

# وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR –ANNABA  
UNIVERSITY

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR  
ANNABA



جامعة باجي مختار  
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2020

Département de Mathématiques



## THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Option

Mathématiques Appliquées

**Sur le nombre maximum de cycles limites qui  
bifurquent des orbites périodiques d'un centre  
isochrone**

Présentée par:

**BEY Meryem**

**DIRECTEUR DE THÈSE:** BADI Sabrina Prof. Univ. Guelma

**CO-DIRECTEUR DE THÈSE :** MAKHLOUF Amar Prof. Univ. Annaba

Devant le jury

**PRESIDENT:** LAOUAR Abdelhamid Prof. Univ. Annaba

**EXAMINATEUR:** HADIDI Elbahi M.C.A Univ. Annaba

**EXAMINATEUR:** KHEMIS Rabah M.C.A Univ. Skikda

---

## Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu, à " ALLAH " Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force et la volonté d'achever ce modeste travail.

Deuxièmement, je voudrais adresser tous mes sincères remerciements à ma directrice de thèse la professeure SABRINA BADI et le co-directeur de thèse le professeur AMAR MAKHLOUF qui ont accepté de diriger ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec eux et je ne peux qu'admirer leurs talents. Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à Mme BADI pour ses conseils précieux et sa confiance qu'elle m'a donnés. Je la remercie aussi pour sa patience et pour le temps qu'elle m'a consacré toute au long de cette thèse. C'est avec la même sincérité que je tiens particulièrement à remercier Mr MAKHLOUF aussi bien pour son regard critique, sa disponibilité et ses précieux conseils. Il est certainement clair que cette thèse n'aurait pas pu être soutenue sans eux, pour cela, je les suis très reconnaissante.

Je tiens également à remercier vivement Mr ABDELHAMID LAOUAR, Professeur à l'Université Badji Mokhtar-Annaba, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également au Dr ELBAHI HADIDI, Maître de conférences "A" à l'Université Badji Mokhtar-Annaba et au Dr RABAH KHEMIS, Maître de conférences "A" à l'Université de Skikda, d'avoir accepté de faire partie de ce jury et aussi d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter cette thèse.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents qui m'ont toujours encouragé, soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir, à mes sœurs, à mes frères et à tous ceux qui de loin ou de près, m'ont accompagné, soutenu et encouragé à terminer cette thèse.

**Merci à tous...**

---

## Résumé

Dans cette thèse, on étudie :

- Premièrement, le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre isochrone uniforme situé à l'origine du système  $\dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2)$ ,  $\dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2)$  perturbé par une classe polynômiale d'ordre cinq de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 p_i(x, y), \\ \dot{y} &= x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 q_i(x, y),\end{aligned}$$

où

$$p_i(x, y) = \sum_{j+k=i} a_{jk} x^j y^k, \quad q_i(x, y) = \sum_{j+k=i} b_{jk} x^j y^k$$

sont des polynômes homogènes de degré  $i$  et  $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$  avec  $\varepsilon$  suffisamment petit.

- Deuxièmement, le nombre de cycles limites d'un système différentiel polynomial discontinu par morceaux formé de deux systèmes différentiels polynomiaux séparés par l'hyperplan  $y = 0$ .

Les résultats obtenus sont démontrés grâce à la théorie de moyennisation.

**Mots clés** : cycle limite, centre isochrone, théorie de moyennisation, système quartique discontinu.

---

---

## Abstract

In this thesis, we study :

- Firstly, the maximum number of limit cycles that can bifurcate from periodic orbits of the uniform isochronous center located at the origin of the system  $\dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2)$ ,  $\dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2)$  when it is perturbed inside the whole class of quintic polynomial differential systems of the form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 p_i(x, y), \\ \dot{y} &= x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 q_i(x, y),\end{aligned}$$

where

$$p_i(x, y) = \sum_{j+k=i} a_{jk} x^j y^k, \quad q_i(x, y) = \sum_{j+k=i} b_{jk} x^j y^k$$

are homogeneous polynomials of degree  $i$  and  $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$  with  $\varepsilon$  sufficiently small.

- Secondly, the number of limit cycles of discontinuous piecewise polynomial differential system formed of two polynomial differential systems separated by the hyperplane  $y = 0$ .

The results obtained are demonstrated by the averaging theory.

**Keywords** : Limit cycle, isochronous center, averaging theory, discontinuous quartic system.

## المخلص

في هذه الأطروحة ندرس:

أولاً: العدد الاعظمي للحلول الدورية المنعزلة التي تشعب المسارات الدورية للمركز المتزامن المتواجد داخل النظام

التفاضلي  $(\dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2), \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2))$  المتذبذب بواسطة فئة من الجمل التفاضلية كثيرة

الحدود من الرتبة الخامسة من الشكل:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 p_i(x, y), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 q_i(x, y), \end{cases}$$

حيث

$$p_i(x, y) = \sum_{j+k=i} a_{jk} x^j y^k, \quad q_i(x, y) = \sum_{j+k=i} b_{jk} x^j y^k$$

عبارة عن كثيرات حدود من الدرجة  $i$  و  $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$  و  $\varepsilon$  وسيط صغير بما يكفي.

ثانياً: عدد الدورات المنعزلة لنظام تفاضلي متعدد الحدود متقطع جزئياً يتكون من نظاميين تفاضليين مفصولين بواسطة المستقيم  $y = 0$ .

النتائج المتحصل عليها تمت باستخدام نظرية المتوسط.

الكلمات المفتاحية: الدورات المنعزلة، مركز متزامن، نظرية المتوسط، نظام رباعي منفصل.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>		<b>vi</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>		<b>1</b>
1.1 Problème à valeur initiale . . . . .		1
1.1.1 Existence et unicité de la solution . . . . .		1
1.1.2 Stabilité de la solution . . . . .		2
1.1.3 Système dynamique . . . . .		3
1.1.4 Notion du flot . . . . .		4
1.2 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes . . . . .		5
1.2.1 Point critique et linéarisation . . . . .		6
1.2.2 Classification et nature des points critiques . . . . .		6
1.2.3 Notion de stabilité des points critiques . . . . .		7
1.2.4 Plan et portrait de phase . . . . .		12
1.2.5 Théorème de Hartman-Grobman . . . . .		12
1.2.6 Orbites périodiques et cycles limites . . . . .		13
1.3 Existence et non-existence des cycles limites . . . . .		15
1.4 Facteur intégrant . . . . .		20
1.5 Intégrale première . . . . .		24
1.6 Centre isochrone . . . . .		25
1.6.1 Classification des centres isochrones uniformes pour certains systèmes différentiels polynomiaux . . . . .		27
<b>2 Théorie de moyennisation</b>		<b>29</b>
2.1 Théorie de moyennisation d'ordre un . . . . .		30
2.2 Un autre théorème de moyennisation du premier ordre . . . . .		33
<b>3 Perturbation d'un centre isochrone quartique</b>		<b>39</b>
3.1 Moyennisation pour les systèmes autonomes planaires . . . . .		39
3.2 Bifurcation de cycles limites pour un système quartique ayant un centre isochrone . . . . .		44
3.3 Le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodiques d'un centre isochrone . . . . .		45

<b>4</b>	<b>Systèmes différentiels discontinus à deux zones</b>	<b>50</b>
4.1	Introduction . . . . .	50
4.2	Cycles limites des systèmes différentiels quartiques discontinus à deux zones . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Bifurcation des cycles limites pour un système différentiel plan ayant une intégrale première non rationnelle</b>	<b>60</b>
5.1	Perturbation d'un centre bidimensionnel ayant une intégrale première non rationnelle . . . . .	60
5.1.1	Preuve du Théorème 5.1.1 . . . . .	62
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>66</b>
	<b>Appendice 1</b>	<b>67</b>
	<b>Appendice 2</b>	<b>72</b>
	<b>Appendice 3</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

# Introduction générale

La théorie des systèmes dynamiques constitue une branche très importante des mathématiques. Un système dynamique est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système, cette évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes : une évolution continue dans le temps ou une évolution discontinue dans le temps. Les équations différentielles sont au cœur de l'analyse depuis des siècles et possèdent donc un rôle éminent pour les mathématiques. De plus de nombreuses situations réelles pouvant être modélisées grâce à des équations différentielles, ces dernières constituent un outil éprouvé pour formuler des phénomènes en termes mathématiques à partir d'autres disciplines comme la physique, la biologie, la mécanique, l'économie, l'astronomie, la chimie,... etc.

À leur début, les équations différentielles sont étroitement associées à la résolution de problèmes géométriques, à la physique newtonienne (dynamique du point, mouvements des planètes) et à la formalisation du calcul différentiel et intégral. Elles deviennent rapidement un instrument efficace d'analyse des phénomènes de la nature et une source de questionnements au sujet des concepts mathématiques comme celui de fonction. En 1879, survient un événement majeur, par le fondateur d'une théorie nouvelle, la publication de la thèse de doctorat d'Henri Poincaré. Dans l'introduction, l'auteur présente la nouvelle approche comme suit :

*Malheureusement, il est évident que dans la grande généralité des cas qui se présentent on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. (...). Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples...*

Ainsi est née la théorie qualitative des équations différentielles. En quoi consiste-t-elle? Essentiellement à décrire le comportement qualitatif, local ou global, des courbes définies par les solutions d'un système différentiel donné, sans connaître les expressions analytiques de ces dernières. La théorie qualitative est le premier jalon d'un long et riche processus qui a débordé le premier domaine de compréhension des équations différentielles pour fonder la théorie des systèmes dynamiques.

---

Dans le chapitre VI de son second mémoire "Sur les courbes définies par une équation différentielle", **Poincaré** [54, p. 261], présente la théorie des cycles limites en 1882. Il démontre l'existence d'un nouveau genre de courbes fermées qu'il nomme "cycle limite". L'étude des cycles limites des systèmes différentiels plans a été l'un des principaux problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles où un cycle limite pour un système différentiel plan, est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques. Le premier exemple de cycle limite a été présenté au chapitre VII par **Poincaré** [54, p. 274]. Il s'agit d'un système de deux équations différentielles du premier ordre et du premier degré suivant :

$$\frac{dx}{x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1)} = \frac{dy}{y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1)}.$$

Bien entendu, ce système qui a été construit par Poincaré pour illustrer son propos ne recouvre pas une réalité physique. Néanmoins, il permet de mettre en évidence l'existence d'une courbe fermée invariante (au sens de Darboux [16]) qui n'est autre que le cercle cycle limite algébrique d'équation :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Un des principaux théorèmes de la dynamique non linéaire est le théorème de **Poincaré-Bendixon** qui assure que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point critique. Pour la non-existence des solutions périodiques, il existe les critères de **Bendixon** et celui de **Dulac**, qui affirment que sous certaines conditions, le système différentiel planaire n'admet aucune solutions périodiques.

Le problème de l'étude des cycles limites bifurquant à partir d'un centre ou de ses solutions périodiques a été étudié de manière exhaustive au cours du dernier siècle, il est étroitement lié au 16<sup>ème</sup> problème de **Hilbert**.

En effet, le 16<sup>ème</sup> problème de **Hilbert** est un problème de longue date. Il est apparu en 1900, lors du deuxième congrès international de mathématiques où le mathématicien **David Hilbert**(1862 – 1943) a présenté une liste de 23 problèmes mathématiques "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". La seconde partie du seizième problème de **Hilbert** porte sur le nombre maximal et l'emplacement des cycles limites de tous les champs de vecteurs polynomiaux plans de degré  $n$ . Il peut être formulé de la façon suivante : Quel est le nombre maximum des cycles limites noté  $H(n)$  que peut avoir le système polynomial planaire de degré  $n$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

---

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de variables réelles  $(x, y)$  à coefficients réels et de degré maximal  $n$ .

En 1923, **Dulac** [19], a proposé une démonstration assurant que  $H(n)$  est fini pour tout  $n$ , mais sa démonstration comportait une erreur qui a été révélée par **Ilyashenko** en 1985. La résolution de ce problème de **Dulac** ne vint que quelques années plus tard lorsque **Ilyashenko** [32] (1991) et **Ecalte, Martinet et Moussu** [21] (1987) puis **Ecalte** [20] (1992) donnèrent des preuves au théorème de Dulac.

Pour s'attaquer à ce problème, de nombreux chercheurs ont étudié le nombre de cycles limites de divers systèmes différentiels polynomiaux plans à titre d'exemple l'équation de **Van Der Pol**. En particulier, le problème concernant le nombre de cycles limites en perturbant les orbites périodiques d'un centre a été étudié de manière approfondie dans la littérature et fait l'objet de plusieurs articles, pour plus de détails voir [12, 25, 26, 31, 40].

Malgré tous les efforts, le problème des cycles limites n'est toujours pas résolu 112 ans après son énoncé. La théorie de la moyennisation a joué un rôle crucial dans l'étude des cycles limites des systèmes différentiels. Cette théorie est l'une des plus importantes théories de perturbations utilisée actuellement, elle consiste à perturber un système différentiel doté d'un centre, ainsi le système perturbé peut présenter des cycles limites qui bifurquent, soit à partir du point d'équilibre central, soit à partir de certaines orbites périodiques entourant le centre. De nombreux résultats ont été trouvés sur le nombre de cycles limites des systèmes différentiels polynomiaux, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un, tels que **Llibre** [40], **Buică et Llibre** [8, 9] et **Gine et Llibre** [27].

L'étude des systèmes différentiels polynomiaux dans  $\mathbb{R}^2$  ayant un centre isochrone a évolué au cours des dernières années, voir [14, 18, 35, 36]. La pertinence d'étudier ces systèmes est due, à leur importance dans le problème général de l'isochronisme.

Un centre isochrone est un centre dont toutes les orbites périodiques ont la même période. **Christiaan Huygens** est crédité d'être l'un des premiers chercheurs à enquêter sur le système isochrone au *XVII* siècle. Il a étudié le pendule cycloïdal, qui présente des oscillations isochrones, par opposition à la monotonie de la période du pendule habituel. C'est probablement le premier exemple d'un centre isochrone non linéaire.

L'étude des systèmes différentiels polynomiaux dans  $\mathbb{R}^2$  ayant un centre isochrone a fait l'objet de plusieurs travaux ces dernières années, pour plus de détails voir [2, 10, 14, 18, 29].

En 2014, **Peng et Feng** [52] ont étudié le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques du système différentiel polynomial

---

quartique ayant un centre isochrone

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (2)$$

perturbé par polynômes quartiques.

En effet, le système qu'ils ont considéré est le suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon q(x, y), \end{cases}$$

où  $p(x, y)$  et  $q(x, y)$  sont des polynômes quartiques donnés par

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 \\ &\quad + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4, \\ q(x, y) &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{12}xy^2 + b_{40}x^4 + b_{31}x^3y + b_{22}x^2y^2 \\ &\quad + b_{13}xy^3 + b_{04}y^4, \end{aligned}$$

et  $\varepsilon$  un petit paramètre. En appliquant la théorie de moyennisation du premier ordre, ils ont montré qu'au plus trois cycles limites bifurquent d'un tel système. On remarque que les auteurs n'ont pas couvert tous les systèmes différentiels polynomiaux quartiques perturbés, parce qu'ils n'ont pas considéré les coefficients  $a_{00}$ ,  $a_{20}$ ,  $a_{02}$ ,  $a_{30}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_{00}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{21}$ ,  $b_{03}$  dans leur étude.

Suite à ce travail, en 2015, **Itikawa** et **Llibre** [34] ont amélioré le résultat de Peng et Feng [52] en prouvant cinq cycles limites supplémentaires. Plus précisément, ils ont étudié le nombre maximum de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques entourant le centre isochrone situé à l'origine du système différentiel polynomial quartique (2) perturbé par des polynômes quartiques, en prenant les coefficients non considérés dans leur travail. En utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, ils ont prouvé qu'il existe qu'au moins 8 cycles limites peuvent bifurquer d'un tel système.

Dans ce travail, on s'intéresse : premièrement au nombre maximum des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre isochrone quartique (2) perturbé par des polynômes homogènes quintiques et plus précisément notre système considéré est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 p_i(x, y), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 q_i(x, y), \end{cases}$$

où

$$p_i(x, y) = \sum_{j+k=i} a_{jk} x^j y^k, \quad q_i(x, y) = \sum_{j+k=i} b_{jk} x^j y^k$$

---

sont des polynômes homogènes de degré  $i$  et avec les coefficients  $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ , ceci en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un ;  
deuxièmement, au nombre maximum de cycles limites des systèmes différentiels discontinus à deux zones séparées par une ligne droite, en utilisant aussi la théorie de moyennisation d'ordre un.

Cette thèse comporte cinq chapitres.

• **Le premier chapitre** est un rappel sur les notions de base de la théorie qualitative des systèmes dynamiques. Nous commençons par définir les outils mathématiques qui sont nécessaires pour l'étude de cette thèse et des définitions élémentaires tels que : le système dynamique, les points critiques et leur nature, la linéarisation, l'orbite périodique, le cycle limite ainsi que des théorèmes sur l'existence et la non-existence des cycles limites, on définit le facteur intégrant et le centre isochrone et on donne ces classifications pour certains systèmes différentiels polynomiaux.

• **Le deuxième chapitre** est consacré à l'outil principal qu'on va utiliser pour démontrer nos différents résultats, à savoir la théorie de moyennisation. On expose cette théorie à travers des théorèmes et on l'illustre à travers quelques exemples.

• **Le troisième chapitre** est l'essentiel de notre travail, dans lequel on étudie la bifurcation des cycles limites du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon q(x, y), \end{cases}$$

où  $p(x, y)$  et  $q(x, y)$  sont des polynômes homogènes quintiques, avec  $\varepsilon$  suffisamment petit, en utilisant la théorie de moyennisation d'ordre un. Cette étude a fait l'objet d'une publication :

**M. Bey, S. Badi, K. Fernane and A. Makhoulouf**, "The number of limit cycles bifurcating from the periodic orbits of an isochronous center". Math Meth Appl Sci. 2018 ; 1-9. <https://doi.org/10.1002/mma.5385>.

• **Le quatrième chapitre** est consacré au nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel polynomial discontinu formé de deux systèmes différentiels polynomiaux séparés par l'hyperplan  $y = 0$ , en utilisant aussi la théorie de moyennisation. Cette étude a fait l'objet d'un article accepté pour publication dans le journal

---

"Applied Mathematics E-Notes" sous le titre :  
M. Bey, S. Badi and K. Fernane, "Nineteen limit cycles in discontinuous quartic differential system with two zones".

- **Le cinquième chapitre** étudie les cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un système différentiel polynomial ayant une intégrale première non rationnelle.

## 1.1 Problème à valeur initiale

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue.

### Définition 1.1.1.

*i) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur  $U$  est une relation de la forme :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

que l'on note brièvement

$$\dot{x} = f(t, x) \quad \text{où} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.1)$$

*ii) Pour  $(t_0, x_0)$  donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (1.1) s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

### Définition 1.1.2.

*i) La fonction  $x(t)$  est dite solution de l'équation (1.1) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  si elle est définie et continûment dérivable sur  $I$  et si  $\forall (t, x(t)) \in U, \forall t \in I, x(t)$  satisfait la relation (1.1) sur  $I$ .*

*ii) Soit  $(t_0, x_0) \in U$  donnée, la fonction  $x(t)$  est dite solution du problème à valeur initiale (1.2) s'il existe un intervalle  $I$  contenant  $t_0$  tel que  $x(t)$  est une solution de l'équation (1.1) sur  $I$  et vérifie  $x(t_0) = x_0$ .*

### 1.1.1 Existence et unicité de la solution

**Définition 1.1.3.** *Considérons la fonction  $f(t, x)$  avec  $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, |t - t_0| \leq a$ , et  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que la fonction  $f(t, x)$  est Lipschitzienne par rapport à  $x$  s'il existe  $K > 0$  telle que :*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times D.$$

*La constante  $K$  est appelée constante de Lipschitz.*

**Théorème 1.1.1.** *On considère le système différentiel :*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

*et on suppose que la fonction vectorielle  $f(t, x)$  est Lipschitzienne de rapport  $K$  par rapport à  $x$ , uniformément en  $t \in [-a, a]$ . Soit  $x_0$  une donnée initiale, il existe alors une seule solution  $x(t)$  du système différentiel (1.3) qui satisfait  $x(0) = x_0$  et qui est définie sur l'intervalle  $[-c, c]$  avec  $c < \min(a, \frac{1}{K})$ .*

**Preuve.**

Cette solution satisfait l'équation intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u, x(u)) du,$$

on considère l'espace des fonctions continues  $y \in C^0([-a, a])$  muni de la norme  $\|y\| = \max_{t \in [-a, a]} \|y(t)\|$ . Soit  $L : C^0([-a, a]) \rightarrow C^0([-a, a])$ , l'opérateur défini par

$$L(y)(t) = x(0) + \int_0^t f(u, y(u)) du,$$

cet opérateur satisfait

$$L(y)(t) - L(y')(t) = \int_0^t [f(u, y(u)) - f(u, y'(u))] du,$$

et donc

$$\|L(y) - L(y')\| \leq cK \|y - y'\|.$$

Si on pose  $c < \min(a, \frac{1}{K})$ , l'opérateur  $L$  est une contraction et il possède donc un unique point critique dans l'espace fonctionnel  $C^0([-a, a])$ . Cet unique point critique est une fonction continue qui est solution du système différentiel et ceci démontre l'existence et l'unicité cherchées.

### 1.1.2 Stabilité de la solution

La stabilité des solutions des équations différentielles est l'un des principaux problèmes lié à l'étude des systèmes dynamiques. Cette notion a été introduite par **Lyapunov** (1857 – 1918).

Soit le système des équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

Supposons que  $f(t, x)$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité des solutions.

**Définition 1.1.4.** Soit  $\phi(t)$  une solution du système (1.4) telle que  $\phi(t_0) = \phi_0$ , elle est dite stable au sens de Lyapunov si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  telle que pour toute solution  $x(t)$  de (1.4) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t_0.$$

Si de plus, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0,$$

alors la solution  $\phi(t)$  est dite asymptotiquement stable.

**Remarque 1.1.1.** Une solution qui n'est pas stable est dite instable.

### 1.1.3 Système dynamique

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Mathématiquement, on définit un système dynamique par

**Définition 1.1.5. (Système dynamique).** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- 1)  $U(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- 2)  $U(t, .) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
- 3)  $U(0, x) = x$ .
- 4)  $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)), \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.1.1.** Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels.

**Exemple 1.1.1.** Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $A$  est une matrice constante,  $t \in \mathbb{R}^+$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . La solution de (1.5) est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Le système (1.5) engendre un système dynamique

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, U(t, x) = e^{tA}x.$$

En effet :

- 1) On a  $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \|U(t + \tau, x) - U(t, x)\| &= \|e^{(t+\tau)A}x - e^{tA}x\| \leq \|e^{tA}\| \|e^{\tau A}x - x\| \leq e^{t\|A\|} \|e^{\tau A} - I\| \|x\| \\ &\leq e^{t\|A\|} (e^{|\tau\| \|A\|} - 1) \|x\| \rightarrow 0 \text{ quand } \tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d'où  $U(., x)$  est continue.

2) On a  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  :

$$\|U(t, x) - U(t, y)\| = \|e^{At}x - e^{At}y\| = \|e^{At}\| \|x - y\| < M \|x - y\|,$$

où  $M$  constante et puisque  $t$  est fixé on obtient la continuité de  $U(t, .)$ .

3) On a

$$U(0, x) = e^{A0}x = Ix = x.$$

4)  $\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$U(t + s, x) = e^{At}e^{As}x = U(t, e^{As}x) = U(t, U(s, x)).$$

D'où le résultat.

**Définition 1.1.6.** Un système dynamique  $U$  sur  $\mathbb{R}^n$  est linéaire si :

$$U(t, \alpha x + \beta y) = \alpha U(t, x) + \beta U(t, y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

### 1.1.4 Notion du flot

On représente ici la notion du flot pour des systèmes différentiels linéaires et ceux non linéaires.

#### a) Systèmes différentiels linéaires

Soit le système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

où  $A$  une matrice à coefficients réels. La solution du système (1.6) qui vérifie la valeur initiale  $x(0) = x_0$  est  $x(t) = e^{tA}x_0$ .

**Définition 1.1.7.** L'ensemble des applications  $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelé le flot du système (1.6).

**Définition 1.1.8.** Si toutes les valeurs propres de  $A$  ont des parties réelles non nulles alors le flot  $e^{tA} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dit hyperbolique et dans ce cas le système (1.6) est dit système linéaire hyperbolique.

#### b) Systèmes différentiels non linéaires

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

On note par  $I(x_0)$  l'intervalle maximum d'existence de la solution  $\Phi(t, x_0)$  du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

## 1.2. THÉORIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS NON LINÉAIRES AUTONOMES

---

**Définition 1.1.9.** Soit  $E$  un sous ensemble ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(E)$ , et soit pour  $x_0 \in E$ ,  $\Phi(t, x_0)$  la solution du problème (1.7) définie sur  $I(x_0)$ . Alors pour  $t \in I(x_0)$ , l'ensemble des applications  $\Phi_t$  défini par

$$\Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel (1.7).

• Notons que  $\Phi_t(x_0)$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\Phi_t(x_0)$  est de classe  $C^1$ .
2.  $\Phi_0(x_0) = x_0$ .
3.  $\Phi_{t+s}(x_0) = \Phi_t(\Phi_s(x_0))$ .

**Remarque 1.1.2.** Le flot est dit autonome si  $f$  ne dépend pas explicitement du temps  $t$ , sinon il est dit non autonome.

**Exemple 1.1.2.** On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution de ce problème est :  $\Phi(t, x_0) = e^{At}x_0$  avec

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

donc le flot associé à ce problème est défini par :

$$\begin{aligned} \Phi_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x_0 &\mapsto \Phi_t(x_0) = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} x_0. \end{aligned}$$

## 1.2 Théorie des systèmes différentiels non linéaires autonomes

Dans cette section, on considère le système différentiel non linéaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

### 1.2.1 Point critique et linéarisation

**Définition 1.2.1.** On appelle point critique (point d'équilibre, point singulier ou point fixe) du système (1.8), tout point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  vérifiant

$$f(x_0) = 0.$$

**Remarque 1.2.1.** Un point qui n'est pas critique est dit régulier.

**Définition 1.2.2. (Linéarisation)** Le système

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{où } A = Df(x_0) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (1.9)$$

est appelé le système linéarisé de (1.8) en  $x_0$ .

**Exemple 1.2.1.** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 4y, \\ \dot{y} = 2x + 3y^2, \end{cases} \quad (1.10)$$

l'origine est le seul point critique pour ce système.

La matrice jacobienne associée à (1.10) calculée en  $(0, 0)$  est

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le système linéarisé de (1.10) en  $(0, 0)$  est

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases} \quad (1.11)$$

**Remarque 1.2.2.** La linéarisation d'un système différentiel amène à l'étude de la nature des points critiques.

**Définition 1.2.3.** Le point critique  $x_0$  de (1.8) est dit point critique hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x_0)$  n'a de partie réelle nulle.

### 1.2.2 Classification et nature des points critiques

**Définition 1.2.4.** On considère le système :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

soit  $x_0$  son point critique.

- Le point critique  $x_0$  est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x_0)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.
- Le point  $x_0$  est dit **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives.
- Le point  $x_0$  est une **source** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x_0)$  ont des parties réelles positives.

**Exemple 1.2.2.** Soit le système non linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y^2, \\ \dot{y} = x^3 + y. \end{cases} \quad (1.12)$$

Le système (1.12) a un seul point critique qui est l'origine  $(0, 0)$ , et le système linéarisé en ce point est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ce système a deux valeurs propres réelles de même signe  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 1$ , alors le point critique  $(0, 0)$  est une source.

### 1.2.3 Notion de stabilité des points critiques

L'étude de la stabilité des solutions d'un système différentiel amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ces solutions.

**Théorème 1.2.1.** Soit  $x_0$  un point critique pour le système.

$$\dot{x} = f(x).$$

- i) Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $Df(x_0)$  ont des parties réelles négatives, alors le point critique  $x_0$  est asymptotiquement stable.
- ii) S'il existe au moins une valeur propre de  $Df(x_0)$  avec une partie réelle positive, alors le point critique  $x_0$  est instable.
- iii) Si  $Df(x_0)$  a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point critique  $x_0$ .

- Cas d'un système plan à coefficients constants :  
Soit le système

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

## 1.2. THÉORIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS NON LINÉAIRES AUTONOMES

---

où  $A$  une matrice carrée à coefficients réels, l'origine  $(0, 0)$  est le point critique. Considérons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de la matrice  $A$ . On distingue les différents cas selon les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

1. Si  $\lambda_1, \lambda_2$  sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique  $x = x_0$  est un point selle, il est toujours instable (voir la figure (1.1)).

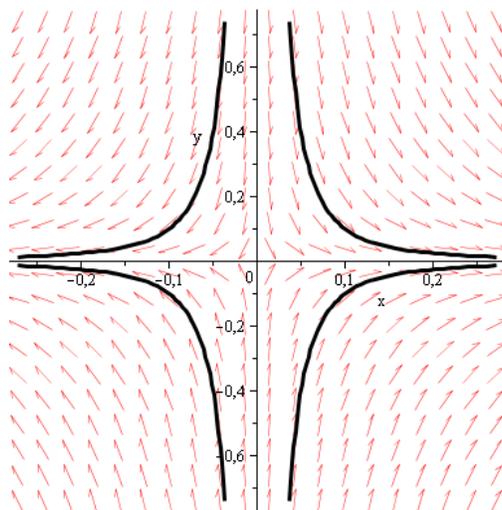


FIGURE 1.1 – Point selle.

2. Si  $\lambda_1, \lambda_2$  sont réelles de même signe, on a trois cas :

- Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud stable (voir la figure (1.2)).
- Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud instable (voir la figure (1.3)).
- Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , le point critique  $x = x_0$  est un nœud propre, il est stable si  $\lambda < 0$  ( voir la figure (1.4)) et instable si  $\lambda > 0$  (voir la figure (1.5) ).

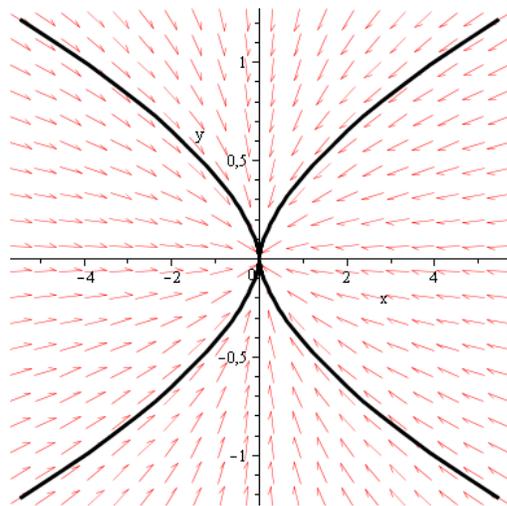


FIGURE 1.2 – Nœud stable.

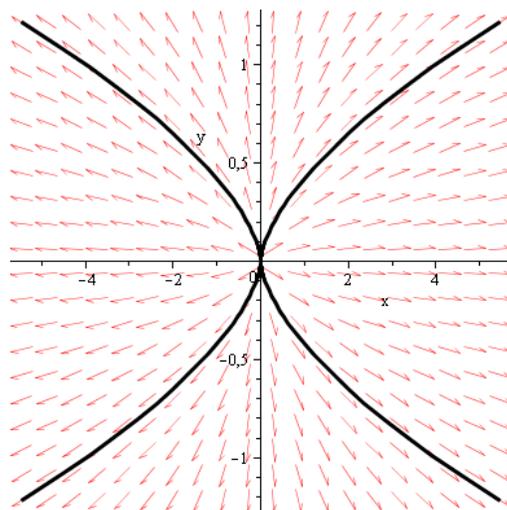


FIGURE 1.3 – Nœud instable.

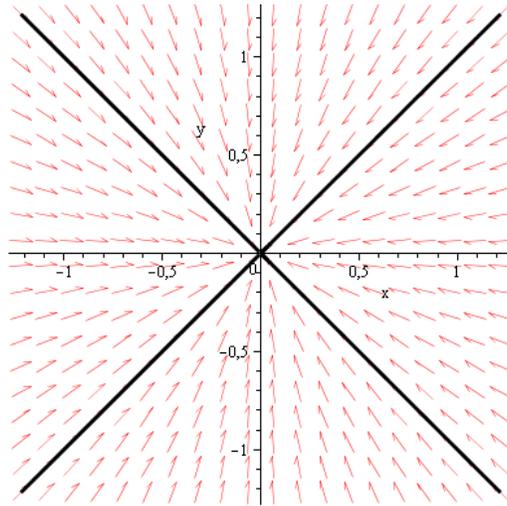


FIGURE 1.4 – Nœud propre stable.

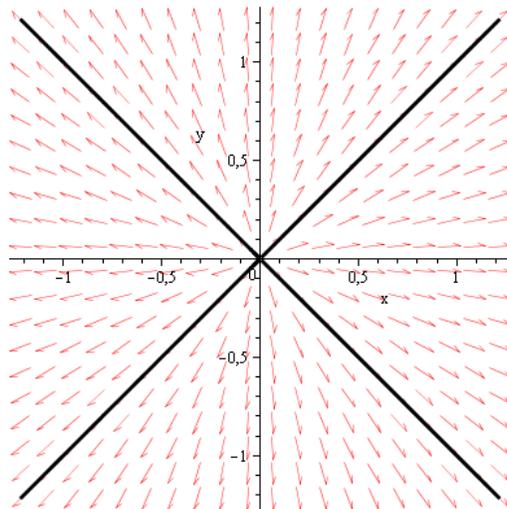


FIGURE 1.5 – Nœud propre instable.

## 1.2. THÉORIE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS NON LINÉAIRES AUTONOMES

---

3. Si  $\lambda_1, \lambda_2$  sont complexes conjuguées et  $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$ , alors le point critique  $x = x_0$  est un foyer. Il est stable si  $Re(\lambda_{1,2}) < 0$  (voir la figure (1.6)) et instable si  $Re(\lambda_{1,2}) > 0$  (voir la figure (1.7)).

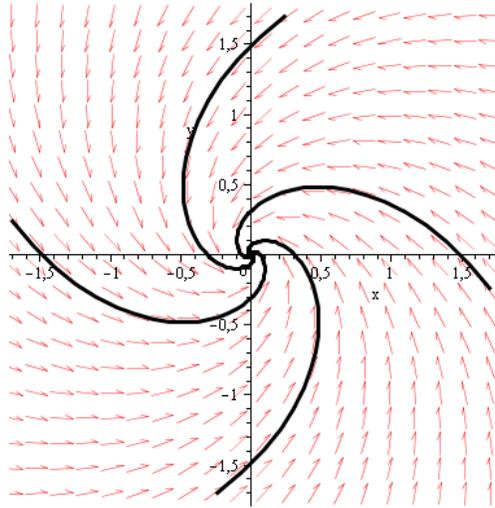


FIGURE 1.6 – Foyer stable.

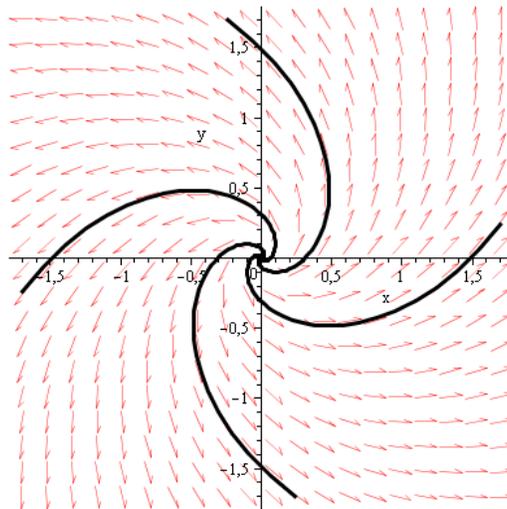


FIGURE 1.7 – Foyer instable.

4. Si  $\lambda_1, \lambda_2$  sont imaginaires pures, alors le point critique  $x = x_0$  est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir la figure (1.8)).

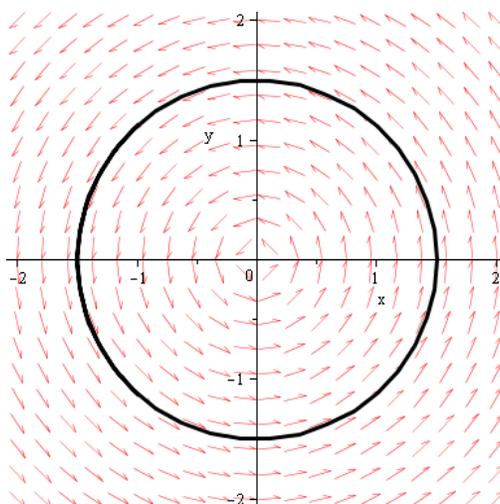


FIGURE 1.8 – Un centre.

### 1.2.4 Plan et portrait de phase

**Définition 1.2.5.** Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.13)$$

Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.13) représentent dans le plan  $(xoy)$  des courbes appelées orbites ou trajectoires, les points critiques sont représentés par des points. La figure complète comportant les trajectoires et les points correspondant aux points critiques est appelée portrait de phase et le plan  $(xoy)$  est dit plan de phase.

### 1.2.5 Théorème de Hartman-Grobman

Le théorème de Hartman-Grobman (voir [53]) est un résultat important dans la théorie qualitative locale des équations différentielles ordinaires. Il montre qu'au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique  $x_0$  le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.14)$$

a la même structure qualitative du système linéarisé

$$\dot{x} = Df(x_0)x. \quad (1.15)$$

Autrement dit, si l'origine est un point selle, foyer ou nœud pour le système linéarisé (1.15), alors le point critique  $x_0$  sera respectivement selle, foyer ou nœud pour le système non linéaire (1.14). Mais si l'origine est de type centre pour le système (1.15) alors on ne peut rien dire sur la nature du point critique  $x_0$  de (1.14).

**Exemple 1.2.3.** *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2xy^2, \\ \dot{y} = -2y + 4x^2y. \end{cases}$$

*L'origine  $(0,0)$  est le seul point critique de ce système, le système linéarisé en ce point est  $\dot{x} = Df(0,0).x$  avec*

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

*Ce système admet deux valeurs propres réelles de signes différents  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Donc  $(0,0)$  est un point selle instable pour le système linéarisé, d'après le théorème de Hartman-Grobman  $(0,0)$  est aussi un point selle instable pour le système non linéaire.*

**Exemple 1.2.4.** *Soit le système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$$

*L'origine  $(0,0)$  est le seul point critique de ce système, la matrice jacobienne en ce point est*

$$Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Elle admet deux valeurs propres imaginaires pures  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Alors  $(0,0)$  est un centre stable pour le système linéarisé, mais pour le système non linéaire on ne peut rien dire.*

## 1.2.6 Orbites périodiques et cycles limites

Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.16}$$

**Définition 1.2.6. (Orbite Périodique).** *On appelle orbite périodique toute trajectoire fermée  $\phi(t, x)$  du système (1.16) telle qu'il existe un nombre  $T > 0$ , vérifiant*

$$\phi(t + T, x) = \phi(t, x),$$

*le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie cette égalité est appelé période.*

**Proposition 1.2.1.** *Toute solution périodique entoure au moins un point critique.*

**Définition 1.2.7. (Cycle limite).** *Pour un système plan, un cycle limite est une orbite fermée isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.*

**Remarque 1.2.3.** *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

**Définition 1.2.8. (Amplitude du cycle limite).** *L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  du cycle limite.*

### Stabilité des cycles limites

**Théorème 1.2.2.** *Étant  $C$  la trajectoire correspondante au cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de  $C$  s'enroulent en spirales autour de  $C$  soit pour  $t \rightarrow +\infty$  ou bien pour  $t \rightarrow -\infty$ .*

1. *Le cycle limite est dit **stable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont attirées vers  $C$ .*
2. *Le cycle limite est dit **instable**, si toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines sont refoulées de  $C$ .*
3. *Le cycle limite est dit **semi-stable**, si les trajectoires voisines de  $C$  sont attirées d'un côté et refoulées de l'autre côté.*

**Exemple 1.2.5.** *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + 2y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1.17)$$

*En coordonnées polaires  $x = r \cos(t)$ ,  $y = r \sin(t)$  avec  $r > 0$ , le système (1.17) devient :*

$$\begin{cases} \dot{r} = 2r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1, \end{cases}$$

*d'où*

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = \pm 1.$$

*Comme  $r > 0$ , on accepte que la racine positive  $r = 1$ . Donc, pour  $r = 1$  on a la solution périodique  $(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$ , avec  $\theta(0) = \theta_0$ . Dans le plan de phase, il y a un seul cycle limite d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et d'amplitude  $r = 1$ . Voir la figure (1.9).*

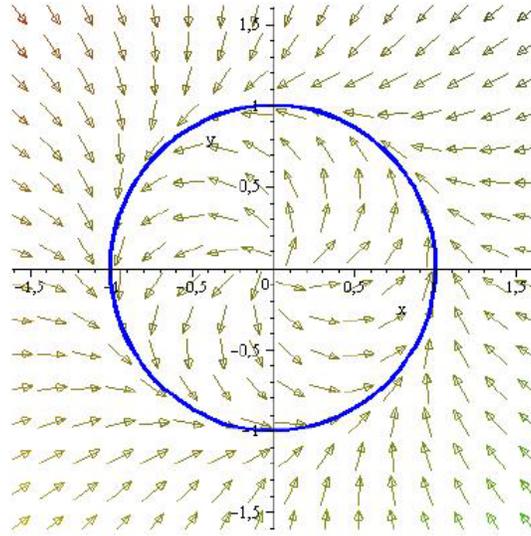


FIGURE 1.9 – Cycle limite du système (1.17).

### 1.3 Existence et non-existence des cycles limites

**Théorème 1.3.1.** [53](*Poincaré-Bendixson*). Soit le système plan suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.18)$$

Supposons que  $f$  et  $g$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $E$ , où  $E$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , le système (1.18) a une orbite  $\gamma$  telle que l'orbite positive  $\gamma_+(p) = \{\Phi(t, p), t \geq 0\}$  passant par le point  $p$  est contenue dans un sous ensemble compact  $F$  de  $E$ . Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers un point d'équilibre.
- Soit  $\gamma_+(p)$  tend vers une orbite périodique.
- Soit  $\gamma_+(p)$  est une orbite périodique.

Une conséquence très importante de ce théorème est quand  $F$  ne contient pas de points critiques, dans ce cas, on est certain de l'existence d'une solution périodique.

La difficulté dans l'application de ce résultat est bien la construction de la région  $F$  (elle correspond souvent à un anneau).

Pour cela cherchons deux cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  telle que  $(C_1)$  soit à l'intérieur de  $(C_2)$  (Notons que la recherche des cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ressemble à la recherche de la

fonction de Lyapunov  $v(x, y) = x^2 + y^2, x^4 + y^2, x^4 + y^4 \dots$ ) comme suit

$$\begin{cases} c_1 > 0 : (C_1) : x^2 + y^2 = c_1 \\ c_2 > 0 : (C_2) : x^2 + y^2 = c_2, \text{ telle que } c_1 < c_2. \end{cases}$$

Considérons  $(C) : v(x, y) = x^2 + y^2 = c > 0$ .

Si pour tout point  $p \in (C)$ .

On a

$$\left[ \frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} > 0$$

$\Rightarrow$  Toute trajectoire qui passe par le point  $p$  se dirige vers son extérieur.

Si pour tout point  $p \in (C)$ .

On a

$$\left[ \frac{dv}{dt} \right]_p = \frac{dv}{dx} \dot{x} + \frac{dv}{dy} \dot{y} < 0$$

$\Rightarrow$  Toute trajectoire qui passe par le point  $p$  se dirige vers son intérieur.

**Exemple 1.3.1.** *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

*qui admet au moins une solution périodique dans une région de  $\mathbb{R}^2$ .*

*En effet, le point  $(0, 0)$  est le seul point critique, la matrice jacobienne en  $(0, 0)$  est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*cette matrice admet deux valeurs propres complexes  $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$ , donc  $(0, 0)$  est un foyer instable pour le système linéarisé alors il reste un foyer instable*

pour le système non linéaire (d'après le théorème de Hartman-Grobman).

Cherchons l'anneau  $A$  :

Soit

$$v(x, y) = x^2 + y^2 = c$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dx}\dot{x} + \frac{dv}{dy}\dot{y} \\ &= 2x(-y + x - x(x^2 + y^2)) + 2y(x + y - y(x^2 + y^2)) \\ &= 2[(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2]. \end{aligned}$$

Si on prend

$$\begin{aligned} 0 < x^2 + y^2 < 1 &\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 < x^2 + y^2 \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dt} > 0 \end{aligned}$$

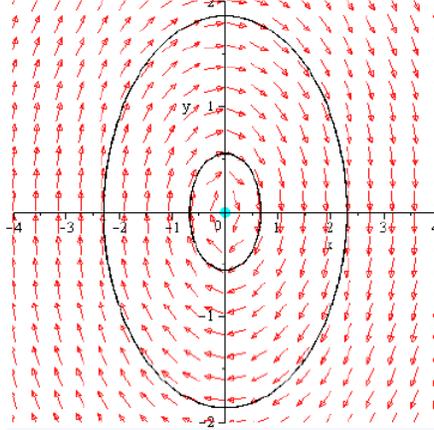
donc pour  $(C_1)$  :  $x^2 + y^2 = c_1$  avec  $0 < c_1 < 1$ , toute trajectoire coupant  $(C_1)$  se dirige vers l'extérieur.

Maintenant si on prend

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 > 2 &\Rightarrow 2(x^2 + y^2)^2 > (x^2 + y^2)^2 > 2(x^2 + y^2) \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dt} < 0 \end{aligned}$$

donc pour  $(C_2)$  :  $x^2 + y^2 = c_2$  avec  $c_2 > 2$ , toute trajectoire coupant  $(C_2)$  se dirige vers l'intérieur.

Alors d'après le théorème de Poincaré Bendixon il existe au moins une solution périodique dans l'anneau  $A$  formé des deux cercles  $(C_1)$  et  $(C_2)$  puisque cet anneau ne contient pas de points critiques. (Voir la figure suivante.)



**Théorème 1.3.2.** [53] (*Critère de Bendixson*). Soit le système plan suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases}$$

et soit  $F = (f, g)^\top \in C^1(E)$  où  $E$  est une région simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$ . Si la divergence du champ de vecteur  $F$  (notée  $\nabla F$ ) est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $E$ , alors ce système n'a aucune orbite fermée entièrement contenue dans  $E$ .

**Preuve.**

Supposons que (1.18) possède une solution périodique de période  $T$  noté  $\tau$ , elle correspond à une courbe (orbite) fermée dans  $E$ .

D'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \int \int_{G=\text{intérieur de } \tau} \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\tau} f dy - g dx \\ &= \int_0^T \left[ f(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} - g(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^T \left[ f(x(t), y(t)) g(x(t), y(t)) - g(x(t), y(t)) f(x(t), y(t)) \right] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, puisque  $\text{div} F$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe, c'est-à-dire, soit négatif soit positif, donc l'intégrale ne peut pas être nulle. Alors il ne peut avoir de solutions périodiques contenues dans  $E$ .

**Exemple 1.3.2.** *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 3xy^4, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - x^2y^3. \end{cases}$$

Soit  $F = (2xy - 3xy^4, x^2 - y^2 - x^2y^3)^T$ .

Puisque :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \nabla F \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 3xy^4) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 - x^2y^3) \\ &= 2y - 3y^4 - 2y - 3x^2y^2 \\ &= -3y^2(x^2 + y^2) < 0. \end{aligned}$$

Alors, d'après le critère de Bendixson ce système n'a aucun cycle limite dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 1.3.3.** [53] (**Critère de Dulac**). *Soit  $F = (f, g)^T \in C^1(E)$  où  $E$  est une région simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$ . S'il existe une fonction  $B \in C^1(E)$  telle que  $\nabla(BF)$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe dans  $E$ , alors le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

*n'admet aucune orbite fermée entièrement contenue dans  $E$ .*

**Preuve.**

Supposons qu'il existe une solution périodique  $\tau$  de période  $T$  contenue dans  $E$ . Elle est représentée par une trajectoire fermée dans le plan.

Soit  $G$  l'intérieur de cette trajectoire d'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \int \int_G \left( \frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\tau} Bf dy - Bg dx \\ &= \int_0^T B \left[ f(x, y) \frac{dy}{dt} - g(x, y) \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci est une contradiction, puisque  $\operatorname{div} BF$  est non identiquement nulle et ne change pas de signe, c'est-à-dire, soit négatif soit positif, donc l'intégrale ne peut pas être nulle. Alors il ne peut avoir de solution périodique entièrement contenue dans  $E$ .

**Exemple 1.3.3.** Soit le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - 2y + x^2 + 2y^2. \end{cases}$$

Avec  $F = (y, x - 2y + x^2 + 2y^2)^T$ .

Considérons  $B(x, y) = 2e^{-4x}$ , puisque

$$\begin{aligned} \nabla(BF) &= \frac{\partial}{\partial x}(BF) + \frac{\partial}{\partial y}(BF) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2e^{-4x}y) + \frac{\partial}{\partial y}(2e^{-4x}(x - 2y + x^2 + 2y^2)) \\ &= -8e^{-4x}y + 2e^{-4x}(-2 + 4y) = -4e^{-4x} < 0. \end{aligned}$$

Alors, il n'existe pas de cycle limite pour ce système.

## 1.4 Facteur intégrant

Considérons l'équation :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (1.19)$$

Supposons que  $M$  et  $N$  sont continues sur l'ensemble ouvert  $U = I \times J$ .

**Théorème 1.4.1. (Différentielle totale).** Soient  $M(x, y)$  et  $N(x, y)$  deux fonctions continues sur l'ensemble  $U = I \times J$ . Supposons que  $\frac{\partial M}{\partial y}$  et  $\frac{\partial N}{\partial x}$  existent et sont continues sur  $U$ , alors :

$$f : (x, y) \rightarrow f(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

est une différentielle totale (on dit aussi que l'équation (1.19) est une équation exacte) si et seulement si pour tout  $(x, y) \in U$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

**Exemple 1.4.1.** Considérons l'équation différentielle

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0, \quad (1.20)$$

on a

$$M(x, y) = 2xy \text{ et } N(x, y) = x^2 - y^2,$$

deux fonctions continues, qui vérifient

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x,$$

donc (1.20) est une équation exacte (ou bien différentielle totale).

Quand l'équation (1.19) n'est pas une différentielle totale, on cherche une fonction  $\mu(x, y)$  de telle façon que si on multiplie (1.19) par  $\mu(x, y)$ , elle devient une différentielle totale.

**Définition 1.4.1. (Facteur intégrant).** On appelle facteur intégrant de l'équation (1.19) une fonction  $\mu : (x, y) \rightarrow \mu(x, y)$  définie, continue et  $\mu(x, y) \neq 0$  pour tout  $(x, y) \in U$  telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{1.21}$$

sur  $U$ .

**Remarque 1.4.1.** Si  $f(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  est une équation aux différentielles totales alors pour tout  $\mu \equiv k$  ou  $k$  est une constante différente de zéro,  $\mu$  est un facteur de l'équation (1.19).

**Remarque 1.4.2.** Lorsque les fonctions  $M(x, y)$  et  $N(x, y)$  possèdent des dérivées partielles continues et qui ne s'annulent pas simultanément, alors le facteur intégrant existe toujours. Cependant, il n'y a pas de méthode générale pour le déterminer.

**Remarque 1.4.3.** Il existe plusieurs facteurs intégrants pour une seule équation. Autrement dit, le facteur intégrant d'une équation différentielle n'est pas unique.

• **Recherche du facteur intégrant :**

Considérons l'équation

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{1.22}$$

Soit  $\mu$  un facteur intégrant de l'équation (1.22), alors on a

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0,$$

la condition à vérifier est :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)N(x, y)),$$

il vient que

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

ou encore

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$

On obtient à la fin une équation différentielle partielle.

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (1.23)$$

On doit la résoudre mais dans le cas général, il est plus difficile de déterminer la fonction  $\mu(x, y)$  dans (1.23) que d'intégrer l'équation proposée (1.22). C'est seulement dans les deux cas particuliers qui suit que l'on arrive à déterminer la fonction  $\mu(x, y)$ .

**1. Premier cas :** Si le facteur intégrant de l'équation (1.22) dépend uniquement de  $x$  c'est à dire  $\mu = \mu(x)$  alors, on a

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \Rightarrow \mu(x) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx\right).$$

**2. deuxième cas :** Si le facteur intégrant de l'équation (1.22) dépend uniquement de  $y$ , c'est à dire  $\mu = \mu(y)$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \Rightarrow \mu(y) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy\right).$$

**Exemple 1.4.2.** Soit l'équation différentielle

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0. \quad (1.24)$$

Les fonctions  $M(x, y)$  et  $N(x, y)$  tirées de l'équation (1.24) sont continues et données par

$$M(x, y) = x + y^2 \text{ et } N(x, y) = -2xy.$$

La dérivée de  $M(x, y)$  par rapport à  $y$  et la dérivée de  $N(x, y)$  par rapport à  $x$  donnent

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y \text{ donc } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

donc le premier membre l'équation (1.24) n'est pas une différentielle totale. Cherchons alors le facteur intégrant  $\mu(x, y)$  dépendant seulement de la variable  $x$ , alors

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Donc

$$\int d \ln \mu = \int -\frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln \mu = \ln \frac{1}{x^2} + c \Rightarrow \mu(x) = \frac{c}{x^2}, \quad c = \text{constante}.$$

On choisit,  $c = 1$ ,  $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ .

Après la multiplication de tous les termes de l'équation proposée (1.24) par le facteur intégrant  $\mu(y, y) = \frac{1}{x^2}$ , on obtient une nouvelle équation aux différentielles totales

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0,$$

il est clair que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2\frac{y}{x^2}.$$

La résolution de cette équation nous ramène à la solution générale

$$-\frac{y^2}{x} + \ln |x| = c, \quad c = \text{constante}.$$

**Exemple 1.4.3.** Soit l'équation différentielle

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0. \quad (1.25)$$

Les fonctions  $M(x, y)$  et  $N(x, y)$  tirées de l'équation (1.25) sont continues et données par

$$M(x, y) = y + xy^2 \quad \text{et} \quad N(x, y) = -x.$$

On a

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

ceci implique que le premier membre l'équation (1.25) n'est pas une différentielle totale. Cherchons alors le facteur intégrant  $\mu(x, y)$  dépendant seulement de la variable  $y$ , alors

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y}.$$

Donc

$$\int d \ln \mu = \int -\frac{2}{y} dy \Rightarrow \ln \mu = \ln \frac{1}{y^2} + c \Rightarrow \mu(y) = \frac{c}{y^2}, \quad c = \text{constante}.$$

Choisissons  $\mu(x) = \frac{1}{y^2}$  pour  $c = 1$ , multipliant par (1.25), on obtient une nouvelle équation aux différentielles totales

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0,$$

il est clair que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}.$$

La résolution de cette équation nous ramène à la solution générale

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y} = c, c = \text{constante}.$$

## 1.5 Intégrale première

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.26)$$

Soit  $\Omega$  un ouvert du plan de phase et  $(x(t), y(t))$  une solution (ou une trajectoire). Notons par  $\Delta_{x,y}^\Omega$  l'ensemble

$$\Delta_{x,y}^\Omega = \{t \in \mathbb{R} / (x(t), y(t)) \in \Omega\}.$$

**Définition 1.5.1. (Intégrale première)** L'application  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée *intégrale première* du système (1.26) sur  $\Omega$  si elle est constante sur les courbes solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.26) contenues dans  $\Omega$ , c-à-d

$$H(x(t), y(t)) = \text{cste}, \forall t \in \Delta_{x,y}^\Omega.$$

**Définition 1.5.2.** Une fonction différentiable  $(x, y) \mapsto H(x, y)$  est une *intégrale première* du système différentiel (1.26) si :

$$f(x, y) \frac{\partial H}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial H}{\partial y} = 0.$$

**Remarque 1.5.1.** On dit que le système (1.26) est *intégrable* sur un ouvert  $\Omega$  s'il admet une *intégrale première* sur  $\Omega$ .

**Exemple 1.5.1.** Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = cxy - dy \end{cases}$$

définie sur  $U = ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[$ .

La fonction

$$H(x, y) = cx + by - d \ln x - a \ln y$$

est une intégrale première du système.

En effet

$$\frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = (c - \frac{d}{x})(ax - bxy) + (b - \frac{a}{y})(cxy - dy) = 0.$$

D'où le résultat.

**Définition 1.5.3.** Un système différentiel défini sur un domaine du plan est dit conservatif s'il possède une intégrale première sur ce domaine. Dans le cas où il ne possède pas d'intégrale première, il est dit dissipatif.

**Remarque 1.5.2.** Les systèmes Hamiltoniens constituent une classe particulière de systèmes conservatifs. Ce sont les systèmes pour lesquels il existe une fonction  $(x, y) \mapsto H(x, y)$  pour laquelle le système s'écrit :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

ce système possède alors la fonction  $H(x, y)$  comme intégrale première.

## 1.6 Centre isochrone

**Définition 1.6.1.** Un point critique est un centre si, dans un certain voisinage de ce point toutes les orbites sont fermées.

**Définition 1.6.2.** Un centre est dit isochrone si le temps de parcours de ces orbites fermées est toujours le même. Par conséquent, un système différentiel polynomial a un centre isochrone à l'origine si  $\dot{\theta} = 1$ .

**Définition 1.6.3.** Un ensemble isochrone est un ensemble formé uniquement par des solutions périodiques, qui ont la même période.

**Proposition 1.6.1.** Supposons qu'un système polynomial différentiel planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

de degré  $n$  a un centre à l'origine, il est dit centre isochrone si et seulement si en faisant un changement de variables linéaire et une remise à l'échelle du temps, il peut être écrit sous la forme

$$\dot{x} = -y + x f(x, y), \quad \dot{y} = x + y f(x, y), \quad (1.27)$$

où  $f(x, y)$  est un polynôme de degré  $n - 1$  et  $f(0, 0) = 0$ .

Conti [14] a démontré ce résultat en 1994.

Seuls les systèmes ayant des centres de type linéaire peuvent présenter un centre isochrone uniforme.

$$\dot{x} = -y + p(x, y), \quad \dot{y} = x + q(x, y), \quad (1.28)$$

où  $p(x, y)$  et  $q(x, y)$  sont des polynômes commençant par au moins des termes de second ordre. En faisant un changement de coordonnées polaires pour ce système, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{xp(x, y) + yq(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(x,y)=(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}, \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{xq(x, y) - yp(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(x,y)=(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}. \end{aligned}$$

Mais par hypothèse, un tel système a un centre isochrone uniforme à l'origine, c'est-à-dire  $\dot{\theta} = 1$ . Par conséquent,  $xq(x, y) - yp(x, y) = 0$ , et donc

$$p(x, y) = xf(x, y), \quad q(x, y) = yf(x, y),$$

où  $f(x, y)$  est un polynôme. Réciproquement, si un système différentiel polynomial est de la forme (1.27), alors en effectuant un changement de coordonnées polaires, on obtient

$$\dot{r} = rf(r \cos(\theta), r \sin(\theta)), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Par conséquent, il a un centre isochrone uniforme à l'origine.

**Exemple 1.6.1.** *Considérons le système différentiel polynomial cubique suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2y + y^3), \\ \dot{y} = x + y(x^2y + y^3), \end{cases}$$

*il a un seul point critique qui est l'origine  $(0, 0)$ .*

*De la proposition (1.6.1), le point critique  $(0, 0)$  est un centre isochrone car il a la forme (1.27) avec  $f(x, y) = x^2y + y^3$  un polynôme de degré 3 vérifiant  $f(0, 0) = 0$ .*

*D'autre part, en coordonnées polaires, ce système est écrit comme  $\dot{r} = r^4 \sin \theta, \dot{\theta} = 1$ , ceci confirme que ce système a un centre isochrone uniforme à l'origine.*

**Proposition 1.6.2.** *Si un système différentiel polynomial plan a un centre isochrone uniforme, alors ce centre est l'unique point critique du système différentiel.*

**Proposition 1.6.3.** *Si un système différentiel polynomial plan de degré  $n \geq 2$  a un centre isochrone uniforme, ce système n'est pas hamiltonien.*

**Théorème 1.6.1.** *Soit  $f(x, y) = \sum_{i+j=n-1} p_{ij}x^i y^j$  un polynôme homogène de degré  $n - 1$ . Alors le système (1.27) a un centre isochrone uniforme à l'origine si  $n$  est pair ou si  $n$  est impair et*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left[ p_{n-1-\nu, \nu} \int_0^{2\pi} \cos^{n-1-\nu} \theta \sin^\nu \theta \, d\theta \right] = 0.$$

Pour la preuve voir [33].

### 1.6.1 Classification des centres isochrones uniformes pour certains systèmes différentiels polynomiaux

Dans cette partie, nous allons présenter une classification des centres isochrones uniformes pour des systèmes différentiels polynomiaux de degré 1 et 2, nous présentons aussi certains résultats concernant les centres isochrones uniformes pour des systèmes différentiels polynomiaux de degré 3 et 4.

#### • Centre isochrone uniforme pour des systèmes de degré 1

Un système différentiel linéaire ayant un centre isochrone uniforme après un changement linéaire de variables et une remise à l'échelle du temps devient  $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ . Dans ce cas, le centre isochrone est global.

#### • Centre isochrone uniforme pour des système de degré 2

Le système différentiel polynomial quadratique ayant un centre isochrone uniforme après un changement linéaire de coordonnées et une remise à l'échelle du temps peut s'écrire sous la forme  $\dot{x} = -y + x^2, \dot{y} = x + xy$ .

Ce résultat a été fourni par Loud [47] en 1964, notons qu'il a étudié dans ce travail toutes les familles de systèmes isochrones quadratiques.

#### • Centre isochrone uniforme pour des systèmes de degré 3

Le résultat suivant, dû à Collins [13] en 1997, également obtenu par Devlin et al [17] en 1998, et par Gasull et al [24] en 2005, fournit une caractérisation des systèmes différentiels polynomiaux cubiques plan ayant un centre isochrone à l'origine.

**Théorème 1.6.2.** *Un système différentiel polynomial cubique plan a un centre isochrone uniforme à l'origine si et seulement si, ce système peut être écrit sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy - a_3y^2), \\ \dot{y} = x + y(a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy - a_3y^2), \end{cases} \quad (1.29)$$

avec la condition  $a_1^2 a_3 - a_2^2 a_3 + a_1 a_2 a_4 = 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

**Exemple 1.6.2.** *Le système différentiel cubique*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 y, \\ \dot{y} = x + x y^2, \end{cases}$$

a un centre isochrone à l'origine car il a la forme (1.29) et satisfait la condition  $a_1^2 a_3 - a_2^2 a_3 + a_1 a_2 a_4 = 0$ .

• **Centre isochrone uniforme pour des systèmes de degré 4**

Algaba et al [3] en 1999, et Chavarriga et al [11] en 2001 ont formulé une caractérisation pour des systèmes polynômiaux quartiques ayant un centre isochrone à l'origine.

**Théorème 1.6.3.** *Considérons  $f(x, y) = \sum_{i=1}^3 f_i(x, y)$  avec  $f_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont des polynômes homogènes de degré  $i$  et  $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ ,  $f_3 \neq 0$  tel que (1.27) est un système différentiel polynomial quartique ayant la partie non linéaire non homogène. Alors le seul cas pour lequel le système (1.27) admet un centre isochrone uniforme à l'origine est qu'il soit de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(A_1 x + B_2 x y + C_1 x^3 + C_3 x y^2), \\ \dot{y} = x + y(A_1 x + B_2 x y + C_1 x^3 + C_3 x y^2), \end{cases}$$

avec  $A_1, B_2, C_1, C_3 \in \mathbb{R}$ .

# Théorie de moyennisation

La théorie de moyennisation est l'une des plus importantes théories perturbatives utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette théorie classique a une longue histoire qui commence avec les travaux de **Lagrange** et **Laplace** en 1788, qui ont fourni une justification intuitive de la théorie. En 1928, **Fatou** [22] a donné la preuve de la validité asymptotique de cette technique. **Bogoliubov** et **Kaylov** [7] ont ensuite développé cette théorie, ils ont même traité le cas quasi-périodique.

La théorie de moyennisation consiste à donner une relation quantitative entre les solutions d'un système différentiel non autonome et les solutions du système différentiel moyenné, qui est autonome.

Dans ce chapitre, on considère les équations différentielles de la forme

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon),$$

avec  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre, on expose certains théorèmes de moyennisation d'ordre un y concernant.

**Définition 2.0.1.** *On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui est continue et  $T$ -périodique en la première variable  $t$ . On appelle fonction moyennée de  $f$  qu'on note  $f_0$  la fonction définie par*

$$f_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt.$$

**Définition 2.0.2.** *Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On dit que  $f$  a une moyenne notée  $f_0$  si la limite*

$$f_0(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau$$

*existe et*

$$\left\| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau, x) d\tau - f_0(x) \right\| \leq k\sigma(T), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

avec  $k \geq 0$  et  $\sigma : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  est une fonction strictement décroissante, continue et bornée telle que  $\sigma(T) \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

## 2.1 Théorie de moyennisation d'ordre un

Considérons le système différentiel suivant

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où  $x \in D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  un domaine borné et  $t \geq 0$ . On suppose que  $F(t, x)$  et  $G(t, x, \varepsilon)$  sont des fonctions  $T$ -périodiques en  $t$ .

Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f_0(y), \quad y(0) = x_0, \quad (2.2)$$

où

$$f_0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les points d'équilibre du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques pour le système (2.1).

**Théorème 2.1.1.** [55] *Considérons le système (2.1) et supposons que :*

1.  $F, G, D_x F, D_x^2 F$  et  $D_x G$  sont continues et bornées par une constante  $M$  indépendante de  $\varepsilon$  dans  $[0, +\infty[ \times D$ , avec  $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ .

2.  $F$  et  $G$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ , avec  $T$  indépendante de  $\varepsilon$ , alors on a :

a) Si le point  $p$  est un point d'équilibre pour le système moyenné (2.2) telle que

$$\det(D_x f_0(p)) \neq 0, \quad (2.4)$$

alors pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.1) telle que  $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

b) Si le point d'équilibre  $y = p$  du système moyenné (2.2) est hyperbolique, alors pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, la solution périodique correspondante  $x_\varepsilon(t)$  du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même stabilité que  $p$ .

**Exemple 2.1.1.** Soit l'équation de **Van Der Pol**

$$\ddot{x} + x = \varepsilon (1 - x^2) \dot{x}. \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) peut s'écrire sous la forme d'un système à deux équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon (1 - x^2) y, \end{cases}$$

en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  avec  $r > 0$ , ce système devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin^2(\theta) (1 - r^2 \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos(\theta) \sin(\theta) (1 - r^2 \cos^2(\theta)). \end{cases} \quad (2.6)$$

Le système (2.6) est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r (1 - r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (2.7)$$

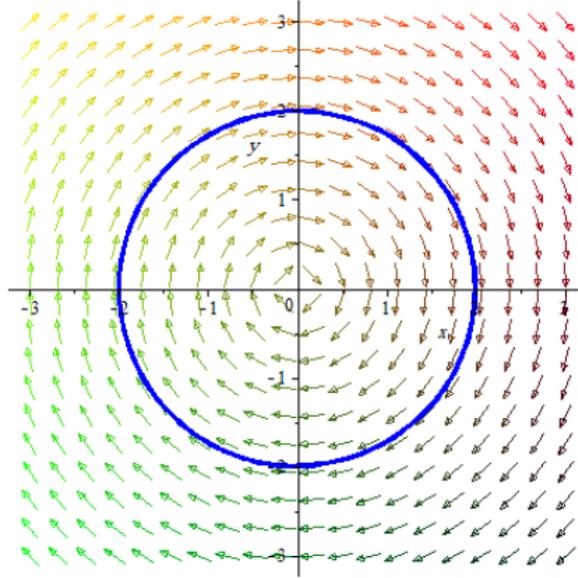
On note que l'équation (2.7) est sous la forme standard (2.1), ainsi on peut appliquer la méthode de moyennisation en prenant

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = -r (1 - r^2 \cos^2(\theta))^2 \sin^2(\theta).$$

Nous avons

$$f_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r (1 - r^2 \cos^2(\theta))^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8} r (r^2 - 4).$$

On remarque que  $f_0(r)$  admet une unique racine positive  $r = 2$ . Du théorème 2.1.1,  $(df^0/dr)(2) = 1$ , alors pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, l'équation de **Van Der Pol** (2.5) admet une solution périodique d'amplitude  $r = 2$ . De plus, du Théorème 2.1.1,  $(df^0/dr)(2) = 1 > 0$  alors ce cycle limite est instable. Voir la figure (2.1).


 FIGURE 2.1 – Cycle limite instable pour  $\varepsilon = 0.01$ .

**Exemple 2.1.2.** Soit le système différentiel de **Liénard**.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon(a_1x + \dots + a_nx^n), \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.8)$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  avec  $r > 0$ , le système (2.8) devient de la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = -\sum_{k=1}^n a_k r^k \cos^{k+1} \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \sin \theta \sum_{k=1}^n a_k r^{k-1} \cos^k \theta, \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon \sum_{k=1}^n a_k r^k \cos^{k+1} \theta + O(\varepsilon^2).$$

En prenant

$$x = r, \quad t = \theta, \quad T = 2\pi \quad \text{et} \quad F(r, \theta) = -\sum_{k=1}^n a_k r^k \cos^{k+1} \theta.$$

Le système différentiel précédent est sous la forme standard (2.1), ainsi on peut appliquer la théorie de la moyennisation décrite dans le Théorème 2.1.1. On obtient

$$f_0(r) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k r^k \int_0^{2\pi} \cos^{k+1} \theta d\theta = -\frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^n a_k b_k r^k = p(r),$$

où

$$b_k = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \cos^{k+1} \theta d\theta \neq 0, & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 0, & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Le polynôme  $p(r)$  a au plus  $[(n-1)/2]$  racines positives, d'où le système admet au plus  $[(n-1)/2]$  cycles limites.

Cette démonstration est due à Llibre [41], mais notons que ce résultat a été aussi démontré avec une autre manière par Lins, de Melo et Pugh [39].

## 2.2 Un autre théorème de moyennisation du premier ordre

**Théorème 2.2.1.** [41] On considère le système différentiel de la forme :

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x, \varepsilon), \quad (2.10)$$

où  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$  pour  $\varepsilon_0$  suffisamment petit. Les fonctions  $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions de classe  $C^2$ ,  $T$ -périodique en  $t$  et  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Supposons que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x), \quad (2.11)$$

a une sous variété de solutions périodiques de dimension  $k$ .

Soit  $x(t, z)$  la solution du système non perturbé (2.11) telle que  $x(0, z) = z$ . La linéarisation du système non perturbé (2.11) le long de la solution périodique  $x(t, z)$  s'écrit

$$\dot{y} = D_x F_0(t, x(t, z))y. \quad (2.12)$$

Notons par  $M_z(t)$  la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.12). Supposons qu'il existe un ensemble ouvert  $V$  avec  $CL(V) \subset \Omega$ , tel que pour chaque  $z \in CL(V)$ ,  $x(t, z, 0)$  est  $T$ -périodique, où  $x(t, z, 0)$  est la solution du système non perturbé (2.11) avec  $x(0, z, 0) = z$ . L'ensemble  $CL(V)$  est isochrone pour le système (2.10), c'est à dire il est un ensemble formé seulement par des orbites périodiques, toutes ayant la même période.

On note par  $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur ses  $k$  premières coordonnées, c'est à dire

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k),$$

et par  $\xi^\perp : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur ses  $n-k$  dernières coordonnées, c'est à dire

$$\xi^\perp(x_1, \dots, x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n).$$

## 2.2. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

Alors, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.2.2.** [50] Soit  $V$  un ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^k$ , et soit  $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une fonction de classe  $C^2$ , supposons que :

(i)  $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$  et pour chaque  $z_\alpha \in Z$  la solution  $x(t, z_\alpha)$  de (2.11) est  $T$ -périodique.

(ii) Pour chaque  $z_\alpha \in Z$ , il existe une matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  de (2.12) telle que la matrice  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  a dans le coin supérieur droit une matrice  $k \times (n - k)$  nulle, et dans le coin inférieur droit la matrice  $\Delta_\alpha(n - k) \times (n - k)$  avec  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ .

On considère la fonction  $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.13)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et  $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$ , alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.10) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour la démonstration voir [41].

Dans le cas où  $n = k$ , nous avons les résultats suivants :

**Théorème 2.2.3.** [50] Soit  $V$  un ensemble ouvert et borné avec  $CL(V) \subset \Omega$  tel que pour chaque  $z_\alpha \in CL(V)$  et pour chaque  $z_\alpha \in Z$ , la solution  $x(t, z_\alpha)$  est  $T$ -périodique. Considérons la fonction  $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt. \quad (2.14)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et  $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$ , alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  du système (2.10) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Théorème 2.2.4.** [50] Supposons que  $n = 2m$ , soit  $V$  un ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^m$  et  $\beta : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $C^2$ . Supposons que :

(i)  $Z = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in CL(V)\} \subset \Omega$  et pour chaque  $z_\alpha \in Z$  la solution  $x(t, z_\alpha)$  de (2.11) est  $T$ -périodique.

## 2.2. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

- (ii) Pour chaque  $z_\alpha \in Z$ , il existe une matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  de (2.12) telle que la matrice  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  a dans le coin supérieur droit la matrice  $\Delta_\alpha(m \times m)$  avec  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ , et dans le coin inférieur droit une matrice  $m \times m$  nulle.

Considérons maintenant la fonction  $\mathcal{F} : CL(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi^\perp \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right). \quad (2.15)$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{F}(a) = 0$  et  $\det((d\mathcal{F}/d\alpha)(a)) \neq 0$ , alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  pour le système (2.10) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Exemple 2.2.1.** On considère l'équation différentielle du troisième ordre

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3). \quad (2.16)$$

Cette équation est équivalente au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \sin(t))(x^2 + 4x^3) = x - y + z + \varepsilon F(t, x, y, z). \end{cases} \quad (2.17)$$

L'origine est l'unique point critique pour ce système lorsque  $\varepsilon = 0$ , sa partie linéaire avec  $\varepsilon = 0$  à l'origine est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont  $\pm i$  et 1.

On faisons un changement de variables linéaire

$$(X, Y, Z)^T = P(x, y, z)^T,$$

## 2.2. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

telle que avec les nouvelles variables  $(X, Y, Z)$ , le système (2.17) avec  $\varepsilon = 0$  a sa partie linéaire égale à sa forme normale de Jordan, c.à.d.  $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^T = J(X, Y, Z)^T$ , la forme normale réelle de Jordan de la matrice  $A$  est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$PAP^{-1} = J \Rightarrow PA - JP = 0,$$

d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la transformation linéaire inversible  $(X, Y, Z)^T = P(x, y, z)^T$ , c.à.d.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = \dot{x} - \dot{y}, \\ \dot{Y} = -\dot{y} + \dot{z}, \\ \dot{Z} = \dot{x} + \dot{z}. \end{cases} \quad (2.18)$$

On a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on obtient alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X - Y + Z \\ -X - Y + Z \\ -X + Y + Z \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

on remplace (2.17) et (2.19) dans (2.18), on trouve

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t) \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \end{cases} \quad (2.20)$$

où

$$\tilde{F} = \tilde{F}(X, Y, Z, t) = F(x, y, z, t).$$

## 2.2. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

Pour  $\varepsilon = 0$ , la solution du système (2.20) est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

On utilise la notion introduite dans le Théorème 2.2.1, et d'après le système (2.20), on a

$$x = (X, Y, Z), F_0(x, t) = (-Y, X, Z), F_1(x, t) = (0, \tilde{F}, \tilde{F}) \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0).$$

Soit  $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$  la solution du système (2.20) telle que

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Il est clair que le système non perturbé (2.20) avec  $\varepsilon = 0$  admet un centre à l'origine dans le plan  $(X, Y)$ . Les solutions périodiques de ce centre sont  $x(t, X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t))$  telle que

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos(t) - Y_0 \sin(t) \\ Y_0 \cos(t) + X_0 \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que toutes ces orbites sont périodiques de période  $2\pi$ .

1. Pour notre système,  $V$  et  $\alpha$  du Théorème 2.2.2 sont

$$V = \{(X, Y, 0), 0 < X^2 + Y^2 < \rho\} \text{ pour certains } \rho > 0 \text{ arbitraires} \\ \text{et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V.$$

2. La matrice fondamentale  $M(t)$  du système non perturbé (2.20) est

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

D'autre part, un simple calcul donne

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix},$$

d'où  $1 - e^{-2\pi} \neq 0$ .

De ce fait, toutes les hypothèses du Théorème 2.2.2 sont vérifiées.

## 2.2. UN AUTRE THÉORÈME DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

---

Par conséquent, nous étudions les zéros  $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$  des deux premières composantes de la fonction  $\mathcal{F}(\alpha)$  donnée par

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt\right), \quad \xi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2),$$

c.à.d.

$$\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha)),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On pose  $\mathcal{F}(\alpha) = (\mathcal{F}_1(X_0, Y_0), \mathcal{F}_2(X_0, Y_0))$ .

On intègre (2.21) et (2.22), on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \frac{1}{8}Y_0X_0 - \frac{3}{4}Y_0^2X_0 - \frac{3}{4}Y_0X_0^2 - \frac{3}{4}Y_0^3 - \frac{3}{4}X_0^3 + \frac{1}{8}Y_0^2 + \frac{1}{8}X_0^2 \\ \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = \frac{1}{16}(X_0 - Y_0)(12X_0^2 - X_0 + 12Y_0^2 - Y_0) \end{cases}$$

Si  $\mathcal{F}_1(X_0, Y_0) = \mathcal{F}_2(X_0, Y_0) = 0$ , on trouve

$$(X_0^*, Y_0^*) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

On a

$$\det\left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(X_0, Y_0)}\Big|_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)}\right) = \frac{3}{8192} \neq 0.$$

Alors, pour  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  avec  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit, il y a une solution isolée  $2\pi$ -périodique  $x(t, \varepsilon)$  de l'équation différentielle (2.16) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{8}, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

# Perturbation d'un centre isochrone quartique

## 3.1 Moyennisation pour les systèmes autonomes planaires

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues. Supposons la condition (A1) suivante (A1) : le système (3.1) a un anneau périodique autour du point critique  $(0, 0)$ .

$$\Gamma_h : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = h, h_c < h < h_s\},$$

où  $H$  est une intégrale première du système.

Désignons par  $\mu = \mu(x, y)$  le facteur intégrant pour le système (3.1) correspondant à l'intégrale première  $H$ .

On considère la perturbation du système (3.1) de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) + \varepsilon p(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} = Q(x, y) + \varepsilon q(x, y, \varepsilon), \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues.

En 2004, **Buicã** et **Llibre** [8] ont proposé une manière pour appliquer la théorie de moyennisation dont le but est d'étudier le nombre de cycles limites qui bifurquent des trajectoires périodiques du système (3.2) pour  $\varepsilon = 0$ .

D'abord il faut écrire le système (3.2) sous la forme standard pour appliquer la théorie de moyennisation (la forme citée dans le chapitre 2), i.e. sous la forme

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon). \quad (3.3)$$

### 3.1. MOYENNISATION POUR LES SYSTÈMES AUTONOMES PLANAIRES

---

L'équation différentielle (3.3) décrit la dépendance entre la racine carrée de l'énergie  $R = \sqrt{h}$  et l'angle  $\theta$  des coordonnées polaires pour le système (3.2).

**Théorème 3.1.1.** [8] *Supposons que (A1) est satisfaite pour le système (3.1) et que*

$$xQ(x, y) - yP(x, y) \neq 0 \quad (3.4)$$

*pour tout  $(x, y)$  dans l'anneau périodique.*

*Soit  $\rho : ]\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction continue telle que*

$$H(\rho(R, \theta) \cos \theta, \rho(R, \theta) \sin \theta) = R^2, \quad (3.5)$$

*pour tout  $R \in ]\sqrt{h_1}, \sqrt{h_2}[$  et tout  $\theta \in ]0, 2\pi[$ .*

*L'équation différentielle qui décrit la dépendance entre la racine carrée de l'énergie  $R = \sqrt{h}$  et l'angle  $\theta$  pour le système perturbé (3.2) est*

$$\frac{dR}{d\theta} = \varepsilon \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\varepsilon(qx - py)} \quad (3.6)$$

*où  $x = \rho(R, \theta) \cos \theta$ ,  $y = \rho(R, \theta) \sin \theta$ .*

**Preuve.**

D'après la définition de l'intégrale première et du facteur intégrant (donnés dans le chapitre 1), les relations suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\mu Q.$$

On définit la fonction

$$G(r, R, \theta) = H(r \cos \theta, r \sin \theta) - R^2,$$

en tout point  $(r, \theta)$  de l'anneau périodique et pour tout  $R \in ]\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}[$ .

On a

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial H}{\partial y} \sin \theta = \frac{\mu(x, y)}{r} (Q(x, y)x - P(x, y)y),$$

où  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

Pour tout  $(r_0, \theta_0)$  dans l'anneau périodique, il existe un  $R_0$  tel que  $G(r_0, R_0, \theta_0) = 0$ . L'hypothèse (3.4) assure que

$$\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \theta_0) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, au voisinage de chaque point  $(R_0, \theta_0)$ , il existe une unique fonction continue  $\rho = \rho(R, \theta)$  telle que l'équation (3.5) soit vérifiée.

### 3.1. MOYENNISATION POUR LES SYSTÈMES AUTONOMES PLANAIRES

---

Donc, cette fonction est bien définie sur  $]\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}[ \times ]0, 2\pi[$  et satisfait (3.5).  
La relation entre la racine carrée de l'énergie et le temps est donnée par

$$R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))},$$

et entre l'angle  $\theta$  et le temps est

$$\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)},$$

pour tout  $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

On obtient alors

$$\dot{R} = \varepsilon \frac{\mu(Qp - Pq)}{2R}, \quad \dot{\theta} = \frac{(Qx - Py) + \varepsilon(qx - py)}{x^2 + y^2}.$$

En éliminant le temps dans les deux expressions, on obtient l'équation (3.6) cherchée.

Un résultat important, qui permet d'appliquer la théorie de la moyennisation aux systèmes plan, est le suivant :

**Théorème 3.1.2.** [8] *La fonction moyennée  $f_0 : ]\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par*

$$f_0(y) = \int_0^T F(t, y) dt$$

pour l'équation (3.6) est

$$f_0(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\theta,$$

où  $\mu = \mu(x, y)$  est un facteur intégrant pour le système (3.1) correspondant à l'intégrale première  $H$ , avec  $x = \rho(R, \theta) \cos \theta$  et  $y = \rho(R, \theta) \sin \theta$ .

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $f_0, \dots, f_n$  des fonctions analytiques définies sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ . Si  $f_0, \dots, f_n$  sont linéairement indépendants alors il existe  $s_1, \dots, s_n \in I$  et  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  nous avons  $\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(s_j) = 0$ .*

**Exemple 3.1.1.** (*Buicã et Llibre [8]*) *Soit le système différentiel quadratique ayant un centre isochrone à l'origine :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2, \\ \dot{y} = x + xy. \end{cases} \quad (3.7)$$

### 3.1. MOYENNISATION POUR LES SYSTÈMES AUTONOMES PLANAIRES

---

Le système (3.7) possède une intégrale première  $H$  dans l'anneau périodique et un facteur intégrant  $\mu$  donné respectivement par

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{(1 + y)^2}, \quad \mu(y) = \frac{1}{(1 + y)^3}.$$

Pour ce système, notons que  $h_c = 0, h_s = 1$ , et la fonction  $\rho$  qui satisfait les hypothèses du Théorème 3.1.1 est donnée par

$$\rho(R, \theta) = \frac{R}{1 - R \sin(\theta)}$$

pour tout  $0 < R < 1$  et  $\rho \in [0, 2\pi[$ .

On considère la perturbation suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} = x + xy + \varepsilon q(x, y), \end{cases} \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a_1 - a_3 x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6 y^2, \\ q(x, y) &= a_1 y + a_2 x^2 + a_4 xy - a_2 y^2. \end{aligned}$$

Alors l'équation (3.6) correspondante à ce système est

$$\frac{dR}{d\theta} = \varepsilon \frac{a_1 R + a(\theta)R^2 + b(\theta)R^3}{1 - R \sin \theta + \varepsilon c(\theta)R}, \quad (3.9)$$

où

$$\begin{aligned} a(\theta) &= (-2a_1 + 3a_2 + a_5) \sin \theta + (a_4 + a_6) \cos \theta + (-4a_2 - a_5) \sin^3 \theta \\ &\quad + (-a_3 - a_4 - a_6) \cos^3 \theta, \\ b(\theta) &= a_1 + a_2 + (-a_1 - 2a_2) \cos^2 \theta - a_4 \cos \theta \sin \theta, \\ c(\theta) &= (a_3 + a_4) \sin \theta + (-3a_2 - a_5) \cos \theta + (-a_3 - a_4 - a_6) \sin^3 \theta \\ &\quad + (4a_2 + a_5) \cos^3 \theta. \end{aligned}$$

L'équation (3.9) s'écrit sous la forme

$$\frac{dR}{d\theta} = \varepsilon F(\theta, R) + \varepsilon^2 G(\theta, R, \varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} F(\theta, R) &= \frac{a_1 R + a(\theta)R^2 + b(\theta)R^3}{1 - R \sin \theta}, \\ G(\theta, R, \varepsilon) &= -\frac{[a_1 R + a(\theta)R^2 + b(\theta)R^3]c(\theta)R}{(1 - R \sin \theta)(1 - R \sin \theta + \varepsilon c(\theta)R)}. \end{aligned}$$

### 3.1. MOYENNISATION POUR LES SYSTÈMES AUTONOMES PLANAIRES

---

*C'est la forme standard de la théorie de moyennisation du premier ordre.*

*Pour appliquer le Théorème 3.1.1, nous avons besoin de la fonction  $f_0(z) = \int_0^T F(s, z)ds$ , qui est pour notre problème  $f_0 : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$f_0(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_1 z + a(\theta)z^2 + b(\theta)z^3}{1 - z \sin \theta} d\theta.$$

*On calcule cette intégrale en utilisant Maple, on obtient*

$$f_0(z) = -\frac{1}{2(z\sqrt{1-z^2})} [2a_2 z^4 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)z^2 \sqrt{(1-z^2)} - (10a_2 + 2a_5)z^2 - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{(1-z^2)} + 8_2 + a_5].$$

*En prenant la nouvelle variable  $\xi \in ]0, 1[$  définie par  $z = \sqrt{1-\xi^2}$ , on obtient*

$$f_0(\sqrt{1-\xi^2}) = \frac{1}{2(\sqrt{1-\xi^2})} (1-\xi)(2a_2\xi^2(2a_1 - 4a_2 - a_5)\xi + 2a_1 + 2a_2 + a_5).$$

*On remarque que  $z \in ]0, 1[$  est une racine de  $f_0$  si et seulement si  $\xi \in ]0, 1[$  est une racine de la fonction polynomiale*

$$g(\xi) = 2a_2\xi^2 + c_1\xi + c_2,$$

*où*

$$c_1 = 2a_1 - 4a_2 - a_5, \quad c_2 = 2a_1 + 2a_2 + a_5.$$

*La fonction  $g$  possède au plus deux racines dans l'intervalle  $]0, 1[$ , ceci signifie que la fonction  $f_0$  admet au plus deux racines. Donc, au plus deux cycles limites bifurquent de l'anneau périodique du système (3.7).*

## 3.2 Bifurcation de cycles limites pour un système quartique ayant un centre isochrone

Soit le système différentiel quartique considéré

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (3.10)$$

qui a un centre isochrone à l'origine.

Une intégrale première  $H$  et un facteur intégrant correspondant  $\mu$  sont respectivement donnés par

$$H(x, y) = \frac{1}{3(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

En 2014, **Peng** et **Feng** [52] ont étudié la bifurcation des cycles limites du système différentiel quartique ayant un centre isochrone suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon p(x, y), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon q(x, y), \end{cases} \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{21}x^2y + a_{03}y^3 + a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 \\ &\quad + a_{04}y^4 \\ q(x, y) &= b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{12}xy^2 + b_{40}x^4 + b_{31}x^3y + b_{22}x^2y^2 \\ &\quad + b_{13}xy^3 + b_{04}y^4, \end{aligned}$$

il ont trouvé ce résultat :

**Théorème 3.2.1.** *Pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, alors il existe des systèmes différentiels polynomiaux quartiques (3.11) ayant au plus 3 cycles limites bifurquant les orbites périodiques du centre isochrone situé à l'origine du système (3.10).*

Suit à leur travail, **Itikawa** et **Libre** [34] ont amélioré en 2015 le résultat précédent en prouvant cinq cycles limites supplémentaires, leur résultat et le suivant :

**Théorème 3.2.2.** *Pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit et toutes les constantes réelles  $a_{jk}$  et  $b_{jk}$ , la perturbation polynomial quartique suivante du système (3.10),*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^4 p_i(x, y), \\ \dot{y} &= x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^4 q_i(x, y), \end{aligned} \tag{3.12}$$

où

$$p_i(x, y) = \sum_{j+k=i} a_{jk} x^j y^k, \quad q_i(x, y) = \sum_{j+k=i} b_{jk} x^j y^k,$$

alors le système différentiel (3.12) a au moins 8 cycles limites bifurquant les orbites périodiques du centre isochrone situé à l'origine du système (3.10).

### 3.3 Le nombre de cycles limites bifurquant des orbites périodiques d'un centre isochrone

Dans cette partie, on considère le système différentiel quartique ayant un centre isochrone (3.10). On donne un résultat sur le nombre de cycles limites qui peuvent bifurquer de ce système après l'avoir perturbé par des polynômes d'ordre cinq. Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans le journal " Mathematical Methods in the Applied Sciences".

**M. Bey, S. Badi, K. Fernane and A. Makhlof.** " The number of limit cycles bifurcating from the periodic orbits of an isochronous center". Math Meth Appl Sci. 2018 ; 1-9. <https://doi.org/10.1002/mma.5385>

On considère le système différentiel polynomial quartique plan ayant un centre isochrone à l'origine

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2), \end{cases} \tag{3.13}$$

qui a

$$H(x, y) = \frac{1}{3(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

comme intégrale première avec un facteur intégrant

$$\mu(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

### 3.3. LE NOMBRE DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT DES ORBITES PÉRIODIQUES D'UN CENTRE ISOCHRONE

---

et l'unique singularité finie  $(0, 0)$  comme un centre isochrone, à l'intérieur de la classe de tout les systèmes différentiels polynomiaux quintiques.

Nous étudions les cycles limites bifurquant des solutions périodiques du centre isochrone uniforme situé à l'origine du système (3.13) lorsqu'il est perturbé par toute la classe des systèmes différentiels polynomiaux quintiques. Plus précisément, nous considérons le système différentiel perturbé suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 p_i(x, y), \\ \dot{y} &= x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon \sum_{i=0}^5 q_i(x, y), \end{aligned} \tag{3.14}$$

où

$$p_i(x, y) = \sum_{j+k=i} a_{jk} x^j y^k, \quad q_i(x, y) = \sum_{j+k=i} b_{jk} x^j y^k$$

sont des polynômes homogènes de degré  $i$  et  $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}$ .

Notre résultat est le suivant.

**Théorème 3.3.1.** *Pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, il existe des systèmes différentiels polynomiaux quartiques (3.14) ayant au moins 14 cycles limites bifurquant les orbites périodiques du centre isochrone uniforme situé à l'origine du système (3.13).*

**Preuve.**

Selon le Théorème 1.6.1, le système (3.13) a un centre isochrone à l'origine. Une intégrale première  $H$  et son facteur d'intégration correspondant  $\mu$  pour le système (3.13) sont donnés respectivement par

$$H(x, y) = \frac{1}{3(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{5/2}},$$

Si  $h \in ]1, +\infty[$  alors  $H(x, y) = h$  sont des solutions périodiques autour du centre  $(0, 0)$ . Pour prouver le Théorème 3.3.1, nous allons utiliser le Théorème 3.1.1.

En choisissant

$$\rho(R, \theta) = \frac{1}{(R^2 + 3 \cos \theta)^{1/3}},$$

puis  $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2/3$  pour tout  $R > \sqrt{3}$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Donc toutes les hypothèses du Théorème 3.1.1 sont satisfaites pour le système (3.13). En utilisant le Théorème 3.1.1 pour transformer le système différentiel perturbé (3.14) à la forme

$$\frac{dR}{d\theta} = \varepsilon \left( \frac{3}{2R} \frac{Qp - Pq}{\rho^5} \right) \Big|_{x=\rho \cos \theta, y=\rho \sin \theta} + O(\varepsilon^2), \tag{3.15}$$

3.3. LE NOMBRE DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT DES ORBITES  
PÉRIODIQUES D'UN CENTRE ISOCHRONE

---

où

$$Qp - Pq = A + B,$$

avec

$$\begin{aligned} A = & a_{00}x + b_{00}y + (a_{02} + b_{11})xy^2 + a_{20}x^3 + (a_{00} + b_{03})y^4 \\ & - b_{00}xy^3 + (a_{00} + a_{12} + b_{21})x^2y^2 - b_{00}x^3y + a_{30}x^4 \\ & + a_{50}x^6 + (a_{41} + b_{50})x^5y + (a_{20} + a_{32} + b_{41} - b_{11})x^4y^2 \\ & + (a_{23} + b_{23})x^3y^3 + (a_{02} + a_{20} + a_{14} + b_{23} - b_{11})x^2y^4 \\ & + (a_{05} + b_{14})xy^5 + (a_{02} + b_{05})y^6 + (a_{12} - b_{03})xy^6 \\ & + (a_{12} + a_{30} - b_{03} - b_{21})x^3y^4 + (a_{30} - b_{21})x^5y^2 \\ & + (a_{50} - b_{41})x^7y^2 + (a_{32} + a_{14} - b_{05} - b_{23})x^3y^6 \\ & + (a_{32} + a_{50} - b_{23} - b_{41})x^5y^4 + (a_{14} - b_{05})xy^8 \\ & + (a_{05} + a_{23} - b_{14})x^2y^7 + (a_{41} - b_{32} - b_{50})x^6y^3 \\ & + (a_{23} + a_{41} - b_{14} - b_{32})x^4y^5 - b_{50}x^8y + a_{05}y^9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & a_{10}x^2 + (a_{01} + b_{10})xy + b_{01}y^2 + (a_{11} + b_{20})x^2y + b_{02}y^3 \\ & + (a_{21} + b_{30})x^3y + (a_{03} + b_{12})xy^3 + a_{40}x^5 + (a_{31} + b_{40} - b_{10})x^4y \\ & + (a_{22} + a_{10} + b_{31} - b_{01})x^3y^2 + (a_{13} + a_{01} + b_{22} - b_{10})x^2y^3 \\ & + (a_{04} + a_{10} + b_{13} - b_{01})xy^4 + (a_{01} + b_{04})y^5 - b_{20}x^5y \\ & + (a_{11} - b_{20} - b_{02})x^3y^3 + (a_{11} - b_{02})xy^5 - b_{30}x^6y \\ & + (a_{21} - b_{30} - b_{12})x^4y^3 + (a_{21} + a_{03} - b_{12})x^2y^5 + a_{03}y^7 \\ & - b_{40}x^7y + (a_{40} - b_{31})x^6y^2 + (a_{31} - b_{40} - b_{22})x^5y^3 \\ & + (a_{40} + a_{22} - b_{31} - b_{13})x^4y^4 + (a_{31} + a_{13} - b_{22} - b_{04})x^3y^5 \\ & + (a_{22} + a_{04} - b_{13})x^2y^6 + (a_{13} - b_{04})xy^7 + a_{04}y^8. \end{aligned}$$

Remarquons que les coefficients  $\{a_{ij}, b_{ij}\}_{i,j \in \{0, \dots, 5\}}$  qui apparaissent dans  $A$  et  $B$  sont différents. L'expression  $B$  correspond au système perturbé (3.12) étudié dans [34] et aussi dans [52]. Les auteurs de [52] ont obtenu pour ce système la fonction moyennée suivante

$$\begin{aligned} g_B(R) = & \frac{3}{4R} \left[ \left( M_4 - \frac{3M_1 + 4M_2 + 8M_3}{36} \right) R^2 - \frac{M_1 + 2M_2}{81} R^6 - \frac{2M_1}{729} R^{10} \right. \\ & \left. + \left( \frac{2M_1}{729} R^{12} + \frac{2M_2}{81} R^8 - \frac{2M_3}{9} R^4 - 2(M_1 + M_2 + M_3) \right) \frac{1}{\sqrt{R^4 - 9}} \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.3. LE NOMBRE DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT DES ORBITES PÉRIODIQUES D'UN CENTRE ISOCHRONE

---

où

$$\begin{aligned} M_1 &= a_{22} - a_{40} - a_{04} + b_{31} - b_{13}, \\ M_2 &= -2a_{22} + a_{40} + 3a_{04} - b_{31} + 2b_{13}, \\ M_3 &= a_{22} - 3a_{04} - b_{13}, \quad M_4 = a_{10} + b_{01}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Peng et Feng [52] ont prouvé que la fonction  $g_B(R)$  a au plus 3 zéros dans  $R \in ]\sqrt{3}, +\infty[$ . En utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, ils ont montré que le nombre maximum de cycles limites de leur système considéré bifurquant les orbites périodiques du système non perturbé (3.13) est 3.

Dans ce travail, nous étendons les résultats présentés dans [52] en calculant la partie de la fonction moyennée du système (3.14) qui correspond à l'expression  $A$ . Pour ce faire, nous perturbons le centre du système (3.13) par toute la classe des systèmes différentiels polynomiaux quintiques. Nous notons que (3.15) est continu et borné pour  $\theta \in [0, 2\pi[$  et  $R \in ]\sqrt{3}, +\infty[$  donc l'intégrale de (3.15) est la somme des intégrales de ses parties  $A$  et  $B$ . Alors l'expression (3.15) est donnée par

$$\frac{dR}{d\theta} = \varepsilon \left( \frac{3}{2R} \frac{A}{\rho^5} \right) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}} + \varepsilon \left( \frac{3}{2R} \frac{B}{\rho^5} \right) \Big|_{\substack{x=\rho \cos \theta \\ y=\rho \sin \theta}} + O(\varepsilon^2).$$

Nous obtenons la fonction moyennée

$$f(R) = g_A(R) + g_B^*(R)$$

où

$$\begin{aligned} g_A(R) &= a_{00}g_0(R) + a_{02}g_1(R) + a_{12}g_2(R) + a_{20}g_3(R) + a_{30}g_4(R) \\ &\quad + a_{14}g_5(R) + a_{32}g_6(R) + a_{50}g_7(R) + b_{03}g_8(R) + b_{05}g_9(R) \\ &\quad + b_{11}g_{10}(R) + b_{21}g_{11}(R) + b_{23}g_{12}(R) + b_{41}g_{13}(R), \end{aligned}$$

$$g_B^*(R) = \sum_{i=1}^4 M_i g_{M_i}(R),$$

et  $g_B^*(R)$  est la fonction (3.16) réorganisée de manière utile. Les expressions de  $g_i(R)$ ,  $i \in \{0, \dots, 13\}$  et les fonctions  $g_{M_i}(R)$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  sont respectivement présentées dans l'appendice 1.

Des 18 fonctions  $G_i = g_i : ]\sqrt{3}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{0, \dots, 13\}$ ,  $G_{i+13} = g_{M_i} : ]\sqrt{3}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  nous avons que 15 fonctions qui sont linéairement

### 3.3. LE NOMBRE DE CYCLES LIMITES BIFURQUANT DES ORBITES PÉRIODIQUES D'UN CENTRE ISOCHRONE

---

indépendantes. Effectivement, en utilisant le logiciel *Mathematica 11.0* pour calculer le développement de Taylor pour ces 18 fonctions dans la variable  $R$  jusqu'à le 16<sup>ème</sup> ordre autour de  $R = 2$ , qui sont trop longs et donc ils ne sont pas présentés ici, nous construisons une matrice  $18 \times 17$ , où dans la rangée  $k$  nous plaçons les 17 coefficients de  $R^0, R^1, \dots, R^{16}$  du développement de Taylor de  $G_k$ ,  $k \in \{0, \dots, 17\}$ , et nous concluons que le rang de cette matrice est égal à 15.

De la Proposition 3.1.1, il y a 15 fonctions linéairement indépendantes parmi les 18 précédemment décrites, alors il existe une combinaison linéaire d'entre eux avec au moins 14 zéros, car tous les coefficients de ces fonctions sont linéairement indépendants. Ainsi, il existe  $R_1, R_2, \dots, R_{14} \in ]\sqrt{3}, +\infty[$  et les coefficients  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j \in \{0, \dots, 5\}$  tel que  $f(R_k) = 0$ ,  $k \in \{1, \dots, 14\}$ .

En résumé, d'après le Théorème 2.1.1, nous concluons qu'il existe des systèmes différentiels polynomiaux plan (3.14) ayant au moins 14 cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre isochrone uniforme situé à l'origine du système différentiel non perturbé (3.13).

## Chapitre 4

# Systèmes différentiels discontinus à deux zones

### 4.1 Introduction

Parmi les problèmes de la théorie des équations différentielles ceux qui sont à second membre discontinu. L'étude des systèmes différentiels discontinus par morceaux est un sujet qui a été développé très rapidement en raison de ses applications puissantes à d'autres branches de la science. Actuellement, ces systèmes constituent l'un des liens entre les mathématiques, la physique et l'ingénierie. Ces systèmes sont largement utilisés dans la modélisation de nombreux processus et phénomènes réels, ils représentent un grand intérêt dans différents domaines comme la mécanique, l'électronique et l'automatique. Récemment, ils se sont révélés également pertinents en tant que modèles idéalisés pour la biologie [37] et modèles d'activité cellulaire [15, 57, 58]. L'un des points les plus intéressants est d'obtenir une borne inférieure pour le nombre maximum de cycles limites pouvant survenir autour d'un seul point d'équilibre sur l'ensemble de discontinuité (c'est-à-dire sur la région séparant le système différentiel linéaire), ce qui est très lié au 16<sup>ème</sup> problème de **Hilbert**. Rappelant qu'un cycle limite d'un système différentiel plan est une orbite périodique qui est isolé dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques du système. En particulier l'étude des phénomènes continus et discontinus des systèmes différentiels linéaires par morceaux ont essentiellement débuté avec le livre d'**Andronov et al** [4], dont la version russe est apparue vers les années 1930. Ces systèmes ont été étudiés par des chercheurs de nombreux domaines différents, voir par exemple les livres de **Bernardo et al** [5] et de **Simpson** [56], l'enquête de **Makarenkov et Lamb** [51], ils continuent de retenir l'attention des chercheurs.

En 1990, **Lum et Chua** [48, 49] ont supposé qu'un champ vectoriel continu, linéaire par morceaux dans le plan à deux zones séparées par une droite, qui est l'exemple le plus simple de ce type de système, a au plus un cycle limite. Cette hypothèse a été prouvée par **Freire et al** [23] en 1998. Nous remarquons que, même dans ce cas relativement facile, ce n'est qu'après un travail sérieux qu'il a été possible

de démontrer l'existence d'au plus un cycle limite.

La difficulté à résoudre le problème de **Lum** et **Chua** pour la classe de l'équation différentielle qui nous intéresse est due pour deux raisons principales. Premièrement, même en étant facile les calculs des solutions dans n'importe quelle région linéaire, le temps nécessaire à chaque orbite pour passer d'une région linéaire à l'autre n'est pas facile à calculer, par conséquent l'appariement des solutions correspondantes est un problème difficile. Deuxièmement, le nombre de paramètres à prendre en compte afin d'être sûr de contrôler toutes les configurations possibles est généralement pas petit, donc l'obtention des formes canoniques efficaces avec moins de paramètres est importante.

En utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites pouvant bifurquer des orbites périodiques du centre isochrone perturbé à l'intérieur de la classe des systèmes différentiels polynomiaux discontinus. Autant que nous sachions, cette théorie est l'une des meilleures théories pour déterminer les cycles limites des systèmes différentiels discontinus par morceaux et elle a déjà été utilisée par certains auteurs. Dans [43], la théorie est utilisée pour déterminer le nombre maximal de cycles limites bifurquant des solutions périodiques d'une famille de centres quadratiques isochrones perturbés par des systèmes différentiels quadratiques par morceaux discontinus à deux zones séparées par une ligne droite. Dans [35], les cycles limites des systèmes différentiels cubiques par morceaux discontinus à deux zones ont été étudiés à l'aide de la théorie de la moyennisation.

Notre objectif est d'étudier le nombre de cycles limites des systèmes différentiels discontinus à deux zones séparées par une ligne droite, en appliquant la théorie de moyennisation du premier ordre et en comparant les résultats obtenus de cette étude avec les résultats des systèmes différentiels polynomiaux continus, ce travail montre que les systèmes différentiels discontinus ont des cycles limites supplémentaires par rapport aux systèmes différentiels continus.

Considérons le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues.

Nous allons étudier le nombre de cycles limites du système différentiel polynomial discontinu par morceaux formé de deux systèmes différentiels polynomiaux séparés par l'hyperplan  $y = 0$ , donné par

$$\dot{X} = Z(x, y) = \begin{cases} Y_1 & \text{si } y > 0, \\ Y_2 & \text{si } y < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

où

$$Y_1 = \begin{pmatrix} P(x, y) + \varepsilon p_1(x, y) \\ Q(x, y) + \varepsilon q_1(x, y) \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} P(x, y) + \varepsilon p_2(x, y) \\ Q(x, y) + \varepsilon q_2(x, y) \end{pmatrix},$$

et  $\varepsilon$  est un petit paramètre,  $p_1, q_1, p_2$  et  $q_2$  sont des polynômes de même degré que le système différentiel étudié.

Les systèmes  $\dot{X} = Y_1(x, y)$  et  $\dot{X} = Y_2(x, y)$  sont appelés systèmes différentiels linéaires latéraux (ou simplement systèmes latéraux) et plus spécifiquement système droit et système gauche, respectivement.

Le système (4.2) peut être écrit en utilisant la fonction de signe sous la forme

$$\dot{X} = Z(x, y) = G_1(x, y) + \text{sing}(y)G_2(x, y),$$

où  $G_1(x, y) = \frac{1}{2}(Y_1(x, y) + Y_2(x, y))$  et  $G_2(x, y) = \frac{1}{2}(Y_1(x, y) - Y_2(x, y))$ .

Dans ce chapitre, nous étudions les systèmes différentiels (4.2) où

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon p_1(x, y) \\ x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon q_1(x, y) \end{pmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon p_2(x, y) \\ x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon q_2(x, y) \end{pmatrix},$$

et  $\varepsilon$  un petit paramètre,  $p_i(x, y)$  et  $q_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$  sont respectivement des polynômes quartiques dans les variables  $x$  et  $y$ .

Cette étude a fait l'objet d'un article accepté pour publication intitulé : "Nineteen Limit Cycles in Discontinuous Quartic Differential System with Two Zones" dans le journal "Applied Mathematics E-Notes".

## 4.2 Cycles limites des systèmes différentiels quartiques discontinus à deux zones

Dans cette partie, on considère le système différentiel quartique

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xy(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y^2(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (4.3)$$

qui a un centre isochrone à l'origine.

Une intégrale première  $H$  et le facteur intégrant correspondant  $\mu$  sont donnés par

$$H(x, y) = \frac{1}{3(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \mu(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

En utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions les cycles limites qui bifurquent à partir des solutions périodiques du centre isochrone uniforme situé à l'origine du système (4.3) quand il est perturbé à l'intérieur de la classe entière des systèmes différentiels polynomiaux quartiques. Plus précisément, nous considérons les systèmes différentiels (4.2), où

$$\begin{aligned} Y_1 &= \begin{pmatrix} -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon p_1(x, y) \\ x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon q_1(x, y) \end{pmatrix}, \\ Y_2 &= \begin{pmatrix} -y + xy(x^2 + y^2) + \varepsilon p_2(x, y) \\ x + y^2(x^2 + y^2) + \varepsilon q_2(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et  $\varepsilon$  est un petit paramètre,  $p_i(x, y)$ ,  $q_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$  sont respectivement des polynômes quartiques dans les variables  $x$  et  $y$ , donnés par

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 \\ &\quad + a_{10}x^4 + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}y^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(x, y) &= b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3 \\ &\quad + b_{10}x^4 + b_{11}x^3y + b_{12}x^2y^2 + b_{13}xy^3 + b_{14}y^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x, y) &= c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6x^3 + c_7x^2y + c_8xy^2 + c_9y^3 \\ &\quad + c_{10}x^4 + c_{11}x^3y + c_{12}x^2y^2 + c_{13}xy^3 + c_{14}y^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(x, y) &= d_1x + d_2y + d_3xy + d_4x^2 + d_5y^2 + d_6x^3 + d_7x^2y + d_8xy^2 + d_9y^3 \\ &\quad + d_{10}x^4 + d_{11}x^3y + d_{12}x^2y^2 + d_{13}xy^3 + d_{14}y^4. \end{aligned}$$

## 4.2. CYCLES LIMITES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUARTIQUES DISCONTINUS À DEUX ZONES

---

**Théorème 4.2.1.** *Pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, il existe des systèmes différentiels polynomiaux quartiques discontinus (4.2) ayant au moins 19 cycles limites bifurquant les orbites périodiques du centre isochrone (4.3).*

**Preuve.**

Pour ce système, on note que  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 1$  et que la fonction  $\rho$  qui vérifie les hypothèses du théorème (3.1.1) est donnée par

$$\rho(R, \theta) = \frac{1}{(R^2 + 3 \cos \theta)^{1/3}},$$

tel que  $H(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = R^2/3$  pour tout  $R > \sqrt{3}$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

Afin d'appliquer la théorie de moyennisation pour l'étude des cycles limites du système (4.2) pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, nous avons besoin d'écrire le système (4.2) sous la forme standard (2.1) de la théorie de moyennisation.

Nous utilisons le Théorème 3.1.1 pour transformer le système différentiel perturbé (4.2) à la forme

$$\frac{dR}{d\theta} = \varepsilon \left( \frac{3}{2R} \frac{Qp - Pq}{\rho^5} \right) \Big|_{x=\rho \cos \theta, y=\rho \sin \theta} + O(\varepsilon^2), \quad (4.4)$$

4.2. CYCLES LIMITES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUARTIQUES  
DISCONTINUS À DEUX ZONES

---

où

$$Qp - Pq = \begin{cases} a_1x^2 + (a_2 + b_1)xy + b_2y^2 + a_4x^3 + (a_5 + b_3)xy^2 + (a_3 + b_4)x^2y \\ + b_5y^3 + a_6x^4 + (a_7 + b_6)x^3y + (a_8 + b_7)x^2y^2 + (a_9 + b_8)xy^3 + b_9y^4 \\ + a_{10}x^5 + (a_{11} - b_1 + b_{10})x^4y + (a_1 + a_{12} - b_2 + b_{11})x^3y^2 \\ + (a_2 + a_{13} - b_1 + b_{12})x^2y^3 + (a_1 + a_{14} - b_2 + b_{13})xy^4 \\ + (a_2 + b_{14})y^5 - b_4x^5y + (a_4 - b_3)x^4y^2 + (a_3 - b_4 - b_5)x^3y^3 \\ + (a_4 + a_5 - b_3)x^2y^4 + (a_3 - b_5)xy^5 + a_5y^6 - b_6x^6y + (a_6 - b_7)x^5y^2 \\ + (a_7 - b_6 - b_8)x^4y^3 + (a_6 + a_8 - b_7 - b_9)x^3y^4 + (a_7 + a_9 - b_8)x^2y^5 \\ + (a_8 - b_9)xy^6 + a_9y^7 - b_{10}x^7y + (a_{10} - b_{11})x^6y^2 + (a_{11} - b_{10} - b_{12})x^5y^3 \\ + (a_{10} + a_{12} - b_{11} - b_{13})x^4y^4 + (a_{11} + a_{13} - b_{12} - b_{14})x^3y^5 \\ + (a_{12} + a_{14} - b_{13})x^2y^6 + (a_{13} - b_{14})xy^7 + a_{14}y^8 \quad \text{pour } y > 0, \\ \\ c_1x^2 + (c_2 + d_1)xy + d_2y^2 + c_4x^3 + (c_5 + d_3)xy^2 + (c_3 + d_4)x^2y \\ + d_5y^3 + c_6x^4 + (c_7 + d_6)x^3y + (c_8 + d_7)x^2y^2 + (c_9 + d_8)xy^3 + d_9y^4 \\ + c_{10}x^5 + (c_{11} - d_1 + d_{10})x^4y + (c_1 + c_{12} - d_2 + d_{11})x^3y^2 \\ + (c_2 + c_{13} - d_1 + d_{12})x^2y^3 + (c_1 + c_{14} - d_2 + d_{13})xy^4 \\ + (c_2 + d_{14})y^5 - d_4x^5y + (c_4 - d_3)x^4y^2 + (c_3 - d_4 - d_5)x^3y^3 \\ + (c_4 + c_5 - d_3)x^2y^4 + (c_3 - d_5)xy^5 + c_5y^6 - d_6x^6y + (c_6 - d_7)x^5y^2 \\ + (c_7 - d_6 - d_8)x^4y^3 + (c_6 + c_8 - d_7 - d_9)x^3y^4 + (c_7 + c_9 - d_8)x^2y^5 \\ + (c_8 - d_9)xy^6 + c_9y^7 - d_{10}x^7y + (c_{10} - d_{11})x^6y^2 + (c_{11} - d_{10} - d_{12})x^5y^3 \\ + (c_{10} + c_{12} - d_{11} - d_{13})x^4y^4 + (c_{11} + c_{13} - d_{12} - d_{14})x^3y^5 \\ + (c_{12} + c_{14} - d_{13})x^2y^6 + (c_{13} - d_{14})xy^7 + c_{14}y^8 \quad \text{pour } y < 0. \end{cases}$$

Ensuite, en utilisant le Théorème 3.1.1, nous transformons le système (4.2) à la forme

$$\frac{dR}{d\theta} = \begin{cases} \varepsilon \frac{3}{2(R^2 + 3 \cos(\theta))} \left( A(\theta; a, b)R + B(\theta; a, b)R^2 + C(\theta; a, b)R^3 + D(\theta; a, b)R^4 \right. \\ \quad \left. + E(\theta; a, b)R^5 + F(\theta; a, b)R^6 + G(\theta; a, b)R^7 \right) + O(\varepsilon^2) \quad \text{si } y > 0, \\ \\ \varepsilon \frac{3}{2(R^2 + 3 \cos(\theta))} \left( A(\theta; c, d)R + B(\theta; c, d)R^2 + C(\theta; c, d)R^3 + D(\theta; c, d)R^4 \right. \\ \quad \left. + E(\theta; c, d)R^5 + F(\theta; c, d)R^6 + G(\theta; c, d)R^7 \right) + O(\varepsilon^2) \quad \text{si } y < 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

où

$$A(\theta; a, b) = 9(a_1 \cos(\theta))^4 + (a_2 + b_1) \cos(\theta)^3 \sin(\theta) + b_2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2,$$

$$B(\theta; a, b) = (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} (3a_4 \cos(\theta)^4 + 3(a_5 + b_3) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \\ + 3(a_3 + b_4) \cos(\theta)^3 \sin(\theta) + 3b_5 \cos(\theta) \sin(\theta)^3),$$

$$C(\theta; a, b) = 6(a_1 \cos(\theta))^3 + (a_2 + b_1) \cos(\theta)^2 \sin(\theta) + b_2 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \\ + 3(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} (a_6 \cos(\theta)^5 + (a_7 + b_6) \cos(\theta)^4 \sin(\theta) \\ + (a_8 + b_7) \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 + (a_9 + b_8) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 + b_9 \cos(\theta) \sin(\theta)^4),$$

$$D(\theta; a, b) = (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} (a_4 \cos(\theta)^3 + (a_5 + b_3) \cos(\theta) \sin(\theta)^2 \\ + (a_3 + b_4) \cos(\theta)^2 \sin(\theta) + b_5 \sin(\theta)^3 + 3(a_{10} \cos(\theta))^6 \\ + (a_{11} - b_1 + b_{10}) \cos(\theta)^5 \sin(\theta) + (a_1 + a_{12} - b_2 + b_{11}) \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 \\ + (a_2 + a_{13} - b_1 + b_{12}) \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 + (a_1 + a_{14} - b_2 + b_{13}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \\ + (a_2 + b_{14}) \cos(\theta) \sin(\theta)^5),$$

$$E(\theta; a, b) = a_1 \cos(\theta)^2 + (a_2 + b_1) \cos(\theta) \sin(\theta) + b_2 \sin(\theta)^2 + (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} (a_6 \cos(\theta)^4 \\ + (a_7 + b_6) \cos(\theta)^3 \sin(\theta) + (a_8 + b_7) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + (a_9 + b_8) \cos(\theta) \sin(\theta)^3 \\ + b_9 \sin(\theta)^4) + (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} (-b_4 \cos(\theta)^5 \sin(\theta) + (a_4 - b_3) \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 \\ + (a_3 - b_4 - b_5) \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3 + (a_4 + a_5 - b_3) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 \\ + (a_3 - b_5) \cos(\theta) \sin(\theta)^5 + a_5 \sin(\theta)^6),$$

$$F(\theta; a, b) = a_{10} \cos(\theta)^6 + (a_{11} - b_1 + b_{10}) \cos(\theta)^4 \sin(\theta) \\ + (a_1 + a_{12} - b_2 + b_{11}) \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 + (a_2 + a_{13} - b_1 + b_{12}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 \\ + (a_1 + a_{14} - b_2 + b_{13}) \cos(\theta) \sin(\theta)^4 + (a_2 + b_{14}) \sin(\theta)^5 \\ + (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} (-b_6 \cos(\theta)^6 \sin(\theta) + (a_6 - b_7) \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^2 \\ + (a_7 - b_6 - b_8) \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^3 + (a_6 + a_8 - b_7 - b_9) \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 \\ + (a_7 + a_9 - b_8) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^5 + (a_8 - b_9) \cos(\theta) \sin(\theta)^6 + a_9 \sin(\theta)^7),$$

$$G(\theta; a, b) = -b_{10} \cos(\theta)^7 \sin(\theta) + (a_{10} - b_{11}) \cos(\theta)^6 \sin(\theta)^2 \\ + (a_{11} - b_{10} - b_{12}) \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^3 + (a_{10} + a_{12} - b_{11} - b_{13}) \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4 \\ + (a_{11} + a_{13} - b_{12} - b_{14}) \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5 + (a_{12} + a_{14} - b_{13}) \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6 \\ + (a_3 - b_{14}) \cos(\theta) \sin(\theta)^7 + a_{14} \sin(\theta)^8,$$

4.2. CYCLES LIMITES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUARTIQUES  
DISCONTINUS À DEUX ZONES

---

où  $a = (a_1, \dots, a_{14})$ ,  $b = (b_1, \dots, b_{14})$ ,  $c = (c_1, \dots, c_{14})$  et  $d = (d_1, \dots, d_{14})$ .

Notons que le système (4.3) à une droite invariante  $y = -1$ , donc, la distance minimale de la limite externe de l'anneau de la période du centre à l'origine est 1.

Le système différentiel discontinu (4.5) est sous les hypothèses du Théorème 2.1.1. Donc il faut étudier les zéros de la fonction moyennée  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(R) = & \frac{3}{2} \int_0^\pi \frac{A(\theta; a, b)R + B(\theta; a, b)R^2 + C(\theta; a, b)R^3 + D(\theta; a, b)R^4}{R^2 + 3 \cos(\theta)} \\ & + \frac{E(\theta; a, b)R^5 + F(\theta; a, b)R^6 + G(\theta; a, b)R^7}{R^2 + 3 \cos(\theta)} d\theta \\ & + \frac{3}{2} \int_\pi^{2\pi} \frac{A(\theta; c, d)R + B(\theta; c, d)R^2 + C(\theta; c, d)R^3 + D(\theta; c, d)R^4}{R^2 + 3 \cos(\theta)} \\ & + \frac{E(\theta; c, d)R^5 + F(\theta; c, d)R^6 + G(\theta; c, d)R^7}{R^2 + 3 \cos(\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $f$  peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} f(R) = & a_1g_1 + a_2g_2 + a_3g_3 + a_4g_4 + a_5g_5 + a_6g_6 + a_7g_7 + a_8g_8 + a_9g_9 \\ & + a_{10}g_{10} + a_{11}g_{11} + a_{12}g_{12} + a_{13}g_{13} + a_{14}g_{14} + b_1g_{15} + b_2g_{16} \\ & + b_3g_{17} + b_4g_{18} + b_5g_{19} + b_6g_{20} + b_7g_{21} + b_8g_{22} + b_9g_{23} + b_{10}g_{24} \\ & + b_{11}g_{25} + b_{12}g_{26} + b_{13}g_{27} + b_{14}g_{28} + c_1g_{29} + c_2g_{30} + c_3g_{31} + c_4g_{32} \\ & + c_5g_{33} + c_6g_{34} + c_7g_{35} + c_8g_{36} + c_9g_{37} + c_{10}g_{38} + c_{11}g_{39} + c_{12}g_{40} \\ & + c_{13}g_{41} + c_{14}g_{42} + d_1g_{43} + d_2g_{44} + d_3g_{45} + d_4g_{46} + d_5g_{47} + d_6g_{48} \\ & + d_7g_{49} + d_8g_{50} + d_9g_{51} + d_{10}g_{52} + d_{11}g_{53} + d_{12}g_{54} + d_{13}g_{55} + d_{14}g_{56}. \end{aligned}$$

Les expressions de  $g_i(R)$ ,  $i \in \{1, \dots, 56\}$  sont respectivement présentées dans l'appendice 2.

**Lemme 4.2.1.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$g(\theta) = \cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta (R^2 + 3 \cos \theta)^\gamma$$

où  $\gamma = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ ,  $\beta = 2p$  et  $\alpha, p \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\int_0^\pi g(\theta) d\theta = \int_\pi^{2\pi} g(\theta) d\theta. \quad (4.6)$$

**Preuve.**

Mettons  $z = 2\pi - \theta$ , dans le côté gauche de l'équation (4.6) , on obtient

$$\int_0^\pi g(\theta)d\theta = - \int_{2\pi}^\pi g(2\pi - z)dz = \int_\pi^{2\pi} g(z)dz = \int_\pi^{2\pi} g(\theta)d\theta.$$

**Lemme 4.2.2.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$g(\theta) = \frac{\cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta}{(R^2 + 3 \cos \theta)^\gamma},$$

où  $\gamma = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ ,  $\beta = 2p$  et  $\alpha, p \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\int_0^\pi g(\theta)d\theta = \int_\pi^{2\pi} g(\theta)d\theta. \quad (4.7)$$

**Preuve.**

La preuve est similaire à celle du lemme 4.2.1.

Après avoir utilisé le manipulateur *Maple*, nous remarquons que :

$$\begin{aligned} g_1 = g_{16} = g_{29} = g_{44}, \quad g_2 = \frac{5}{2}g_{15} = -g_{30} = -\frac{5}{2}g_{43}, \\ g_3 = g_{31}, \quad g_7 = g_{35}, \\ g_{10} = -g_{25} = g_{38} = -g_{53}, \quad g_{12} = -g_{27} = g_{40} = -g_{55}, \\ g_{11} = -g_{39}, \quad g_{13} = -g_{41}, \quad g_{14} = g_{42}, \quad g_{17} = g_{45}, \\ g_{18} = g_{46}, \quad g_{20} = g_{48}, \quad g_{24} = -g_{52}, \quad g_{26} = -g_{54}, \\ g_{28} = -g_{56}, \end{aligned}$$

et en appliquant le Lemme 4.2.1 et le Lemme 4.2.2, on obtient

$$\begin{aligned} g_4 = g_{32}, \quad g_{17} = g_{45}, \\ g_5 = g_{33}, \quad g_{21} = g_{49}, \\ g_6 = g_{34}, \quad g_{23} = g_{51}, \\ g_8 = g_{36}. \end{aligned}$$

Alors la fonction  $f$  devient

$$\begin{aligned}
 f(R) = & (a_1 + b_2 + c_1 + d_2)g_1 + (a_2 + \frac{5}{2}b_1 - c_2 - \frac{5}{2}d_1)g_2 + (a_3 + c_3)g_3 + (a_4 + c_4)g_4 \\
 & + (a_5 + c_5)g_5 + (a_6 + c_6)g_6 + (a_7 + c_7)g_7 + (a_8 + c_8)g_8 + a_9g_9 \\
 & + (a_{10} - b_{11} + c_{10} - d_{11})g_{10} + (a_{11} - c_{11})g_{11} + (a_{12} - b_{13} + c_{12} - d_{13})g_{12} \\
 & + (a_{13} - c_{13})g_{13} + (a_{14} + c_{14})g_{14} + (b_3 + d_3)g_{17} + (b_4 + d_4)g_{18} + b_5g_{19} \\
 & + (b_6 - d_6)g_{20} + (b_7 + d_7)g_{21} + b_8g_{22} + (b_9 + d_9)g_{23} + (b_{10} - d_{10})g_{24} \\
 & + (b_{12} - d_{12})g_{25} + (b_{14} - d_{14})g_{28} + c_9g_{37} + d_5g_{47} + d_8g_{50}.
 \end{aligned}$$

Des 27 fonctions  $G_i = g_i : ]\sqrt{3}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{\{1, \dots, 14\} \cup \{17, \dots, 25\} \cup \{28, 37, 47, 50\}\}$ , nous avons 20 qui sont linéairement indépendantes. Effectivement, en utilisant le logiciel *Mathematica 11.0* pour calculer le développement de Taylor pour ces 27 fonctions dans la variable  $R$  jusqu'à son 30<sup>ème</sup> ordre autour de  $R = 2$ , qui sont trop longues et donc elles ne sont pas présentées ici, nous construisons une matrice  $27 \times 31$ , où dans la rangée  $k$  nous plaçons les 31 coefficients de  $R^0, R^1, \dots, R^{30}$  du développement de Taylor de  $G_k$ ,  $k \in \{\{1, \dots, 14\} \cup \{17, \dots, 25\} \cup \{28, 37, 47, 50\}\}$ , et nous concluons que le rang de cette matrice est égale à 20.

De la proposition 3.1.1, puisqu'il y a 20 fonctions linéairement indépendantes parmi les 27 décrites précédemment, il existe une combinaison linéaire d'entre eux avec au moins 19 zéros, parce que tous les coefficients de ces fonctions sont linéairement indépendants, il est facile à vérifier. Ainsi, il existe  $R_1, R_2, \dots, R_{19} \in ]\sqrt{3}, +\infty[$  et les coefficients  $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, 14\}$  tels que  $f(R_k) = 0$ ,  $k \in \{1, \dots, 19\}$ .

En résumé, nous concluons qu'il existe des systèmes différentiels polynomiaux quartiques discontinus plan (4.2) ayant au moins 19 cycles limites bifurquant des orbites périodiques du centre isochrone uniforme situé à l'origine du système différentiel non perturbé (4.3), en utilisant la théorie de moyennisation de premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus. Ceci complète la preuve du Théorème 4.2.1.

En d'autres termes, nous étendons le travail de Itikawa et Llibre [34] d'un système différentiel polynomial quartique continu (3.12) à un système différentiel discontinu (4.2) séparer par une ligne droite  $y = 0$ , en prouvant 11 cycles limites supplémentaires.

# Bifurcation des cycles limites pour un système différentiel plan ayant une intégrale première non rationnelle

Dans ce chapitre, nous considérons un système différentiel polynomial particulier dans le plan ayant un centre et une intégrale première non rationnelle. Nous étudions la bifurcation des cycles limites des orbites périodiques de ce centre lorsqu'il est perturbé par la classe de tous les systèmes différentiels polynomiaux d'un degré donné, en utilisant la théorie basée sur les intégrales abéliennes généralisées. Ce travail est dû à Llibre, Teixeira et Torregrosa [45].

## 5.1 Perturbation d'un centre bidimensionnel ayant une intégrale première non rationnelle

Dans cette partie, nous considérons le système différentiel polynomial homogène

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2), \end{cases} \quad (5.1)$$

de degré 3 qui a l'intégrale première non rationnelle donnée par :

$$H(x, y) = (x^2 + y^2) \exp\left(-\frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Llibre, Teixeira et Torregrosa [45] ont étudié le système (5.1) après l'avoir perturbé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y(3x^2 + y^2) + \varepsilon P(x, y), \\ \dot{y} = x(x^2 - y^2) + \varepsilon Q(x, y), \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des polynômes de degré au plus  $m$ .

En utilisant la théorie basée sur les intégrales abéliennes généralisées, ils ont montré que :

**Théorème 5.1.1.** *Le système différentiel polynomial homogène (5.1) a un centre global à l'origine (c'est-à-dire que toutes les orbites contenues dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  sont périodiques).*

*Pour les polynômes  $P$  et  $Q$  convenables, le système (5.2) a  $[(m-1)/2]$  cycles limites bifurquant des orbites périodiques du center globale (5.1), où  $[\cdot]$  désigne la fonction de partie entière.*

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin des intégrales abéliennes généralisées.

Nous résumons alors les résultats sur les intégrales abéliennes généralisées comme ils ont été cités dans[45].

Supposons que le système non perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (5.3)$$

a une intégrale première  $H(x, y)$  et un facteur intégrant  $1/R(x, y)$ . Supposons que l'origine de ce système soit un centre et que les orbites périodiques de ce centre soient données par la famille d'ovales  $\gamma_h$  contenue dans les courbes de niveau  $H(x, y) = h$ .

Considérons le système perturbé

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) + \varepsilon P(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y) + \varepsilon Q(x, y), \end{cases}$$

qui peut être écrit de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)R(x, y) + \varepsilon P(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y)R(x, y) + \varepsilon Q(x, y). \end{cases} \quad (5.4)$$

Alors l'intégrale abélienne généralisée associée à ce système est

$$I(h) = \int_{\gamma_h} \frac{P(x, y)dy - Q(x, y)dx}{R(x, y)}. \quad (5.5)$$

Puisque  $I(h)$  donne l'approximation du premier ordre en  $\varepsilon$  de la fonction de déplacement, nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 5.1.2.** *Les zéros simples de la fonction  $I(h)$  fournissent des cycles limites pour le système perturbé (5.4) qui bifurquent des orbites périodiques du système non perturbé (5.3).*

Pour plus de détails sur les intégrales abéliennes (généralisées) voir Li [38].

### 5.1.1 Preuve du Théorème 5.1.1

Nous montrons d'abord que le système différentiel polynomial homogène (5.1) a un centre global à l'origine.

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , le système (5.1) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3 \sin 2\theta, \\ \dot{\theta} = r^2. \end{cases}$$

Bien sûr, étudier ce système équivaut à étudier l'équation différentielle

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sin 2\theta, \tag{5.6}$$

dont la solution  $r(\theta, z)$  satisfait  $r(0, z) = z$  est

$$r(\theta) = z \exp(-\sin^2 \theta). \tag{5.7}$$

Alors, toutes les solutions de l'équation différentielle (5.6) et par conséquent toutes les solutions du système différentiel polynomial homogène (5.1) sont périodiques à l'exception de l'origine qui est un point singulier. Il est donc prouvé que l'origine du système (5.1) est un centre global.

Étudions maintenant le nombre de cycles limites du système perturbé (5.3) pour  $|\varepsilon| \neq 0$  suffisamment petit, qui bifurquent des orbites périodiques du centre du système (5.1).

Pour cela, nous écrivons le polynôme  $P(x, y)$  de degré  $m$  du système (5.1) comme

$$P(x, y) = \sum_{l=0}^m P_l(x, y),$$

où  $P_l(x, y)$  est la partie homogène du degré  $l$  de  $P(x, y)$ . On fait de même pour le polynôme  $Q(x, y)$ .

5.1. PERTURBATION D'UN CENTRE BIDIMENSIONNEL AYANT UNE  
INTÉGRALE PREMIÈRE NON RATIONNELLE

---

Afin d'appliquer la théorie de moyennisation pour l'étude de cycles limites, nous avons besoin d'écrire le système (5.2) sous la forme standard (2.10) de la théorie de moyennisation, le système peut s'écrire comme suit :

$$\frac{dr}{d\theta} = -r \sin^2 \theta + \varepsilon F_1(\theta, r) + O(\varepsilon^2), \quad (5.8)$$

où

$$F_1(\theta, \varepsilon) = \sum_{l=0}^m r^l - 2[(\cos \theta + \cos 3\theta)P_l(\cos \theta, \sin \theta) + 3(\sin \theta + \sin 3\theta)Q_l(\cos \theta, \sin \theta)].$$

En utilisant la notion introduite dans le Théorème 2.2.3 pour l'équation différentielle (5.8) et en prenant  $k = n = 1$ , on a

$$\begin{aligned} x &= r, \\ t &= \theta \\ F_0(\theta, x) &= -r \sin 2\theta, \\ \Omega &= (0, \infty). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Il est clair que l'équation différentielle (5.8) est  $2\pi$ -périodique dans la variable  $\theta$ . De plus, pour  $\varepsilon = 0$ , toutes les solutions de cette équation sont  $2\pi$ -périodiques, elles sont données par (5.7).

Pour notre système,  $V$  et  $\alpha$  du Théorème 2.2.3 sont

$$V = \{r : 0 < r < \rho\},$$

pour un certain nombre réel  $\rho > 0$ , et  $\alpha = z \in V$ .

De la fonction  $F_0$  donnée en (5.9) et la solution périodique  $r(\theta, z)$  donnée en (5.7), la matrice fondamentale  $M(\theta)$  de l'équation différentielle (5.8) avec  $\varepsilon = 0$  tel que  $M(0) = 1$  est

$$M(\theta) = e^{-\sin^2 \theta}.$$

On remarque que d'après le système (5.9) la matrice fondamentale ne dépend pas de l'orbite périodique particulière  $r(\theta, z)$ ; c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la condition initiale  $z$ , donc

$$M^{-1}(\theta) = e^{\sin^2 \theta}.$$

De ce fait, toutes les hypothèses du Théorème 2.2.3 sont satisfaites.

5.1. PERTURBATION D'UN CENTRE BIDIMENSIONNEL AYANT UNE  
INTÉGRALE PREMIÈRE NON RATIONNELLE

---

Par conséquent, nous étudions les zéros en  $V$  de la fonction  $F(z)$ , où  $F$  est donné par (2.14). Plus précisément, nous avons

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{l=0}^m z^{l-2} I_l,$$

où

$$I_l = \int_0^{2\pi} e^{(3-l)\sin^2\theta} [(\cos\theta + \cos 3\theta)P_l(\cos\theta, \sin\theta) + (3\sin\theta + \sin 3\theta)Q_l(\cos\theta, \sin\theta)].$$

Par symétrie l'intégrale  $I_l = 0$  si  $l$  est pair, donc :

- Si  $m = 2v + 1$ , alors

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{z} \sum_{l=0}^v z^{2l} I_{2l+1}, \quad (5.10)$$

le polynôme  $\mathcal{F}(z)$  peut avoir au plus  $v = [(m - 1)/2]$  racines réelles positives.

- Si  $m = 2v$ , alors

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{z} \sum_{l=0}^{v-1} z^{2l} I_{2l+1}, \quad (5.11)$$

encore une fois, le polynôme  $F(z)$  peut avoir au plus  $v - 1 = [(m - 1)/2]$  racines réelles positives.

En bref, en utilisant le Théorème 2.2.3, nous pouvons obtenir au plus  $[(m - 1)/2]$  cycles limites du système (5.2) bifurquant des orbites périodiques du système (5.1).

Nous prouvons que lorsque  $m = 2v + 1$ , la fonction (5.10) pour le système perturbé (5.2) avec

$$P(x, y) = \sum_{l=0}^v a_{2l+1} x^{2l+1}, \quad Q(x, y) = 0, \quad (5.12)$$

peut être choisie pour qu'il ait exactement  $v = [(m - 1)/2]$  des zéros arbitraires positifs.

De la même manière, on peut prouver que lorsque  $m = 2v$ , la fonction (5.11) pour le système perturbé (5.2) avec

$$P(x, y) = \sum_{l=0}^{v-1} a_{2l+1} x^{2l+1}, \quad Q(x, y) = 0,$$

5.1. PERTURBATION D'UN CENTRE BIDIMENSIONNEL AYANT UNE  
INTÉGRALE PREMIÈRE NON RATIONNELLE

---

peut être choisie pour qu'il ait exactement  $v - 1 = [(n - 1)/2]$  zéros arbitraires positifs. Le théorème 2.2.3 sera donc démontré.

Maintenant, pour  $m = 2v + 1$ , nous considérons le système (5.2) avec  $P$  et  $Q$  donné par (5.12). Alors, de sa fonction correspondante (5.10), nous avons

$$I_{2l+1} = a_{2l+1} \int_0^{2\pi} e^{2(1-l)\sin^2\theta} (\cos\theta + \cos(3\theta) \cos^{2l+1}\theta) d\theta.$$

Après un calcul avec un manipulateur algébrique comme Mathematica ou Maple, nous obtenons que  $I_{2l+1}$  est égal à

$$\begin{aligned} L(l) = & (12l^2 - 28l + 19)\bar{\mathcal{H}}(l + 1/2, l + 3, 2l - 2) \\ & + (l + 2)(6l - 5)\bar{\mathcal{H}}(l - 1/2, l + 2, 2l - 2), \end{aligned} \quad (5.13)$$

multipliant par la constante

$$\frac{2L - 1}{(l + 2)!} \sqrt{\pi} \Gamma(l - 1/2) e^{2-2l},$$

où  $\bar{\mathcal{H}}(a, b, z)$  est la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer et  $\Gamma(z)$  est la fonction Gamma, voir Abramowitz et Stegun [1]. La valeur de  $L(l)$  est non nulle pour tous les entiers non négatifs  $l$ , voir l'appendice 3. Ainsi dans le polynôme (5.10), on peut toujours choisir les coefficients  $a_{l+1}$  commodément et en alternante le signe (selon la règle de Descartes) afin que le polynôme ait le nombre maximum possible de racines positives  $v = [(m - 1)/2]$ . Ceci complète la preuve du Théorème 5.1.1.

Enfin, nous remarquons que le calcul de l'intégrale abélienne généralisée (5.5) pour le système (5.2) en prenant

$$x(\theta) = ze^{-\sin^2\theta} \cos\theta, \quad y(\theta) = ze^{-\sin^2\theta} \sin\theta,$$

comme paramétrage du centre lorsque  $\varepsilon = 0$  et en intégrant par rapport à la variable  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ , on obtient que

$$I(z) = \frac{z}{e^2} \mathcal{F}(z).$$

Par conséquent, les deux fonctions ont les mêmes zéros positifs, dans ce cas, la méthode basée sur le théorème 2.2.2 et la méthode basée sur l'intégrale abélienne généralisée coïncident.

## Conclusion et perspectives

L'existence des cycles limites des systèmes différentiels plan dépendant d'un petit paramètre peut être étudiée par la théorie de moyennisation, qui permet de donner une borne inférieure pour le nombre de cycles limites que peut avoir le système différentiel perturbé. Ceci est étroitement lié à la seconde partie du seizième problème de Hilbert.

Dans ce travail, on a étudié le nombre maximum de cycles limites d'un système différentiel polynômial quartique plan ayant un centre isochrone situé à l'origine dans deux cas : le cas continu et le cas discontinu, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre.

Notons que les calculs présentés dans cette thèse ont été faits par les logiciels mathématiques : *Maple* et *Mathematica* 11.0. Ils ont été difficilement calculer même en utilisant les logiciels précédents.

En perspective, nous continuerons nos recherches sur le nombre maximum de cycles limites pour d'autres systèmes différentiels perturbés dans  $\mathbb{R}^2$ , en utilisant la théorie de moyennisation du premier et deuxième ordre.

# Appendice 1

Dans cet appendice, nous définissons les fonctions moyennées  $g_i(R)$ ,  $i \in \{0, \dots, 13\}$ ,  $g_{M_i}(R)$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$  écrites dans le chapitre 3.

$$g_0 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{4}{3}} + (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 + \sin(\theta)^4)(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}) d\theta,$$

$$g_1 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + \sin(\theta)^6}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta,$$

$$g_2 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta) \sin(\theta)^6}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta,$$

$$g_3 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^3 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta,$$

$$g_4 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^4 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^2}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta,$$

$$g_5 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}} + \frac{\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^6 + \cos(\theta) \sin(\theta)^8}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{4}{3}}}) d\theta,$$

$$g_6 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}} + \frac{\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^6 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{4}{3}}}) d\theta,$$

$$g_7 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(\theta)^6}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}} + \frac{\cos(\theta)^7 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{4}{3}}}) d\theta,$$

---


$$g_8 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\sin(\theta)^4 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta) \sin(\theta)^6}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta,$$

$$g_9 = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\sin(\theta)^6}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}} - \frac{\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^6 + \cos(\theta) \sin(\theta)^8}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{4}{3}}}) d\theta,$$

$$g_{10} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} ((R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} \cos(\theta) \sin(\theta)^2 - \frac{\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta,$$

$$g_{11} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} ((R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 - \frac{\cos(\theta)^5 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta,$$

$$g_{12} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}} - \frac{\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^6 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{4}{3}}}) d\theta,$$

$$g_{13} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}} - \frac{\cos(\theta)^7 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^4}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{4}{3}}}) d\theta,$$

où

$$g_{M_1} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^5 + \frac{\cos(\theta)^6 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4}{R^2 + 3 \cos(\theta)}) d\theta,$$

$$g_{M_2} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4}{R^2 + 3 \cos(\theta)}) d\theta,$$

$$g_{M_3} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\frac{\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6 + \sin(\theta)^8}{R^2 + 3 \cos(\theta)}) d\theta,$$

$$g_{M_4} = \frac{3}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))) d\theta.$$

Après l'utilisation du logiciel de calcul Mathematica 11.0,

nous obtenons

---


$$g_0 = \frac{15\sqrt[3]{R^2-3}}{112R} \left( (R^4 + 36) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - \frac{1}{R^2-3} \left( (R^6 + R^4 + 6R^2 + 36) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right) \right);$$

$$g_1 = \frac{1}{352R\sqrt[3]{R^2-3}} \left( (2R^8 + 4R^6 - 49R^4 - 78R^2 + 720) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - (R^2 + 3)(2R^6 - 8R^4 - 19R^2 + 96) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right);$$

$$g_2 = \frac{1}{2912\pi R(R^2-3)^{2/3}} \left( 3 \left( \pi(R^2-3)(6R^8 - 85R^4 + 504) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - \pi(R^2+3)(6R^8 - 12R^6 - 61R^4 + 98R^2 + 168) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right) \right);$$

$$g_3 = \frac{1}{1760\pi R\sqrt[3]{R^2-3}} \left( \pi(R^2+3)(10R^6 - 40R^4 + 169R^2 - 576) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - \pi(10R^8 + 20R^6 + 19R^4 + 138R^2 - 4320) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right);$$

$$g_4 = \frac{1}{2912R(R^2-3)^{2/3}} \left( 3 \left( (R^2+3)(6R^8 - 12R^6 + 17R^4 - 58R^2 - 352) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - (R^2-3)(6R^8 - 7R^4 - 1056) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right) \right);$$

$$g_5 = \frac{1}{209440R(R^2-3)^{4/3}} \left( 3 \left( (R^3-3R)^2(200R^8 - 3546R^4 + 16197) {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - 2(R^2-3)^2(R^2+3)(100R^8 - 1023R^4 + 1176) {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right) \right);$$

$$g_6 = \frac{1}{209440R(R^2-3)^{4/3}} \left( 2(R^2-3)^2(R^2+3)(300R^8 - 927R^4 - 1232) {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - (R^3-3R)^2(600R^8 - 6354R^4 + 6941) {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right);$$

$$g_7 = \frac{1}{41888R(R^2-3)^{4/3}} \left( (R^3-3R)^2(120R^8 - 414R^4 - 2753) {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) - 2(R^2-3)^2(R^2+3)(60R^8 + 243R^4 + 896) {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right) \right);$$

---


$$g_8 = \frac{1}{2912R(R^2-3)^{2/3}} \left( 9 \left( (R^2 + 3) (2R^8 - 4R^6 - 29R^4 + 50R^2 - 48) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (R^2 - 3) (2R^8 - 37R^4 - 144) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right) \right);$$

$$g_9 = \frac{1}{41888R} \left( 3(R^2 - 3)^{2/3} \left( 2(R^2 + 3) (4R^4 + 7) (5R^4 - 48) {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (-40R^8 + 614R^4 - 1383) R^2 {}_2F_1 \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right) \right);$$

$$g_{10} = \frac{1}{1760R\sqrt[3]{R^2-3}} \left( (10R^8 + 20R^6 - 157R^4 - 214R^2 + 960) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \\ \left. - (R^2 + 3) (10R^6 - 40R^4 - 7R^2 + 128) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right);$$

$$g_{11} = \frac{1}{2912\pi R(R^2-3)^{2/3}} \left( 3 \left( 3\pi (R^2 - 3) (2R^8 - 11R^4 + 64) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \pi (R^2 + 3) (6R^8 - 12R^6 - 9R^4 - 6R^2 + 64) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right) \right);$$

$$g_{12} = \frac{1}{209440\pi R} \left( 3(R^2 - 3)^{2/3} \left( \pi (200R^8 - 1642R^4 + 13) R^2 {}_2F_1 \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left( -\pi (R^2 + 3) (100R^8 - 71R^4 + 224) {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 685 \left( \left( \frac{6}{R^2-3} + 1 \right)^{2/3} - 1 \right) R^2 + 1680 \left( \left( \frac{6}{R^2-3} + 1 \right)^{2/3} + 1 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 30 \left( \left( \frac{6}{R^2-3} + 1 \right)^{2/3} - 1 \right) R^{10} - 60 \left( \left( \frac{6}{R^2-3} + 1 \right)^{2/3} + 1 \right) R^8 \right. \right. \\ \left. \left. - 207 \left( \left( \frac{6}{R^2-3} + 1 \right)^{2/3} - 1 \right) R^6 + 314 \left( \left( \frac{6}{R^2-3} + 1 \right)^{2/3} + 1 \right) R^4 \right) \right) \right);$$

$$g_{13} = \frac{1}{209440R\sqrt[3]{R^2-3}} \left( 2(300R^{12} - 771R^8 - 505R^4 + 5376) {}_2F_1 \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \\ \left. - R^2 (R^2 - 3) (600R^8 - 642R^4 + 277) {}_2F_1 \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right);$$

où  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  est la fonction hypergéométrique qui a l'expression

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

---

avec

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1), & \text{si } k > 0; \end{cases}$$

et

$$g_{M_1} = -\frac{R}{16} - \frac{R^5}{108} - \frac{R^9}{486} - \frac{3}{2R(-9+R^4)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R^{11}}{486(-9+R^4)^{\frac{1}{2}}};$$

$$g_{M_2} = -\frac{R}{12} - \frac{R^5}{54} + \frac{(-9+R^4)^{\frac{1}{2}}}{6R} + \frac{1}{54}R^3(-9+R^4)^{\frac{1}{2}};$$

$$g_{M_3} = -\frac{R}{6} + \frac{(-9+R^4)^{\frac{1}{2}}}{6R}; \quad g_{M_4} = \frac{3R}{4}.$$

## Appendice 2

Dans cet appendice, nous définissons les fonctions moyennées  $g_i(R)$ ,  $i \in \{1, \dots, 56\}$  décrites dans le chapitre 4.

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2(R^2 + 3 \cos(\theta)) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta) \sin(\theta)^4) d\theta, \\
 g_2 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta)) + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 + \sin(\theta)^5) d\theta, \\
 g_3 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{(\cos(\theta) \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
 g_4 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^3 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
 g_5 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
 g_6 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^4 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
 g_7 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^3 \sin(\theta) (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^5)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
 g_8 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta) \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
 g_9 &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^3 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^5 + \sin(\theta)^7)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
 g_{10} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^5 + \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^6 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
 g_{11} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^4 \sin(\theta) + \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
 g_{12} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 + \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta,
 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
g_{13} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 + \frac{(\cos(\theta) \sin(\theta)^7 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{14} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^4 + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6 + \sin(\theta)^8)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{15} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta)) - (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta))) d\theta, \\
g_{16} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\sin(\theta)^2(R^2 + 3 \cos(\theta)) - (\cos(\theta) \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2)) d\theta, \\
g_{17} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^2(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{18} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^5 \sin(\theta) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{19} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\sin(\theta)^3(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} - \frac{(\cos(\theta) \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{20} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^3 \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^6 \sin(\theta) + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{21} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^5 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{22} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^3(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{23} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\sin(\theta)^4(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta) \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{24} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^4 \sin(\theta) + \frac{(\cos(\theta)^5 \sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^7 \sin(\theta))}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{25} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 - \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^6 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{26} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 - \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{27} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^4 - \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{28} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\sin(\theta)^5 - \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta) \sin(\theta)^7)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{29} &= \frac{3}{2} \int_\pi^{2\pi} (\cos(\theta)^2(R^2 + 3 \cos(\theta)) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta) \sin(\theta)^4) d\theta,
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
g_{30} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta)) + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 + \sin(\theta)^5) d\theta, \\
g_{31} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{(\cos(\theta) \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{32} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^3 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{33} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{34} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^4 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{35} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^3 \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^5)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{36} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta) \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{37} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta)^3 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^5 + \sin(\theta)^7)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{38} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^5 + \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^6 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{39} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^4 \sin(\theta) + \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{40} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 + \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{41} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 + \frac{(\cos(\theta) \sin(\theta)^7 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{42} &= \frac{3}{2} \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta)^4 + \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6 + \sin(\theta)^8)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{43} &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta)(R^2 + 3 \cos(\theta)) - (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta))) d\theta, \\
g_{44} &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} (\sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta)) - (\cos(\theta) \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2)) d\theta, \\
g_{45} &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} (\cos(\theta) \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{46} &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} (\cos(\theta)^2 \sin(\theta) (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^5 \sin(\theta) + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta, \\
g_{47} &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi} (\sin(\theta)^3 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}} - \frac{(\cos(\theta) \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}}}) d\theta,
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
g_{48} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^3 \sin(\theta) (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^6 \sin(\theta) + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{49} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^5 \sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{50} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^3 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{51} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\sin(\theta)^4 (R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{1}{3}} - \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta) \sin(\theta)^6)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))^{\frac{2}{3}}}) d\theta, \\
g_{52} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^4 \sin(\theta) + \frac{(\cos(\theta)^5 \sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^7 \sin(\theta))}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{53} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^2 - \frac{(\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^6 \sin(\theta)^2)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{54} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^3 - \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta)^5 \sin(\theta)^3)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{55} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\cos(\theta) \sin(\theta)^4 - \frac{(\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^6 + \cos(\theta)^4 \sin(\theta)^4)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta, \\
g_{56} &= \frac{3}{2} \int_0^\pi (\sin(\theta)^5 - \frac{(\cos(\theta)^3 \sin(\theta)^5 + \cos(\theta) \sin(\theta)^7)}{(R^2 + 3 \cos(\theta))}) d\theta.
\end{aligned}$$

En utilisant le logiciel *Mathematica* 11.0, nous obtenons

$$g_1 = \frac{3\pi R^2}{4};$$

$$g_2 = 5;$$

$$\begin{aligned}
g_3 &= \frac{3}{4} \left( \frac{1}{440 \sqrt[3]{R^2-3}} (10R^6 + 222R^2 + 10 \left( \sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} - 1 \right) R^8 + \left( 98 - 63 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} \right) R^4 \right. \\
&\quad \left. - 1008 \right) - \left( \frac{1}{440 \sqrt[3]{R^2+3}} (-10R^6 - 222R^2 + 10 \left( \sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} - 1 \right) R^8 + \left( 98 - 63 \sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} \right) R^4 \right. \\
&\quad \left. - 1008 \right) \Bigg);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4 &= \frac{1}{1760(R^2-3)^{\frac{1}{3}}} \left( -\pi \left( -4320 + 138R^2 + 19R^4 + 20R^6 + 10R^8 \right) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \pi(3 + R^2) \left( -576 + 169R^2 - 40R^4 + 10R^6 \right) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right);
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
g_5 &= \frac{1}{352(-3+R^2)^{\frac{1}{3}}} \pi \left( (720 - 78R^2 - 49R^4 + 4R^6 + 2R^8) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \\
&\quad \left. -(3+R^2)(96 - 19R^2 - 8R^4 + 2R^6) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right); \\
g_6 &= \frac{3\pi}{2912(R^2-3)^{2/3}} \left( (R^2 + 3) (6R^8 - 12R^6 + 17R^4 - 58R^2 - 352) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \\
&\quad \left. -(R^2 - 3) (6R^8 - 7R^4 - 1056) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right); \\
g_7 &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{728(R^2-3)^{2/3}} \left( -12R^8 + 96R^4 + \left( -179 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 144 \right) R^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( 6 - 6 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^{10} + \left( 137 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 58 \right) R^6 + 648 \right) - \frac{1}{728(R^2+3)^{2/3}} \left( 12R^8 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 96R^4 + \left( -179 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 144 \right) R^2 + \left( 6 - 6 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} \right) R^{10} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( 137 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 58 \right) R^6 - 648 \right) \right); \\
g_8 &= \frac{3}{2912(R^2-3)^{2/3}} \left( \pi (R^2 - 3) (6R^8 - 85R^4 + 504) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \pi (R^2 + 3) (6R^8 - 12R^6 - 61R^4 + 98R^2 + 168) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right); \\
g_9 &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{364(R^2-3)^{2/3}} \left( 6R^8 - 126R^4 + \left( 369 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 513 \right) R^2 + \left( 3 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3 \right) R^{10} + \left( 68 - 62 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^6 + 1080 \right) - \frac{1}{364(R^2+3)^{2/3}} \left( -6R^8 + 126R^4 \right. \\
&\quad \left. + \left( 369 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 513 \right) R^2 + \left( 3 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 3 \right) R^{10} \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( 68 - 62 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} \right) R^6 - 1080 \right) \right); \\
g_{10} &= \frac{1}{3888} \left( -\pi R^2 \left( 36R^4 + 81 + 24R^6 \sqrt{\frac{-3+R^2}{3+R^2}} + 8R^8 (-1 + \sqrt{\frac{-3+R^2}{3+R^2}}) \right) \right); \\
g_{11} &= \frac{1}{2430} \left( 6(-5R^8 + 30R^4 + 297) + 5(R^4 - 9) R^6 (\log(R^2 + 3) - \log(R^2 - 3)) \right); \\
g_{12} &= \frac{\pi R^2}{3888} \left( -8R^8 + 108R^4 + 8(R^2 - 3)^{3/2} (R^2 + 3)^{3/2} R^2 - 243 \right); \\
g_{13} &= \frac{1}{2430} \left( 6(5R^8 - 75R^4 + 378) + 5(R^5 - 9R)^2 (\log(R^2 - 3) - \log(R^2 + 3)) \right);
\end{aligned}$$

$$g_{14} = \frac{1}{3888} \left( 8(9 - R^4)^{5/2} \log \left( \frac{3-R^2}{\sqrt{9-R^4}} \right) - 8(9 - R^4)^{5/2} \log \left( \frac{R^2-3}{\sqrt{9-R^4}} \right) + \pi R^2 (8R^8 - 180R^4 + 1215) \right);$$

$$g_{17} = \frac{1}{1760(R^2-3)^{1/3}} \pi \left( (960 - 214R^2 - 157R^4 + 20R^6 + 10R^8) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) - (3+R^2)(128 - 7R^2 - 40R^4 + 10R^6) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right);$$

$$g_{18} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{880\sqrt[3]{R^2-3}} \left( 10R^6 + 310R^2 + 10 \left( \sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} - 1 \right) R^8 + \left( 3\sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} + 10 \right) R^4 - 480 \right) - \left( \frac{1}{880\sqrt[3]{R^2+3}} \left( -10R^6 - 310R^2 + 10 \left( \sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} - 1 \right) R^8 + \left( 3\sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} + 10 \right) R^4 - 480 \right) \right);$$

$$g_{19} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{880\sqrt[3]{R^2-3}} \left( -10R^6 + 834R^2 + \left( 10 - 10\sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} \right) R^8 + \left( 239\sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} - 274 \right) R^4 - 576 \right) - \frac{1}{880\sqrt[3]{R^2+3}} \left( 10R^6 - 834R^2 + \left( 10 - 10\sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} \right) R^8 + \left( 239\sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} - 274 \right) R^4 - 576 \right) \right);$$

$$g_{20} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{364(R^2-3)^{2/3}} \left( 168 + (-98 - 70 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^2 - 4R^4 - 3 \left( 1 + \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^6 - 6R^8 + \left( 3 - 3 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^{10} \right) - \frac{1}{364(R^2+3)^{2/3}} \left( -168 + (-98 - 70 \left( 1 + \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^2 + 4R^4 - 3 \left( 1 + \left( 1 + \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^6 + 6R^8 + \left( 3 - 3 \left( 1 + \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^{10} \right);$$

$$g_{21} = \frac{3}{2912(R^2-3)^{2/3}} \left( 3\pi (R^2 - 3) (2R^8 - 11R^4 + 64) {}_2F_1 \left( -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) - \pi (R^2 + 3) (6R^8 - 12R^6 - 9R^4 - 6R^2 + 64) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right);$$

$$g_{22} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{364(R^2-3)^{2/3}} \left( 6R^8 - 74R^4 + \left( -60 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 123 \right) R^2 + \left( 3 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 3 \right) R^{10} + \left( 42 - 36 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^6 + 144 \right) - \frac{1}{364(R^2+3)^{2/3}} \left( -6R^8 + 74R^4 + \left( -60 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 123 \right) R^2 + \left( 3 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 3 \right) R^{10} + \left( 42 - 36 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} \right) R^6 - 144 \right) \right);$$

$$g_{23} = \frac{9\pi}{2912(R^2-3)^{2/3}} \left( (R^2 + 3) (2R^8 - 4R^6 - 29R^4 + 50R^2 - 48) {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3} \right) \right)$$

---


$$-(R^2 - 3)(2R^8 - 37R^4 - 144) {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; 1; -\frac{6}{R^2-3}\right);$$

$$g_{24} = \frac{1}{2430} \left( 6(5(R^4 + 3)R^4 + 324) + 5R^{10}(\log(R^2 - 3) - \log(R^2 + 3)) \right);$$

$$g_{25} = \frac{1}{2430} \left( 6(5(R^4 - 6)R^4 + 108) + 5(R^4 - 9)R^6(\log(R^2 - 3) - \log(R^2 + 3)) \right);$$

$$g_{28} = \frac{1}{2430} \left( 6(-5R^8 + 75R^4 + 432) - 5(R^5 - 9R)^2(\log(R^2 - 3) - \log(R^2 + 3)) \right);$$

$$g_{37} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{364(R^2+3)^{2/3}} \left( -6R^8 + 126R^4 + \left( 369 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 513 \right) R^2 + \left( 3 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 3 \right) R^{10} + \left( 68 - 62 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} \right) R^6 - 1080 \right) - \frac{1}{364(R^2-3)^{2/3}} \left( 6R^8 - 126R^4 + \left( 369 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 513 \right) R^2 + \left( 3 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 3 \right) R^{10} + \left( 68 - 62 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^6 + 1080 \right) \right);$$

$$g_{47} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{880\sqrt[3]{R^2+3}} \left( 10R^6 - 834R^2 + \left( 10 - 10\sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} \right) R^8 + \left( 239\sqrt[3]{\frac{3}{R^2} + 1} - 274 \right) R^4 - 576 \right) - \frac{1}{880\sqrt[3]{R^2-3}} \left( -10R^6 + 834R^2 + \left( 10 - 10\sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} \right) R^8 + \left( 239\sqrt[3]{1 - \frac{3}{R^2}} - 274 \right) R^4 - 576 \right) \right);$$

$$g_{50} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{364(R^2+3)^{2/3}} \left( -6R^8 + 74R^4 + \left( -60 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 123 \right) R^2 + \left( 3 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} - 3 \right) R^{10} + \left( 42 - 36 \left( \frac{3}{R^2} + 1 \right)^{2/3} \right) R^6 - 144 \right) - \frac{1}{364(R^2-3)^{2/3}} \left( 6R^8 - 74R^4 + \left( -60 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 123 \right) R^2 + \left( 3 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} - 3 \right) R^{10} + \left( 42 - 36 \left( 1 - \frac{3}{R^2} \right)^{2/3} \right) R^6 + 144 \right) \right);$$

où  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  est la fonction hypergéométrique qui a l'expansion de la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$$

avec

$$(a)_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0, \\ a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1), & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

# Appendice 3

La fonction hypergéométrique confluyente de Kummer est donnée par la série

$$\bar{\mathcal{H}}(a, b, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \mu)\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b + \mu)\mu!} z^{\mu}. \quad (5.14)$$

Nous prouverons que  $L(l)$  défini en (5.13) est toujours positif pour tout entier  $l \geq 0$ .

Pour montrer que nous calculerons les coefficients de l'expansion en série de  $L(l)$  et nous verrons que tous sont positifs.

En utilisant (5.14), on obtient que

$$L(l) = \sum_{\mu=0}^{\infty} L_{\mu,l} (2l - 2)^{\mu},$$

où le coefficient  $L_{\mu,l}$  est égal à

$$\frac{(36l^2 - 72l + 43)\mu + 3(2l - 1)(6l^2 - 7l + 3)(l + 2)\Gamma(l + \mu - 1/2)}{\Gamma(l + 1/2)(l + \mu + 2)!\mu!}$$

Pour  $l > 0$  puisque  $36l^2 - 72l + 43 > 0$ ,  $6l^2 - 7l + 3 > 0$ ,  $\Gamma(l + \mu - 1/2) > 0$  et  $\Gamma(l + 1/2) > 0$  il s'ensuit que  $L_{\mu,l} > 0$  pour  $\mu = 0, 1, 2, \dots$  et  $l > 0$ . Par conséquent  $L(l) > 0$  si  $l > 0$ .

Finalement, à partir (5.14), on a

$$L(0) = 2e\pi(J_0(1) - 2J_1(1)) \approx 2.31849804 > 0.$$

# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I.A. Stegun ; *Bessel Functions J and Y, 9.1. In : Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. Dover, New York. (1972), 358–364.
- [2] A. Algaba and M. Reyes ; *Characterizing isochronous points and computing isochronous sections*, J. Math. Anal. **355** (2009), 564–576.
- [3] A. Algaba, M. Reyes, T. Ortega and A. Bravo ; *Campos curvicos con velocidad angular constante*, Actas : XVI CEDYA Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, VI CMA Congreso de Matematica Aplicada, Las Palmas de Gram Canaria. **2** (1999), 1341–1348.
- [4] A. Andronov, A. Vitt and S. Khaikin ; *Theory of Oscillations*, Pergamon Press, Oxford. **5** (1966).
- [5] M. di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys and P. Kowalczyk ; *Piecewise-Smooth Dynamical Systems, Theory and Applications*, Appl. Math. Sci. **163** (2008), 7–22.
- [6] M. Bey, S. Badi, K. Fernane and A. Makhlof ; *The number of limit cycles bifurcating from the periodic orbits of an isochronous center*, Math. Meth. Appl. Sci. (2018), 1–9. <https://doi.org/10.1002/mma.5385>
- [7] N.N. Bogoliubov and N. Krylov ; *The application of methods of nonlinear mechanics in the theory of stationary oscillations*, Publ. 8 of the Ukrainian Acad. Sci. Kiev. (1934).
- [8] A. Buică and J. Llibre ; *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 7–22.
- [9] A. Buică and J. Llibre ; *Limit cycles of a perturbed cubic polynomial differential centre*, Chaos Solitons Fractals. **32** (2007), 1059–1069.
- [10] J. Chavarriga and M. Sabatini ; *A survey of isochronous centers*, Qualitative Theory of Dynamical Systems. **1** (1999), 1–70.
- [11] J. Chavarriga, I. A. Garcia and J. Giné ; *On the integrability of differential equations defined by the sum of homogeneous vector fields with degenerate infinity*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **11** (2001), 711–722.

- 
- [12] F. D. Chen, C. Li, J. Llibre and Z. H. Zhang; *A unified proof on the weak Hilbert 16th problem for  $n = 2$* , J. Diff. Eqs. **221** (2006), 309–342.
- [13] C.B. Collins; *Conditions for a center in a simple class of cubic systems*, Differential and Integral Equations. **10** (1997), 333–356.
- [14] R. Conti; *Uniformly isochronous centers of polynomial systems in  $\mathbb{R}^2$* , Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **152** (1994), 21–31.
- [15] S. Coombes; *Neuronal networks with gap junctions : A study of piecewise linear planar neuron models*, SIAM Applied Mathematics. **7** (2008), 1101–1129.
- [16] G. Darboux; *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*, Bulletin des Sciences Mathématiques. Sér. 2 (2) 1 p. 60–96, p. 123–143 p. 151–200 (1878).
- [17] J. Devlin, N.G. Lloyd and J.M. Pearson; *Cubic Systems and Abel Equations*, J. Differential Equations. **147** (1998), 435–454.
- [18] F. S. Dias and L. F. Mello; *The center-focus problem and small amplitude limit cycles in rigid systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. **32** (2012), 1627–1637.
- [19] H. Dulac; *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France. **51** (1923), 45–188.
- [20] J. Ecalle; *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Paris, France Hermann. (1992).
- [21] J. Ecalle, J. Martinet and R. Moussu; *Non-accumulation des cycles limites*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **304** (1987), 375–377.
- [22] P. Fatou; *Sur le mouvement d'un système soumis à des forces à courte période*, Bull Soc Math. France. **56** (1928), 98–139.
- [23] E. Freire, E. Ponce, F. Rodrigo and F. Torres; *Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **8** (1998), 2073–2097.
- [24] A. Gasull, R. Prohens and J. Torregrosa; *Limit cycles for rigid cubic systems*, J. Math. Anal. Appl. **303** (2005), 391–404.
- [25] S. Gautier, L. Gavrilov and I. D. Iliev; *Perturbations of quadratic center of genus one*, Discr. Contin. Dyn. Syst. **25** (2009), 511–535.
- [26] L. Gavrilov and I. D. Iliev; *Quadratic perturbations of quadratic codimension-four centers*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 69–76.
- [27] J. Gine and J. Llibre; *Limit cycles of cubic polynomial vector fields via the averaging theory*, Nonlinear Anal. **66** (2007), 1707–1721.
- [28] J. Ginoux; *Henri Poincaré et l'émergence du concept de cycle limite*, Quadrature, EDP Sciences, 2012, Quadrature, pp.45–51. hal-01101641v2.

- 
- [29] M. Han and V. G. Romanovski ; *Isochronicity and normal forms of polynomial systems of ODEs*, J. Symb. Comput. **47** (2012), 1163–1174.
- [30] D. Hilbert ; *Mathematische Probleme (lecture)*, in : Second Internat. Congress. Math., Paris, 1900, in : Nach. Ges. Wiss. Gottingen Math-Phys. Kl., 1900, 253–297.
- [31] I. D Iliev ; *Perturbations of quadratic centers*, Bull. Sci. Math. **122** (1998), 107–161.
- [32] Y. Ilyashenko ; *Finiteness theorems for limit cycles*, Providence, RI : American Math. Society. (1991).
- [33] J. Itikawa ; *Uniform isochronous centers of degrees 3 and 4 and their perturbations*, Tesi Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona. (2014-2015).
- [34] J. Itikawa and J. Llibre ; *Limit cycles bifurcating from the period annulus of a uniform isochronous center in a quartic polynomial differential system*, Electron. J. Differ. Equations. **246** (2015), 1–11.
- [35] J. Itikawa and J. Llibre ; *Limit cycles for continuous and discontinuous perturbations of uniform isochronous cubic centers*, J. Comp. and Appl. Math. **277** (2015), 171–191.
- [36] J. Itikawa, J. Llibre and D. D. Novaes ; *A new result on averaging theory for a class of discontinuous planar differential systems with applications*, REV. MAT. IBEROAM. **33** (2017), 1247–1265.
- [37] V. Krivan ; *On the Gause predator-prey model with a refuge : A fresh look at the history*, J. of Theoretical Biology. **274** (2011), 67–73.
- [38] C. Li ; *Abelian integrals and applications to weak Hilbert’s 16th problem. In : Christopher, C., Li, C. (eds.) Limit Cycles of Differential Equations. Advanced Courses in Mathematics, pp. 91–162*, CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel (2007).
- [39] A. Lins, W. de Melo and CC. Pugh ; *On Liénard’s equation*, Lecture notes in mathematics. Berlin : Springer. **597** (1977), 335–57.
- [40] J. Llibre ; *Averaging theory and limit cycles for quadratic system*, Radovi Matematički. **11** (2002), 1–14.
- [41] J. Llibre ; *Periodic solutions via averaging theory*, Springer. (2014).
- [42] J. Llibre, D. D. Novaes and M. A. Teixeira ; *Maximum Number of Limit Cycles for Certain Piecewise Linear Dynamical Systems*, Nonlinear Dynam. **82** (2015), 1159–1175.
- [43] J. Llibre and A. C. Mereu ; *Limit cycles for discontinuous quadratic differential systems with two zones*, J. of Mathematical Analysis and Applications. **413** (2014), 763–775.

- 
- [44] J. Llibre and Y. Tang; *Limit Cycles of Discontinuous Piecewise Quadratic and Cubic Polynomial Perturbations of a Linear Center*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. **24** (2019), 1769–1784.
- [45] J. Llibre, M. A. Teixeira and J. Torregrosa; *Limit Cycles Bifurcating from a  $k$ -dimensional Isochronous Center Contained in  $\mathbb{R}^n$  with  $k \leq n$* , Math Phys Anal Geom. **10** (2007), 237–249.
- [46] J. Llibre, M. A. Teixeira and I. O. Zeli; *Birth of Limit Cycles for a Class of Continuous and Discontinuous Differential Systems in  $(d+2)$ -dimension*, Dynamical Systems. **31** (2016), 237–250.
- [47] W.S. Loud; *Behavior of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*, Contributions to Differential Equations. **3** (1964), 21–36.
- [48] R. Lum and L.O. Chua; *Global properties of continuous piecewise-linear vector fields. Part I : Simplest case in  $\mathbb{R}^2$* , Internat. J. Circuit Theory Appl. **19** (1991), 251–307.
- [49] R. Lum and L.O. Chua; *Global properties of continuous piecewise-linear vector fields. Part II : Simplest symmetric in  $\mathbb{R}^2$* , Internat. J. Circuit Theory Appl. **20** (1992), 9–46.
- [50] I.G. Malkin; *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit. Moscow, 1956 (in Russian).
- [51] O. Makarenkov and J.S.W. Lamb; *Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems*, A survey, Physica D. **241** (2012), 1826–1844.
- [52] L. Peng and Z. Feng; *Bifurcation of limit cycles from quartic isochronous systems*, Electron. J. Differ. Equations. **95** (2014), 1–14.
- [53] L. Perko; *Differential Equations and Dynamical Systems*. Texts in Applied Mathematics 7, Springer-Verlag, New York, (2001).
- [54] H. Poincaré; *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, (première partie)*, Journal Mathématique, (1881).
- [55] J.A. Sanders and F. Verhulst; *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences, New York : Springer-Verlag. (1985).
- [56] D.J.W. Simpson; *Bifurcations in Piecewise-Smooth Continuous Systems*, World Scientific Series on Nonlinear Science A. **69** (2010).
- [57] A. Tonnelier; *The McKean’s caricature of the FitzHugh-Nagumo model I. The space-clamped system*, SIAM J. Appl. Math. **63** (2003), 459–484.
- [58] A. Tonnelier and W. Gerstner; *Piecewise linear differential equations and integrate-and-fire neurons : Insights from two-dimensional membrane models*, Phys Rev. E **67** 021908 (2003).