

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA
UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA



جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2021

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Filière

Actuariat

Sur la stabilité de certains systèmes thermo-élastiques
de types poreux et de Bresse

Présentée par:

SACI Marwa

DIRECTEUR DE THÈSE: DJEBABLA Abd Elhak Prof. U.B.M. Annaba

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : REBBANI Faouzia Prof. ESTI. Annaba

Devant le jury

PRESIDENT: BENCHETTAH Azzedine Prof. U.B.M. Annaba

EXAMINATEUR: HAIOUR Mohamed Prof. U.B.M. Annaba

EXAMINATEUR: DJELLIT Ali Prof. U.B.M. Annaba

EXAMINATEUR: LASKRI Yamina Prof. ESTI. Annaba

Remerciements

Avant tout je tiens à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a donné pour pouvoir achever ce modeste travail.

A l'issue de la rédaction de cette recherche, je suis convaincue que la thèse est loin d'être un travail solitaire. En effet, je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien de mon directeur de thèse le **Professeur Djebabla Abdelhak**, que je lui remercie vivement pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail, ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, son aide et ses multiples conseils. Aussi, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail, j'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon Co-encadreur de thèse, Madame **Rebani Faouzia** pour son attention, ses conseils avisés et son écoute.

Je tiens également à remercier Monsieur Benchettah Azzedine, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ainsi que Monsieur Haiour Mohamed, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, Monsieur Djellit Ali, Professeur à l'université Badji Mokhtar-Annaba, et Madame Laskri Yamina, Professeur à ESTI-Annaba qui ont accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

Mes remerciements vont également à Monsieur Kilani Brahim pour son soutien et ses conseils.

A titre plus personnel, Je remercie chaleureusement mes chers parents et mes frères qui m'ont toujours encouragé tout au long de mon parcours.

Enfin, je remercie toutes personnes qui m'ont soutenu à terminer cette thèse.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de quelques systèmes d'équations aux dérivées partielles couplées. Plus précisément, on recherche l'existence et l'unicité des solutions de certains systèmes thermo-élastiques de types poreux et de Bresse, Ainsi que la stabilité exponentielle et la stabilité générale des solutions sont considérées en utilisant la méthode des multiplicateurs. Cette méthode s'appuie sur la construction d'une fonctionnelle équivalente à celle de l'énergie appelée : la fonctionnelle de Lyapunov.

Mots-clés : Stabilité exponentielle, système poreux-élastique, fonctionnelle de Lyapunov, la méthode des multiplicateurs, décroissance générale.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of some systems of coupled partial differential equations. More precisely, we investigate the existence and the uniqueness of the solutions of some thermo-elastic systems of porous and Bresse type, as well as the exponential stability exponential and general stability of the solutions are considered with the use of the multiplier method. This method is based on the construction of a functional equivalent to that of the energy called: the Lyapunov functional

Keywords: Exponential stability, porous-elastic system, Lyapunov functional, the multiplier method, general decay.

المخلص

تهدف هذه الأطروحة إلى دراسة بعض الأنظمة المكونة من المعادلات التفاضلية الجزئية، وبتعبير أدق إلى دراسة وجود ووحدانية حلول بعد الأنظمة المسامية وأنظمة من نوع Bresse، في ظل وجود بعض الاهتزازات ذات طبيعة غير مرغوب فيها بسبب أضرارها، ولهذا تم تطوير ودمج مثبتات ذات أنواع مختلفة مباشرة في النظام، إما بإضافتها في المعادلات أو على الحدود، من بين المثبتات المعروفة نجد مثبتات من النوع الضعيف كالاحتكاك والمثبتات اللزجة. كما يوجد مثبتات من النوع القوي. تطرقنا أيضا إلى دراسة الاستقرار الأسي والاستقرار العام لهذه الحلول باستخدام الطريقة الطاقوية، والتي تعتبر إحدى الطرق التي يتم من خلالها إثبات استقرار الحزم. تعتمد هذه الطريقة على بناء دالة مكافئة لدالة الطاقة وهي ما تسمى بدالة Lyapunov.

كلمات مفتاحية: الاستقرار الأسي، نظام المرونة المسامية، دالة Lyapunov، التناقص العام.

Table des matières

Introduction générale	1
Structure de la thèse	5
1 Notions préliminaires	6
1.1 Définitions et propriétés élémentaires	6
1.2 Espaces fonctionnels	7
1.3 Le Théorème de Hille-Yosida	9
1.4 Inégalités intégrales	10
2 Étude de la décroissance exponentielle de l'énergie d'un système de type poreux-élastique linéaire avec effets micro-températures et de friction	11
2.1 Position du problème	11
2.2 Existence et unicité de la solution	15
2.3 Stabilité exponentielle	21
3 Étude de la stabilité exponentielle d'un système linéaire poreux-élastique avec effets micro-températures	29
3.1 Position du problème	29
3.2 Existence et unicité de la solution	31
3.3 Stabilité exponentielle	36
4 Étude de la stabilité générale d'un système thermoélastique de Bresse de type III.	46

4.1	Position du problème	46
4.2	Notions de base	49
4.3	Existence de la solution	51
4.4	Stabilité générale	56
	Conclusion	68
	Bibliographie	69

Introduction générale

La modélisation d'un phénomène physique est une phase essentielle dans une démarche scientifique qui vise l'analyse de son comportement et son contrôle pour améliorer ses performances, elle permet d'avoir une représentation simplifiée d'un système ou d'un phénomène physique. On prend l'exemple des vibrations qui apparaissent pratiquement dans toutes les structures mécaniques, plusieurs types de ces vibrations sont indésirables car elles ont une influence néfaste sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. Elles peuvent engendrer des fractures, cassures, mal fonctionnement, usure ou même la destruction des structures. De plus, elles peuvent constituer un certain danger pour l'utilisateur lui-même. Les excitations dynamiques causant ces vibrations sont nombreuses, elles proviennent généralement, soit de l'environnement extérieur, atmosphère, eau et contacts, soit d'un choc avec d'autres structures.

L'élimination ou la réduction de ces vibrations est un problème majeur dans les domaines de l'ingénierie, pour cette raison, on élabore et incorpore des amortissements de type friction, thermique ou viscoélastique dans le système, ce qui explique l'ajout de certain termes dissipatifs dans les équations ou bien sur la frontière.

Au cours des années récentes, un grand effort a été développé pour obtenir une stabilité des solutions et de nombreux résultats ont été obtenus. Les résultats mathématiques basés sur l'étude des modèles de déplacement des matériaux poreux-élastiques sont adoptés par de nombreux chercheurs de divers domaines scientifiques. L'analyse de la décroissance temporelle dans les matériaux poreux-élastiques unidimensionnels a pris son origine en

2003 par Quintanilla [41], où il a traité le système suivant :

$$\begin{cases} \rho_0 u_{tt} - \mu u_{xx} - \beta \varphi_x = 0, \\ \rho_0 k \varphi_{tt} - \alpha \varphi_{xx} + b u_x + \xi \varphi + \tau \varphi_t = 0. \end{cases} \quad (0.0.1)$$

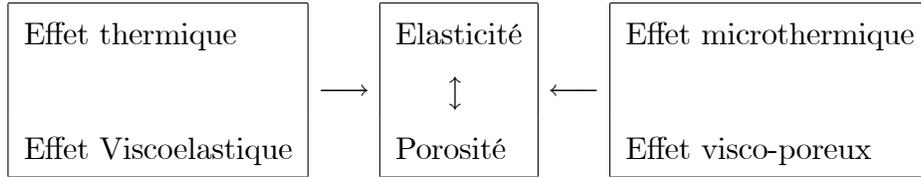
Ce système est complété par les données initiales et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), & x \in (0, L), \\ u_t(x, 0) = u^1(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), & x \in (0, L), \\ u(x, t) = \varphi_x(x, t) = 0, & x \in (0, L). \end{cases} \quad (0.0.2)$$

Il a montré que la dissipation donnée par la viscosité poreuse n'était pas assez puissante pour stabiliser le système d'une manière exponentielle. De même, en ce qui concerne les effets thermiques, grâce aux travaux de Casas et Quintanilla [40], il est clair que la température ne donne pas une stabilité exponentielle.

Magãna et al [16] ont prouvé que la combinaison de la viscoélasticité avec les micro-températures produisait une stabilité exponentielle, tandis que la viscoélasticité combinée avec la température perd la stabilité exponentielle.

Nous constatons que dans la théorie des matériaux élastiques avec vides, ils ont lié le comportement de la solution aux types de couplage avec mécanismes de dissipation, les différentes études sont résumées par le schéma suivant :



Si on prend simultanément un effet du carré droit et un autre du carré gauche, alors nous obtenons une stabilité exponentielle. Mais, si nous considérons deux effets qui ont lieu en même temps d'un seul carré, nous obtenons une lente décroissance (stabilité polynomiale). Bien sûr, si on prend plus de deux de ces mécanismes, nous trouvons une stabilité exponentielle aussi.

Dans [25], Dridi et Djbebel ont considéré le système poreux-élastique :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \mu u_{xx} + b\varphi_x - \gamma\theta_x, \\ J\varphi_{tt} = \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - dw_x + m\theta + \beta\varphi_t, \\ c\theta_t = -\gamma u_{tx} - m\varphi_t - k_1 w_x, \\ \alpha w_t = k_2 w_{xx} - k_3 w - k_1 \theta_x - d\varphi_{tx}, \end{cases} \quad (0.0.3)$$

soumis à deux dissipations, une dissipation poreuse et une sous forme d'un effet thermique. Ils ont utilisé la technique des multiplicateurs pour montrer que le système est exponentiellement stable indépendamment des vitesses d'onde.

Dans la première partie de cette thèse, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique du système (0.0.3) soumis à des conditions de Dirichlet par rapport à φ et θ et de Neumann par rapport à u et w mais en éliminant l'amortissement poreux qui se trouve dans la deuxième équation et en ajoutant une dissipation frictionnelle dans la première équation τu_t . On démontre la décroissance exponentielle des solutions sans aucune condition sur les coefficients du système.

Dans la seconde partie, on élimine la dissipation de friction et on amorti le système par un effet de micro-température seulement. La décroissance exponentielle du système a été établie toujours mais cette fois ci sous la condition suivante :

$$\chi_1 = \chi - \frac{\gamma^2}{c\rho} = 0, \quad (0.0.4)$$

avec :

$$\chi = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J}, \quad (0.0.5)$$

On passe à la stabilisation des systèmes de Timoshenko avec effet thermique, Rivera et Racke [29] ont considéré le système de Timoshenko dont les équations représentent respectivement le déplacement du faisceau, l'angle de rotation et la différence de température. Ils ont démontré plusieurs résultats du décroissance exponentielle et du stabilité non exponentielle dans le cas de différentes vitesses d'onde du système. Pour l'effet thermique, le flux de chaleur a été donné selon la loi de Fourier. En conséquence, cette théorie prédit une vitesse infinie de propagation de la chaleur. C'est-à-dire que toute perturbation thermique en un point a un effet instantané ailleurs dans le corps.

Maintenant, le système de Bresse est une généralisation du système de Timochenko, on peut dire que les équations essentielles sont la force de cisaillement, le moment de flexion et la force axiale, respectivement. En conséquence, le comportement asymptotique de la solution du système de Bresse a été étudié par plusieurs chercheurs qui ont utilisé divers types d'amortissement. En outre, plusieurs auteurs ont prouvé que les systèmes de Bresse avec termes mémoires en présence d'une dissipation de friction agissant sur le déplacement ou bien sur l'angle de cisaillement sont exponentiellement stables sous l'hypothèse du "vitesses d'ondes égales".

Enfin, dans la troisième partie, on étudie le système de Bresse donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_{tx} = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} + \beta(g * \theta_{xx}) + \gamma\psi_{tx} = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \end{array} \right. \quad (0.0.6)$$

soumis à une dissipation viscoélastique dans la quatrième équation, on démontre la décroissance générale des solutions si et seulement si les coefficients du système vérifient :

$$\gamma = \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 = \kappa - \frac{k\rho_3}{\rho_1} \quad \text{et} \quad k = k_0. \quad (0.0.7)$$

Structure de la thèse

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante, il est divisé en quatre chapitres :

- Le **premier chapitre** comporte des rappels sur les notions préliminaires classiques et les outils mathématiques qui sont nécessaires pour l'étude de cette thèse.
- Le **deuxième chapitre**, est consacré à l'étude de la stabilité exponentielle d'un système poreux-élastique linéaire avec effets de micro-températures et de friction, En utilisant la méthode des multiplicateurs. Ceci a fait l'objet d'une publication dans un journal international intitulée : "On the stability of linear porous elastic materials with microtemperatures effects and frictional damping".
- Dans le **troisième chapitre**, nous avons étudié un système poreux-élastique linéaire avec effets micro-températures seulement. On a introduit un nouveau nombre de stabilité et nous avons prouvé que la dissipation unique due aux micro-températures est suffisamment forte pour conduire le système à l'état d'équilibre d'une manière exponentielle. Cette étude a été publiée dans " Journal of Thermal Stresses " sous le titre : " On the stability of linear porous elastic materials with microtemperatures effects."
- Le **quatrième chapitre**, concerne un système de Bresse, en prouvant le résultat de stabilité générale du système. Ce résultat est soumis pour une éventuelle publication.

Dans ce chapitre nous rappelons quelques éléments d'analyse fonctionnelle qui vont être utilisés dans les différents chapitres de cette thèse. Les résultats sont donnés sans démonstrations, car ils sont standards et peuvent être trouvés dans beaucoup de références de mathématiques.

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1.1 Soit X un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire définie sur $X \times X$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que :

$$(u, v) = (v, u), \forall u, v \in X,$$

$$(u, u) \geq 0, \forall u \in X,$$

$$(u, u) \neq 0, \forall u \neq 0.$$

Définition 1.1.2 Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite :

(i) Continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall (u, v) \in X \times X.$$

(ii) Coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in X.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Définition 1.2.1 (*espace complet*) Soit X un espace vectoriel normé. X est dit complet si toute suite de Cauchy en X converge.

Définition 1.2.2 Un espace vectoriel $(X, \|\cdot\|)$ est de Hilbert, s'il est complet et sa norme munie d'un produit scalaire.

Définition 1.2.3 Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.4 Soit p un réel de $[1, +\infty[$, On définit l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ telle que } : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

Définition 1.2.5 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} f \text{ définie sur } \Omega \text{ telle que } : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty, \text{ si } 1 \leq p < +\infty \\ : \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)| < +\infty, \text{ si } p = +\infty \end{array} \right\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont munis des normes suivantes:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)|.$$

Remarque 1.2.1 Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

En effet, la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ munie d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

et ainsi, on a :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 1.2.6 *Etant donné $m \in \mathbb{N}$, nous désignerons par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par :*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \forall \alpha / |\alpha| \leq m, \exists v_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tel que } : v_\alpha = \partial^\alpha u \text{ au sens faible}\}. \quad (1.2.1)$$

On introduit sur H^m le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle, \quad (1.2.2)$$

et la norme associée donnée par :

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_m}. \quad (1.2.3)$$

Définition 1.2.7 *On définit l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur le bord de Ω , autrement dit:*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Lemme 1.2.1 (Inégalité de Hölder) *Soit p et q deux nombres réels conjugués c'est à dire: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a $f.g \in L^1(\Omega)$. En particulier, on a :*

a) Si $p, q \in]1, +\infty[$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.2.4)$$

b) Si $p = 1, q = +\infty$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)| dx\right) \|g\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (1.2.5)$$

Remarque 1.2.2 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas où $p = 2$ et $q = 2$.*

Lemme 1.2.2 (Inégalité de Young) *Soit p et q deux nombres réels conjugués dans $]1, +\infty[$. Alors, pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q. \quad (1.2.6)$$

Lemme 1.2.3 (Inégalité de Poincaré) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Alors il existe une constante C positive vérifiant :

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \|f\|_{H^1} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.2.7)$$

Où $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

L'inégalité de Poincaré habituelle dans $L^2(\Omega)$ est donnée comme suit :

Lemme 1.2.4 Soit $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C positive vérifiant :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.2.8)$$

1.3 Le Théorème de Hille-Yosida

Définition 1.3.1 Un opérateur linéaire non borné dans X est un couple $(A, D(A))$, où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de X et A est une application linéaire de $D(A)$ dans X . Le sous-espace $D(A)$ est appelé le domaine de A .

Définition 1.3.2 Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est dissipatif si et seulement si :

$$\forall x \in D(A), \quad (Ax, x) \leq 0. \quad (1.3.1)$$

Définition 1.3.3 Soit A un opérateur dissipatif de domaine dense dans X . Alors A est m -dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.

Théorème 1.3.1 (Hille-Yosida) Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) A est fermé et $D(A)$ dense dans X .

2) $\forall \lambda \in]0, +\infty[$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur X , et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur X vérifiant :

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda} \quad (1.3.2)$$

Théorème 1.3.2 (Hille-Yosida 2) *Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur X si et seulement si A est m -dissipatif et de domaine dense dans X .*

Théorème 1.3.3 (Lumer-Phillips): *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire, le domaine $D(A)$ dense dans X :*

1) *Si A est dissipatif et il existe λ_0 tel que $\lambda_0 I - A$ est surjectif, alors A est un générateur infinitésimal de C_0 -semi-groupe de contraction dans X .*

2) *Si A est le générateur du C_0 -semi-groupe de contractions sur X , alors $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$ et il est dissipatif. De plus, pour tout $x \in D(A)$ et tout $x^* \in J$ nous avons :*

$$\operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle \leq 0. \quad (1.3.3)$$

1.4 Inégalités intégrales

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans les théories de la stabilité des systèmes d'évolutions dissipatifs.

Lemme 1.4.1 *Soient $E : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et, $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que :*

$$\phi(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty.$$

Supposons que: $\exists p \geq 0$ et $d > 0$ tels que :

$$\int_0^\infty \phi'(t) E^{p+1} dt \leq \frac{1}{d} E^p(0) E(s), \quad \forall s > 0.$$

Alors

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0) e^{1-d\phi(t)}, \quad \forall t > 0 \text{ si } p = 0 \\ E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+p\phi(t)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t > 0 \text{ si } p > 0, \end{cases}$$

dans le cas particulier où $\phi(t) = t$, nous déduisons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } & E(t) \leq E(0) e^{1-dt}, \quad \forall t > 0 \text{ si } p = 0 \\ \text{b) } & E(t) \leq E(0) \left(\frac{1+p}{1+pd} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t > 0 \text{ si } p > 0, \end{aligned}$$

appelées respectivement, estimation exponentielle et estimation polynomiale.

Étude de la décroissance exponentielle de l'énergie d'un système de type poreux-élastique linéaire avec effets micro-températures et de friction

2.1 Position du problème

Puisque les poutres ont joué un rôle important dans de nombreux domaines de l'ingénierie, de plus en plus les chercheurs ont pris plaisir à étudier le comportement asymptotique des poutres. L'étude de ce comportement des systèmes poreux-élastiques a attiré l'attention de nombreux chercheurs. Une extension de la théorie classique de l'élasticité aux milieux poreux a été proposée par Goodman et Cowin [33], ils ont in-

troduit le concept d'une théorie des matériaux granulaires dans la théorie des solides élastiques avec vides.

Plusieurs articles et résultats de stabilité ont été établis sur la théorie de la thermoélasticité avec micro-températures. Cependant, Casas et Quintanilla [40], ont considéré un système poreux unidimensionnel avec des effets thermiques et micro-températures. Plus précisément, ils ont étudié le système suivant :

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = 0, \\ J\varphi_{tt} - \alpha\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + dw_x - m\theta = 0, \\ c\theta_t - \kappa\theta_{xx} + \gamma u_{tx} + l\varphi_t + k_1 w_x = 0, \\ \alpha w_t - k_4 w_{xx} + d\varphi_{tx} + k_2 w + k_3 \theta_x = 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où $\alpha = aT_0$, ρ est la densité de la masse de référence, $J = \rho_0 k$, telles que ρ_0 est la densité de la masse qui est supposée positive et k est l'inertie équilibrée qui est également supposée positive. Les variables w et θ désignent respectivement la micro-température et la température mesurée à partir du constante de la température absolue ($T_0 > 0$). Les coefficients $k_1, k_2, k_3, k_4, \mu, \delta, a, \kappa$ et c sont des constantes constitutives qui sont positives. Les coefficients m et d sont des constantes qui ne sont pas nécessairement positives. Comme le couplage est envisagé, b doit être différent de zéro et nous supposons que la densité d'énergie interne est une forme définie positive c'est-à-dire que les coefficients constitutifs vérifient la condition :

$$\mu\xi > b^2. \quad (2.1.2)$$

Les équations de base de l'évolution pour les théories unidimensionnelles des matériaux poreux avec la température et la micro-température sont données par :

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= T_x, & J\varphi_{tt} &= H_x + G, \\ \rho\eta_t &= q_x, & \rho E_t &= P_x + q - Q, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ici, T est le tenseur de stress, G est la force du corps équilibré, H est le vecteur de stress équilibré, η est l'entropie, q est le vecteur du flux thermique, P est le premier moment de flux thermique, Q est le flux thermique moyen et E est le premier moment d'énergie. Les variables u et φ sont respectivement, le déplacement du matériau élastique solide et la fraction volumique.

Les équations constitutives sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 T &= \mu u_x + b\varphi - \gamma\theta, & H &= \delta\varphi_x - dw, \\
 G &= -bu_x - \xi\varphi + m\theta, & \rho\eta &= \gamma u_x + c\theta + m\varphi, \\
 q &= \kappa\theta_x + k_1 w, & P &= -k_1 w_x \\
 Q &= -k_3 w - k_1 \theta_x, & \rho E &= -\alpha w - d\varphi_x.
 \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Ensuite, en substituant les équations constitutives (2.1.4) dans les équations d'évolution (2.1.3), on obtient le système d'équation (2.1.1). Dans ce travail, Casas et Quintanilla ont utilisé la méthode des semi-groupes pour prouver la stabilité exponentielle des solutions indépendamment des vitesses de propagation d'onde.

Récemment, Dridi et Djebabla [25] ont Considéré le système suivant :

$$\begin{cases}
 \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = 0, \\
 J\varphi_{tt} - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + dw_x - m\theta - \beta\varphi_t = 0, \\
 c\theta_t + \gamma u_{tx} + m\varphi_t + k_1 w_x = 0, \\
 \alpha w_t - k_2 w_{xx} + k_3 w + k_1 \theta_x + d\varphi_{tx} = 0,
 \end{cases} \tag{2.1.5}$$

en utilisant la méthode des multiplicateurs, ils ont montré que la combinaison de la viscosité poreuse et de la micro-température sans effet thermique ($\beta = 0$) stabilisait le système d'une manière exponentielle, quelque soient les coefficients du système.

Dans cette partie, nous sommes concernés par le système suivant :

$$\begin{cases}
 \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x + \tau u_t = 0, & (0, 1) \times (0, \infty), \\
 J\varphi_{tt} - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + dw_x - m\theta = 0, & (0, 1) \times (0, \infty), \\
 c\theta_t + \gamma u_{tx} + m\varphi_t + k_1 w_x = 0, & (0, 1) \times (0, \infty), \\
 \alpha w_t - k_2 w_{xx} + k_3 w + k_1 \theta_x + d\varphi_{tx} = 0, & (0, 1) \times (0, \infty).
 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases}
 u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), \quad x \in (0, 1), \\
 \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), \quad w(x, 0) = w^0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad x \in (0, 1),
 \end{cases} \tag{2.1.7}$$

où $u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1, w^0, \theta^0$ sont des fonctions données, et les conditions aux bords de Dirichlet pour φ et θ , et de Neumann pour u et w :

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(1, t) = \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, & t > 0, \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Afin d'utiliser l'inégalité de Poincaré dans la suite de ce chapitre, nous effectuons la transformation suivante. A partir de la première équation du système (2.1.6), nous observons que :

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx + \tau \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.1.9)$$

si on prend $\gamma(t) = \int_0^1 u(x, t) dx$, alors $\gamma(0) = \int_0^1 u^0(x) dx$ et $\gamma'(0) = \int_0^1 u^1(x) dx$. Nous avons donc le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho \gamma''(t) + \tau \gamma'(t) = 0 \\ \gamma(0) = \int_0^1 u^0(x) dx \text{ et } \gamma'(0) = \int_0^1 u^1(x) dx. \end{cases} \quad (2.1.10)$$

En résolvant le système (2.1.10) et en utilisant les données initiales de u , nous arrivons à :

$$\gamma(t) = \int_0^1 u^0(x, t) dx - \frac{\rho}{\tau} \left(\int_0^1 u^1(x, t) dx \right) (e^{-\frac{\rho}{\tau} t} - 1). \quad (2.1.11)$$

Par conséquent, si nous fixons :

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) - \int_0^1 u^0 dx + \frac{\rho}{\tau} \left(\int_0^1 u^1(x, t) dx \right) (e^{-\frac{\rho}{\tau} t} - 1), \quad (2.1.12)$$

on obtient :

$$\int_0^1 \bar{u}(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.13)$$

Maintenant, à partir de la quatrième équation du système (2.1.6) et les conditions aux limites (2.1.8), nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 w(x, t) dx + \frac{k_3}{\alpha} \int_0^1 w(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.1.14)$$

ainsi,

$$\int_0^1 w(x, t) dx = \left(\int_0^1 w^0(x) dx \right) e^{-\frac{t}{\alpha} k_3}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.15)$$

Donc, si nous mettons :

$$\bar{w}(x, t) = w(x, t) - \left(\int_0^1 w^0(x) dx \right) e^{-\frac{t}{\alpha} k_3}, \quad \forall t \geq 0, x \in [0, 1], \quad (2.1.16)$$

nous trouvons :

$$\int_0^1 \bar{w}(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1.17)$$

Maintenant, $(\bar{u}, \varphi, \theta, \bar{w})$ satisfait les mêmes équations dans le système (2.1.6) et les mêmes données initiales de u et w , alors on peut appliquer l'inégalité de Poincaré sur u et w . Dans ce qui suit, nous allons travailler avec \bar{u} et \bar{w} , mais pour simplifier les notations, nous écrivons u et w au lieu de \bar{u} et \bar{w} .

2.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous donnons le résultat d'existence et d'unicité pour le système (2.1.6)-(2.1.8), en utilisant la théorie des semi-groupes (plus précisément le Théorème de Hille-Yosida).

Ainsi, si nous désignons $U = (u, v, \varphi, \psi, \theta, w)^T$, où $v = u_t$ et $\psi = \varphi_t$. Alors, le système (2.1.6)-(2.1.8) prend la forme :

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = 0, & t > 0, \\ U(x, 0) = U_x(0) = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, w_0)^T, \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est défini par :

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -v \\ \frac{-\mu}{\rho} u_{xx} - \frac{b}{\rho} \varphi_x + \frac{\gamma}{\rho} \theta_x + \frac{\tau}{\rho} v \\ -\psi \\ \frac{-\delta}{J} \varphi_{xx} - \frac{b}{J} u_x + \frac{\xi}{J} \varphi + \frac{d}{J} w_x - \frac{m}{J} \theta \\ \frac{\gamma}{c} v_x + \frac{m}{c} \psi + \frac{k_1}{c} w_x \\ \frac{-k_2}{\alpha} w_{xx} + \frac{k_3}{\alpha} w + \frac{k_1}{\alpha} \theta_x + \frac{d}{\alpha} \psi_x \end{pmatrix}, \quad (2.2.1)$$

et \mathcal{H} est l'espace énergétique donné par :

$$\mathcal{H} := \{H_*^1(0, 1) \times L_*^2(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)\}, \quad (2.2.2)$$

tels que $L_*^2(0, 1)$ et $H_*^1(0, 1)$ ont été introduits dans [30, 35] comme suit :

$$L_*^2(0, 1) = \left\{ \varphi \in L^2(0, 1) : \int_0^1 \varphi(x) dx = 0 \right\}, \quad H_*^1(0, 1) = H^1(0, 1) \cap L_*^2(0, 1).$$

Pour tout $U = (u, v, \varphi, \psi, \theta, w)^T \in \mathcal{H}$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\theta}, \tilde{w})^T \in \mathcal{H}$, nous équipons l'espace \mathcal{H} avec le produit scalaire défini par :

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = & \rho \int_0^1 v \tilde{v} dx + \mu \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + J \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx + b \int_0^1 (u_x \tilde{\varphi} + \tilde{u}_x \varphi) dx \\ & + \xi \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \alpha \int_0^1 w \tilde{w} dx + \delta \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi}_x dx + c \int_0^1 \theta \tilde{\theta} dx. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Remarques 2.2.1 *Sous l'hypothèse $\mu\xi > b^2$, il est facile de voir que la relation (2.2.3) définit un produit scalaire. Plus précisément, à partir de (2.1.2), nous avons :*

$$\begin{aligned} \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} = & \rho \int_0^1 v^2 dx + J \int_0^1 \psi^2 dx + \mu \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + \tilde{\psi} dx + b \int_0^1 (u_x \tilde{\varphi} + \tilde{u}_x \varphi) dx \\ & + \xi \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \alpha \int_0^1 w \tilde{w} dx + \delta \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi}_x dx + c \int_0^1 \theta \tilde{\theta} dx. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\mu\xi > b^2$, nous arrivons à :

$$\langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} > \rho \int_0^1 v^2 dx + J \int_0^1 \psi^2 dx + \alpha \int_0^1 w^2 dx + \delta \int_0^1 \varphi^2 dx + \mu \int_0^1 \left(u_x + \frac{b}{\mu} \varphi \right)^2 dx.$$

Ainsi, nous concluons que $\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}}$ définit un produit scalaire sur \mathcal{H} et que la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ est équivalente à la norme habituelle.

On définit le domaine de \mathcal{A} par :

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = & \{ U \in \mathcal{H} / u \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1), v \in H_*^1(0, 1), \\ & \varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1), \psi \in H_0^1(0, 1), \theta \in H_0^1(0, 1), \\ & w \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1) \}, \end{aligned}$$

où $H_*^2(0, 1)$ a été introduit dans [30, 35] comme suit :

$$H_*^2(0, 1) := \{ \Psi \in H^2(0, 1) : \Psi_x(0) = \Psi_x(1) = 0 \}.$$

Il est clair que $D(\mathcal{A})$ dense dans \mathcal{H} . Maintenant, nous sommes en mesure de donner le résultat d'existence et d'unicité qui est le suivant.

Théorème 2.2.1 Soit $U_0 \in \mathcal{H}$, alors il existe une solution unique $U \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ pour le problème défini par le système (2.1.6). De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors

$$U \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

Preuve. Tout d'abord, on doit prouver que \mathcal{A} est un opérateur monotone maximal. Pour tout $U \in D(\mathcal{A})$, en utilisant l'équation (2.1.14) et les conditions aux limites, on trouve :

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = k_3 \int_0^1 w^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + \tau \int_0^1 u_t^2 dx \geq 0. \quad (2.2.4)$$

Par conséquent, l'opérateur \mathcal{A} est monotone. Maintenant, nous montrons que l'opérateur $(I + \mathcal{A})$ est surjectif. Pour tout $K = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)^T \in \mathcal{H}$, nous prouvons qu'il existe $U \in D(\mathcal{A})$ tel que :

$$(I + \mathcal{A})U = K. \quad (2.2.5)$$

L'équation (2.2.5) est équivalente au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u - v = \lambda_1 \in H_*^1(0, 1), \\ \rho_1 v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = \rho\lambda_2 \in L_*^2(0, 1), \quad \rho_1 = \rho + \tau \\ \varphi - \psi = \lambda_3 \in H_0^1(0, 1), \\ J\psi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + dw_x - m\theta = J\lambda_4 \in L^2(0, 1), \\ c\theta + \gamma v_x + m\psi + k_1 w_x = c\lambda_5 \in L^2(0, 1), \\ \alpha_1 w - k_2 w_{xx} + k_1 \theta_x + d\psi_x = \alpha\lambda_6 \in L_*^2(0, 1), \quad \alpha_1 = \alpha + \lambda_3. \end{array} \right. \quad (2.2.6)$$

Si on remplace $v = u - \lambda_1$ et $\psi = \varphi - \lambda_3$ dans (2.2.6)₂, (2.2.6)₄, (2.2.6)₅ et (2.2.6)₆, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = h_1 \in L_*^2(0, 1), \\ \mu_3 \varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + dw_x - m\theta = h_2 \in L^2(0, 1), \\ c\theta + \gamma u_x + m\varphi + k_1 w_x = h_3 \in L^2(0, 1), \\ \alpha_1 w - k_2 w_{xx} + k_1 \theta_x + d\varphi_x = h_4 \in L_*^2(0, 1), \end{array} \right. \quad (2.2.7)$$

où

$$\begin{aligned} h_1 &= \rho\lambda_2 + \rho_1\lambda_1, \\ h_2 &= J(\lambda_3 + \lambda_4), \\ h_3 &= c\lambda_5 + \gamma\lambda_{1x} + m\lambda_3, \\ h_4 &= \alpha\lambda_6 + d\lambda_{3x}, \\ \mu_3 &= J + \xi. \end{aligned}$$

Pour résoudre le système (2.2.7), nous introduisons la formulation variationnelle suivante :

$$B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)) = \mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1), \quad (2.2.8)$$

tel que

$$B = [H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)]^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

est la forme bilinéaire définie par :

$$\begin{aligned} &B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)) \\ &= \rho \int_0^1 uu_1 dx + \mu \int_0^1 u_x u_{1x} dx + \mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx \\ &+ c \int_0^1 \theta \theta_1 dx + \alpha_1 \int_0^1 w w_1 dx + k_2 \int_0^1 w_x w_{1x} dx + \gamma \int_0^1 (u_x \theta_1 + u_1 \theta_x) dx \\ &+ b \int_0^1 (u_x \varphi_1 + \varphi u_{1x}) dx + d \int_0^1 (w_x \varphi_1 + \varphi_x w_1) dx \\ &+ k_1 \int_0^1 (w_x \theta_1 + w_1 \theta_x) dx + m \int_0^1 (\varphi \theta_1 + \varphi_1 \theta) dx, \end{aligned}$$

nous avons aussi :

$$\mathcal{G} : [H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)]^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

est la forme linéaire donnée par :

$$\mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1) = \int_0^1 h_1 u_1 dx + \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx + \int_0^1 h_3 \theta_1 dx + \int_0^1 h_4 w_1 dx.$$

Soit $V = \{H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)\}$ équipé de la norme :

$$\|(u, \varphi, \theta, w)\|_V^2 = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi_x\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2,$$

alors, nous pouvons facilement prouver que :

$$\begin{aligned} |B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))| &= \rho_1 \int_0^1 u^2 dx + \mu \int_0^1 u_x^2 dx + \mu_3 \int_0^1 \varphi^2 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ &+ c \int_0^1 \theta^2 dx + \alpha_1 \int_0^1 w^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx \\ &\geq M_0 \|(u, \varphi, \theta, w)\|_V^2, \end{aligned}$$

où $M_0 = \{\rho_1, \mu, \mu_3, \delta, c, \alpha_1, k_2\}$, ainsi, B est coercive. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned}
& |B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))| \\
& \leq \rho_1 \|u\|_2 \|u_1\|_2 + \mu \|u_x\|_2 \|u_{1x}\|_2 + \mu_3 \|\varphi\|_2 \|\varphi_1\|_2 + \delta \|\varphi_x\|_2 \|\varphi_{1x}\|_2 \\
& \quad + c \|\theta\|_2 \|\theta_1\|_2 + \alpha_1 \|w\|_2 \|w_1\|_2 + k_2 \|w_x\|_2 \|w_{1x}\|_2 \\
& \quad + \gamma (\|u_x\|_2 \|\theta_1\|_2 + \|u_1\|_2 \|\theta_x\|_2) + b (\|u_x\|_2 \|\varphi_1\|_2 + \|\varphi\|_2 \|u_{1x}\|_2) \\
& \quad + d (\|w_x\|_2 \|\varphi_1\|_2 + \|\varphi_x\|_2 \|w_1\|_2) + k_1 (\|w_x\|_2 \|\theta_1\|_2 + \|w_1\|_2 \|\theta_x\|_2) \\
& \quad + m (\|\varphi\|_2 \|\theta_1\|_2 + \|\varphi_1\|_2 \|\theta\|_2) \\
& \leq \zeta_1 (\|u\|_2 + \|u_x\|_2 + \|\varphi\|_2 + \|\varphi_x\|_2 + \|\theta\|_2 + \|w\|_2 + \|w_x\|_2) \\
& \quad \times (\|u_1\|_2 + \|u_{1x}\|_2 + \|\varphi_1\|_2 + \|\varphi_{1x}\|_2 + \|\theta_1\|_2 + \|w_1\|_2 + \|w_{1x}\|_2) \\
& \leq \zeta'_1 \|(u, \varphi, \theta, w)\|_V \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)\|_V, \quad \zeta_1 > 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que B est continue. De même, nous montrons que :

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)| \\
& \leq \|h_1\|_2 \|u_1\|_2 + \|h_2\|_2 \|\varphi_1\|_2 + \|h_3\|_2 \|\theta_1\|_2 + \|h_4\|_2 \|w_1\|_2 \\
& \leq (\|h_1\|_2 + \|h_2\|_2 + \|h_3\|_2 + \|h_4\|_2) \\
& \quad \times (\|u_1\|_2 + \|\varphi_1\|_2 + \|\theta_1\|_2 + \|w_1\|_2) \\
& \leq \zeta_2 \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)\|_V, \quad \zeta_2 > 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le Théorème de Lax-Milgram garantit l'existence d'une solution unique $(u, \varphi, \theta, w) \in V$ qui vérifie l'égalité (2.2.8).

De plus, si on prend $(\varphi_1, \theta_1, w_1) \equiv (0, 0, 0) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$, alors (2.2.8) se réduit à :

$$\begin{aligned}
& \rho \int_0^1 uu_1 dx + \mu \int_0^1 u_x u_{1x} dx + \gamma \int_0^1 u_1 \theta_x dx + b \int_0^1 \varphi u_{1x} dx \\
& = \int_0^1 h_1 u_1 dx, \quad \forall u_1 \in H_*^1(0, 1).
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

En outre, l'équation (2.2.8) est également vraie pour tout $\Psi \in C^1([0, 1]) \subset H_*^1(0, 1)$. Par conséquent, nous avons :

$$\mu \int_0^1 u_x \Psi_x dx = \int_0^1 (h_1 - \rho u - \gamma \theta_x + b \varphi_x) \Psi, \quad \forall \Psi \in C^1([0, 1]). \tag{2.2.10}$$

Ainsi, en intégrant par parties le côté gauche de l'équation (2.2.10) et en tenant compte de (2.2.6)₁, on obtient :

$$u_x(1)\Psi(1) - u_x(0)\Psi(0) = 0 \quad \forall \Psi \in C^1([0, 1]).$$

Par conséquent,

$$u_x(1) = u_x(0) = 0.$$

De même, nous obtenons :

$$u \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1).$$

Si nous remplaçons $(u_1, \theta_1, w_1) \equiv (0, 0, 0) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$, dans (2.2.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + b \int_0^1 u_x \varphi_1 dx + d \int_0^1 w_x \varphi_1 dx - m \int_0^1 \theta \varphi_1 dx \\ = \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx, \quad \forall \varphi_1 \in H_*^1(0, 1), \end{aligned}$$

ceci implique que :

$$\delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx = \int_0^1 (h_2 - \mu_3 \varphi - b u_x - d w_x + m \theta) \varphi_1 dx, \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(0, 1). \quad (2.2.11)$$

Si on note :

$$h_2 - \mu_3 \varphi - b u_x - d w_x + m \theta \in L^2(0, 1),$$

alors,

$$\varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1),$$

et par conséquent, l'équation (2.2.11) prend la forme :

$$\int_0^1 (h_2 + \delta \varphi_{xx} - \mu_3 \varphi - b u_x - d w_x + m \theta) \varphi_1 dx = 0, \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(0, 1).$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\mu_3 \varphi - \delta \varphi_{xx} + b u_x + d w_x - m \theta = h_2.$$

Cela nous donne l'équation (2.2.6)₂. Aussi, on peut facilement montrer que :

$$\theta \in H_0^1(0, 1), w \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1).$$

Selon la régularité elliptique classique et d'après le système (2.2.7), il existe un unique $U \in D(\mathcal{A})$ qui satisfait (2.2.4). Par conséquent, \mathcal{A} est un opérateur monotone maximal. Ainsi, \mathcal{A} est le générateur infinitésimal de C_0 -semi-groupe des contractions sur \mathcal{H} . Dans ce cas, le résultat cité dans le Théorème 2.2.1 est vérifié d'après le Théorème de Hille-Yosida. ■

2.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section nous établissons et prouvons notre résultat sur la décroissance exponentielle pour le système poreux linéaire (2.1.6)-(2.1.8). Nous commençons par introduire quelques fonctionnelles et établir des résultats préliminaires sous forme de lemmes.

Notre résultat de décroissance est donné par :

Théorème 2.3.1 *Soit (u, φ, θ, w) la solution du problème défini par le système (2.1.6)-(2.1.8). Alors (u, φ, θ, w) décroît exponentiellement, i.e., il existe deux constantes positives β_1 et β_2 indépendantes de telle sorte que :*

$$E(t) \leq \beta_1 E(0) e^{-\beta_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3.1)$$

La démonstration du Théorème 2.3.1 sera donnée via quelques lemmes :

Lemme 2.3.1 *Soit (u, φ, θ, w) la solution du système (2.1.6)-(2.1.8). Alors, la fonctionnelle d'énergie associée au problème est définie par :*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\rho u_t^2 + J \varphi_t^2 + \mu u_x^2 + c \theta^2 + \alpha w^2 + \delta \varphi_x^2 + \xi \varphi^2 + 2b u_x \varphi] dx, \quad (2.3.2)$$

satisfait l'identité :

$$E'(t) = -k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx - \tau \int_0^1 u_t^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3.3)$$

Preuve. En multipliant les équations du problème (2.1.6) respectivement par $u_t, \varphi_t, \theta, w$ et on intègre sur $[0,1]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \int_0^1 u_{tt} u_t dx - \mu \int_0^1 u_{xx} u_t dx - b \int_0^1 \varphi_x u_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_t dx + \tau \int_0^1 u_t^2 = 0, \\ J \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx - \delta \int_0^1 \varphi_{xx} \varphi_t dx + b \int_0^1 u_x \varphi_t dx + \xi \int_0^1 \varphi \varphi_t dx + d \int_0^1 w_x \varphi_t dx - m \int_0^1 \theta \varphi_t dx = 0, \\ c \int_0^1 \theta_t \theta dx + \gamma \int_0^1 u_{tx} \theta dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx + k_1 \int_0^1 w_x \theta dx = 0, \\ \alpha \int_0^1 w_t w dx - k_2 \int_0^1 w_{xx} w dx + k_3 \int_0^1 w^2 dx + k_1 \int_0^1 \theta_x w dx + d \int_0^1 \varphi_{tx} w dx = 0, \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

puis, en utilisant l'intégration par parties sur l'intervalle [0.1] avec les conditions aux limites, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx - b \int_0^1 \varphi_x u_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_t dx + \tau \int_0^1 u_t^2 = 0, \\ \frac{J}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + b \int_0^1 u_x \varphi_t dx + \frac{\xi}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi^2 dx + d \int_0^1 w_x \varphi_t dx - m \int_0^1 \theta \varphi_t dx = 0, \\ \frac{c}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx - \gamma \int_0^1 u_t \theta_x dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx + k_1 \int_0^1 w_x \theta dx = 0, \\ \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 w^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + k_3 \int_0^1 w^2 dx - k_1 \int_0^1 w_x \theta dx - d \int_0^1 w_x \varphi_t dx = 0. \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

Ainsi, la sommation des quatre équations du système (2.3.5) nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [p u_t^2 + J \varphi_t^2 + \mu u_x^2 + c \theta^2 + \alpha w^2 + \delta \varphi_x^2 + \xi \varphi^2 + 2b u_x \varphi] dx \\ & + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + k_3 \int_0^1 w^2 dx + \tau \int_0^1 u_t^2 dx = 0, \end{aligned}$$

si on note l'énergie du notre système par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [p u_t^2 + J \varphi_t^2 + \mu u_x^2 + c \theta^2 + \alpha w^2 + \delta \varphi_x^2 + \xi \varphi^2 + 2b u_x \varphi] dx,$$

la dérivée de l'énergie sera donnée par :

$$\frac{d}{dt} E(t) = -k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx - \tau \int_0^1 u_t^2 dx,$$

d'où le résultat souhaité. ■

L'énergie de ce système est positive car :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\rho u_t^2 + J \varphi_t^2 + c \theta^2 + \alpha w^2 + \delta \varphi_x^2 + \mu \left(u_x + \frac{b}{\mu} \varphi \right)^2 - \frac{b^2}{\mu} \varphi^2 + \xi \varphi^2 \right] dx, \quad (2.3.6)$$

en utilisant la relation (2.1.2), on trouve :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\rho u_t^2 + J \varphi_t^2 + c \theta^2 + \alpha w^2 + \delta \varphi_x^2 + \mu \left(u_x + \frac{b}{\mu} \varphi \right)^2 \right] dx \geq 0. \quad (2.3.7)$$

Nous remarquons d'après la relation (2.3.3) que le système (2.1.6) est dissipatif, or cette égalité n'implique pas nécessairement la décroissance exponentielle du système. A cet effet, nous devons construire une autre fonctionnelle dite fonctionnelle de Lyapunov, notée par F équivalente à la fonctionnelle d'énergie E qui vérifiée :

$$\beta_2 E(t) \leq F(t) \leq \beta_1 E(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.3.8)$$

telles que: β_1 et β_2 deux constantes positives, et aussi :

$$\frac{d}{dt} F(t) \leq -CE(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.3.9)$$

avec $C > 0$.

Lemme 2.3.2 Pour tout $\varepsilon_1 > 0$, la fonctionnelle I_1 définie par :

$$I_1(t) = J \int_0^1 \varphi_t \varphi dx - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi(y) dy \right) dx, \quad t \geq 0, \quad (2.3.10)$$

vérifie l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} I_1'(t) \leq & -\frac{\delta}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \frac{\mu_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + c_0 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx \\ & + c_0 \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

avec, $\mu_1 = \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right)$.

Preuve. En dérivant la fonctionnelle I_1 et en utilisant la première et la deuxième équation du système (2.1.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= J \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi dx + J \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_{tt} \left(\int_0^x \varphi(y) dy \right) dx \\ &\quad - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx. \\ &= \int_0^1 [\delta \varphi_{xx} - bu_x - \xi \varphi - dw_x + m\theta] \varphi dx + J \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad - \frac{b}{\mu} \int_0^1 [\mu u_{xx} + b\varphi_x - \gamma \theta_x - \tau u_t] \left(\int_0^x \varphi(y) dy \right) dx \\ &\quad - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Si on utilise l'intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= -\delta \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right) \int_0^1 \varphi^2 dx + J \int_0^1 \varphi_t^2 dx + d \int_0^1 w \varphi_x dx \\ &\quad - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx + m \int_0^1 \theta \varphi dx - \frac{b\gamma}{\mu} \int_0^1 \theta \varphi dx. \\ &\quad + \frac{b\beta}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi(y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Puis, grâce à l'inégalité de Young et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz's, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I'_1(t) \leq & -\frac{\delta}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right) \int_0^1 \varphi^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & + c_0 \int_0^1 w^2 dx + c_0 \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \int_0^1 u_t^2 dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat (2.3.11) avec $\mu_1 = \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right) > 0$. ■

Lemme 2.3.3 Soit (u, φ, θ, w) la solution du système (2.1.6)-(2.1.8). Alors la fonctionnelle I_2 , définie par :

$$I_2(t) = \rho \int_0^1 u_t u dx, \quad t \geq 0, \quad (2.3.12)$$

satisfait l'estimation :

$$I'_2(t) \leq -\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 (\varphi^2 + \theta^2) dx, \quad (2.3.13)$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve. En dérivant la fonctionnelle I_2 , en utilisant la première équation du système (2.1.6), et en intégrant par parties sur $[0, 1]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I'_2(t) &= \rho \int_0^1 u_{tt} u dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx \\ &= -\mu \int_0^1 u_x^2 dx + \rho \int_0^1 u_t^2 dx - b \int_0^1 \varphi u_x dx + \gamma \int_0^1 \theta u_x dx. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit d'après l'utilisation de l'inégalité de Young. ■

Lemme 2.3.4 Pour tout $\varepsilon_2 > 0$, la fonctionnelle I_3 définie par :

$$I_3(t) = c \int_0^1 \left(\int_0^x \alpha w(y) + d\varphi_x \right) dy \theta dx - \frac{md}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad t \geq 0, \quad (2.3.14)$$

vérifie pour toute solution du système (2.1.6)-(2.1.8), l'estimation :

$$\begin{aligned} I'_3(t) \leq & -\frac{k_1 c}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 (\varphi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_t^2) dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 w^2 dx \\ & + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 w_x^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \int_0^1 u_t^2 dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Preuve. Dérivons la fonctionnelle I_3 :

$$\begin{aligned} I'_3(t) &= c \int_0^1 \left(\int_0^x k_2 w_{xx} - k_3 w - k_1 \theta_x \right) dy \theta dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(\int_0^x \alpha w(y) + d\varphi_x \right) dy [-\gamma u_{tx} - m\varphi_t - k_1 w_x] dx - md \int_0^1 \varphi \varphi_t dx \\ &= ck_2 \int_0^1 \left(\int_0^x w_{xx} dy \right) \theta dx - ck_3 \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \theta dx - ck_1 \int_0^1 \left(\int_0^x \theta_x dy \right) \theta dx \\ &\quad - \alpha \gamma \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) u_{tx} dx - m\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx \\ &\quad - k_1 \alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) w_x dx + \gamma d \int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_x dy \right) u_{tx} dx \\ &\quad + md \int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_x dy \right) \varphi_t dx + k_1 d \int_0^1 \left(\int_0^x \varphi_x dy \right) w_x dx - md \int_0^1 \varphi \varphi_t dx. \end{aligned}$$

Si on intègre par parties, et on utilise la condition $\int_0^1 w dx = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_3'(t) &= -k_1 c \int_0^1 \theta^2 dx + k_2 c \int_0^1 w_x \theta dx - k_3 c \int_0^1 \theta \left(\int_0^x w(y) dy \right) dx \\ &\quad + \alpha k_1 \int_0^1 w^2 dx + \alpha \gamma \int_0^1 u_t w dx - \gamma d \int_0^1 \varphi_x u_t dx \\ &\quad + k_1 d \int_0^1 w_x \varphi dx - \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx. \end{aligned}$$

Par l'application de l'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous aurons :

$$\begin{aligned} k_2 c \int_0^1 w_x \theta dx &\leq \frac{k_1 c}{4} \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx, \\ -k_3 c \int_0^1 \theta \left(\int_0^x w(y) dy \right) dx &\leq \frac{k_1 c}{4} \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx. \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha \gamma \int_0^1 u_t w dx &\leq c_0 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx, \\ -\gamma d \int_0^1 \varphi_x u_t dx &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{c_0}{2} \int_0^1 u_t^2 dx, \\ k_1 d \int_0^1 w_x \varphi dx &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_0^1 w_x^2 dx, \\ -\alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx &\leq \varepsilon_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_0^1 w^2 dx. \end{aligned}$$

La relation (2.3.15) est établie, en combinant les estimations ci-dessus. ■

Lemme 2.3.5 Soit (u, φ, θ, w) la solution du système (2.1.6)-(2.1.8). Alors la fonctionnelle I_4 , définie par :

$$I_4(t) = J\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx + Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi dx + \frac{mJk_1}{2c} \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad t \geq 0, \quad (2.3.16)$$

satisfait pour $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &\leq -\frac{dJ}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \delta_1 \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \delta_1 \int_0^1 \varphi^2 dx + \delta_2 \int_0^1 u_x^2 dx \\ &\quad + \delta_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{c_0}{\delta_1} \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\delta_1} \right) \int_0^1 w_x^2 dx \\ &\quad + c_0 \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_3} \right) \int_0^1 w^2 dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Preuve. Dérivons la fonctionnelle I_4 :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &= J\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w_t(y) dy \right) \varphi_t dx + J\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_{tt} dx \\ &\quad + Jk_1 \int_0^1 \theta_t \varphi dx + Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx + \frac{mJk_1}{c} \int_0^1 \varphi_t \varphi dx, \end{aligned}$$

en utilisant la deuxième, la troisième et la quatrième équation du système (2.1.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 I_4'(t) &= Jk_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx - k_3 J \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_t dx - Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx \\
 &\quad - Jd \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \alpha \gamma \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_{xx} dx \\
 &\quad - \alpha b \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) u_x dx - \alpha \xi \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi dx \\
 &\quad - d\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) w_x dx + \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \theta dx \\
 &\quad + Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx + \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u_t \varphi_x dx - \frac{Jk_1^2}{c} \int_0^1 w_x \varphi dx.
 \end{aligned}$$

Par une simple intégration par parties, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 I_4'(t) &= -dJ \int_0^1 \varphi_t^2 dx + Jk_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx - k_3 J \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_t dx \\
 &\quad - \alpha d \int_0^1 w \varphi_x dx + d\alpha \int_0^1 w^2 dx - \alpha b \int_0^1 \int_0^x w u dx \\
 &\quad - \alpha \xi \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi dx + \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \theta dx \\
 &\quad + \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u_t \varphi_x dx - \frac{Jk_1^2}{c} \int_0^1 w_x \varphi dx.
 \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Grâce à l'inégalité de Young et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz's, nous avons :

$$\begin{aligned}
 Jk_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx &\leq \frac{dJ}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx, \\
 -k_3 J \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_t dx &\leq \frac{dJ}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx, \\
 -\alpha d \int_0^1 w \varphi_x dx &\leq \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{c_0}{\delta_1} \int_0^1 w_x^2 dx, \\
 -\alpha \xi \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi dx &\leq \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{c_0}{\delta_1} \int_0^1 w_x^2 dx,
 \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
 -\alpha b \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) u_x dx &\leq \delta_2 \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{c_0}{\delta_2} \int_0^1 w^2 dx, \\
 \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \theta dx &\leq \delta_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{c_0}{\delta_3} \int_0^1 w^2 dx, \\
 \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u_t \varphi_x dx &\leq \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{c_0}{\delta_1} \int_0^1 u_t^2 dx, \\
 -\frac{Jk_1^2}{c} \int_0^1 w_x \varphi dx &\leq \frac{\delta_1}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{c_0}{\delta_1} \int_0^1 w_x^2 dx.
 \end{aligned}$$

En remplaçant les estimations précédentes dans (2.3.18), on obtient le résultat désiré. ■

Maintenant, pour établir le résultat principal de ce travail, on introduit la fonctionnelle de Lyapunov :

$$F(t) = NE(t) + N_1 I_1(t) + N_2 I_2(t) + N_3 I_3(t) + N_4 I_4(t) \tag{2.3.19}$$

Preuve du Théorème (2.3.1) :

Preuve. En tenant compte les relations (2.3.3), (2.3.11), (2.3.13), (2.3.15) et (2.3.17), on obtient :

$$F'(t) \leq -c_w \int_0^1 w^2 dx - c_{w_x} \int_0^1 w_x^2 dx - c_{\varphi_t} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - c_{u_x} \int_0^1 u_x^2 dx - c_{\varphi_x} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - c_\varphi \int_0^1 \varphi^2 dx - c_{u_t} \int_0^1 u_t^2 dx - c_\theta \int_0^1 \theta^2 dx, \forall t \geq 0, \quad (2.3.20)$$

où

$$\begin{aligned} c_{w_x} &= k_2 N - c_0 N_4 \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right) - c_0 N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right), \\ c_w &= N k_3 - N_1 c_0 - c_0 N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right) - N_4 c_0 \left(1 + \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_3}\right), \\ c_{u_t} &= N \tau - N_1 c_0 - N_2 \rho - c_0 N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right) - N_4 \frac{c_0}{\delta_1}, \\ c_{\varphi_t} &= \frac{dJ}{2} N_4 - \varepsilon_2 N_3 - N_1 c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right), \\ c_\theta &= \frac{k_1 c}{2} N_3 - c_0 N_2 - \delta_3 N_4 - N_1 c_0, \\ c_{\varphi_x} &= \frac{\delta}{2} N_1 - \varepsilon_2 N_3 - \delta_1 N_4, \\ c_\varphi &= \frac{\mu_1}{2} N_1 - N_2 c_0 - \varepsilon_2 N_3 - \delta_1 N_4, \\ c_{u_x} &= \frac{\mu}{2} N_2 - \delta_2 N_4. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Pour $\varepsilon_2 = \frac{1}{N_3}$, $N_2 = 1$, $\delta_1 = \frac{1}{N_4}$, $\delta_2 = \frac{\mu N_1}{4}$ et $\delta_3 = \frac{k_1 c N_3}{4 N_4}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} c_{w_x} &= k_2 N - c_0 N_4 (1 + N_4) - c_0 N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right), \quad c_{u_x} = \frac{\mu}{4}, \\ c_w &= N k_3 - N_1 c_0 - c_0 N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right) - N_4 c_0 \left(1 + \frac{4}{\mu N_1} + \frac{4 N_4}{k_1 c N_3}\right), \\ c_{u_t} &= N \tau - N_1 c_0 - \rho - c_0 N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right) - N_4^2 c_0, \\ c_{\varphi_t} &= \frac{dJ}{2} N_4 - N_1 c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - 1, \quad c_{\varphi_x} = \frac{\delta}{2} N_1 - 2, \\ c_\theta &= \frac{k_1 c}{4} N_3 - c_0 - N_1 c_0, \quad c_\varphi = \frac{\mu_1}{2} N_1 - c_0 - 2, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Maintenant, nous devons choisir nos coefficients d'une manière appropriée. Tout d'abord, nous choisissons N_1 assez grand pour que :

$$\begin{aligned} N_1 &> \frac{4}{\delta}, \\ \frac{\mu_1}{2} N_1 - c_0 - 2 &> 0, \end{aligned}$$

ensuite, nous sélectionnons N_3 suffisamment grand tel que :

$$\frac{k_1 c}{4} N_3 - c_0 - N_1 c_0 > 0,$$

et

$$\frac{dJ}{2}N_4 - N_1c \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - 1,$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que :

$$\begin{aligned} Nk_3 - N_1c_0 - c_0N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right) - N_4c_0 \left(1 + \frac{4}{\mu N_1} + \frac{4N_4}{k_1cN_3}\right) &> 0, \\ N\tau - N_1c_0 - \rho - c_0N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right) - N_4^2c_0 &> 0, \\ k_2N - c_0N_4(1 + N_4) - c_0N_3 \left(1 + \frac{c_0}{\varepsilon_2}\right) &> 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, (2.3.20) prend la forme :

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\beta_1 \int_0^L [u_t^2 + \varphi_t^2 + \theta^2 + w^2 + (u_x + \varphi)^2 + \varphi_x^2] dx \\ &\leq -\beta_2 E(t), \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

pour certaines constantes positives β_1 et β_2 .

En combinant (2.3.23) et le côté droit de la relation (2.3.8), nous concluons que :

$$F'(t) \leq -d_1 F(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{2.3.24}$$

pour une certaine constante $d_1 = \frac{\beta_2}{\kappa_2}$ positive.

Ensuite, par une simple intégration de (2.3.24), nous obtenons :

$$F(t) \leq F(0)e^{-d_1 t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.3.25}$$

On utilise une deuxième fois l'équivalence de $E \sim F$, on trouve :

$$E(t) \leq CE(0)e^{-d_1 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

D'où le résultat souhaité. ■

Étude de la stabilité exponentielle d'un système linéaire poreux-élastique avec effets micro-températures

3.1 Position du problème

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude d'un système poreux-élastique dans un domaine unidimensionnel qui est le même système étudié dans le premier chapitre, mais cette fois-ci avec une dissipation due à l'effet des micro-températures seulement dans l'absence de l'amortissement de friction. Ce système se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = 0, & (0, 1) \times (0, \infty) \\ J\varphi_{tt} - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + dw_x - m\theta = 0, & (0, 1) \times (0, \infty) \\ c\theta_t + \gamma u_{tx} + m\varphi_t + k_1 w_x = 0, & (0, 1) \times (0, \infty) \\ \alpha w_t - k_2 w_{xx} + k_3 w + k_1 \theta_x + d\varphi_{tx} = 0, & (0, 1) \times (0, \infty) \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

Nous complétons le système (3.1.1) par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(1, t) = \varphi(0, t) = \varphi(1, t) = 0, & t > 0, \\ \theta(0, t) = \theta(1, t) = w_x(0, t) = w_x(1, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (3.1.2)$$

et les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u^1(x), \quad \varphi(x, 0) = \varphi^0(x), & x \in (0, 1), \\ \varphi_t(x, 0) = \varphi^1(x), \quad w(x, 0) = w^0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.1.3)$$

où $u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1, w^0, \theta^0$ sont des fonctions données.

L'objectif principal de ce chapitre est d'établir la stabilité exponentielle du système (3.1.1). Plus précisément, nous prouvons qu'une dissipation unique donnée par les micro-températures est suffisamment forte pour produire une stabilité exponentielle si et seulement si les coefficients du système vérifient la relation :

$$\chi_1 = \chi - \frac{\gamma^2}{c\rho} = 0, \quad (3.1.4)$$

où :

$$\chi = \frac{\mu}{\rho} - \frac{\delta}{J}, \quad (3.1.5)$$

qui est un nouveau nombre de stabilité.

Il est clair que cette relation entre les coefficients implique que :

$$c\mu > \gamma^2. \quad (3.1.6)$$

Entre-temps, à partir de la première équation du système (3.1.1) et les conditions aux limites, on obtient :

$$\rho \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.1.7)$$

Remarquons que l'équation (3.1.7) est une équation différentielle ordinaire qui possède d'après la théorie classique des EDO une solution qui est la suivante :

$$\int_0^1 u(x, t) dx = t \int_0^1 u^1(x, t) dx + \int_0^1 u^0(x) dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.1.8)$$

Par conséquent, si nous fixons :

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) - t \int_0^1 u^1 dx - \int_0^1 u^0 dx, \quad \forall t \geq 0, x \in [0, 1], \quad (3.1.9)$$

on trouve :

$$\int_0^1 \bar{u}(x, t) dx = 0, \forall t \geq 0. \quad (3.1.10)$$

Maintenant, à partir de la quatrième équation du système (3.1.1) et les conditions aux limites, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 w(x, t) dx + \frac{k_3}{\alpha} \int_0^1 w(x, t) dx = 0, \forall t \geq 0, \quad (3.1.11)$$

ainsi,

$$\int_0^1 w(x, t) dx = \left(\int_0^1 w^0(x) dx \right) e^{-\frac{t}{\alpha} k_3}, \forall t \geq 0. \quad (3.1.12)$$

Donc, si nous mettons :

$$\bar{w}(x, t) = w(x, t) - \left(\int_0^1 w^0(x) dx \right) e^{-\frac{t}{\alpha} k_3}, \forall t \geq 0, x \in [0, 1], \quad (3.1.13)$$

nous obtenons :

$$\int_0^1 \bar{w}(x, t) dx = 0, \forall t \geq 0. \quad (3.1.14)$$

Il est clair que l'utilisation de l'inégalité de Poincaré pour u et w est justifiée. En outre, $(\bar{u}, \varphi, \theta, \bar{w})$ satisfait les mêmes équations et les données initiales de u et w dans le système (3.1.1). Dans ce qui suit, nous allons travailler avec \bar{u} et \bar{w} , mais pour simplifier les notations, nous écrivons u et w au lieu de \bar{u} et \bar{w} .

3.2 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1.1)-(3.1.3), en utilisant la théorie des semi-groupes. Ainsi, si nous désignons $U = (u, v, \varphi, \psi, \theta, w)^T$, où $v = u_t$ et $\psi = \varphi_t$, alors le système (3.1.1)-(3.1.3) prend la forme :

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}U = 0, & t > 0, \\ U(x, 0) = U_x(0) = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, w_0)^T, \end{cases}$$

où l'opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est défini comme suit :

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} -v \\ \frac{-\mu}{\rho}u_{xx} - \frac{b}{\rho}\varphi_x + \frac{\gamma}{\rho}\theta_x \\ -\psi \\ \frac{-\delta}{J}\varphi_{xx} - \frac{b}{J}u_x + \frac{\xi}{J}\varphi + \frac{d}{J}w_x - \frac{m}{J}\theta \\ \frac{\gamma}{c}v_x + \frac{m}{c}\psi + \frac{k_1}{c}w_x \\ \frac{-k_2}{\alpha}w_{xx} + \frac{k_3}{\alpha}w + \frac{k_1}{\alpha}\theta_x + \frac{d}{\alpha}\psi_x \end{pmatrix}, \quad (3.2.1)$$

tel que \mathcal{H} est l'espace énergétique donné par :

$$\mathcal{H} := \{H_*^1(0,1) \times L_*^2(0,1) \times H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L_*^2(0,1)\}$$

où

$$L_*^2(0,1) = \left\{ \varphi \in L^2(0,1) : \int_0^1 \varphi(x) dx = 0 \right\}, \quad H_*^1(0,1) = H^1(0,1) \cap L_*^2(0,1).$$

Nous équipons l'espace \mathcal{H} avec le produit scalaire défini par :

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = & \rho \int_0^1 v \tilde{v} dx + \mu \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + J \int_0^1 \psi \tilde{\psi} dx + b \int_0^1 (u_x \tilde{\varphi} + \tilde{u}_x \varphi) dx \\ & + \xi \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \alpha \int_0^1 w \tilde{w} dx + \delta \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi}_x dx + c \int_0^1 \theta \tilde{\theta} dx. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Remarque 3.2.1 *Sous l'hypothèse $\mu\xi > b^2$, il est facile de voir que la relation (3.2.2) définit un produit scalaire. Plus précisément, à partir de (2.1.2), nous avons :*

$$\begin{aligned} \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} = & \rho \int_0^1 v^2 dx + J \int_0^1 \psi^2 dx + \mu \int_0^1 u_x \tilde{u}_x dx + \tilde{\psi} dx + b \int_0^1 (u_x \tilde{\varphi} + \tilde{u}_x \varphi) dx \\ & + \xi \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi} dx + \alpha \int_0^1 w \tilde{w} dx + \delta \int_0^1 \varphi \tilde{\varphi}_x dx + c \int_0^1 \theta \tilde{\theta} dx. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\mu\xi > b^2$, nous arrivons à :

$$\langle U, U \rangle_{\mathcal{H}} > \rho \int_0^1 v^2 dx + J \int_0^1 \psi^2 dx + \alpha \int_0^1 w^2 dx + \delta \int_0^1 \varphi^2 dx + \mu \int_0^1 \left(u_x + \frac{b}{\mu} \varphi \right)^2 dx.$$

Ainsi, nous concluons que $\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}}$ définit un produit scalaire sur \mathcal{H} et que la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ est équivalente à la norme habituelle.

Le domaine de \mathcal{A} est donné par :

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = & \{U \in \mathcal{H} / u \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1), v \in H_*^1(0,1), \\ & \varphi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), \psi \in H_0^1(0,1), \theta \in H_0^1(0,1), \\ & w \in H_*^2(0,1) \cap H_*^1(0,1)\}, \end{aligned}$$

où

$$H_*^2(0,1) := \{\Psi \in H^2(0,1) : \Psi_x(0) = \Psi_x(1) = 0\}.$$

Il est clair que $D(\mathcal{A})$ dense dans \mathcal{H} . Maintenant, nous pouvons donner le résultat d'existence et d'unicité qui est le suivant.

Théorème 3.2.1 *Soit $(w, \varphi, u, \psi, \theta, q)^T \in \mathcal{H}$. Pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathcal{H}$, il existe une solution unique $U \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ du problème (3.1.1)-(3.1.3). De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors*

$$U \in C(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

Preuve. Nous devons d'abord prouver que \mathcal{A} est un opérateur monotone maximal. Pour tout $U \in D(\mathcal{A})$, et en utilisant l'équation (3.2.2), nous obtenons :

$$\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = k_3 \int_0^1 w^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx \geq 0. \quad (3.2.3)$$

Par conséquent, l'opérateur \mathcal{A} est monotone. Maintenant, nous montrons que l'opérateur $(I + \mathcal{A})$ est surjectif. Pour tout $k = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6)^T \in \mathcal{H}$, nous prouvons qu'il existe $U \in D(\mathcal{A})$ tel que :

$$(I + \mathcal{A})U = K. \quad (3.2.4)$$

Le problème (3.2.4) conduit à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u - v = \eta_1 \in H_*^1(0,1), \\ \rho v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = \rho\eta_2 \in L_*^2(0,1), \\ \varphi - \psi = \eta_3 \in H_0^1(0,1), \\ J\psi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + dw_x - m\theta = J\eta_4 \in L^2(0,1), \\ c\theta + \gamma v_x + m\psi + k_1 w_x = c\eta_5 \in L^2(0,1), \\ \alpha_1 w - k_2 w_{xx} + k_1 \theta_x + d\psi_x = \alpha\eta_6 \in L_*^2(0,1), \alpha_1 = \alpha + \eta_3. \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

L'insertion de $v = u - \eta_1$, $\psi = \varphi - \eta_3$ dans (3.2.5)₂, (3.2.5)₄, (3.2.5)₅ et (3.2.5)₆, nous donne :

$$\begin{cases} \rho u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \gamma\theta_x = h_1 \in L_*^2(0, 1), \\ \mu_3\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + dw_x - m\theta = h_2 \in L^2(0, 1), \\ c\theta + \gamma u_x + m\varphi + k_1 w_x = h_3 \in L^2(0, 1), \\ \alpha_1 w - k_2 w_{xx} + k_1\theta_x + d\varphi_x = h_4 \in L_*^2(0, 1), \end{cases} \quad (3.2.6)$$

où

$$\begin{aligned} h_1 &= \rho(\eta_2 + \eta_1), & h_3 &= c\eta_5 + \gamma\eta_{1x} + m\eta_3, \\ h_2 &= J(\eta_3 + \eta_4), & h_4 &= \alpha\eta_6 + d\eta_{3x}, \\ \mu_3 &= J + \xi. \end{aligned}$$

Pour résoudre le système (3.2.6), nous introduisons la formulation variationnelle suivante :

$$B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)) = \mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1), \quad (3.2.7)$$

où

$$B = [H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)]^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

est la forme bilinéaire définie par :

$$\begin{aligned} &B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)) \\ &= \rho \int_0^1 uu_1 dx + \mu \int_0^1 u_x u_{1x} dx + \mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx \\ &+ c \int_0^1 \theta \theta_1 dx + \alpha_1 \int_0^1 w w_1 dx + \eta_2 \int_0^1 w_x w_{1x} dx + \gamma \int_0^1 (u_x \theta_1 + u_1 \theta_x) dx \\ &+ b \int_0^1 (u_x \varphi_1 + \varphi u_{1x}) dx + d \int_0^1 (w_x \varphi_1 + \varphi_x w_1) dx \\ &+ \eta_1 \int_0^1 (w_x \theta_1 + w_1 \theta_x) dx + m \int_0^1 (\varphi \theta_1 + \varphi_1 \theta) dx, \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{G} : [H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)]^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

est la forme linéaire donnée par :

$$\mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1) = \int_0^1 h_1 u_1 dx + \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx + \int_0^1 h_3 \theta_1 dx + \int_0^1 h_4 w_1 dx .$$

Soit $V = \{H_*^1(0, 1) \times H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)\}$ équipé de la norme:

$$\|(u, \varphi, \theta, w)\|_V^2 = \|u\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi_x\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|w\|_2^2 + \|w_x\|_2^2,$$

alors, nous pouvons facilement prouver que :

$$|B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))| \geq M_0 \|(u, \varphi, \theta, w)\|_V^2,$$

où $M_0 = \{\rho, \delta, c, \alpha_1, l_1, l_2\}$, $l_1 = \frac{1}{2} \left(\mu - \frac{b^2}{\mu_3} \right) > 0$ et $l_2 = \frac{1}{2} \left(\mu_3 - \frac{b^2}{\mu} \right) > 0$.

Ainsi, B est coercive. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} & |B((u, \varphi, \theta, w), (u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1))| \\ & \leq \zeta_1 \|(u, \varphi, \theta, w)\|_V \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)\|_V, \quad \zeta_1 > 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que B est continue. De même, nous montrons que :

$$|\mathcal{G}(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)| \leq \zeta_2 \|(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1)\|_V, \quad \zeta_2 > 0.$$

En appliquant le Théorème de Lax-Milgram, nous déduisons que pour tout $(u_1, \varphi_1, \theta_1, w_1) \in V$, le problème (3.2.7) admet une solution unique $(u, \varphi, \theta, w) \in V$. De plus, si nous prenons : $(\varphi_1, \theta_1, w_1) \equiv (0, 0, 0) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$, alors l'équation (3.2.7) se réduit à :

$$\begin{aligned} & \rho \int_0^1 uu_1 dx + \mu \int_0^1 u_x u_{1x} dx + \gamma \int_0^1 u_1 \theta_x dx + b \int_0^1 \varphi u_{1x} dx \\ & = \int_0^1 h_1 u_1 dx, \quad \forall u_1 \in H_*^1(0, 1). \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

En outre, l'équation (3.2.8) est également vraie pour tout $\Psi \in C^1([0, 1]) \subset H_*^1(0, 1)$. Par conséquent, nous avons :

$$\mu \int_0^1 u_x \Psi_x dx = \int_0^1 (h_1 - \rho u - \gamma \theta_x + b \varphi_x) \Psi, \quad \forall \Psi \in C^1([0, 1]).$$

Ainsi, en utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$u_x(1) \Psi(1) - u_x(0) \Psi(0) = 0 \quad \forall \Psi \in C^1([0, 1]).$$

Donc,

$$u_x(1) = u_x(0) = 0.$$

En conséquence, nous obtenons :

$$u \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1).$$

Si nous choisissons $(\varphi_1, \theta_1, w_1) \equiv (0, 0, 0) \in H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)$, dans l'équation (3.2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_3 \int_0^1 \varphi \varphi_1 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx + b \int_0^1 u_x \varphi_1 dx + d \int_0^1 w_x \varphi_1 dx - m \int_0^1 \theta \varphi_1 dx \\ = \int_0^1 h_2 \varphi_1 dx, \quad \forall \varphi_1 \in H_*^1(0, 1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{1x} dx = \int_0^1 (h_2 - \mu_3 \varphi - bu_x - dw_x + m\theta) \varphi_1 dx, \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(0, 1). \quad (3.2.9)$$

En constatant que :

$$h_2 - \mu_3 \varphi - bu_x - dw_x + m\theta \in L^2(0, 1),$$

puis :

$$\varphi \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1),$$

et par conséquent, l'équation (3.2.9) prend la forme :

$$\int_0^1 (h_2 + \delta \varphi_{xx} - \mu_3 \varphi - bu_x - dw_x + m\theta) \varphi_1 dx = 0, \quad \forall \varphi_1 \in H_0^1(0, 1).$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\mu_3 \varphi - \delta \varphi_{xx} + bu_x + dw_x - m\theta = h_2.$$

Cela nous donne l'équation (3.2.1). De même, nous pouvons montrer que :

$$\theta \in H_0^1(0, 1), w \in H_*^2(0, 1) \cap H_*^1(0, 1),$$

il existe donc $U \in D(\mathcal{A})$ tel que l'équation (3.2.4) est vraie. Par conséquent, l'opérateur \mathcal{A} est maximal.

Nous concluons donc que \mathcal{A} est un opérateur monotone maximal. Ainsi, \mathcal{A} est le générateur infinitésimal de C_0 -semi-groupe de contractions sur \mathcal{H} . Par conséquent, le résultat cité dans le Théorème 3.2.1 est donné par le Théorème de Hille-Yoshida. ■

3.3 Stabilité exponentielle

Dans cette section, nous commençons par introduire certaines fonctionnelles et établir quelques lemmes pour prouver le résultat de la stabilité exponentielle du système linéaire poreux-élastique (3.1.1).

Lemme 3.3.1 *Soit (u, φ, θ, w) la solution du système (3.1.1)-(3.1.3). Alors la fonctionnelle d'énergie E , définie par :*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [pu_t^2 + J\varphi_t^2 + \mu u_x^2 + c\theta^2 + \alpha w^2 + \delta\varphi_x^2 + \xi\varphi^2 + 2bu_x\varphi] dx, \quad (3.3.1)$$

satisfait l'identité :

$$E'(t) = -k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.2)$$

Preuve. En multipliant les équations du problème (3.1.1) respectivement par $u_t, \varphi_t, \theta, w$, et on intègre sur $[0,1]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \int_0^1 u_{tt}u_t dx - \mu \int_0^1 u_{xx}u_t dx - b \int_0^1 \varphi_x u_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_t dx = 0, \\ J \int_0^1 \varphi_{tt}\varphi_t dx - \delta \int_0^1 \varphi_{xx}\varphi_t dx + b \int_0^1 u_x \varphi_t dx + \xi \int_0^1 \varphi \varphi_t dx + d \int_0^1 w_x \varphi_t dx - m \int_0^1 \theta \varphi_t dx = 0, \\ c \int_0^1 \theta_t \theta dx + \gamma \int_0^1 u_{tx} \theta dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx + k_1 \int_0^1 w_x \theta dx = 0, \\ \alpha \int_0^1 w_t w dx - k_2 \int_0^1 w_{xx} w dx + k_3 \int_0^1 w w dx + k_1 \int_0^1 \theta_x w dx + d \int_0^1 \varphi_{tx} w dx = 0, \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

puis, en utilisant l'intégration par parties sur l'intervalle $[0,1]$ avec les conditions aux limites, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u_x^2 dx - b \int_0^1 \varphi_x u_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x u_t dx = 0, \\ \frac{J}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + b \int_0^1 u_x \varphi_t dx + \frac{\xi}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi^2 dx + d \int_0^1 w_x \varphi_t dx - m \int_0^1 \theta \varphi_t dx = 0, \\ \frac{c}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta^2 dx - \gamma \int_0^1 u_t \theta_x dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx + k_1 \int_0^1 w_x \theta dx = 0, \\ \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 w^2 dx + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + k_3 \int_0^1 w^2 dx - k_1 \int_0^1 w_x \theta dx - d \int_0^1 w_x \varphi_t dx = 0. \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

Ainsi, la sommation des quatre équations du système (3.3.4) nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 [pu_t^2 + J\varphi_t^2 + \mu u_x^2 + c\theta^2 + \alpha w^2 + \delta\varphi_x^2 + \xi\varphi^2 + 2bu_x\varphi] dx \\ & + k_2 \int_0^1 w_x^2 dx + k_3 \int_0^1 w^2 dx = 0, \end{aligned}$$

si on note la fonctionnelle d'énergie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 [pu_t^2 + J\varphi_t^2 + \mu u_x^2 + c\theta^2 + \alpha w^2 + \delta\varphi_x^2 + \xi\varphi^2 + 2bu_x\varphi] dx,$$

la dérivée de l'énergie sera donnée par :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -k_2 \int_0^1 w_x^2 dx - k_3 \int_0^1 w^2 dx.$$

■

Lemme 3.3.2 Soit (u, φ, θ, w) la solution du système (3.1.1)-(3.1.3). Alors la fonctionnelle I_1 , définie par :

$$I_1(t) = -\rho \int_0^1 u_t u dx, \quad t \geq 0, \quad (3.3.5)$$

satisfait l'estimation :

$$I_1'(t) \leq -\rho \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{3\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + c_0 \int_0^1 (\varphi^2 + \theta^2) dx, \quad (3.3.6)$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve. En dérivant la fonctionnelle I_1 , et en utilisant la première équation du système (3.1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= -\rho \int_0^1 u_t^2 dx - \rho \int_0^1 u_{tt} u dx \\ &= -\rho \int_0^1 u_t^2 dx - \int_0^1 [\mu u_{xx} + b\varphi_x - \gamma\theta_x] u dx \\ &= -\rho \int_0^1 u_t^2 dx + \mu \int_0^1 u_x^2 dx + b \int_0^1 \varphi u_x dx - \gamma \int_0^1 \theta u_x dx. \end{aligned}$$

Une application de l'inégalité de Young donne le résultat souhaité. ■

Lemme 3.3.3 Soit (u, φ, θ, w) une solution du système (3.1.1)-(3.1.3). Alors la fonctionnelle I_2 , définie par :

$$I_2(t) = J \int_0^1 \varphi_t \varphi dx - \frac{b\mu}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi(y) dy \right) dx, \quad t \geq 0, \quad (3.3.7)$$

satisfait pour un certain $\varepsilon_1 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned} I_2'(t) &\leq -\frac{\delta}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \mu_1 \int_0^1 \varphi^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx \\ &\quad + c_0 \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

où $\mu_1 = \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right)$.

Preuve. La dérivation de la fonctionnelle I_2 nous donne :

$$I_2'(t) = J \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi dx + J \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx \\ - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_{tt} \left(\int_0^x \varphi(y) dy \right) dx.$$

Si on utilise l'intégration par parties, on trouve :

$$I_2'(t) = -\delta \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right) \int_0^1 \varphi^2 dx + J \int_0^1 \varphi_t^2 dx + d \int_0^1 w \varphi_x dx \\ - \frac{bp}{\mu} \int_0^1 u_t \left(\int_0^x \varphi_t(y) dy \right) dx + m \int_0^1 \theta \varphi dx - \frac{b\gamma}{\mu} \int_0^1 \theta \varphi dx.$$

En rappelant les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz's, nous obtenons :

$$I_2'(t) \leq -\frac{\delta}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right) \int_0^1 \varphi^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx \\ + c_0 \int_0^1 \theta^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \int_0^1 \varphi_t^2 dx,$$

qui est exactement l'estimation donnée par (3.3.8) avec $\mu_1 = \left(\xi - \frac{b^2}{\mu} \right)$. ■

Lemme 3.3.4 *Soit*

$$I_3(t) = \frac{p\delta}{b} \int_0^1 u_t \varphi_x dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^1 u_x \varphi_t dx - \frac{J\gamma}{b} \int_0^1 \varphi_t \theta dx, \quad t \geq 0, \quad (3.3.9)$$

et soit (u, φ, θ, w) solution du système (3.1.1)-(3.1.3). Alors, nous avons pour tout $\varepsilon_2 > 0$, l'estimation :

$$I_3'(t) \leq -\frac{\mu}{2} \int_0^1 u_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 \varphi_x^2 dx + c_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx \\ + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{pJ}{b} \left(\varkappa - \frac{\gamma^2}{cp} \right) \int_0^1 \varphi_{tx} u_t dx, \quad t \geq 0. \quad (3.3.10)$$

Preuve. La dérivation de la fonctionnelle I_3 donne :

$$I_3'(t) = \frac{p\delta}{b} \int_0^1 u_{tt} \varphi_x dx + \frac{p\delta}{b} \int_0^1 u_t \varphi_{tx} dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^1 u_{tx} \varphi_t dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^1 u_x \varphi_{tt} dx \\ - \frac{J\gamma}{b} \int_0^1 \varphi_{tt} \theta dx - \frac{J\gamma}{b} \int_0^1 \varphi_t \theta_t dx$$

$$I_3'(t) = \frac{\delta}{b} \int_0^1 [\mu u_{xx} + b \varphi_x - \gamma \theta_x] \varphi_x dx + \frac{p\delta}{b} \int_0^1 u_t \varphi_{tx} dx + \frac{J\mu}{b} \int_0^1 u_{tx} \varphi_t dx \\ + \frac{\mu}{b} \int_0^1 u_x [\delta \varphi_{xx} - b u_x - \xi \varphi - d w_x + m \theta] dx - \frac{J\gamma}{b} \int_0^1 \varphi_t \theta_t dx \\ - \frac{\gamma}{b} \int_0^1 [\delta \varphi_{xx} - b u_x - \xi \varphi - d w_x + m \theta] \theta dx.$$

$$I_3'(t) = -\mu \int_0^1 u_x^2 dx + \delta \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \frac{\mu\xi}{b} \int_0^1 \varphi u_x dx - \frac{\mu d}{b} \int_0^1 w_x u_x dx \\ + \frac{pJ}{b} \left(\frac{\gamma}{J} - \frac{\mu}{\rho} - \frac{\gamma^2}{cp} \right) \int_0^1 \varphi_{tx} u_t dx + \left(\gamma + \frac{\mu m}{b} \right) \int_0^1 \theta u_x dx \\ + \frac{\gamma\xi}{b} \int_0^1 \varphi \theta dx + \frac{\gamma d}{b} \int_0^1 \theta w_x dx - \frac{\gamma m}{b} \int_0^1 \theta^2 dx \\ + \frac{\gamma m J}{bc} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\gamma k_1 J}{bc} \int_0^1 w_x \varphi_t dx.$$

Ainsi, par l'application de l'inégalité de Young, nous aurons :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu\xi}{b} \int_0^1 \varphi u_x dx &\leq \frac{\mu}{6} \int_0^1 u_x^2 dx + c_0 \int_0^1 \varphi_x^2 dx, \\ -\frac{\mu d}{b} \int_0^1 w_x u_x dx &\leq \frac{\mu}{6} \int_0^1 u_x^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx, \\ \left(\gamma + \frac{\mu m}{b}\right) \int_0^1 \theta u_x dx &\leq \frac{\mu}{6} \int_0^1 u_x^2 dx + c_0 \int_0^1 \theta^2 dx, \end{aligned}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma\xi}{b} \int_0^1 \varphi \theta dx &\leq \varepsilon_2 \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_2} \int_0^1 \theta^2 dx, \\ \frac{\gamma d}{b} \int_0^1 \theta w_x dx &\leq c_0 \left(\int_0^1 w_x^2 dx + c_0 \int_0^1 \theta^2 dx \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\gamma k_1 J}{bc} \int_0^1 w_x \varphi_t dx \leq c_0 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx,$$

en combinant les estimations ci-dessus, on obtient le résultat désiré. ■

Lemme 3.3.5 Soit (u, φ, θ, w) la solution du système (3.1.1)-(3.1.3). Alors la fonctionnelle I_4 , définie par :

$$I_4(t) = c\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \theta dx, \quad t \geq 0, \quad (3.3.11)$$

satisfait pour un certain $\varepsilon_3 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &\leq -\frac{k_1 c}{2} \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 u_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx \\ &\quad + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \int_0^1 w^2 dx - dc \int_0^1 \theta \varphi_t dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Preuve. La dérivation de la fonctionnelle I_4 nous donne :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &= ck_2 \int_0^1 \theta \left(\int_0^x w_{yy}(y) dy \right) dx - ck_3 \int_0^1 \theta \left(\int_0^x w(y) dy \right) dx \\ &\quad - ck_1 \int_0^1 \theta \left(\int_0^x \theta_y(y) dy \right) dx - dc \int_0^1 \theta \left(\int_0^x \varphi_{ty}(y) dy \right) dx \\ &\quad - \alpha\gamma \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) u_{tx} dx - \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx \\ &\quad - \alpha k_1 \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) w_x dx, \end{aligned}$$

en intégrant par parties, et en utilisant la condition $\int_0^1 w dx = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &= -k_1 c \int_0^1 \theta^2 dx - \alpha k_1 \int_0^1 w^2 dx + k_2 c \int_0^1 w_x \theta dx \\ &\quad - dc \int_0^1 \theta \varphi_t dx - k_3 c \int_0^1 \theta \left(\int_0^x w(y) dy \right) dx + \alpha\gamma \int_0^1 u_t w dx \\ &\quad - \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Par l'application de les inégalités de Young et de Cauchy-Schwarz, nous aurons :

$$\begin{aligned} k_2 c \int_0^1 w_x \theta dx &\leq c_0 \int_0^1 w_x^2 dx + \frac{k_1 c}{4} \int_0^1 \theta^2 dx , \\ -k_3 c \int_0^1 \theta \left(\int_0^x w(y) dy \right) dx &\leq c_0 \int_0^1 w^2 dx + \frac{k_1 c}{4} \int_0^1 \theta^2 dx , \end{aligned}$$

et aussi,

$$\begin{aligned} \alpha \gamma \int_0^1 u_t w dx &\leq \varepsilon_3 \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 w^2 dx , \\ -\alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx &\leq \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 w^2 dx , \end{aligned}$$

En remplaçant les estimations précédentes dans (3.3.13), on trouve le résultat souhaité.

■

Lemme 3.3.6 *Soit (u, φ, θ, w) solution du système (3.1.1)-(3.1.3). Alors la fonctionnelle I_5 , définie par :*

$$\begin{aligned} I_5(t) = J\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_t dx &+ Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi dx + \frac{mJk_1}{2c} \int_0^1 \varphi^2 dx \\ &- \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u \varphi_x dx, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

satisfait pour un certain $\varepsilon_4 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned} I_5'(t) &\leq -\frac{dJ}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 u_x^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \theta^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ &+ \varepsilon_4 \int_0^1 \varphi^2 dx + c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 w^2 dx \\ &+ c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \int_0^1 w_x^2 dx + \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u_x \varphi_t dx, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Preuve. Dérivons la fonctionnelle I_5 :

$$\begin{aligned} I_5'(t) = J\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w_t(y) dy \right) \varphi_t dx &+ J\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w(y) dy \right) \varphi_{tt} dx \\ &+ Jk_1 \int_0^1 \theta_t \varphi dx + Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx + \frac{mJk_1}{c} \int_0^1 \varphi_t \varphi dx \\ &- \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u_t \varphi_x dx - \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u \varphi_{tx} dx, \end{aligned}$$

en utilisant la deuxième, la troisième et la quatrième équation du système (3.1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_5'(t) = Jk_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx &- k_3 J \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_t dx - Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx \\ &+ Jd \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \alpha \gamma \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_{xx} dx \\ &- \alpha b \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) u_x dx - \alpha \xi \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi dx \\ &- d\alpha \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) w_x dx + \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \theta dx \\ &+ Jk_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx + \frac{\gamma Jk_1}{c} \int_0^1 u_t \varphi_x dx - \frac{Jk_1^2}{c} \int_0^1 w_x \varphi dx. \end{aligned}$$

Par une simple intégration par parties, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 I'_5(t) &= -dJ \int_0^1 \varphi_t^2 dx + Jk_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx - k_3 J \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_t dx \\
 &\quad + \frac{\gamma J k_1}{c} \int_0^1 u_x \varphi_t dx - a\delta \int_0^1 w \varphi_x dx + d\alpha \int_0^1 w^2 dx \\
 &\quad - \alpha b \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) u_x dx - \alpha \xi \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi dx \\
 &\quad - \frac{Jk_1^2}{c} \int_0^1 w_x \varphi dx + \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \theta dx.
 \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Grâce à l'inégalité de Young et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz's, et pour un certain $\varepsilon_3 > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 Jk_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx &\leq \frac{dJ}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w_x^2 dx, \\
 -k_3 J \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi_t dx &\leq \frac{dJ}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + c_0 \int_0^1 w^2 dx, \\
 a\delta \int_0^1 w \varphi_x dx &\leq \varepsilon_3 \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 w^2 dx,
 \end{aligned}$$

aussi,

$$\begin{aligned}
 \alpha b \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) u_x dx &\leq \varepsilon_3 \int_0^1 u_x^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 w^2 dx, \\
 \alpha \xi \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \varphi dx &\leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 w^2 dx, \\
 -\frac{Jk_1^2}{c} \int_0^1 w_x \varphi dx &\leq \frac{\varepsilon_3}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 w_x^2 dx, \\
 \alpha m \int_0^1 \left(\int_0^x w dy \right) \theta dx &\leq \varepsilon_3 \int_0^1 \theta^2 dx + \frac{c_0}{\varepsilon_3} \int_0^1 w^2 dx.
 \end{aligned}$$

En sommant les estimations précédentes dans (3.3.16), on obtient le résultat désiré. ■

Lemme 3.3.7 *Soit (u, φ, θ, w) solution du système (3.1.1)-(3.1.3). Alors la fonctionnelle I_6 , définie par :*

$$I_6(t) = \frac{J}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{\xi}{2} \int_0^1 \varphi^2 dx, \quad t \geq 0, \tag{3.3.17}$$

satisfait pour $\delta_1 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned}
 I'_6(t) &\leq \delta_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c_0}{\delta_1} \int_0^1 w_x^2 dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx \\
 &\quad - b \int_0^1 u_x \varphi_t dx, \quad t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Preuve. La dérivation de la fonctionnelle I_6 et l'intégration par parties sur $[0, 1]$, conduisent à :

$$\begin{aligned} I'_6(t) &= J \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{tx} dx + \xi \int_0^1 \varphi \varphi_t dx \\ &= \int_0^1 [\delta \varphi_{xx} - b u_x - \xi \varphi - d w_x + m \theta] \varphi_t dx + \delta \int_0^1 \varphi_x \varphi_{tx} dx + \xi \int_0^1 \varphi \varphi_t dx \\ &= -b \int_0^1 u_x \varphi_t dx + m \int_0^1 \varphi_t \theta dx - d \int_0^1 w_x \varphi_t dx \end{aligned}$$

Le résultat souhaité s'en déduit d'après l'utilisation de l'inégalité de Young :

$$-d \int_0^1 w_x \varphi_t dx \leq \delta_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{c_0}{\delta_1} \int_0^1 w_x^2 dx.$$

■

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver le résultat principal de cette partie. D'abord, nous introduisons la fonctionnelle de Lyapunov :

$$\begin{aligned} F(t) &= NE(t) + I_1(t) + N_1 I_2(t) + N_2 I_3(t) + N_3 \frac{m}{dc} I_4(t) \\ &\quad + N_3 \frac{bc}{\gamma J k_1} I_5(t) + N_3 I_6(t). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Théorème 3.3.1 *Soit (u, φ, θ, w) la solution du problème défini par le système (3.1.1)-(3.1.3). Si les coefficients du système (3.1.1) satisfait la condition (3.1.4), alors (u, φ, θ, w) décroît exponentiellement, i.e., il existe deux constantes positives β_1 et β_2 indépendantes de telle sorte que :*

$$E(t) \leq \beta_1 E(0) e^{-\beta_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.20)$$

Preuve. En différenciant l'équation (3.3.19), puis en rappelant les estimations (3.3.2), (3.3.6), (3.3.8), (3.3.10), (3.3.12), (3.3.15) et (3.3.18), on trouve :

$$\begin{aligned} F'(t) \leq & - \left[k_2 N - c_0 N_2 - \frac{m}{dc} c_0 N_3 - \frac{bcc_0}{\gamma J k_1} N_3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) - \frac{c_0}{\delta_1} N_3 \right] \int_0^1 w_x^2 dx \\ & - \left[k_3 N - c_0 N_1 - \frac{m}{dc} c_0 N_3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) - \frac{bcc_0}{\gamma J k_1} N_3 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4} \right) \right] \int_0^1 w^2 dx \\ & - \left[\rho - \varepsilon_1 N_1 - \frac{m}{dc} N_3 \varepsilon_3 \right] \int_0^1 u_t^2 dx - \left[\mu_1 N_1 - \frac{bc}{\gamma J k_1} \varepsilon_4 N_3 - c_0 \right] \int_0^1 \varphi^2 dx \\ & - \left[\frac{\delta}{2} N_1 - \varepsilon_2 N_2 - \frac{bc}{\gamma J k_1} \varepsilon_4 N_3 \right] \int_0^1 \varphi_x^2 dx - \left[\frac{\mu}{2} N_2 - \frac{3\mu}{2} - \frac{bc}{\gamma J k_1} \varepsilon_4 N_3 \right] \int_0^1 u_x^2 dx \\ & - \left[\frac{dJbc}{2\gamma J k_1} N_3 + N_1 c_0 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) - c_0 N_2 - \delta_1 N_3 \right] \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ & - \left[\frac{k_1 cm}{2dc} N_3 - c_0 N_1 - \frac{c_0}{\varepsilon_2} N_2 - \frac{bc}{\gamma J k_1} \varepsilon_4 N_3 - c_0 \right] \int_0^1 \theta^2 dx. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Pour $\varepsilon_3 = \frac{\rho}{2c_0N_3}$, $\varepsilon_4 = \frac{1}{N_3}$ et $\delta_1 = \frac{c_0}{N_3}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F(t) \leq & -c_{w_x} \int_0^1 w_x^2 dx - c_w \int_0^1 w^2 dx - c_{\varphi_t} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - c_{u_x} \int_0^1 u_x^2 dx \\ & - c_{\varphi_x} \int_0^1 \varphi_x^2 dx - c_\varphi \int_0^1 \varphi^2 dx - c_{u_t} \int_0^1 u_t^2 dx - c_\theta \int_0^1 \theta^2 dx, \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

où

$$\begin{aligned} c_{w_x} &= k_2N - c_0N_2 - \frac{m}{dc}c_0N_3 - \frac{bcc_0}{\gamma Jk_1}N_3(1+N_3) - c_0N_3^2, \\ c_w &= k_3N - c_0N_1 - \frac{m}{dc}c_0N_3(1+N_3) - \frac{bcc_0}{\gamma Jk_1}N_3(1+N_3), \\ c_{\varphi_t} &= \frac{dbc}{2\gamma k_1}N_3 + N_1c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - c_0N_2 - c_0, \\ c_\theta &= \frac{k_1m}{2d}N_3 - c_0N_1 - \frac{c_0}{\varepsilon_2}N_2 - c_0, \\ c_{\varphi_x} &= \frac{\delta}{2}N_1 - \varepsilon_2N_2 - c_0, \\ c_\varphi &= \mu_1N_1 - c_0, \\ c_{u_t} &= \frac{\rho}{4} - \varepsilon_1N_1, \\ c_{u_x} &= \frac{\mu}{2}N_2 - \frac{3\mu}{2} - c_0. \end{aligned}$$

A ce point, nous imposons les restrictions suivantes sur les coefficients. D'abord, nous choisissons :

$$\varepsilon_1 < \frac{\rho}{2N_1},$$

et, nous prenons ε_2 assez petit tel que :

$$\varepsilon_2 < \frac{\delta N_1}{4N_2}.$$

Ensuite, nous sélectionnons N_1 suffisamment grand tel que :

$$\begin{aligned} \mu_1N_1 - c_0 &> 0, \\ \frac{\delta}{4}N_1 - c_0 &> 0. \end{aligned}$$

N_2 assez grand tel que :

$$\frac{\mu}{2}N_2 - \frac{3\mu}{2} - c_0 > 0,$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dbc}{2\gamma k_1}N_3 + N_1c_0\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - c_0N_2 - c_0 &> 0, \\ \frac{k_1m}{2d}N_3 - c_0N_1 - \frac{c_0}{\varepsilon_2}N_2 - c_0 &> 0. \end{aligned}$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que :

$$\begin{aligned} k_2N - c_0N_2 - \frac{m}{dc}c_0N_3 - \frac{bcc_0}{\gamma Jk_1}N_3(1+N_3) - c_0N_3^2 &> 0, \\ k_3N - c_0N_1 - \frac{m}{dc}c_0N_3(1+N_3) - \frac{bcc_0}{\gamma Jk_1}N_3(1+N_3) &> 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, (3.3.21) prend la forme :

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -c_1 \int_0^L [u_t^2 + \varphi_t^2 + \theta^2 + w^2 + (u_x + \varphi)^2 + \varphi_x^2] dx \\ &\leq -c_2 E(t), \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

pour certaines constantes positives c_1 et c_2 .

En combinant (3.3.23) et le coté droit de la relation (2.3.8), nous concluons que :

$$F'(t) \leq -\beta_2 F(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.3.24}$$

pour une certaine constante $\beta_2 = \frac{c_2}{\kappa_2}$ positive.

Ensuite, par une simple intégration de (3.3.24), nous obtenons :

$$F(t) \leq F(0)e^{-\beta_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.3.25}$$

On utilise une deuxième fois l'équivalence de $E \sim F$, on trouve :

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\beta_2 t}, \quad \forall t \geq 0.$$

D'où le résultat désiré. ■

Étude de la stabilité générale d'un système thermoélastique de Bresse de type III.

4.1 Position du problème

Dans le domaine de la physique, le système de Bresse est également connu sous le nom du problème de l'arc circulaire qui décrit les vibrations d'une poutre plane et cisailable de type Bresse [27]. Ce système est composé de trois équations d'onde données par :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt}(x, t) = Q_x(x, t) + lN(x, t) + F_1(x, t), \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) = M_x(x, t) - Q(x, t) + F_2(x, t), \\ \rho_1 \omega_{tt}(x, t) = N_x(x, t) - lQ(x, t) + F_3(x, t), \end{cases} \quad (4.1.1)$$

où $F_i : (0, L) \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1..3$ désignent les forces extérieures qui jouent le rôle de contrôle dans le système. M est la force de cisaillement, Q signifie le moment de flexion et N représente la force axiale. Les fonctions ω, φ, ψ sont respectivement définies le déplacement longitudinal, vertical et d'angle de cisaillement. Les équations des lois

constitutives correspondantes sont les suivantes :

$$\begin{cases} M(x, t) = b\psi_x(x, t), \\ Q(x, t) = k(\varphi_x + \psi + l\omega)(x, t), \\ N(x, t) = k_0(\omega_x - l\varphi)(x, t). \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Ici,

$$\rho_1 = \rho A, \quad \rho_2 = \rho A, \quad k = k'GA, \quad k_0 = EA, \quad b = EI \text{ et } l = R^{-1}, \quad (4.1.3)$$

telle que ρ est la densité du matériau, E représente le module d'élasticité, G est le module de cisaillement, k' désigne le facteur de cisaillement, et A, I, R sont respectivement la surface de la section transversale, le deuxième moment de la surface de la section transversale et le rayon de courbure.

Au cours des années récentes, la stabilité du système de Bresse avec et sans termes mémoires a été étudiée par de nombreux chercheurs. Nous pouvons résumer certains résultats comme suit, en présence d'une dissipation de friction agissant par exemple sur l'angle de cisaillement, le semi groupe est exponentiellement stable si et seulement si les vitesses des ondes mécaniques sont égales :

$$\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \quad \text{et} \quad k = k_0. \quad (4.1.4)$$

Plus précisément, dans [32] les auteurs ont étudié un système de Bresse avec une dissipation faible et ils ont montré que la stabilité du semi groupe n'est atteinte que lorsque $\left(\frac{k}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2} \text{ et } k \neq k_0\right)$. Mais, si $k = k_0$ alors le semi groupe perd la stabilité.

Fatori et Muñoz Rivera [31] ont considéré le système de Bresse couplé avec l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0l(\omega_x - l\varphi) = 0, & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\varphi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x = 0, & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_1\omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Ils ont montré que le système n'est pas stable d'une manière exponentielle mais qu'il existe une stabilité polynomiale qui dépend de la propagation d'onde et de la régularité des données initiales.

Dans [1], Keddi, Apalara et Messaoudi ont étudié la stabilité asymptotique du système de Bresse, où la conduction thermal est donnée par la loi de Cattaneo dans le déplacement de l'angle de cisaillement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\varphi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_x = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3 \theta_t + q_x + \gamma\psi_{xt} = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \tau q_t + \beta q + \theta_x = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (4.1.6)$$

Ils ont établi que la stabilité exponentielle et polynomiale basée sur les paramètres suivants :

$$\xi = \left(1 - \frac{\tau k \rho_3}{\rho_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right) - \frac{\gamma^2 \tau}{b} \quad \text{et} \quad k = k_0. \quad (4.1.7)$$

Le système de Bresse est plus général que le système bien connu de Timoshenko où le déplacement longitudinal ω n'est pas pris en compte ($l = 0$). Récemment, de nombreuses publications sont parues s'intéressant au comportement des solutions pour les systèmes thermoélastiques de type Timoshenko. En conséquence, différents types d'amortissement (thermique ou mécanique) ont été utilisés. Voir par exemple [26]. Comme indiqué dans [2], Djebabla et Tatar ont étudié le système de Timochenko de type III suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma\theta_x = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - l\theta_{xx} + \beta \int_0^t g(t-s)\theta_{xx} ds + \gamma\psi_{ttx} = 0, \text{ dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (4.1.8)$$

L'étude des auteurs montre que la stabilité exponentielle du système se produit mais seulement lorsque les coefficients du modèle satisfont aux conditions suivantes :

$$\frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 = l - \frac{k\rho_3}{\rho_1} = \gamma. \quad (4.1.9)$$

Dans ce chapitre, nous étudierons le système de Bresse avec une dissipation viscoélastique appliquée aux effets thermiques. Ce type de systèmes peut être déduit par une

modification du troisième type de thermoélasticité. Ainsi, notre système prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - k_0 l(\omega_x - l\varphi) = 0, & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + l\omega) + \gamma\theta_{tx} = 0, & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \kappa\theta_{xx} + \beta(g * \theta_{xx}) + \gamma\psi_{tx} = 0, & \text{dans } (0, 1) \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Le système (4.1.10) est complété par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \varphi(0, t) &= \varphi(1, t) = \theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, \\ \psi_x(0, t) &= \psi_x(1, t) = 0 = \omega(0, t) = \omega_x(1, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

et les données initiales :

$$\begin{aligned} (\varphi, \varphi_t)(x) &= (\varphi_0, \varphi_1)(x), \quad (\psi, \psi_t)(x) = (\psi_0, \psi_t)(x) \\ (\omega, \omega_t)(x) &= (\omega_0, \omega_1)(x), \quad (\theta, \theta_t)(x) = (\theta_0, \theta_1)(x). \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Nous notons que le système (4.1.8) peut être considéré comme un cas particulier du système présenté dans ce chapitre. De notre point de vue, l'apparence d'une condition suffisante (4.1.9) qui contrôle le comportement des solutions en termes de stabilité exponentielle pour le système de Timoshenko est extrêmement importante lorsqu'elle apparaît comme une condition suffisante de la stabilité dans notre modèle étudié.

Ensuite, nous présenterons certains espaces fonctionnels et hypothèses utilisés dans la suite de ce chapitre.

4.2 Notions de base

Dans ce chapitre, nous utilisons l'espace standard de Lebesgue $L^2(0, 1)$ et l'espace de Sobolev $H_0^1(0, 1)$ avec leurs produits scalaires habituels.

Définissons l'espace \mathbf{H} par :

$$\mathbf{H} = [H_0^1(0, 1) \times H_*^1(0, 1) \times L^2(0, 1) \times L_*^2(0, 1)]^2, \quad (4.2.1)$$

où $H_*^1(0, 1) = H^1(0, 1) \cap L_*^2(0, 1)$ tel que :

$$L_*^2(0, 1) = \left\{ f \in L^2(0, 1) / \int_0^1 f dx = 0 \right\}.$$

Nous dénotons par $*$ la convolution habituelle :

$$g * f = \int_0^t g(t-s)f(s)ds,$$

et aussi nous définissons les opérateurs binaires \diamond et \circ respectivement par :

$$g \diamond f = \int_0^t g(t-s)(f(t) - f(s)) ds,$$

$$g \circ f = \int_0^t g(t-s)(f(t) - f(s))^2 ds.$$

Pour simplifier les calculs, nous sommes obligés d'annoncer ces deux Lemmes qui sont utilisables dans les sections suivantes.

Lemme 4.2.1 *Pour toute fonction $g \in C^1(\mathbb{R})$ et toute $f \in H^1(0, 1)$, nous avons :*

$$(g * f).f_t = -\frac{1}{2}g(t)|f|^2 + \frac{1}{2}g' \circ f - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ g \circ f - \int_0^t g(\tau)d\tau |f|^2 \right\}.$$

Lemme 4.2.2 *Pour toute fonction $g \in C(\mathbb{R})$ et toute $f \in L^2(0, 1)$, nous avons :*

$$(g \diamond f)^2 \leq \left(\int_0^t g(\tau)d\tau \right) g \circ f.$$

Or, la fonction de relaxation g satisfait les deux hypothèses suivantes :

$H1$: $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable satisfait :

$$g(0) > 0, \kappa - \beta \int_0^\infty g(s)ds = \kappa - \beta \bar{g} = \lambda > 0. \quad (4.2.2)$$

$H2$: Il existe une fonction différentiable non croissante $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait :

$$g'(t) \leq -h(t)g(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2.3)$$

et

$$\int_0^\infty h(t)dt = +\infty.$$

4.3 Existence de la solution

Notre premier résultat dans cette section est donné par le Théorème suivant.

Théorème 4.3.1 *Pour tout $(\rho_0, \rho_1, \psi_0, \psi_1, \omega_0, \omega_1, \theta_0, \theta_1) \in \mathbf{H}$ et $T > 0$, il existe une solution unique faible $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ du problème (4.1.10) – (4.1.12) sur $[0, T]$, de telle sorte que :*

$$\begin{aligned} (\varphi, \theta) &\in C([0, T], H_0^1(0, 1)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, 1)), \\ (\psi, \omega) &\in C([0, T], H_*^1(0, 1)) \cap C^1([0, T], L_*^2(0, 1)), \\ (\varphi_t, \theta_t) &\in L^2([0, T], H_0^1(0, 1)) \cap L^2((0, T) \times (0, 1)), \\ (\psi_t, \omega_t) &\in L^2([0, T], H_*^1(0, 1)) \cap L_*^2((0, T) \times (0, 1)). \end{aligned}$$

La preuve de ce Théorème est basée sur la construction d'une suite qui converge vers une solution du problème (4.1.10) – (4.1.12).

Preuve. La preuve est divisée en trois étapes : Tout d'abord, nous construisons une approximation Faedo-Galerkin, puis grâce à des estimations a priori, nous cherchons à prouver que $t_n = T$ pour $n \in \mathbb{N}$. Enfin, nous passons à la limite. ■

- **Étape 01** : Faedo-Galerkin approximations.

Nous construisons des approximations de la solution $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ par la méthode Faedo-Galerkin comme suit, voir [28], [37]. Pour chaque $n \geq 1$, soit $W_n = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ une base de l'espace de Hilbert $H_0^1(0, 1) \cap H_*^1(0, 1)$.

Nous choisissons deux suites $(\varphi_0^n, \psi_0^n, \omega_0^n, \theta_0^n)$ et $(\varphi_1^n, \psi_1^n, \omega_1^n, \theta_1^n)$ dans W_n telle que :

$$\begin{aligned} \varphi_0^n &\rightarrow \varphi_0 \text{ fortement dans } H_0^1(0, 1), \\ \varphi_1^n &\rightarrow \varphi_1 \text{ fortement dans } L^2(0, 1), \\ \psi_0^n &\rightarrow \psi_0 \text{ fortement dans } H_*^1(0, 1), \\ \psi_1^n &\rightarrow \psi_1 \text{ fortement dans } L_*^2(0, 1), \\ \omega_0^n &\rightarrow \omega_0 \text{ fortement dans } H_*^1(0, 1), \\ \omega_1^n &\rightarrow \omega_1 \text{ fortement dans } L_*^2(0, 1), \end{aligned}$$

$$\theta_0^n \rightarrow \theta_0 \text{ fortement dans } H_0^1(0, 1),$$

$$\theta_1^n \rightarrow \theta_1 \text{ fortement dans } L^2(0, 1).$$

Maintenant, nous définissons les approximations suivantes :

$$(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, \theta^n)(x, t) = \sum_{j=1}^{j=n} (\phi_{1,j}^n(t), \phi_{2,j}^n(t), \phi_{3,j}^n(t), \phi_{4,j}^n(t)) \sigma_j(x),$$

où $(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, \theta^n)$ est le problème de Cauchy de dimension finie donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt}^n \sigma_j dx + k \int_0^1 (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \sigma_{jx} dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x^n - l\varphi^n) \sigma_j dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt}^n \sigma_j dx + b \int_0^1 \psi_x^n \sigma_{jx} dx + k \int_0^1 (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \sigma_j dx - \gamma \int_0^1 \theta_t^n \sigma_{jx} dx = 0, \\ \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt}^n \sigma_j dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x^n - l\varphi^n) \sigma_{jx} dx + kl \int_0^1 (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n) \sigma_j dx = 0, \\ \rho_3 \int_0^1 \theta_{tt}^n \sigma_j dx + \kappa \int_0^1 \theta_x^n \sigma_{jx} dx - \beta \int_0^1 (g * \theta_x^n) \sigma_{jx} dx - \gamma \int_0^1 \psi_t \sigma_{jx} dx = 0. \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} (\varphi^n(0), \psi^n(0), \omega^n(0), \theta^n(0)) &= (\varphi_0^n, \psi_0^n, \omega_0^n, \theta_0^n) \\ (\varphi_t^n(0), \psi_t^n(0), \omega_t^n(0), \theta_t^n(0)) &= (\varphi_1^n, \psi_1^n, \omega_1^n, \theta_1^n). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Selon la théorie standard des équations différentielles ordinaires, le problème de dimension finie (4.3.1) – (4.3.2) a une solution $(\phi_{1,j}^n(t), \phi_{2,j}^n(t), \phi_{3,j}^n(t), \phi_{4,j}^n(t))_{j=1,\dots,n}$ définie sur $[0, t_n]$.

Ensuite, les estimations a priori qui suivent impliquent qu'en fait $t_n = T$.

• **Étape 02** : Estimation de l'énergie.

En multipliant dans L^2 les équations du système (4.3.1) par $((\phi_{1,j}^n)', (\phi_{2,j}^n)', (\phi_{3,j}^n)', (\phi_{4,j}^n)')$ respectivement, puis en utilisant l'intégration par parties, les données initiales, les condi-

tions aux limites et le Lemme 4.2.1, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 [\rho_1 (\varphi_t^n)^2 + \rho_2 (\psi_t^n)^2 + \rho_1 (\omega_t^n)^2 + \rho_3 (\theta_t^n)^2 + b(\psi_x^n)^2] dx \\
 & + \int_0^1 \left[k_0 (\omega_x^n - l\varphi^n)^2 + k (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)^2 + \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau \right) (\theta_x^n)^2 \right] dx \\
 & + \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g \circ \theta_x^n) dx - \frac{\beta}{2} \int_0^1 \left(\int_0^t g' \circ \theta_x^n \right) ds dx \\
 & + \frac{\beta}{2} \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^1 (\theta_x^n)^2 dx ds \\
 & = \int_0^1 [\rho_1 (\varphi_1^n)^2 + \rho_2 (\psi_1^n)^2 + \rho_1 (\omega_1^n)^2 + \rho_3 (\theta_1^n)^2 + b(\psi_{0x}^n)^2] dx \\
 & + \int_0^1 [k_0 (\omega_{0x}^n - l\varphi_0^n)^2 + k (\varphi_{0x}^n + \psi_0^n + l\omega_0^n)^2 + \kappa (\theta_{0x}^n)^2] dx
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

pour chaque $n \geq 1$.

Ainsi, l'égalité précédente prend la forme suivante :

$$\varepsilon^n(t) + \frac{\beta}{2} \int_0^t g(\tau) \int_0^1 (\theta_x^n)^2 dx ds - \frac{\beta}{2} \int_0^1 \left(\int_0^t g' \circ \theta_x^n ds \right) dx = \mathcal{E}^n(0), \tag{4.3.4}$$

où

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^n(t) & = \int_0^1 [\rho_1 (\varphi_t^n)^2 + \rho_2 (\psi_t^n)^2 + \rho_1 (\omega_t^n)^2 + \rho_3 (\theta_t^n)^2 + b(\psi_x^n)^2] dx \\
 & + \int_0^1 [k_0 (\omega_x^n - l\varphi^n)^2 + k (\varphi_x^n + \psi^n + l\omega^n)^2] dx \\
 & + \int_0^1 \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau \right) (\theta_x^n)^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g \circ \theta_x^n) dx.
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

D'après les hypothèses sur la fonction g , nous déduisons :

$$\varepsilon^n(t) \leq \mathcal{E}^n(0). \tag{4.3.6}$$

Puisque les suites $(\varphi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varphi_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\psi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\psi_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\omega_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\omega_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\theta_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\theta_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent et en utilisant l'hypothèse précédente, on peut trouver une constante positive c indépendante de n telle que :

$$\varepsilon^n(t) \leq c. \tag{4.3.7}$$

Par conséquent, la dernière estimation (4.3.7) ainsi que l'égalité (4.3.5) nous donnent :

$$\begin{aligned}
(\varphi_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; H_0^1(0, 1)), \\
(\varphi_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; L^2(0, 1)), \\
(\psi_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; H_*^1(0, 1)), \\
(\psi_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; L_*^2(0, 1)), \\
(\omega_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; H_*^1(0, 1)), \\
(\omega_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; L_*^2(0, 1)), \\
(\theta_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; H_0^1(0, 1)), \\
(\theta_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^\infty([0, T]; L^2(0, 1)).
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

En conséquence, nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned}
\varphi^n &\rightharpoonup \varphi \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; H_0^1(0, 1)), \\
\varphi_t^n &\rightharpoonup \varphi_t \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; L^2(0, 1)), \\
\psi^n &\rightharpoonup \psi \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; H_*^1(0, 1)), \\
\psi_t^n &\rightharpoonup \psi_t \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; L_*^2(0, 1)) \\
\omega^n &\rightharpoonup \omega \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; H_*^1(0, 1)), \\
\omega_t^n &\rightharpoonup \omega_t \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; L_*^2(0, 1)), \\
\theta^n &\rightharpoonup \theta \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; H_0^1(0, 1)), \\
\theta_t^n &\rightharpoonup \theta_t \text{ faible dans } L^\infty([0, T]; L^2(0, 1)).
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Ainsi, à partir du système (4.3.1) et du Théorème de Aubin-Lions, on peut passer à la limite dans le système (4.3.1) avec les conditions initiales (4.3.2).

- **Étape 03** : Le processus de la limite.

Premièrement, nous montrons que $(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, \theta^n)$ est une suite de Cauchy. Pour cela, prenons $(\varphi^m, \psi^m, \omega^m, \theta^m)$ et $(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, \theta^n)$ avec $m > n$, et notons par U^m la différence de Cauchy. Ensuite, nous pouvons réécrire la suite $(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, \theta^n)$ comme :

$$(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, \theta^n)(x, t) = \sum_{j=1}^{j=n} (\phi_{1,j}^n(t), \phi_{2,j}^n(t), \phi_{3,j}^n(t), \phi_{4,j}^n(t)) \sigma_j(x),$$

où

$$\phi_{1,j}^n(t) = \phi_{2,j}^n(t) = \phi_{3,j}^n(t) = \phi_{4,j}^n(t) = 0 \text{ for } n < j \leq m.$$

À partir de la linéarité du problème, nous pouvons utiliser le même raisonnement ci-dessus pour obtenir :

$$\varepsilon(t, (\varphi^m, \psi^m, \omega^m, \theta^m)) \leq \varepsilon(0, (\varphi^m, \psi^m, \omega^m, \theta^m)),$$

qui convergent fortement vers zéro, alors $(\varphi^n, \psi^n, \omega^n, \theta^n)$ est une suite de Cauchy.

D'autre part, de (4.3.2), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} (\varphi_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; H_0^1(0, 1)), \\ (\varphi_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \\ (\psi_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; H_*^1(0, 1)), \\ (\psi_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; L_*^2(0, 1)), \\ (\omega_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; H_*^1(0, 1)), \\ (\omega_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; L_*^2(0, 1)), \\ (\theta_0^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; H_0^1(0, 1)), \\ (\theta_1^n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ est limitée dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Par conséquent, $(\varphi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varphi_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\psi_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\omega_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\omega_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\theta_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\theta_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont limitées dans $H^1([0, T], H^1(0, 1))$.

Comme l'ensemble $H^1([0, T], H^1(0, 1)) \rightarrow L^2([0, T], L^2(0, 1))$ est compact, alors les sous-suites $(\varphi_0^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}, (\varphi_1^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}, (\psi_0^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}, (\psi_1^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}, (\omega_0^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}, (\omega_1^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}, (\theta_0^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}, (\theta_1^\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ satisfont aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi^\mu &\rightharpoonup \varphi \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \varphi_t^\mu &\rightharpoonup \varphi_t \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \psi^\mu &\rightharpoonup \psi \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \psi_t^\mu &\rightharpoonup \psi_t \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \omega^\mu &\rightharpoonup \omega \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \omega_t^\mu &\rightharpoonup \omega_t \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta^u &\rightharpoonup \theta \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)), \\ \theta_t^u &\rightharpoonup \theta_t \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(0, 1)).\end{aligned}$$

L'unicité est évidente en appliquant les méthodes standards et l'inégalité de Gronwall.

4.4 Stabilité générale

Dans cette section, nous indiquons et prouvons notre résultat de stabilité pour la fonctionnelle d'énergie définie par :

$$\begin{aligned}E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + \rho_3 \theta_t^2 + k (\varphi_x + \psi + lw)^2 \right. \\ &\quad \left. + k_0 (w_x - l\varphi)^2 + b\psi_x^2 + \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \theta_x^2 \right\} dx \\ &\quad + \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx.\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

Lemme 4.4.1 *Soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ une solution du problème donné par le système (4.1.10) – (4.1.12). Alors la fonctionnelle d'énergie satisfait l'égalité :*

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{\beta}{2} g(t) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx \leq 0, \quad t \geq 0.\tag{4.4.2}$$

Preuve. Au début, on multiplie les équations du système (4.1.10) par $\varphi_t, \psi_t, \omega_t$ et θ_t respectivement, puis nous intégrons sur $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi_t dx - k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_t dx - \int_0^1 k_0 l (\omega_x - l\varphi) \varphi_t dx = 0, \\ \rho_2 \int_0^1 \psi_{tt} \psi_t dx - b \int_0^1 \psi_{xx} \psi_t dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) \psi_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_{tx} \psi_t dx = 0, \\ \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega_t dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_x \omega_t dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + lw) \omega_t dx = 0, \\ \rho_3 \int_0^1 \theta_{tt} \theta_t dx - \kappa \int_0^1 \theta_{xx} \theta_t dx + \beta \int_0^1 (g * \theta_{xx}) \theta_t dx + \gamma \int_0^1 \psi_{tx} \theta_t dx = 0, \end{cases}$$

en utilisant l'intégration par parties sur l'intervalle $[0,1]$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \varphi_{tx} dx - \int_0^1 k_0 l (\omega_x - l\varphi) \varphi_t dx = 0, \\ \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \psi_x^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \psi_t dx - \gamma \int_0^1 \theta_t \psi_{tx} dx = 0, \\ \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \omega_t^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi) \omega_{tx} dx + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega) \omega_t dx = 0, \\ \frac{\rho_3}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \theta_t^2 dx + \kappa \int_0^1 \theta_x^2 dx + \beta \int_0^1 (g * \theta_{xx}) \theta_t dx + \gamma \int_0^1 \psi_{tx} \theta_t dx = 0. \end{array} \right. \quad (4.4.3)$$

Ainsi, la sommation des quatre équations du système (4.4.3) nous donne :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2 + \rho_3 \theta_t^2 + k (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 \right. \\ & \left. + k_0 (\omega_x - l\varphi)^2 + b\psi_x^2 + \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \theta_x^2 \right\} dx \\ & + \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx + \frac{\beta}{2} g(t) \int_0^1 \theta_x^2 dx - \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx = 0, \end{aligned}$$

si on note :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 \omega_t^2 + \rho_3 \theta_t^2 + k (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 \right. \\ & \left. + k_0 (\omega_x - l\varphi)^2 + b\psi_x^2 + \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \theta_x^2 \right\} dx \\ & + \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g \circ \theta_x) dx, \end{aligned}$$

la dérivée de l'énergie sera donnée par :

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{\beta}{2} g(t) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{\beta}{2} \int_0^1 (g' \circ \theta_x) dx.$$

■

Dans ce qui suit, nous allons travailler avec $c > 0$ qui représente une constante générique qui dépend uniquement des quantités structurelles du problème.

Théorème 4.4.1 *Soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ la solution du problème défini par le système (4.1.10) – (4.1.12), supposons que les coefficients du système vérifient la condition :*

$$\gamma = \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 = \kappa - \frac{k\rho_3}{\rho_1} \text{ et } k = k_0. \quad (4.4.4)$$

Alors, pour tout $t_0 > 0$ il existe deux constantes positives ξ_0 et ξ_1 telles que :

$$E(t) \leq \xi_0 e^{-\xi_1 \int_{t_0}^t h(s) ds}, \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.4.5)$$

En utilisant la méthode des multiplicateurs pour atteindre notre objectif. Et pour cela, nous avons besoin des lemmes constitutifs suivants. Premièrement, nous introduisons le multiplicateur χ donné par :

$$-\chi_{xx} = \psi_x, \chi(0) = \chi(1) = 0, \quad (4.4.6)$$

et soit la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}(t) : &= \rho_1 \int_0^1 \chi \varphi_t dx + \rho_2 \int_0^1 \psi \psi_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x \psi dx \\ &- l^2 \gamma \int_0^1 \int_0^x \theta_x(x) \chi(y) dy dx + \rho_1 l \int_0^1 \int_0^x \omega_t(x) \chi(y) dy dx \\ &- \rho_2 l^2 \int_0^1 \int_0^x \psi_t(x) \chi(y) dy dx. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Nous avons donc le lemme suivant.

Lemme 4.4.2 *La fonctionnelle \mathfrak{T} ainsi que la solution du système (4.1.10) – (4.1.12), satisfait pour tout $\varepsilon_1 > 0$, l'estimation :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}'(t) \leq & -b(1-l^2) \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ & + \frac{c}{\varepsilon_1} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Preuve. En prenant la dérivée de la fonctionnelle \mathfrak{T} , en utilisant l'intégration par parties et le multiplicateur χ , alors on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}'(t) = & \rho_1 \int_0^1 \chi_t \varphi_t dx + k \int_0^1 \chi (\varphi_x + \psi + l\omega)_x dx + k_0 l \int_0^1 \chi (\omega_x - l\varphi) dx \\ & + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - b \int_0^1 \psi_x^2 dx - k \int_0^1 \psi (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \gamma \int_0^1 \theta_{tx} \psi dx \\ & + \gamma \int_0^1 \theta_{tx} \psi dx + \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx - \gamma l^2 \int_0^1 \int_0^x \theta_{tx}(x) \chi(y) dy dx \\ & - \gamma l^2 \int_0^1 \int_0^x \theta_x(x) \chi_t(y) dy dx + k_0 l \int_0^1 \int_0^x (\omega_x - l\varphi)_x(x) \chi(y) dy dx \\ & - k l^2 \int_0^1 \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(x) \chi(y) dy dx + \rho_1 l \int_0^1 \int_0^x \omega_t(x) \chi_t(y) dy dx \\ & - b l^2 \int_0^1 \int_0^x \psi_{xx}(x) \chi(y) dy dx + k l^2 \int_0^1 \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(x) \chi(y) dy dx \\ & + \gamma l^2 \int_0^1 \int_0^x \theta_{tx}(x) \chi(y) dy dx - \rho_2 l^2 \int_0^1 \int_0^x \psi_t(x) \chi_t(y) dy dx \end{aligned}$$

Après avoir simplifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}'(t) &= -b \int_0^1 \psi_x^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \chi_t \varphi_t dx + \gamma \int_0^1 \theta_x \psi_t dx \\ &\quad - \gamma l^2 \int_0^1 \int_0^x \theta_x(x) \chi_t(y) dy dx + \rho_1 l \int_0^1 \int_0^x \omega_t(x) \chi_t(y) dy dx \\ &\quad + bl^2 \int_0^1 \psi_x \chi dx - \rho_2 l^2 \int_0^1 \int_0^x \psi_t(x) \chi_t(y) dy dx. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré et Young, nous obtenons l'estimation (4.4.8). ■

Lemme 4.4.3 *Soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ la solution du problème défini par le système (4.1.10) – (4.1.12). Alors la fonctionnelle :*

$$I_1(t) := \rho_3 \int_0^1 \theta_t \theta dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_x dx, \quad (4.4.9)$$

satisfait pour $\varepsilon_2, \delta_1 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned} I_1'(t) &\leq - \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau - \delta_1 \right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^1 \psi_x^2 dx \\ &\quad + \frac{c}{\varepsilon_2} \int_0^1 \theta_t^2 dx + \frac{c}{\delta_1} \int_0^1 g \circ \theta_x dx. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Preuve. En différenciant I_1 , et en l'intégrant par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \rho_3 \int_0^1 \theta_t^2 dx + \rho_3 \int_0^1 \theta_{tt} \theta dx + \gamma \int_0^1 \theta_t \psi_x dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_{tx} dx \\ &= \rho_3 \int_0^1 \theta_t^2 dx + \int_0^1 [\kappa \theta_{xx} - \beta(g * \theta_{xx}) - \gamma \psi_{tx}] \theta dx \\ &\quad + \gamma \int_0^1 \theta_t \psi_x dx + \gamma \int_0^1 \theta \psi_{tx} dx. \\ &= -\kappa \int_0^1 \theta_x^2 dx + \rho_3 \int_0^1 \theta_t^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta_t \psi_x dx + \beta \int_0^1 \theta_x (g * \theta_x) dx \\ &= \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau \right) \int_0^1 \theta_x^2 dx + \rho_3 \int_0^1 \theta_t^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta_t \psi_x dx \\ &\quad - \int_0^1 \theta_x (g \diamond \theta_x) dx. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient directement l'estimation (4.4.10). ■

Lemme 4.4.4 Soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ la solution du système (4.1.10) – (4.1.12). Alors, la fonctionnelle :

$$I_2(t) := -\rho_3 \int_0^1 \theta_t (g \diamond \theta) dx, \quad (4.4.11)$$

satisfait pour tout $\varepsilon_3, \delta_2 > 0$, l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} I_2'(t) \leq & -\left(\rho_3 \int_0^t g(\tau) d\tau - \delta_2\right) \int_0^1 \theta_t^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ & + \varepsilon_3 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_3} \int_0^1 g \circ \theta_x dx - \frac{c}{\delta_2} \int_0^1 g' \circ \theta_x dx. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Preuve. En différenciant I_2 et en l'intégrant par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= -\rho_3 \int_0^1 \theta_t (g \diamond \theta)_t dx + \kappa \int_0^1 \theta_x (g \diamond \theta_x) dx - \beta \int_0^1 (g * \theta_x) (g \diamond \theta_x) dx \\ &\quad - \gamma \int_0^1 \psi_t (g \diamond \theta_x) dx \\ &= -\rho_3 \int_0^t g(\tau) d\tau \int_0^1 \theta_t^2 dx + \kappa \int_0^1 \theta_x (g \diamond \theta_x) dx - \beta \int_0^1 (g * \theta_x) (g \diamond \theta_x) dx \\ &\quad - \gamma \int_0^1 \psi_t (g \diamond \theta_x) dx - \rho_3 \int_0^1 \theta_t (g' \diamond \theta) dx. \end{aligned}$$

La relation (4.4.12) est établie, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré. ■

Lemme 4.4.5 Soit

$$I_3(t) = \rho_2 \rho_3 \int_0^1 \int_0^x \psi_t(x) \theta_t(y) dy dx, \quad (4.4.13)$$

et soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ la solution du système (4.1.10) – (4.1.12). Alors, nous avons pour tout $\varepsilon_4 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned} I_3'(t) \leq & -\frac{\gamma \rho_2}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + \varepsilon_4 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_4} \int_0^1 \theta_t^2 dx \\ & + \varepsilon_4 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + c \int_0^1 \theta_x^2 dx + c \int_0^1 g \circ \theta_x dx. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Preuve. La dérivation de la fonctionnelle I_3 nous donne :

$$\begin{aligned} I_3'(t) &= -\gamma \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \gamma \rho_3 \int_0^1 \theta_t^2 dx - \rho_3 b \int_0^1 \theta_t \psi_x dx + \rho_2 \kappa \int_0^1 \theta_x \psi_t dx \\ &\quad - \rho_2 \beta \int_0^1 \psi_t (g * \theta_x) dx - k \rho_3 \int_0^1 \int_0^x (\varphi_x + \psi + l\omega)(x) \theta_t(y) dy dx. \end{aligned}$$

L'inégalité (4.4.14) apparaît en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré. ■

Lemme 4.4.6 Pour tout $\varepsilon_5 > 0$, la fonctionnelle I_4 définie par :

$$I_4(t) := -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t \varphi dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t \omega dx, \quad (4.4.15)$$

vérifie pour toute solution du système (4.1.10) – (4.1.12), l'estimation :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &\leq -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_5 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_5} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Preuve. Dérivons la fonctionnelle I_4 et intégrons par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_4'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} \varphi dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} \omega dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx \\ &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \int_0^1 [k(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + k_0 l(\omega_x - l\varphi)] \varphi dx \\ &\quad - \int_0^1 [-k_0(\omega_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + l\omega)] \omega dx \\ &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - k \int_0^1 \psi (\varphi_x + \psi + l\omega) dx. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young et à l'inégalité de Poincaré, nous avons :

$$k \int_0^1 \psi (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \leq \varepsilon_5 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{k^2}{4\varepsilon_5} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx,$$

qui mène au résultat souhaité. ■

Lemme 4.4.7 Soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ la solution du problème (4.1.10) – (4.1.12). Alors la fonctionnelle :

$$I_5(t) := -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx, \quad (4.4.17)$$

satisfait l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} I_5'(t) &\leq -lk_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \frac{l\rho_1}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad + lk \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + c \int_0^1 \psi_t^2 dx. \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Preuve. Dérivons la fonctionnelle I_5 :

$$\begin{aligned}
 I_5'(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_{tt} (\omega_x - l\varphi) dx - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi)_t dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \omega_{tt} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx \\
 &= -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)_x (\omega_x - l\varphi) dx - k_0 l \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \varphi_t (\omega_x - l\varphi)_t dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 &\quad + kl \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \omega_t (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx.
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $k = k_0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_5'(t) &= -lk_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - l\rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\
 &\quad + lk \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx - \rho_1 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx.
 \end{aligned}$$

Ensuite, nous estimons le dernier terme de l'égalité précédente, en utilisant l'inégalité de Young :

$$-\rho_1 \int_0^1 \omega_t \psi_t dx \leq \frac{l\rho_1}{2} \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2l} \int_0^1 \psi_t^2 dx.$$

Ainsi, nous obtenons l'inégalité (4.4.18). ■

Lemme 4.4.8 Soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ la solution du système (4.1.10) – (4.1.12). Alors la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}
 I_6(t) : &= -\rho_1 \int_0^1 \int_0^x (\omega_x - l\varphi)(x) \omega_t(y) dy dx \\
 &\quad - \rho_1 \int_0^1 \int_0^x \varphi_t(x) (\varphi_x + \psi + l\omega)(y) dy dx.
 \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

satisfait l'estimation :

$$\begin{aligned}
 I_6'(t) &\leq -\frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx \\
 &\quad + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx.
 \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

Preuve. En différenciant I_6 et en intégrant par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I'_6(t) &= -\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - k_0 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx + k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + \rho_1 \int_0^1 \omega_t^2 dx + l(k - k_0) \int_0^1 \int_0^x (\omega_x - l\varphi)(x) (\varphi_x + \psi + l\omega)(y) dy dx \\ &\quad - \rho_1 \int_0^1 \int_0^x \varphi_t(x) \psi_t(y) dy dx. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Young sur le dernier terme :

$$-\rho_1 \int_0^1 \int_0^x \varphi_t(x) \psi_t(y) dy dx \leq \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^1 \psi_t^2 dx,$$

on obtient le résultat désiré. ■

Maintenant, définissons la fonctionnelle suivante :

$$\Psi(t) := 2l(I_4(t) + I_6(t)). \quad (4.4.21)$$

Ensuite, utilisons les estimations précédentes I'_4 et I'_6 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\leq -l\rho_1 \int_0^1 \varphi_t^2 dx + 2l\varepsilon_5 \int_0^1 \psi_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_5} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx \\ &\quad + l\rho_1 \int_0^1 \psi_t^2 dx \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Remarque 4.4.1 En utilisant le fait que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, l'inégalité de Poincaré, avec $l \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_x^2 dx &\leq \frac{2}{1 - 4l^4} \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \frac{4l^2}{1 - 4l^4} \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\ &\quad + \frac{4}{1 - 4l^4} \int_0^1 \psi_x^2 dx. \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

Lemme 4.4.9 Soit $(\varphi, \psi, \omega, \theta)$ une solution du problème (4.1.10) – (4.1.12). Alors la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &: = \rho_2 \int_0^1 \psi_t (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + (\rho_2 + \gamma) \int_0^1 \psi_x \varphi_t dx + \rho_3 \int_0^1 \theta_t \varphi_t dx \\ &\quad - \beta \int_0^1 \varphi_x (g * \theta_x) dx + \left(\gamma + \frac{\rho_3 k}{\rho_1} \right) \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega) dx, \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

satisfait pour tout $\varepsilon_6 > 0$, l'estimation :

$$\begin{aligned}
 \Phi'(t) \leq & -(k - \varepsilon_6) \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \varepsilon_6 \int_0^1 \omega_t^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_6} \int_0^1 \psi_t^2 dx \\
 & + \frac{c}{\varepsilon_6} \int_0^1 \theta_x^2 dx + \frac{c}{\varepsilon_6} \int_0^1 \psi_x^2 dx + \varepsilon_6 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx \\
 & + \frac{c}{\varepsilon_6} \int_0^1 \theta_t^2 dx - \frac{c}{\varepsilon_6} \int_0^1 g' \circ \theta_x dx.
 \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

Preuve. Une simple différenciation de Φ donne :

$$\begin{aligned}
 \Phi'(t) = & -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx - \gamma \int_0^1 \theta_{tx} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx \\
 & - \frac{b\rho_1}{k} \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx + \frac{bk_0 l}{k} \int_0^1 \psi_x (\omega_x - l\varphi) dx + \rho_2 \int_0^1 \varphi_{tx} \psi_t dx \\
 & + l\rho_2 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx + (\rho_2 + \gamma) \int_0^1 \varphi_t \psi_{tx} dx + (\rho_2 + \gamma) \int_0^1 \varphi_{tt} \psi_x dx \\
 & - \kappa \int_0^1 \theta_x \varphi_{tx} dx - \gamma \int_0^1 \varphi_t \psi_{tx} dx + \beta \int_0^1 \varphi_{tx} (g * \theta_x) dx \\
 & - \frac{k\rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta_{tx} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx + \frac{k_0 l \rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta_t (\omega_x - l\varphi) dx \\
 & + \left(\gamma + \frac{k\rho_3}{\rho_1} \right) \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx - \beta \int_0^1 \varphi_x (g * \theta_x)_t dx \\
 & + \left(\gamma + \frac{k\rho_3}{\rho_1} \right) \int_0^1 \theta_{tx} (\varphi_x + \psi + l\omega) dx - \beta \int_0^1 \varphi_{tx} (g * \theta_x) dx.
 \end{aligned}$$

Après avoir simplifié, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \Phi'(t) = & -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + \left(\rho_2 + \gamma - \frac{b\rho_1}{k} \right) \int_0^1 \psi_x \varphi_{tt} dx \\
 & + \frac{bk_0 l}{k} \int_0^1 \psi_x (\omega_x - l\varphi) dx + l\rho_2 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx + \left(\gamma + \frac{k\rho_3}{\rho_1} - \kappa \right) \int_0^1 \theta_x \varphi_{tx} dx \\
 & + \left(\gamma + \frac{k\rho_3}{\rho_1} \right) \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx + \frac{k_0 l \rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta_t (\omega_x - l\varphi) dx \\
 & - \beta \int_0^1 \varphi_x (g * \theta_x)_t dx,
 \end{aligned}$$

en utilisant le fait que :

$$\gamma = \frac{b\rho_1}{k} - \rho_2 = \kappa - \frac{k\rho_3}{\rho_1} \text{ et } k = k_0,$$

alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= -k \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \rho_2 \int_0^1 \psi_t^2 dx + bl \int_0^1 \psi_x (\omega_x - l\varphi) dx \\ &\quad + l\rho_2 \int_0^1 \psi_t \omega_t dx + \kappa \int_0^1 \theta_x (\varphi_x + \psi + l\omega)_t dx - \beta \int_0^1 \varphi_x (g * \theta_x)_t dx \\ &\quad + \frac{k_0 l \rho_3}{\rho_1} \int_0^1 \theta_t (\omega_x - l\varphi) dx.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient l'estimation (4.4.25). ■

Preuve du Théorème 4.4.1

Nous définissons pour $N, N_i > 0, i = 1..7$, la fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= NE(t) + N_1 \mathcal{T}(t) + N_2 I_1(t) + N_3 I_2(t) + N_4 I_3(t) \\ &\quad + N_5 \Psi(t) + N_6 I_5(t) + N_7 \Phi(t).\end{aligned}\tag{4.4.26}$$

En utilisant l'équation (4.4.26) et les lemmes précédents, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(t) &\leq -\varpi_1 \int_0^1 \psi_x^2 dx - \varpi_2 \int_0^1 \theta_x^2 dx - \varpi_3 \int_0^1 \theta_t^2 dx - \varpi_4 \int_0^1 \psi_t^2 dx \\ &\quad - \varpi_5 \int_0^1 \omega_t^2 dx - \varpi_6 \int_0^1 (\omega_x - l\varphi)^2 dx - \varpi_7 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &\quad - \varpi_8 \int_0^1 (\varphi_x + \psi + l\omega)^2 dx + \varpi_9 \int_0^1 g \circ \theta_x dx + \varpi_{10} \int_0^1 g' \circ \theta_x dx,\end{aligned}\tag{4.4.27}$$

où

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= b(1 - l^2)N_1 - \varepsilon_2 N_2 - \varepsilon_4 N_4 - 2l\varepsilon_5 N_5 - \frac{c}{\varepsilon_6} N_7 \\ \varpi_2 &= \left(\kappa - \beta \int_0^t g(\tau) d\tau - \delta_1 \right) N_2 - \varepsilon_1 N_1 - \varepsilon_3 N_3 - cN_4 - \frac{c}{\varepsilon_6} N_7 \\ \varpi_3 &= \left(\rho_3 \int_0^t g(\tau) d\tau - \delta_2 \right) N_3 - \frac{c}{\varepsilon_2} N_2 - \frac{c}{\varepsilon_4} N_4 - \frac{c}{\varepsilon_6} N_7 \\ \varpi_4 &= \frac{\gamma \rho_2}{2} N_4 - \frac{c}{\varepsilon} N_1 - \varepsilon_3 N_3 - l\rho_1 N_5 - cN_6 - \frac{c}{\varepsilon_6} N_7 \\ \varpi_5 &= \frac{l\rho_1}{2} N_6 - \varepsilon_1 N_1 - \varepsilon_6 N_7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varpi_6 &= lk_0N_6 - \varepsilon_6N_7 \\
 \varpi_7 &= l\rho_1N_5 - \varepsilon_1N_1 - l\rho_1N_6 \\
 \varpi_8 &= (k - \varepsilon_6)N_7 - \varepsilon_4N_4 - \frac{c}{\varepsilon_5}N_5 - lkN_6 \\
 \varpi_9 &= cN_2 + \frac{c}{\varepsilon_3}N_3 + cN_4 \\
 \varpi_{10} &= \frac{\beta}{2}N - N_3 + \frac{c}{\varepsilon_6}N_7.
 \end{aligned}$$

Premièrement, en prenant $\delta_1 = \frac{\lambda}{2}$, $\delta_2 < \rho_3 \int_0^t g(\tau) d\tau$ et $0 < l < 1$, $l \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Nous pouvons choisir N assez grand, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_6$ assez petit, et :

$$\begin{aligned}
 N_1 &> N_7, \\
 N_2 &> N_4, N_7, \\
 N_3 &> N_2, N_4, N_7, \\
 N_4 &> N_1, N_5, N_6, N_7, \\
 N_5 &> N_6, \\
 N_7 &> N_5, N_6.
 \end{aligned}$$

Ensuite, $\varpi_i, i = 1 \dots 10$ sont toutes des constantes négatives, à ce stade, il existe une constante ϑ telle que l'équation (4.4.27) prend la forme :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\vartheta E(t) + \varpi_9 \int_0^1 g \circ \theta_x dx, \forall t \geq 0. \quad (4.4.28)$$

En multipliant (4.4.28) par $h(t)$ et en utilisant les hypothèses précédentes sur le noyau, on arrive à :

$$\begin{aligned}
 h'(t)\mathcal{L}'(t) &\leq -\vartheta h(t)E(t) + \varpi_9 h(t) \int_0^1 g \circ \theta_x dx \\
 &\leq -\vartheta h(t)E(t) - \varpi_9 \int_0^1 g' \circ \theta_x dx \\
 &\leq -\vartheta h(t)E(t) - \varpi_9 E'(t).
 \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

En utilisant le fait que $h'(t) < 0$, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} (h(t)\mathcal{L}(t) + \varpi_9 E(t)) \leq -\vartheta h(t)E(t), \forall t \geq t_0. \quad (4.4.30)$$

Si on note :

$$F(t) = h(t)\mathcal{L}(t) + \varpi_9 E(t) \sim E(t), \quad (4.4.31)$$

on obtient pour une certaine constante positive ξ_1 l'inégalité :

$$F'(t) \leq -\xi_1 h(t)F(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.4.32)$$

Si on intègre sur l'intervalle $[t_0, t]$, on obtient :

$$F(t) \leq F(t_0)e^{-\xi_1 \int_{t_0}^t h(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0, \quad (4.4.33)$$

puis, pour $\xi_2 > 0$, nous avons :

$$E(t) \leq \xi_2 e^{-\xi_1 \int_{t_0}^t h(s)ds}, \quad \forall t \geq t_0, \quad (4.4.34)$$

et ceci complète la preuve du Théorème 4.4.1.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons établi des différents résultats sur la stabilité de quelques problèmes d'équations aux dérivées partielles couplés. Tout d'abord, nous avons considéré un système poreux-élastique linéaire avec effets micro-températures et un amortissement de friction agissant sur la première équation dans un domaine unidimensionnel. Nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution, puis en utilisant la méthode des multiplicateurs, nous avons établi la décroissance exponentielle de l'énergie. Dans le second axe, en moyennant la méthode de l'énergie, nous avons amélioré le résultat du premier chapitre en démontrant la stabilité du système avec effets micro-températures seulement d'une manière exponentielle. Dans le dernier chapitre, on s'est intéressé à l'étude d'un système de type Bresse avec une dissipation viscoélastique, toujours, en utilisant la méthode des multiplicateurs, on a établi un résultat de stabilité générale qui nous donne la stabilité exponentielle et polynomiale.

Bibliographie

- [1] A. A. Keddi, T.A. Apalara, S. A. Messaoudi, Exponential and Polynomial Decay in a Thermoelastic-Bresse System with Second Sound, *Appl Math Optim.* 77(2018) 315-341.
- [2] A. Djebabla and N-E Tatar. Exponential stabilization of the timoshenko system by a thermo-viscoelastic damping. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 16(2):189–210, 2010.
- [3] A. Djebabla and N-E Tatar. Stabilization of the timoshenko beam by thermal effect. *Mediterranean journal of mathematics*, 7(3):373–385, 2010.
- [4] A. Djebabla and N-E Tatar. Exponential stabilization of the timoshenko system by a thermal effect with an oscillating kernel. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(1-2):301–314, 2011.
- [5] A. Djebabla and N-E Tatar. Exponential stabilization of the full von kármán beam by a thermal effect and a frictional damping. *Georgian Mathematical Journal*, 20(3):427–438, 2013.
- [6] A. E. Green and P. M. Naghdi. A re-examination of the basic postulates of thermo-mechanics. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1992.
- [7] A. E Green and P. M Naghdi. On undamped heat waves in an elastic solid. *Journal of Thermal Stresses*, 15(2):253–264, 1992.

-
- [8] A. E Green and P. M Naghdi. Thermoelasticity without energy dissipation. *Journal of elasticity*, 31(3):189–208, 1993.
- [9] A. E Green and P. M Naghdi. A unified procedure for construction of theories of deformable media. i. classical continuum physics. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 448(1934):335–356, 1995.
- [10] A. Guesmia and S. A Messaoudi. On the control of a viscoelastic damped timoshenko-type system. *Applied mathematics and computation*, 206(2):589–597, 2008.
- [11] A. Guesmia and S. A Messaoudi. General energy decay estimates of timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 32(16):2102–2122, 2009.
- [12] A. Guesmia and M. Kafini. Bresse system with infinite memories. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(11):2389–2402, 2015.
- [13] A. Guesmia and M. Kirane. Uniform and weak stability of bresse system with two infinite memories. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 67(5):124, 2016.
- [14] A. Guesmia. Asymptotic stability of bresse system with one infinite memory in the longitudinal displacements. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(2):49, 2017.
- [15] A. Magaña and R. Quintanilla. On the exponential decay of solutions in one-dimensional generalized porous-thermo-elasticity. *Asymptotic Analysis*, 49(3, 4):173–187, 2006.
- [16] A. Magaña and R. Quintanilla. On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 43(11-12):3414–3427, 2006.
- [17] A. Magaña and R. Quintanilla. On the time decay of solutions in porous-elasticity with quasistatic microvoids. *Journal of mathematical analysis and applications*, 331(1):617–630, 2007.

-
- [18] D. Ieşan. A theory of thermoelastic materials with voids. *Acta Mech.* 1986;60(1–2):67–89.
- [19] D. Ieşan and R. Quintanilla. On a theory of thermoelasticity with microtemperatures. *J Thermal Stresses.* 2000;23(3):199–215.
- [20] D. Ieşan. On a theory of micromorphic elastic solids with microtemperatures. *J Thermal Stresses.* 2001;24(8):737–752.
- [21] D. Ieşan. *Thermoelastic models of continua.* Dordrecht: Springer; 2004.
- [22] D. Ieşan and R. Quintanilla. A theory of porous thermoviscoelastic mixtures. *Journal of Thermal Stresses,* 30(7):693–714, 2007.
- [23] D. Ieşan. On a theory of thermoviscoelastic materials with voids. *Journal of Elasticity,* 104(1-2):369–384, 2011.
- [24] H. Dridi and A. Djebabla. On the stabilization of linear porous elastic materials by microtemperature effect and porous damping. *Annali Dell’Universita’ di Ferrara,* pages 1–13, 2019.
- [25] H. Dridi, A. Djebabla. On the stabilization of linear porous elastic materials by microtemperature effect and porous damping. *Ann Univ Ferrara.* 2020;2(66):13–25.
- [26] H. Dridi and A. Djebabla. Timoshenko system with fractional operator in the memory and spatial fractional thermal effect. *journal of materials science-materialsin electronics(2020).*
- [27] J. E. Lagnese. G. Leugering and E.J.P.G. Schmidt. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams, *Math. Methods Appl. Sci.* 16 (1993) 327–358.
- [28] J. E. Muñoz Rivera, E.C. Lapa and R. Barrato. Decay Rates for Viscoelastic Plates with Memory, *Journal of Elasticity* 44: 61-87, 1996.

-
- [29] Jaime E Muñoz Rivera and Reinhard Racke. Mildly dissipative nonlinear timoshenko systems globale xistence and exponential stability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 276(1):248–278, 2002.
- [30] J. Hao and J. Wei. Global existence and stability results for a nonlinear Timoshenko system of thermoelasticity of type III with delay. *Boundary Value Problems*. 2018;66:13–25.
- [31] L.H. Fatori and J.E. Muñoz Rivera, Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system, *IMA J. Appl. Math.* 75 (2010) 881–904.
- [32] L.H. Fatori and R.N. Monteiro, The optimal decay rate for a weak dissipative Bresse system, *Appl. Math. Lett.* 25(2012) 600–604.
- [33] M. A. Goodman and S. C. Cowin . A continuum theory for granular materials. *Arch Rational Mech Anal.* 1972;44(4):249–266
- [34] M. Hachefi. A. Djebabla and N-E Tatar. On the decay of the energy for linear thermoelastic systems by thermal and micro-temperature effects. *Eurasian J Math Comput Appl.* 2018;6:29–37.
- [35] M. Kafni. S. A. Messaoudi. M. I. Mustafa and al. Well-posedness and stability results in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with delay. *Z Angew Math Phys.* 2015;66:1499–1517.
- [36] M. Kafini. S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa. Energy decay result in a timoshenko-type system of thermoelasticity of type iii with distributive delay. *Journal of Mathematical Physics*, 54(10):101503, 2013.
- [37] M. Kirane and B. Said-Houari, Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay, *Z. Angew. Math. Phys.* 62 (2011),1065-1082.
- [38] M. Saci and A. Djebabla. On the stability of linear porous elastic materials with microtemperatures effects. *Journal of thermal stresses*, Edition Talyor and Francis, (2020).

-
- [39] M. Saci, H. E. Khochemane and A. Djebabla. On the stability of linear porous elastic materials with microtemperatures effects and frictional damping, *Applicable Analysis*, Edition Talyor and Francis, (2020).
- [40] P. S. Casas and R. Quintanilla. Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures. *Int J Eng Sci.* 2005;43(1–2):33–47.
- [41] R. Quintanilla. Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity. *Appl Math Lett.* 2003;16(4):487–491.
- [42] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa. On the internal and boundary stabilization of timoshenko beams. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 15(6):655–671, 2008.
- [43] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa. On the stabilization of the timoshenko system by a weak nonlinear dissipation. *Mathematical methods in the applied sciences*, 32(4):454–469, 2009.
- [44] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa. A stability result in a memory-type timoshenko system. *Dynamic systems and applications*, 18(3):457, 2009.
- [45] S. A. Messaoudi and A. Fareh. General decay for a porous thermoelastic system with memory: The case of equal speeds. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74(18):6895–6906, 2011.
- [46] S. A. Messaoudi and A. Fareh. Energy decay in a timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with different wave-propagation speeds. *Arabian Journal of Mathematics*, 2(2):199–207, 2013.
- [47] S. C. Cowin and J. W. Nunziato. Linear elastic materials with voids. *J Elasticity.* 1983;13(2):125–147.
- [48] S. Chirită. M. Ciarletta and C. D’Apice. On the theory of thermoelasticity with microtemperatures. *J Math Anal Appl.* 2013;397(1):349–361.

- [49] T.A. Apalara,. Exponential decay in one-dimensional porous dissipation elasticity. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 70(4):363–372, 2017.
- [50] T.A. Apalara,. On the stability of porous-elastic system with microtemperatures. Journal of Thermal Stresses, pages 1–14, 2019.
- [51] T.A. Apalara,. General decay of solutions in one-dimensional porous-elastic system with memory. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 469(2):457–471, 2019.
- [52] Z. Liu and S. Zheng. Semigroups associated with dissipative systems. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC; 1999.