, on voit clairement la stabilité de la méthode, et qu'elle donne des résultats très satisfaisants même pour de petites dimensions ( $n = 1, 2, \dots, 10$ ). De plus, la solution régularisée reste stable pour un bruit fort  $\delta = 0.3$ .

## 2.6.2 Tableaux

$\alpha_0 = 0.1$	Méthode [BLP07]	Méthode PSWFs	Méthode [BLP07]	Méthode PSWFs
$n$	$\delta = 0.0001$		$\delta = 0.001$	
1	$1.96e-01$	$2.46e-02$	$1.96e-01$	$2.45e-02$
2	$1.31e-02$	$2.26e-03$	$2.60e-02$	$4.27e-03$
3	$8.35e-03$	$2.18e-03$	$8.78e-03$	$4.37e-03$
4	$8.35e-03$	$2.18e-03$	$8.77e-03$	$4.34e-03$
5	$8.35e-03$	$2.18e-03$	$8.58e-03$	$4.40e-03$
6	$8.34e-03$	$2.18e-03$	$8.33e-03$	$4.39e-03$
7	$8.32e-03$	$2.18e-03$	$8.33e-03$	$4.40e-03$
8	$8.33e-03$	$2.18e-03$	$8.33e-03$	$4.40e-03$
9	$8.33e-03$	$2.18e-03$	$8.33e-03$	$4.40e-03$
10	$8.33e-03$	$2.18e-03$	$8.33e-03$	$4.40e-03$

Table 2.1 – Résultats numériques (Exemple 2.6.1) en utilisant l'estimation d'erreur  $\|e_n^\delta\|_\infty$ , pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\delta$ , où  $m = 3$  et  $c = n + 1$ .

$n$	Méthode PSWFs	Méthode [ML05]	Ondelettes de Sinc [KJ15]	Ondelettes de Coifman [KJ15]
2	$1.8e-03$	$2.1e-01$	$2.1e-01$	$5.1e-01$
3	$1.4e-04$	$5.8e-02$	$5.8e-02$	$5.8e-02$
4	$1.3e-05$	$1.4e-03$	$1.4e-03$	$8.4e-01$
5	$1.6e-05$	$3.6e-03$	$3.6e-03$	$9.6e-03$
6	$3.9e-06$	$3.3e-04$	$3.3e-04$	$3.3e-04$
7	$4.7e-06$	$5.7e-05$	$5.7e-05$	$1.7e-04$
8	$3.8e-06$	$8.7e-05$	$8.7e-05$	$4.7e-03$
9	$3.5e-06$	$4.6e-06$	$4.6e-06$	$7.6e-04$

Table 2.2 – Résultats numériques de l'exemple 2.6.1 avec des données exactes ( $\delta = 0$ ) en utilisant l'estimation d'erreur  $\|e_N^\delta\|_2$  où  $m = n + 3$ ,  $c = n + 1$  et  $\alpha_0 = 10^{-8}$ .

$n$	$\alpha_0 = 10^{-4}$	$\ e_n^\delta\ _2$	$\ e_n^\delta\ _2$
		Méthode PSWFs	Méthode [EN85]
4		$7.8e - 05$	$3.6e - 03$
8		$1.7e - 05$	$2.1e - 03$
16		$1.4e - 05$	$3.6e - 04$
32		$1.6e - 05$	$8.4e - 05$
64		$1.8e - 05$	$2.1e - 05$

Table 2.3 – ( Exemple 2.6.2) Comparaison entre la méthode dans le travail [EN85] et la méthode de ce chapitre pour différentes valeurs de  $n$ , où  $g$  est perturbée par  $\delta(n) = n^{-3} \|g\|$ ,  $m = 4$  et  $c = 1.2$ .

$\alpha_0 = 0.1$	$Er =  f(t_i) - \tilde{f}(t_i) $	Méthode PSWFs	
	$t_i$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$
0	$1.43e-02$	$3.56e-04$	$4.71e-05$
0.1	$1.28e-02$	$1.29e-04$	$1.52e-05$
0.2	$1.15e-02$	$1.33e-04$	$8.14e-07$
0.3	$1.02e-02$	$1.15e-04$	$6.32e-06$
0.4	$8.79e-03$	$4.30e-04$	$5.70e-06$
0.5	$7.15e-03$	$6.74e-04$	$2.53e-06$
0.6	$5.36e-03$	$7.62e-04$	$5.69e-07$
0.7	$3.53e-03$	$6.67e-04$	$2.07e-06$
0.8	$1.82e-03$	$4.27e-04$	$1.61e-06$
0.9	$5.28e-04$	$1.45e-04$	$1.50e-07$

Table 2.4 – Erreurs calculées en 10 points pour l'exemple 2.6.2 en utilisant la méthode de ce chapitre avec différentes perturbations de  $\delta$ , où  $n = 2$ ,  $m = 3$  et  $c = 1.5$ .

$\alpha_0 = 10^{-4}$	$\ e_n^\delta\ _2$		
	$n$	Méthode PSWFs	Méthode [EN85]
4	$1.5e-03$	$8.3e-03$	
8	$3.9e-04$	$1.5e-02$	
16	$3.4e-04$	$6.2e-03$	
32	$1.1e-04$	$2.6e-03$	
64	$1.0e-04$	$1.3e-03$	

Table 2.5 – (Exemple 2.6.2) Comparaison entre la méthode dans le travail [EN85] et la méthode de ce chapitre pour différentes valeurs de  $n$ , où  $g$  est perturbée par  $\delta(n) = n^{-2} \|g\|$ ,  $m = 6$  et  $c = 1.2$ .

$\delta = 0.4$	$\alpha_0 = 10^{-1}$	Méthode PSWFs
$n$	$\ e_n^\delta\ _2$	$\ e_n^\delta\ _\infty$
2	$6.21e-02$	$7.48e-02$
3	$6.90e-02$	$8.32e-02$
4	$6.62e-02$	$8.21e-02$
5	$6.65e-02$	$8.19e-02$

Table 2.6 – Résultats numériques de l'exemple 2.6.3, où  $\delta = 0.4$ ,  $m = 3$ ,  $c = 3$ .

$\delta = 0.1$	$\alpha_0 = 10^{-1}$	
$n$	$\ e_n^\delta\ _2$	$\ e_n^\delta\ _\infty$
2	$4.21e-04$	$4.92e-04$
3	$4.81e-04$	$5.81e-04$
4	$4.80e-04$	$5.76e-04$
5	$4.81e-04$	$5.77e-04$

Table 2.7 – Résultats numériques de l'exemple 2.6.3, où  $\delta = 0.1$ ,  $m = 3$ ,  $c = 3$ .

$\delta = 0.05$	$\alpha_0 = 10^{-1}$	
$n$	$\ e_n^\delta\ _2$	$\ e_n^\delta\ _\infty$
2	$3.18e-04$	$3.71e-04$
3	$3.73e-04$	$4.64e-04$
4	$3.71e-04$	$4.61e-04$
5	$3.72e-04$	$4.62e-04$

Table 2.8 – Résultats numériques de l'exemple 2.6.3, où  $\delta = 0.05$ ,  $m = 3$ ,  $c = 3$ .

$\delta = 0$	$\alpha_0 = 10^{-1}$	
$n$	$\ e_n^\delta\ _2$	$\ e_n^\delta\ _\infty$
2	$1.23e - 04$	$1.28e - 04$
3	$1.30e - 04$	$1.36e - 04$
4	$1.31e - 04$	$1.36e - 04$
5	$1.19e - 04$	$1.25e - 04$

Table 2.9 – Résultats numériques de l'exemple 2.6.3 avec des données exactes ( $\delta = 0$ ), où  $m = 3$ ,  $c = 3$ .



## 2.6.3 Figures

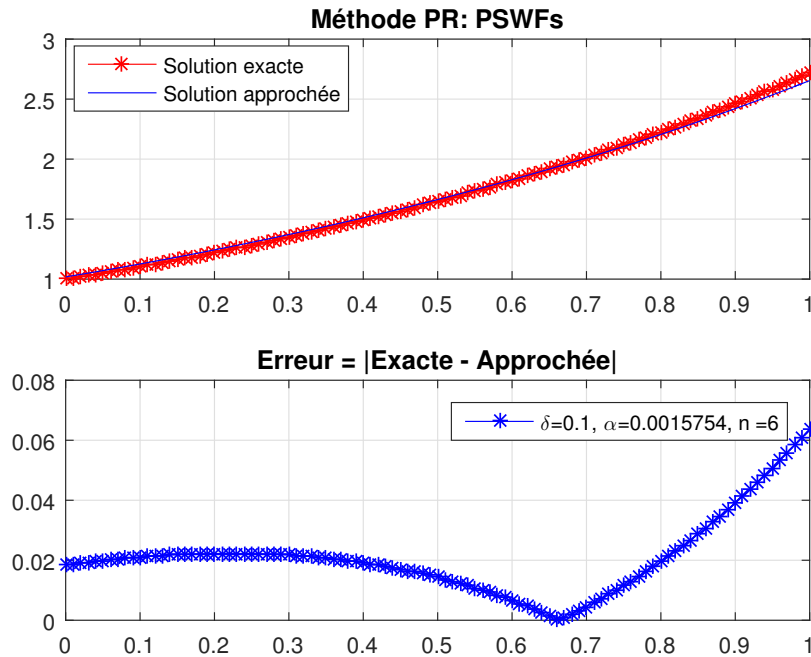


Figure 2.1 – ( Exemple 2.6.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 6$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $m = 3$  et  $c = 5$ .

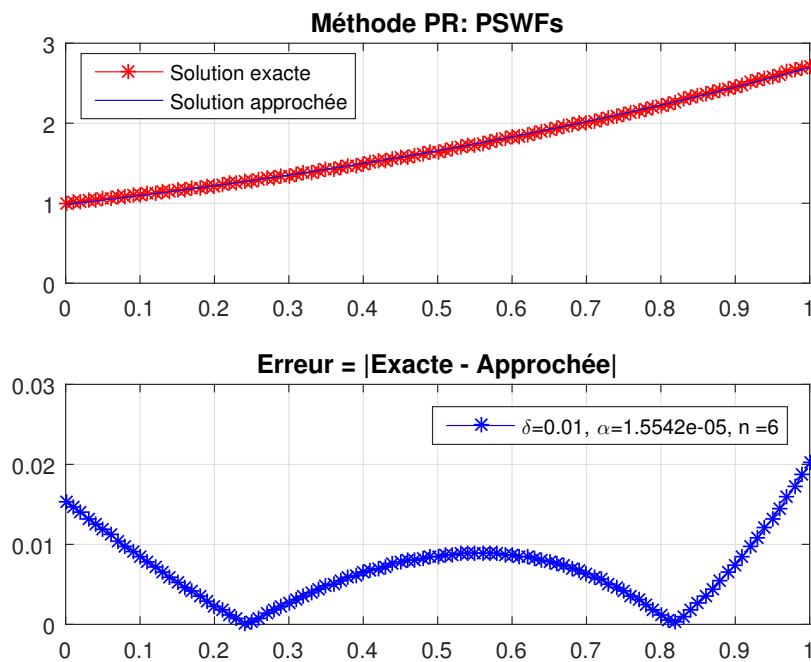


Figure 2.2 – ( Exemple 2.6.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d’erreur,  $n = 6$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $m = 3$  et  $c = 5$ .

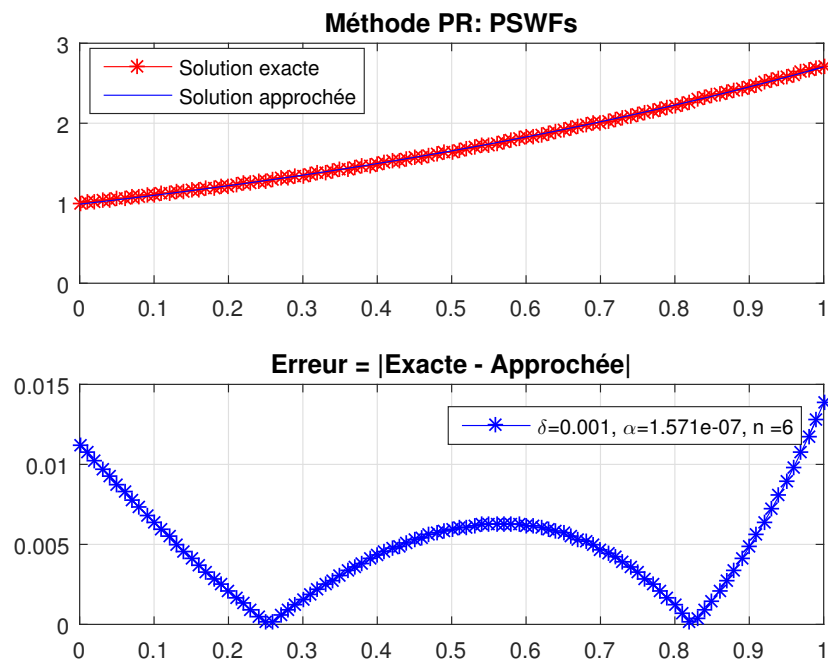


Figure 2.3 – ( Exemple 2.6.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 6$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $m = 3$  et  $c = 5$ .

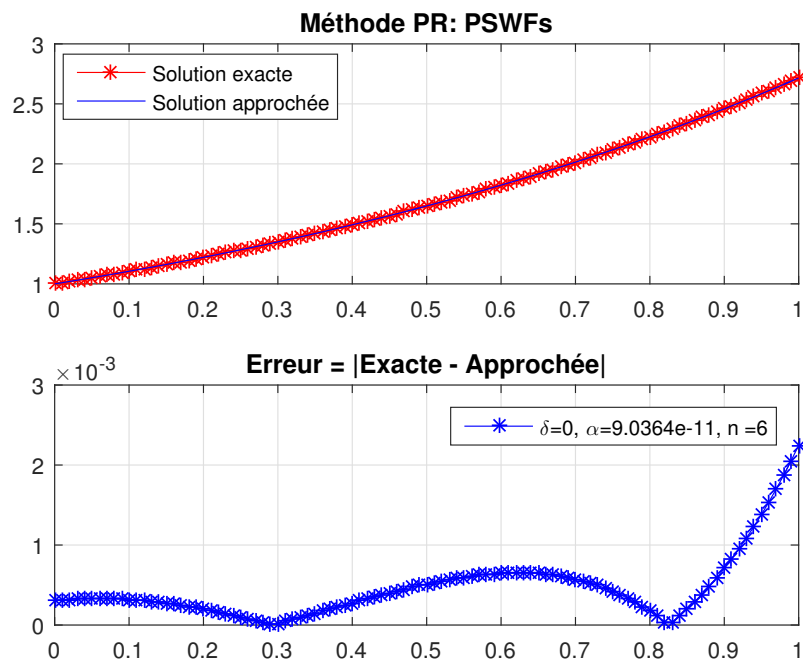


Figure 2.4 – ( Exemple 2.6.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 6$ ,  $\delta = 0$  (données exactes),  $m = 3$  et  $c = 5$ .

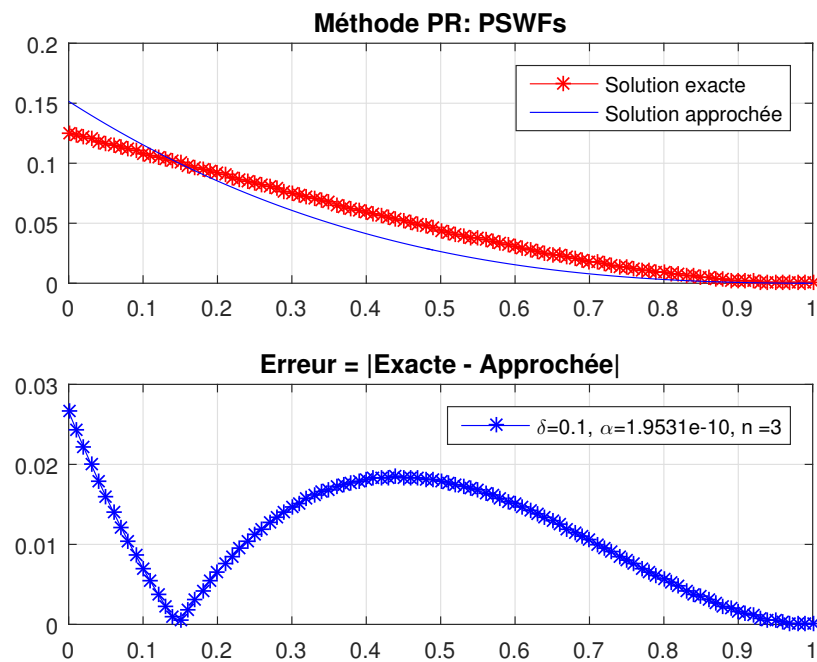


Figure 2.5 – ( Exemple 2.6.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d’erreur,  $n = 3, \delta = 0.1, m = 2$  et  $c = 10$ .

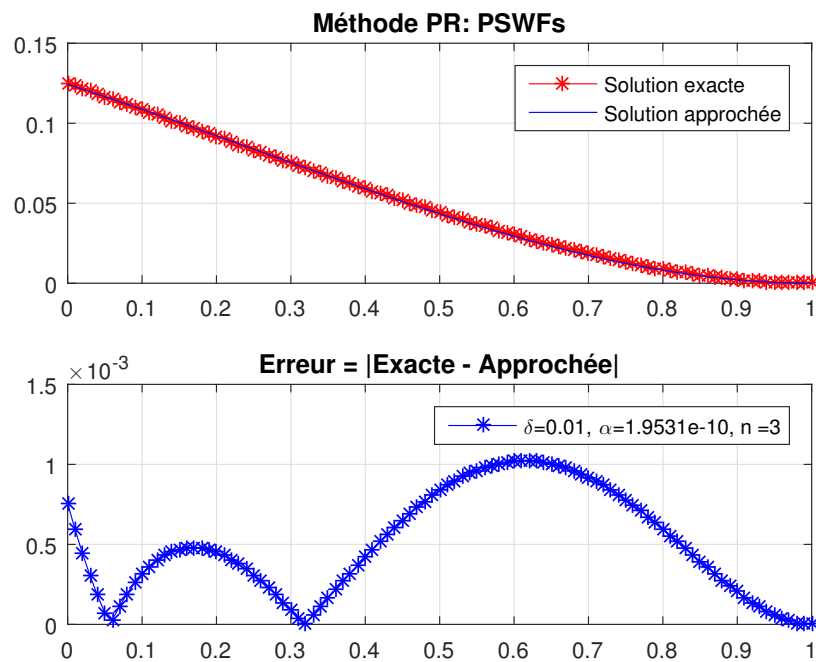


Figure 2.6 – ( Exemple 2.6.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 3, \delta = 0.01, m = 2$  et  $c = 10$ .

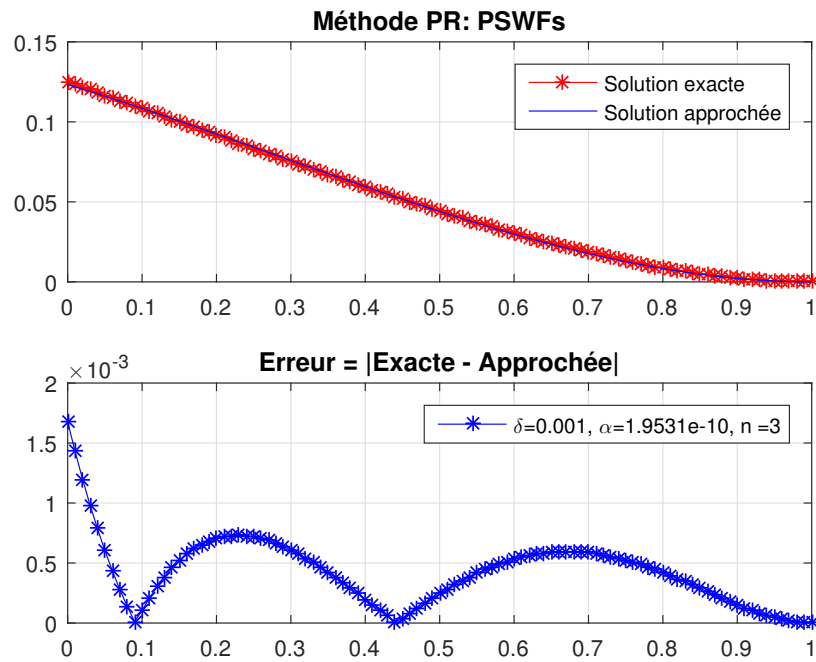


Figure 2.7 – ( Exemple 2.6.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 3, \delta = 0.001, m = 2$  et  $c = 10$ .

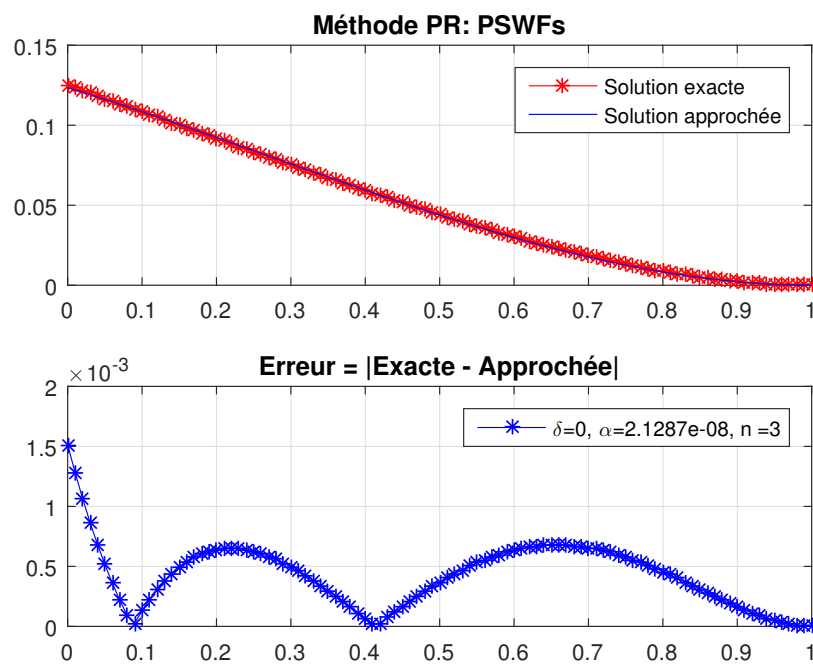


Figure 2.8 – ( Exemple 2.6.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 3$ ,  $\delta = 0$  (données exactes),  $m = 2$  et  $c = 10$ .



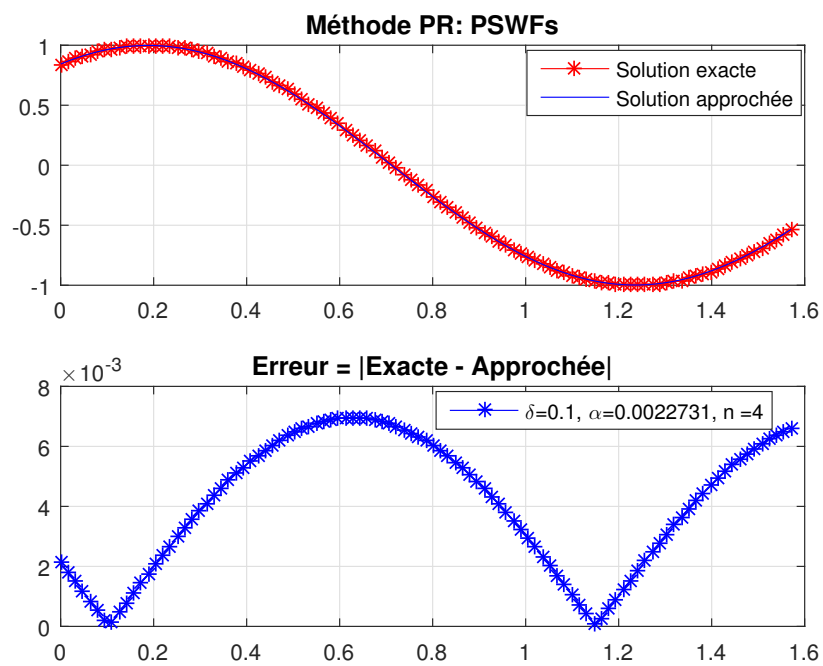


Figure 2.9 – ( Exemple 2.6.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d’erreur,  $n = 4$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $m = 5$  et  $c = 30$ .

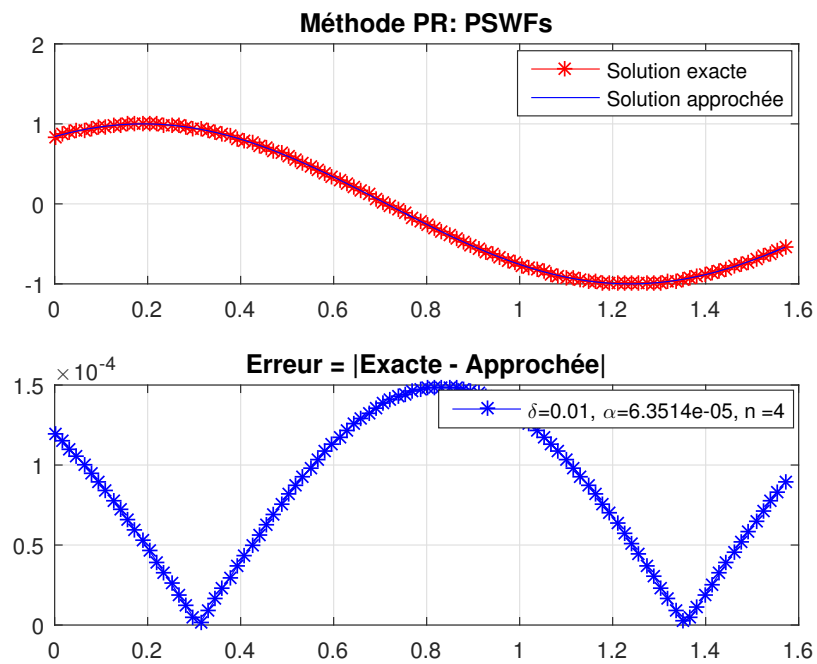


Figure 2.10 – ( Exemple 2.6.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 4$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $m = 5$  et  $c = 30$ .

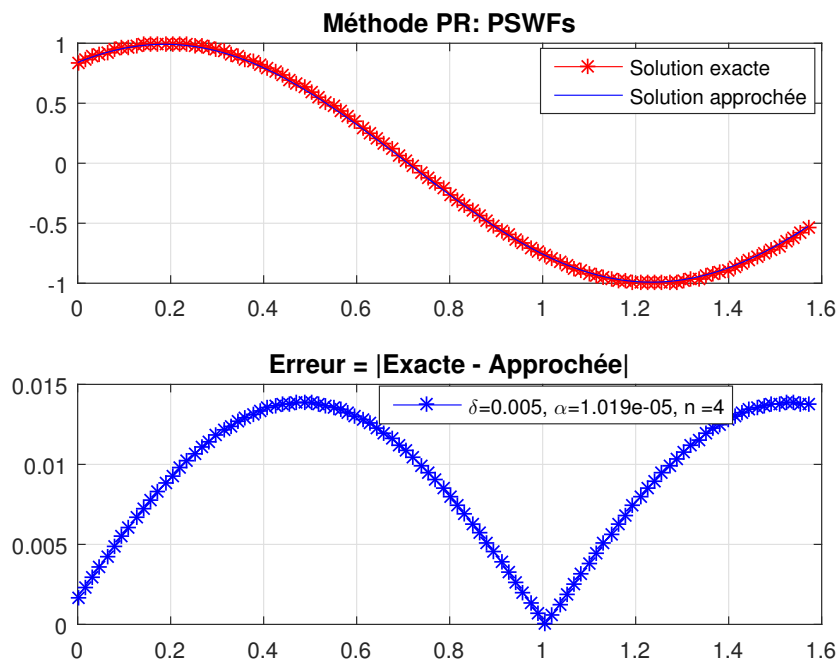


Figure 2.11 – ( Exemple 2.6.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 4$ ,  $\delta = 0.005$ ,  $m = 5$  et  $c = 30$ .

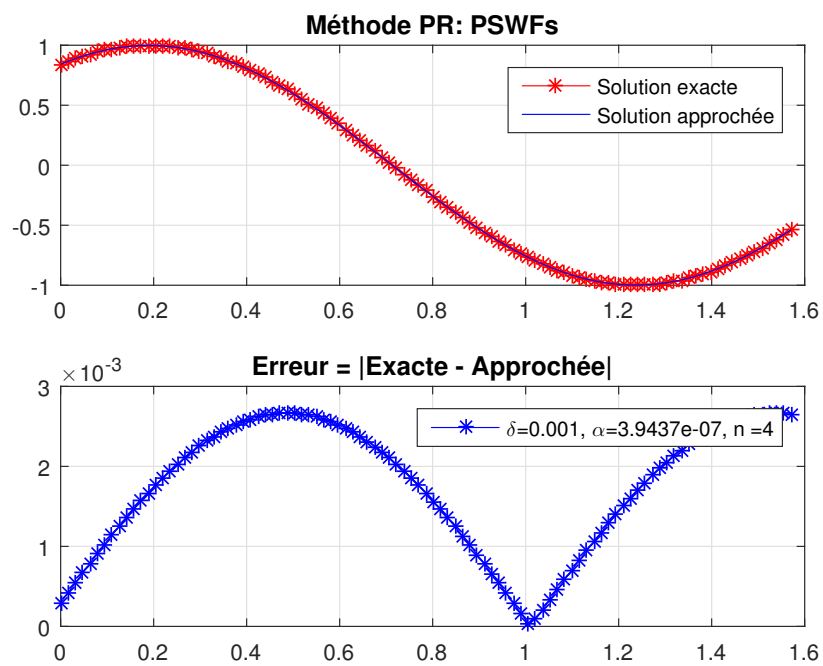


Figure 2.12 – ( Exemple 2.6.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 4$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $m = 5$  et  $c = 30$ .

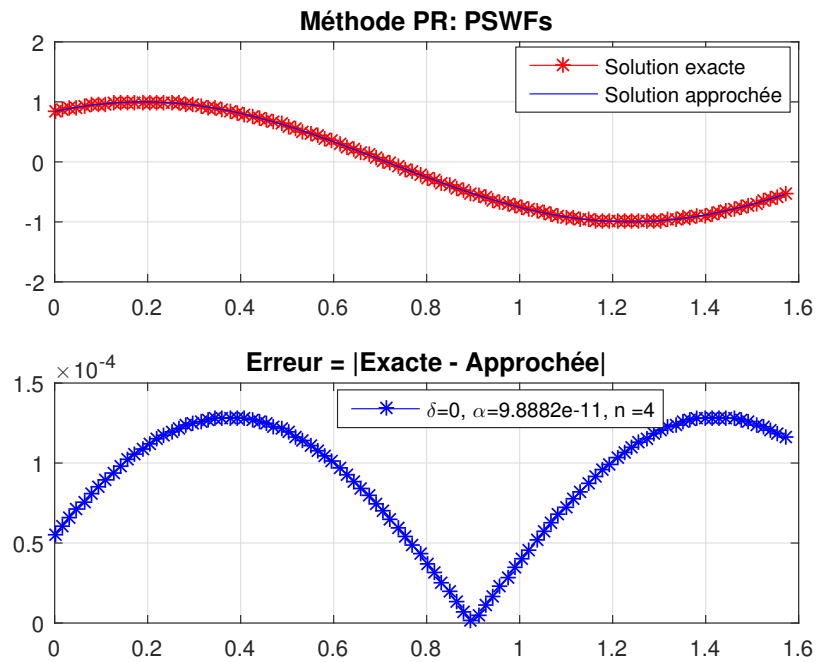


Figure 2.13 – ( Exemple 2.6.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur,  $n = 4$ ,  $\delta = 0$  (données exactes),  $m = 5$  et  $c = 30$ .

# Chapitre

# 3

---

## Méthode de collocation régularisée basée sur les polynômes de Tchebychev

Dans le même contexte du chapitre 2, on change la structure hilbertienne et on développe une stratégie d'approximation numérique pour une classe d'équations intégrales de Fredholm de première espèce. Cette procédure de collocation-régularisée est basée sur la base des polynômes de Tchebychev.<sup>1</sup>

### 3.1 Introduction

**Notation 3.1.1.** On note par  $\mathbb{H}_1=L^2(I)$  et  $\mathbb{H}_2=L^2(J)$  les espaces de Hilbert avec  $I = ((-1, 1), dt)$ ,  $J = ((-1, 1), wdt)$ , où la fonction  $w(t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$  est le poids de Tchebychev.

Le produit scalaire et la norme en  $\mathbb{H}_1$  sont donnés, respectivement par

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{H}_1} := \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad \|f\|_{\mathbb{H}_1}^2 := \int_a^b f(t)^2 dt.$$

---

1. Dans notre mémoire de Magister, on a traité une classe d'équations intégrales de première espèce. On a proposé comme stratégie de régularisation une variante de la méthode de collocation-régularisée basée sur les fonctions de Sinc.

---

Le produit scalaire et la norme en  $\mathbb{H}_2$ , respectivement donnés par

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{H}_2} := \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt, \quad \|f\|_{\mathbb{H}_2}^2 := \int_a^b f(t)^2w(t)dt.$$

**Notation 3.1.2.** Soit  $s \in \mathbb{N}$ . On note par

$$\mathcal{H}_w^s = \{f \in \mathbb{H}_2 \text{ et } \frac{d^k}{dt^k}f(t) \in \mathbb{H}_2 \text{ pour } k = 1, 2, \dots, s\} \text{ et } \mathcal{H}_w^0 = \mathbb{H}_2,$$

l'espace Sobolev, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_w^s} = \sum_{i=0}^s \left\langle \frac{\partial^i}{\partial t^i}f(\cdot), \frac{\partial^i}{\partial t^i}g(\cdot) \right\rangle_{\mathbb{H}_2},$$

et de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{H}_w^s} = \left( \sum_{i=0}^s \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i}f(\cdot) \right\|_{\mathbb{H}_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère l'équation intégrale de Fredholm de première espèce :

$$\int_{-1}^1 k(s, t)f(t)dt = g(s), \quad s \in (-1, 1), \quad (3.1.1)$$

où  $g$  est une fonction donnée dans l'espace  $\mathbb{H}_2$  et  $f$  est l'inconnu recherché dans l'espace  $\mathbb{H}_1$ .

Supposons que la fonction  $k(.,.) \in L^2(I \times J)$  est un noyau non dégénéré, tel que

$$\|k(.,.)\|_{L^2(I \times J)} = \sqrt{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |k(s, t)|^2 w(s)dt ds} < \infty.$$

On peut réécrire l'équation intégrale (3.1.1) sous forme d'opérateur

$$K : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2, \quad Kf = g. \quad (3.1.2)$$

Puisque le noyau  $k(.,.)$  est dans l'espace  $L^2(I \times J)$ , alors l'opérateur  $K$  est un opérateur de type Hilbert-Schmidt, ce qui implique que l'opérateur intégral  $K$  donnée par (3.1.2) est un opérateur compact de rang infini défini entre les espaces de Hilbert  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$ .

Pour le cadre théorique et numérique dédié au problème (3.1.1) engendré par l'opérateur compact  $K$  entre les espaces de Hilbert  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  (solutions généralisées et leurs méthodes de stabilisation),

on renvoie le lecteur aux références [Nai09, TA77, OKCN00, Gro90, EN85, Tik63b, Eng81, Gro84, BG12, Eng92, Gro77].

L'opérateur  $K$  peut être représenté par sa forme diagonale

$$Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \langle f, \psi_i \rangle_{\mathbb{H}_1} \varphi_i, \quad f \in \mathbb{H}_1,$$

où la suite  $\{\sigma_n, \psi_n, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  est le système singulier de  $K$  :

- $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  est une base orthonormée dans l'espace  $\mathcal{N}(K)^{\perp}$ .
- $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  est une base orthonormée dans l'espace  $\overline{\mathcal{R}(K)}$ .
- $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  est une suite de nombres réels positifs tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .

L'inverse généralisé  $K^+$  de  $K$  est un opérateur linéaire avec domaine  $\mathcal{D}(K^+) = \mathcal{R}(K) + \mathcal{R}(K)^{\perp}$ , donné par

$$K^+g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(g, \varphi_i)_{\mathbb{H}_2}}{\sigma_i} \psi_i, \quad \text{pour chaque } g \in \mathcal{D}(K^+),$$

et la solution généralisée de l'équation (3.1.2) est donnée par

$$\widehat{f} = K^+g \in \mathcal{N}(K)^{\perp}.$$

Supposons que  $g \in \mathcal{D}(K^+)$ , et on prend  $g_i = g + (\sigma_i)^p \varphi_i$  ( $0 < p < 1$ ), on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|g - g_i\|_{\mathbb{H}_2} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\sigma_i)^p \rightarrow 0,$$

mais

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \widehat{f} - \widehat{f}_i \right\|_{\mathbb{H}_1} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\sigma_i)^{p-1} \rightarrow \infty.$$

Ce qui montre que l'inverse généralisé  $K^+$  de  $K$  n'est pas continu, et donc le problème (3.1.2) est mal posé. De plus, la solution généralisée  $\widehat{f}$  de (3.1.2) est instable. En général, on stabilise la solution généralisée  $\widehat{f}$  de (3.1.1) ou (3.1.2) par une méthode de régularisation, pour obtenir des solutions approchées stables (voir [Tik63a, Tik63b, BG12, Eng92]).

Une régularisation de  $K^+$  consiste à remplacer  $K^+$  par une famille  $\{R_{\alpha}\}_{\alpha>0}$  d'opérateurs continus, tels que

$$f^{\alpha} = R_{\alpha}g \rightarrow K^+g = \widehat{f} \quad \text{si } \alpha \rightarrow 0,$$



où  $f^\alpha$  est appelée solution régularisée (ou quasi-solution) de  $\widehat{f}$  du problème (3.1.1).

Dans la régularisation de Tikhonov [Tik63a, Tik63b], on utilise la famille des opérateurs

$$R_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1}K^*, \quad \alpha > 0, \quad (3.1.3)$$

où  $\alpha > 0$  est appelé le paramètre de régularisation. Supposons que  $g \in \mathcal{D}(K^+)$  et  $g^\delta \in \mathbb{H}_2$ , où  $\delta \in (0, 1)$  est considéré comme étant le niveau d'erreur, tel que

$$\|g - g^\delta\|_{\mathbb{H}_2} \leq \delta. \quad (3.1.4)$$

Si  $\widehat{f} \in \mathcal{R}(K^*) = \mathcal{N}(K)^\perp$ , alors

$$\|\widehat{f} - f^\alpha\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_1 \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad \|f^\alpha - f_\delta^\alpha\|_{\mathbb{H}_1} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}, \quad (3.1.5)$$

où  $C_1 > 0$  est une constante indépendante de  $\alpha$ ,  $f^\alpha = R_\alpha g$  et  $f_\delta^\alpha = R_\alpha g^\delta$ .

De plus, si  $\widehat{f} \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$  pour certains  $\nu$  avec  $0 < \nu \leq 1$ , on a

$$\|\widehat{f} - f^\alpha\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_2 \alpha^\nu \quad \text{et} \quad \|f^\alpha - f_\delta^\alpha\|_{\mathbb{H}_1} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (3.1.6)$$

où  $C_2 > 0$  est une constante indépendante de  $\alpha$ .

Il est bien connu que, si le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi en fonction du niveau de bruit  $\delta$ , tel que

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (3.1.7)$$

alors

$$\|\widehat{f} - f_\delta^\alpha\|_{\mathbb{H}_1} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Notre objectif ici est de construire des solutions approchées stables pour le problème mal posée (3.1.2). Pour cela, on remplace la famille d'opérateurs  $R_\alpha$  par une famille d'opérateurs  $R_\alpha^{(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), et on prend

$$f_\delta^{\alpha, n} = R_\alpha^{(n)} g^\delta,$$

comme solution approchée stable de l'équation (3.1.2).

Si on peut montrer que

$$\|R_\alpha^{(n)} - R_\alpha\| \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \rightarrow \infty,$$

sous la condition  $\alpha = \alpha(\delta, n)$  telle que :

$$\alpha(\delta, n) \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow \infty,$$

et

$$\|R_\alpha^{(n)}\| \delta \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow \infty,$$

alors

$$\left\| \widehat{f} - f_\delta^{\alpha, n} \right\|_{\mathbb{H}_1} \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0 \text{ et } n \rightarrow \infty.$$

Dans ce cas,  $f_\delta^{\alpha, n}$  est une approximation régularisée de  $\widehat{f}$ .

Plusieurs méthodes ont été développées dans la littérature pour traiter ces équations (3.1.2). On peut citer par exemple : les méthodes basées sur l'approximation des valeurs propres [Hua11, PLN13, PN11], les méthodes de collocation spectrale [MMA07, MNY07], les méthodes de projections [KO12, NBR16, Neu87, KN88, PP00, Raj03].

Notre approche d'approximation emploie les polynômes orthogonaux de Tchebychev comme éléments de la base hilbertienne et la méthode de Tikhonov. On construit une approximation de rang fini  $A_n$  pour  $K^*K$  et une approximation  $B_n$  pour  $K^*$ . Enfin, on combine ces deux approximations pour construire notre famille d'opérateurs  $R_\alpha^{(n)}$ , définie par l'expression  $(A_n + \alpha I)^{-1} B_n$ . En conséquence, le problème original (3.1.2) se transforme en la résolution d'un système linéaire bien conditionné.

## 3.2 Approximation de rang fini

Soit  $n$  entier positif, on définit les opérateurs  $S_n$  et  $Q_n$  par

$$S_n : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad S_n g := (g(t_1), \dots, g(t_n))^t, \quad (3.2.1)$$

où  $\{t_k\}_{k=1}^n$  sont les zéros du polynôme de Tchebychev  $T_n$ , et

$$Q_n : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2^n, \quad Q_n f(\cdot) := \sqrt{\frac{\pi}{n}} S_n f(\cdot), \quad (3.2.2)$$

où  $S_n$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $\mathbb{H}_2$  sur  $\mathbb{P}_n((-1, 1)) = \mathbb{H}_2^n$ .

**Remarque 3.2.1.** Pour parler des valeurs de  $g$  aux  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  dans (3.2.1), on suppose que  $g \in C([-1, 1])$ .

Dans ce qui suit, on suppose que

$$k(s, t) \in C([-1, 1]^2) \text{ et } g \in \mathcal{R}(K).$$

On remplace l'équation (3.1.2) par

$$K_n(f) = g_n, \quad (3.2.3)$$

où

$$K_n = S_n Q_n K = G_n K, \quad (3.2.4)$$

est un opérateur de  $\mathbb{H}_1$  à  $\mathbb{R}^n$ , et  $g_n = G_n(g)$ .

Soit  $K$  l'opérateur dans (3.1.2), pour  $f \in \mathbb{H}_1$ , par la formule (1.3.5), on a

$$Kf = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i T_i, \text{ avec } \hat{c}_i = \eta_i \langle Kf, T_i \rangle_{\mathbb{H}_2}, i \geq 0,$$

où  $\eta_0 = \frac{1}{\pi}$  et  $\eta_i = \frac{2}{\pi}$  pour  $i \geq 1$ .

Il résulte que

$$\langle T_j, T_i \rangle_{\mathbb{H}_2} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{\eta_i}, & i = j. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Par la formule de Parseval, on a

$$\|Kf\|_{\mathbb{H}_2}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i |\langle Kf, T_i \rangle_{\mathbb{H}_2}|^2. \quad (3.2.6)$$

**Théorème 3.2.1.** Soit  $K_n : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  donné par la formule (3.2.4). Alors  $K_n$  est un opérateur borné, et son opérateur adjoint  $K_n^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_1$  est donné par :

$$K_n^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_1, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, K_n^* u(\cdot) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i T_i(x_j) u_j K^*(T_i)(\cdot), \quad (3.2.7)$$

où  $K^*$  est l'adjoint de  $K$ .

*Preuve.* (i) Pour chaque  $f$  dans  $\mathbb{H}_1$ , on a

$$\|\mathbf{K}_n f\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{c}_i T_i(x_j) \right]^2.$$

En vertu de la relation d'orthogonalité discrète (1.3.5), on peut écrire :

$$\left[ \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{c}_i T_i(x_j) \right]^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{c}_i^2 T_i(x_j)^2,$$

ce qui implique que

$$\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{c}_i T_i(x_j) \right]^2 = \widehat{c}_0^2 \left( \sum_{j=1}^n T_0(x_j)^2 \right) + \dots + \widehat{c}_{n-1}^2 \left( \sum_{j=1}^n T_{n-1}(x_j)^2 \right) = n\widehat{c}_0^2 + \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{c}_i^2.$$

D'où

$$\|\mathbf{K}_n f\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \pi \widehat{c}_0^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{c}_i^2 \leq \|\mathbf{K}f\|_{\mathbb{H}_2}^2 \leq \|\mathbf{K}\|^2 \|f\|_{\mathbb{H}_2}^2,$$

ce qui nous permet de conclure que  $\mathbf{K}_n$  est un opérateur borné et  $\|\mathbf{K}_n\| \leq \|\mathbf{K}\|$ .

(ii) Par définition de  $\mathbf{K}_n$ , on peut définir son opérateur adjoint  $\mathbf{K}_n^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_1$ .

Pour

$$u = (u_1, \dots, u_n)^t \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{K}_n f = (f_1, \dots, f_n)^t, \quad f_j = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{c}_i T_i(x_j),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{K}_n f, u \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \sum_{j=1}^n f_j u_j = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{c}_i T_i(x_j) u_j \\ &= \left\langle f, \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i T_i(x_j) u_j \mathbf{K}^*(T_i) \right\rangle_{\mathbb{H}_1} \\ &= \langle f, \mathbf{K}_n^* u \rangle_{\mathbb{H}_1}, \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\mathbf{K}_n^* u(\cdot) = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i T_i(x_j) u_j \mathbf{K}^*(T_i)(\cdot).$$

□

**Lemme 3.2.1.** Pour chaque  $f \in \mathbb{H}_1$  et  $g \in \mathbb{H}_2$ , on a

$$\langle \mathbf{K}f, g \rangle_{\mathbb{H}_2} = \langle f, \mathbf{K}^*g \rangle_{\mathbb{H}_1},$$

où l'opérateur adjoint  $\mathbf{K}^*$  est donné par la formule

$$\mathbf{K}^*(g)(t) = \int_{-1}^1 k(\tau, t)w(\tau)g(\tau)d\tau, \quad t \in (-1, 1).$$

Soit  $s \in \mathbb{N}^*$ , introduisons l'espace de Sobolev

$$\mathcal{H}_{I,J}^s = \left\{ h \in L^2(I \times J) \text{ et } \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} h(s, t) \in L^2(I \times J), \forall (i, j) \text{ avec } i + j \leq s \right\},$$

de la norme

$$\|h(\cdot, \cdot)\|_{s,I,J} = \sum_{i+j=0}^s \left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} h(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(I \times J)}.$$

**Remarque 3.2.2.** Si on suppose que le noyau  $k(\cdot, \cdot) \in C([-1, 1]^2) \cap L^2(I \times J)$ , alors  $\mathcal{R}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbb{H}_2$ , et si  $k(\cdot, \cdot) \in C([-1, 1]^2) \cap \mathcal{H}_{I,J}^s$ , alors on a  $\mathcal{R}(\mathbf{K}) \subseteq \mathcal{H}_w^s$ .

On note par

$$\left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} k(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(I \times J)} = M_{i,j} \text{ et } \|k(\cdot, \cdot)\|_{s,I,J} = \sum_{i+j=0}^s M_{i,j} = M_s < \infty.$$

Pour  $j = 0$  et si  $f \in \mathbb{H}_1$ , on a

$$\frac{d^i}{ds^i} (\mathbf{K}f)(s) = \int_{-1}^1 \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) f(t) dt, \quad s \in (-1, 1),$$

et par l'inégalité de Cauchy - Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^i}{ds^i} (\mathbf{K}f) \right\|_{\mathbb{H}_2}^2 &\leq \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) \right|^2 dt \right] \left[ \int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt \right] w(s) ds \\ &\leq \left\| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(I \times J)}^2 \|f\|_{\mathbb{H}_1}^2, \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\left\| \frac{d^i}{ds^i} (\mathbf{K}f) \right\|_{\mathbb{H}_2} \leq M_{i,0} \|f\|_{\mathbb{H}_1},$$

d'où

$$\|Kf\|_{\mathcal{H}_w^s} \leq \sum_{i=0}^s M_{i,0} \|f\|_{\mathbb{H}_1} = M_s \|f\|_{\mathbb{H}_1}. \quad (3.2.8)$$

Le calcul de la solution généralisée du système linéaire (3.2.3) est instable, parce que le problème original (3.1.2) est mal posé. Par conséquent, pour des petites perturbations  $g_n^\delta$  des données  $g_n$  telles que

$$\|g_n^\delta - g_n\| \leq \delta,$$

les solution peuvent exploser de manière incontrôlable. Pour neutraliser ce caractère d'instabilité, on Régularise ce système par la méthode de Tikhonov :

$$(K_n^* K_n + \alpha I) f_\alpha^{\delta,n}(t) = K_n^* g_n^\delta(t), \quad t \in (-1, 1), \quad (3.2.9)$$

où le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi en fonction du niveau de bruit  $\delta$  sous la condition (3.1.7).

**Remarque 3.2.3.** L'expression (3.2.7) dans le Théorème 3.2.1, nous permet de conclure que  $\mathcal{R}(K_n^*) = \text{vect}\{K^*(T_i), i = 0, 1, \dots, n-1\}$ .

Nous supposons que l'opérateur  $K^*$  est injectif, alors les vecteurs  $K^*(T_i), i = 0, 1, \dots, n-1$ , sont linéairement indépendants, et par conséquent  $\dim(\mathcal{R}(K_n^*)) = n$ .

Comme la solution régularisée  $f_\alpha^{\delta,n}$  du problème (3.2.3) existe dans l'espace  $\mathcal{R}(K_n^*)$ , donc elle prend la forme

$$f_\alpha^{\delta,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i K^*(T_i)(t), \quad t \in (-1, 1), \quad (3.2.10)$$

où  $d_j (j = 0, 1, \dots, n-1)$  sont des constantes inconnues à déterminer pour expliciter la solution approchée régularisée  $f_\alpha^{n,\delta}$ .

**Proposition 3.2.1.** Soit  $K_n$  comme dans (3.2.3) et  $K_n^*$  donné par la formule (3.2.7) du Théorème 3.2.1. Alors

$$K_n^* K_n : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_1, \quad K_n^* K_n(f)(\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{c}_i K^*(T_i)(\cdot). \quad (3.2.11)$$

De plus,

$$K_n^* K_n f = K^* S_n K f, \quad (3.2.12)$$

où  $S_n$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $\mathbb{H}_2$  sur  $\mathbb{P}_N((-1, 1))$ .

*Preuve.* Pour  $t \in (-1, 1)$ , on a

$$\begin{aligned} K_n^* K_n f(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{j=1}^n \left[ \sqrt{\frac{\pi}{n}} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{c}_m T_m(x_j) \right] \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i T_i(x_j) K^*(T_i)(t) \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \hat{c}_m K^*(T_i)(t) \left[ \sum_{j=1}^n T_m(x_j) T_i(x_j) \right]. \end{aligned}$$

On note par

$$\begin{cases} \theta_m = n, m = 0, \\ \theta_m = n/2, m = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

et de la formule (1.3.4), on conclut que

$$\begin{aligned} K_n^* K_n f(t) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left( \frac{\pi}{n} \eta_m \theta_m \right) \hat{c}_m K^*(T_m)(t) \eta_m \theta_m \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \hat{c}_m K^*(T_m)(t), \\ &= K^* S_n K f(t), \end{aligned}$$

□

En Substituant l'expansion (3.2.10) dans l'équation (3.2.9), on obtient

$$\sum_{j=0}^{n-1} [\alpha d_j + \eta_j \sum_{i=0}^{n-1} d_i \langle K^* T_i, K^* T_j \rangle_{\mathbb{H}_1}] K^*(T_j)(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \langle g^\delta, T_j \rangle_{\mathbb{H}_2} K^*(T_j)(t), \quad t \in (-1, 1). \quad (3.2.13)$$

Les coefficients  $d_j$  dans l'équation (3.2.13) peuvent être calculés à partir du système d'équations linéaires

$$\frac{\alpha}{\eta_j} d_j + \sum_{i=0}^{n-1} B_i^j d_i = F_j^\delta, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.2.14)$$

où

$$B_i^j = \langle K^* T_i, K^* T_j \rangle_{\mathbb{H}_1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1,$$

et

$$F_j^\delta = \langle g^\delta, T_j \rangle_{\mathbb{H}_2}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ce système peut être écrit sous la forme matricielle

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{F}, \quad (3.2.15)$$

où  $\mathbf{A} = \mathbf{C}_\alpha + \mathbf{B}$  avec  $\mathbf{C}_\alpha = \text{diag}(\frac{\alpha}{\eta_0}, \dots, \frac{\alpha}{\eta_{n-1}})$  est une matrice diagonale dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} = [B_i^j]$  est une matrice dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{n-1})^t$  et  $\mathbf{F} = (F_0^\delta, F_1^\delta, \dots, F_{n-1}^\delta)^t$  sont des vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 3.2.2.** *Le système (3.2.15) admet une solution unique dans  $\mathbb{R}^n$ .*

*Preuve.* On remarque que, pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \mathbf{A}u, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle u, \mathbf{A}v \rangle_{\mathbb{R}^n}$ , c'est-à-dire que la matrice  $\mathbf{A}$  est auto-adjointe par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ .

Pour  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})^t$ , posons

$$\xi_i(\tau) = u_i \mathbf{K}^*(T_i)(\tau), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pour  $\alpha > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}u, u \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha}{\eta_i} u_i^2 + \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i(\tau) \right]^2 d\tau \\ &> \frac{\alpha\pi}{2} \|u\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \right\|_{\mathbb{H}_1}^2. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

La formule (3.2.16) montre que la matrice  $\mathbf{A}$  est un opérateur strictement positif sur  $\mathbb{R}^n$ .

Ainsi, pour  $\alpha > 0$ , la matrice  $\mathbf{A}$  du système (3.2.15) est un opérateur strictement positif et auto-adjoint sur  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent, ce système est uniquement solvable.  $\square$

On note par  $\mathbf{G}_n(g^\delta) := g_n^\delta$  les données discrètes bruitées associées aux données discrètes  $\mathbf{G}_n(g) := g_n$ . Le niveau de bruit dans ce cas discret peut être estimé en norme  $\|\cdot\|_\infty$  comme suit

$$\max_{1 \leq j \leq n} |g_n - g_n^\delta| = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \max_{1 \leq j \leq n} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \langle g - g^\delta, T_i \rangle_{\mathbb{H}_2} T_i(x_j) \right|.$$

On note par

$$\Theta = \left( \eta_0 \langle g - g^\delta, T_0 \rangle_{\mathbb{H}_2}, \dots, \eta_{n-1} \langle g - g^\delta, T_{n-1} \rangle_{\mathbb{H}_2} \right)^t,$$

donc

$$\max_{1 \leq j \leq n} |g_n - g_n^\delta| \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}} \max_{1 \leq j \leq n} |\langle \Theta, \Phi^j \rangle_{\mathbb{R}^n}|,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \|g_n - g_n^\delta\|_\infty &= \sqrt{\frac{\pi}{n}} \|\Theta\|_{\mathbb{R}^n} \max_{1 \leq j \leq n} \|\Phi^j\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{n}} \max_{0 \leq i \leq n-1} |\eta_i| \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} \eta_i |\langle g - g^\delta, T_i \rangle_{\mathbb{H}_2}|^2} \max_{1 \leq j \leq n} \|\Phi^j\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$



De la formule (3.2.6) et (1.3.4), on dérive l'estimation

$$\|g_n - g_n^\delta\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|g - g^\delta\|_{\mathbb{H}_2} \leq \delta. \quad (3.2.17)$$

### 3.3 Convergence de la méthode et estimations d'erreur

Dans cette Section, on étudie les résultats de convergence pour cette approche d'approximation de type projection-régularisée. On note par :

- 1)  $f_\alpha = R_\alpha g = (K^*K + \alpha I)^{-1} K^*g$  (la solution régularisée du problème (3.1.2) pour les données exactes).
- 2)  $f_\alpha^n = R_\alpha^{(n)} g = (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1} K_n^*G_n g$  (la solution régularisée approchée du problème (3.2.3) pour les données exactes).
- 3)  $f_\alpha^{n,\delta} = R_\alpha^{(n)} g^\delta = (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1} K_n^*G_n g^\delta$  (la solution régularisée approchée du problème (3.2.3) pour les données inexactes).

Maintenant, on va évaluer l'écart entre la solution régularisée approchée  $f_\alpha^{n,\delta}$  et la solution généralisée  $\hat{f}$ . On a

$$\hat{f} - f_\alpha^{n,\delta} = (\hat{f} - f_\alpha) + (f_\alpha - f_\alpha^n) + (f_\alpha^n - f_\alpha^{n,\delta}),$$

d'où

$$\|\hat{f} - f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1} \leq \|\hat{f} - f_\alpha\|_{\mathbb{H}_1} + \|(R_\alpha^{(n)} - R_\alpha)g\|_{\mathbb{H}_1} + \|R_\alpha^{(n)}(g - g^\delta)\|_{\mathbb{H}_1}. \quad (3.3.1)$$

Supposons que  $\hat{f} = (K^*K)^\nu h \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$  pour un certain  $\nu$  avec  $0 < \nu \leq 1$  et  $h \in \mathbb{H}_1$ . La première quantité et la dernière quantité de la formule (3.3.1) sont estimées à partir de (3.1.5).

Maintenant, pour estimer la quantité  $\|(R_\alpha^{(n)} - R_\alpha)g\|_{\mathbb{H}_1}$ , on remarque que

$$(R_\alpha - R_\alpha^{(n)})g = ((K^*K + \alpha I)^{-1} K^*K - (K_n^*K_n + \alpha I)^{-1} K_n^*K_n)\hat{f}, \quad (3.3.2)$$

on obtient

$$\begin{aligned} (R_\alpha - R_\alpha^{(n)})g &= (K^*K(K^*K+\alpha)^{-1} - (K_n^*K_n + \alpha)^{-1}K_n^*K_n)(K^*K)^v h \\ &= \alpha (K_n^*K_n + \alpha)^{-1} (K^*K - K_n^*K_n)(K^*K + \alpha)^{-1} (K^*K)^v h. \end{aligned}$$

Puisque les opérateurs  $K_n^*K_n$  et  $K^*K$  ils sont des opérateurs auto-adjoints. Donc pour tout  $\alpha > 0$ , on a alors

$$\left\| \alpha (K_n^*K_n + \alpha)^{-1} \right\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K_n\|^2]} \left| \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \right| \leq 1, \quad (3.3.3)$$

et

$$\left\| (K^*K + \alpha)^{-1} (K^*K)^v \right\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \left| \frac{\lambda^v}{\lambda + \alpha} \right| \leq \alpha^{v-1}. \quad (3.3.4)$$

Le Théorème suivant montre que  $\|K^*K - K_n^*K_n\| \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

**Théorème 3.3.1.** *On suppose que le noyau  $k(.,.) \in C([-1, 1]^2) \cap L^2(I \times J)$  et  $f \in \mathbb{H}_1$ , alors*

$$\|K^*K - K_n^*K_n\| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \quad (3.3.5)$$

De plus, si  $k(.,.) \in C([-1, 1]^2) \cap \mathcal{H}_{I,J}^s$  pour certains  $s \geq 1$  et  $f \in \mathbb{H}_1$ , alors

$$\|K^*K - K_n^*K_n\| \leq C_4 \zeta_n, \quad (3.3.6)$$

où  $C_4$  est une constante positive indépendante de  $n$  et  $\zeta_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

*Preuve.* Par la Proposition 3.2.1, on a

$$(K^*K - K_n^*K_n)f = K^*(K - S_n K)f$$

En utilisant le Théorème 1.3.1, pour  $k(.,.) \in C([-1, 1]^2) \cap L^2(X \times Y)$ , on a

$$\|(K^*K - K_n^*K_n)f\|_{\mathbb{H}_1} \leq \|K\|^2 \|(I - S_n)\| \|f\|_{\mathbb{H}_1} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

En utilisant le Théorème 1.3.1 et la formule (3.2.8), et le fait que  $k(.,.) \in C([-1, 1]^2) \cap \mathcal{H}_{I,J}^s$  pour certains  $s \geq 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|(K^*K - K_n^*K_n)f\|_{\mathbb{H}_1} &\leq C_3 n^{-s} \|K^*\| \|Kf\|_{\mathcal{H}_w^s} \\ &\leq \|K\|^2 C_3 n^{-s} M_s \|f\|_{\mathbb{H}_1}, \end{aligned}$$

c'est à dire la formule (3.3.6) pour  $C_4 = \|K\|^2 C_3 M_s$  et  $\zeta_n = n^{-s} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Les deux théorèmes suivants découlent immédiatement du Théorème 3.3.1 et les inégalités (3.1.5), (3.3.3) et (3.3.4).

**Théorème 3.3.2.** *On suppose que le noyau  $k(.,.) \in C([-1, 1]^2) \cap L^2(I \times J)$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$  pour certains  $\nu$  avec  $0 < \nu \leq 1$ , alors*

$$\left\| (R_\alpha^{(n)} - R_\alpha) g \right\|_{\mathbb{H}_1} = \left\| (R_\alpha K - R_\alpha^{(n)} K_n) \widehat{f} \right\|_{\mathbb{H}_1} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \quad (3.3.7)$$

De plus, si  $k(.,.) \in C([-1, 1]^2) \cap \mathcal{H}_{I,J}^s$  pour certains  $s \geq 1$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$  pour certains  $\nu$  avec  $0 < \nu \leq 1$ , alors

$$\left\| (R_\alpha^{(n)} - R_\alpha) g \right\|_{\mathbb{H}_1} = \left\| (R_\alpha K - R_\alpha^{(n)} K_n) \widehat{f} \right\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_5 \alpha^{\nu-1} \zeta_n, \quad (3.3.8)$$

où  $C_5$  est une constante positive indépendante de  $n$ .

**Théorème 3.3.3.** *On suppose que le noyau  $k(.,.)$  est dans l'espace  $C([-1, 1]^2) \cap \mathcal{H}_{I,J}^s$  pour certains  $s \geq 1$ , et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}((K^*K)^\nu)$  pour certains  $\nu$  avec  $0 < \nu \leq 1$ . Alors, on a l'estimation d'erreur suivante*

$$\left\| \widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_2 \alpha^\nu + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + C_5 \alpha^{\nu-1} \zeta_n, \quad (3.3.9)$$

où  $C_2$  dans (3.1.5) et  $C_5$  dans le Théorème 3.3.2.

Dans le Théorème 3.3.3, soit  $n$  le plus petit entier positif tel que  $n \geq \delta^{-2/2s+\nu}$  pour certains  $s \geq 1$  et  $0 < \nu \leq 1$ . Dans ce cas, on peut choisir le paramètre de régularisation  $\alpha = \alpha(\delta)$  de façon que  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  et  $\frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0$  si  $\delta \rightarrow 0$ , par exemple si on prend  $\alpha(\delta) = c_0 \delta^{2/2\nu+1}$  pour certains  $c_0 > 0$ , alors le taux de convergence optimal pour  $\left\| \widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1}$  est  $O(\delta^{2\nu/2\nu+1})$ . Ce choix du paramètre de régularisation est basé sur une méthode de choix a priori.

## 3.4 Choix a posteriori du paramètre de régularisation

L'une des stratégies a posteriori la plus utilisée est le principe de Morozov "Discrepancy Principle" [Mor66]. Dans la méthode de Morozov, le paramètre  $\alpha(\delta)$  est choisi selon le critère suivant

$$\left\| g^\delta - K f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 + \alpha(\delta) \left\| f_{\alpha(\delta)}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}}^2 = \delta^2, \quad (3.4.1)$$

Dans cette étude, on adopte l'Algorithme 2.5.1 donné au Chapitre 2, pour choisir un paramètre de régularisation  $\alpha$  raisonnable et qui peut être calculé aussi sans difficulté.

## 3.5 Tests numériques

Dans cette Section, on propose des exemples numériques pour valider les résultats théoriques de ce chapitre. Les expériences numériques sont faites à l'aide du logiciel MATLAB. Nous calculons les coefficients de la matrice  $\mathbf{B}$  et les coefficients du vecteur  $\mathbf{F}$  par la formule de Gauss-Tchebychev

$$\int_{-1}^1 f(t)w(t)dt = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(t_i),$$

où les nœuds  $\{t_i\}_{i=1}^n$  sont les  $n$  zéros de  $T_n$ . Dans ces tests, nous perturbons la donnée  $\mathbf{G}_n(g) := g_n$  de l'équation (3.2.3) par un bruit aléatoire

$$g_n^\delta = g_n + \delta \text{randn}(\text{size}(g_n)).$$

Pour ces exemples, les valeurs de l'algorithme 2.5.1 sont choisies pour  $\alpha_0 = 10^{-6}$ ,  $\epsilon = 10^{-14}$  et  $e_{\max} = 100$ .

**Exemple 3.5.1.** Comme premier exemple, considérons l'équation suivante

$$\int_0^1 (s-1) \exp(s^2 + t - 1) f(t) dt = -\frac{1}{2} e^{s^2} (e^{-2} - 1)(s-1).$$

La solution exacte de ce problème est  $f(t) = \exp(t-1)$ .

Les résultats numériques de l'exemple 3.5.1 pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\delta$  sont affichés sur les Tableaux 3.1 - 3.5 et les Figures 3.1 - 3.4.

**Exemple 3.5.2.** On Considère l'exemple suivant

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k(s, t) f(t) dt = -\frac{1}{2} \pi \sin s^2$$

où le noyau  $k(s, t)$  est donné par

$$k(s, t) = \cos(s^2 + 3t + 1).$$

La solution exacte de ce problème est  $f(t) = \sin(3t + 1)$ .

Les résultats numériques de l'exemple 3.5.2 sont affichés sur les Tableaux 3.6 - 3.10 et les Figures 3.5 - 3.8.

**Exemple 3.5.3.** On Considère l'exemple

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(s+t) + st\right)f(t)dt = \frac{103}{144}s - \frac{113}{574}.$$

La solution exacte est donnée par  $f(t) = \frac{5}{6}t + \frac{11}{48}$ .

Les Tableaux 3.11 - 3.15 et les Figures 3.9 - 3.12 résument les résultats numérique de l'exemple 3.5.3 pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\delta$ .

**Conclusion.** Les tableaux 3.1-3.15 et les Figures 3.1 - 3.12 montrent que les résultats numériques concordent bien avec les résultats théoriques. La méthode de projection-régularisation développée dans cette étude est simple et efficace, elle est stable et donne des résultats très satisfaisants même pour de petites dimensions ( $n = 3, 4, \dots, 6$ ). De plus, la solution régularisée reste stable pour un bruit fort  $\delta = 0.2$ .

### 3.5.1 Tableaux

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$2.0183e - 01$	$2.0184e - 01$
4	$1.7048e - 01$	$1.7050e - 01$
5	$1.0958e - 01$	$1.0959e - 01$
6	$7.0676e - 02$	$7.0680e - 02$

Table 3.1 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.1, où  $\delta = 0.2$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$4.5559e - 02$	$4.5560e - 02$
4	$4.3472e - 02$	$4.3474e - 02$
5	$2.4686e - 02$	$2.4687e - 02$
6	$3.9476e - 02$	$3.9477e - 02$

Table 3.2 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.1, où  $\delta = 0.1$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
2	$9.6110e - 03$	$9.6111e - 03$
3	$3.1680e - 03$	$3.1581e - 03$
4	$6.9167e - 03$	$6.9168e - 03$
5	$2.3157e - 03$	$2.3159e - 03$

Table 3.3 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.1, où  $\delta = 0.05$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$4.1497e - 04$	$4.1498e - 04$
4	$6.3878e - 05$	$6.3890e - 05$
5	$8.8901e - 04$	$8.8904e - 04$
6	$1.1793e - 05$	$1.1800e - 05$

Table 3.4 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.1, où  $\delta = 0.01$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$2.0178e - 04$	$2.0181e - 04$
4	$2.1731e - 04$	$2.1731e - 04$
5	$2.1648e - 04$	$2.1650e - 04$
6	$2.1608e - 04$	$2.1609e - 04$

Table 3.5 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.1 avec des données exactes ( $\delta = 0$ ).

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$2.7204e - 02$	$2.7206e - 02$
4	$2.5666e - 02$	$2.5667e - 02$
5	$1.3927e - 02$	$1.3927e - 02$
6	$1.6721e - 02$	$1.6722e - 02$

Table 3.6 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.2, où  $\delta = 0.4$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$2.6499e - 03$	$2.6501e - 03$
4	$1.3884e - 02$	$1.3885e - 02$
5	$8.5843e - 03$	$8.5849e - 03$
6	$8.7569e - 03$	$8.7574e - 03$

Table 3.7 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.2, où  $\delta = 0.3$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$5.5214e - 03$	$5.5217e - 03$
4	$6.3800e - 03$	$6.3804e - 03$
5	$2.3973e - 03$	$2.3974e - 03$
6	$7.8731e - 03$	$7.8736e - 03$

Table 3.8 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.2, où  $\delta = 0.2$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$1.1414e - 03$	$1.4142e - 03$
4	$1.4816e - 03$	$1.4817e - 03$
5	$4.2111e - 03$	$4.2112e - 03$
6	$4.5340e - 03$	$4.5343e - 03$

Table 3.9 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.2, où  $\delta = 0.1$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$1.7771e - 04$	$1.7772e - 04$
4	$1.7771e - 04$	$1.7772e - 04$
5	$1.7771e - 04$	$1.7772e - 04$
6	$1.9577e - 04$	$1.9578e - 04$

Table 3.10 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.2 avec des données exactes ( $\delta = 0$ ).



$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$4.1623e - 01$	$3.9182e - 01$
4	$4.0441e - 01$	$3.8069e - 01$
5	$3.5069e - 01$	$3.3013e - 01$
6	$3.0292e - 01$	$2.8516e - 01$

Table 3.11 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.3, où  $\delta = 0.4$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$1.3506e - 02$	$1.2714e - 02$
4	$5.3887e - 02$	$5.0727e - 02$
5	$2.4451e - 02$	$2.3017e - 02$
6	$2.1734e - 02$	$2.0460e - 02$

Table 3.12 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.3, où  $\delta = 0.1$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$2.2229e - 02$	$2.0987e - 02$
4	$4.5615e - 02$	$4.2940e - 02$
5	$4.5862e - 02$	$4.3173e - 02$
6	$6.4384e - 03$	$6.0608e - 03$

Table 3.13 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.3, où  $\delta = 0.01$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$1.7383e - 02$	$1.6363e - 02$
4	$1.7383e - 02$	$1.6834e - 02$
5	$1.8426e - 02$	$1.7346e - 02$
6	$1.8193e - 02$	$1.7126e - 02$

Table 3.14 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.3, où  $\delta = 0.001$ .

$n$	Erreur Absolue	Erreur Relative
3	$1.7383e - 02$	$1.6363e - 02$
4	$1.7883e - 02$	$1.6834e - 02$
5	$1.8426e - 02$	$1.7346e - 02$
6	$1.8193e - 02$	$1.7126e - 02$

Table 3.15 – Résultats numériques de l'exemple 3.5.3 avec des données exactes ( $\delta = 0$ ).

### 3.5.2 Figures

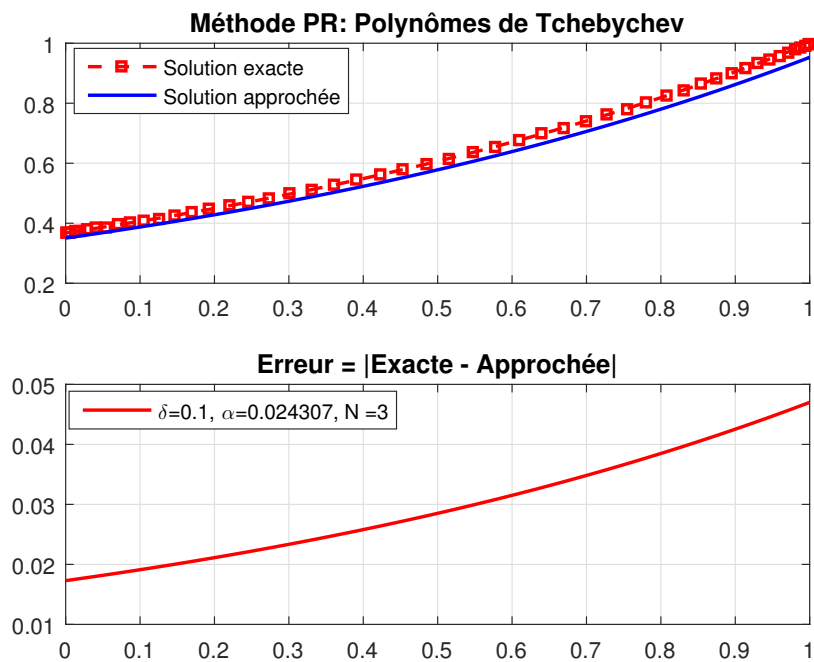


Figure 3.1 – ( Exemple 3.5.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 3$ ,  $\delta = 0.1$ .

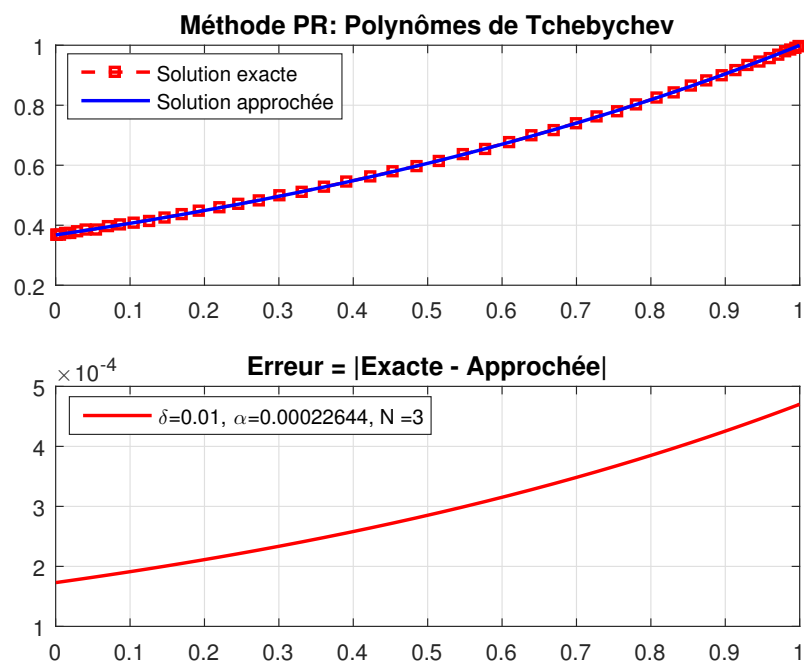


Figure 3.2 – ( Exemple 3.5.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d’erreur où  $n = 3, \delta = 0.01$ .

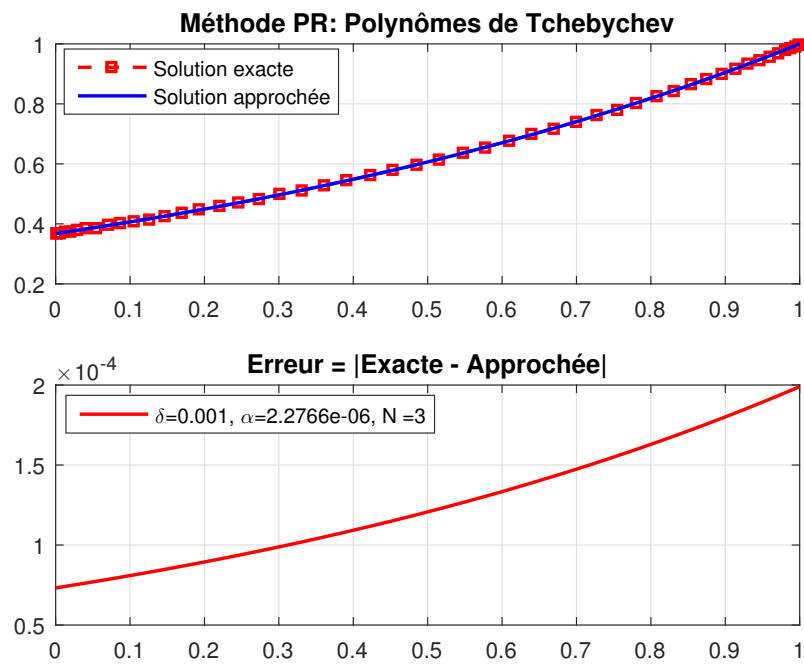


Figure 3.3 – ( Exemple 3.5.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 3$ ,  $\delta = 0.001$ .

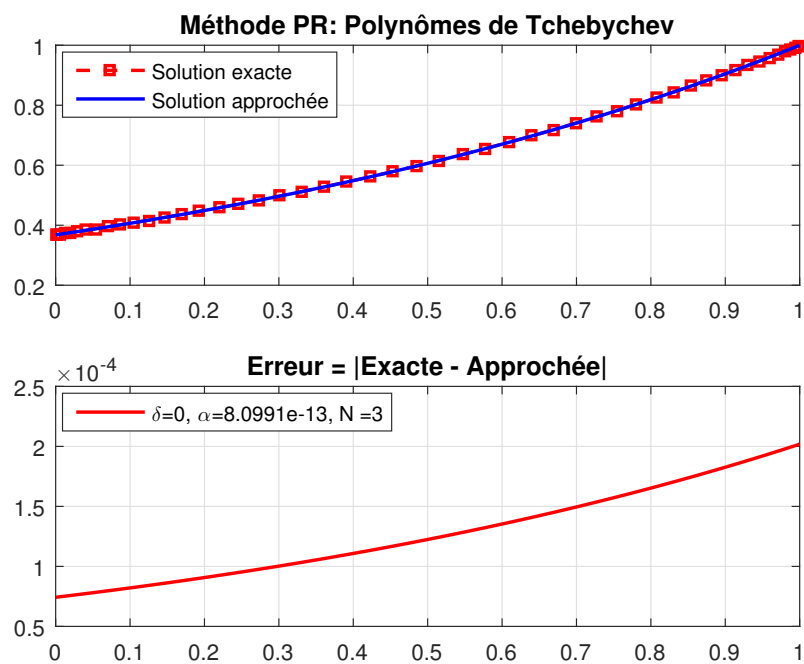


Figure 3.4 – ( Exemple 3.5.1) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 3$ ,  $\delta = 0$  (données exactes).

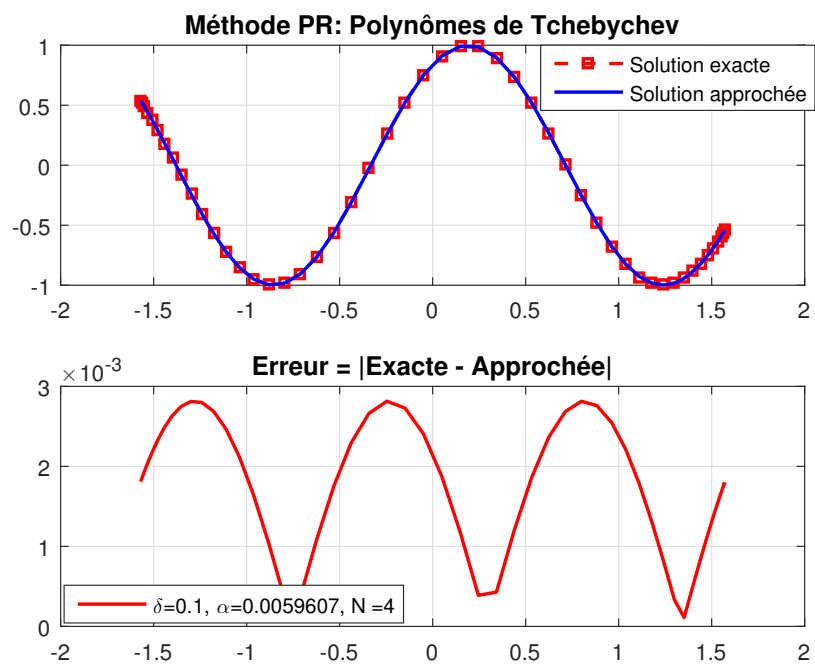


Figure 3.5 – ( Exemple 3.5.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 4, \delta = 0.1$ .

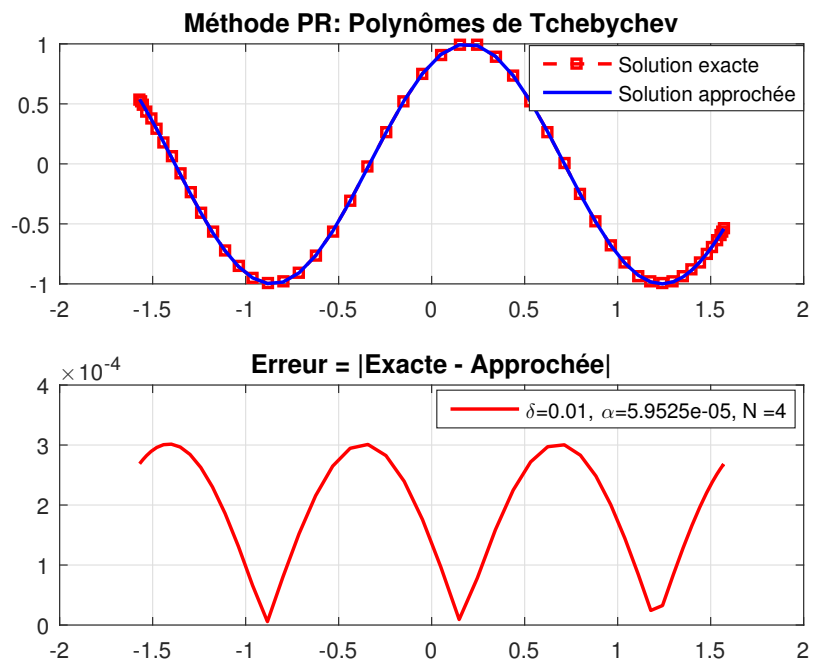


Figure 3.6 – ( Exemple 3.5.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 4$ ,  $\delta = 0.01$ .



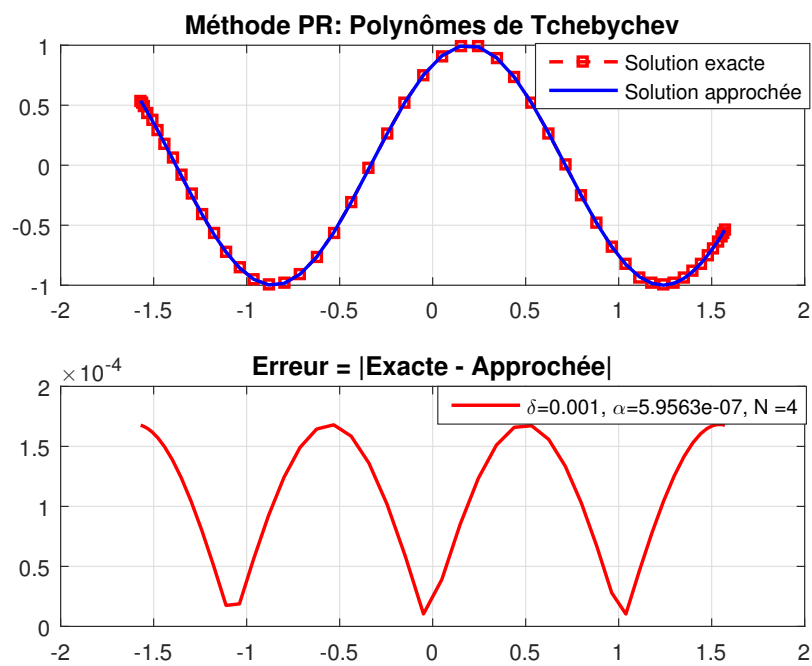


Figure 3.7 – ( Exemple 3.5.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 4$ ,  $\delta = 0.001$ .

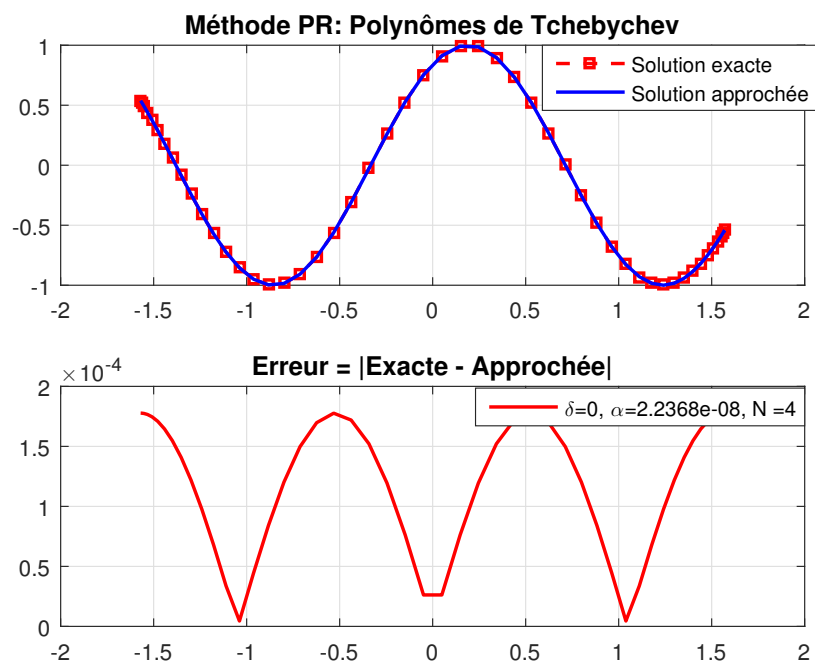


Figure 3.8 – ( Exemple 3.5.2) Solution exacte, solution approchée, courbe d’erreur où  $n = 4$ ,  $\delta = 0$  (données exactes).

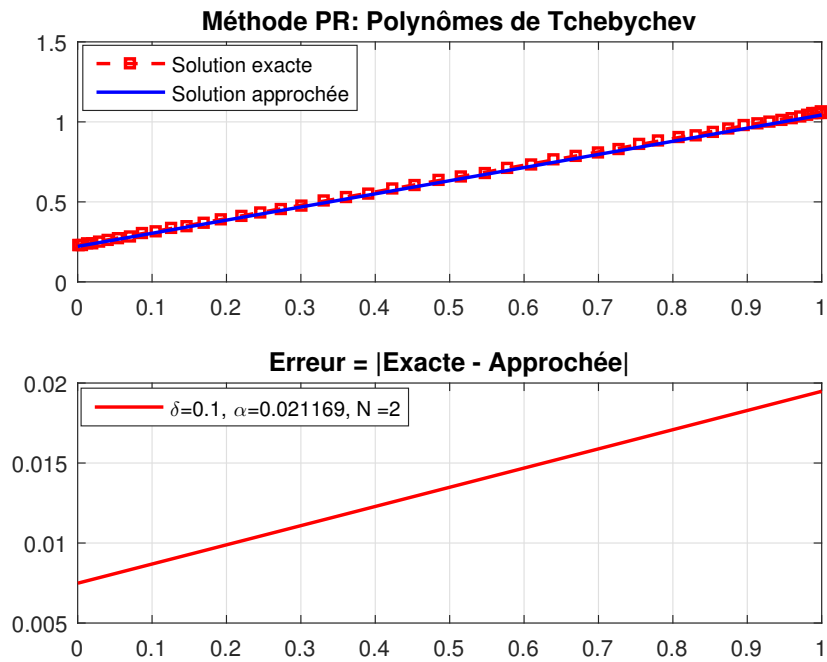


Figure 3.9 – ( Exemple 3.5.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 2, \delta = 0.1$ .

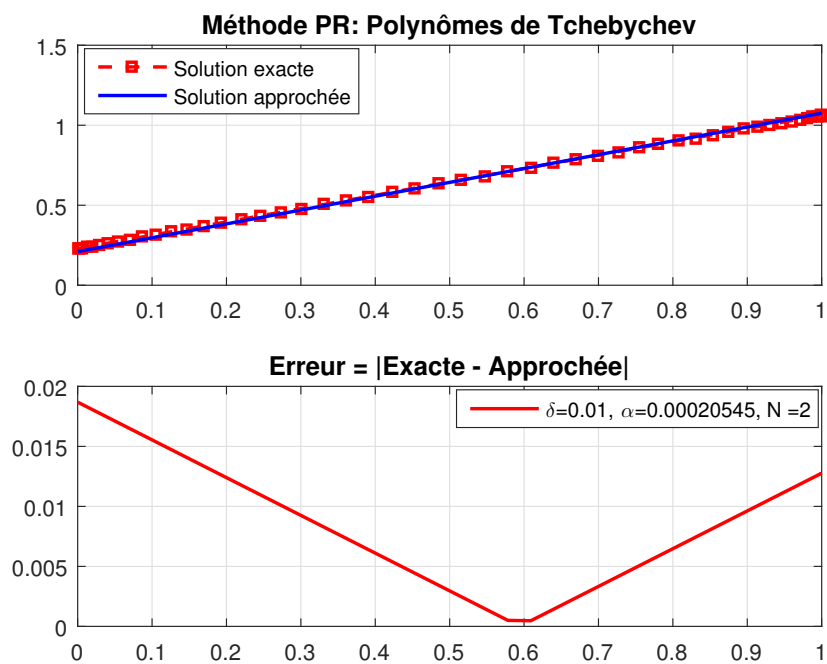


Figure 3.10 – ( Exemple 3.5.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 2$ ,  $\delta = 0.01$ .

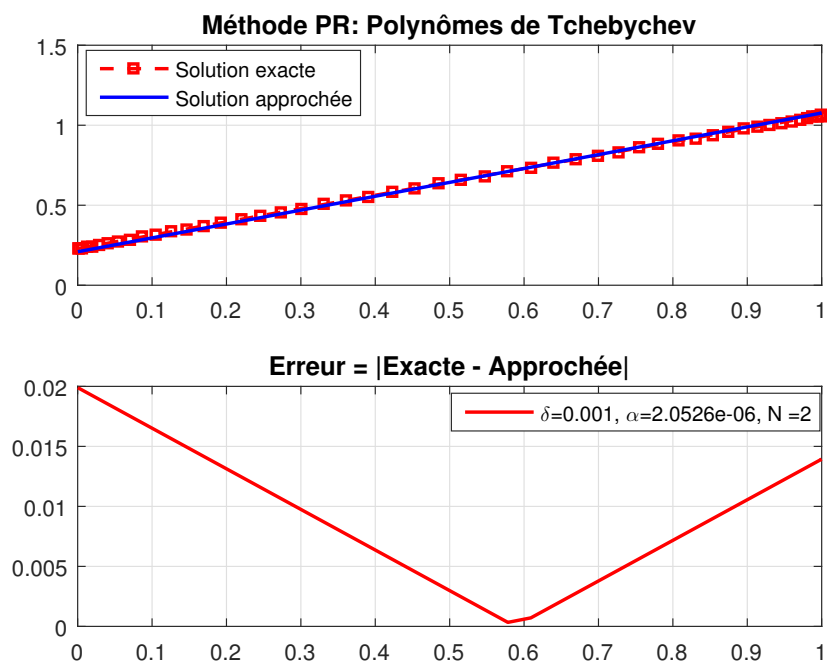


Figure 3.11 – ( Exemple 3.5.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d’erreur où  $n = 2$ ,  $\delta = 0.001$ .

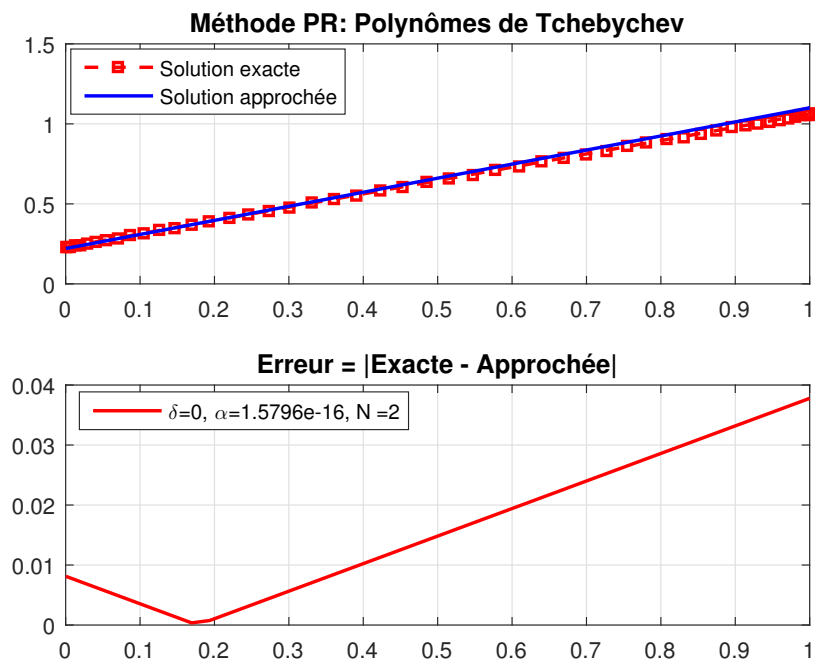


Figure 3.12 – ( Exemple 3.5.3) Solution exacte, solution approchée, courbe d'erreur où  $n = 2$ ,  $\delta = 0$  (données exactes).

# Chapitre

# 4

---

## Une variante abstraite de la méthode de projection-régularisée

### 4.1 Introduction et motivation

Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable. On considère l'équation abstraite de première espèce

$$\mathbf{K} : H \longrightarrow H, x \longrightarrow y = \mathbf{K}x, \quad (EO)$$

où  $\mathbf{K}$  est un opérateur compact injectif et de rang infini, i.e.,  $\dim(\mathcal{R}(\mathbf{K})) = +\infty$ .

On sait que la solution (analytique) de l'équation (EO) est fournie par le Théorème de Picard via la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur  $\mathbf{K}$ . Soit

$$\mathbf{K}x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle x, u_k \rangle v_k,$$

où  $\{u_k, v_k, a_k\}$  est le système singulier de  $\mathbf{K}$ .

La solution exacte de l'équation (EO) est donnée par l'expression

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_k \rangle}{a_k} v_k, \quad (S)$$

sous la condition de Picard

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\langle y, u_k \rangle}{a_k} \right|^2 < +\infty. \quad (P)$$

---

**Remarque 4.1.1.** Le Théorème de Picard nous fournit un critère théorique et pratique, dans le cas où on connaît explicitement le système singulier de l'opérateur  $\mathbf{K}$ .

**Remarque 4.1.2.** On remarque que le terme général de la série (S) est un produit de deux quantités avec des vitesses opposées :

- le terme  $\left| \frac{\langle y, u_k \rangle}{a_k} \right|^2$  tend vers 0 (terme général d'une série convergente, il tend donc vers 0),
- les hautes fréquences  $\frac{1}{a_k} \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

A partir de cette remarque, il est clair que la convergence de la série (S) ne pourrait être garantie sauf si le coefficient de Fourier  $\langle y, u_k \rangle$  posséderait une certaine vitesse de décroissance qui peut contrôler la vitesse des hautes fréquences. Par conséquent il semble naturel de mesurer la régularité de  $y$  par la vitesse de décroissance des coefficients de Fourier  $\langle y, u_k \rangle$ . On peut interpréter cette condition par le langage des échelles de Hilbert. On dit alors que la fonction  $y$  est dans l'espace  $H_\psi(\mathbf{K})$  si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\langle y, u_k \rangle}{\psi(a_k)} \right|^2 < +\infty,$$

où  $\psi : [0, \|\mathbf{K}\mathbf{K}^*\|] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue croissante avec  $\psi(0) = 0$ . Pour  $\psi(t) = t$ , on trouve la condition de Picard.

En s'inspirant de ces remarques, on donne dans ce chapitre une version abstraite de la méthode de projection régularisée pour une classe plus large de problèmes mal-posés linéaires, engendrés par l'inversion d'un opérateur compact entre deux espaces de Hilbert. Cette étude généralise les résultats du chapitre 1 et 2 et met l'accent sur une nouvelle notion topologique "condition de Jackson-Bernstein (condition de J-B)" qui mesure la régularité des opérateurs compacts. On a constaté que cette condition est satisfaite pour les opérateurs auto-adjoints compacts et la même chose pour les opérateurs intégraux de Fredholm avec noyaux réguliers. D'après la condition de Picard, la décroissance du coefficient de Fourier de la donnée  $y$  peut être mesurée par un argument topologique, i.e., on suppose que  $y \in \mathcal{R}(\mathbf{K}) \subset \mathcal{E}$ . Ici, l'ensemble  $\mathcal{E}$  mesure la régularité de l'opérateur  $\mathbf{K}$ . A notre connaissance, dans la théorie existante, la régularité d'un opérateur compact est en général mesurée à l'aide de la décroissance de ces valeurs propres ou la régularité du noyau. Mais dans la pratique il n'est pas toujours facile de vérifier ces propriétés. C'est pour



cette raison, on a adopté cette notion de mesure abstraite qui n'a pas été exploitée suffisamment dans le traitement des problèmes mal-posés sauf dans le travail récent de Nair [Nai17] en 2017 avec une vision proche de la notre.

Il faut noter ici que cette méthode appartient à la classe des méthodes (régularisation-projetée, projection-régularisée. En anglais, (LSQ)-projection) développé par Natterer [Nat77], Nair [NP07], [Nai17], Neggal, Boussetila et Rebbani [NBR16], Reginska [Reg13], [Reg17], Yang [YLL13],[YLZ<sup>+</sup>19].

La différence entre ces approches réside essentiellement dans les conditions de régularité minimales imposées sur l'opérateur compact  $K$ . Dans notre travail, on propose une version simple dans un cadre abstrait large, qui peut être utilisable pour une classe plus vaste de problèmes linéaires mal posés, et en particulier, pour les équations intégrales de Fredholm de première espèce.

Soient  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_2$  deux espaces de Hilbert. Considérons l'équation linéaire de première espèce :

$$K : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2, \quad Kf = g, \quad (4.1.1)$$

où  $K$  un opérateur linéaire compact avec  $\dim(\mathcal{R}(K)) = +\infty$ ,  $g \in \mathbb{H}_2$  est la donnée et  $f$  est l'inconnu recherché dans l'espace  $\mathbb{H}_1$ .

On rappelle ici quelques résultats de base pour faciliter la lecture de ce chapitre. Pour plus de détails sur cette thématique, on renvoie le lecteur aux références [Nai09, EHN96, Tik63b, Eng81, BG12, Eng92, Gro77].

L'opérateur  $K$  peut être représenté par sa formule diagonale

$$Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \langle f, \tilde{\phi}_i \rangle_{\mathbb{H}_1} \phi_i, \quad f \in \mathbb{H}_1,$$

où la suite  $\{\sigma_n, \tilde{\phi}_n, \phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  est le système singulier de  $K$  :

- $\{\tilde{\phi}_n\}_{n=1}^{\infty}$  est une base orthonormée dans l'espace  $\mathcal{N}(K)^\perp = \overline{\mathcal{R}(K^*)}$ .
- $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  est une base orthonormée dans l'espace  $\overline{\mathcal{R}(K)}$ .
- $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  est une suite de nombres réels positifs tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .
- $\forall n \geq 1 : K\tilde{\phi}_n = \sigma_n \phi_n$  et  $K_n^* \phi_n = \sigma_n \tilde{\phi}_n$ .

L'inverse de Moore-Penrose ou l'inverse généralisé  $K^+$  de  $K$  est un opérateur linéaire avec domaine

$\mathcal{D}(K^+) = \mathcal{R}(K) + \mathcal{R}(K)^\perp$ , donné par

$$g \in D(K^+), \quad K^+ g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle g, \phi_i \rangle_{\mathbb{H}_2}}{\sigma_i} \tilde{\phi}_i,$$

et la solution généralisée de l'équation (4.1.1) est donnée par

$$\hat{f} = K^+ g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle g, \phi_i \rangle_{\mathbb{H}_2}}{\sigma_i} \tilde{\phi}_i \in \mathcal{N}(K)^\perp.$$

Supposons que  $g \in \mathcal{D}(K^+)$ , et on prend  $g_i = g + (\sigma_i)^p \phi_i$  ( $0 < p < 1$ ), on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|g - g_i\|_{\mathbb{H}_2} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\sigma_i)^p = 0,$$

mais

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \hat{f} - \hat{f}_i \right\|_{\mathbb{H}_1} = \lim_{i \rightarrow \infty} (\sigma_i)^{p-1} = \infty,$$

ce qui montre que l'inverse généralisé  $K^+$  de  $K$  n'est pas continu. De plus, la solution généralisée  $\hat{f}$  de (4.1.1) est instable, et donc le problème (4.1.1) est mal posé. Pour surmonter cette instabilité, on introduit une procédure de régularisation bien adaptée à  $K^+$ , i.e., on remplace  $K^+$  par une famille  $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$  d'opérateurs continus, tels que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f^\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha g \rightarrow K^+ g = \hat{f},$$

où  $f^\alpha$  est la solution régularisée de  $\hat{f}$  de (4.1.1).

Dans la méthode de régularisation de Tikhonov [Tik63a, Tik63b], on emploie la famille des opérateurs

$$R_\alpha = (K^*K + \alpha I)^{-1}K, \quad \alpha > 0, \quad (4.1.2)$$

où  $\alpha > 0$  est appelé paramètre de régularisation.

Si  $g \in \mathcal{D}(K^+)$  et  $g^\delta \in \mathbb{H}_2$ , où  $\delta \in (0, 1)$  est le niveau de bruit

$$\|g - g^\delta\|_{\mathbb{H}_2} \leq \delta, \quad (4.1.3)$$

et si  $\hat{f} \in \mathcal{R}(K^*) = \mathcal{N}(K)^\perp$ , alors on a

$$\left\| \hat{f} - f^\alpha \right\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_1 \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad \|f^\alpha - f^\delta\|_{\mathbb{H}_1} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}, \quad (4.1.4)$$

où  $C_1 > 0$  est une constante indépendante de  $\alpha$ ,  $f^\alpha = R_\alpha g$  et  $f_\delta^\alpha = R_\alpha g^\delta$ .

En général dans la théorie des problèmes mal-posés, on suppose que  $g \in \mathcal{D}(K^+)$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}(\varphi(K^*K))$ , où  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  est une fonction continue concave telle que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(\alpha) \rightarrow 0$  et

$$\sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi(\lambda)}{\alpha + \lambda} \leq \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}. \quad (4.1.5)$$

Les choix particuliers de  $\varphi$  dans (4.1.5) sont  $\varphi(t) = t^\nu$ ,  $\nu \in (0, 1]$ .

Le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi en fonction du niveau de bruit  $\delta$ , tel que

$$\left\| \widehat{f} - f_\delta^\alpha \right\|_{\mathbb{H}_1} \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0. \quad (4.1.6)$$

Comme dans les paragraphes précédents, on s'intéresse à la constructions des solutions stables pour notre problème mal-posé (4.1.1). Dans ce but, on remplace la famille d'opérateurs  $R_\alpha$  par une famille d'opérateurs  $R_\alpha^{(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), et on prend

$$f_\delta^{\alpha, n} = R_\alpha^{(n)} g^\delta,$$

comme solution approchée stable de l'équation (4.1.1). Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_\alpha^{(n)} - R_\alpha\| \rightarrow 0$ , et si  $\alpha = \alpha(\delta, n)$  peut être choisi de telle sorte que  $\lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \alpha(\delta, n) \rightarrow 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \|R_\alpha^{(n)}\| \delta \rightarrow 0$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \left\| \widehat{f} - f_\delta^{\alpha, n} \right\|_{\mathbb{H}_1} = 0.$$

Dans ce cas,  $f_\delta^{\alpha, n}$  est une approximation régularisée convergente vers  $\widehat{f}$ .

## 4.2 Classes de régularité de Jackson-Bernstein

**Définition 4.2.1.** (Échelles de Hilbert) Une famille d'espaces de Hilbert  $H_s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , est appelée une échelle de Hilbert si  $H_{s_2} \subset H_{s_1}$ ,  $s_2 > s_1$  où l'injection est continue, i.e., qu'il existe  $c(s_1, s_2) > 0$  telles que

$$\|u\|_{s_1} \leq c(s_1, s_2) \|u\|_{s_2}, \forall u \in H_{s_2}. \quad (4.2.1)$$

Pour plus de détails, voir [MP03, Heg95, Kep05, MS08, Nai15].

**Exemple 4.2.1.** Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable et  $\{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  est une base orthonormée de  $H$ . Soit  $a_n$  une suite de nombres réels positifs avec  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \rightarrow 0$ , si  $n \rightarrow +\infty$ . Soit  $s \in \mathbb{R}$ , et soit

$$H_s = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_n \rangle_H|^2}{a_n^{2s}} < +\infty \right\}, H_0 = H. \quad (4.2.2)$$

Alors  $H_s$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\langle u, u_n \rangle_H \langle v, u_n \rangle_H}{a_n^{2s}}, \quad (4.2.3)$$

et la norme correspondante  $\|\cdot\|_s$  est donnée par

$$\|u\|_s = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_n \rangle_H|^2}{a_n^{2s}}}. \quad (4.2.4)$$

**Remarque 4.2.1.** Si  $s < t$  et  $h \in H_t$ , on a

$$\|u\|_s^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_n \rangle_H|^2}{a_n^{2t}} a_n^{2(t-s)} \leq a_1^{2(t-s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_n \rangle_H|^2}{a_n^{2t}} = a_1^{2(t-s)} \|u\|_t^2,$$

d'où l'inclusion topologique  $H_t \subset H_s$ .

On définit l'opérateur linéaire  $T$  par la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$Th = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \langle h, u_n \rangle_H u_n, \quad h = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle h, u_n \rangle_H u_n \in H. \quad (4.2.5)$$

Alors  $T$  est un opérateur injectif, compact et auto adjoint positif sur  $H$ , et pour  $s \in \mathbb{R}$ , on a

$$T^s h = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^s \langle h, u_n \rangle_H u_n. \quad (4.2.6)$$

Par conséquent,

$$\forall s > 0, \|h\|_s^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_n \rangle_H|^2}{a_n^{2s}} = \|T^{-s} h\|^2, \quad h \in \mathcal{R}(T^s).$$

On note ici que

$$\mathcal{R}(T^s) = \left\{ h \in H : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_n \rangle_H|^2}{a_n^{2s}} < +\infty \right\}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (4.2.7)$$

**Théorème 4.2.1.** Si  $\{H_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  est généré par la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Alors, pour  $s_1 < s_2$ , l'application identique

$$I_{s_2, s_1} : H_{s_2} \rightarrow H_{s_1},$$

est une injection compacte.

Soit  $\pi_n : H \rightarrow H^n = \text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  l'opérateur de projection orthogonale, i.e.,

$$\pi_n h = \sum_{n=1}^n \langle h, u_n \rangle_H u_n, \quad h = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle h, u_n \rangle_H u_n \in H.$$

Maintenant, nous introduisons une condition très utile pour établir nos résultats de convergence et les estimations d'erreur. Nous pouvons trouver ce concept dans les références, par exemple, [MH08] et [PS91].

**Définition 4.2.2.** Soit  $T : H \rightarrow H$  un opérateur borné. On dit que l'opérateur  $T$  satisfait la condition de Jackson Bernstein (condition J-B) si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Il existe un sous-espace  $W \subset H$  tel que  $\mathcal{R}(T) \subseteq W$  et pour tout  $h \in W$ ,

$$\|h - \pi_n h\|_H \leq \theta(n) \|h\|_W, \quad \text{où } \theta(n) \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow +\infty.$$

(2) Il existe une constante positive  $\tau > 0$  telle que :

$$\|Th\|_W \leq \tau \|h\|_H \text{ pour tout } h \in H.$$

Soit  $T$  l'opérateur défini par la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Il est facile de montrer que  $T$  satisfait la condition J-B. En effet, pour  $0 < s < 1$  et  $h \in H_s$ , on a

$$\|h - \pi_n h\|_H^2 = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_j \rangle_H|^2}{a_j^{2s}} a_j^{2s} \leq a_{n+1}^{2s} \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_j \rangle_H|^2}{a_j^{2s}} \leq a_{n+1}^{2s} \|h\|_s^2.$$

Il en résulte donc

$$\|h - \pi_n h\|_H \leq \theta(n) \|h\|_s,$$

où  $\theta(n) = a_{n+1}^s \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow +\infty$ .

Maintenant, pour tout  $h \in H$ , on a

$$\|Th\|_s^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|\langle h, u_j \rangle_H|^2}{a_j^{2s}} a_j^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j^{2(1-s)} |\langle h, u_j \rangle_H|^2 \leq a_1^{2(1-s)} \|h\|_H^2,$$

ce qui implique

$$\|Th\|_s \leq \tau \|h\|_H,$$

où  $\tau = a_1^{1-s}$ .

### 4.3 Approximation de rang fini

Soient  $\mathbb{H}_2$  un espace de Hilbert séparable et  $\{\psi_i\}_{i \geq 0}$  une base orthonormée de  $\mathbb{H}_2$ . Pour tout  $h \in \mathbb{H}_2$ , on a

$$h = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \psi_i, \quad c_i = \langle h, \psi_i \rangle_{\mathbb{H}_2}, \quad i \geq 0, \quad (4.3.1)$$

et

$$\|h\|_{\mathbb{H}_2}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2. \quad (4.3.2)$$

Les égalités (4.3.1) et (4.3.2) sont appelées respectivement, le développement de Fourier et la formule de Parseval.

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $\mathcal{M}_n = \text{vect}\{\psi_i, i = 0, 1, \dots, n-1\} \subset \mathbb{H}_2$ . Alors, l'opérateur

$$P_n : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathcal{M}_n = \mathcal{R}(P_n), \quad P_n h = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \psi_i, \quad h \in \mathbb{H}_2, \quad (4.3.3)$$

est une projection orthogonale, et

$$\|h - P_n h\|_{\mathbb{H}_2} \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \quad (4.3.4)$$

**Conditions de Jackson-Bernstein.** Dans ce qui suit, on suppose les hypothèses suivantes :

$$\mathcal{H}_1 - g \in \mathcal{R}(K)$$

$\mathcal{H}_2$  - Il existe un sous espace  $\mathbb{H}_3 \subseteq \mathbb{H}_2$ , tel que

$$\forall h \in \mathbb{H}_3 : \|h - P_n h\|_{\mathbb{H}_2} \leq \zeta_n \|h\|_{\mathbb{H}_3}, \quad (4.3.5)$$

où  $\zeta_n > 0$  et  $\zeta_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

$\mathcal{H}_3$ — Il existe  $\kappa > 0$ , telle que

$$\forall f \in \mathbb{H}_1 : \|Kf\|_{\mathbb{H}_3} \leq \kappa \|f\|_{\mathbb{H}_1}. \quad (4.3.6)$$

► Sans perdre la généralité du problème, on suppose aussi que l'opérateur  $K$  est injectif.

Pour tout entier positif  $n$ , on définit l'opérateur  $Q_n$  par

$$Q_n : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall h \in \mathbb{H}_2 : Q_n h = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T, \quad (4.3.7)$$

où

$$a_i = \langle h, \psi_i \rangle_{\mathbb{H}_2}, \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

On remplace l'équation (4.1.1) par

$$K_n f = g_n, \quad (4.3.8)$$

où

$$K_n = Q_n K, \quad (4.3.9)$$

est un opérateur de  $\mathbb{H}_1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $g_n = Q_n g$ .

**Théorème 4.3.1.** Soit  $K_n$  l'opérateur donné par la formule (4.3.9). Alors  $K_n$  est un opérateur borné, et son opérateur adjoint  $K_n^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_1$  est donné par :

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad K_n^*(u) = \sum_{j=0}^{n-1} u_j K^*(\psi_j), \quad (4.3.10)$$

où  $K^*$  est l'adjoint de  $K$ .

*Preuve.* (i) Pour chaque  $f$  dans  $\mathbb{H}_1$ , on a

$$\begin{aligned} \|K_n f\|_2^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} |(K_n f)_j|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle Kf, \psi_j \rangle_{\mathbb{H}_2} \right|^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \langle Kf, \psi_j \rangle_{\mathbb{H}_2} \right|^2. \end{aligned}$$

Puisque  $Kf \in \mathbb{H}_2$ , d'après la formule de Parseval (4.3.2), on obtient

$$\|K_n f\|_2 \leq \|Kf\|_{\mathbb{H}_2} \leq \|K\| \|f\|_{\mathbb{H}_1},$$

ce qui implique que  $K_n$  est un opérateur borné et  $\|K_n\| \leq \|K\|$ .

(ii) Par définition de  $K_n$ , on peut définir son opérateur adjoint  $K_n^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_1$ . Maintenant pour  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\begin{aligned} \langle K_n f, u \rangle_2 &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle Kf, \psi_j \rangle_{\mathbb{H}_2} u_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle f, K^*(\psi_j) \rangle_{\mathbb{H}_1} u_j \\ &= \left\langle f, \sum_{i=0}^{n-1} u_i K^*(\psi_i) \right\rangle_{\mathbb{H}_1} \\ &= \langle f, K_n^* u \rangle_{\mathbb{H}_1}, \end{aligned}$$

il en résulte que  $K_n^* u = \sum_{j=0}^{n-1} u_j K^*(\psi_j)$ . □

Pour stabiliser le système linéaire (4.3.8) qui est mal conditionné, on applique la méthode de régularisation de Tikhonov :

$$(\alpha I + K_n^* K_n) f_\alpha^{n, \delta} = g_\alpha^\delta, \quad (4.3.11)$$

où le paramètre de régularisation  $\alpha$  est choisi en fonction du niveau de bruit  $\delta$  tel que la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0} \left\| \widehat{f} - f_\delta^{\alpha, n} \right\|_{\mathbb{H}_1} \rightarrow 0,$$

soit vérifiée.

**Remarque 4.3.1.** L'expression (4.3.10) du Théorème 4.3.1 permet de conclure que

$$\mathcal{R}(K_n^*) = \text{vect} \{K^*(\psi_i), i = 0, \dots, n-1\}.$$

$\mathcal{H}_4$ — On suppose que l'opérateur  $K^*$  est injectif.



Si l'opérateur  $K^*$  est injectif (Condition  $\mathcal{H}_4$ ), alors les vecteurs  $K^*(\psi_i), i = 0, 1, \dots, n-1$ , sont linéairement indépendants, et par conséquent  $\dim(\mathcal{R}(K_n^*)) = n$ .

Comme la solution régularisée  $f_\alpha^{\delta,n}$  du problème (4.3.11) existe dans l'espace  $\mathcal{R}(K_n^*)$ , alors  $f_\alpha^{\delta,n}$  admet l'écriture suivante :

$$f_\alpha^{\delta,n} = \sum_{i=0}^{n-1} d_i K^*(\psi_i), \quad (4.3.12)$$

où  $d_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) sont des constantes inconnues à déterminer.

Soient  $K_n$  donné par l'expression (4.3.9) et  $K_n^*$  donné par la formule (4.3.10) du théorème 4.3.1, alors

$$K_n^* K_n : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_1, \quad K_n^* K_n f = \sum_{j=0}^{n-1} \langle Kf, \psi_j \rangle_{\mathbb{H}_2} K^*(\psi_j). \quad (4.3.13)$$

De plus,

$$K_n^* K_n f = K^* P_n K f, \quad (4.3.14)$$

où  $P_n$  est défini par (4.3.3).

En remplaçant le développement (4.3.12) dans l'équation (4.3.11), on obtient

$$\sum_{j=0}^{n-1} [\alpha d_j + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \langle K^*(\psi_i), K^*(\psi_j) \rangle_{\mathbb{H}_1}] K^*(\psi_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \langle g^\delta, \psi_j \rangle_{\mathbb{H}_2} K^*(\psi_j). \quad (4.3.15)$$

Les coefficients  $d_j$  dans l'équation (4.3.15) seront calculés à partir du système d'équations linéaires

$$\alpha d_j + \sum_{i=0}^{n-1} S_i^j d_i = G_j^\delta, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.3.16)$$

où

$$S_i^j = \langle K^*(\psi_i), K^*(\psi_j) \rangle_{\mathbb{H}_1}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.3.17)$$

et

$$G_j^\delta = \langle g^\delta, \psi_j \rangle_{\mathbb{H}_2}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ce système peut être écrit sous la forme matricielle suivante

$$\mathbf{F} \mathbf{d} = \mathbf{G}, \quad (4.3.18)$$

où  $\mathbf{F} = \alpha \mathbf{I}_n + \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{I}_n$  est la matrice d'identité,  $\mathbf{S} = [S_i^j] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{d} = (d_0, \dots, d_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{G} = (G_0^\delta, G_1^\delta, \dots, G_{n-1}^\delta)^T \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 4.3.1.** *Le système (4.3.18) admet une solution unique dans  $\mathbb{R}^n$ .*

*Preuve.* Pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\langle \mathbf{F}u, v \rangle_2 = \langle u, \mathbf{F}v \rangle_2$ , c'est-à-dire que la matrice  $\mathbf{F}$  est auto-adjointe.

Soit  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})^T$  et posons

$$\xi_i = u_i \mathbf{K}^*(\psi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pour  $\alpha > 0$ , on a

$$\langle \mathbf{F}u, u \rangle_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha u_i^2 + \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i, \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \right\rangle_{\mathbb{H}_1} = \alpha \|u\|_2^2 + \left\| \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \right\|_{\mathbb{H}_1}^2. \quad (4.3.19)$$

De la formule (4.3.19), on voit que, pour toute valeur positive  $\alpha$  du paramètre de régularisation, la matrice  $\mathbf{F}$  est un opérateur strictement positif.

Ainsi, pour  $\alpha > 0$ , la matrice  $\mathbf{F}$  du système (4.3.18) est une matrice symétrique et définie positive.

Par conséquent, ce système admet une solution unique dans  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Le niveau d'erreur du vecteur  $Q_n g^\delta := g_n^\delta$  de  $Q_n g := g_n$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_2$  est donné par l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \|g_n - g_n^\delta\|_2^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left| \langle g - g^\delta, \psi_i \rangle_{\mathbb{H}_2} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left| \langle g - g^\delta, \psi_i \rangle_{\mathbb{H}_2} \right|^2 \\ &= \|g - g^\delta\|_{\mathbb{H}_2}^2, \end{aligned}$$

et de l'estimation (4.1.3), résulte que

$$\|g_n - g_n^\delta\|_2 \leq \delta. \quad (4.3.20)$$

## 4.4 Convergence de la méthode et estimations d'erreur

Dans cette section, on étudie la convergence de la méthode. Notons

$$\widehat{f} = K^+ g = K^{-1} g \quad (K \text{ est supposé injectif}).$$

$$f_\alpha = R_\alpha g = (A + \alpha I)^{-1} K^* g, \quad \text{où } A = K^* K.$$

$$f_\alpha^n = R_\alpha^{(n)} g = (A_n + \alpha I)^{-1} B_n g, \quad \text{où } B_n = K_n^* Q_n \text{ et } A_n = K_n^* K_n.$$

$$f_\alpha^{n,\delta} = R_\alpha^{(n)} g^\delta = (A_n + \alpha I)^{-1} B_n g^\delta.$$

**Remarque 4.4.1.** Par définition de  $Q_n$  et à partir de la formule (4.3.10), alors

$$\forall g \in \mathcal{R}(K), \quad B_n g = K_n^* Q_n g = K^* P_n g. \quad (4.4.1)$$

Maintenant, supposons que  $g \in \mathcal{R}(K)$  et si  $\widehat{f} = \varphi(A)h$ ,  $h \in \mathbb{H}_1$  où  $\varphi$  est définie dans (4.1.5). Pour estimer la quantité

$$\|(R_\alpha^{(n)} - R_\alpha)g\|_{\mathbb{H}_1},$$

on remarque que

$$\begin{aligned} (R_\alpha - R_\alpha^{(n)})g &= (R_\alpha K - R_\alpha^{(n)} K_n) \widehat{f} \\ &= (A(A + \alpha I)^{-1} - (A_n + \alpha I)^{-1} A_n) \varphi(A)h, \end{aligned}$$

donc

$$(R_\alpha - R_\alpha^{(n)})g = \alpha (A_n + \alpha I)^{-1} (A - A_n) (A + \alpha I)^{-1} \varphi(A)h. \quad (4.4.2)$$

Puisque  $A_n$  est un opérateur auto-adjoint, alors pour tout  $\alpha > 0$

$$\|\alpha (A_n + \alpha I)^{-1}\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K_n\|^2]} \left| \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \right| \leq 1. \quad (4.4.3)$$

Par la Remarque 4.4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|R_\alpha^{(n)}\| &\leq \|P_n\| \|(A_n + \alpha I)^{-1} K_n\| \\ &\leq \sup_{\lambda \in [0, \|K_n\|^2]} \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \alpha} \right|, \end{aligned}$$

donc

$$\|R_\alpha^{(n)}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (4.4.4)$$

En utilisant la formule (4.1.5), la quantité  $\|(A+\alpha I)^{-1} \varphi(A)\|$  peut être estimée comme suit

$$\|(A+\alpha I)^{-1} \varphi(A)\| \leq \sup_{\lambda \in [0, \|K\|^2]} \left| \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda + \alpha} \right| \leq \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}. \quad (4.4.5)$$

Le théorème suivant montre que  $\|A - A_n\| \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

**Théorème 4.4.1.** *On suppose que  $g \in \mathcal{R}(K)$ , alors*

$$\|A - A_n\| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \quad (4.4.6)$$

De plus, sous les hypothèses  $\mathcal{H}_i$   $i = 2, 3, 4$ . Alors

$$\|A - A_n\| \leq C_2 \zeta_n, \quad (4.4.7)$$

où  $\zeta_n$  dans (4.3.5) et  $C_2$  est une constante positive indépendante de  $n$ .

*Preuve.* Soit  $f \in \mathbb{H}_1$ , par la formule (4.3.14), on obtient

$$(A - A_n)f = K^*(K - P_n K)f.$$

En utilisant la formule (4.3.4), il vient

$$\|(A - A_n)f\|_{\mathbb{H}_1} \leq \|K\| \|(Kf) - P_n(Kf)\|_{\mathbb{H}_2} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

De plus, si  $g \in \mathcal{R}(K) \subseteq \mathbb{H}_3$ , par les formules (4.3.5) et (4.3.6), il découle

$$\begin{aligned} \|(A - A_n)f\|_{\mathbb{H}_1} &\leq \zeta_n \|K^*\| \|Kf\|_{\mathbb{H}_3} \\ &\leq \zeta_n \|K\| \kappa \|f\|_{\mathbb{H}_1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité (4.4.7) avec  $C_2 = \|K\| \kappa$ . □

Les résultats du Théorème suivant peuvent être obtenus en appliquant le Théorème 4.3.1 et les inégalités (4.4.3), (4.4.4) et (4.4.5).

**Théorème 4.4.2.** *On suppose que  $g \in \mathcal{R}(K)$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}(\varphi(A))$ . Alors*

$$\|R_\alpha - R_\alpha^{(n)}\| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \quad (4.4.8)$$

*De plus, sous les hypothèses  $\mathcal{H}_i$   $i = 2, 3, 4$ , on obtient l'estimation*

$$\|R_\alpha - R_\alpha^{(n)}\| \leq C_3 \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \zeta_n, \quad (4.4.9)$$

où  $C_3$  est une constante positive indépendante de  $n$  et  $\alpha$ .

Le Théorème suivant donne l'estimation  $\|\widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1}$ .

**Théorème 4.4.3.** *On suppose que  $g \in \mathcal{R}(K)$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}(\varphi(A))$ , alors sous les hypothèses  $\mathcal{H}_i$   $i = 2, 3, 4$ , on a*

$$\|\widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_4 \varphi(\alpha) + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + C_5 \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \zeta_n, \quad (4.4.10)$$

où  $C_4$  et  $C_5$  sont des constantes positives indépendantes de  $n$  et  $\alpha$ .

*Preuve.* Tout d'abord, on observe que

$$\|\widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1} \leq \|\widehat{f} - f_\alpha\|_{\mathbb{H}_1} + \|(R_\alpha - R_\alpha^{(n)})g\|_{\mathbb{H}_1} + \|R_\alpha^{(n)}(g - g^\delta)\|_{\mathbb{H}_1}. \quad (4.4.11)$$

Pour  $g \in \mathcal{R}(K)$  et  $\widehat{f} \in \mathcal{R}(\varphi(A))$ , on a le résultat suivant (voir [MP03] pour la preuve)

$$\|\widehat{f} - f_\alpha\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_4 \varphi(\alpha), \quad (4.4.12)$$

où  $C_4$  est une constante positive indépendante de  $\alpha$ .

En appliquant le Théorème 4.4.3 et l'inégalité (4.4.4), on obtient l'estimation (4.4.10).  $\square$

## 4.5 Choix du paramètre de régularisation

Dans cette section, on donne deux méthodes de choix du paramètre de régularisation  $\alpha$ . On commence tout d'abord la selection a priori.

### 4.5.1 Choix a priori du paramètre de régularisation

Supposons qu'il existe une fonction continue  $\gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , avec les propriétés suivantes :

- $\gamma(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$ .
- $t = \gamma(t) \sqrt{\varphi^{-1}(\gamma(t))}$ ,  $t \in (0, \infty)$ .

Comme un choix particulier de  $\varphi$  et  $\gamma$ , on prend

$$\varphi(t) = t^u \text{ et } \gamma(t) = t^{\frac{2u}{2u+1}} \text{ pour } 0 < u \leq 1.$$

**Théorème 4.5.1.** *On suppose que  $g \in \mathcal{R}(\mathbb{K})$ ,  $\widehat{f} \in \mathcal{R}(\varphi(A))$  et les hypothèses  $\mathcal{H}_i$   $i = 2, 3, 4$  sont satisfaites. Si  $\alpha(\delta) = \varphi^{-1}(\gamma(\delta))$  et  $n$  le plus petit entier positif choisi par la formule  $\zeta_n \leq \alpha(\delta) = \varphi^{-1}(\gamma(\delta))$ , alors on l'estimation d'erreur suivante*

$$\left\| \widehat{f} - f_{\alpha}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1} \leq C\gamma(\delta) \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0,$$

où  $C$  est une constante positive indépendant de  $n$  et  $\alpha$ .

*Preuve.* On a

$$C_4\varphi(\alpha(\delta)) = C_4\gamma(\delta), \quad \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha(\delta)}} = \frac{1}{2}\gamma(\delta) \text{ et } C_5 \frac{\varphi(\alpha(\delta))}{\alpha(\delta)} \zeta_n \leq C_5\gamma(\delta).$$

Par la formule (4.4.10) du Théorème 4.4.3, on conclut que

$$\left\| \widehat{f} - f_{\alpha}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1} \leq \left( C_4 + \frac{1}{2} + C_5 \right) \gamma(\delta).$$

□

**Remarque 4.5.1.** Dans le Théorème 4.5.1, si  $\varphi(t) = t^u$  et  $\gamma(t) = t^{\frac{2u}{2u+1}}$  pour  $0 < u \leq 1$ , et  $n$  le plus petit entier positif tel que  $\zeta_n \leq \delta$ , alors on a

$$\left\| \widehat{f} - f_{\alpha}^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1} = O(\delta^{\frac{2u}{2u+1}}).$$

### 4.5.2 Choix a posteriori du paramètre de régularisation

Il existe dans la littérature plusieurs principes de choix du paramètre de régularisation  $\alpha = (\delta)$  [EHN96]. L'un des avantages du choix des paramètres a priori est la flexibilité numérique si on

souhaite atteindre une certaine exactitude. Cette règle nécessite des informations a priori sur la solution et son comportement. Or, la réalité est totalement différente, les données sont souvent discrètes et entachées du bruit de nature aléatoire, et les problèmes intéressants sont toujours difficiles du point de vue analytique.

La stratégie la plus pratique est donc d'utiliser une stratégie de choix a posteriori. Dans la littérature mathématique, les principes d'écarts (*en anglais : discrepancy principle*) classiques les plus connus pour les choix a posteriori du paramètre  $\alpha$  sont bien exposés dans les références [Mor66, Arc66, Gro83, GS84, Eng87].

L'un des principes d'écart généralisé, proposé par Engl [Eng87] est donné par la formule suivante

$$\|A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} = \frac{\delta^p}{\alpha^q}, \quad p, q > 0. \quad (4.5.1)$$

Il est très naturel de se poser la question suivante : est-il possible d'obtenir un taux optimal  $\|\widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1} = O(\gamma(\delta))$  sous l'hypothèse que le paramètre de régularisation  $\alpha := \alpha(n, \delta)$  est choisi par le principe d'écart (4.5.1) ?

Dans le cas discret, cette question se caractérise par la rareté des travaux, à l'exception de quelques travaux qui ont été développés sous des conditions très particulières (voir Nair et Shock [NS99], Rajan [Raj10]).

Afin de simplifier les calculs, nous adaptons la procédure d'Engl [Eng87] pour notre cas discret et on montre la convergence de ce principe avec une démonstration différente et bien appropriée à nos hypothèses.

Il est important de souligner que dans la littérature mathématique des problèmes mal posés, il existe plusieurs approches théoriques dans le cas continu, pour plus de détails (*cf.* Hämarik et al [HPR12]). Mais pour le cas discret il y a quelques travaux, et en général, les hypothèses utilisées pour établir l'analyse a posteriori sont difficiles à vérifier dans la pratique. Compte tenu de cette remarque et pour des considérations numériques, nous pensons que le critère d'Engl est l'une des méthodes les plus réalisables et pratiques pour choisir le paramètre de régularisation  $\alpha := \alpha(n, \delta)$ . Dans ce travail, nous utilisons deux principes d'écart différents. Le premier utilise le principe de Morozov amorti qui a été établi par [KZ98] et [ZWZ09] dans le cas continu. Il est à noter que l'analyse théorique de ce principe dans le cas discret n'a pas encore été étudiée et que

sa faisabilité n'a été justifiée que de manière numérique. Dans le même contexte, ce critère sera appliqué numériquement en utilisant la méthode de Newton afin de trouver une bonne valeur approchée du paramètre de régularisation  $\alpha$ . La seconde approche traite du cas discret, qui est en fait une adaptation de la méthode d'Engl, où nous donnons une démonstration complète de notre méthode de régularisation (Méthode de projection-Régularisée) accompagnée par quelques tests numériques.

### Principe de Morozov amorti

Dans ce paragraphe, nous considérons la détermination de  $\alpha(\delta)$  à partir du principe de Morozov amorti [KZ98, ZWZ09], donné par

$$\|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{\mathbb{H}_2}^2 + \alpha^w \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1}^2 = \delta^2, \quad (4.5.2)$$

où  $w \in [1, \infty]$ .

On considère le principe de Morozov amorti (4.5.2) pour  $w = 1$ .

Soit la fonction

$$f(\alpha) = \|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{\mathbb{H}_2}^2 + \alpha^w \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1}^2 - \delta^2. \quad (4.5.3)$$

Il existe plusieurs méthodes numériques pour calculer l'approximation de la solution de l'équation non-linéaire (4.5.3). Par exemple : la méthode de Newton, les méthodes du point fixe, les algorithmes itératifs,..., etc. L'idée la plus simple est de générer une suite de valeurs  $\alpha_e$  telles que  $\alpha_e \rightarrow \hat{\alpha}$  si  $e \rightarrow \infty$ .

Dans ce travail, nous proposons un algorithme de Newton pour choisir un paramètre de régularisation raisonnable. Cet algorithme se résume comme suit

**Algorithme 4.5.1.** *Step 1.* Input  $\alpha_0 > 0, \delta > 0, \epsilon > 0, e_{\max}$ , set  $e := 0$ ,

*Step 2.* Compute  $f(\alpha_e)$  and  $f'(\alpha_e)$  from formulas (4.5.3) and (4.5.7),

*Step 3.* Compute  $\alpha_{e+1}$  from iterative formula (4.5.4),

*Step 4.* If  $|\alpha_{e+1} - \alpha_e| \leq \epsilon$  or  $e = e_{\max}$ , stop, otherwise, set  $e = e + 1$ , goto step 2.



Avec

$$\alpha_{e+1} = \alpha_e - \frac{f(\alpha_e)}{f'(\alpha_e)}. \quad (4.5.4)$$

Maintenant, pour obtenir  $f'(\alpha)$  dans l'algorithme 4.5.1, notons la fonction

$$\Psi(\alpha) = \|Kf_\alpha^{n,\delta} - g^\delta\|_{\mathbb{H}_2}^2 + \alpha \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1}^2. \quad (4.5.5)$$

La première dérivée de  $\Psi(\alpha)$  (voir [KZ98]) est donnée par

$$\frac{d}{d\alpha}\Psi(\alpha) = \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1}^2. \quad (4.5.6)$$

En utilisant (4.5.5) et (4.5.6), on obtient

$$\frac{d}{d\alpha}f(\alpha) = \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1}^2. \quad (4.5.7)$$

### Principe d'écart généralisé d'Engl

Pour réaliser numériquement le principe d'écart d'Engl, on choisit  $\varphi(t) = t^\nu$ ,  $\nu \in (0, 1]$ , et donc  $\gamma(t) = t^{2\nu/(2\nu+1)}$ . On suppose aussi que  $g \in \mathcal{R}(K) \subset W$  et l'opérateur  $K$  satisfait les **conditions de Jackson-Brenstein**, ce qui nous permet d'écrire

$$\|A_n - A\| \leq \|K\| \kappa \zeta_n,$$

où  $\zeta_n \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ .

Pour assurer le bon fonctionnement de ce principe, on suppose aussi qu'il existe des constantes  $a$  et  $b$  telles que  $\|g_n^\delta\|_{\mathbb{R}^n} \leq a$  et  $\|K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} \geq b$ .

Sous les hypothèses ci-dessus, nous pouvons prouver les théorèmes principaux de ce paragraphe.

**Théorème 4.5.2.** *Si  $\alpha \geq \zeta_n$ . Alors, pour chaque  $\delta \in (0, \delta_0)$ , il existe un entier positif  $n \geq n_1(\delta)$  et  $\alpha = \alpha(n, \delta)$  tels que l'équation (4.5.1) est satisfaite et  $\alpha = O(\delta^{\frac{p}{q+1}})$ .*

*Preuve.* Puisque

$$\|A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} = \alpha \|f_\alpha^{n,\delta}\|_{\mathbb{H}_1} = \|\alpha(A_n + \alpha I)^{-1} K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1},$$

on a alors

$$\|A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} \leq \alpha \|(A_n + \alpha I)^{-1} K_n^*\| \|g_n^\delta\|_{\mathbb{R}^n}.$$

D'autre part,

$$\|A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} \leq \alpha \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} a = \frac{a}{2} \sqrt{\alpha}.$$

Comme la suite  $(A_n)$  est uniformément bornée, il existe donc une constante  $M$  telle que  $\|A_n\| \leq M$ , pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ . D'où

$$\begin{aligned} \alpha \|K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} &\leq \|A_n + \alpha I\| \|\alpha (A_n + \alpha I)^{-1} K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} \\ &\leq (M + \alpha) \|A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1}, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \|A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} &\geq \frac{\alpha \|K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1}}{M + \alpha} \\ &\geq \frac{\alpha b}{M + \alpha} \\ &\geq \frac{\zeta_n b}{M + \alpha} \\ &\geq \frac{\gamma_1 b}{M + \alpha} = d, \end{aligned}$$

pour certain  $d > 0$  et  $\alpha \geq \gamma_1 = \max\{\zeta_n, n = 1, 2, \dots\}$ .

Posons  $\rho(n, \alpha) = \alpha^q \|A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1}$ , de la relation ci-dessus, on a

$$d\alpha^q \leq \rho(n, \alpha) \leq \frac{a}{2} \alpha^{q+\frac{1}{2}}, \quad (4.5.8)$$

et

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} d\zeta_n^q \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, \zeta_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{2} \zeta_n^{q+\frac{1}{2}} = 0.$$

On fixe  $\delta \in (0, \delta_0)$  pour certain niveau  $\delta_0$ , et on choisit soit  $n$  tel que

$$\zeta_n \leq \left(\frac{2}{a} \delta^p\right)^{\frac{2}{2q+1}}.$$

Pour  $n \geq n_1(\delta) \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$\alpha_0 = \max\left(\gamma_1, \left(\frac{\delta}{d}\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

A partir de la formule (4.5.8), il résulte que

$$\rho(n, \zeta_n) \leq \frac{a}{2} \zeta_n^{q+\frac{1}{2}} \leq \delta^p \quad \forall n \geq n_1(\delta),$$

et

$$\rho(n, \alpha_0) \geq d\alpha_0^q \geq \delta^p.$$

Ainsi, on obtient

$$\rho(n, \zeta_n) \leq \delta^p \leq \rho(n, \alpha_0), \quad \forall n \geq n_1(\delta). \quad (4.5.9)$$

Par conséquent, l'existence d'une solution unique  $\alpha \in (\zeta_n, \alpha_0)$  de l'équation  $\rho(n, \alpha) = \delta^p$  découle de (4.5.9) en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

Puisque

$$\alpha d \leq \alpha \|K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1} = \|(A_n + \alpha I) \alpha (A_n + \alpha I)^{-1} K_n^* g_n^\delta\|_{\mathbb{H}_1},$$

et

$$\alpha (A_n + \alpha I)^{-1} K_n^* g_n^\delta = A_n f_\alpha^{n, \delta} - K_n^* g_n^\delta,$$

alors,

$$\alpha d \leq (M + \alpha) \frac{\delta^p}{\alpha^q},$$

ce qui implique que

$$\alpha \leq c_0 \delta^{\frac{p}{q+1}}, \quad (4.5.10)$$

où  $0 < c_0 = \left(\frac{M + \alpha}{d}\right)^{\frac{1}{q+1}} < \left(\frac{M + \alpha_0}{d}\right)^{\frac{1}{q+1}}$ . Ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

**Remarque 4.5.2.** Soit  $\varphi(t) = t^\nu$ ,  $\nu \in (0, 1]$ . Si les hypothèses du théorème 4.4.3 sont satisfaites, alors

$$\|\widehat{f} - f_\alpha^{n, \delta}\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_4 \alpha^\nu + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + C_5 \frac{\alpha^\nu}{\alpha} \zeta_n,$$

et pour  $\alpha \geq \zeta_n$ , on obtient

$$\|\widehat{f} - f_\alpha^{n, \delta}\|_{\mathbb{H}_1} \leq C_6 \alpha^\nu + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}, \quad (4.5.11)$$

où  $C_6 = C_4 + C_5$ .

**Théorème 4.5.3.** *On suppose que les hypothèses du Théorème 4.4.3 et les hypothèses du Théorème 4.5.2 sont satisfaites.*

(1) Si  $\frac{p}{q+1} < 2$ , alors pour toutes les grandes valeurs de  $n$ , on a

$$\left\| \widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1} = O(\delta^u),$$

où  $u = \min\left\{1 - \frac{p}{2(q+1)}, \frac{pv}{q+1}\right\}$ .

(2) Si  $\frac{1}{2} < \frac{q+1}{p} \leq \frac{2}{3}$  et si  $v = \frac{q+1}{p} - \frac{1}{2}$ , alors

$$\left\| \widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1} = O(\delta^{\frac{2v}{2v+1}}).$$

*Preuve.* En utilisant les formules (4.5.10), (4.5.11), on peut écrire

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{f} - f_\alpha^{n,\delta} \right\|_{\mathbb{H}_1} &\leq C_6 \alpha^v + \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} \\ &\leq C_6 c_0 \delta^{\frac{pv}{q+1}} + \frac{1}{2} c_0 \delta^{1-\frac{p}{2(q+1)}} \\ &\leq c_0 \max\left(C_6 + \frac{1}{2}\right) (\delta^{\frac{pv}{q+1}} + \delta^{1-\frac{p}{2(q+1)}}) \\ &\leq c_1 \delta^u, \end{aligned}$$

où  $u = \min\left\{1 - \frac{p}{2(q+1)}, \frac{pv}{q+1}\right\}$ . Si  $v = \frac{q+1}{p} - \frac{1}{2}$ , on a

$$1 - \frac{p}{2(q+1)} = \frac{pv}{q+1} = \frac{2v}{2v+1},$$

et  $u = \min\left\{1 - \frac{p}{2(q+1)}, \frac{pv}{q+1}\right\} = \frac{2v}{2v+1}$ . □

Nous calculons  $\alpha$  en résolvant l'équation

$$\left\| A_n f_\alpha^{n,\delta} - K_n^* g_n^\delta \right\|_{\mathbb{H}_1} = \frac{\delta^p}{\alpha^q}, \quad p, q > 0,$$

où  $\alpha$  est choisi comme une suite géométrique :

$$\alpha = \alpha_i = \theta w^i, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

où  $w \in (0, 1)$  et  $s$  vérifie le critère  $\theta w^s \approx 10^{-9}$ . On prend la meilleure valeur de  $\alpha$  satisfaisant la condition

$$\left| \alpha^{q+1} \|f_\alpha^{n,\delta}\|_E - \delta^p \right| \leq \epsilon.$$

Dans les tests numériques, on choisit :  $\theta = 0.5$ ,  $p = 2$ ,  $q = 0.5$ ,  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  $w = 0.96$  et  $s = 400$ .

## 4.6 Applications

Soit  $K$  l'opérateur intégral de Fredholm entre les espaces de Hilbert (réels)  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_1$  avec un noyau  $k$  non dégénéré, c'est-à-dire,

$$Kf(\cdot) = \int_a^b k(\cdot, t)f(t)dt. \quad (4.6.1)$$

### 4.6.1 Application 1

Soient  $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2 = L^2([a, b])$  et  $\mathbb{H}_3 = H^s([a, b]) \subset \mathbb{H}_2$ , l'espace de Sobolev d'ordre  $s > 0$ .

Comme base hilbertienne, on prend  $\{\psi_i\}_{i \geq 0} = \{\widehat{L}_i\}_{i \geq 0}$  les polynômes de Legendre translétés et normalisés dans  $[a, b]$  (base orthonormale dans  $\mathbb{H}_2$ ).

En vertu des résultats exposés dans [CHQ12] et [QV08], on trouve la formule (4.3.5) avec  $\zeta_n = n^{-s} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ . Pour cet exemple d'application, on note par  $K^*$

$$K^*g(t) = \int_a^b k(s, t)g(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

l'opérateur adjoint de  $K$ .

Pour  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ , on note par

$$H_\Omega^s = \left\{ h \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} h(s, t) \in L^2(\Omega), \forall (i, j) \text{ avec } i + j \leq s \right\},$$

l'espace de Sobolev, muni de la norme

$$\|h(\cdot, \cdot)\|_{s, \Omega} = \sum_{i+j=0}^s \left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} h(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Remarque 4.6.1.** Si on suppose que le noyau  $k(\cdot, \cdot) \in H_\Omega^s$ , alors  $\mathcal{R}(K) \subseteq \mathbb{H}_3$ .

Notons

$$\left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} k(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)} = M_{i,j} \text{ et } \|k(\cdot, \cdot)\|_{s, \Omega} = \sum_{i+j=0}^s M_{i,j} = M_s < \infty.$$

Pour  $f \in \mathbb{H}_1$ , on a

$$\frac{d^i}{ds^i} (\mathbb{K}f)(s) = \int_a^b \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) f(t) dt, \quad s \in [a, b].$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^i}{ds^i} (\mathbb{K}f) \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) \right| |f(t)| dt \\ &\leq \left( \int_a^b \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathbb{H}_1}, \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \frac{d^i}{ds^i} (\mathbb{K}f) \right\|_{\mathbb{H}_1} \leq \left( \int_a^b \int_a^b \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s, t) \right|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathbb{H}_1} \leq M_{i,0} \|f\|_{\mathbb{H}_1},$$

et par conséquent il découle (4.3.6) avec  $\kappa = M_s$ .

### 4.6.2 Application 2

Soient  $\mathbb{H}_1 = L^2(I)$  et  $\mathbb{H}_2 = L^2(J)$  pour  $I = ([a, b], dt)$ ,  $J = ([a, b], wds)$ , où  $w$  est la fonction de poids de Tchebychev. Soit  $\mathbb{H}_3 = H^s(J) \subset \mathbb{H}_2$  l'espace de Sobolev d'ordre  $s > 0$ .

Notons  $\{\psi_i\}_{i \geq 0} = \{\widehat{T}_i\}_{i \geq 0}$  les polynômes de Tchebychev translatés et normalisés dans  $[a, b]$  (base orthonormale dans  $\mathbb{H}_2$ ).

D'après les résultats exposés dans [CHQ12] et [QV08], on trouve la formule (4.3.5) avec  $\zeta_n = n^{-s} \rightarrow 0$  si  $n \rightarrow \infty$ . Pour ce cadre fonctionnel, on peut définir l'opérateur adjoint  $\mathbb{K}^*$  par

$$\mathbb{K}^*g(t) = \int_a^b k(s, t) w(s) g(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Pour  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ , on note par

$$H_\Omega^s = \left\{ h \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} h(s, t) \in L^2(\Omega), \forall (i, j) \text{ avec } i + j \leq s \right\},$$

l'espace de Sobolev, muni de la norme

$$\|h(\cdot, \cdot)\|_{s, \Omega} = \sum_{i+j=0}^s \left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} h(\cdot, \cdot) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Remarque 4.6.2.** Si on suppose que le noyau  $k(\cdot, \cdot) \in H_\Omega^s$ , alors  $\mathcal{R}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{H}_3$ .

En effet, notons

$$\left\| \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^i \partial t^j} k(.,.) \right\|_{L^2(\Omega)} = M_{i,j} \text{ et } \|k(.,.)\|_{s,\Omega} = \sum_{i+j=0}^s M'_{i,j} = M'_s < \infty.$$

Pour  $f \in \mathbb{H}_1$ , on a

$$\frac{d^i}{ds^i} (\mathbf{K}f)(s) = \int_a^b \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s,t) f(t) dt, \quad s \in [a, b].$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^i}{ds^i} (\mathbf{K}f) \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s,t) \right| |f(t)| dt \\ &\leq \left( \int_a^b \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s,t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathbb{H}_1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^i}{ds^i} (\mathbf{K}f) \right\|_{\mathbb{H}_2} &\leq \left( \int_a^b \int_a^b \left| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(s,t) \right|^2 dt w(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathbb{H}_1} \\ &\leq \left\| \frac{\partial^i}{\partial s^i} k(.,.) \right\|_{L^2(I \times J)} \|f\|_{\mathbb{H}_1} \leq M'_{i,0} \|f\|_{\mathbb{H}_1}, \end{aligned}$$

et par conséquent il découle (4.3.6) avec  $\kappa = M'_s$ .

## 4.7 Tests numériques

Dans cette section, on propose des exemples numériques pour valider les résultats théoriques exposés dans ce chapitre. Les tests numériques sont implémentés par le logiciel MATLAB. On calcule les coefficients de la matrice  $\mathbf{F}$  et les coefficients du vecteur  $\mathbf{G}$  par la méthode de quadrature de Gauss :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^1 w(t) g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n w_i g(t_i).$$

### Formule de Gauss-Legendre (Application 1)

Ici,  $w(t) = 1$  pour  $t \in ]-1, 1[$ , les nœuds  $\{t_i\}_{i=1}^{N=150}$  sont les racines du polynôme de Legendre  $L_{n=150}$ , et les poids  $\{w_i\}_{i=1}^{N=150}$  sont calculés par les formules :

$$w_i = \frac{2}{(1-t_i^2)(L'_n(t_i))^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n = 150.$$

Le passage de l'intervalle  $[-1, 1]$  vers l'intervalle  $[a, b]$  se fait par un changement de variable (translation). La formule d'intégration numérique devient :

$$\int_a^b f(t)(t)dt \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n=150} w_i f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}\right).$$

#### Formule de Gauss-Tchebychev (Application 2)

Cette formule est associée au poids  $w(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ ,  $t \in ]-1, 1[$ . Elle est donnée par la formule :

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n=150} w(t_i)f(t_i),$$

où  $t_i = \cos((2i-1)\pi/2n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sont  $n$  les racines du polynôme de Legendre  $T_n$  et les poids  $w_i = \frac{\pi}{n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

La formule de calcul de l'intégrale d'une fonction  $f$  sur l'intervalle  $(a, b)$  est donnée par :

$$\int_a^b f(t)(t)dt \approx \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^{n=150} w(t_i)f\left(\frac{b+a}{2}t_i + \frac{b+a}{2}\right).$$

Pour générer des données bruitées, on perturbe les données  $\mathbf{G}_n(g) := g_n$  de l'équation (4.3.18) par un bruit aléatoire :

$$g_n^\delta = g_n + \delta \cdot Z / \|Z\| \quad \text{avec } Z = \text{randn}(\text{size}(g_n)).$$

Dans ces exemples, les valeurs de l'algorithme 4.5.1 sont choisies pour  $\alpha_0 = 10^{-7}$ ,  $\epsilon = 10^{-8}$  et  $e_{\max} = 100$ .

**Exemple 4.7.1.** (voir Yang [YLLL13]) Considérons l'équation suivante

$$\int_a^b k(s, t)f(t)dt = g(s),$$

avec  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $k(s, t) = \frac{1}{2}(s+t) + st$ .



(a) Si

$$g(s) = \frac{11969}{82944} + \frac{10909}{20736}s,$$

alors, la solution exacte dans ce cas est

$$f(t) = \frac{1163}{6912} + \frac{265}{432}t.$$

(b) Si

$$g(s) = \frac{12676779}{11943936} + \frac{1155427}{2985984}s,$$

dans ce cas la solution exacte est

$$f(t) = \frac{123179}{995328} + \frac{56135}{124416}t.$$

Les résultats numériques de l'exemple 4.7.1 pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\delta$  sont affichés sur les Tableaux 4.1-4.4, 4.10 et les Figures 4.1-4.4) et les Figures 4.7-4.10).

**Exemple 4.7.2.** (voir Yang [YLL13] et Chen [CJSY08]) Considérons l'équation :

$$\int_a^b k(s, t)f(t)dt = g(s),$$

avec  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $k(s, t) = \sin(t + s)$ .

On choisi

$$g(s) = \frac{1}{8} \sin\left(\frac{2s+9}{2}\right) + \frac{5}{8} \sin\left(\frac{2s+1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2s-1}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2s+3}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{2s-5}{2}\right) - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{2s+5}{2}\right).$$

La solution exacte de ce problème est

$$f(t) = \cos\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(t + \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

Les résultats numérique de l'exemple 4.7.2 pour différentes valeurs de  $n$  et différentes valeurs de  $\delta$  sont affichés sur les Tableaux 4.5-4.10 et les Figures 4.5, 4.6, 4.11, 4.12).

## 4.7.1 Tableaux

- Comparaison avec la méthode de Galerkin multi-échelles (MGM) [YLLL13].

$\delta$	$n$	Tchebychev $\ e_n\ _2$	Legendre $\ e_n\ _2$	Méthode de Galerkin multi-échelles $\ e_n\ _2$
$5 \times 10^{-3}$	5	$1.8707 \times 10^{-3}$	$1.7088 \times 10^{-3}$	$1.2327 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-4}$	8	$1.1437 \times 10^{-4}$	$7.0327 \times 10^{-5}$	$2.2245 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^{-5}$	10	$4.2121 \times 10^{-5}$	$1.7027 \times 10^{-5}$	$3.2193 \times 10^{-4}$

Table 4.1 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.1 (a) (Principe de Morozov amorti).

$\delta$	$n$	Tchebychev $\ e_n\ _2$	Legendre $\ e_n\ _2$	Méthode de Galerkin multi-échelles $\ e_n\ _2$
$5 \times 10^{-3}$	5	$4.7980 \times 10^{-4}$	$2.9182 \times 10^{-3}$	$1.0186 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-4}$	7	$8.9129 \times 10^{-5}$	$1.0531 \times 10^{-4}$	$1.3497 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^{-5}$	10	$1.0016 \times 10^{-5}$	$1.6196 \times 10^{-5}$	$2.0161 \times 10^{-4}$

Table 4.2 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.1 (b) (Principe de Morozov amorti).

$\delta$	$n$	Tchebychev $\ e_n\ _2$	Legendre $\ e_n\ _2$	Méthode de Galerkin multi-échelles $\ e_n\ _2$
$5 \times 10^{-3}$	5	$2.9178 \times 10^{-3}$	$1.1378 \times 10^{-3}$	$1.2327 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-4}$	8	$6.2959 \times 10^{-4}$	$2.8678 \times 10^{-4}$	$2.2245 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^{-5}$	10	$1.7121 \times 10^{-5}$	$1.1948 \times 10^{-5}$	$3.2193 \times 10^{-4}$

Table 4.3 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.1 (a) (Principe d'Engl généralisé).

$\delta$	$n$	Tchebychev	Legendre	Méthode de Galerkin multi-échelles
		$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$
$5 \times 10^{-3}$	5	$2.7081 \times 10^{-3}$	$7.2473 \times 10^{-4}$	$1.0186 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-4}$	7	$1.9120 \times 10^{-4}$	$1.0584 \times 10^{-4}$	$1.3497 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^{-5}$	10	$1.6054 \times 10^{-5}$	$1.6297 \times 10^{-5}$	$2.0161 \times 10^{-4}$

Table 4.4 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.1 (b) (Principe d'Engl généralisé).

$\delta$	$n$	Tchebychev	Legendre	Méthode de Galerkin multi-échelles
		$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$
$5 \times 10^{-3}$	6	$4.2861 \times 10^{-4}$	$3.1848 \times 10^{-4}$	$2.0795 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-4}$	8	$9.4887 \times 10^{-5}$	$4.7396 \times 10^{-5}$	$5.1072 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^{-5}$	10	$2.1715 \times 10^{-5}$	$3.1437 \times 10^{-4}$	$1.2073 \times 10^{-3}$

Table 4.5 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.2 (Principe de Morozov amorti).

$\delta$	$n$	Tchebychev	Legendre	Méthode de Galerkin multi-échelles
		$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$
$5 \times 10^{-3}$	6	$3.1767 \times 10^{-3}$	$1.3540 \times 10^{-3}$	$2.0795 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^{-4}$	8	$2.1217 \times 10^{-4}$	$1.2588 \times 10^{-4}$	$5.1072 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^{-5}$	10	$2.4687 \times 10^{-5}$	$6.2089 \times 10^{-6}$	$1.2073 \times 10^{-3}$

Table 4.6 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.2 (Principe d'Engl généralisé).

- Comparaison avec la méthode multi-échelles augmentée (voir Chen [[CJSY08](#)]).

$\delta$	$n$	Tchebychev	Legendre	méthode ME augmentée
		$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$
$5.637 \times 10^{-3}$	5	$1.056 \times 10^{-3}$	$9.984 \times 10^{-4}$	$5.893 \times 10^{-2}$
$4.549 \times 10^{-4}$	5	$4.233 \times 10^{-5}$	$6.452 \times 10^{-5}$	$1.206 \times 10^{-2}$
$1.824 \times 10^{-4}$	5	$3.211 \times 10^{-5}$	$2.314 \times 10^{-5}$	$7.354 \times 10^{-3}$
$6.065 \times 10^{-5}$	5	$1.234 \times 10^{-5}$	$1.845 \times 10^{-4}$	$3.263 \times 10^{-3}$
$8.455 \times 10^{-5}$	5	$2.382 \times 10^{-5}$	$2.605 \times 10^{-4}$	$4.025 \times 10^{-3}$

Table 4.7 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.2 (Principe de Morozov amorti).

$\delta$	$n$	Tchebychev	Legendre	méthode ME augmentée
		$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$	$\ e_n\ _2$
$5.637 \times 10^{-3}$	5	$3.184 \times 10^{-3}$	$1.789 \times 10^{-3}$	$5.893 \times 10^{-2}$
$4.549 \times 10^{-4}$	5	$1.487 \times 10^{-4}$	$1.107 \times 10^{-4}$	$1.206 \times 10^{-2}$
$1.824 \times 10^{-4}$	5	$4.652 \times 10^{-5}$	$2.990 \times 10^{-5}$	$7.354 \times 10^{-3}$
$6.065 \times 10^{-5}$	5	$2.524 \times 10^{-5}$	$7.897 \times 10^{-6}$	$3.263 \times 10^{-3}$
$8.455 \times 10^{-5}$	5	$3.104 \times 10^{-5}$	$1.187 \times 10^{-5}$	$4.025 \times 10^{-3}$

Table 4.8 – Résultats numériques de l'exemple 4.7.2 (Principe d'Engl généralisé).

$\delta$	Exemple 4.7.1(a)		Exemple 4.7.1(b)		Exemple 4.7.2	
	Tchebychev	Legendre	Tchebychev	Legendre	Tchebychev	Legendre
0.25	$1.97 \times 10^{-1}$	$2.58 \times 10^{-1}$	$2.90 \times 10^{-1}$	$3.53 \times 10^{-1}$	$1.22 \times 10^{-1}$	$1.06 \times 10^{-1}$
0.15	$6.06 \times 10^{-2}$	$9.35 \times 10^{-2}$	$9.41 \times 10^{-2}$	$1.24 \times 10^{-1}$	$6.36 \times 10^{-2}$	$3.52 \times 10^{-2}$
0.1	$2.64 \times 10^{-2}$	$4.25 \times 10^{-2}$	$3.73 \times 10^{-2}$	$5.61 \times 10^{-2}$	$4.26 \times 10^{-2}$	$1.59 \times 10^{-2}$
0.01	$2.85 \times 10^{-3}$	$3.74 \times 10^{-3}$	$4.86 \times 10^{-3}$	$3.30 \times 10^{-3}$	$2.17 \times 10^{-3}$	$1.20 \times 10^{-3}$

Table 4.9 – Erreurs absolues pour  $n = 3$  (Principe de Morozov amorti).

$\delta$	Exemple 4.7.1(a)		Exemple 4.7.1(b)		Exemple 4.7.2	
	Tchebychev	Legendre	Tchebychev	Legendre	Tchebychev	Legendre
0.25	$1.29 \times 10^{-1}$	$2.02 \times 10^{-1}$	$1.17 \times 10^{-1}$	$1.73 \times 10^{-1}$	$2.62 \times 10^{-1}$	$2.75 \times 10^{-1}$
0.15	$6.78 \times 10^{-2}$	$1.09 \times 10^{-1}$	$6.02 \times 10^{-2}$	$9.32 \times 10^{-2}$	$2.03 \times 10^{-1}$	$1.47 \times 10^{-1}$
0.1	$3.31 \times 10^{-2}$	$6.58 \times 10^{-2}$	$3.33 \times 10^{-2}$	$5.81 \times 10^{-2}$	$1.58 \times 10^{-1}$	$8.73 \times 10^{-2}$
0.01	$3.28 \times 10^{-3}$	$2.80 \times 10^{-3}$	$4.41 \times 10^{-3}$	$2.95 \times 10^{-3}$	$1.20 \times 10^{-2}$	$4.31 \times 10^{-3}$

Table 4.10 – Erreurs absolues pour  $n = 5$  (Principe d'Engl généralisé).

## 4.7.2 Figures

### Principe de Morozov amorti

Figure 4.1 – ( Exemple 4.7.1 (a)) Solution exacte, solution approchée (polynômes Tchebychev), courbe d'erreur où  $n = 3, \delta = 0.1$ .

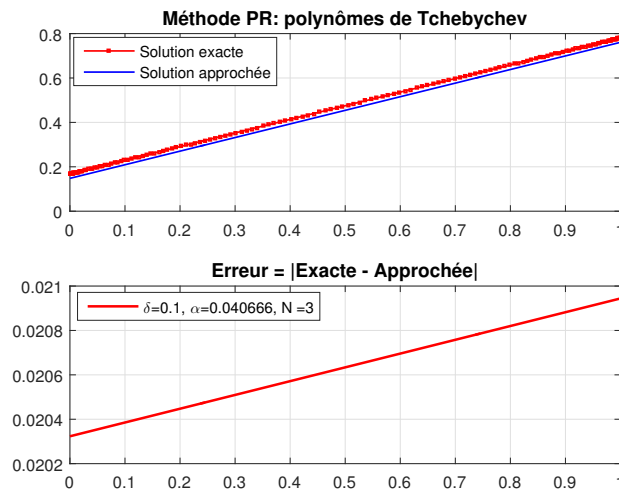


Figure 4.2 – ( Exemple 4.7.1 (a)) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Legendre), courbe d'erreur où  $n = 6, \delta = 0.01$ .

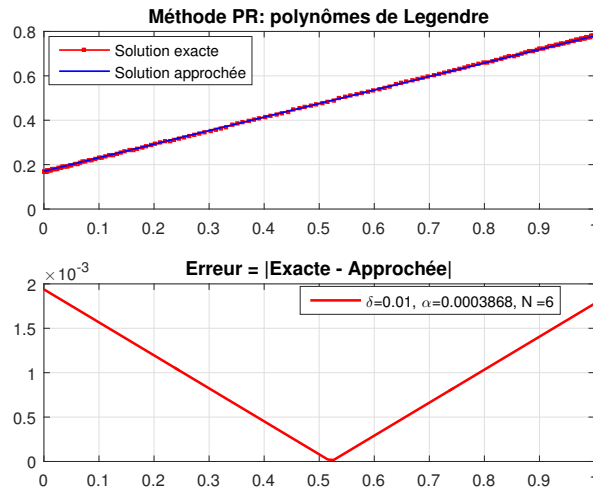


Figure 4.3 – ( Exemple 4.7.1 (b)) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Tchebychev), courbe d'erreur où  $n = 3, \delta = 0.1$ .

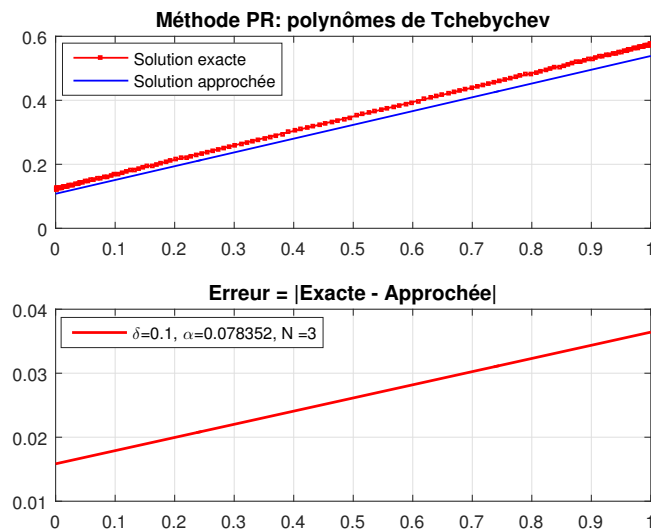


Figure 4.4 – ( Exemple 4.7.1 (b)) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Legendre), courbe d'erreur où  $n = 6, \delta = 0.01$ .

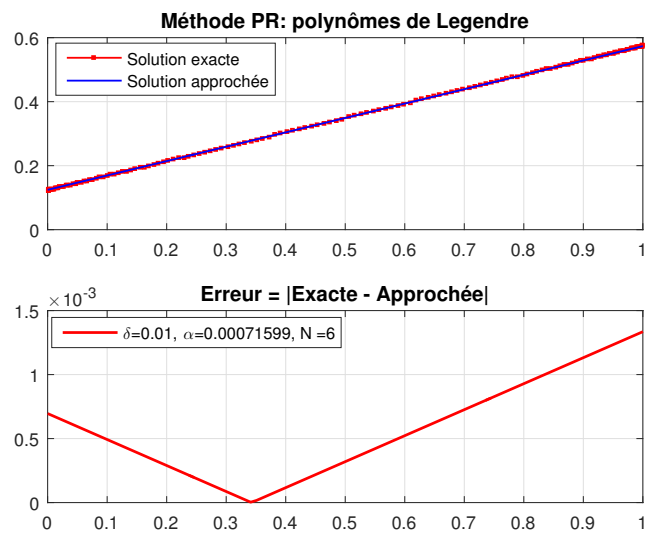




Figure 4.5 – ( Exemple 4.7.2) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Tchebychev), courbe d'erreur où  $n = 3, \delta = 0.1$ .

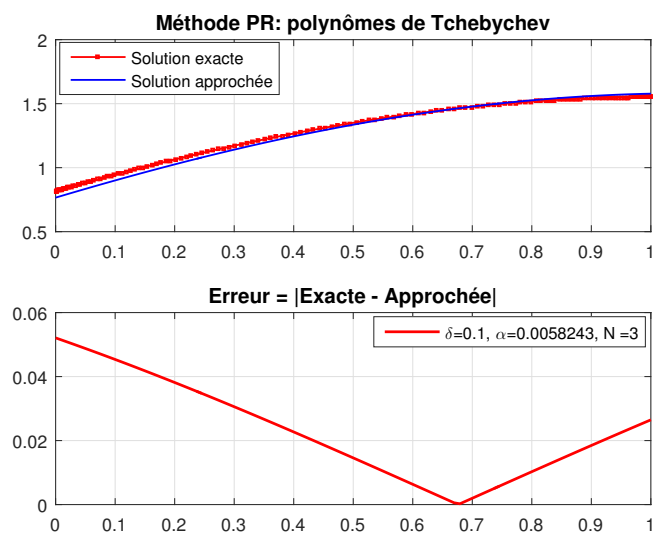
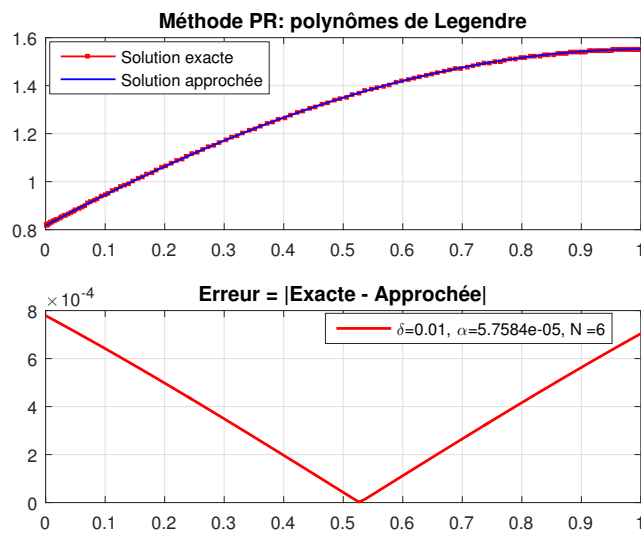


Figure 4.6 – ( Exemple 4.7.2) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Legendre), courbe d'erreur où  $n = 6, \delta = 0.01$ .



### Principe d'Engl généralisé

Figure 4.7 – ( Exemple 4.7.2 (a)) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Tchebychev), courbe d'erreur où  $n = 4, \delta = 0.1$ .

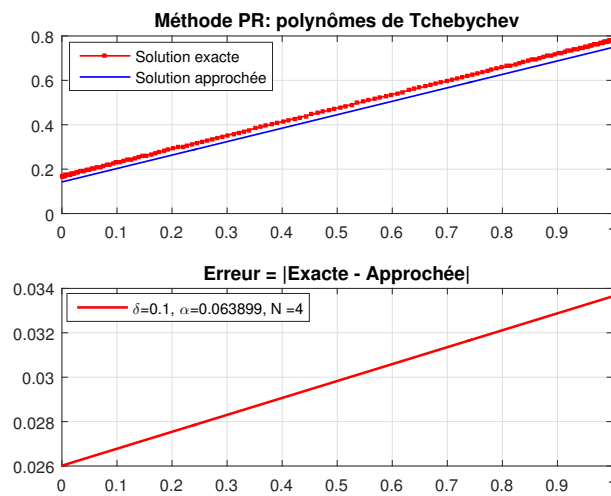


Figure 4.8 – ( Exemple 4.7.2 (a)) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Legendre), courbe d'erreur où  $n = 3, \delta = 0.001$ .

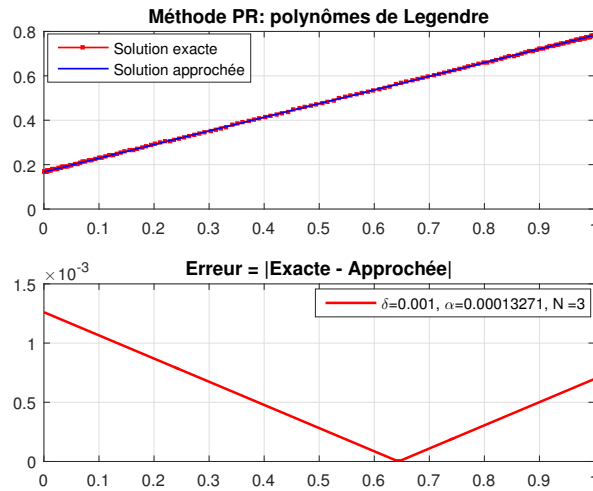


Figure 4.9 – ( Exemple 4.7.2(b)) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Tchebychev), courbe d'erreur où  $n = 4, \delta = 0.1$ .

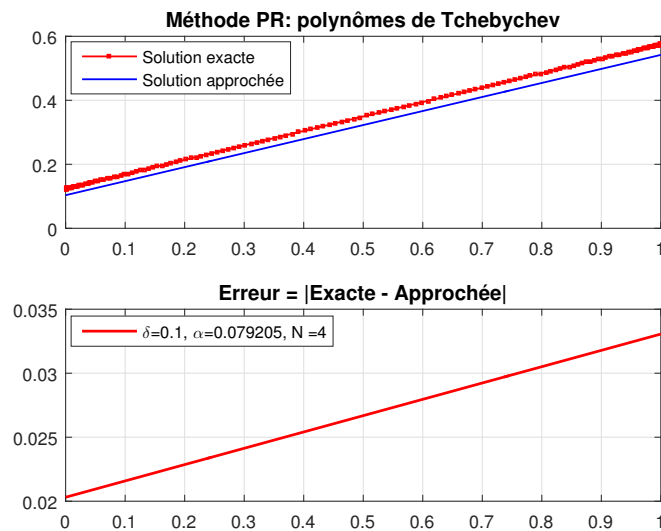


Figure 4.10 – ( Exemple 4.7.2 (b)) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Legendre), courbe d'erreur où  $n = 3, \delta = 0.001$ .

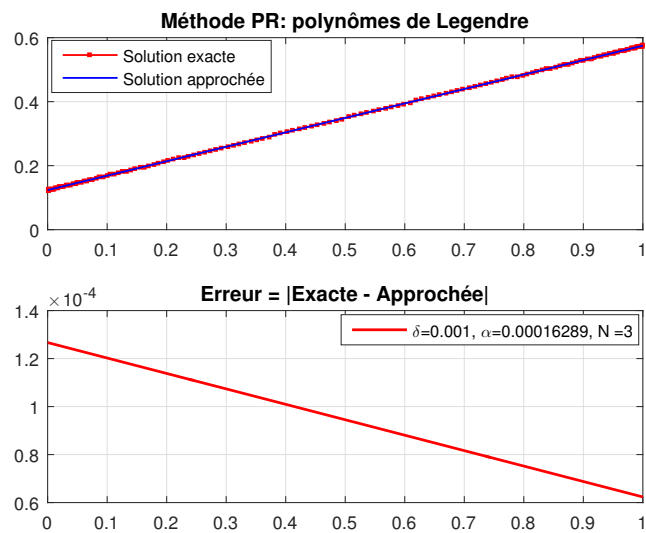


Figure 4.11 – ( Exemple 4.7.2) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Tchebychev), courbe d'erreur où  $n = 4, \delta = 0.1$ .

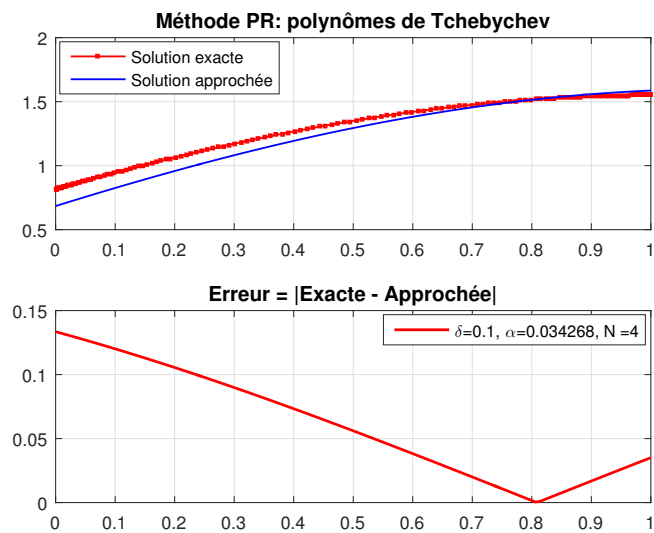
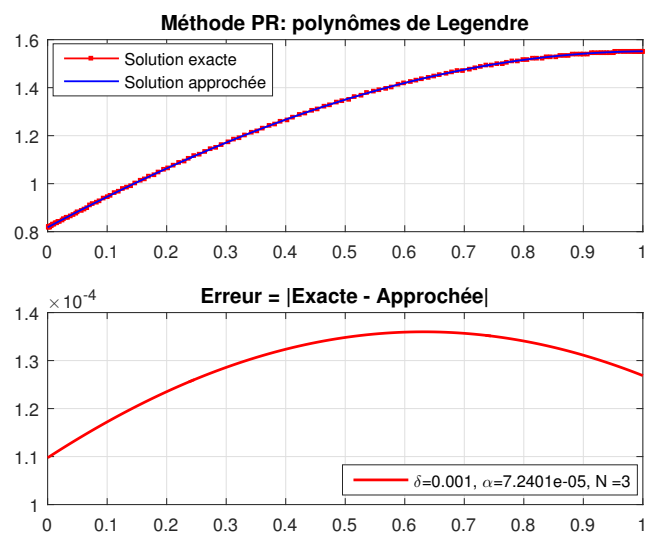


Figure 4.12 – ( Exemple 4.7.2) Solution exacte, solution approchée (polynômes de Legendre), courbe d'erreur où  $n = 3, \delta = 0.001$ .



**Conclusion.** Les tableaux 4.1-4.10 et les Figures 4.1-4.12 montrent que les résultats numériques concordent avec les résultats théoriques.

La méthode de Projection-Régularisée développée dans cette étude pour résoudre les équations intégrales de Fredholm de première espèce est très simple et efficace. Elle est stable et donne des résultats très satisfaisants même pour de petites dimensions ( $n = 2, 3, \dots, 5$ ). De plus, la solution régularisée reste stable pour un bruit fort  $\delta = 0.25$ .

Cette procédure est applicable pour toute base de Hilbert, en particulier pour les polynômes orthogonaux : Legendre, Tchebychev, Fonctions d'ondes sphéroïdales et autres bases de fonctions orthogonales.



## Conclusion et Perspective

- Le travail présenté dans cette thèse de doctorat s'est porté sur l'étude d'une variante améliorée de la méthode (LSQ)-projection : projection-régularisée et collocation-régularisée. Cette procédure de régularisation avec deux paramètres  $\alpha$  et  $N$  ( $\alpha$  le paramètre de régularisation,  $N$  la dimension du sous-espace de projection) nous permet d'améliorer la qualité de la solution approchée régularisée : le paramètre  $N$  participe dans la troncature spectrale pour éliminer les hautes fréquences, et le paramètre  $\alpha$  comme un filtre stabilisateur.
- Le cadre théorique développé dans cette investigation est exploitable pour la résolution numérique d'une classe plus large de problèmes mal-posés linéaires, et les équations intégrales de Fredholm de première espèce avec des noyaux réguliers.
- Comme perspectives, on projette d'étudier et faire une extension de ces méthodes de projection pour des équations intégrales de Fredholm de première espèce avec des noyaux faiblement singuliers.
- Une autre direction aussi très intéressante est d'étendre cette étude aux problèmes mal posés, où l'opérateur intégral (ou compact) est connu approximativement. Cette piste qui n'est pas encore explorée mérite d'être étudiée, pour connaître qu'elles sont les difficultés théoriques et numériques qui peuvent être engendrées par cette classe de problèmes.

---

## Bibliographie

- [AI13] M. Almousa and A. Ismail. Optimal homotopy asymptotic method for solving the linear fredholm integral equations of the first kind. *Abstract and Applied Analysis*, 2013.
- [Arc66] R. Arcangeli. Pseudo-solution de l'équation  $ax = y$ . *Comptes rendus hebdomadaires de l'academie des sciences serie A*, 263(8) :282–285, 1966.
- [BG12] AB. Bakushinsky and AV. Goncharsky. *Ill-posed problems : theory and applications*, volume 301. Springer, 2012.
- [BK17] A. Bonami and A. Karoui. Approximations in sobolev spaces by prolate spheroidal wave functions. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 42(3) :361–377, 2017.
- [BLP07] E. Babolian, T. Lotfi, and M. Paripour. Wavelet moment method for solving fredholm integral equations of the first kind. *Applied mathematics and computation*, 186(2) :1467–1471, 2007.
- [Boy01] JP. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.
- [Bre99] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [CAX15] Z. Chen, Charles AM., and Y. Xu. *Multiscale Methods for Fredholm Integral Equations*. Cambridge University Press, 2015.
- [CHQ12] C. Canuto, Y. Hussaini, and A. Quarteroni. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer, 2012.
- [CHQZ06] C. Canuto, MY. Hussaini, A. Quarteroni, and TA. Zang. *Spectral methods*. Springer, 2006.
-

- [CJSY08] Z. Chen, Y. Jiang, L. Song, and H. Yang. A parameter choice strategy for a multi-level augmentation method solving ill-posed operator equations. *The Journal of Integral Equations and Applications*, pages 569–590, 2008.
- [EHN96] HW. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of inverse problems*, volume 375. Springer, 1996.
- [EN85] HW. Engl and A. Neubauer. An improved version of marti’s method for solving ill-posed linear integral equations. *mathematics of computation*, 45(172) :405–416, 1985.
- [Eng81] HW. Engl. Necessary and sufficient conditions for convergence of regularization methods for solving linear operator equations of the first kind. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 3(2) :201–222, 1981.
- [Eng87] HW. Engl. Discrepancy principles for tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *Journal of optimization theory and applications*, 52(2) :209–215, 1987.
- [Eng92] HW. Engl. *Regularization methods for the stable solution of inverse problems*. Univ., Institut für Mathematik, 1992.
- [FP68] L. Fox and IB. Parker. Chebyshev polynomials in numerical analysis. Technical report, 1968.
- [GCC95] JC. Goswami, AK. Chan, and CK. Chui. On solving first kind integral equations using wavelets on a bounded interval. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 43(6) :614–622, 1995.
- [Gro77] CW. Groetsch. Generalized inverses of linear operators : representation and approximation. 1977.
- [Gro83] CW. Groetsch. Comments on morozov’s discrepancy principle, improperly-posed problems and their numerical treatment, edited by g. h ammerlin and kh hoffmann, 1983.
- [Gro84] CW. Groetsch. *The theory of Tikhonov regularization for fredholm equations*. 1984.

- [Gro90] CW. Groetsch. Convergence analysis of a regularized degenerate kernel method for fredholm integral equations of the first kind. *Integral equations and operator theory*, 13(1) :67–75, 1990.
- [Grü81] FA. Grünbaum. Eigenvectors of a toeplitz matrix : discrete version of the prolate spheroidal wave functions. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 2(2) :136–141, 1981.
- [GS84] CW. Groetsch and E. Schock. Asymptotic convergence rate of arcangeli’s method for iii-posed problems. *Applicable Analysis*, 18(3) :175–182, 1984.
- [Heg95] M. Hegland. Variable hilbert scales and their interpolation inequalities with applications to tikhonov regularization. *Applicable Analysis*, 59(1-4) :207–223, 1995.
- [HPR12] U. Hämarik, R. Palm, and T. Raus. A family of rules for parameter choice in tikhonov regularization of ill-posed problems with inexact noise level. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(8) :2146–2157, 2012.
- [Hua11] C. Huang. Spectral collocation method for compact integral operators. PHD Thesis 2011.
- [Kep05] J. Kepler. Preconditioning iterative regularization methods in hilbert scales. 2005.
- [Kir11] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, volume 120. Springer, 2011.
- [KJ15] S. Karimi and M. Jozi. A new iterative method for solving linear fredholm integral equations using the least squares method. *Applied Mathematics and Computation*, 250 :744–758, 2015.
- [KN88] JT. King and A. Neubauer. A variant of finite-dimensional tikhonov regularization with a-posteriori parameter choice. *Computing*, 40(2) :91–109, 1988.
- [KO12] B. Kaltenbacher and J. Offtermatt. A convergence analysis of regularization by discretization in preimage space. *Mathematics of Computation*, 81(280) :2049–2069, 2012.

- [KZ98] K. Kunisch and J. Zou. Iterative choices of regularization parameters in linear inverse problems. *Inverse Problems*, 14(5) :1247, 1998.
- [KZPS76] MA. Krasnoselskii, PP. Zabreiko, EI. Pustynnik, and PE. Sobolevskii. *Integral operators in spaces of summable functions*. 1976.
- [LP61] JH. Landau and OH. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty—ii. *Bell System Technical Journal*, 40(1) :65–84, 1961.
- [LP62] JH. Landau and OH. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty—iii : the dimension of the space of essentially time-and band-limited signals. *Bell System Technical Journal*, 41(4) :1295–1336, 1962.
- [LW80] HJ. Landau and H. Widom. Eigenvalue distribution of time and frequency limiting. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 77(2) :469–481, 1980.
- [MH02] JC. Mason and DC. Handscomb. *Chebyshev polynomials*. Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [MH08] P. Mathé and B. Hofmann. Direct and inverse results in variable hilbert scales. *Journal of Approximation Theory*, 154(2) :77–89, 2008.
- [ML05] K. Maleknejad and T. Lotfi. Numerical expansion methods for solving integral equations by interpolation and gauss quadrature rules. *Applied mathematics and computation*, 168(1) :111–124, 2005.
- [MM11] K. Maleknejad and R. Mollapourasl. Convergence analysis for numerical solution of fredholm integral equation by sinc approximation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(6) :2478–2485, 2011.
- [MMA07] K. Maleknejad, R. Mollapourasl, and M. Alizadeh. Numerical solution of volterra type integral equation of the first kind with wavelet basis. *Applied Mathematics and Computation*, 194(2) :400–405, 2007.
- [MMTA10] K. Maleknejad, R. Mollapourasl, P. Torabi, and M. Alizadeh. Solution of first kind fredholm integral equation by sinc function. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 42 :1539–1543, 2010.

- [MNY07] K. Maleknejad, K. Nouri, and M. Yousefi. Discussion on convergence of legendre polynomial for numerical solution of integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, 193(2) :335–339, 2007.
- [Mor66] VA. Morozov. On the solution of functional equations by the method of regularization. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 167, pages 510–512. Russian Academy of Sciences, 1966.
- [MP03] P. Mathé and SV. Pereverzev. Geometry of linear ill-posed problems in variable hilbert scales. *Inverse problems*, 19(3) :789, 2003.
- [MS08] P. Mathé and N. Schöne. Regularization by projection in variable hilbert scales. *Applicable Analysis*, 87(2) :201–219, 2008.
- [Nai09] MT. Nair. *Linear operator equations : Approximation and regularization*. World Scientific, 2009.
- [Nai15] MT. Nair. Role of hilbert scales in regularization theory. In *Semigroups, Algebras and Operator Theory*, pages 159–176. Springer, 2015.
- [Nai17] MT. Nair. A discrete regularization method for ill-posed operator equations. *The Journal of Analysis*, 25(2) :253–266, 2017.
- [Nat77] F. Natterer. Regularisierung schlecht gestellter probleme durch projektionsverfahren. *Numerische Mathematik*, 28(3) :329–341, 1977.
- [NBR16] B. Neggal, N. Boussetila, and F. Rebbani. Projected tikhonov regularization method for fredholm integral equations of the first kind. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016(1) :195, 2016.
- [Neu87] A. Neubauer. Finite-dimensional approximation of constrained tikhonov-regularized solutions of ill-posed linear operator equations. *Mathematics of computation*, 48(178) :565–583, 1987.
- [NP07] MT. Nair and SV. Pereverzev. Regularized collocation method for fredholm integral equations of the first kind. *Journal of Complexity*, 23(4-6) :454–467, 2007.

- [NS99] MT. Nair and E. Schock. A discrepancy principle for tikhonov regularization with approximately specified data. 1999.
- [OKCN00] S. Oraintara, WC. Karl, DA. Castanon, and QT. Nguyen. A method for choosing the regularization parameter in generalized tikhonov regularized linear inverse problems. In *Proceedings 2000 International Conference on Image Processing (Cat. No. 00CH37101)*, volume 1, pages 93–96. IEEE, 2000.
- [ORX13] A. Osipov, V. Rokhlin, and H. Xiao. *Prolate spheroidal wave functions of order zero*, volume 187. Springer, 2013.
- [PLN13] BL. Panigrahi, G. Long, and G. Nelakanti. Legendre multi-projection methods for solving eigenvalue problems for a compact integral operator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 239 :135–151, 2013.
- [PN11] BL. Panigrahi and G. Nelakanti. Superconvergence of legendre projection methods for the eigenvalue problem of a compact integral operator. *Journal of computational and applied mathematics*, 235(8) :2380–2391, 2011.
- [PP00] SV. Pereverzev and S. Prössdorf. On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for symm’s integral equation. *The Journal of Integral Equations and Applications*, pages 113–130, 2000.
- [PS91] S. Prössdorf and B. Silbermann. Numerical analysis for integral and related operator equations. *Operator theory*, 52 :5–534, 1991.
- [PST18] SV. Pereverzev, EV. Semenova, and P. Tkachenko. Regularized quadrature methods for fredholm integral equations of the first kind. *Contemporary Computational Mathematics*, pages 1017–1034, 2018.
- [QV08] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23. Springer, 2008.
- [Raj03] MP. Rajan. Convergence analysis of a regularized approximation for solving fredholm integral equations of the first kind. *Journal of mathematical analysis and applications*, 279(2) :522–530, 2003.

- [Raj10] MP. Rajan. A parameter choice strategy for the regularized approximation of fredholm integral equations of the first kind. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(11) :2612–2622, 2010.
- [Reg13] T. Regińska. Two-parameter discrepancy principle for combined projection and tikhonov regularization of ill-posed problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 21(4) :561–577, 2013.
- [Reg17] T. Regińska. Discrepancy sets for combined least squares projection and tikhonov regularization. *Mathematical Modelling and Analysis*, 22(2) :202–212, 2017.
- [SH07] X. Shang and D. Han. Numerical solution of fredholm integral equations of the first kind by using linear legendre multi-wavelets. *Applied Mathematics and Computation*, 191(2) :440–444, 2007.
- [Sle64] D. Slepian. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty — iv : extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal functions. *Bell System Technical Journal*, 43(6) :3009–3057, 1964.
- [Sle65] D. Slepian. Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions. *Journal of mathematics and physics*, 44(1-4) :99–140, 1965.
- [Sle78] D. Slepian. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis, and uncertainty — v : The discrete case. *Bell System Technical Journal*, 57(5) :1371–1430, 1978.
- [SP61] D. Slepian and HO. Pollak. Prolate spheroidal wave functions, fourier analysis and uncertainty — i. *Bell System Technical Journal*, 40(1) :43–63, 1961.
- [TA77] AN. Tikhonov and VI. Arsenin. *Solutions of ill-posed problems*, volume 14. Winston, Washington, DC, 1977.
- [Tik63a] AN. Tikhonov. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. *Doklady Akademii Nauk*, 151(3) :501–504, 1963.
- [Tik63b] AN. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet Mathematics Doklady*, 4 :1624–1627, 1963.



- [Whi09] LM. Whitney. Theoretical and numerical study of tikhonov's regularization and morozov's discrepancy principle. PHD. Theis 2009.
- [WX01] Y. Wang and T. Xiao. Fast realization algorithms for determining regularization parameters in linear inverse problems. *Inverse Problems*, 17(2) :281, 2001.
- [YLLL13] S. Yang, X. Luo, F. Li, and G. Long. A fast multiscale galerkin method for the first kind ill-posed integral equations via iterated regularization. *Applied Mathematics and Computation*, 219(21) :10527–10537, 2013.
- [YLZ<sup>+</sup>19] S. Yang, X. Luo, C. Zeng, Z. Xu, and W. Hu. On the parameter choice in the multilevel augmentation method. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 1(ahead-of-print), 2019.
- [YZ19] D. Yuan and X. Zhang. An overview of numerical methods for the first kind fredholm integral equation. *Review Paper*, Springer Nature Switzerland AG 2019.
- [ZWZ09] Y. Zou, L. Wang, and R. Zhang. Cubically convergent methods for selecting the regularization parameters in linear inverse problems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 356(1) :355–362, 2009.