



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année : 2019/2020

Département de Mathématiques



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

**DÉTERMINATION D'UN ARC DE FRONTIÈRE
DANS UN PROBLÈME AUX LIMITES ELLIPTIQUE**

Option

Équations Différentielles et Application

Par

KHELIFA Imène

DIRECTEUR DE THÈSE : CHORFI Lahcène

Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :

CHIBI Ahmed Salah

Prof.

U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR :

BOUSSETILA Nadjib

Prof.

UNIV. DE GUELMA

EXAMINATEUR :

ZOUYED Fairouz

Prof.

U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR :

ALEM Leïla

Prof.

U.B.M. ANNABA

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a aidée et m'a donnée la patience et le courage durant ces longues années d'études.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, **M. CHORFI Lahcène**, professeur à l'université d'ANNABA, pour m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet, pour sa disponibilité qu'il m'a accordée tout au long de ces années, et ses précieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

J'adresse également mes sincères remerciements à tous les membres du jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir accepter d'examiner le travail de cette thèse, je tiens à remercier : **M. CHIBI Ahmed Salah**, professeur à l'université d'ANNABA, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury de thèse. Ainsi que : **M. BOUSSETILA Nadjib**, professeur à l'université de Guelma, **Mme. ALEM Leïla**, professeur à l'université d'ANNABA et **Mme. ZOUYED Fairouz**, professeur à l'université d'ANNABA, pour l'honneur qu'ils m'ont fait pour leurs participation à ce jury en qualité d'examineurs, et pour le temps consacré à la lecture de cette thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements à toute ma famille en particulier à ma mère et mon mari, qui m'ont accompagnée, aidée, soutenue et encouragée tout au long de la réalisation de cette thèse.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Résumé

Cette thèse porte sur l'étude du problème inverse d'identification d'une portion de frontière $\gamma \subset \Gamma_1$ d'une bande (localement perturbée) Ω , de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, à partir des données de Cauchy sur Γ_0 d'une fonction harmonique u dans Ω . Cela conduit à l'étude d'un problème direct (de Dirichlet) dans $H^1(\Omega)$. Par la méthode variationnelle on montre qu'il est bien posé, et par la méthode des équations intégrales on construit la solution sous forme d'un potentiel combiné simple et double couche. Pour l'identification de l'arc on montre un résultat d'unicité, c'est-à-dire qu'une paire de données de Cauchy sur la partie accessible Γ_0 détermine uniquement la partie manquante γ de la frontière, et on dérive un système d'équations intégrales non linéaires équivalent à notre problème inverse. Nous présentons des exemples numériques pour le problème direct et le problème inverse.

Mots clés : Problème inverse géométrique, Fonction de Green, Méthode des équations intégrales.

Abstract

This thesis is dedicated to the study of the inverse problem of determining geometric shape of a part γ of the boundary of a perturbed strip Ω from a pair of Cauchy data on Γ_0 of a harmonic function u in Ω . This leads to the study of a direct Dirichlet problem in $H^1(\Omega)$, using the variational method we show that it is well posed, and by integral equation method we seek the solution in the form of combined double- and single-layer potentials. For the identification of the arc, we prove a uniqueness result, that is, a pair of Cauchy data on the accessible part Γ_0 uniquely determines the missing part γ of the boundary, and we derive a system of nonlinear integral equations equivalent to our inverse problem. We present numerical examples for both the direct and the inverse problem.

Keywords : Geometric inverse problem, Green's function, Integral equation method.

ملخص

موضوع هذه الأطروحة يركز أساسا على دراسة المسألة العكسية المتمثلة في التعرف على قطعة من الحدود $\gamma \subset \Gamma$ لشريط (مضطرب محليا) Ω ذو الحدود $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ، من خلال معطيات Cauchy للدالة التوافقية u في Ω على Γ_0 هذا يؤدي إلى دراسة المسألة المباشرة، باستعمال الطريقة المتغيرة *méthode variationnelle* نبرهن انها جيدة الطرح، و باستعمال طريقة المعادلات التكاملية نجد الحل على شكل مجموع تيارين احادي و ثنائي الطبقة. بالنسبة للتعرف على القطعة من الحدود نبرهن وحدانية الحل بمعنى انه من خلال معطيات Cauchy للدالة u على الجزء الممكن بلوغه Γ_0 نستطيع ايجاد قطعة وحيدة γ من الحدود، و نستخرج مجموعة من المعادلات التكاملية الغير خطية سيئة الطرح بمعنى Hadamard مكافئة للمسألة العكسية. هذا العمل مرفق ببعض النتائج العددية لكلا المسألتين المباشرة و العكسية.

الكلمات المفتاحية: المسألة العكسية الهندسية، دالة Green، طريقة المعادلات التكاملية.

Table des matières

Introduction	iv
1 Préliminaires	1
1.1 Espaces fonctionnels	1
1.1.1 Espaces de Sobolev	3
1.2 Théorie du potentiel	5
1.2.1 Fonctions harmoniques	6
1.2.2 Potentiels simple et double couche	8
1.3 Fonction de Green de la bande	10
1.4 Problèmes linéaires mal posés et régularisation	12
1.5 Moindres carrés non-linéaires	16
1.5.1 Cadre abstrait	16
1.5.2 Le principe de l'écart	17
1.5.3 Convergence	18
1.6 Dérivée de Fréchet	18
2 Problème direct	23
2.1 Position du problème	23
2.2 Existence et unicité	24
2.3 Problème non perturbé	28
2.4 Méthode des équations intégrales	30
2.4.1 Paramétrisation de l'équation intégrale	32
2.4.2 Méthode de Nyström	34
2.5 Résultats numériques	36

3 Problème inverse	38
3.1 Unicité de la solution	38
3.2 L'équation intégrale non-linéaire	39
3.3 Algorithme de reconstruction	40
3.4 Exemples numériques	41
Conclusion	45
Annexe : Noyaux des opérateurs intégraux	46
Bibliographie	47

Introduction générale

Problèmes inverses

Un problème inverse est une situation dans laquelle les valeurs de certains paramètres (ou inconnues) d'un modèle doivent être identifiées à partir d'observations (ou mesures) du phénomène. C'est également en quelques sortes le contraire d'un problème direct : supposons que l'on dispose d'un modèle. Si on se fixe des valeurs pour les paramètres du modèle, on peut alors faire tourner le modèle, en déduire une trajectoire, et l'observer. Il s'agit du problème direct. Le problème inverse consiste à remonter le schéma : connaissant les observations, le but est de retrouver les valeurs des paramètres (Auroux, [1]).

Le terme problème inverse est apparu dans les années 1960 en géophysique, mais de nombreux problèmes qui peuvent être classés dans ce domaine ont été étudiés longtemps auparavant. Après leur «classification» dans les années 1960, ils deviennent un domaine de recherche actif au milieu des années 1970 après le travail classique de A.N. Tikhonov et V. Arsenin [23]. Au cours des années 1980 et 1990 l'étude des problèmes inverses a connu un développement très important. Cela est dû à la richesse du sujet et au fait que ces problèmes sont réellement présents dans de nombreux domaines scientifiques. Par exemple [6] :

- l'ingénierie (détecter une surface de corrosion),
- l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X),
- l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir),
- l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques),

- la chimie (détermination des constantes de réaction),
- le traitement d'image (restauration d'images floues),
- le radar et l'acoustique sous-marine (détermination de la forme d'un obstacle).

Du point de vue mathématique, ces problèmes se répartissent en deux grands groupes. D'une part, il y a les problèmes linéaires qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu ou à la résolution d'un système dans le cas discret. Le recours à l'analyse fonctionnelle et à l'algèbre linéaire permet d'obtenir des résultats précis et des algorithmes efficaces. D'autre part, il y a les problèmes non-linéaires, qui sont le plus souvent des questions d'estimation de paramètres dans des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Les problèmes non-linéaires peuvent se diviser en deux catégories selon le paramètre que l'on cherche à estimer est un vecteur ou une fonction. Les problèmes non-linéaires sont plus difficile, et il existe moins de résultats généraux (Kern, [14]).

Problèmes mal-posés et régularisation

Les problèmes inverses sont souvent classés dans la catégorie des problèmes mal-posés introduites par HADAMARD au début du dernier siècle. Considérons l'équation opérationnelle suivante :

$$Bu = z, \quad u \in E, \quad z \in F, \quad (1)$$

où E et F sont deux espaces normés et $B : E \rightarrow F$ est un opérateur.

On dit que le problème (1) est bien posé au sens d'HADAMARD si pour tout $u \in E$ la solution existe, elle est unique et elle dépend continûment des données. Si l'une de ces conditions n'est pas satisfaite le problème est considéré comme mal-posé. L'existence et l'unicité de la solution correspondent respectivement à la surjectivité et l'injectivité de l'opérateur B . L'instabilité du problème correspond à la non-continuité de l'opérateur B , dans cette situation de petites perturbations dans la donnée z peuvent mener à des solutions radicalement différentes, ce comportement est particulièrement gênant puisque la donnée z est obtenue par l'intermédiaire d'observations. La mesure de z est donc souvent entachée d'erreurs.

La physique mathématique a longtemps ignoré les problèmes mal posés, les considérant soit dénués de sens physique, soit reflétant une modélisation inadéquate. La réalité actuelle est toute autre : le caractère fondamentalement mal posé de certains problèmes est reconnu et motive de nombreuses recherches en mathématiques [2]. Pour surmonter ce caractère mal posé il existe ce qu'on appelle techniques de régularisation.

Régulariser un problème mal posé, c'est le remplacer par un autre, bien posé, de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes de régularisation ont été utilisées pour résoudre les problèmes mal posés, à savoir la méthode de Tikhonov, la troncature spectrale pour les problèmes linéaires, la méthode de Landweber et les méthodes itératives pour les problèmes non-linéaires.

Organisation de la thèse

Le problème inverse d'identification de frontière qu'on rencontre en ingénierie (détecter une surface de corrosion) et qui est mal-posé sera notre principale préoccupation par la suite. On s'intéresse plus précisément à l'étude du problème inverse d'identification d'une portion de frontière $\gamma \subset \Gamma_1$ d'une bande (localement perturbée) Ω , de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, à partir des données de Cauchy sur Γ_0 d'une fonction harmonique u dans Ω . La thèse est composée de 3 chapitres et une conclusion :

Dans le premier chapitre "Preliminaires" on rappelle les outils nécessaires à une bonne compréhension de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème direct qui est scindé en trois sections principales. Dans la première on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution. La représentation de la solution à l'aide des potentiels simple et double couches en utilisant la méthode des équations intégrales fera l'objet de la deuxième section. Des résultats numériques validant l'étude théorique sont exposés dans la troisième section.

A l'égard du troisième chapitre, il est réparti en quatre sections. Dans la première on montre un résultat d'unicité. L'objet de la deuxième section est de montrer l'équivalence entre le problème inverse et une équation intégrale non-linéaire. Nous proposons un algorithme de reconstruction dans la troisième section. La quatrième section est consacrée aux tests numériques et aux discussions.

Dans la "Conclusion" on rappelle les différentes contributions apportées par cette thèse ainsi que les perspectives envisagées.

Les résultats obtenus généralisent les travaux de Cakoni, Kress et Rundel [5, 17] et Nachaoui [21]. Notre problème présente des difficultés supplémentaires non seulement à cause de la non-linéarité mais aussi à cause du caractère non borné du domaine.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques définitions, notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail ou qui seront nécessaires à une bonne compréhension de celui-ci.

1.1 Espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . On note :

- $C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$, si f est bornée on pose $\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$.
- $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$: L'espace des fonctions m fois continûment différentiables sur Ω .
- $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$.
- $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \text{ telle que } f(x) = 0 \forall x \in \Omega \setminus K, \text{ où } K \subset \Omega \text{ est un compact}\}$.
- $C_B(\Omega)$: L'espace des fonctions continues et bornées.
- $D(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions C^∞ sur \mathbb{R} et à support compact dans \mathbb{R} (espace des fonctions tests).
- $D'(\mathbb{R})$: Le dual topologique de $D(\mathbb{R})$ (espace des distributions).
- $S(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions à décroissance rapide sur \mathbb{R} .
- $S'(\mathbb{R})$: Le dual topologique de $S(\mathbb{R})$ ou espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} (espace de Schwartz).

- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ f \in C(\Omega); \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$: L'espace des fonctions hölderiennes.

Définition 1.1.1 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$,

$$\mathbb{L}^p = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable telle que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$

$$\mathbb{L}^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Définition 1.1.2 Si $\psi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}(\psi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s) e^{-is\xi} ds, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

et la transformée de Fourier inverse sur \mathbb{R} est donnée par

$$\mathcal{F}(\widehat{\psi})(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi}(\xi) e^{is\xi} d\xi, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.1.1 (Voir [22])

$\mathcal{F} : S \rightarrow S$ est un isomorphisme et

$$\|\widehat{\psi}\|_{\mathbb{L}^2} = \|\psi\|_{\mathbb{L}^2}.$$

De plus si $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, on déduit par densité la relation de Parseval

$$\|\widehat{\psi}\|_{\mathbb{L}^2} = \|\psi\|_{\mathbb{L}^2},$$

(S est dense dans \mathbb{L}^2).

Définition 1.1.3 (Série de Fourier)

Soit $\varphi \in \mathbb{L}^2[0, 2\pi]$, la série

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imt} \quad (1.1)$$

où

$$a_m := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-imt} dt,$$

est appelée série de Fourier de φ , ses coefficients a_m sont appelés coefficients de Fourier de φ .

Définition 1.1.4 (Ouvert régulier)

On appellera ouvert régulier de classe C^k de \mathbb{R}^n un ouvert Ω tel que, pour tout point $m \in \partial\Omega$ on peut trouver

- a) un système de coordonnées orthonormales (y_1, \dots, y_n) (on désignera par m' [resp. m_n] les $n-1$ premières [resp. la dernière] coordonnée de m),
- b) un ouvert $\omega \in \mathbb{R}^{n-1}$ contenant m' et un intervalle $]a, b[$ contenant m_n (on désignera par B le "cylindre" de \mathbb{R}^n s'écrivant $\omega \times]a, b[$ dans les coordonnées (y)),
- c) une application Φ de classe C^k de ω dans $]a, b[$ telle que, dans le système de coordonnées (y) , on ait

$$\Omega \cap B = \{y \in \omega \times]a, b[, y_n > \Phi(y')\}.$$

Cette définition exprime que Ω se comporte comme le surgraphe d'une fonction régulière au voisinage de chaque point de sa frontière. Elle affirme notamment que $\partial\Omega$ est une hypersurface de \mathbb{R}^n (voir [3] section A.2) mais elle assure en outre que Ω est situé localement du même côté de sa frontière.

1.1.1 Espaces de Sobolev

Définition 1.1.5 Pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous définissons l'espace de Sobolev

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in S'(\mathbb{R}), (1 + \xi^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{H}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $s = 0$, on note

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := \|f\|_0.$$

Remarque 1.1.2 Si $s \geq 0$, alors $H^s(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.6 ($H^s[0, 2\pi]$)

Soit $0 \leq s < \infty$. Par $H^s[0, 2\pi]$ on désigne l'espace de toutes les fonctions $\varphi \in L^2[0, 2\pi]$ avec la propriété

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^s |a_m|^2 < \infty,$$

pour les coefficients de Fourier a_m de φ . L'espace $H^s[0, 2\pi]$ s'appelle espace de Sobolev. Notons que $H^0[0, 2\pi]$ coïncide avec $L^2[0, 2\pi]$.

L'espace de Sobolev $H^s(\Gamma)$

Soit Γ la frontière d'un domaine borné simplement connexe $D \subset \mathbb{R}^2$ de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une paramétrisation régulière 2π -périodique et k -fois continument différentiable

$$\Gamma = \{z(t) : t \in [0, 2\pi]\},$$

pour $0 \leq s \leq k$, on peut définir l'espace Sobolev $H^s(\Gamma)$ comme l'espace de toutes les fonctions $\varphi \in L^2(\Gamma)$ avec la propriété que $\varphi \circ z \in H^s[0, 2\pi]$, avec $\varphi \circ z(t) = \varphi(z(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Le produit scalaire et la norme sur $H^s(\Gamma)$ sont définis à travers le produit scalaire sur $H^s[0, 2\pi]$ par

$$(\varphi, \psi)_{H^s(\Gamma)} := (\varphi \circ z, \psi \circ z)_{H^s[0, 2\pi]}.$$

Sans perte de généralité, on a limité le domaine du paramètre à l'intervalle $[0, 2\pi]$. Cependant, nous devons permettre la possibilité de différentes représentations paramétriques régulières pour la courbe de frontière. Par conséquent, on va montrer que notre définition est invariante en ce qui concerne la paramétrisation.

Théorème 1.1.1 (Voir [16] p.152) Soient z et \tilde{z} deux paramétrisations régulières 2π périodiques de la frontière Γ d'un domaine borné simplement connexe $D \in \mathbb{R}^2$ de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, i.e.,

$$\Gamma = \{z(t) : t \in [0, 2\pi]\} \text{ et } \Gamma = \{\tilde{z}(t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Alors pour $0 \leq s \leq k$ les espaces de Sobolev

$$H^s(\Gamma) := \{\varphi \in L^2(\Gamma) : \varphi \circ z \in H^s[0, 2\pi]\},$$

avec le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{H^s(\Gamma)} = (\varphi \circ z, \psi \circ z)_{H^s[0, 2\pi]},$$

et

$$\tilde{H}^s(\Gamma) := \{\varphi \in L^2(\Gamma) : \varphi \circ \tilde{z} \in H^s[0, 2\pi]\}$$

avec le produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{\tilde{H}^s(\Gamma)} = (\varphi \circ \tilde{z}, \psi \circ \tilde{z})_{H^s[0, 2\pi]},$$

sont isomorphes.

Soit $\gamma \subset \Gamma$ une courbe ouverte, on définit

$$\tilde{H}^s(\gamma) := \{\varphi \in H^s(\Gamma) : \text{supp} \varphi \subset \bar{\gamma}\},$$

et $\tilde{H}^{-s}(\gamma)$ est le dual topologique de $\tilde{H}^s(\gamma)$.

1.2 Théorie du potentiel

La solution des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles est l'un des plus importants domaines d'application pour les équations intégrales. Dans la seconde moitié du XIXe siècle, le traitement systématique des problèmes aux limites a été à l'origine du développement systématique de la théorie des équations intégrales. Une interaction fructueuse s'est développée entre ces deux domaines des mathématiques appliquées. L'objectif de ce chapitre est de présenter les idées principales de ce domaine en définissant les fonctions harmoniques et les potentiels de surface. Le lecteur intéressé à une étude plus approfondie de la théorie du potentiel est invité à consulter les ouvrages ([16],[8]).

1.2.1 Fonctions harmoniques

On commence par un bref aperçu des propriétés de base des fonctions harmoniques remontant à la théorie du potentiel au début du 19ème siècle, avec des contributions de Dirichlet, Gauss, Green, Riemann et Weierstrass.

Définition 1.2.1 Une fonction u à valeurs réelles deux fois continûment différentiable définie sur un espace $D \subset \mathbb{R}^2$, est dite harmonique si elle satisfait l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

où

$$\Delta u = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Les fonctions harmoniques décrivent les distributions de température indépendantes du temps, les potentiels des champs électrostatiques et magnéto-statiques, et les potentiels de vitesse des écoulements incompressibles de fluide irrotationnel.

La plupart des propriétés de base des fonctions harmoniques peuvent être déduites de la solution fondamentale introduite dans le théorème suivant. Rappelons que par $|x|$ on note la norme euclidienne d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 1.2.1 La fonction

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad (1.2)$$

définie pour tout $x \neq y$ dans \mathbb{R}^2 , est dite la solution fondamentale de l'équation de Laplace. La fonction Φ est harmonique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ pour $y \in \mathbb{R}^2$ fixé. La fonction Φ vérifie au sens des distributions

$$\Delta_x \Phi(x, y) = \delta(x - y).$$

Théorème 1.2.2 (Premier théorème de Green)

Soit D un domaine borné de la classe C^1 et soit n le vecteur normal unitaire à la frontière ∂D dirigé vers l'extérieur de D . Alors, pour $u \in C^1(\bar{D})$ et $v \in C^2(\bar{D})$, nous avons :

$$\int_D (u \Delta v + \nabla u \nabla v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds. \quad (1.3)$$

Théorème 1.2.3 (Deuxième théorème de Green) Pour $u, v \in C^2(\bar{D})$ nous avons :

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})ds. \quad (1.4)$$

Théorème 1.2.4 (Formule de Green)

Soit D comme défini dans le théorème (1.2.2) et soit $u \in C^2(\bar{D})$ une fonction harmonique dans D . Alors

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n}(y)\Phi(x, y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right\} ds(y), \quad x \in D. \quad (1.5)$$

Théorème 1.2.5 Les fonctions harmoniques sont analytiques.

Théorème 1.2.6 (Théorème de la moyenne)

Soit u une fonction harmonique dans une boule ouverte

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x| < r\}$$

avec la frontière $\Omega[x, r]$, et continue dans la boule fermée $B[x, r]$. Alors

$$u(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B[x, r]} u(y)dy = \frac{1}{\pi r} \int_{\Omega(x, r)} u(y)ds(y), \quad (1.6)$$

i.e. la valeur de u au centre de la boule est égale aux valeurs moyennes de l'intégrale sur la boule et sa surface de frontière.

Théorème 1.2.7 (Principe du minimum-maximum)

Une fonction harmonique sur un domaine D ouvert connexe ne peut atteindre son maximum ou son minimum en un point intérieur que si elle est constante.

Corollaire 1.2.1 Soit D un domaine borné et u une fonction harmonique dans D et continue dans \bar{D} . Alors u atteint ses bornes sur la frontière de D .

Remarque 1.2.1 Le fondement des méthodes d'équations intégrales est constitué par une formule explicite permettant de déduire la solution du problème dans tout le domaine de sa connaissance sur le bord.

En utilisant les théorèmes de Green (1.2.2, 1.2.3), on peut trouver la formule de représentation intégrale pour la solution de l'équation de Laplace.

Théorème 1.2.8 (Formule de représentation intégrale)

Soit $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ la solution de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } D.$$

Alors

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \Phi(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \right\} ds(y), \quad (1.7)$$

où $\Phi(x, y)$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace définie par (1.2).

Théorème 1.2.9 (Holmgren) (voir [16])

Soit D comme défini dans le théorème (1.2.2) et soit $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ la solution de l'équation de Laplace dans D telle que

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

pour un arc ouvert $\Sigma \subset \Gamma$. Alors $u = 0$ dans D .

1.2.2 Potentiels simple et double couche

Définition 1.2.2 Étant donné une fonction $\varphi \in C(\partial D)$, les fonctions

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D, \quad (1.8)$$

et

$$v(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D, \quad (1.9)$$

sont appelées, potentiel simple couche et double couche respectivement avec la densité φ . En deux dimensions, parfois, pour des raisons évidentes, nous les appellerons potentiel logarithmique simple couche et potentiel logarithmique double couche.

Pour $y \in \mathbb{R}^m$ fixé, la solution fondamentale $u = \Phi(\cdot, y)$ représente le potentiel d'une source ponctuelle d'unité située au point y , i.e., $\text{grad}_x \Phi(x, y)$ donne le champ de force de cette source ponctuelle agissant au point x . Le potentiel simple couche est obtenu en répartissant des sources ponctuelles sur la frontière ∂D . Pour $h > 0$, par le théorème de la moyenne

nous avons

$$\Phi(x, y + h\mu(y)) - \Phi(x, y - h\mu(y)) = 2h\mu(y) \cdot \nabla\Phi(x, y + \theta h\mu(y)),$$

pour $\theta = \theta(y) \in [-1, 1]$. Donc le potentiel double couche peut être interprété comme la limite $h \rightarrow 0$ de la superposition des potentiels u_h et u_{-h} avec les densités $\varphi/2h$ sur ∂D_h et $-\varphi/2h$ sur ∂D_{-h} , respectivement, i.e., le potentiel double couche est obtenu en distribuant des dipôles sur la frontière ∂D .

Tant que pour tout $x \notin \partial D$ on peut permuter l'intégration et la différentiation, les potentiels simple et double couche représentent des fonctions harmoniques dans D et $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$.

Pour la solution des problèmes aux limites, on doit étudier le comportement des potentiels sur la frontière ∂D où les intégrales deviennent singulières. Le comportement sur la frontière est exprimé par les théorèmes suivants (relations de sauts).

Théorème 1.2.10 *Soit ∂D de classe C^2 et $\varphi \in C(\partial D)$. Alors, le potentiel simple couche u de densité φ est continu dans \mathbb{R}^m . Sur la frontière nous avons*

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (1.10)$$

où l'intégrale existe en tant qu'intégrale impropre.

Théorème 1.2.11 *Soit ∂D de classe C^2 , le potentiel double couche v avec la densité continue φ est prolongeable par continuité de D à \bar{D} et de $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ à $\mathbb{R}^m \setminus D$ avec les valeurs aux limites*

$$v_{\pm}(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mu(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (1.11)$$

où

$$v_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x \pm h\mu(x)),$$

et où l'intégrale existe en tant qu'intégrale impropre.

Théorème 1.2.12 *Soit ∂D de classe C^2 . Alors pour le potentiel simple couche u avec la densité*

continue φ nous avons

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \mu}(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \mu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (1.12)$$

où

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \mu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \mu(x) \cdot \nabla u(x \pm h\mu(x)),$$

doit être compris dans le sens d'une convergence uniforme sur ∂D et où l'intégrale existe en tant qu'intégrale impropre.

Théorème 1.2.13 Soit ∂D de classe C^2 . Alors le potentiel double couche v avec la densité continue φ satisfait

$$\lim_{h \rightarrow +0} \mu(x) \cdot \{ \nabla v(x + h\mu(x)) - \nabla v(x - h\mu(x)) \} = 0, \quad (1.13)$$

uniformément pour tout $x \in \partial D$.

1.3 Fonction de Green de la bande

C'est la fonction localement intégrable $G((x, y), (\xi, \eta))$ qui satisfait au sens des distributions l'équation $\Delta G = \delta(x - \xi, y - \eta)$ dans $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < y < 1\}$ avec la condition de Dirichlet $G|_{y=0} = G|_{y=1} = 0$. Elle est donnée par l'expression (voir [19])

$$G((x, y), (\xi, \eta)) = \frac{1}{4\pi} \log \left[\frac{\cosh \pi(x - \xi) - \cos \pi(y + \eta)}{\cosh \pi(x - \xi) - \cos \pi(y - \eta)} \right] \quad (1.14)$$

et admet le comportement asymptotique suivant :

$$G((x, y), (\xi, \eta)) = -\frac{1}{2\pi} \log r + \frac{1}{4\pi} \log \left(\frac{4 \sin \pi \eta}{\pi} \right) + O(r) \quad (1.15)$$

lorsque $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \rightarrow 0$

$$G((x, y), (\xi, \eta)) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \text{ si } |x| \rightarrow +\infty \text{ (uniformément par rapport à } y \in [0, 1]), \quad (1.16)$$

et

$$\frac{\partial G}{\partial x}((x, y), (\xi, \eta)) = O(e^{-\pi|x|}) \text{ si } |x| \rightarrow +\infty \text{ (uniformément par rapport à } y \in [0, 1]). \quad (1.17)$$

Démonstration Soit $X = (x, y)$, $X' = (\xi, \eta)$, et supposons que $G(X, X')$ se décompose comme suit

$$G(X, X') = -\frac{1}{2\pi} \log r + g(X, X')$$

avec $g \in C^\infty(\Omega_0)$, $\Omega_0 = \mathbb{R} \times]0, 1[$. $X' \in \Omega_0$ étant fixé, on note

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Il est facile de vérifier que $\Delta G = 0$ si $X \neq X'$, en effet

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1 - \cosh \pi(x - \xi) \cos \pi(y + \eta)}{(\cosh \pi(x - \xi) - \cos \pi(y + \eta))^2} - \frac{1 - \cosh \pi(x - \xi) \cos \pi(y - \eta)}{(\cosh \pi(x - \xi) - \cos \pi(y - \eta))^2} \right) = -\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}.$$

Montrons que $\Delta G = \delta(X - X')$ c.à.d

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad \langle G, \Delta \varphi \rangle = \varphi(X').$$

En effet

$$\begin{aligned} \langle G, \Delta \varphi \rangle &= \int_D G \Delta \varphi dx dy, \quad \text{supp } \varphi \subset D, \\ \int_D G \Delta \varphi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D_\epsilon} G \Delta \varphi, \quad D_\epsilon = D \setminus B(X', \epsilon). \\ \int_{D_\epsilon} G \Delta \varphi &= \int_{D_\epsilon} \varphi \Delta G + \int_{S_\epsilon} \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial G}{\partial r} \right) ds, \quad S_\epsilon = \partial B(X', \epsilon). \\ &= \int_{S_\epsilon} \left(G_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial G_0}{\partial r} \right) ds + \int_{S_\epsilon} \left(g \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial g}{\partial r} \right) ds \\ &= I_1(\epsilon) + I_2(\epsilon) + I_3(\epsilon) \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_1(\epsilon) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \log(r) = 0 \quad (ds = r d\theta).$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_3(\epsilon) = 0 \quad \text{car } g \in C^1(\bar{B}(X', \epsilon)), \quad (g(x) \simeq c_1 + c_2 r).$$

$$I_2(\epsilon) = - \int_{S_\epsilon} \varphi \frac{\partial G_0}{\partial r} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\epsilon, \theta) d\theta, \quad \tilde{\varphi}(r, \theta) = \varphi(\xi + r \cos \theta, \eta + r \sin \theta),$$

alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2(\epsilon) = \varphi(\xi, \eta).$$

Remarque 1.3.1 Pour construire la fonction de Green, on peut utiliser l'application conforme : $\phi : z \rightarrow e^z$ de la bande $\{0 \leq \text{Im}z \leq \pi\}$ sur le demi-plan $\{\text{Im}w \geq 0\}$. La fonction de Green G_0 du demi-plan est donnée par (obtenue à partir de Φ par réflexion) :

$$G_0(z, w) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right| = \Phi(z, w) - \Phi(z, \bar{w})$$

avec

$$z = (x, y) = x + iy, \quad w = (\xi, \eta) = \xi + i\eta.$$

Alors la fonction de Green de la bande est donnée par

$$\begin{aligned} G(z, w) &= G_0(\phi(z), \phi(w)) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^z - e^w}{e^z - e^{\bar{w}}} \right| \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\sinh\left(\frac{z-w}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{z-\bar{w}}{2}\right)} \right| \\ &= -\frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{\cosh^2\left(\frac{x-\xi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{y-\eta}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x-\xi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{y+\eta}{2}\right)} \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \ln \left\{ \frac{\cosh(x-\xi) - \cos(y-\eta)}{\cosh(x-\xi) - \cos(y+\eta)} \right\}. \end{aligned}$$

1.4 Problèmes linéaires mal posés et régularisation

Définition 1.4.1 (La notion de problème bien posé au sens de Hadamard)

Soit $A : U \subset X \rightarrow V \subset Y$ un opérateur borné, X et Y deux espaces de Banach. L'équation

$$A\varphi = f, \tag{1.18}$$

est dite bien posée si $A : U \rightarrow V$ est bijective. L'opérateur inverse $A^{-1} : V \rightarrow U$ est alors continu. Sinon, on dit que l'équation est mal posée. Autrement dit, un problème est bien posé si les trois conditions sont satisfaites : une solution existe, la solution est unique et la solution dépend continûment de la donnée f . Le cas le plus fréquent dans l'étude des problèmes mal posés est le cas d'instabilité quand la troisième condition n'est pas vérifiée. Pour surmonter cette difficulté, on va proposer des méthodes de régularisation pour approcher l'opérateur inverse non borné $A^{-1} : A(X) \rightarrow X$ par un opérateur linéaire borné $R : Y \rightarrow X$.

Définition 1.4.2 Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné inversible, une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, avec la propriété de la convergence simple

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A \varphi = \varphi$$

pour tout $\varphi \in X$, R_α est appelé un schéma de régularisation pour l'opérateur A , α est appelé le paramètre de régularisation.

Supposons que f^δ est une donnée perturbée (bruitée). Le schéma de régularisation se rapproche de la solution φ de (1.18) par la solution régularisée

$$\varphi_\alpha^\delta := R_\alpha f^\delta.$$

Alors, par l'inégalité triangulaire, on obtient l'estimation de l'erreur d'approximation

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha A \varphi - \varphi\|.$$

Définition 1.4.3 Une stratégie pour un schéma de régularisation R_α , $\alpha > 0$, i.e, le choix du paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta)$ en fonction de l'erreur δ et la donnée f^δ , est dite régulière si pour tout $f \in A(X)$ et tout $f^\delta \in Y$ avec $\|f^\delta - f\| \leq \delta$, nous avons

$$R_{\alpha(\delta)} f^\delta \rightarrow A^{-1} f, \text{ lorsque } \delta \rightarrow 0.$$

Définition 1.4.4 (Principe de Morozov)

Le paramètre de régularisation α pour l'erreur δ doit être choisi de telle sorte que

$$\|AR_\alpha f^\delta - f\| = \tau\delta,$$

avec un paramètre fixe $\tau \geq 1$.

Ce principe stipule que le résidu n'excède pas (en norme L^2) l'amplitude du bruit δ . Il est montré dans le monographe [15] que ce principe est une stratégie régulière (convergente).

Décomposition en valeurs singulières SVD

La décomposition SVD est un outil particulièrement approprié pour la résolution du problème des moindres carrés. Étant donné $Ax \approx b$, avec $A \in R^{m \times n}$ et rang de A égal à $r \leq p = \min(m, n)$, la solution du problème des moindres carrés peut s'écrire

$$x = U\Sigma V'b \quad \text{ou bien} \quad x = \sum_{i=1}^r \frac{u'_i b}{\sigma_i} v_i,$$

où les matrices $U\Sigma V'b$ sont celles de la décomposition singulière de $A = U\Sigma V'b$. A partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice A , on déduit que $(A'A)^{-1} = V\Sigma_r^{-2}V'$ où $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, alors il est possible d'expliciter un élément particulier de la matrice $S = (A'A)^{-1}$ comme

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^r \frac{v_{i,k} v_{j,k}}{\sigma_k^2}.$$

Construction d'une méthode de régularisation admissible

Soit X, Y deux espaces de Hilbert. $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur compact et soit $\{\mu_j, u_j, v_j\}$ le système singulier de A . Si $y \in R(A)$, la solution de $Ax = y$ est donnée par le théorème de Picard comme :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j} (y, v_j) u_j, \quad x := A^{-1}y, \quad A^{-1} \simeq R_\alpha.$$

Remarque 1.4.1 L'amplification d'erreur sur y , $\|y - y^\delta\| \leq \delta$, est du aux fréquences élevées $(\frac{1}{\mu_j} \rightarrow \infty)$.

On construit une régularisation en atténuant le facteur $\frac{1}{\mu_j}$.

Théorème 1.4.1 (Voir [15])

Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur compact avec le système singulier $\{\mu_j, u_j, v_j\}$ et soit

$$q : [0, +\infty[\times (0, \|A\|) \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction avec les propriétés

1. $|q(\alpha, \mu)| \leq 1$, pour tout $\alpha > 0$ et $0 < \mu \leq \|A\|$,
2. pour tout $\alpha > 0$, il existe $c(\alpha)$ tel que

$$|q(\alpha, \mu)| \leq c(\alpha)\mu, \text{ pour tout } 0 < \mu \leq \|A\|,$$

3. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha, \mu) = 1$, pour tout $0 < \mu \leq \|A\|$.

Alors l'opérateur $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, défini par

$$R_\alpha y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha, \mu_j)}{\mu_j} (y, v_j) u_j,$$

est une stratégie de régularisation avec $\|R_\alpha\| \leq c(\alpha)$. Un choix $\alpha = \alpha(\delta)$ est admissible si $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ et $\delta c(\alpha(\delta)) \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$. La fonction q s'appelle un filtre de régularisation pour A .

Théorème 1.4.2 (Voir [15])

Les trois fonctions suivantes satisfont les hypothèses (1), (2) et (3) du théorème (1.4.1),

- a) $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{(\alpha + \mu^2)}$ (filtre de Tikhonov).
- b) $q(\alpha, \mu) = 1 - (1 - a\mu^2)^{1/\alpha}$, pour $0 < a < 1/\|A\|^2$.
- c) Soit q défini par

$$q(\alpha, \mu) = \begin{cases} 1 & \mu^2 \geq \alpha, \\ 0 & \mu^2 < \alpha \end{cases}$$

(filtre de la SVD tronquée).

Par conséquent, toutes les fonctions q définies en (a), (b) et (c) sont des filtres de régularisation conduisant à des stratégies de régularisation optimales.

1.5 Moindres carrés non-linéaires

1.5.1 Cadre abstrait

Soit X, Y deux espaces de Hilbert, $F : D(F) \subset X \longrightarrow Y$ un opérateur continu. On veut résoudre l'équation

$$F(x) = y,$$

avec une donnée perturbée y^δ tel que $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. Soit x^* la solution exacte, ie $F(x^*) = y$.

La fonctionnelle non linéaire de Tikhonov est donnée par

$$J_{\alpha, \delta}(x) = \|F(x) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x - x_0\|^2 \quad (1.19)$$

On considère le problème de minimisation

$$J_{\alpha, \delta}(x) = \min\{J_{\alpha, \delta}(z), z \in D(F)\}.$$

Théorème 1.5.1 (voir [9]) *Supposons que F est faiblement fermée. Alors la fonctionnelle de Tikhonov (1.19) possède un minimum global pour tout $\alpha > 0$.*

On note x_α^δ un minimiseur de $J_{\alpha, \delta}$.

Supposons que $D(F)$ est convexe, soit y^δ tel que $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ et x^+ solution x_0 -minimale au sens suivant

$$\|x^+ - x_0\| = \min\{\|x - x_0\| / F(x) = y\}$$

Sous ces hypothèses, on a le théorème de convergence suivant.

Théorème 1.5.2 (voir [9]) *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) *F est Fréchet différentiable,*

(ii) *Il existe $\gamma > 0$ tel que $\|F'(x^+) - F'(x)\| \leq \gamma \|x^+ - x\|$, pour tout $x \in D(F) \cap B(x^+, \epsilon)$.*

(iii) Il existe $w \in Y$ satisfaisant $x^+ - x_0 = F'(x^+)^*w$ et

(iv) $\gamma\|w\| < 1$.

Alors pour le choix $\alpha \sim \delta$, on obtient

$$\|x_\alpha^\delta - x^+\| = O(\sqrt{\delta}) \quad \text{et} \quad \|F(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| = O(\delta).$$

Méthode de Levenberg-Marquardt

Cette méthode consiste à itérer la procédure :

- x_0 approximation initiale
- $x_{n+1} = x_n + h_n$ où h_n est solution de l'équation

$$A_n^* A_n h_n + \alpha_n h_n = A_n^* (y^\delta - F(x_n))$$

avec

$$A_n^* = F'(x_n).$$

1.5.2 Le principe de l'écart

Arrêt du procédé dès le premier entier $N = N(\delta)$ pour lequel

$$\|F(x_N^\delta) - y^\delta\| \leq \tau \delta, \quad (\tau > 1). \quad (1.20)$$

Principe de Morozov : α_n est solution de l'équation

$$\|F'(x_{\alpha_n}^\delta)h_n^\delta + F(x_{\alpha_n}^\delta) - y^\delta\| = \rho \|F(x_{\alpha_n}^\delta) - y^\delta\| \quad (1.21)$$

avec $0 < \rho < 1$ prédéfini.

Dans la pratique, on choisit le paramètre

$$\alpha_n = \alpha_0 \cdot \frac{1}{2^n}.$$

1.5.3 Convergence

Théorème 1.5.3 (voir [11])

L'algorithme de **Levenberg-Marquardt** est convergent si la condition de non linéarité suivante est satisfaite

$$\|F(x_2) - F(x_1) - F'(x_1)(x_2 - x_1)\| \leq c\|x_1 - x_2\|\|F(x_1) - F(x_2)\|, \quad (1.22)$$

pour $\|x_1 - x_2\|$ petit.

1.6 Dérivée de Fréchet

L'équation non-linéaire est souvent approchée par sa linéarisation autour d'une solution particulière, par exemple la méthode de Newton (ou méthode de descente). Pour cette raison, nous introduisons la définition et les propriétés de base de la dérivée de Fréchet.

Définition 1.6.1 (Fréchet différentiabilité)

Soit X, Y deux espaces normés et soit U un sous ensemble ouvert de X . L'application $A : U \rightarrow Y$ est dite Fréchet-différentiable au point $\varphi \in U$ s'il existe un opérateur linéaire borné $A'[\varphi] : X \rightarrow Y$ telle que

$$\|A(\varphi + h) - A(\varphi) - A'[\varphi]h\| = o(\|h\|),$$

uniformément quand $\|h\| \rightarrow 0$. $A'[\varphi]$ est appelé la dérivée de Fréchet de A en φ . A est dite Fréchet-différentiable sur U si elle est Fréchet-différentiable en tout point $\varphi \in U$.

Nous énonçons quelques propriétés de base de la dérivée de Fréchet.

Théorème 1.6.1 Soit $A : U \rightarrow X \rightarrow Y$ Fréchet-différentiable et soit Z un espace normé

1. La dérivée de Fréchet de A est uniquement déterminée.
2. Si $B : U \rightarrow Y$ est Fréchet-différentiable, alors $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ est Fréchet-différentiable pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et

$$(\lambda_1 A + \lambda_2 B)[\varphi] = \lambda_1 A'[\varphi] + \lambda_2 B'[\varphi], \quad \varphi \in U.$$

3. Si $B : Y \rightarrow Z$ est Fréchet-différentiable, alors $B \circ A : U \rightarrow Z$ est Fréchet-différentiable et

$$(B \circ A)'[\varphi] = B'[A(\varphi)]A'[\varphi], \quad \varphi \in U.$$

4. Supposons que $A : U \rightarrow Y = L(E)$ est différentiable et $A(\varphi)$ est inversible (isomorphisme) pour tout $\varphi \in U$, alors l'application $B(\varphi) = A^{-1}(\varphi)$ est Fréchet-différentiable et

$$B'[\varphi] = -B(\varphi)A'[\varphi]B(\varphi), \quad \varphi \in U.$$

Démonstration La preuve des trois premiers cas peuvent être trouvée, par exemple, dans [7], pp.103-106. La dernière propriété a été prouvée dans [13].

Le théorème suivant montre que le caractère mal-posé du problème non linéaire est hérité par sa linéarisation.

Définition 1.6.2 (Opérateur complètement continu)

Soit X et Y deux espaces de Banach et soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire, on dit que A est complètement continu si l'image de toute suite faiblement convergente de X est une suite uniformément convergente dans Y .

Théorème 1.6.2 Soit $A : U \subset X \rightarrow Y$ un opérateur complètement continu d'un sous ensemble ouvert U d'un espace normé X vers un espace de Banach Y et on suppose que A est Fréchet différentiable au point $\psi \in U$. Alors la dérivée A'_ψ est compacte.

Démonstration La preuve est basée sur le fait qu'un sous-ensemble d'un espace de Banach est relativement compact si et seulement s'il est totalement borné. Pour plus de détails, voir le théorème 4.19 dans [13].

Exemples

Dérivée d'un opérateur intégral non linéaire

Théorème 1.6.3 Soit D un ouvert de \mathbb{R}^3 , et soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle de 3 variables de classe $C^1(D)$, A une fonction $g \in C^1([a, b])$ on associe la fonction F définie par l'intégrale

$$F(x) = \int_a^b f(x, y, g(y))dy, \quad x \in [c, d].$$

L'opérateur non linéaire

$$\mathcal{F} : V \xrightarrow{g \rightarrow F} W$$

avec V et W deux espaces fonctionnels (par exemple $V = C^1([a, b])$, $W = C([c, d])$), possède les propriétés suivantes :

1. \mathcal{F} est différentiable
2. L'opérateur dérivée $Aw = D\mathcal{F}(g; w)$ est donné par

$$(Aw)(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y, g(y))}{\partial z} w(y) dy, \quad x \in [c, d] \quad (1.23)$$

Démonstration Nous avons $\mathcal{F} : V \xrightarrow{g \rightarrow F} W$, \mathcal{F} est différentiable en g s'il existe $K \in \mathcal{L}(V, W)$

tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(g+h) - \mathcal{F}(g) - Kh\|_W}{\|h\|} = 0.$$

On note $Kh = K_g h = D\mathcal{F}(g; h)$, la formule de Taylor montre que

$$\left\| f(\cdot, \cdot, g+h) - f(\cdot, \cdot, g) - h \frac{\partial f(\cdot, \cdot, g)}{\partial z} \right\|_{\infty} \leq C \|h\|_{\infty}^2, \quad C = \frac{1}{2} \|D^2 f\|_{\infty}. \quad (1.24)$$

Si on note

$$K_g h(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y, g(y))}{\partial z} h(y) dy,$$

alors (1.24) entraîne

$$\|\mathcal{F}(g+h) - \mathcal{F}(g) - K_g h\|_{\infty} \leq C' \|h\|_{\infty}^2, \quad C' = 2a \times C.$$

Ce qui prouve le théorème 1. □

Théorème 1.6.4 Soit $f(x, y, z, d)$ une fonction réelle de 4 variables de classe $C^2(D)$, D ouvert de \mathbb{R}^4 . A une fonction $g \in C^2([a, b])$ on lui associe la fonction F_1 définie par une intégrale

$$F_1(x) = \int_a^b f(x, y, g(y), g'(y)) dy, \quad x \in [c, d].$$

On étudie l'opérateur non linéaire

$$\mathcal{F}_1 : V \xrightarrow{g \rightarrow F_1} W$$

avec V et W deux espaces fonctionnels (par exemple $V = C^1([a, b])$, $W = C([c, d])$), alors on a

1. \mathcal{F}_1 est différentiable

2. L'opérateur dérivée $D\mathcal{F}_1(g; w)$ est donné par

$$D\mathcal{F}_1(g; h)(x) = \int_a^b \frac{\partial f_1(x, y, g(y), g'(y))}{\partial z} h(y) dy + \int_a^b \frac{\partial f_1(x, y, g(y), g'(y))}{\partial z'} h'(y) dy,$$

Démonstration Nous avons

$$F_1(x) = \int_a^b f(x, y, g(y), g'(y)) dy, \quad x \in [c, d],$$

en utilisant la formule de Taylor, on aura

$$f_1(.,., g+h, g'+h') - f_1(.,., g, g') = \frac{\partial f_1(.,., g, g')}{\partial z} h + \frac{\partial f_1(.,., g, g')}{\partial z'} h' + o \|h\|_{C^1}^2.$$

Si on note par

$$(K_{1g}h)(x) = \int_a^b \left(\frac{\partial f_1(x, y, g(y), g'(y))}{\partial z} h(y) + \frac{\partial f_1(x, y, g(y), g'(y))}{\partial z'} h'(y) \right) dy,$$

on aura

$$\|\mathcal{F}_1(g+h) - \mathcal{F}_1(g) - K_{1g}h\|_\infty \leq C \|h\|_{C^1}^2$$

alors \mathcal{F}_1 est différentiable et l'opérateur dérivée $D\mathcal{F}_1(g; w)$ est donné par

$$D\mathcal{F}_1(g; h)(x) = \int_a^b \frac{\partial f_1(x, y, g(y), g'(y))}{\partial z} h(y) dy + \int_a^b \frac{\partial f_1(x, y, g(y), g'(y))}{\partial z'} h'(y) dy.$$

ce qui achève la démonstration. □

Cas particulier : $F_2 : C_0^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$

$$F_2(x) = \int_a^b f(x, y, g(y))g'(y)dy, \quad x \in [c, d],$$

f est de classe C^1 . Alors

$$D\mathcal{F}_2(g; h)(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y, g(y))}{\partial z} g'(y)h(y)dy + \int_a^b f(x, y, g(y))h'(y)dy$$

$$D\mathcal{F}_2(g; h)(x) = \int_a^b \left(\frac{\partial f(x, y, g(y))}{\partial z} g'(y) - \frac{\partial f(x, y, g(y))}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y, g(y))}{\partial z} \right) h(y)dy. \quad (1.25)$$

Chapitre 2

Problème direct

2.1 Position du problème

On considère le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1 - h(x)\} \quad (2.1)$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction continue qui est une paramétrisation d'une perturbation locale d'une bande $\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\}$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $0 < b < 1$ tel que $h \in C^2[-a, a]$ et satisfait

$$1) h(x) = 0 \text{ si } |x| \geq a; \quad 2) 0 \leq h(x) \leq b \text{ si } |x| \leq a.$$

La frontière Γ de Ω est décomposée comme suit $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et $\Gamma_1 = \Gamma_1^- \cup \gamma \cup \Gamma_1^+$ tels que $\Gamma_1^+ = \{(x, 1); x > a\}$, $\Gamma_1^- = \{(x, 1); x < -a\}$ (voir Figure 1) et γ est l'arc

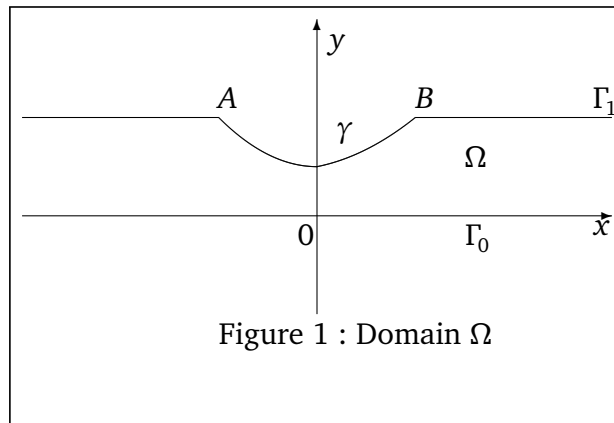
$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 1 - h(x), |x| \leq a\}.$$

Considérons le problème aux limites suivant : étant donné $f \in H^{3/2}(\mathbb{R})$, trouver $u \in H^1(\Omega)$

satisfaisant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega; \\ u = f & \text{sur } \Gamma_0; \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

On montre qu'il existe un relèvement $u_f \in H^2(\Omega)$. Puis on montre qu'il existe une solution unique u tel que $v = u - u_f$ est dans l'espace $H_0^1(\Delta, \Omega) = \{v \in H_0^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\}$. Pour le calcul numérique on utilise l'approche intégrale. On représente la solution à l'aide des potentiels, définis sur l'arc γ , avec un noyau faisant intervenir la fonction de Green du Laplacien dans la bande $\Omega_0 = \mathbb{R} \times]0, 1[$.



2.2 Existence et unicité

On va montrer que le problème direct (2.2) est bien posé.

Théorème 2.2.1 *Supposons que $f \in H^{3/2}(\mathbb{R})$. Alors*

1. *il existe un relèvement $u_f \in H^2(\Omega)$ tel que $u_f(x, 0) = f(x)$, $u_f(x, 1) = 0$.*
2. *le problème (2.2) possède une solution unique $u \in H^1(\Omega)$.*
3. *la solution $u \in H_{loc}^2(\Omega)$.*

Démonstration

1. En utilisant la transformée de Fourier de la fonction f on définit u_f par

$$u_f(x, y) = w_0(x, y)\varphi_0(y)$$

où

$$w_0(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|} \widehat{f}(\xi))$$

et φ_0 est une fonction de troncature de classe $C^2[0, 1]$ telle que

$$\varphi_0(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < y < b/2, \\ 0, & \text{si } b < y < 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Il est facile de voir que $u_f \in H^2(\Omega)$ et $u_f(x, 0) = f(x)$.

2. On pose $v = u - u_f$ et $F = -\Delta u_f \in L^2(\Omega)$, alors v satisfait le problème avec la condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \Delta v = F & \text{dans } \Omega; \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.4)$$

La forme bilinéaire $a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx dy$, $v, w \in H_0^1(\Omega)$, est coercive puisque Ω est borné dans la direction des y . Par le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution faible unique $v \in H_0^1(\Omega)$, de plus $\|v\|_{H^1} \leq C \|F\|_{L^2}$ (voir [4]).

3. Maintenant on va montrer que $v \in H_{loc}^2(\Omega)$. Les coins A et B de Γ_1 ont un angle inférieur à π , alors d'après la théorie de régularité $v \in H^2(\Omega_R)$, $\Omega_R = \{(x, y) \in \Omega; |x| \leq R\}$, pour tout $R \geq a$ (voir [10]). □

Théorème 2.2.2 *La fonction $f \mapsto g = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$, où u est la solution du problème Dirichlet (2.2), est continue de $H^{3/2}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration D'après le (théorème 2.2.1 propriété 3) $g \in L_{loc}^2(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que g est dans $L^2(R_0, +\infty)$ pour $R_0 \geq a + 1$. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ la solution de (2.4). On pose $w = \theta(x)v$ où $\theta \in C^2(\mathbb{R})$ est une fonction de troncature telle que $\theta(x) = 0$ pour $x \leq a$ et $\theta(x) = 1$ pour $x \geq R_0$. Alors w satisfait l'équation

$$\begin{cases} \Delta w = F_1, & \text{dans } \Omega_a^+ =]a, +\infty[\times]0, 1[; \\ w = 0, & \text{sur } \Gamma_a^+ = \partial \Omega_a^+. \end{cases} \quad (2.5)$$

avec

$$F_1 = \theta F + v \theta'' + 2\theta' \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega_a^+).$$

$$\|F_1\|_{L^2} \leq \|F\|_{L^2} + \|\theta\|_{C^2[a,R]},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_R \|F\|_{L^2} \leq C_R \|f\|_{H^{3/2}}.$$

On peut supposer dans (2.5) que $a = 0$ (après une translation dans la direction des x) et utilisant la transformée de Fourier sinus

$$\widehat{w}(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty w(x, y) \sin(\xi x) dx, \quad \widehat{F}_1(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_1(x, y) \sin(\xi x) dx,$$

on obtient l'équation différentielle du second ordre en y

$$\begin{cases} \widehat{w}_{yy} - \xi^2 \widehat{w} = \widehat{F}_1(\xi, y), & y \in]0, 1[, \\ \widehat{w}(\xi, 0) = 0, & \widehat{w}(\xi, 1) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec la solution

$$\widehat{w}(\xi, y) = \int_0^1 G(\xi, y, z) \widehat{F}_1(\xi, z) dz,$$

où $G(\xi, y, z)$ est la fonction de Green

$$G(\xi, y, z) = \frac{1}{\xi \cosh \xi} \begin{cases} \sinh(\xi z) \sinh(\xi(1-y)), & z \leq y; \\ \sinh(\xi y) \sinh(\xi(1-z)), & z \geq y. \end{cases} \quad (2.7)$$

Alors

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial y}(\xi, 0) = \frac{-1}{\cosh \xi} \int_0^1 \sinh(\xi(1-z)) \widehat{F}_1(\xi, z) dz,$$

ce qui implique que

$$\forall \xi \geq 0, \quad \left| \frac{\partial \widehat{w}}{\partial y}(\xi, 0) \right|^2 \leq \int_0^1 |\widehat{F}_1(\xi, z)|^2 dz,$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial y}(\cdot, 0) \right\|_{L^2(0, +\infty)} \leq \|F_1\|_{L^2((0, +\infty) \times]0, 1])}.$$

D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} \|F_1\|_{L^2((R, +\infty) \times]0, 1])} &\leq 2 \|\theta\|_{C^2} (\|F\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \\ &\leq C_1 \|F\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

et comme $w = v$ pour $x \geq R_0$ et $v = u - u_f$, alors on obtient

$$g(x) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial u_f}{\partial y}(x, 0), \quad x \geq R_0$$

on en déduit que

$$\|g\|_{L^2} \leq C_2 \|f\|_{H^{3/2}} + \|f'\|_0 \leq C_3 \|f\|_{H^{3/2}}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Le théorème suivant est un résultat d'unicité du problème direct (2.2) dans $H_{loc}^1(\Omega)$.

Théorème 2.2.3 (Unicité) *Supposons que $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ satisfait*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_0(u) = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \int_0^1 |u(x, y)|^2 dy \rightarrow 0 & \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (2.8)$$

Alors $u = 0$.

Démonstration

1. Dans la demi-bande $\Omega_a^+ =]a, +\infty[\times]0, 1[$, u a la représentation

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y) (A_n e^{-n\pi(x-a)} + B_n e^{n\pi(x-a)}),$$

alors

$$\forall R > a, \quad \int_0^1 |u(R, y)|^2 dy = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-n\pi(R-a)} + B_n e^{n\pi(R-a)})^2.$$

Si $R \rightarrow +\infty$ on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} [A_n e^{-n\pi(R-a)} + B_n e^{n\pi(R-a)}] = 0,$$

donc $\forall n \geq 1, B_n = 0$ et $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 u(a, y) \sin(n\pi y) dy$.

Alors pour tout $|x| \geq R$ et $y \in [0, 1]$, on en déduit l'estimation,

$$|u(x, y)| + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| \leq C(a) \|u\|_{H^1(\Omega_a)} e^{-\pi R}. \quad (2.9)$$

2. On suppose que (2.8) est vérifié. On applique le deuxième théorème de Green sur $\Omega_R = \{(x, y) \in \Omega; |x| < R\}$, pour $R \geq a$, on a

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx dy = \int_0^1 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=R} + u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=-R} \right) dy.$$

L'inégalité (2.9) implique que

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 dx dy = O(e^{-2\pi R}).$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\nabla u = 0$ dans Ω , et donc u est constante dans Ω . Comme $\gamma_0(u) = 0$, il s'ensuit que $u = 0$ dans Ω . \square

2.3 Problème non perturbé

On appelle problème non perturbé le problème posé dans la bande $\Omega_0 = \mathbb{R} \times]0, 1[$:

$$(P_0) \begin{cases} \Delta u_0 = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ u_0(x, 0) = f(x), \quad u_0(x, 1) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Pour la construction de la solution on utilise la transformée de Fourier partielle par rapport à x . On pose $\widehat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi)$, $\widehat{u}_0(\xi, y) = \mathcal{F}(u_0(\cdot, y))$, on suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $u_0 \in H_{loc}^2(\Omega_0) \cap H^1(\Omega_0)$. Le problème P_0 est alors équivalent à

$$\begin{cases} -\xi^2 \widehat{u}_0 + \widehat{u}_{0yy} = 0, & 0 < y < 1 \\ \widehat{u}_0(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \\ \widehat{u}_0(\xi, 1) = 0. \end{cases}$$

On résout l'équation pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, la solution générale s'écrit

$$\widehat{u}_0(\xi, y) = C_1 \sinh \xi(1 - y) + C_2 \cosh \xi(1 - y), \quad C_1 = C_1(\xi), C_2 = C_2(\xi).$$

Pour déterminer C_1 et C_2 , on utilise les conditions aux limites,

nous avons

$$\widehat{u}_0(\xi, 1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

d'autre part

$$\widehat{u}_0(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi),$$

ce qui entraine

$$C_1(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\sinh \xi}.$$

Donc

$$\widehat{u}_0(\xi, y) = \frac{\sinh \xi(1-y)}{\sinh \xi} \widehat{f}(\xi).$$

Si on note

$$a(\xi, y) = \frac{\sinh(\xi(1-y))}{\sinh \xi},$$

alors

$$\widehat{u}_0(\xi, y) = a(\xi, y) \widehat{f}(\xi).$$

Donc la solution formelle du problème est donnée par

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi, y) \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (2.11)$$

Proposition 2.3.1 *Supposons que $f \in H^{3/2}(\mathbb{R})$. Alors $u_0 \in H^2(\Omega_0)$ et*

- (i) $\|u_0\|_{H^2(\Omega_0)} \leq C \|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})}$,
- (ii) $\left\| \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 0) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Démonstration

(i) On utilise le comportement asymptotique de $a(\xi, y)$:

$$a(\xi, y) \simeq 1 - y, \text{ si } \xi \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad a(\xi, y) \simeq e^{-y|\xi|} \text{ si } |\xi| \rightarrow +\infty.$$

En effet, par exemple nous avons

$$\int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right|^2 dx dy = \int_{\mathbb{R}} \xi^4 |\widehat{f}(\xi)|^2 \left(\int_0^1 |a(\xi, y)|^2 dy \right) d\xi$$

et

$$\int_0^1 |a(\xi, y)|^2 dy \leq \int_0^1 e^{-2y|\xi|} dy \leq \frac{1}{2|\xi|}.$$

Alors

$$\int_{\Omega_0} \left| \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right|^2 dx dy \leq \int_{\mathbb{R}} |\xi|^3 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})}.$$

(ii) Nous avons $\widehat{\frac{\partial u_0}{\partial y}}(\xi, 0) = -(\xi \coth \xi) \widehat{f}(\xi)$. Comme la fonction $\xi \mapsto \xi \coth \xi$ est bornée sur \mathbb{R} alors

$$\left\| \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 0) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_0.$$

□

2.4 Méthode des équations intégrales

Soit u une solution du problème (2.2) et u_0 la solution du problème non perturbé (P_0). Posons $v_0 = u - u_0$, alors $v_0 \in H^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\Omega)$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta v_0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ v_0 = -u_0 & \text{sur } \gamma, \\ v_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \setminus \gamma. \end{cases} \quad (2.12)$$

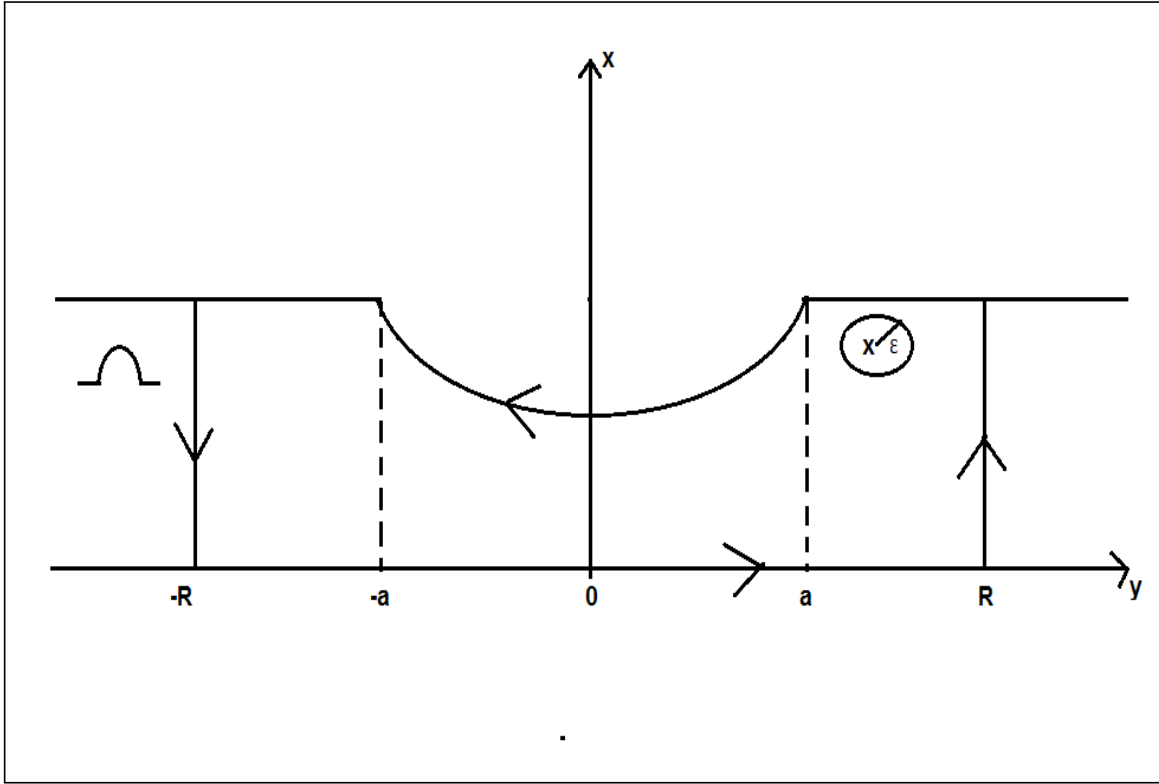
On applique la formule de Green aux fonctions harmoniques v_0 et $G(\cdot, (\xi, \eta))$ fonction de Green de la bande Ω_0 définie par (1.14) dans le domaine $\Omega_{R,\epsilon} = \Omega_R \setminus B((\xi, \eta), \epsilon)$ avec

$$0 < \epsilon < \eta, \quad \Omega_R = \{(x, y) \in \Omega : |x| < R\}$$

(voir Figure 2), on obtient

$$\int_{\partial\Omega_{R,\epsilon}} \left(v_0 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) ds = 0.$$

La fonction $v_0 \in H^1(\Omega)$ satisfait la propriété de décroissance dans (2.8). Puis de la preuve



du théorème (2.2.3), (partie 1, estimation (2.9)), on en déduit que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(|v_0(\pm R, y)|^2 + \left| \frac{\partial v_0}{\partial x}(\pm R, y) \right|^2 \right) dy = 0,$$

et (1.16)-(1.17) conduit à la limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(v_0 \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \Big|_{x=\pm R} dy = 0. \quad (2.13)$$

Alors, lorsque $R \rightarrow +\infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient la formule de représentation intégrale

$$v_0(\xi, \eta) = \int_{\gamma} \left(v_0 \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial v_0}{\partial n} \right) ds, \quad (\xi, \eta) \in \Omega. \quad (2.14)$$

Posons $\psi = \frac{\partial v_0}{\partial n} \Big|_{\gamma}$ qui est inconnue, et $q = -v_0 \Big|_{\gamma} = u_0 \Big|_{\gamma}$ connue via (2.11). Lorsque (ξ, η) tend vers un point $(t, 1 - h(t))$ de γ , on obtient l'équation intégrale de première espèce

$$S\psi = \frac{1}{2}q + D(q) \text{ sur } \gamma, \quad (2.15)$$

avec l'opérateur intégral S (resp. D) de la théorie du potentiel simple couche (resp. double couche) définis pour $M \in \gamma$ par

$$S\psi(M) = \int_{\gamma} G(M, M')\psi(M')ds(M'), \quad (2.16)$$

$$Dq(M) = \int_{\gamma} \frac{\partial G}{\partial n}(M, M')q(M')ds(M'), \quad (2.17)$$

respectivement.

La solvabilité de (2.15) découle de la théorie du potentiel développée dans le cadre des espaces de Sobolev $\tilde{H}^s(\gamma)$, $s > 1/2$, (voir [18, 16, 20, 5]). Une fois l'équation (2.15) est résolue, on a la solution

$$v_0(M) = \int_{\gamma} \left(q(M') \frac{\partial G}{\partial n}(M, M') - G(M, M')\psi(M') \right) ds(M'), \quad M \in \Omega. \quad (2.18)$$

Pour la solution numérique de l'équation intégrale (2.15), une paramétrisation de γ est nécessaire.

2.4.1 Paramétrisation de l'équation intégrale

Afin d'utiliser les résultats de l'équation intégrale sur un contour, on considère l'extension $\tilde{\gamma}$ de γ définie par $\tilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma^+$, où $\gamma^+ = \{(x, 1+h(x)), -a < x < a\}$. On prolonge la donnée q sur γ^+ par symétrie $q(x, 1+h(x)) = -q(x, 1-h(x))$ et à l'aide de la paramétrisation de $\tilde{\gamma}$

$$z(t) = (x(t), y(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

on transforme (2.15) comme suit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(t, s)\varphi(s)ds = 2q(t) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} M(t, s)q(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2.19)$$

où

$$\varphi(t) = \psi(z(t))|z'(t)|, \quad q(t) = q(z(t))$$

et

$$L(t, s) = \log \left[\frac{\cosh \pi(x(t) - x(s)) - \cos \pi(y(t) - y(s))}{\cosh \pi(x(t) - x(s)) - \cos \pi(y(t) + y(s))} \right], \quad (2.20)$$

$$M(t, s) = \frac{\sinh \pi(x(t) - x(s))y'(s) - \sin \pi(y(t) + y(s))x'(s)}{\cosh \pi(x(t) - x(s)) - \cos \pi(y(t) + y(s))} - \frac{\sinh \pi(x(t) - x(s))y'(s) + \sin \pi(y(t) - y(s))x'(s)}{\cosh \pi(x(t) - x(s)) - \cos \pi(y(t) - y(s))}. \quad (2.21)$$

Pour la discrétisation des opérateurs intégraux, on note que le noyau $L(t, s)$ peut être décomposé sous la forme

$$L(t, s) = \log \left(4 \sin^2 \left(\frac{t-s}{2} \right) \right) + k(t, s), \quad (2.22)$$

où k et M sont réguliers avec des valeurs diagonales

$$k(t, t) = \log \left(\frac{4 \sin^2 \pi y(t)}{|z'(t)|^2} \right) \quad (2.23)$$

et

$$M(t, t) = \frac{-x''(t)y'(t) + y''(t)x'(t)}{|z'(t)|^2} - \cot(\pi y(t))x'(t). \quad (2.24)$$

On a utilisé la limite

$$\lim_{s \rightarrow t} \log \left[\frac{2 \sin \left(\frac{t-s}{2} \right)}{t-s} \right] = 0.$$

On écrit l'équation (2.19) sous forme opérationnelle

$$(A + K)\varphi = q + Bq, \quad (2.25)$$

avec

$$A\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\log \left(4 \sin^2 \left(\frac{t-s}{2} \right) \right) - 2 \right] \varphi(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2.26)$$

et

$$K\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [k(t, s) + 2] \varphi(s) ds, \quad Bq(t) = \int_0^{2\pi} M(t, s)q(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.27)$$

Les propriétés des opérateurs A , K et B sont données par le lemme suivant (voir Kress

[16]).

Lemme 2.4.1 *Pour tout $r \geq 0$, on a :*

- *L'opérateur $A : H^r[0, 2\pi] \rightarrow H^{r+1}[0, 2\pi]$ est borné et bijectif.*
- *L'opérateurs K est compact de $H^r[0, 2\pi]$ dans $H^{r+1}[0, 2\pi]$.*
- *B est borné dans $H^{r+1}[0, 2\pi]$.*

Les potentiels S et D définis dans (2.16) ont les propriétés suivantes (voir [16]).

Lemme 2.4.2 *Le potentiel simple-couche est un opérateur linéaire borné de $\tilde{H}^{-1/2}(\gamma)$ dans $H_{loc}^1(\Omega)$. Le potentiel double-couche est un opérateur linéaire borné de $\tilde{H}^{1/2}(\gamma)$ dans $H_{loc}^1(\Omega)$.*

Théorème 2.4.1 *L'équation intégrale (2.25) possède une solution unique i.e $N(A+K) = \{0\}$.*

Démonstration Supposons que $(A+K)\varphi = 0$. On associe à φ le potentiel $v_0(M)$ défini par l'intégrale (2.18) (avec $q = 0$). En utilisant le (lemme 2.4.2) et le comportement asymptotique de $G(M, M')$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$ (voir (1.16)-(1.17)), on peut montrer que v_0 satisfait le théorème d'unicité (2.2.3). Donc $v_0 = 0$ dans Ω , il s'ensuit que $\psi = \frac{\partial v_0}{\partial n}|_\gamma = 0$, donc $\varphi(t) = \psi(z(t))|z'(t)| = 0$.

2.4.2 Méthode de Nyström

Dans cette partie, on utilise la méthode de Nyström pour l'approximation numérique de l'équation intégrale (2.25) de première espèce avec des noyaux faiblement singuliers.

En suivant (Kress [16]), on construit des quadratures numériques pour l'intégrale impropre

$$(Q\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left[4 \sin^2 \left(\frac{t-s}{2} \right) \right] \varphi(s) ds \quad (2.28)$$

en remplaçant la fonction périodique continue φ par son polynôme d'interpolation trigonométrique décrit dans ([16], sect. 11.3). En utilisant la base de Lagrange (L_j), on obtient

$$(Q_n\varphi)(t) \simeq \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^n(t) \varphi(t_j), \quad t_j = \frac{j\pi}{n}, \quad (2.29)$$

avec les poids de quadrature

$$R_j^n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left[4 \sin^2 \left(\frac{t-s}{2} \right) \right] L_j(s) ds, \quad j = 0, \dots, 2n-1. \quad (2.30)$$

Plus précisément nous avons $R_j^n(t_k) = R_{|j-k|}^n$ tel que

$$R_j^n = -\frac{1}{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos \left(\frac{mj}{\pi} \right) + \frac{(-1)^j}{2n} \right\}, \quad j = 0, \dots, 2n-1. \quad (2.31)$$

Ainsi, nous avons le système algébrique

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \left(R_{|i-j|}^n + \frac{1}{n} k(t_i, t_j) \right) \varphi(t_j) = 2q(t_i) + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} M(t_i, t_j) q(t_j), \quad i = 0, \dots, 2n-1. \quad (2.32)$$

Remarque 2.4.1 Dans le calcul numérique, on approche l'intégrale de Fourier (2.11) par le polynôme trigonométrique

$$u_{0n}(x, y) = \pi \sum_{j=-n}^n a(\xi_j, y) \hat{f}(\xi_j) e^{ix\xi_j}, \quad \xi_j = j\pi. \quad (2.33)$$

En particulier si $f(x) = q_a(x - x_0)$, où q_a est une fonction paire (gaussienne), alors

$$\hat{f}(\xi) = e^{i\xi x_0} \hat{q}_a(\xi),$$

et nous avons

$$u_{0n}(x, y) = \pi \sum_{j=1}^{n+1} H_j(y) \cos(\pi j(x - x_0)), \quad (2.34)$$

où

$$H_j(y) = a(\xi_j, y) \hat{q}_a(\xi_j). \quad (2.35)$$

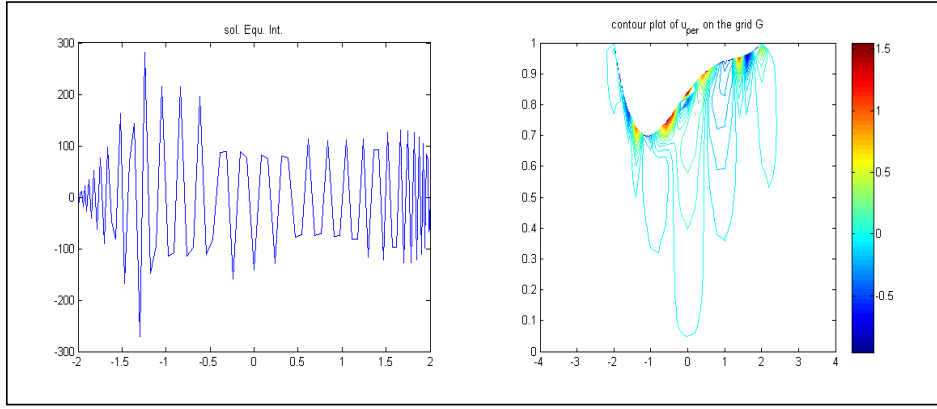


FIGURE 2.1 – (Gauche) Solution φ de l'équation intégrale (2.25), (Droite) Lignes de niveau de la solution v_0 donnée par (2.18) dans le domaine Ω_R , $R = 4$.

2.5 Résultats numériques

Pour illustrer nos résultats numériquement, on considère la condition aux limites $f(t)$ et la paramétrisation de l'arc $h(t)$ comme suit :

$$f(t) = a_1 \exp(-c_1(t - t_1)^2) + a_2 \exp(-c_2(t - t_2)^2),$$

avec $a_1 = 3$, $c_1 = 2$, $a_2 = 1$, $c_2 = 1$, $t_1 = -1$, $t_2 = 1$, et

$$h(t) = H(a^2 - t^2) \times [(t - t_0)^2 + b],$$

avec $a = 2$, $b = 1$, $H = 0.03$, $t_0 = 1$.

Dans la discrétisation, on utilise les paramètres :

$a = 2$, $n = 80$ qui est le nombre de points dans $[0, \pi]$, et $x_j = a \cos(\frac{j\pi}{n})$, $j = 1, \dots, n$, les points de $[-a, a]$.

Dans l'approximation de l'intégrale de Fourier (2.33), on utilise l'intervalle $\xi \in [0, \xi_{max}]$ avec $\xi_{max} = M\pi$, $M = n/2$ et les points $\xi_j = \frac{j\pi}{2}$, $j = 1, \dots, n$. Les figures (2.1) et (2.2) montrent les résultats de la simulation.

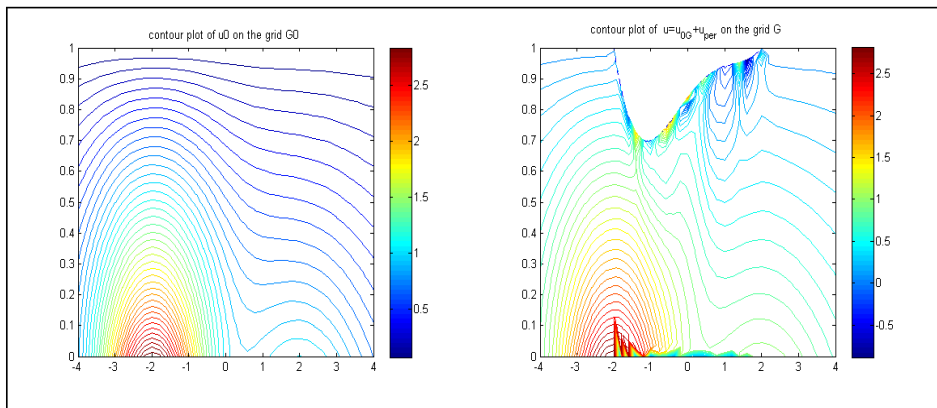


FIGURE 2.2 – (Gauche) Lignes de niveau de la Solution u_0 du problème non perturbé, (Droite) Lignes de niveau de la solution $u = v_0 + u_0$ du problème direct (2.2).

Chapitre 3

Problème inverse

On est concerné par le problème inverse suivant : soit u une fonction harmonique dans Ω , étant donné $f := u|_{\Gamma_0}$ et $g := \frac{\partial u}{\partial y}|_{\Gamma_0}$, $g \in L^2(\mathbb{R})$, déterminer $h(x)$ la paramétrisation de γ , telle que

$$\gamma : y = 1 - h(x), \quad -a \leq x \leq a.$$

On commence par donner le théorème d'unicité.

3.1 Unicité de la solution

Théorème 3.1.1 Soient Ω_1 et Ω_2 deux bandes (perturbées) avec deux arcs de frontière γ_1 et γ_2 de classe C^2 , respectivement. Notons par u_1 et u_2 les solutions du problème (2.2) avec les domaines Ω_1 et Ω_2 , respectivement, et supposons que

$$u_1 = u_2 \text{ et } \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \text{ sur } \Gamma_0.$$

Alors $\gamma_1 = \gamma_2$ à condition que $f \neq 0$.

Démonstration

- Supposons que $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et soit $u = u_1 - u_2$, alors $\Delta u = 0$ dans $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ et $u|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$. Le théorème de Holmgren (1.2.9) implique que $u = 0$ dans le voisinage de l'axe $y = 0$, et par analyticité $u_1 = u_2$ dans Ω_{12} .

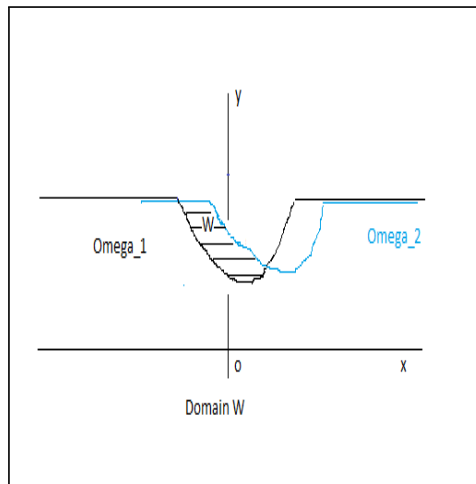


FIGURE 3.1 –

- Sans nuire à la généralité, on peut supposer que l'ouvert $W = \Omega_2 \setminus \bar{\Omega}_1$ est connexe et non vide (voir Figure 3.1). Alors d'après les conditions aux limites on peut déduire que $u_2 = 0$ sur le bord de W . Le principe du maximum pour les fonctions harmoniques implique que $u_2 = 0$ dans W et par analyticité il s'ensuit que $u_2 = 0$ dans Ω_2 . Or ceci contredit le fait que f n'est pas identiquement nulle. Ce qui achève la preuve. \square

3.2 L'équation intégrale non-linéaire

Nous allons montrer que le problème inverse est équivalent à un système d'équations intégrales non-linéaires. Pour cela on utilise la représentation intégrale (2.18), alors l'équation $g = \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{\Gamma_0}$ s'écrit

$$\mathcal{H}' q - \mathcal{H} \psi = g \quad (3.1)$$

où

$$\mathcal{H} \psi(x) = \int_{-a}^a \psi(x') H(x, x', 1 - h(x')) \omega(x') dx', \quad \omega(x') = \sqrt{1 + h'^2(x')}, \quad (3.2)$$

avec

$$H(x, x', y') = \frac{\partial G}{\partial y}((x, y), (x', y')) \Big|_{y=0}, \quad (3.3)$$

et

$$\mathcal{H}'q(x) = \int_{-a}^a q(x')H'(x, x', h(x'))dx' \quad (3.4)$$

avec

$$H'(x, x', h(x')) = \frac{\partial H}{\partial x'}(x, x', 1 - h(x'))h'(x') + \frac{\partial H}{\partial y'}(x, x', 1 - h(x')). \quad (3.5)$$

Alors on obtient le système

$$S(h)\psi = \frac{1}{2}q + D(h)q, \quad q(x) = u_0(x, 1 - h(x)) \quad (3.6)$$

$$\mathcal{H}'(h)q - \mathcal{H}(h)\psi = g. \quad (3.7)$$

Le système (3.6)-(3.7) est linéaire par rapport à ψ et non linéaire par rapport à h . On remarque que H et H' sont de classe C^∞ en x avec une décroissance rapide $e^{-\pi|x|}$, comme $h \in C^1[-a, a]$, alors $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ décroît comme $|g(x)| = O(e^{-\pi|x|})$.

3.3 Algorithme de reconstruction

Nous proposons la méthode itérative suivante (méthode de Gauss-Newton) pour résoudre approximativement le système (3.6)-(3.7). Il s'agit d'une linéarisation partielle du système par rapport à la variable h : la paramétrisation de l'arc γ , étant donné une approximation h_0 , on résout d'abord l'équation linéaire

$$S(h_0)\psi = \frac{1}{2}q_0 + D(h_0)q_0, \quad q_0(x) = u_0(x, 1 - h_0(x)) \quad (3.8)$$

par rapport à ψ , puis pour ψ fixé, on remplace (3.7) par l'équation linéarisé

$$D\mathcal{H}'(h_0; wq_0) - D\mathcal{H}(h_0; w\psi) = \mathcal{H}(h_0)\psi - \mathcal{H}'(h_0)q_0 + g \quad (3.9)$$

que nous devons résoudre pour w afin d'améliorer l'approximation de la frontière donnée par la paramétrisation h dans la nouvelle approximation donnée par $h = h_0 + w$. La méthode consiste à itérer cette procédure. Pour une étude plus approfondie de la méthode de Newton régularisée pour des problèmes non linéaires mal posés, en général, on se réfère à [9], voir

aussi le § 1.5 chapitre 1.

Les dérivées de Fréchet $D\mathcal{H}(h; k)$ et $D\mathcal{H}'(h; k)$ peuvent être trouvées en dérivant leurs noyaux par rapport à h , leurs représentations sont données dans l'annexe A .

L'équation (3.6) est résolue par la méthode de Nyström. Puisque les opérateurs intégraux $D\mathcal{H}'$ et $D\mathcal{H}$ ont des noyaux dans $L^2(\mathbb{R} \times]-a, a[)$, ils sont compacts de $L^2(]-a, a[)$ vers $L^2(\mathbb{R})$, par conséquent l'équation intégrale (3.9) est mal posée et nécessite une régularisation. On utilise une méthode de régularisation basée sur la méthode des moindres carrés [15]. Dans la mise en oeuvre on a utilisé la bibliothèque de Hansen [12] pour résoudre l'équation mal posée discrète (3.9). Notre algorithme comprend les étapes suivantes :

Etape 1 : On utilise les données exactes h et f , pour calculer une donnée de Cauchy g en résolvant l'équation intégrale (2.19) et en utilisant l'équation (3.1).

Etape 2 : En perturbe la donnée $g_\delta = g + \delta\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ est un bruit gaussien.

Etape 3 : Initialisation $h = h_0$ et on fixe les paramètres m , n du problème discret.

Etape 4 : pour $it = 1$ à $itermax$ faire

- calculer $q_0(x) = u_0(x, 1 - h(x))$ et résoudre l'équation (3.8) par la méthode de Nyström
- Résoudre l'équation linéarisée (3.9) pour w en utilisant l'algorithme des moindres carrés
- mettre $h = h_0 + w$

3.4 Exemples numériques

Dans cette dernière section, on présente quelques résultats numériques pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode de reconstruction décrite dans la section précédente. Nous avons choisi trois profils de γ pour tester notre algorithme de reconstruction.

Exemple 1. $h_1(x) = 0.2(1 - \frac{x^2}{4})$, $-2 \leq x \leq 2$.

Exemple 2. $h_2(x) = 0.03(4 - x^2)(1 + x^2)$, $-2 \leq x \leq 2$.

Exemple 3. $h_3(x) = 0.01(4 - x^2)(2 - 2x + x^2)$, $-2 \leq x \leq 2$.

L'approximation initiale a été prise $h_0(x) = 0.5.h_{ex}$ dans la majorité des exemples.

Les données de Cauchy (f, g) ont été obtenues en résolvant le problème de Dirichlet dans Ω (voir Fig. 3.2), avec la condition aux limites $u = f$ avec

$$f(t) = 3e^{-2t^2}.$$

Dans les exemples on approche la fonction h pour l'arc de frontière inconnue $\gamma(t) = (a \cos t, 1 - h(t))$, $t \in [0, \pi]$, par un polynôme trigonométrique

$$h(t) \approx \sin t \left(a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos kt + b_k \sin kt \right).$$

Dans tous les tests nous avons utilisé $n = 50$ ($n = 40$ pour l'exemple 1) points de maillage $y_j = a \cos(\frac{j\pi}{n})$, $j = 0, \dots, n$, pour l'arc $\gamma(y) = (y, 1 - h(y))$ ($n = 150$ pour les données simulées) et $x_i = -2a + i\frac{2a}{n}$, $i = 0, \dots, 2n$, points de collocation. L'équation linéaire (3.9) est réduite à un système $((2n+1) \times (2m+1))$. Ensuite, le problème se transforme en problème pour déterminer $2m + 1$ coefficients $\{a_0, (a_k, b_k), k = 1, \dots, m\}$ de l'approximation.

Vu le caractère mal posé, ce système linéaire approximatif est résolu via l'algorithme des moindres carrés *lsqr_b.m* d'après le package de Hansen "Regularization tools" [12].

Pour obtenir des données bruitées, on ajoute un bruit aléatoire de niveau donné δ (par rapport à la norme \mathbb{L}^2 des données) aux données simulées g comme

$$g_\delta(t) = g(t) + \delta \|g\|_2 \sigma(t)$$

où $\sigma(t)$ représente des nombres aléatoires uniformément répartis sur l'intervalle $(-1; 1)$.

Dans les figures (3.3-3.6), nous présentons les résultats numériques des exemples 1, 2 et 3 respectivement, impliquant à la fois des données exactes et des données bruitées. Les reconstructions sont obtenues après une itération pour tous les exemples. Les expériences numériques montrent des reconstructions plutôt satisfaisantes sous les restrictions :

- $0 \leq h(x) \leq 0.2$,
- avec l'approximation initiale appropriée h_0 ,
- $m = p$ le degré du polynôme qui interpole h ($p = 2$ pour h_1 et $p = 4$ pour h_2 et h_3).

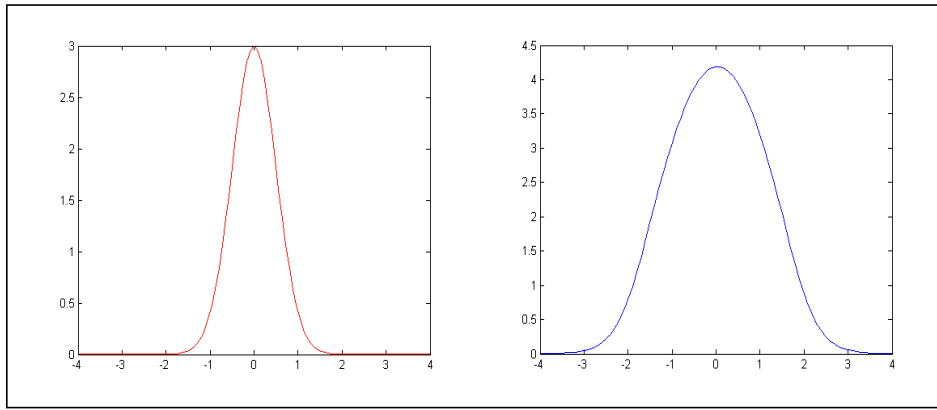


FIGURE 3.2 – Données de Cauchy calculées par l’algorithme direct, fonction f (Gauche), fonction g pour l’exemple 1 (Droite).

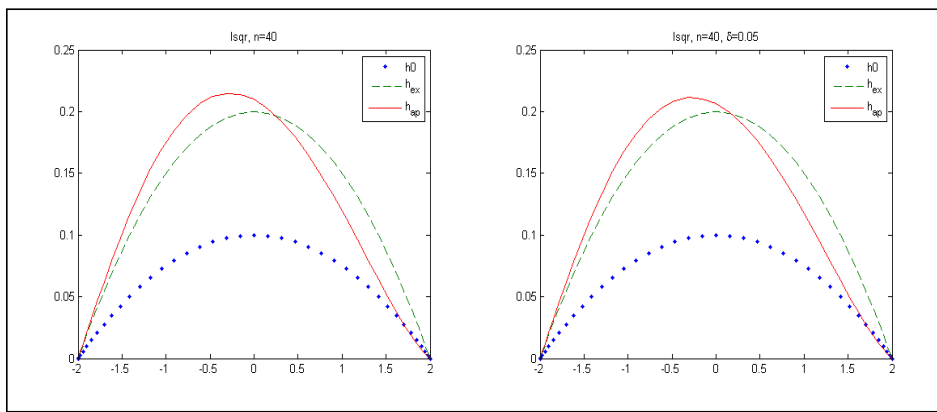


FIGURE 3.3 – Reconstruction de h_1 après une itération pour des données exactes (Gauche), et des données bruitées avec $\delta = 0.05$ (Droite).

- $0 \leq \delta \leq 0.1$.

On remarque qu’avec une approximation initiale arbitraire (en particulier pour $h_0 = 0$), l’algorithme ne parvient pas à reconstruire la frontière. En général, la qualité de la reconstruction est affectée par la forme de γ et du choix de h_0 (voir Fig. 3.6). Comme prévu, la première itération est stable avec l’ajout du bruit aléatoire.

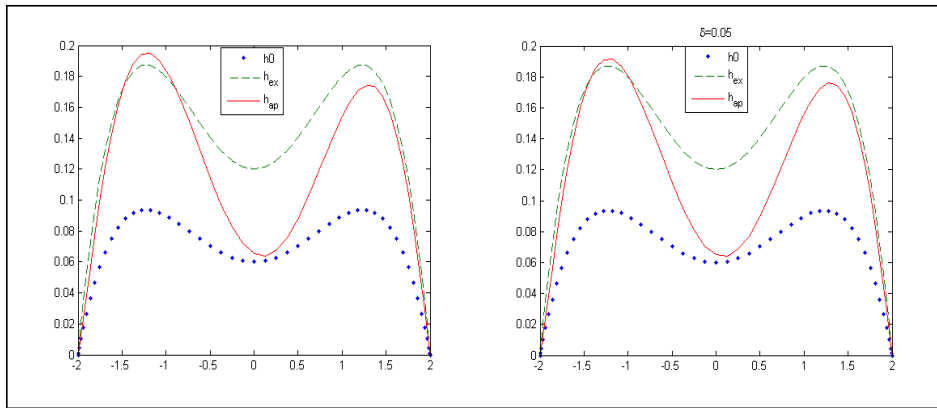


FIGURE 3.4 – Reconstruction de h_2 après une itération pour des données exactes (Gauche), et des données bruitées avec $\delta = 0.05$ (Droite).

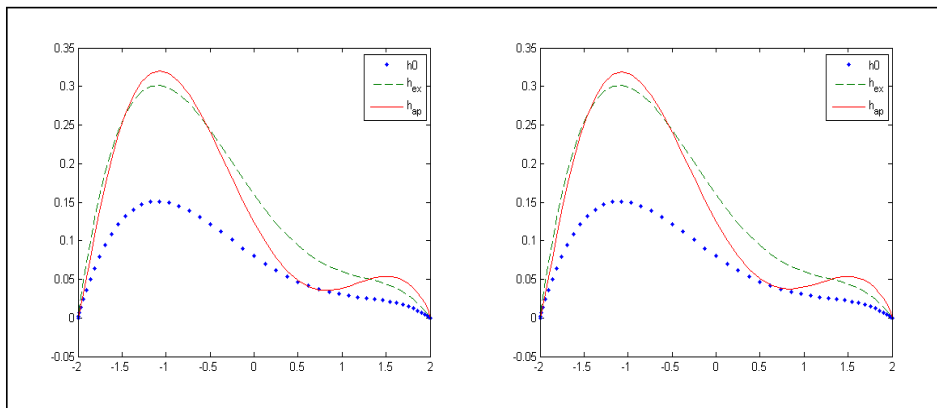


FIGURE 3.5 – Reconstruction de h_3 après une itération pour des données exactes (Gauche), et des données bruitées avec $\delta = 0.05$ (Droite).

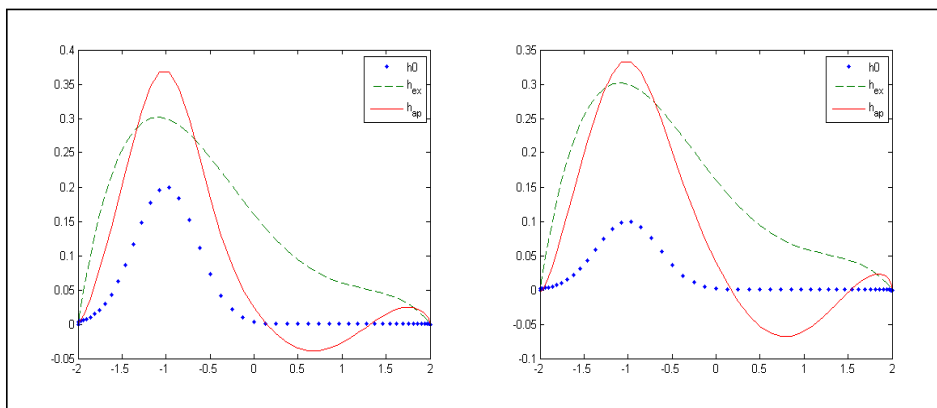


FIGURE 3.6 – Reconstruction de h_3 après une itération pour des données exactes avec différentes courbes initiales h_0

Conclusion

Au terme de cette thèse, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des problèmes inverses géométriques, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente. Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension du présent travail,

- Nous avons étudié le problème direct d'une manière systématique en utilisant la méthode des équations intégrales, on a discrétisé le système par la méthode de quadrature avec des exemples numériques.
- Le problème inverse est réduit à un système non-linéaire, nous avons approché (partiellement) ce système par la méthode itérative de Gauss Newton.
- Nous avons approché l'arc inconnu γ de la frontière par quelques modes de Fourier, le système mal conditionné d'équations linéaires algébriques qu'on a trouvé a été régularisé par la méthode des moindres carrés.
- Nous avons obtenu des résultats numériques satisfaisantes pour le problème inverse avec des données exactes et bruitées avec une approximation initiale appropriée, mais si l'approximation initiale est arbitraire l'algorithme a une difficulté de reconstruire la solution. La qualité de la reconstruction dépend de la forme de γ . Des recherches supplémentaires sont nécessaires pour améliorer les performances de l'algorithme de reconstruction de la frontière. Il est nécessaire d'introduire des traitements de régularisation supplémentaires comme le choix de la paramétrisation de la fonction h , l'approximation initiale h_0 et le test d'arrêt pour stopper les itérations.

Annexe

Noyaux des opérateurs intégraux

On commence par donner les expressions des noyaux des opérateurs intégraux non linéaires \mathcal{H} et \mathcal{H}' et leurs dérivées. Suite aux définitions (3.3)-(3.5) on en déduit la formule

$$H(x, x', y') = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi y'}{\cosh \pi(x - x') - \cos \pi y'} \right], \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x'}, \frac{\partial H}{\partial y'} \right) (x, x', y') = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin \pi y' \sinh \pi(x - x')}{(\cosh \pi(x - x') - \cos \pi y')^2}, \frac{\cos \pi y' \cosh \pi(x - x') - 1}{(\cosh \pi(x - x') - \cos \pi y')^2} \right), \quad (3.11)$$

et

$$H'(x, x', h(x')) = \frac{\partial H}{\partial x'}(x, x', 1 - h(x'))h'(x') + \frac{\partial H}{\partial y'}(x, x', 1 - h(x')). \quad (3.12)$$

Les dérivées de Fréchet des opérateurs intégraux \mathcal{H} et \mathcal{H}' par rapport à h peuvent être obtenues en dérivant leurs noyaux par rapport à h (voir (1.23)-(1.25)). Plus précisément nous avons

$$D\mathcal{H}(h; k)(x) = \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a \left[\frac{\cos \pi h(x') \cosh \pi(x - x') - 1}{(\cosh \pi(x - x') + \cos \pi h(x'))^2} \right] k(x') \omega(x') dx', \quad \omega(x') = \sqrt{1 + h'^2(x')}, \quad (3.13)$$

and

$$\begin{aligned}
D\mathcal{H}'(h; k)(x) &= \int_{-a}^a \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, x', 1-h(x')) - \frac{\partial^2 H}{\partial x'^2}(x, x', 1-h(x')) \right) q(x') \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial H}{\partial x'}(x, x', 1-h(x')) q'(x') \right] k(x') dx' \tag{3.14} \\
&= \int_{-a}^a [K_1(x, x') q(x') - K_2(x, x') q'(x')] k(x') dx'.
\end{aligned}$$

avec

$$K_1(x, x') = -2\pi^2 \times \frac{\sin \pi h(x') \sinh^2 \pi(x-x')}{(\cosh \pi(x-x') + \cos \pi h(x'))^3} \tag{3.15}$$

et

$$K_2(x, x') = \frac{\pi}{2} \times \frac{\sin \pi h(x') \sinh \pi(x-x')}{(\cosh \pi(x-x') + \cos \pi h(x'))^2}. \tag{3.16}$$

Dans les équations précédentes, nous supposons que $h \in C^1[-a, a]$ et $h(\pm a) = 0$, par conséquent $q \in C^1[-a, a]$. Pour simplifier, on suppose dans la différenciation que $\omega(x')$ est indépendant de h , i.e dépend de h_0 de l'étape précédente.

Bibliographie

- [1] D. AUROUX, *Problème inverse pour l'environnement*, Université de Nice Sophia Antipolis, (2010-2011).
- [2] M. BONNET, *Problèmes inverses*, Ecole Centrale de Paris, 2008.
- [3] J. BONY, *Cours d'analyse théorie des distributions et analyse de Fourier*, 2001.
- [4] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson, Paris, 1983 .
- [5] F. CAKONI AND R. KRESS, *Integral equations for inverse problems in corrosion detection from partial cauchy data*, *Inverse Problems and Imaging*, 1, 2, (2007).
- [6] C. CHARLES, *Introduction aux problèmes inverses* , Université de Liège – Gembloux Agro-Bio Tech Unité de Statistique, Informatique et Mathématique appliquées à la bioingénierie Gembloux (Belgique), (2014).
- [7] D. COLTON AND R. KRESS, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematic in Sciences*. Springer, Berlin, 1998.
- [8] C. CONSTANDA, *Direct and indirect boundary integral equation methods*, Chapman et Hall/CRC, Boca Raton 2000.
- [9] H. W. ENGL, M. HANKE AND A. NEUBAUER, *Regularization of inverse problems*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [10] P. GRISVARD, *Elliptic problem in nonsmooth domains*, *Classics in Applied Mathematics*, Volume 69, SIAM (1985).
- [11] M. HANKE, *A regularizing Levenberg-Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems.*, *Inverse Problems*, 13 :79-95, 1997.

- [12] P. C. HANSEN, *Regularization tools version 4.0 for Matlab 7.3*, Numerical algorithms, 46, 2 :189–194, 2007, Springer.
- [13] J. JOST, *Postmodern analysis*, Springer-Verlag. Berlin, 2003.
- [14] M. KERN, *Problèmes inverses*, École supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, (2002-2003).
- [15] A. KIRSH, *An Introduction to mathematical theory of Inverse Problems*, Chapman et Hall/CRC, Boca Raton 2000.
- [16] R. KRESS, *Linear integral equations*, Applied Mathematical Sciences, Volume 82, No 1, NY(2014)
- [17] R. KRESS AND W. RUNDEL, *Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem*, Inverse Problems, 21, 2005.
- [18] W. MCLEAN, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge, Univ.Press, (2000).
- [19] MAX Y. MELNIKOV, *Green's functions : Construction and application*, Walter de Gruyter (2012).
- [20] L. MONCH, *On the inverse acoustic scattering problem by an open arc : the sound-hard case*, Inverse Problems, 13, (1997).
- [21] A. NACHAOUI, *An improved implementation of an iterative method in boundary identification problems*, Numerical Algorithms,33, (2003).
- [22] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.
- [23] A.N. TIKHONOV AND VI.A. ARSENIN, *Solutions of ill-posed problems*, Scripta series in mathematics. Winston, 1977.