وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة –

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Étude qualitative de quelques équations intégro-différentielles

Option
Équations différentielles et Applications
Par
Diabi Dallel

DIRECTEUR DE THÈSE :	Boukerrioua Khaled	MCA	Univ. Annaba
CO-DIRECTEUR DE THÈSE :	Kilani Brahim	MCA	Univ. Annaba

Devant le jury

PRÉSIDENT :	Bouras Med Chérif	Prof.	UBM Annaba
EXAMINATEURS:	Boussetila Najib	Prof.	Univ. Guelma
	Ben Rabeh Abdelrafik	M.C.A	Univ. Guelma
	Salmi Abdelouahab	M.C.A	UBM Annaba

Année : 2019

Table des matières

Résumé

Il est bien connu que la théorie des inégalités intégrales joue un rôle essentiel dans l'étude de l'analyse qualitative et quantitative du comportement de divers types de solutions des équations différentielles non linéaires.

L'objectif de cette thèse est d'établir, dans un premier temps, de nouvelles inégalités intégrales fractionnaires pour les fonctions à une et à deux variables.

Dans un deuxième temps, nous allons établir de nouvelles inégalités de type Gamidov unidimensionnelles et bidimensionnelles.

Enfin, nous avons utilisé quelques inégalités intégrales pour étudier la stabilité exponentielle de certains systèmes dynamiques non linéaires perturbés aux échelles de temps arbitraires.

Mots-clés: Échelles de temps, Inégalité de Gronwall, Inégalité de Bihari, Inégalité de Gronwall- Bellman, Inégalité de Gamidov, Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, Stabilité exponentielle, Systèmes perturbés.

Abstract

It is well known that the theory of integral inequalities plays a vital role in the study of the qualitative and quantitative analysis behaviour of non-linear differential equations solutions.

The objective of this thesis is to establish, in a first time, new fractional integral inequalities for one- and two-variable functions.

In a second time, we will establish new one-dimensional and two-dimensional Gamidov inequalities.

Finally, we have used some integral inequalities to study the exponential stability of some perturbed nonlinear dynamical systems at arbitrary time scales.

Keywords : Time scales, Inequality of Gronwall, Inequality of Bihari, Inequality of Gronwall- Bellman, Inequality of Gamidov, Fractional integral of Riemann-Liouville, Exponential stability, Perturbed systems.

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques modernes telles que la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique. En particulier les inégalités intégrales ont connu un grand développement et des nouvelles idées et techniques sont apparues ce qui a contribué à la résolution de nombreux problèmes importants en théorie de l'approximation et en analyse numérique où l'estimation des erreurs d'approximation est exigée. Par ailleurs l'importance de ces inégalités intégrales intervient en grande partie dans l'étude des équations intégrales et plus généralement dans le cadre des équations différentielles ordinaire au point de vue existence des solutions et stabilité des points d'équilibres. Elles ont été introduites par **Gronwall** en 1919 [33], et appliquées à l'étude de certains problèmes concernant les équations différentielles ordinaires dont l'énoncer peut-être comme suit:

Soit u une fonction continue sur $[\alpha, \alpha + h]$ et a et b sont deux constantes positives. Si l'inégalité

$$0 \leq u(t) \leq \int_{\alpha}^{t} [a + bu(s)]\, ds, \text{ pour } t \in [\alpha, \alpha + h],$$

est vérifiée, alors

$$0 \leq u(t) \leq ahe^{bh}, \ t \in [\alpha, \alpha + h].$$

Après la découverte de cette inégalité intégrale, un certain nombre de mathématiciens ont montré un intérêt considérable pour généraliser la forme originale de cette inégalité. Pendant la période **1919-1975**, plusieurs publications sur ce sujet ont vu le jour tels les travaux de **Bellman** [8], **Beesack** [10] et **Bihari** [11]. Ces travaux sont bien connus et ont trouvé de nombreuses applications. D'autres scientifiques **R.P. Agarwal, Azbelev**,

Bainov, DEO, Dhongade, Lakshmikantham, Leela et **Pachpatte** [3, 39, 52] sont mentionnés avec le développement ultérieur de la théorie des inégalités intégrales.

L'objectif principal de cette thèse est d'établir, dans un premier temps de nouvelles généralisations des inégalités intégrales fractionnaires de type Gronwall-Bellman et de type Gamidov pour les fonctions à une et à deux variables ainsi que leurs applications. Dans un second temps, nous montrerons l'utilité de quelques inégalités intégrales aux échelles de temps, pour étudier la stabilité exponentielle de certains systèmes perturbés.

Cette thèse est structurée en quatre chapitres :

Le premier chapitre consiste en un rappel des principales définitions et propriétés sur la théorie des échelles de temps, puis nous présentons les principes et les concepts mathématiques relatifs au calcul fractionnaire. Aussi, nous rappellerons brièvement quelques notions fondamentales et définitions relatives à la stabilité, ainsi que quelques résultats importants d'analyse qui seront utilisés ultérieurement.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude des inégalités intégrales fractionnaires. En effet, nous présentons d'abord quelques résultats classiques de type Gronwall-Bellman à une et à deux variables, puis nous citerons quelques généralisations apparues ces dernières années. Enfin, nous présentons de nouvelles généralisations qui seront illustrées par quelques applications. .

Les résultats ont été soumis pour une éventuelle publication dans une revue internationale.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des inégalités intégrales de type Gamidov à une et à deux variables.

Nous allons citer brièvement les résultats classiques obtenus sur ce type des inégalités, puis nous donnerons de nouvelles généralisations, et nous concluons ce chapitre par des exemples illustratifs des nouveaux résultats.

Ces nouvelles inégalités ont contribué à l'étude de nouvelles classes d'équations intégrales et différentielles et ont fait l'objet de la publication :

K. Boukerrioua, D. Diabi and I. Meziri , New explicit bounds on Gamidov type integral inequalities on times scales and applications. Journal of Mathematical Inequalities Volume 12, Number 3 (2018), 807–825.

K. Boukerrioua, D. Diabi and B. Kilani, **On some new generalizations of certain Gamidov integral inequalities in two independent variables and their applications. Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. Vol. 33, No 3 (2018), 467-479.**

Le quatrième chapitre sera consacré à l'étude de stabilité exponentielle de certains systèmes dynamiques non linéaires perturbés en utilisant quelques inégalités intégrales aux échelles de temps.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit, ce chapitre est organisé comme suit. La première section comporte un bref rappel sur les éléments de base de la théorie des échelles de temps. La plupart de ces résultats seront énoncés sans preuve. Les preuves peuvent être consultées dans [5] et [6]. La deuxième section est consacrée à la présentation de notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, l'exponentielle de Mittag-Leffler. Dans la troisième section, nous rappellerons 'brièvement quelques notions fondamentales et définitions relatives à la stabilité. On conclut le chapitre par une section réservée aux quelques lemmes importants qui seront très utiles dans la suite.

1.1 Calculs sur les échelles de temps

Le calcul des échelles de temps a été lancé par **Stefane Hilger** [61] dans sa thèse de doctorat en 1988, afin de mettre au point une nouvelle théorie, laquelle peut unifier l'analyse discrète et continue, où il a notamment défini la Δ-dérivée. C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle ou presque, à titre d'exemple, une équation du premier ordre dont la dérivée (u') est remplacée par la Δ-dérivée $\left(u^{\Delta}\right)$.

Nous verrons plus loin que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies. D'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, psychologie, génie et en informatique. Ainsi, la théorie des équations aux échelles de temps vient dans un premier temps, unifier les résultats des études réalisées dans le domaine des équations différentielles et des équations aux différences finies. Dans un deuxième temps, elle permet l'étude des phénomènes se fondant sur, la modélisation qui fait appel simultanément au discret et au continu.

1.1.1 Généralités sur les échelles de temps

Définition 1.1.1 *Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble fermé non vide de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.1 *Les ensembles $\mathbb{Z}$, $[0,1] \cup [2,3]$, $[0,1] \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et les ensembles de Cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.1.2 *Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1.1 *La topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$.*

1.1.2 Opérateurs de sauts

Définition 1.1.2 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. On définit*

i) l'opérateur de saut avant (**forward jump operator**) $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ par

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} \ : s > t\}, \tag{1.1}$$

ii) l'opérateur de saut arrière (**backward jump operator**) $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ par

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

Dans cette définition, nous posons $\sup\emptyset = \inf\mathbb{T}$, (ie, $\rho(t) = t$ si $\mathbb{T}$ a un minimum en t) et $\inf\emptyset = \sup\mathbb{T}$, (ie, $\sigma(t) = t$ si $\mathbb{T}$ a un maximum en t), où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide.

1.1.3 Classification des points dans une échelle de temps $\mathbb{T}$

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, t un point de $\mathbb{T}$.

Définition 1.1.3 *On dit que t est un point dense à droite de $\mathbb{T}$, $t < \sup\mathbb{T}$ (resp. un point dense à gauche de $\mathbb{T}$), si $\sigma(t) = t$ (resp. $\rho(t) = t$).*

Définition 1.1.4 *On dit que t est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.1.5 *On dit que t est un point dispersé à droite de $\mathbb{T}$ (resp. un point dispersé à gauche de $\mathbb{T}$), si $\sigma(t) > t$ (resp. $\rho(t) < t$).*

Définition 1.1.6 *t est dit point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

Définition 1.1.7 *nous définissons la fonction de granulation $\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ par*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t. \tag{1.3}$$

[Tab.1.1] Le tableau suivant résume la classification des points dans une échelle de temps.

point	La description
dense à droite	$t = \sigma(t)$
dense à gauche	$t = \rho(t)$
dense	$\sigma(t) = t = \rho(t)$
dispersé à droite	$t < \sigma(t)$
dispersé à gauche	$\rho(t) < t$
isolé	$\rho(t) < t < \sigma(t)$

Maintenant, nous illustrons les définitions précédentes par quelques ensembles des échelles de temps ainsi que leurs caratéristiques (opérateur de saut, fonction de granulation) indiqués dans le tableau ci-dessous

[Tab.1.2] Quelques échelles de temps et leurs caractérstiques.

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}^k$	$q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$	$p^{\mathbb{N}_0} \cup \{0\}, p \in (0,1)$	$\sqrt{2n+1}$
$\sigma(t)$	t	$t+1$	$(1+\sqrt[k]{t})^k$	qt	$\frac{t}{p}$	$\sqrt{t^2+2}$
$\rho(t)$	t	$t-1$	$\left(\sqrt[k]{t}-1\right)^k$	$\frac{t}{q}$	pt	$\sqrt{t^2-2}$
$\mu(t)$	0	1	$(1+\sqrt[k]{t})^k - t$	$(q-1)t$	$t(\frac{1}{p}-1)$	$\sqrt{t^2+2}-t$

1.1.4 Sous ensembles dérivés d'une échelle de temps

Nous notons que de chaque échelle de temps nous pouvons extraire les sous ensembles suivants:

Définition 1.1.8 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, l'ensemble $\mathbb{T}^k$ est défini comme suit:*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash \left(\rho\left(\sup \mathbb{T}\right), \sup \mathbb{T}\ \right] & si\ \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & si\ \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Définition 1.1.9 *Soient a, b deux points de $\mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est défini par :*

$$[a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T}\ : a \leq t \leq b\}.$$

Exemple 1.1.3 *Soit $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Alors $\sup \mathbb{T} = 1$ et*

$$\rho(1) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < 1\} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \backslash \left(\frac{1}{2}, 1\right] = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\} \cup 0.$$

Exemple 1.1.4 *Soit $\mathbb{T} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors $\sup \mathbb{T} = \infty$ et $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.*

Exemple 1.1.5 *Soit $[a, b]$ un intervalle dans $\mathbb{T}$, et soit b un point dense à gauche de $\mathbb{T}$. Alors*

$$\sup [a\ , b] = b,$$

et

$$\rho(b) = b$$

$$[a\ , b]^k = [a\ , b]\ \setminus (b\ , b] = [a, b]\ \setminus \emptyset = [a\ , b]\,.$$

1.1.5 Dérivation sur les échelles de temps

Dans cette section nous rappelons la définition de la Δ-dérivée dite aussi la dérivée au sens de Hilger.

Définition 1.1.10 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$. On dira que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t où*

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)\,[(\sigma(t) - s)]\right| \leq \varepsilon\,|\sigma(t) - s|\,, \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{U}\ .$$

pour tout $s \in U$. Si f est Δ-différentiable en tout point $t \in \mathbb{T}^k$, alors la fonction $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \longmapsto \mathbb{R}$ est dite la Δ-dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Rappelons quelques propriétés de la delta dérivée qui sont utilisées dans ce travail.

Théorème 1.1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

1. Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.
2. Si f est continue en t et si t est dispersé à droite, alors f est Δ-différentiable en t et
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

3. Si t est dense à droite , alors f est $\Delta-$différentiable en t si et seulement si,

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s},$$

existe et finie. Dans ce cas nous avons:

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

4. Si f est Δ-différentiable en t, alors

$$f(\sigma(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

1. Si $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, alors pour $t\in\mathbb{T}^{k}=\mathbb{R}$ est un point dense a droite,

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{t\to s}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f^{'}(t).$$

2. Si $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, alors pour $t\in\mathbb{T}^{k}=\mathbb{Z}$ est un point isolé,

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t).$$

3. Si $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$, alors pour $t\in\mathbb{T}^{k}=h\mathbb{Z}$ est un point isolé,

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\Delta_{h}f(t).$$

Exemple 1.1.6 *Considérons l'ensemble $\mathbb{T}=\left\{\sqrt[5]{n+1}:n\in\mathbb{N}_0\right\}$ avec $\mathbb{N}_0$ est l'ensemble des entiers non négatifs, $f(t)=t+t^3, t\in\mathbb{T}$.*

Pour tout $t\in\mathbb{T}$, $t=\sqrt[5]{n+1}$, $n=t^5-1$, $n\in\mathbb{N}_0$, nous avons

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf\left\{\sqrt[5]{l+1}:\sqrt[5]{l+1}>\sqrt[5]{n+1},\ l\in\mathbb{N}_0\right\}\\ &= \sqrt[5]{n+2}\\ &= \sqrt[5]{t^5+1}>t.\end{aligned}$$

Par conséquent, chaque point de $\mathbb{T}$ est dispersé à droite. Nous notons que la fonction $f(t)$ est continue sur $\mathbb{T}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}, \\ &= \frac{\sigma(t) + \sigma^3(t) - t - t^3}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{\sigma(t) - t + \sigma^3(t) - t^3}{\sigma(t) - t} \\ &= 1 + \sigma^2(t) + t^2 + t\sigma(t) \\ &= 1 + \sqrt[5]{t^5+1} + t\,\sqrt[5]{t^5+1} + t^2,\ t \in \mathbb{T}^k. \end{aligned}$$

1.1.6 Propriétés de la Δ-dérivée

Théorème 1.1.2 *Soient f, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions delta-différentiables en $t \in \mathbb{T}^K$. Alors nous avons les propriétés suivantes :*

1. $f + g$ est Δ-différentiable en t, de plus
$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

2. (αf) est Δ-différentiable en t pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et nous avons
$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

3. fg est Δ-différentiable en t et nous avons
$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)\,g(t) + f(\sigma(t))\,g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)\,g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\,g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

4. Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, alors$\frac{1}{f}$ est Δ-différentiable en t et nous avons
$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5. Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t nous avons
$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)\,g(t) - f(t)\,g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

1.1.7 Dérivation des fonctions composées

Théorème 1.1.3 *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en $\mathbb{T}^k$ et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continûment différentiable, alors il existe $c \in [t, \sigma(t)]$ satisfaisant*

$$(f \circ g)^{\Delta} = f'(g(c))g^{\Delta}(t).$$

Théorème 1.1.4 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$différentiable. Alors $f \circ g$ est Δ-différentiable et on a la formule suivante:*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f\,'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t).$$

Exemple 1.1.7 *Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(t) = t^2$ et $f(t) = e^t$. Alors*

$$f'(t) = e^t,$$

$$g^{\Delta}(t) = 2t + 1$$

et

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^{\Delta}(t) &= g^{\Delta}(t) \int_0^1 f' \left[g(t) + hg^{\Delta}(t) \right] dh \\
&= g^{\Delta}(t) \int_0^1 e^{t^2 + h(2t+1)} dh \\
&= (2t+1)\, e^{t^2} \left[\frac{e^{2t+1}}{2t+1} - \frac{1}{2t+1} \right] \\
&= e^{t^2} \left(e^{2t+1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Puisque $f \circ g$ est défini sur $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ on peut en déduire que

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = (f \circ g)^{\Delta}(t+1) - (f \circ g)^{\Delta}(t) = e^{(t+1)^2} - e^{t^2} = e^{t^2} \left(e^{2t+1} - 1 \right).$$

1.1.8 Intégration

Naturellement, les calculs sur les échelles de temps ne seront pas complets sans l'introduction de la $\Delta-$intégrabilité. Nous définissons alors les fonctions qui sont intégrables et pour cela nous présentons les définitions suivantes:

Définition 1.1.11 *Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régulière si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Définition 1.1.12 *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite* rd-*continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Remarques 1.1.2 *L'ensemble de toutes les fonctions* rd-*continues sur $\mathbb{T}$est noté par*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Remarques 1.1.3 *L'ensemble de toutes les fonctions $\Delta-$différentiables sont* rd-*continues sur $\mathbb{T}$ sera noté par :*

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Définition 1.1.13 *La fonction $F : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}$, est dite primitive de $f : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}$, si elle vérifie $F^{\Delta}(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^k$.*

Exemple 1.1.8 *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$. Alors $\sigma(t) = t+1$, $t \in \mathbb{T}$. Soit $f(t) = 3t^2 + 5t + 2$, $t \in \mathbb{T}$. La fonction g définie par $g(t) = t^3 + t^2$ est prmitive de f.*

$$\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= (\sigma(t))^2 + t\sigma(t) + t^2 + \sigma(t) + t \\
&= (t+1)^2 + t(t+1) + t^2 + t + 1 + t \\
&= t^2 + 2t + 1 + t^2 + t + t^2 + 2t + 1 \\
&= 3t^2 + 5t + 2 \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.5 *Toute fonction rd-continue $f : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}$, admet une primitive $F : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{R}$, et nous notons*

$$\int_s^r f(t)\,\Delta t = F(r) - F(s) \ \ \textit{pour tout } r, s \in \mathbb{T}.$$

Théorème 1.1.6 *Si $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ et $t \in \mathbb{T}^k$, nous avons:*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\,\Delta\tau = \mu(t)\, f(t)\,.$$

Théorème 1.1.7 *Soit $a,\ b,\ c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f,\ g \in C_{rd}\left(\mathbb{T}^k\right)$ alors:*

1. $\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,\Delta t + \int_a^b g(t)\,\Delta t$.
2. $\int_a^b (\lambda f(t))\,\Delta t = \lambda \int_a^b f(t)\,\Delta t$.
3. $\int_a^b f(t)\,\Delta t = -\int_b^a f(t)\,\Delta t$.
4. $\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^c f(t)\,\Delta t + \int_c^b f(t)\,\Delta t.$
5. $\int_a^a f(t)\,\Delta t = 0.$
6. Si $|f(t)| \leq g(t)$ sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\,\Delta t.$
7. Si $f(t) \geq 0$ pour $t \in [a,b] \cap \mathbb{T}$,alors $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

■ Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nous avons:

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \int_a^b f(t)\,dt.$$

■ Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, nous avons:

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) \text{ si } a < b \\ 0 \text{ si } a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) \text{ si } a > b. \end{cases}$$

■ Si $[a,b]$ contient des points isolés alors :

$$\int_a^b f(t)\,\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b[} \mu(t)\, f(t) \text{ si } a < b \\ 0 \text{ si } a = b \\ \sum_{t\in[b,a[} \mu(t)\, f(t) \text{ si } a > b. \end{cases}$$

Exemple 1.1.9 *Si* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ *et si* $t\in\mathbb{Z}$ *telque* $t>1$ *et* $a\neq 1$, *alors*

$$\int_0^t a^s\Delta s=\sum_{k=0}^{k=t-1} a^k\Delta s=\frac{a^t-1}{a-1}.$$

Exemple 1.1.10 *Si* $\mathbb{T}=q^{\mathbb{Z}}$, *avec* $q>1$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\Delta t &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{t^2}\Delta t\\ &= \lim_{b\to\infty}\sum_{t\in[1,b)}\frac{\mu(t)}{t^2}\\ &= (q-1)\lim_{b\to\infty}\sum_{k=0}^{k=n-1} q^{-k}=q.\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 *Si* $a,\ b\in\mathbb{T}$ *et* $f,\ g\in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, *alors*

$$\begin{aligned}\int_a^b f^\sigma(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f^\Delta(t)\,g(t)\,\Delta t,\\ \int_a^b f(t)\,g^\Delta(t)\,\Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b}-\int_a^b f^\Delta(t)\,g^\sigma(t)\,\Delta t.\end{aligned}$$

Théorème 1.1.8 *Soit* $a\in\mathbb{T}^k$, $b\in\mathbb{T}$ *et* $L:\mathbb{T}\times\mathbb{T}^k\to\mathbb{R}$, *est continue en* (t,t), *pour* $t\in\mathbb{T}^k$, $t>a$ *et* $L^\Delta(t,.)$ *est* rd-*continue dans* $[a,\sigma(t)]$, *nous supposons que pour tout* $\varepsilon>0$, $\exists\,\mathcal{U}$ *voisinage de* t *indépendant de* $\tau\in[a,\sigma(t)]$ *telle que:*

$$\left|L(\sigma(t),\tau)-L(s,\tau)-L^\Delta(t,\tau)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon\,|\sigma(t)-s|,\qquad \forall s\in\mathcal{U},$$

où f^Δ *dénote la dérivée de* f *par rapport à la* $1^{ière}$ *variable alors nous avons:*

$$g(t)=\int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau\Rightarrow g^\Delta(t)=\int_a^t L^\Delta(t,\tau)\,\Delta\tau+L(\sigma(t),\tau),$$

et

$$h(t)=\int_t^b L(t,\tau)\,\Delta\tau\Rightarrow h^\Delta(t)=\int_t^b L^\Delta(t,\tau)\,\Delta\tau-L(\sigma(t),\tau).$$

1.1.9 Dérivation des fonctions à plusieurs variables

Soient $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ deux échelles de temps, σ_1, σ_2 les opérateurs de saut avant par rapport à $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ respectivement et Δ_1, Δ_2 les opérateurs de dérivation. Supposons $a<b$ deux points de $\mathbb{T}_1$, $c<d$ deux points de $\mathbb{T}_2$.

Soit f une fonction à valeurs réelles sur $\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$.

Définition 1.1.14 *On dit que f admet une dérivée partielle $f^{\Delta_1}(s,t)$ au point $(s,t) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ (par rapport à s) si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U_s de s tel que nous avons:*

$$\left| f(\sigma_1(s), t) - f(\alpha, t) - f^{\Delta_1}(s,t)(\sigma_1(s) - \alpha) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma_1(s) - \alpha \right|,$$

pour tout $\alpha \in U_s$.

Définition 1.1.15 *On dit que f admet une dérivée partielle $f^{\Delta_2}(s,t)$ au point $(s,t) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ (par rapport à t) si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U_t de t tel que nous avons:*

$$\left| f(s, \sigma_2(t)) - f(s, \beta) - f^{\Delta_2}(s,t)(\sigma_2(t) - \beta) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma_2(t) - \beta \right|,$$

pour tout $\beta \in U_t$.

1.1.10 La fonction exponentielle

Dans cette section, nous définissons une fonction importante sur une échelle de temps qui généralise la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e_p(., t_0)$.

Définition 1.1.16 *Soit $h > 0$, on définit les nombres complexes de Hilger par :*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h} \right\}$$

et l'axe imaginaire de Hilger

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Pour $h = 0$, on pose par définition $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.17 *On dit que la fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régressive si*

$$1 + \mu(t)\, p(t) \neq 0. \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.1.18 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est définit par:*

$$\Re^+ = \left\{ p \in \Re : 1 + \mu(t)\, p(t) > 0, \ \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k \right\}. \tag{1.6}$$

Définition 1.1.19 *On note l'espace des fonctions* rd*-continues régressives par :*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

On munit cet ensemble de l'addition définie pour tous $p, q \in \mathcal{R}$ par:

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Le groupe $(\mathcal{R}, \oplus)$ est dit groupe régressif. Le conjugué de chaque élément p du groupe $\mathcal{R}$ noté par $\ominus p$ est donné par :

$$\ominus p = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.1.20 *Pour $h \geq 0$, la transformation cylindrique $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ est définie par:*

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \frac{1}{h}\log(1 + zh) & \text{si } h \neq 0, \\ z & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

Définition 1.1.21 *Nous supposons que $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\, y(t), \; y(t_0) = 1, \tag{1.7}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$.

Définition 1.1.22 *Soit $p \in \Re$, la fonction exponentielle est définie comme solution du problème* (1.7) *et nous avons*

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ pour } t, t_0 \in \mathbb{T},$$

nous la notons souvent par

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ pour } t, t_0 \in \mathbb{T},$$

où ξ_μ est la transformation cylindrique donnée par la définition 1.1.20.

Proposition 1.1.2 *Soit $p, q \in \Re$ et $t, t_0, s \in \mathbb{T}$, alors*

★ $e_0(t, t_0) \equiv 1$ et $e_p(t, t) \equiv 1$,

★ $e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t) p(t)) e_p(t, t_0)$,

★ $e_p(t, t_0) e_p(t_0, s) = e_p(t, s)$,

★ $e_p(t, t_0) = \frac{1}{e_p(t_0, t)}$,

★ $e_p(t, t_0) e_q(t, t_0) = e_{p \oplus q}(t, t_0)$ où $(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t) p(t) q(t)$,

★ La fonction $e_p(., s)$ est $\Delta-$différentiable en t et $(e_p(., s))^{\Delta}(t) = p(t) e_p(t, s)$.

Exemple 1.1.11 *Soit* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ *pour* $h > 0$. *Soit* $\alpha \in \mathcal{R}$ *une constante, i.e.*

$$\alpha \in \mathbb{C} - \left\{ -\frac{1}{h} \right\}.$$

Tous les points dans l'échelle de temps $h\mathbb{Z}$ *sont dispersés à droite et nous avons*

$$\begin{aligned} e_\alpha(t, 0) &= \exp\left(\frac{1}{h} \int_0^t \ln(1 + \alpha h) \Delta\tau \right) \\ &= \exp \frac{1}{h} \ln(1 + \alpha h) t \\ &= (1 + \alpha h)^{\frac{t}{h}}. \end{aligned}$$

1.2 Éléments de calcul fractionnaire

1.2.1 Aperçu historique sur la dérivation fractionnaire

Le calcul fractionnaire est un sujet qui n'est pas nouveau. Il généralise la notion de la différentiation et l'intégration d'ordre entier à la différentiation et l'intégration d'ordre non entier. Le sujet est aussi vieux que le calcul différentiel et remonte à l'époque quand **Libniz**, **Gauss, Newton** ont inventé ce type de calcul. A la fin du 19ème siècle où plusieurs mathématiciens, comme par exemple **P.S. Laplace** (1812), **J.B. Fourier** (1822), **N.H. Abel** (1823-1826), **J. Liouville** (1832-1873), **B. Riemann** (1847), **A.K. Grünwald** (1867-1872) et **A.V. Letnikov** (1868-1872) ont contribué à ce sujet. Ces dernières années, il y a eu un développement considérable concernant l'étude des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

De nombreuses définitions ont été alors données sur la dérivation et l'intégration fractionnaire.

Le calcul fractionnaire a plusieurs domaines d'applications, par exemples, en viscoélasticité, théorie du contrôle, équation de diffusion, électricité, biologie, électromagnétiques.

1.2.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions **Gamma, Bêta** et **Mittag-Leffler**. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction **Gamma d'Euler** $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.8}$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la **fonction Gamma** $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

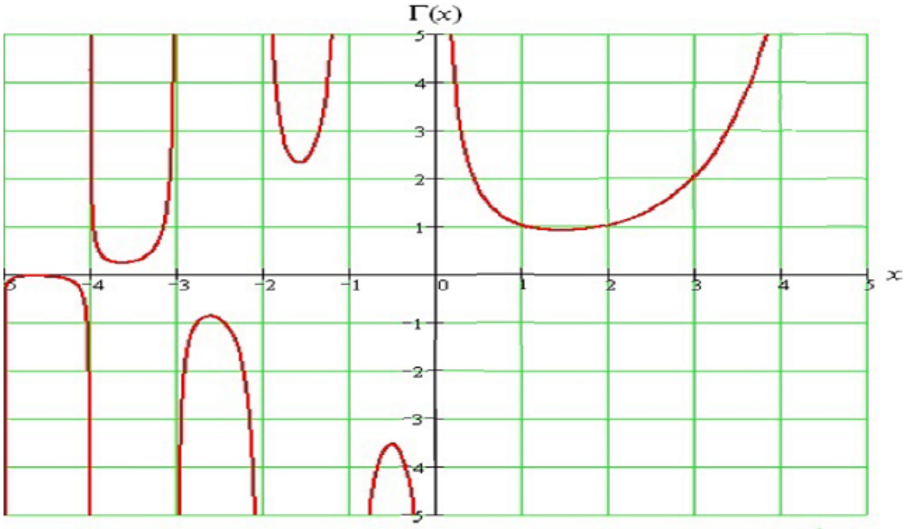
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

Qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z} dt = \left[-e^{-t} t^{z}\right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction **Gamma d'Euler** généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n\,!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le graphe de la fonction Gamma



La fonction Bêta

Définition 1.2.1 *La fonction $B(p,q)$ est la fonction* ***Bêta*** *(ou intégrale eulérienne de première espèce), définie par :*

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1}\, t^{q-1} dx \quad p > 0,\ q > 0. \tag{1.9}$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulérienne de première et seconde espèce :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma\,(p+q)},\ \ Re(p) > 0,\ Re(q) > 0. \tag{1.10}$$

La fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par **G.M. Mittag-Leffler** [44] et [45] désignée par la fonction suivante [29] et [30] :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{1.11}$$

La fonction de **Mittag-Leffler** à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par **Agarwal** [1] et elle est définie par le développement en série suivant [29] et [30]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0)\,. \tag{1.12}$$

Pour $\beta = 1$, $\alpha = 1$ on retrouve la relation (1.11). A partir de la relation (1.12) on montre que

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de **Mittag-Leffler** joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.2.3 Intégrale fractionnaire

Comme la majorité des ouvrages introductifs au calcul fractionnaire, nous allons suivre l'approche de **Riemann** pour proposer une première définition d'intégrale fractionnaire, l'intégrale de **Riemann-Liouville**.

Soit $f \in C([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ notée $(I_a^\alpha f)$ est définie par :

$$(I_a^\alpha f) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \quad (x > a)\,, \tag{1.13}$$

où Γ est la fonction Gamma.

1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L).

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires. Dans cette partie on va présenter la dérivée de **Riemann-Liouville**, elle est la plus utilisée.

Définition 1.2.2 *Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, la dérivée d'ordre α non entier $($avec $n-1 < \alpha < n$; $n \neq 0)$ au sens de* (R-L) *définie par*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left[I^{n-\alpha} f(x)\right], \\ D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.14}$$

où $n = [\alpha] + 1$. *En particulier, si* $\alpha = 0$ *on aura*

$$D_a^0 f(x) = f(x).$$

De plus si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.$$

Exemple 1.2.1 *[Tab.1.3] Quelques exemples d'intégrale fractionnaire au au sens de (R-L) et leurs dérivées .*

$f(x)$	$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x)$	$D_{a^+}^{(\alpha)} f(x)$	*Spécifications*
$(x-a)^\beta$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}$	$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha > 0,\ \beta > -1$
C	$\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha$	$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$	$a \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{\lambda x}$	$\lambda^{+\alpha} e^{\lambda x}$	$a = -\infty,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0$
$e^{-\lambda x}$	$\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda x}$	$\lambda^{\alpha} e^{-\lambda x}$	$a = +\infty, \alpha > 0, \lambda > 0$

1.3 Notions fondamentales de stabilité

La stabilité est une notion vaste dans le monde des mathématiques.

La première étude de stabilité aux échelles de temps a été réalisée en 1992 en utilisant la methode de Lyapunov.

Les définitions de stabilité des systèmes sur les échelles de temps sont obtenues par une légère modification de leurs définitions standard pour les équations différentielles ordinaires.

Choi et al. [24] et **Hamza** [60], **Dacunha** [28] ont donné des caractérisations généralisées des différents types de stabilité (stabilité uniforme, stabilité exponentielle, h-stabilité,...) pour les solutions des systèmes dynamiques sur les échelles de temps.

L'analyse de la stabilité des systèmes linéaires non-autonomes peut complètement être caractérisée en terme de la résolvante du système. En effet, considérons le problème

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t),\ x(t_0) = I_n, \tag{1.15}$$

où $x \in \mathbb{R}^n, t, t_0 \in \mathbb{T}$ et $A : \mathbb{T} \longmapsto \mathrm{R}^{n \times n}$ une matrice rd-continue, régressive, dépend de t.

Définition 1.3.1 *L'application $A : \mathbb{T} \longmapsto M_n(\mathbb{R})$ est appelée régressive, si pour tout $t \in \mathbb{T}$ la matrice carrée $I + \mu(t)A$ de degré $n \times n$ est inversible, où I est la matrice identité.*

La classe de tous les fonctions régressives et rd-continues A de $\mathbb{T}$ vers $M_n(\mathbb{R})$ est notée par $C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$.

Définition 1.3.2 *Pour $t_0 \in \mathbb{T}$, la solution du problème* (1.15) *s'appelle exponentielle de la fonction matricielle, notée par $\phi_A(t, t_0)$, où $A \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$.*

En conséquence, la fonction $\phi_A(t, t_0)$ possède les deux propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \phi_A^{\Delta}(t, t_0) &= A(t)\phi_A(t, t_0), \qquad (1.16)\\ \phi_A(t_0, t_0) &= I_n. \end{aligned}$$

Cette fonction matricielle est appelée matrice de transition et notre hypothèse sur $A(t)$ montre que la matrice de transition existe et elle est unique.

Théorème 1.3.1 *Supposons $r, s, t \in \mathbb{T}$ et $A, B \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}; M_n(\mathbb{R}))$, alors la matrice de transition possède les propriétés suivantes:*

- ♣ $\phi_A(t, r)\phi_A(r, s) = \phi_A(t, s)$;
- ♣ $\phi_A(\sigma(t), s) = (I + \mu(t)A(t))\phi_A(t, s)$;
- ♣ si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et A est constante, alors $\phi_A(t, s) = e_A(t, s) = e^{A(t-s)}$;
- ♣ si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, avec $h > 0$ et A est constante, alors $\phi_A(t, s) = (I + hA)^{\frac{(t-s)}{h}}$.

Définition 1.3.3 *Le système dynamique (1.15) est dit uniformément stable si, pour tout $t \in \mathbb{T}$ et pour tout $\gamma > 0$, tel que*

$$\|\phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma, \ \textit{pour tout } t \geq t_0, t \in \mathbb{T}. \qquad (1.17)$$

Définition 1.3.4 *Le système dynamique (1.15) est dit exponentiellement stable s'il existe $\lambda > 0$ avec $-\lambda \in \mathcal{R}^+$ tel que pour tout $t \in \mathbb{T}$, il existe $\gamma \geq 1$ indépendant de tout point initial t_0 tel que*

$$\|\phi_A(t,t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0), \text{ pour tout } t \geq t_0, t \in \mathbb{T}. \tag{1.18}$$

1.4 Quelques inégalités importantes

Dans cette section nous donnons un petit rappel de quelques classes de fonctions, ainsi que quelques inégalités utiles à notre étude.

Définition 1.4.1 *Soit $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+, w$ est dite de classe $\widehat{\mathcal{H}}$, si elle vérifie les conditions suivantes*

(H_1) $w(u)$ est fonction croissante et continue pour $u \geq 0$ et positive pour $u > 0$,

(H_2) il existe une fonction continue ϕ sur $\mathbb{R}^+$ avec $w(\alpha u) \leq \phi(\alpha) w(u)$ pour $\alpha > 0$, $u \geq 0$,

(H_3) $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{w(u)}{u}$ existe.

Définition 1.4.2 ([27]) *Soit g une fonction continue positive et croissante définie sur $\mathbb{R}_+$, g est dite de classe $\mathcal{S}$, si elle vérifie*

$$\frac{1}{a} g(x) \leq g(\frac{x}{a}) \text{ pour tout } x \geq 0 \text{ et } a \geq 1.$$

Lemme 1.4.1 ([36]) *Supposons $a \geq 0$, $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$, nous avons*

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} a + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}.$$

pour tout $K > 0$.

Lemme 1.4.2 ([52]) *(l'inégalité de Jensen). Pour $x, y \in R_+$. Alors:*

$$(A_1 + A_2 + ...A_n)^r \leq n^{r-1}(A_1^r + A_2^r + ...A_n^r)$$

$$\text{pour } A_i \geq 0 \ (i = 1, 2, .., n) \text{ et } r \geq 1.$$

Lemme 1.4.3 ([5]) *(Comparaison) : On suppose que $x, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^{+}$. Si*

$$x^{\Delta}(t) \leq a(t)\,x(t) + b(t)\,,\ t \geq t_0,\ t \in \mathbb{T}^k.$$

Alors,

$$x(t) \leq x(t_0)\,e_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t, \sigma(s))\,b(s)\,\Delta s, t \geq t_0,\ t \in \mathbb{T}^k.$$

Lemme 1.4.4 ([12]) *Soient $a \in \mathbb{T}$, ϕ, φ, α, $\Psi \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$. Si*

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \Psi(t)\int_a^t \alpha(s)\varphi(s)\Delta s,$$

Alors,

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \Psi(t)\int_a^t \alpha(s)\varphi(s) + \exp\left[\int_{\sigma(s)}^{t} \alpha(\tau)\Psi(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s,\ \textit{pour tout}\ t \in \mathbb{T}_a^{+}.$$

Lemme 1.4.5 ([12]) *Supposons que $t_0 \in \mathbb{T}$. Si U, δ, $\vartheta \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ et δ est une fonction delta-différentiable sur $\mathbb{T}$ avec $\delta^{\Delta}(t) \geq 0$. Si U satisfait*

$$U(t) \leq \delta(t) + \int_{t_0}^{t} \vartheta(s)U(s)\Delta s,\ t \in \mathbb{T}^k,$$

alors, nous avons

$$U(t) \leq \delta(t_0)e_{\vartheta}(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \delta^{\Delta}(s)e_{\vartheta}(t, \sigma(s))\Delta s,\ t \in \mathbb{T}^k.$$

Lemme 1.4.6 ([58]) (page 296)*Soient α, β, γ et p des constantes positives. Alors*

$$\int_0^t (t^{\alpha} - s^{\alpha})^{p(\beta-1)}\, s^{p(\gamma-1)} ds = \frac{t^{\theta}}{\alpha} B\left[\frac{p(\gamma-1)}{\alpha}, p(\beta-1)+1\right],\ t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$\begin{aligned} B[\zeta, \eta] &= \int_0^1 s^{\zeta-1}(1-s)^{\eta-1}\, ds \qquad (\Re\zeta > 0, \Re\eta > 0)\,, \\ \theta &= p\left[\alpha(\beta-1) + \gamma - 1\right] + 1. \end{aligned}$$

Lemme 1.4.7 ([64]) *Soient $\alpha > 0, a(t), b(t), u(t)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Si*

$$D_t^{\alpha} u(t) \leq a(t) + b(t)u(t),$$

alors,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u(0)\exp\left\{\int_0^{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \left(s\Gamma(1+\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) ds\right\} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} a(\tau) \\ &\quad \times \exp\left\{-\int_{\Gamma(1+\alpha)}^{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} b\left(s\Gamma\left(1+\alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}) ds\right\} d\tau. \end{aligned}$$

Lemme 1.4.8 ([52]) (*page* 329)*Soient* $u(x,y)$, $p(x,y)$, $q(x,y)$ *et* $k(x,y)$ *des fonctions continues, positives et définies pour tout* $x, y \in \mathbb{R}_+$. *Si*

$$u(x,y) \leq p(x,y) + q(x,y)\int_0^x \int_0^y k(s,t)u(s,t)dsdt,$$

alors,

$$u(x,y) \leq p(x,y) + q(x,y)\left(\int_0^x \int_0^y k(s,t)p(s,t)dsdt\right)\exp\left(\int_0^x \int_0^y k(s,t)q(s,t)dsdt\right).$$

CHAPITRE 2

Inégalités intégrales fractionnaires

Les inégalités intégrales jouent un rôle fondamental dans la théorie des équations différentielles et des sciences appliquées. En outre, l'étude des inégalités de type fractionnaire est également d'une grande importance dans la théorie des probabilités, pour plus d'informations et des applications [4]. Dans les dernières années, de nombreux auteurs ont étudié les inégalités fractionnaire à l'aide de l'intégral de Riemann-Liouville, l'intégral de Caputo et l'intégrale q-fractionnaire.

Dans la première partie de ce chapitre, nous commençons par citer quelques résultats classiques de type Gronwall-Bellman, puis nous établissons de nouvelles généralisations concernant les inégalités intégrale fractionnaire en dimension une.

Dans la deuxième partie, nous donnerons des nouvelles généralisations concernant les inégalités fractionnaire en dimension deux et nous concluons ce chapitre par des exemples illustratifs des nouveaux résultats.

2.1 Quelques célèbres inégalités intégrales de type Gronwall unidimensionnelles

En 1943, **Bellman** généralisa le résultat de **Gronwall** dans le cas où b est une fonction qui dépend de la variable t, son résultat fut le suivant :

Théorème 2.1.1 ([8]) *Soient u et g deux fonctions continues non négatives sur $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ et $c \geq 0$. Si*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} g(s)u(s)ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds\right), \ t \in I.$$

En 1956, **Bihari** prouva une inégalité encore plus générale que celles de **Gronwall** et de **Bellman**, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 2.1.2 ([11]) *Soient u, f deux fonctions continues non négatives sur $[0, +\infty[$, w une fonction croissante et continue sur $[0, +\infty[$, vérifiant $w(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et c une constante positive. Si*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)w\left(u\left(s\right)\right)ds,$$

est satisfaite pour tout $t \geq 0$, alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G\left(c\right) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) \quad pour\ tout \ \ 0 \leq t \leq T,$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{w(s)}ds, \ t > t_0 > 0,$$

G^{-1} est la fonction inverse de G, T est choisi de telle sorte que

$$\left\{G\left(c\right)+\int_{t_0}^{t}f(s)ds\right\}\in DomG^{-1} \textit{ pour tout } 0\leq t\leq T.$$

En 1958, **Bellman** établissait une autre variante du Théorème 2.1.1 comme suit:

Théorème 2.1.3 ([9]) *Soient u et g deux fonctions continues et non négatives sur $I=[\alpha,\beta]$ et soit $n(t)$ une fonction continue, positive et non décroissante définie sur I. Si l'inégalité*

$$u(t)\leq n(t)+\int_{\alpha}^{t}g(s)u(s)ds,\ t\in I,$$

est satisfaite, alors

$$u(t)\leq n(t)\exp(\int_{\alpha}^{t}g(s)ds),\ t\in I.$$

En 1967*, **Chu et Metcalf** ont établi une variante de l'inégalité de **Gronwall-Bellman** dans le cas où la fonction g dépendra du parmaètre t (i.e $g(s)=k(t,s)$), dont l'énoncé est le suivant:*

Théorème 2.1.4 ([25]) *Soient u et f deux fonctions continues et positives sur $I=[\alpha,\beta]$ et $k(t,s)$ une fonction continue et positive sur le triangle $\Delta:\alpha\leq s\leq t\leq\beta$. Si l'inégalité*

$$u(t)\leq f(t)+\int_{\alpha}^{t}k(t,s)u(s)ds,$$

alors,

$$u(t)\leq f(t)+\int_{\alpha}^{t}H(t,s)f(s)ds,\ t\in I,$$

où

$$H(t,s)=\sum_{t=1}^{\infty}k_i(t,s),\ (t,s)\in\Delta,$$

est le noyau resolvant.

En 1969, **Gollwitzer** a étendu le résultat du Théorème 2.1.3 comme suit :

Théorème 2.1.5 ([34]) *Soient* u, f, g *et* h *des fonctions continues et non négatives sur* $I = [\alpha, \beta]$. *Si l'inégalité*

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_{\alpha}^{t} h(s)u(s)ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_{\alpha}^{t} h(s)f(s)\exp(\int_{s}^{t} h(\sigma)g(\sigma)d\sigma)ds, \ t \in I.$$

I. Györi, établi en 1971 une variante de Théorème 2.1.5.

Théorème 2.1.6 ([35]) *Soient* u *et* β *deux fonctions continues et non négatives sur* $I = [t_0, \infty)$, *et soient* f, g *et* α *des fonctions différentiables avec* f *non négative,* g *positive et non décroissante et* α *non négative et non croissante. Supposons que*

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_{t_0}^{t} \beta(s)g\left(u(s)\right)ds,$$

Si

$$f'(t)\left\{\frac{1}{g\left(\eta\left(t\right)\right)} - 1\right\} \leq 0, \ sur \ I,$$

pour toute fonction continue et non négative $\eta(t)$, *alors*

$$u(t) \leq G^{-1}\left\{G\left(f(t_0)\right) + \int_{t_0}^{t} \left[\alpha(s)\beta(s) + f'(s)\right]ds\right\},$$

où G *est solution de l'équation intégrale suivante*

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(s)}ds, \quad t > t_0 > 0,$$

G^{-1} *est la fonction inverse de* G,

$$\left\{G\left(f(t_0)\right) + \int_{t_0}^{t} \left[\alpha(s)\beta(s) + f'(s)\right]ds\right\} \in DomG^{-1}.$$

2.2 Quelques inégalités intégrales de type Gronwall à noyau unidimensionnelles

En 1987 **Norbury et Stuart** ont établi une variante de l'inégalité de **Gronwall-Bellman** (Théorème 2.1.1) dans le cas où la fonction g dépendra du paramètre t (i.e. $g(s) = k(t, s)$), dont l'énoncé est le suivant:

Théorème 2.2.1 ([51]) *Soient $u(t)$ et $k(t, s)$ définies comme dans le Théorème 2.1.4 telle que $k(t, s)$ est croissante par rapport à t pour tout $s \in I$.*

i) Si l'inégalité

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} k(t, s)u(s)ds,$$

est satisfaite pour toute constante $c \geq 0$, alors

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_{\alpha}^{t} k(t, s)ds\right), \ t \in I.$$

ii) Soit $n(t)$ une fonction continue, positive et croissante pour tout $t \in I$. Si l'inégalité

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} k(t, s)u(s)ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq n(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} k(t, s)ds\right), \ t \in I.$$

Pachpatte a établi une version plus générale du théorème précédent comme suit :

Théorème 2.2.2 ([52]) *Soient u, p, q, r et f des fonctions continues et non négatives définies sur $I = [\alpha, \beta]$ et soit $k(t, s)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial s}k(t, s)$ deux fonctions positives et continues, pour $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq p(t) + q(t) \int_{\alpha}^{t} k(t, s) [r(s)u(s) + f(s)] ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq p(t) + q(t) \left(\int_{\alpha}^{t} B(\sigma)(\exp \int_{\sigma}^{t} A(\tau)d\tau)d\sigma \right),$$

où

$$A(t) = k(t,t)r(t)q(t) + \int_{\alpha}^{t} \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)r(s)q(s)ds,$$

et

$$B(t) = k(t,t)\left[r(t)p(t) + f(t)\right] + \int_{\alpha}^{t} \frac{\partial}{\partial t}k(t,s)\left[r(s)p(s) + f(s)\right]ds.$$

En 2000, **Pachpatte** a aussi établi une seconde généralisation du théorème précédent comme suit :

Théorème 2.2.3 ([57]) *Supposons que les hypothèses du Théorème précédent sont vérifiées. Soit, $k(t,s)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial s}k(t,s)$ deux fonctions positives et continues, pour $0 \leq s \leq t \leq \infty$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{0}^{t} k(t,s)\left[g(s)u^p(s) + h(s)u(s)\right]ds,$$

est satisfaite pour $p > 1$, alors nous avons

$$u(t) \leq \left\{ a(t) + b(t) \int_{0}^{t} A(\sigma)(\exp \int_{\sigma}^{t} B(\tau)d\tau)d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\begin{aligned} A(t) &= k(t,t)\left\{g(t)a(t) + h(t)\left[\tfrac{a(t)}{p} + \tfrac{p-1}{p}\right]\right\} \\ &\quad + \int_{0}^{t} \frac{\partial}{\partial s}k(t,s)\left\{g(s)a(s) + h(s)\left[\tfrac{a(s)}{p} + \tfrac{p-1}{p}\right]\right\}ds, \end{aligned}$$

et

$$B(t) = K(t,t)b(t)\left[g(t) + \tfrac{h(t)}{p}\right] + \int_{0}^{t} \frac{\partial}{\partial s}k(t,s)b(s)\left[g(s) + \tfrac{h(s)}{p}\right]ds.$$

Ye et al. a présenté une nouvelle inégalité de type **Gronwall-Bellman** dans le théorème suivant:

Théorème 2.2.4 ([63]) *Supposons que $u(t), a(t)$ sont des fonctions positives et localement intégrables sur $0 \leq t \leq T$ (avec $T \leq \infty$) et $g(t)$ une fonction positive, croissante et continue sur $0 \leq t \leq T$, $g(t) \leq M$ (constante), Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + g(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} u(s) ds,$$

est satisfaite, où β est une constante telle que $\beta > 0$. Alors

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(g(t)\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} a(s) \right] ds, \ 0 \leq t < T.$$

Q. Feng et F. Meng [31] ont établi une généralisation du Théorème 2.2.4 comme suit

Théorème 2.2.5 ([31]) *Supposons que $u(t), a(t)$, $h(t)$ sont des fonctions positives et localement intégrables sur $[0, X)$, telles que $h(x)$ est une fonction croissante bornée par M. Si*

$$u^p(x) \leq a(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} h(x) \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} L(t, u(t)) dt, \ 0 \leq x < X,$$

où $M > 0, \alpha > 0, p \geq 1$ sont des constantes et $L, T \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+)$ satisfaisant

$$0 \leq L(t,, u) - L(t, v) \leq T(x-y), \ pour\ u \geq v \geq 0$$

alors, nous avons

$$u(x) \leq \left\{ \widetilde{a}(x) + \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{p} K^{\frac{1-p}{p}} \right) \frac{h^n(x)}{\Gamma(n\alpha)} (x-t)^{n\alpha-1} \widetilde{a}(t) \right] dt \right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\widetilde{a}(x) = a(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} h(x) \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} L\left(t, \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}\right) dt, \ K > 0.$$

Un autre résultat prouvé par **Q. Feng et F. Meng** est le suivant :

Théorème 2.2.6 ([31]) *On suppose que les hypothèses du Théorème 2.2.5 sont vérifiées. Soit b une fonction positive localement intégrable sur $[0, X)$, $a(t)$ une fonction croissante. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq a(x) + \int_0^x b(t)u^q(t)dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}h(x)\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} L(t, u(t))\, dt,$$

est satisfaite alors,

$$u(x) \leq \exp\left(\frac{q}{p^2}K^{\frac{q-p}{p}}\int_0^x b(t)dt\right)\left\{\widehat{a}(x) + \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{p}K^{\frac{1-p}{p}}\right)^n \frac{\widehat{h}^n(x)}{\Gamma(n\alpha)}(x-t)^{n\alpha-1}\widehat{a}(t)\right]dt\right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\begin{aligned}
\widehat{a}(x) &= a(x) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\int_0^x b(t)dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}h(x)\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} L\left(t, \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)dt,\\
\widehat{h}(x) &= \exp\left(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}\int_0^x b(t)dt\right)h(x).
\end{aligned}$$

B. Zheng and Q. Feng, *a établi aussi une nouvelle généralisation du Théorème 2.2.4 comme suit :*

Théorème 2.2.7 ([64]) *Soient u, a, b, g, h des fonctions positives continue telles que $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions croissantes et $\alpha > 0$, $p \geq q > 0, p \geq r > 0$ sont des constantes. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + \frac{b(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[g(s)u^q(s) + \int_0^s h(\xi)u^r(\xi)\, d\zeta\right]ds,$$

est satisfaite alors, nous avons

$$\begin{aligned}
u(t) \leq &\left\{a(t)b(t)\times\exp\left[\int_0^{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} H_2\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right] + \frac{b(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}H_1(\tau)\right.\\
&\left.\times\exp\left[-b(t)\int_{\frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} H_2\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right]d\tau\right\}^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= g(t)\left(\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right) + \int_0^t h(\xi)\left(\frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)d\zeta,\\
H_2(t) &= g(t)\frac{q}{p}K^{\frac{(q-p)}{p}} + \int_0^t h(\zeta)\frac{r}{p}K^{\frac{(r-p)}{p}}d\zeta.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *Si nous prenons $g(t) = 1, h(t) = 0$ et $p = q = 1$ alors l'inégalité donnée dans le Théorème 2.2.7 se réduit à l'inégalité de* **Ye et al.** *donnée dans le Théorème 2.2.4.*

Théorème 2.2.8 ([64]) *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.2.7 sont vérifiées et soit ω une fonction continue, croissante et positive, vérifiant $\omega > 0$ pour tout $r > 0$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \frac{b(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)\omega(u(s))\,ds,\ t \geq 0$$

est satisfaite pour tout $t \geq 0$, alors+–

$$u(t) \leq G^{-1}\left[G(a(t)) + \frac{b(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)\,d\tau\right],\ t \geq 0,$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(v) = \int_0^v \left(\frac{1}{\omega(r)}\right) dr, \qquad G(v) < \infty.$$

Théorème 2.2.9 ([64]) *On suppose que les hypothèses du Théorème 2.2.7 sont vérifiées. Soit m une fonction continue, croissante et positive sur $t \geq 0$, w est définie comme dans le Théorème 2.2.8, de plus nous supposons qu'elle est sous multiplicative, vérifiant $w(\alpha\beta) \leq w(\alpha)\,w(\beta)$, $\alpha, \beta \geq 0$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t m(s)u(s)ds + \frac{b(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)w((u(s)))\,ds,$$

est satisfaite, alors nous avons

$$u(t) \leq G^{-1}\left[G(a(t)) + b(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)\exp\left(\int_0^\tau m(\zeta)\,d\xi\right) d\tau\right],$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(v) = \int_0^v \left(\frac{1}{w(r)}\right) dr,\ G(v) < \infty \quad pour\ v < \infty.$$

Q. Ma et J. Pečarić, ont établi les inégalités intégrales faiblement singulières type **Gronwall-Bellman**, cités par les théorèmes suivants

Théorème 2.2.10 ([46]) *Soient u, a, b et f des fonctions continues et positives pour $t \in \mathbb{R}_+$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t^\alpha - s^\alpha)\, s^{\gamma-1} f(s) u^q(s)ds,\ t \in R_+,$$

est satisfaite pour $p \geq q \geq 0$, alors:

(*i*) Si $[\alpha,\beta,\gamma]\in I$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \left\{a(t)+M_1^{\beta}t^{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}b(t)\left[\mathcal{A}_1^{1-\beta}(t)+K^{\frac{q-p}{p}}M_1^{\beta}\left[1-(1-V_1(t))^{1-\beta}\right]^{-1}\right.\right.\\ &\times \left.\left.\left(\int_0^t s^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}{1-\beta}}f^{\frac{1}{1-\beta}}(s)b^{\frac{1}{1-\beta}}(s)\mathcal{A}_1(s)V_1(s)\,ds\right)^{1-\beta}\right]\right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\alpha}B\left[\frac{\beta+\gamma-1}{\alpha\beta},\frac{2\beta-1}{\beta}\right],\quad A(t)=\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a(t)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}},\\ \mathcal{A}_1(t) &= \int_0^t f^{\frac{1}{1-\beta}}(s)A^{\frac{1}{1-\beta}}(s)ds, \end{aligned}$$

et

$$V_1(t)=\exp\left(-K^{\frac{p-q}{p(1-\beta)}}M_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}\int_0^t s^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}{1-\beta}}f^{\frac{1}{1-\beta}}(s)b^{\frac{1}{1-\beta}}(s)ds\right),$$

(*ii*) Si $[\alpha,\beta,\gamma]\in II$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \left\{a(t)+M_2^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}}t^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{1+4\beta}}b(t)\left[\mathcal{A}_2^{\frac{\beta}{1+4\beta}}(t)+K^{\frac{q-p}{p}}M_2^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}}\left[1-(1-V_1(t))^{\frac{\beta}{1+4\beta}}\right]^{-1}\right.\right.\\ &\times \left.\left.\left(\int_0^t s^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{\beta}}f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)\mathcal{A}_2(s)V_2(s)\,ds\right)^{\frac{\beta}{1+4\beta}}\right]\right\}^{\frac{1}{P}}, \end{aligned}$$

où

$$M_2=\frac{1}{\alpha}B\left[\frac{\gamma(1+4\beta)-\beta}{\alpha(1+3\beta)},\frac{4\beta^2}{1+3\beta}\right],\ \mathcal{A}_2(t)=\int_0^t f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)A^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)ds,$$

et

$$V_2=\exp\left(-K^{\frac{(q-p)(1+4\beta)}{p\beta}}M_2^{\frac{1+3\beta}{\beta}}\int_0^t s^{\frac{[\alpha(\beta-1)+\gamma](1+4\beta)-\beta}{\beta}}f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s)ds\right).$$

Corollaire 2.2.1 ([46]) *Supposons que u,a,b et f définies comme dans le théorème 2.2.10. Si l'inégalité*

$$u(t)\leq a(t)+b(t)\int_0^t(t-s)^{\beta-1}f(s)u(s),\ t\in R_+,$$

est satisfaite, alors

(i) Si $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &\leq a(t) + M_{11}^{\beta} t^{2\beta-1} b(t) \left[\mathcal{A}_{11}^{1-\beta}(t) + \frac{M_{11}^{\beta}}{1-\beta} V_{11}^{-1}(t) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t s^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) b^{\frac{1}{1-\beta}}(s) \mathcal{A}_{11}(s) V_{11}(s)\, ds \right], \end{aligned}$$

où

$$M_{11} = B\left[1, \frac{2\beta-1}{\beta}\right], \quad \mathcal{A}_{11}(t) = \int_0^t f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) a^{\frac{1}{1-\beta}}(s) ds,$$

et

$$V_{11}(t) = \exp\left(-M_{11}^{\frac{\beta}{1-\beta}} \int_0^t s^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} f^{\frac{1}{1-\beta}}(s) b^{\frac{1}{1-\beta}}(s) ds \right).$$

(ii) Si $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &\leq a(t) + M_{12}^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} t^{4\beta} b(t) \left[\mathcal{A}_{12}^{\frac{\beta}{1+4\beta}}(t) + \frac{1+4\beta}{\beta} M_{12}^{\frac{1+3\beta}{1+4\beta}} V_{12}^{-1}(t) \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t s^{4\beta} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) \mathcal{A}_{12}(s) V_{12}(s)\, ds \right], \end{aligned}$$

où

$$M_{12} = B\left[1, \frac{4\beta^2}{1+3\beta}\right], \quad \mathcal{A}_{12}(t) = \int_0^t f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) a^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) ds,$$

et

$$V_{12} = \exp\left(-M_{12}^{\frac{1+3\beta}{\beta}} M_2 \int_0^t s^{4\beta} f^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) b^{\frac{1+4\beta}{\beta}}(s) ds \right),$$

Pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 2.2.11 ([49]) *Soient $u(t), h(t)$ des fonctions positives, localement intégrable sur $[0, X)$ avec $X \leq +\infty$. Soit $\phi(x)$ une fonction positive , continue et croissante sur $[0, X)$, vérifiant $\phi(x) \leq M$ où $M \in \mathbb{R}^+$. Si l'inégalité*

$$u(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u(\rho)\, d\rho,$$

est satisfaite, où $k, \lambda \in \mathbb{R}^+$, alors

$$u(x) \leq h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{k\phi(x)\Gamma_k(\lambda)\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_0^x (x-\rho)^{n\frac{\lambda}{k}-1} h(\rho) d\rho.$$

Théorème 2.2.12 ([49]) *Soient* $u(t), h(t)$ *des fonctions positives, localement intégrable sur* $[1, X)$ *avec* $X \leq +\infty$. *Soit* $\phi(x)$ *une fonction positive , continue et croissante sur* $[0, X)$, *vérifiant* $\phi(x) \leq M$ *où* $M \in \mathbb{R}^{+}$. *Si l'inégalité*

$$u(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_{0}^{x} \left(\ln \frac{x}{\rho} \right)^{\frac{\lambda}{k}-1} u(\rho)\, d\rho,$$

est satisfaite, où $k, \lambda \in \mathbb{R}^{+}$, *alors*

$$u(x) \leq h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{k\phi(x)\Gamma_k(\lambda)\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_{0}^{x} \left(\ln \frac{x}{\rho} \right)^{n\frac{\lambda}{k}-1} h(\rho) d\rho.$$

2.3 Quelques célèbres inégalités intégrales de type Gronwall bidimensionnelles

L'analogue de l'inégalité de **Gronwall** pour les fonctions à deux variables dite aussi l'inégalité de **Wendroff** est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 ([3]) *Soient* $u(x, y), c(x, y)$ *deux fonctions positives et continues définies pour* $x, y \in \mathbb{R}^{+}$, $a(x)$, $b(y)$ *deux fonctions strictement positives, continues et croissantes sur* $\mathbb{R}^{+}$. *Si l'inégalité*

$$u(x, y) \leq a(x) + b(y) + \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} c(t, s) u(t, s) dt ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(x, y) \leq E(x, y) \exp \left(\int_{0}^{x} \int_{0}^{y} c(t, s) dt ds \right),$$

où

$$E(x, y) = \frac{[a(x) + b(0)]\,[a(0) + b(y)]}{a(0) + b(0)}.$$

T. Nurimov, donna une version plus générale du théorème précédent dont l'énoncé est le suivant:

Théorème 2.3.2 ([50]) *Soient $u(x,y), a(x,y), b(x,y)$ et $c(x,y)$ des fonctions positives et continues définies sur $D = [0,x_0] \times [0,y_0]$. Si l'inégalité*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y c(t,s)u(t,s)dtds,$$

est satisfaite, alors

$$\begin{aligned} u(x,y) \quad \leq \quad & a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y \left[\exp \left(\int_\tau^x \int_\eta^y c(t,s)b(t,s)dtds \right) \right. \\ & \left. \times a(\tau,\eta)c(\tau,\eta) \right] d\tau d\eta. \end{aligned}$$

La version du Théorème 2.1.2 de **Bihari** pour les fonctions à deux variables fût élaborée par **Bainov** et **Simeonov** comme suit

Théorème 2.3.3 ([3]) *Soient $I = [0,a]$, $J = [0,b]$, où $a, b \leq \infty$. Soient $c \geq 0$, $\varphi \in [0,\infty) \times [0,\infty)$ une fonction non décroissante vérifiant $\varphi(r) > 0$ pour $r > 0$, u et $f \in C(I \times J, [0,\infty))$. Si*

$$u(x,y) \leq c + \int_0^x \int_0^y f(t,s)\varphi(u(t,s))\, dtds,$$

est satisfaite, alors

$$u(x,y) \leq \Phi^{-1} \left[\Phi(c) + \int_0^x \int_0^y f(t,s)dtds \right],$$

pour tout $(x,y) \in [0,x_1] \times [0,y_1]$, où

$$\Phi(r) = \int_1^r \frac{1}{\varphi(s)} ds, \ r > 0,$$

Φ^{-1} est l'inverse de Φ, $(x_1,y_1) \in I \times J$ est choisi de telle sorte que

$$\left\{ \Phi(c) + \int_0^x \int_0^y f(t,s)dtds \right\} \in Dom\left(\Phi^{-1}\right).$$

Pachpatte a généralisé le résultat de **Bainov** et **Simeonov** en remplaçont la fonction $f(t,s)$ par $k(x,y,s,t)$

Théorème 2.3.4 ([56]) *Soient $u(x,y)$ et $a(x,y)$ deux fonctions strictement positives continues définie sur $\mathbb{R}_+^2$, $k(x,y,s,t)$, $D_1k(x,y,s,t)$, $D_1k(x,y,s,t)$ et $D_1D_2k(x,y,s,t) \in C(G_2,\mathbb{R}_+)$ et c une constante non négative où $G_2 = \{(x,y,s,t) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq s \leq x < \infty$ et $0 \leq t \leq y < \infty\}$*

(b_1) Soit $g(u)$ une fonction continue différentiable vérifiant pour $u \geq 0$, $g(u) > 0$ de plus $g'(u) \geq 0$ pour tout $u \geq 0$ et soit $G(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{ds}{g(s)}$, $r > 0$, G^{-1} l'inverse de G. Si

$$u(x,y) \leq c + \int\limits_0^x \int\limits_0^y k(x,y,s,t) g(u(s,t))\, dtds,$$

est satisfaite pour tout $x,y \in \mathbb{R}_+$, alors pour $0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_1$, $x, x_1, y, y_1 \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$u(x,y) \leq G^{-1}\left[G(c) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y P(s,t) dtds\right],$$

où

$$\begin{aligned} P(x,y) &= k(x,y,x,y) + \int\limits_0^x D_1k(x,y,\sigma,y) d\sigma + \int\limits_0^y D_2k(x,y,x,\tau) d\tau \\ &\quad + \int\limits_0^x \int\limits_0^y D_1D_2k(x,y,\sigma,\tau) d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

pour $x,y \in \mathbb{R}_+$ et $x_1, y_1 \in \mathbb{R}_+$ sont choisis de telle sorte que

$$G(c) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y P(s,t) dtds \in Dom\left(G^{-1}\right),$$

pour tout x,y dans $[0,x_1], [0,y_1]$ respectivement.

(b_2) Soient g, G et G^{-1} des fonctions définies comme dans (b_1), supposons que g est sous additive. Si

$$u(x,y) \leq a(x,y) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y k(x,y,s,t) g(u(s,t))\, dtds,$$

est satisfaite pour tout $x,y \in \mathbb{R}_+$, alors pour $0 \leq x \leq x_2$, $0 \leq y \leq y_2$, $x, x_2, y, y_2 \in \mathbb{R}_+$, on a

$$u(x,y) \leq a(x,y) + G^{-1}\left[G(E(x,y)) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y P(s,t) dtds\right],$$

où P est définie comme dans (b_1), et

$$E(x,y) = \int_0^x \int_0^y k(x,y,s,t) g(a(s,t))\, dtds,$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$ et $x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$ dont x_2, y_2 sont choisis de telle sorte que

$$G(E(x,y)) + \int_0^x \int_0^y P(s,t) dtds \in Dom\left(G^{-1}\right).$$

pour tout x, y dans $[0, x_2], [0, y_2]$ respectivement.

W. Cheung et al., ont établi une forme plus générale d'inégalité intégrale faiblement singulière non linéaire de type Wendroff , comme suit :

Théorème 2.3.5 ([20]) *Soient $u(x,y), a(x,y), b(x,y$ et $f(x,y)$des fonctions positives et continues définies sur $D = [0,T) \times [0,T)\,(0 < T \leq \infty)$. Si l'inégalité*

$$u^p(x,y) \leq a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y (x^\alpha - s^\alpha)^{\beta-1} s^{\gamma-1} (y^\alpha - t^\alpha)^{\beta-1} t^{\gamma-1} f(s,t) u^q(s,t) dsdt,$$

est satisfaite, où $p \geq q > 0$ sont des constantes.

Alors , si $[\alpha, \beta, \gamma] \in I$, on a

$$\begin{aligned} u(x,y) \quad \leq \quad & \Bigg\{ a(x,y) + \Bigg[P_1 x, y) + Q_1(x,y) \left(\int_0^x \int_0^y f^{\frac{1}{(1-\beta)}}(s,t) P_1(s,t) dsdt \right) \\ & \times \exp\left(\int_0^x \int_0^y f^{\frac{1}{(1-\beta)}}(s,t) Q_1(s,t) dsdt \right) \Bigg]^{1-\beta} \Bigg\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

pour $(x,y) \in D$, où

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\alpha} B\left[\frac{\beta+\gamma-1}{\alpha\beta}, \frac{2\beta-1}{\beta} \right], \\ A(x,y) &= \frac{q}{p} K^{\frac{(q-p)}{p}} a(x,y) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}, \\ \mathcal{A}_1(x,y) &= \int_0^x \int_0^y f^{\frac{1}{(1-\beta)}}(s,t) A^{\frac{1}{(1-\beta)}}(s,t) dsdt, \\ P_1(x,y) &= 2^{\frac{\beta}{(\beta-1)}} M_1^{\frac{2\beta}{(1-\beta)}} (xy)^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}{(1-\beta)}} \mathcal{A}_1(x,y)\, b^{\frac{1}{(1-\beta)}}(x,y), \\ Q_1(x,y) &= 2^{\frac{\beta}{(\beta-1)}} K^{\frac{q-p}{p(1-\beta)}} M_1^{\frac{2\beta}{(1-\beta)}} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{(1-\beta)}} (xy)^{\frac{(\alpha+1)(\beta-1)+\gamma}{(1-\beta)}} b^{\frac{1}{1-\beta}}(x,y). \end{aligned}$$

Si $[\alpha,\beta,\gamma]\in II$, *on a*

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq \left\{ a(x,y)+\left[P_2(x,y)+Q_2(x,y)\left(\int_0^x\int_0^y f^{\frac{(1+4\beta)}{\beta}}(s,t)\,P_2(s,t)dsdt\right)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\times\exp\left(\int_0^x\int_0^y f^{\frac{(1+4\beta)}{\beta}}(s,t)Q_2(s,t)dsdt\right)\right]^{\frac{\beta}{(1+\beta)}}\right\}^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

pour $(x,y)\in D$, *où*

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{\alpha}B\left[\frac{\gamma(1+4\beta)-\beta}{\alpha(1+3\beta)},\frac{4\beta^2}{1+3\beta}\right], \\ \mathcal{A}_2(x,y) &= \int_0^x\int_0^y f^{\frac{(1+4\beta)}{\beta}}(s,t)A^{\frac{(1+4\beta)}{\beta}}(s,t)dsdt, \\ P_2(x,y) &= 2^{\frac{(1+3\beta)}{\beta}}M_2^{\frac{2(1+3\beta)}{\beta}}(xy)^{(1+4\beta)[\alpha(\beta-1)+\gamma)-\beta]/\beta}\mathcal{A}_2(x,y)\,b^{(1+4\beta)/\beta}(x,y), \\ Q_2(x,y) &= 2^{\frac{(1+3\beta)}{\beta}}K^{\frac{(q-p)(1+4\beta))}{p\beta}}M_2^{2(1+3\beta)}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{(1+4\beta)}{\beta}}(xy)^{(1+4\beta[\alpha(\beta-1)+\gamma]-\beta)/\beta}b^{\frac{(1+4\beta)}{\beta}}(x,y). \end{aligned}$$

B. Zheng a présenté une nouvelle inégalité de type **Gronwall-Bellman** dans le théorème suivant:

Théorème 2.3.6 *Soient* $u(x,y),a(x,y)$ *et* $h(x,y)$ *des fonctions positives et localement intégrables sur* D, *avec* $h(x,y)$ *non croissant et borné par* M, *et* $L\in C(D\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ *satisfaisant*

$$0\leq L(s,t,u)-L(s,t,v)\leq T(u-v) \text{ pour tout } u\geq v\geq 0,$$

où T *est la constante de Lipschitz. Si l'inégalité*

$$u^p(x,y)\leq a(x,y)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y\int_0^x(x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}L(s,t,(s,t))dsdt,$$

est satisfaite, où $p\geq 1,\alpha,\beta>0$, $M>0$. *Alors*

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq \left\{\widetilde{a}(x,y)+\int_0^y\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{P}K^{\frac{1-P}{P}}\right)^n\frac{h^n(x,y)}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(n\beta)}(x-s)^{n\alpha-1}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\times(y-t)^{n\beta-1}\widetilde{a}(s,t)\right]dsdt\right\}, \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{a}(x,y)=a(x,y)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y\int_0^x(x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}L\left(s,t,\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}\right)dsdt,$$

pour $(x,y)\in D=\{(x,y)|\ 0\leq x<X,\ 0\leq y<Y\}$, $K>0$.

Un autre résultat prouvé par **B. Zheng** est le suivant :

Théorème 2.3.7 ([65]) *On suppose que les hypothèses du Théorème 2.3.6 sont vérifiées. Soit $b(x,y)$ une fonction positive localement intégrable sur D. Soit $a(x,y)$ une fonction croissante. Si l'inégalité suivante,*

$$\begin{aligned} u^p(x,y) &\leq a(x,y)+\int_0^y\int_0^x b(s,t)u^q(s,t)dsdt \\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}L(s,t,u(s,t))\,dsdt, \end{aligned}$$

est satisfaite où, $p\geq q\geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq \exp\left(\frac{q}{p^2}K^{\frac{q-p}{p}}\int_0^y\int_0^x b(s,t)dsdt\right)\left\{\widehat{a}(x,y)+\int_0^y\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{P}K^{\frac{1-p}{p}}\right)^n\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\times\frac{\widehat{h}^n(x,y)}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(n\beta)}(x-s)^{n\alpha-1}(y-t)^{n\beta-1}\widehat{a}(s,t)\right]dsdt\right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

2.4 Nouvelles généralisations

2.4.1 Sur quelques inégalités intégrales fractionnaires en dimension une

Dans cette partie, nous allons énoncer et prouver quelques nouvelles inégalités intégrales fractionnaire en dimension une de type **Gronwall- Bellman,** qui sont des généralisations des résultats obtenus par **K. S. Nisar, G. Rahman, J. Choi, S. Mubeen, et M. Arshad** [49].

Théorème 2.4.1 *Supposons que $k,\lambda\in\mathbb{R}^+$, h et u sont des fonctions positives et localement intégrables définies sur $[0,X)$ avec $X\leq+\infty$, $\phi(x)$ une fonction continue, positive et croissante sur $[0,X)$, vérifiant $\phi(x)\leq M$ avec $M\in\mathbb{R}^+$. Si l'inégalité*

$$u^p(x)\leq h(x)+k\ \phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1}u^q(\rho)\,d\rho, \tag{2.1}$$

est satisfaite, où $p\neq 0$, $p\geq q\geq 0$. Alors

$$u(x)\leq\left\{\widetilde{h}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{k\widetilde{\phi}(x)\Gamma_k(\lambda)\right\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)}\int_0^x (x-\rho)^{n\frac{\lambda}{k}-1}\widetilde{h}(\rho)d\rho\right\}^{\frac{1}{p}},\quad (x\in[0,X)), \tag{2.2}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(x) &= h(x) + \ m_2 k \ \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} d\rho \quad \text{et } K > 0 \text{ est une constante}, \qquad (2.3) \\ m_1 &= \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}}, m_2 = \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}, \ \widetilde{\phi}(x) = m_1 \phi(x). \end{aligned}$$

Preuve. *Définissons la fonction* $z(x)$ *par*

$$z(x) = h(x) + k \ \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho) \, d\rho,$$

Alors nous avons

$$u(x) \leq z^{\frac{1}{p}}(x), \quad (x \in [0, X)) \tag{2.4}$$

$$z(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} z^{\frac{q}{p}}(\rho) \, d\rho, \qquad (x \in [0, X)) \tag{2.5}$$

Utilisons le Lemme 1.4.1 (page 24) pour tout $K > 0$, *nous obtenons facilement*

$$z(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} \left(\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} z(\rho) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} \right) d\rho, \ \ (x \in [0, X)) \tag{2.6}$$

l'inégalité ci-dessus peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned} z(x) &\leq \widetilde{h}(x) + k m_1 \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} z(\rho) d\rho, \\ &\leq \widetilde{h}(x) + k m_1 \widetilde{\phi}(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} z(\rho) d\rho, \qquad (2.7) \end{aligned}$$

où $\widetilde{h}$, $\widetilde{\phi}(x)$ *et* m_1, m_2 *sont données par (2.3).*

Appliquons le Théorème 2.2.11 à cette dernière, nous en déduisons l'inégalité souhaitée (2.2). ■

Remarque 2.4.1 *Si nous prenons* $p = q = 1$, *le Théorème 2.4.1 sera semblable au Théorème 2.2.11 dans [49].*

Corollaire 2.4.1 *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.4.1 et soit* $b \in R^+ \cup \{0\}$. *Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + kb \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho) \, d\rho, \tag{2.8}$$

est satisfaite, alors

$$u(x) \leq \widetilde{h}_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{k m_1 b \Gamma_k(\lambda)\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_0^x (x-\rho)^{n\frac{\lambda}{k}-1} h(\rho) d\rho, \ \ (x \in [0, x)), \tag{2.9}$$

où

$$\widetilde{h}_1(x) = h(x) + km_2 b \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} \, d\rho. \tag{2.10}$$

Corollaire 2.4.2 *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.4.1 sont vérifiées et soit $h(x)$ une fonction croissante. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + k\ \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho) \, d\rho, \tag{2.11}$$

est satisfaite, alors

$$u(x) \leq \left\{1 - k + kE_{k,\lambda,k}\left(k\Gamma_k(\lambda)\, \widetilde{\phi}(x) x^{\frac{\lambda}{k}}\right) \widetilde{h}(x)\right\}^{\frac{1}{P}}, \tag{2.12}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(x) &= h(x) + \ m_2 k\ \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} \, d\rho, \\ m_1 &= \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}}, m_2 = \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}, \quad \widetilde{\phi}(x) = m_1 \phi(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Preuve. Étant donné h une fonction croissante

$$\int_0^x (x-\rho)^{n\frac{\lambda}{k}-1} \widetilde{h}(\rho) \, d\rho \leq \widetilde{h}(x) \int_0^x (x-\rho)^{n\frac{\lambda}{k}-1} \, d\rho = \frac{k}{n\lambda} \widetilde{h}(x) x^{\frac{n\lambda}{k}}. \tag{2.14}$$

La combinaison de l'inégalité ci-dessus avec l'inégalité (2.2), entraîne (2.12). Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 2.4.2 *Supposons que $k,\ \lambda \in \mathbb{R}^+$, h , u sont des fonctions positives et localement intégrables définies sur $[1, X)$ avec $X \leq +\infty$, $\phi(x)$ une fonction continue, positive et croissante sur $[0, X)$, vérifiant $\phi(x) \leq M$ avec $M \in \mathbb{R}^+$. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + k\phi(x) \int_0^x \left(\ln \frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{k}-1} u^q(\rho) \, \frac{d\rho}{\rho}, \tag{2.15}$$

est satisfaite, alors

$$u(x) \leq \left\{\widetilde{h}_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\left\{\phi(x)\Gamma_k(\lambda)\right\}^n}{\Gamma_k(n\lambda)} \int_1^x \left(\ln \frac{x}{\rho}\right)^{n\frac{\lambda}{k}-1} h(\rho) \, \frac{d\rho}{\rho}\right\}^{\frac{1}{p}}, \ \ (x \in [1, X)), \tag{2.16}$$

où

$$\widetilde{h}_2(x) = h(x) + km_2\phi(x) \int_0^x \left(\ln \frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{k}-1} \, d\rho.$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du Théorème 2.4.1. ■

Théorème 2.4.3 *Soient $u, \phi, h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telles que $h(x), \phi(x)$ sont des fonctions croissantes en t. Soit $g : R_+ \to R_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0, +\infty[$ telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} g(u^q(\rho))d\rho, \tag{2.17}$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$, $\alpha > 0$. Alors

$$u(x) \leq \left\{h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\widehat{h}(\rho)\exp\left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}\widehat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right)d\rho\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.18}$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{h}(x) &= g(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}), \\ \widehat{\phi}(x) &= \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}\phi(x)g'(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Preuve. Définissons la fonction $v(x)$ par

$$v(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1} g(u^q(\rho))d\rho, \tag{2.20}$$

Ainsi, nous avons

$$u(x) \leq (h(x) + \phi(x)v(x))^{\frac{1}{p}}, \quad x \in [0, X), \tag{2.21}$$

Appliquons le Lemme 1.4.1 à cette dernière, nous trouvons

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}(h(x) + \phi(x)v(x)) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{q}{p}}, \\ D_x^\alpha v(x) &\leq g\left((h(x) + \phi(x)v(x))^{\frac{q}{p}}\right), \end{aligned} \tag{2.22}$$

et

$$D_x^\alpha v(x) \leq g(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}(h(x) + \phi(x)v(x)) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}).$$

Par une simple application du Théorème de la valeur moyenne à la fonction g, nous aurons pour tout $x \geq y > 0$, il existe $c \in]\, y, x[$ tel que,

$$g(x) - g(y) = g'(c)(x-y) \leq g'(y)(x-y)$$

$$D_x^\alpha v(x) \leq g(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})+g^{'}(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\left(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}\phi(x)v(x)\right)$$

$$D_x^\alpha v(x) \leq \widehat{h}(x)+\widehat{\phi}(x)v(x) \tag{2.23}$$

où $\widehat{h}$ et $\widehat{\phi}$ sont données par (2.19).

Faisons appel au Lemme 1.4.7, l'inégalité ci-dessus donne

$$v(x) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\widehat{h}(\rho)\exp\left\{-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}\widehat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right\}d\rho. \tag{2.24}$$

Le résultat souhaité découle des deux inégalité (2.24) et (2.21). ■

Corollaire 2.4.3 *Supposons que toutes les condtions du Théorème 2.4.3 sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\arctan\left(u^q(\rho)\right)d\rho,$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$. Alors

$$u(x) \leq \left\{h(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\widehat{h}(\rho)\exp\left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}\widehat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right)d\rho\right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(x) &= \arctan(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}),\\
\widehat{\phi}(x) &= \frac{\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}\phi(x)}{1+\left(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Corollaire 2.4.4 *Supposons que les hypothèses du Théorème 2.4.3 sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$u^p(x) \leq h(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\log\left(1+u^q(\rho)\right)d\rho,$$

est satisfaite, alors

$$u(x) \leq \left\{h(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\widehat{h}(\rho)\exp\left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}\widehat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right)d\rho\right\}^{\frac{1}{p}},$$

où

$$\begin{aligned}\widehat{h}(x) &= \log(1+\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}),\\ \widehat{\phi}(x) &= \frac{\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}\phi(x)}{1+\left(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)}.\end{aligned}$$

Théorème 2.4.4 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 2.4.3 sont vérifiées. Soit* $S:[0,X)\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *une fonction continue satisfaisant*

$$0\le S(t,x)-S(t,y)\le R(t,y)(x-y),\ \forall t\in R_+, \tag{2.25}$$

pour $t\in[0,X)$ *et* $x\ge y\ge 0$, *où* $R:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$. *Si l'inégalité*

$$u^p(x)\le h(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x(x-\rho)^{\alpha-1}S(\rho,u^q(\rho))d\rho, \tag{2.26}$$

est satisfaite, alors

$$u(x)\le\left\{h(x)+\phi(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(x-\rho)^{\alpha-1}h_1(\rho)\exp\left\{-\int_{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}\phi_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right\}d\rho\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.27}$$

où

$$\begin{aligned}h_1(x) &= S\left(x,\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right), && (2.28)\\ \phi_1(x) &= \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R\left(x,\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(x)+\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)\phi(x).\end{aligned}$$

Preuve. *Définissons une fonction* $z(x)$ *par*

$$z(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-\rho)^{\frac{\lambda}{k}-1}S(\rho,u^q(\rho))d\rho,\ \ (x\in[0,X)), \tag{2.29}$$

alors

$$z(0)=0,$$

$$u(x)\le(h(x)+\phi(x)z(x))^{\frac{1}{p}}. \tag{2.30}$$

En appliquant le Lemme 1.4.1, pour tout $K>0$

$$u(x)\le\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}(h(x)+\phi(x)z(x))+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}},\ \ (x\in[0,X)) \tag{2.31}$$

et

$$D_x^{\alpha} z(x) = S(x, u^q(x)). \tag{2.32}$$

En utilisant la première condition de (2.25),

$$\begin{aligned} S(x,u^q(x)) &\le S(x,((h(x)+\phi(x)z(x))^{\frac{q}{p}}) \le S\left(x, \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} \left(h(x)+\phi(x)z(x)\right) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}\right) \\ &\le \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R\left(x, \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} h(x) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}\right) \phi(x) z(x) \qquad (2.33) \\ &\quad + S\left(x, \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} h(x) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}\right). \end{aligned}$$

En se servant des inégalités (2.32) et (2.33), nous obtenons

$$\begin{aligned} D_x^{\alpha} z(x) &\le \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R\left(x, \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} h(x) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}\right) \phi(x) z(x) + S\left(x, \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} h(x) + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}\right) \\ &= h_1(x) + \phi_1(x) z(x), \qquad (2.34) \end{aligned}$$

où $h_1(x)$ et $\phi_1(x)$sont données par (2.28).

Faisons appel au Lemme 1.4.7, l'inégalité (2.34) devient

$$z(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} h_1(\rho) \exp\left\{ - \int_{\frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}} \phi_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right\} d\rho. \tag{2.35}$$

La combinaison de l'inégalité ci-dessus avec l'inégalité (2.30), entraîne (2.27). Ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 2.4.5 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 2.4.3 sont vérifiées. Soit $c \ge 0$. Si S est définie comme dans le Théorème 2 .4.4. Si*

$$u^p(x) \le c + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} S(\rho, u^q(\rho)) d\rho, \tag{2.36}$$

est satisfaite alors

$$\begin{aligned} u(x) \le &\left\{ c \exp\left\{ \phi(x) \int_{\frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}} G_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right\} \phi(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} H_1(\rho) \right. \\ &\left. \times \exp\left\{ -\phi(x) \int_{\frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}} G_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right\} d\rho \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (2.37) \end{aligned}$$

où

$$G_1(x) = \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R\left(x, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right), \tag{2.38}$$
$$H_1(x) = S\left(x, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right).$$

Preuve. Fixon $X \geq 0$, d'après (2.36), nous avons

$$u^p(x) \leq c + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(X)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} S(\rho, u^q(\rho))d\rho, \ \ (x \in [0, X)),$$

Définissons la fonction $z(x)$ comme suit

$$z(x) = c + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(X)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} S(\rho, u^q(\rho))d\rho, \ \ (x \in [0, X)), \tag{2.39}$$

alors

$$z(0) = c,$$
$$u(x) \leq z(x)^{\frac{1}{p}} \tag{2.40}$$

et

$$D_x^\alpha z(x) = \phi(X)S(x, u^q(x)). \tag{2.42}$$

En utilisant la première condition de (2.25) et en appliquant le Lemme 1.4.1, il s'ensuit que, pour tout $K > 0$

$$\begin{aligned} S(x, u^q(x)) &\leq S(x, z^{\frac{q}{p}}(x)) \leq S\left(x, \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(x) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right), \\ &\leq \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R\left(x, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)z(x) + S\left(x, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

En se servant des inégalités (2.43) et (2.42), nous obtenons

$$\begin{aligned} D_x^\alpha z(x) &\leq \phi(X)\left[\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R\left(x, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)z(x) + S\left(x, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)\right] \\ &= \phi(X)H_1(x) + \phi(X)G_1(x)z(x), \end{aligned} \tag{2.44}$$

où $H_1(x), G_1(x)$ sont données par (2.38).

Faisons appel au Lemme 1.4.7, l'inégalité (2.44) donne une estimation de $z(x)$ de la forme suivante

$$\begin{aligned} z(x) &= c\exp\left\{\phi(X)\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} G_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right\} + \phi(X)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} H_1(\rho) \\ &\times \exp\left\{-\phi(X)\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} G_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right\}d\rho. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Prenons $x = X$ dans (2.45), nous obtenons

$$\begin{aligned} z(x) &= c\exp\left\{\phi(x)\int_{\frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}} G_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right\} + \phi(x)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}H_1(\rho) \\ &\quad \times\exp\left\{-\phi(x)\int_{\frac{\rho^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}} G_1\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}\right)ds\right\}d\rho. \qquad (2.46) \end{aligned}$$

La combinaison de l'inégalité ci-dessus avec l'inégalité (2.40), entraîne (2.37). Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 2.4.5 *Si toutes les hypothèses du Théorème 2.4.3 sont satisfaites,* $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est de classe* S, $0 < \alpha < 1$ *et soit* $h(x)$ *est une fonction croissante sur* $[0, X)$. *Si l'inégalité suivante*

$$u(x) \leq h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\eta(u(\rho))\,d\rho, \qquad (2.47)$$

est satisfaite, alors

$$u(x) \leq b(x)\left\{\Omega_q^{-1}\left[\Omega\left(2^{q-1}\right) + K_q\phi(x)\int_0^x e^{-q\rho}d\rho\right]\right\}^{\frac{1}{q}}, \qquad (2.48)$$

où $0 \leq x \leq X_1 \leq X$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{1+z},\ z>0,\ q = \frac{1}{\alpha}+\varepsilon = 1+z+\varepsilon,\ p = \frac{1+z+\varepsilon}{z+\varepsilon},\ \varepsilon>0, \\ \Omega_q(\upsilon) &= \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\sigma}{\eta^q\left(\sigma^{\frac{1}{q}}\right)}, \qquad (2.49) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_q &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{2^{q-1}e^{px}}{p^{1-\beta p}}\Gamma(1-\beta p), \qquad (2.50) \\ \beta &= 1-\alpha = \frac{z}{1-z},\quad \Gamma \text{ est la fonction Gamma d'Euler} \end{aligned}$$

$$K_q\int_0^x e^{-q\rho}d\rho \in Dom\left(\Omega_q^{-1}\right), \qquad x\in[0,X_1].$$

Preuve. Notons $b(x) = \max(h(x), 1)$. Alors l'inégalité (2.74) peut être réecrite sous la forme suivante

$$\frac{u(x)}{b(x)} \leq 1 + \frac{1}{b(x)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\eta(u(\rho))\,d\rho, \qquad (2.51)$$

Comme $b(x)$ est une fonction croissante, nous aurons

$$\frac{u(x)}{b(x)} \leq 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x \frac{1}{b(\rho)} \left[(x-\rho)^{\alpha-1} \eta(u(\rho)) \right] d\rho,$$

Soit $z(t) = \frac{u(x)}{b(x)}$. Puisque la fonction η est de classe S, nous aurons

$$z(x) \leq 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x \left[(x-\rho)^{\alpha-1} \eta(z(\rho)) \right] d\rho, \tag{2.52}$$

Utilisons l'ingalité de Hölder, nous trouvons

$$\begin{aligned} z(x) &\leq 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x \left[(x-\rho)^{\alpha-1} e^{\rho} e^{-\rho} \eta(z(\rho)) \right] d\rho, \\ &\leq 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \left[\int_0^x (x-\rho)^{-\beta p} e^{p\rho} d\rho \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^x e^{-q\rho} \eta(z(\rho))^q d\rho \right]^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

Utilisons l'inégalité$(A+B)^q \leq 2^{q-1}(A^q + B^q)$ pour tout $A \geq 0, B \geq 0$ et

$$\int_0^x (x-\rho)^{-\beta p} e^{p\rho} d\rho = e^{px} \int_0^x \tau^{-\beta p} e^{-p\tau} d\tau \leq \frac{e^{px}}{p^{1-\beta p}} \Gamma(1-\beta p),$$

Utilisons l'inégalité $(A+B)^q \leq 2^{q-1}(A^q + B^q)$ pour tout $A \geq 0, B \geq 0, q > 1$ et $1 - \beta p = \frac{\varepsilon}{(1+z)(z+\varepsilon)} > 0$,

$$z^q(x) \leq 2^{q-1} + K_q \phi(x) \int_0^x e^{-q\rho} \eta^q(z(\rho)) d\rho,$$

Prenons $x^* \in [0, x]$ une constante positive, nous obtenons

$$z^q(x) \leq 2^{q-1} + K_q \phi(x^*) \int_0^x e^{-q\rho} \eta^q(z(\rho)) d\rho, \tag{2.54}$$

où K_q est donnée par (2.50).

Définissons la fonction $N(x)$ par

$$N(x) = 2^{q-1} + K_q \phi(x^*) \int_0^x e^{-q\rho} \eta^q(z(\rho)) d\rho, \tag{2.55}$$

alors

$$z(x) \leq N^{\frac{1}{q}}(x),$$

$$\eta^q(z(x)) \leq \eta^q\left(N^{\frac{1}{q}}(x)\right).$$

Donc, de l'inégalité (2.54), il résulte que

$$\frac{N'(x)}{n^q\left(N^{\frac{1}{q}}(x)\right)} \leq \frac{K_q\phi(x^*)e^{-qx}\eta^q(z(x))}{\eta^q\left(N^{\frac{1}{q}}(x)\right)},$$

alors

$$\frac{d}{dx}\int_0^{N(x)}\frac{d\sigma}{\eta^q\left(\sigma^{\frac{1}{q}}\right)} \leq K_q e^{-qx}\phi(x^*),$$

et

$$\frac{d}{dx}\Omega_q(N(x)) \leq \phi(x^*)K_q e^{-qx}, \tag{2.56}$$

où Ω_q est donnée par (2.49).

Intégrons l'inégalité (2.56) de 0 à x, nous obtenons

$$\Omega_q(z(x)^q) \leq \Omega_q\left(2^{q-1}\right) + \phi(x^*)K_q\int_0^x e^{-q\rho}d\rho, \tag{2.57}$$

Prenons $x = x^*$ dans (2.57), $x^* > 0$ est choisi arbitraire, donne

$$\Omega_q(z(x)^q) \leq \Omega_q\left(2^{q-1}\right) + \phi(x)K_q\int_0^x e^{-q\rho}d\rho, \tag{2.58}$$

Alors

$$z(x) \leq \left\{\Omega_q^{-1}\left[\Omega\left(2^{q-1}\right) + K_q\phi(x)\int_0^x e^{-q\rho}d\rho\right]\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{2.59}$$

Utilisons l'inégalité (2.59), nous obtenons l'inégalité désirée (2.48). ∎

Corollaire 2.4.6 *Si toutes les hypothèses du Théorème 2.4.3 sont satisfaites,* $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est de classe* S, $0 < \alpha < 1$ *et soit* $h(x)$ *est une fonction croissante sur* $[0, X)$*. Si l'inégalité suivante est satisfaite,*

$$u^p(x) \leq h^p(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\phi(x)\int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1}\eta(u^p(\rho))d\rho, \tag{2.60}$$

alors

$$u(x) \leq b(t)\left\{\Omega_{q_1}^{-1}\left[\Omega\left(2^{q_1-1}\right) + K_{q_1}\phi(x)\int_0^x e^{-q_1\rho_1}d\rho\right]\right\}^{\frac{1}{q_1 p}}, \tag{2.61}$$

où $p \geq 1$ *et* $p \neq 0$,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{1+z}, z > 0, q_1 = \frac{1}{\alpha} + \varepsilon = 1 + z + \varepsilon, p_1 = \frac{1+z+\varepsilon}{z+\varepsilon}, \varepsilon > 0,\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1, \\ \Omega_{q_1}(\upsilon) &= \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\sigma}{\eta^{q_1}\left(\sigma^{\frac{1}{q_1}}\right)}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

et

$$\begin{aligned} K_{q_1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2^{q-1}e^{p_1 x}}{p^{1-\alpha p}} \Gamma(1-\beta p), \qquad (2.63) \\ \beta &= 1-\alpha = \frac{z}{1-z}, \quad \Gamma \text{ est la fonction gamma et } X_1 > 0, \end{aligned}$$

$$K_{q_1} \int_0^x e^{-q_1 \rho_1} d\rho \in Dom\left(\Omega_q^{-1}\right), \qquad x \in [0, X_1], \ \Omega_q^{-1} \text{ l'inverse de } \ \Omega_q.$$

Preuve. *Notons* $b^p(t) = \max(h^p(x), 1)$*. Alors l'inégalité (2.60) peut être réecrite sous la forme suivante*

$$\frac{u^p(x)}{b^p(x)} \leq 1 + \frac{1}{b(x)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x (x-\rho)^{\beta-1} \eta(u(\rho))\, d\rho, \qquad (2.64)$$

$$\frac{u^p(x)}{b^p(x)} \leq 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x \frac{1}{b^p(\rho)} \left[(x-\rho)^{\beta-1} \eta(u(\rho))\right] d\rho,$$

Soit $z(x) = \frac{u(x)}{b(x)}$*. Puisque la fonction* η *est de classe* S*, nous aurons*

$$\left(\frac{u(x)}{b(x)}\right)^p \leq 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x \left[(x-\rho)^{\beta-1} \eta\left(\left(\frac{u(\rho)}{b(\rho}\right)^p\right)\right] d\rho,$$

$$z^p(x) \leq 1 + k\phi(x) \int_0^x \left[(x-\rho)^{\beta-1} \eta(z^p(\rho))\right] d\rho, \qquad (2.65)$$

Définissons la fonction $y(x)$ *par*

$$y(x) = 1 + k\phi(x) \int_0^x \left[(x-\rho)^{\beta-1} \eta(z^p(\rho))\right] d\rho,$$

donc

$$z(x) \leq y^{\frac{1}{p}}(x) \qquad (2.66)$$

$$y(x) \leq 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(x) \int_0^x \left[(x-\rho)^{\beta-1} \eta(y(\rho))\right] d\rho, \qquad (2.67)$$

En suivant les mêmes étapes de la démonstration du Théorème2.4.6, nous obtenons

$$y(x) \leq \left\{\Omega_{q_1}^{-1}\left[\Omega\left(2^{q_1-1}\right) + K_{q_1}\phi(x) \int_0^x e^{-q_1\rho_1} d\rho\right]\right\}^{\frac{1}{q_1}}. \qquad (2.68)$$

Il résulte de ces deux inégalités (2.68) *et* (2.66)*que*

$$z(x) \leq \left\{\left\{\Omega_{q_1}^{-1}\left[\Omega\left(2^{q_1-1}\right) + K_{q_1}\phi(x) \int_0^x e^{-q_1\rho_1} d\rho\right]\right\}^{\frac{1}{q_1}}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

■

2.4.2 Applications

La dernière partie de cette section est consacrée à illustrer nos principaux et récents résultats par la présentation de quelques exemples dont l'objectif principal est d'étudier et explorer certaines propriétés de solutions des équations différentielles fractionnaire.

$$u^p(x) = h(x) + I^\alpha(F(x, u(x))), \tag{2.69}$$

où $0 < \alpha < 1$, $p > 1$ et $F \in C(R \times R, R)$, $a(t) \in C(I, R_+)$.

Exemple 2.4.1 *Supposons que*

$$|F(x, u)| \leq g(|u|), \tag{2.70}$$

où g est définie dans le Théorème 2.4.3. Si $u(x)$ est solution de (2.69) et (2.70), alors

$$|u(x)| \leq \left\{ |h(x)| + \int_0^x (x-\rho)^{\alpha-1} \widehat{h}(\rho) \exp\left(-\int_{\frac{\rho^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}^{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}} \widehat{\phi}\left((s\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \right) ds \right) d\rho \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.71}$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{h}(x) &= g(\frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} h(x) + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}), \\ \widehat{\phi}(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} g'(\frac{1}{p} K^{\frac{q-p}{p}} h(x) + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Preuve. La solution $u(x)$ s'écrit sous la forme

$$u^p(x) = h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (F(s, u(s)) ds. \tag{2.73}$$

Appliquons la valeur absolue, nous obtenons

$$|u^p(x)| \leq |h(x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |(F(s, u(s))| ds. \tag{2.74}$$

$$\leq |h(x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g\,|u(s)|\,ds.$$

Appliquons le Théorème 2.4.3$\left(q = 1, \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)$, nous trouvons le résultat voulu (2.71).

■

Exemple 2.4.2 *Supposons que*

$$|F(x,u) - F(x,\overline{u})| \leq g\left(|u - \overline{u}|\right), \tag{2.75}$$

où g est définie dans le théorème 2.4.3 , $g(0) = 0$ et $u(t)$ est solution de (2.75), alors l'équation (2.69) possède au plus une solution.

Preuve. *Soient $u(x)$, $\overline{u}(x)$ deux solutions de (2.69), alors*

$$\begin{aligned} u(x) &= h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s,u(s))ds, \\ \overline{u}(x) &= h(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} F(s,\overline{u}(s))ds, \end{aligned}$$

$$u(x) - \overline{u}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[F(s,u(s)) - F(s,\overline{u}(s))\right] ds,$$

Utilisons (2.75), *nous aurons*

$$|u(x) - \overline{u}(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g\left(|u(s) - \overline{u}(s)|\right) ds. \tag{2.76}$$

Appliquons le Théorème 2.4.3 (*pour* $p = q = 1$) *à l'inégalité ci-dessus, nous obtenons que $|u(x) - \overline{u}(x)| \leq 0$, ce qui donne: $u(x) = \overline{u}(x)$ i.e., l'équation (2.69) admet une unique solution.* ■

2.4.3 Sur quelques inégalités intégrales fractionnaires en dimension deux

Le but de ce travail est de donner une estimation a priori de la solution des inégalités intégrales suivantes :

$$u^p(x,y) \leq a(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} g(u^q(s,t))dsdt, \ (x,y) \in D,$$

$$u^p(x,y) \leq a(x,y)+\int_0^y\int_0^x b(s,t)u^q(s,t)dsdt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g(u^q(s,t))dsdt.$$

où a, h, b et g doivent remplir certaines conditions.

Nous mentionnons que les résultats obtenus représentent des généralisations des résultats obtenus dans [65]

Théorème 2.4.6 *Soient $u(x,y)$, $a(x,y)$, $h(x,y)$ des fonctions positives continue sur $D = [0,T) \times [0,T)\,(0 < T \leq \infty)$, et $\alpha, \beta > 0$ des constantes. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0,+\infty[$telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Si l'inégalité*

$$u^p(x,y) \leq a(x,y)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g(u^q(s,t))dsdt,\ \ (x,y) \in D, \tag{2.77}$$

est satisfaite, où $p \geq q > 0$. Alors

$$u(x,y) \leq \left[a(x,y) + e^{x+y}\Psi^{\frac{1}{n}}(x,y)\right]^{\frac{1}{p}},\ \ (x,y) \in D, \tag{2.78}$$

où

$$\begin{aligned} \Psi(x,y) &= w(x,y) + 2^{n-1}\ L^n h^n(x,y)\left(\int_0^y\int_0^x \overline{A}^n(s,t)w(s,t)dsdt\right) \\ &\quad \times \exp\left(2^{n-1}\ L^n\int_0^y\int_0^x \overline{A}^n(s,t)h^n(s,t)dsdt\right), \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{a}(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}})dsdt, \\ A(x,y) &= \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(x,y) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}, \\ \overline{A}(x,y) &= g'\left(A(x,y)\ \right), \end{aligned} \tag{2.80}$$

et

$$L = \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{\Gamma\left(m\alpha-m+1\right)\Gamma\left(m\alpha-m+1\right)}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}}\right)^{\frac{1}{m}}\ \ m \geq 1,\ \ n \geq 1, \frac{1}{m}+\frac{1}{n} = 1. \tag{2.81}$$

Preuve. *Définissons la fonction $z(x,y)$ comme suit :*

$$z(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g(u^q(s,t))dsdt, \tag{2.82}$$

Il est clair que

$$z(0,y) = z(x,0) = 0,$$

et

$$u^p(x,y) \leq a(x,y) + z(x,y),$$

ainsi, nous avons

$$u(x,y) \leq (a(x,y) + z(x,y))^{\frac{1}{p}}\,, \tag{2.83}$$

Substituons (2.83) dans (2.82), on obtient

$$z(x,y) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} \times g\left((a(s,t)+z(s,t))^{\frac{q}{p}}\right) dsdt,$$

Utilisons le lemme 1.4.1 (p.27) pour l'inégalité précédente, nous obtenons

$$z(x,y) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} \times g\left(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}\left(a(s,t)+z(s,t)\right) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right) dsdt, \tag{2.84}$$

par une simple application du théorème de la valeur moyenne à la fonction g, nous aurons, pour tout $x \geq y > 0$, l'existence de $c \in \,]\,y,x[$ tel que,

$$g(x) - g(y) = g'(c)(x-y) \leq g'(y)(x-y).$$

Ainsi (2.84) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
z(x,y) \leq{}& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} \\
&\times \left[g\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) + g'\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} z(s,t)\right] dsdt, \\
\leq{}& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\; g\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) dsdt \\
&+ \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} g'\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) z(s,t) dsdt, \\
z(x,y) \leq{}& \widetilde{a}(x,y) + \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\overline{A}(s,t) z(s,t) dsdt,
\end{aligned} \tag{2.85}$$

où $\widetilde{a}(x,y), A(x,y), \overline{A}(x,y)$ sont données par (2.80).

$$\begin{aligned}
z(x,y) \quad \leq \quad & \widetilde{a}(x,y) + \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} e^s (y-t)^{\beta-1} \\
& \times e^t \left[e^{-(s+t)}\overline{A}(s,t) z(s,t)\right] dsdt,
\end{aligned} \tag{2.86}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, nous trouvons

$$\begin{aligned} z(x,y) &\leq \widetilde{a}(x,y) + \frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \\ &\quad \times \left[\int_0^y \int_0^x (x-s)^{m(\alpha-1)} e^{ms} (y-t)^{m(\beta-1)} e^{mt} dsdt \right]^{\frac{1}{m}} \\ &\quad \times \left[\int_0^y \int_0^x e^{-n(s+t)} \overline{A}^n(s,t) z^n(s,t) dsdt \right]^{\frac{1}{n}}, \end{aligned} \tag{2.87}$$

Si on effectue le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} x - s &= \sigma \\ y - t &= \eta \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} &\int_0^y \int_0^x (x-s)^{m(\alpha-1)} e^{ms} (y-t)^{m(\beta-1)} e^{mt} dsdt \\ &= e^{m(x+y)} \int_0^x \sigma^{m(\alpha-1)} e^{-m\sigma} \int_0^y \eta^{m(\beta-1)} e^{-m\eta} d\sigma d\eta \\ &= \frac{e^{m(x+y)}}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}} \int_0^{mx} \delta^{m(\alpha-1)} e^{-\delta} \int_0^{my} \zeta^{m(\beta-1)} e^{-\zeta} d\delta d\zeta \\ &= \frac{e^{m(x+y)}}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}} \Gamma(m\alpha - m + 1) \Gamma(m\beta - m + 1). \end{aligned}$$

En utilisant (2.87), nous obtenons

$$\begin{aligned} z(x,y) &\leq \widetilde{a}(x,y) + \frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \left[\frac{e^{m(x+y)}}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}} \Gamma(m\alpha - m + 1) \Gamma(m\alpha - m + 1) \right]^{\frac{1}{m}} \\ &\quad \times \left[\int_0^y \int_0^x e^{-n(s+t)} \overline{A}^n(s,t) z^n(s,t) dsdt \right]^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

$$z(x,y) \leq \widetilde{a}(x,y) + \ Lh(x,y) e^{x+y} \left[\int_0^y \int_0^x e^{-n(s+t)} \overline{A}^n(s,t) z^n(s,t) dsdt \right]^{\frac{1}{n}}, \tag{2.88}$$

où L est défini dans (2.81).

par une simple application de l'inégalité de Jensen

$$\left(e^{-(x+y)} z(x,y)\right)^n \leq 2^{n-1} \widetilde{a}^n(x,y) e^{-n(x+y)} + 2^{n-1} \ L^n h^n(x,y) \int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) \left(e^{-(s+t)} z(s,t)\right)^n dsdt \tag{2.89}$$

$$v^n(x,y) \leq w(x,y) + 2^{n-1}\ L^n h^n(x,y) \int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) v^n(s,t) dsdt, \tag{2.90}$$

où

$$v(x,y) = e^{-(x+y)} z(x,y), w(x,y) = 2^{n-1} \widetilde{a}^n(x,y) e^{-n(x+y)}. \tag{2.91}$$

Appliquons le Lemme 1.4.8 et utilisons l'inégalité (2.90), nous obtenons

$$\begin{aligned} v^n(x,y) &\leq w(x,y) + 2^{n-1}\ L^n h^n(x,y) \left(\int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) w(s,t) dsdt \right) \\ &\quad \times \exp\left(2^{n-1}\ L^n \int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) h^n(s,t) dsdt \right). \end{aligned} \tag{2.92}$$

Ainsi, d'aprés (2.92) et (2.91), on obtient

$$z(x,y) \leq e^{x+y} \Psi^{\frac{1}{n}}(x,y), \tag{2.93}$$

où $\Psi(x,y)$ est défini dans (2.79).

l'inégalité désirée (2.78) découle des deux inégalités (2.93) et (2.83). ■

Corollaire 2.4.7 *Supposons que toutes les conditions du Théorème 2.4.7 sont vérifiées. Soit $w(t) = \arctan t$. Si l'inégalité*

$$u^p(x,y) \leq a(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} \arctan(u^q(s,t)) dsdt, \tag{2.94}$$

est satisfaite, où $p \neq 0$, $p \geq q \geq 0$. Alors

$$u(x,y) \leq \left[a(x,y) + e^{x+y} \varphi^{\frac{1}{n}}(x,y) \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{2.95}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= w(x,y)\ + 2^{n-1}\ L^n h^n(x,y) \left(\int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) w(x,y) \right) \\ &\quad \times \exp\left(2^{n-1}\ L^n \int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) h^n(x,y) \right) dsdt, \\ w(x,y) &= 2^{n-1} \widetilde{a}^n(x,y) e^{-n(x+y)}, \\ \widetilde{a}(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1}\ \arctan\left(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}\ \right) dsdt, \\ L &= \frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\Gamma(m\alpha - m + 1)\,\Gamma(m\alpha - m + 1)}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}} \right)^{\frac{1}{m}}, \\ \overline{A}(s,t) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Théorème 2.4.7 *Assumons que toutes les hypothèses du Théorème 2.4.7 vérifiées. $b(x,y)$ et une fonction continue, positives. Si l'inégalité*

$$u^p(x,y) \leq a(x,y) + \int_0^y \int_0^x b(s,t)u^q(s,t)dsdt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g(u^q(s,t))dsdt, \tag{2.96}$$

est satisfaite, où $p \geq q > 0$, alors

$$u(x,y) \leq \left[a(x,y) + e^{x+y}\Psi_1^{\frac{1}{n}}(x,y)\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{2.97}$$

où

$$\begin{aligned}\Psi_1(x,y) &= w(x,y) + 2^{n-1}\ L^n\widehat{h}^n(x,y)\left(\int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t)w(x,y)\right)\\ &\quad\times\exp\left(2^{n-1}\ L^n \int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t)\widehat{h}^n(x,y)\right)dsdt,\end{aligned} \tag{2.98}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{a}_1(x,y) &= \frac{q}{P}k^{\frac{q-p}{p}}\int_0^y \int_0^x b(s,t)a(s,t) + \frac{P-q}{P}K^{\frac{q}{P}}\int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt\\ &\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\ g(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}})dsdt,\\ \widehat{h}_1(x,y) &= \exp\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt)\right)h(x,y),\\ \overline{A}_1(s,t) &= g^{'}(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}),\end{aligned} \tag{2.99}$$

$$L_1 = \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left(\frac{\Gamma(m\alpha-m+1)\,\Gamma(m\alpha-m+1)}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{2.100}$$

Preuve. Définissons la fonction $v(x,y)$ comme suit :

$$v(x,y) = \int_0^y \int_0^x b(s,t)u^q(s,t)dsdt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y)\int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g(u^q(s,t))dsdt,$$

alors, pour tout $(x,y) \in D$ on a

$$u^p(x,y) \leq a(x,y) + v(x,y),$$

et

$$u(x,y) \leq [a(x,y) + z(x,y)]^{\frac{1}{p}}, \tag{2.101}$$

Utilisons le Lemme 1.4.1, nous obtenons aisément

$$\begin{aligned} v(x,y) \;\leq\; & \int_0^y \int_0^x b(s,t) \left[\frac{q}{P} k^{\frac{q-p}{p}} \left(a(s,t) + v(s,t) \right) + \frac{P-q}{P} k^{\frac{q}{P}} \right] dsdt \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \times \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1}, \\ & \times \left[g \left(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \left(a(s,t) + v(s,t) \right) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}} \right) \right] dsdt, \end{aligned} \tag{2.102}$$

où $k > 0$.

Par une simple application du théorème de la valeur moyenne à la fonction g, nous aurons, pour tout $x \geq y > 0$, il existe $c \in \,]\, y, x[$ tel que,

$$g(x) - g(y) = g^{'}(c)(x-y) \leq g^{'}(y)(x-y).$$

L'inégalité (2.102) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} v(x,y) \leq & \int_0^y \int_0^x b(s,t) \left[\frac{q}{P} k^{\frac{q-p}{p}} \left(a(s,t) + v(s,t) \right) + \frac{P-q}{P} k^{\frac{q}{P}} \right] dsdt \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} \\ & \times \left[g(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}) + g^{'}(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}})(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} v(s,t)) \right] dsdt, \end{aligned} \tag{2.103}$$

ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} v(x,y) \leq & \int_0^y \int_0^x b(s,t) \left[\frac{q}{P} k^{\frac{q-p}{p}} \left(a(s,t) + v(s,t) \right) + \frac{P-q}{P} k^{\frac{q}{P}} \right] dsdt \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} \; g(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}) dsdt \\ & + \frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} g^{'}(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}) v(s,t) dsdt, \end{aligned}$$

Définissons une fonction $z(x,y)$ par

$$\begin{aligned} z(x,y) = & \frac{q}{P} k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t) a(s,t) + \frac{P-q}{P} k^{\frac{q}{P}} \int_0^y \int_0^x b(s,t) dsdt \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} \; g(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}) dsdt \\ & + \frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} g^{'}(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}) v(s,t) dsdt, \end{aligned} \tag{2.104}$$

alors

$$v(x,y) \leq z(x,y) + \frac{q}{P}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)v(s,t)dsdt, \tag{2.105}$$

Comme $z(x,y)$ est une fonction croissante et en appliquons le Lemme 1.4.8 (p.25) à l'inégalité (2.22), (avec $q(x,y)=1$) , on trouve

$$v(x,y) \leq z(x,y)\exp\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt\right),$$

et

$$v(s,t) \leq z(s,t)\exp\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^t \int_0^s b(\tau,\xi)d\tau d\xi\right). \tag{2.106}$$

Ainsi, d'après (2.106) et (2.104), on obtient

$$\begin{aligned}
z(x,y) \leq{}& \frac{q}{P}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)a(s,t) + \frac{P-q}{P}k^{\frac{q}{P}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\ g(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}})dsdt \\
&+ \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g'(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}) \\
&\times z(s,t)\exp\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^t \int_0^s b(\tau,\xi)d\tau d\xi\right)\ dsdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(x,y) \leq{}& \frac{q}{P}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)a(s,t) + \frac{P-q}{P}K^{\frac{q}{P}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}\ g(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}})dsdt \\
&+ \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\exp\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt\right) \\
&\times h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}g'(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}})z(s,t)dsdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(x,y) \quad \leq \quad & \widehat{a}_1(x,y) + \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\widehat{h}_1(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} \\
& \times g'(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}) \times z(s,t)dsdt \\
\leq \quad & \widehat{a}_1(x,y) + \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\widehat{h}_1(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} \\
& \overline{A}_1(s,t) \times z(s,t)dsdt,
\end{aligned} \tag{2.107}$$

où $\widehat{a}_1(x,y), \widehat{h}_1(x,y)$ et $\overline{A}_1(x,y)$ sont données par (2.99).

Appliquons le Théorème 2.4.7, nous trouvons le résultat voulu (2.97). ∎

Corollaire 2.4.8 *Supposons que toutes les conditions du Théorème 2.4.8 sont vérifiées. Si*

$$\begin{aligned} u^p(x,y) &\leq a(x,y) + \int_0^y \int_0^x b(s,t)u^q(s,t)dsdt \quad (2.108) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} \log\left(1+u^q(s,t)\right) dsdt, \end{aligned}$$

est satisfaite, alors

$$\left[a(x,y) + e^{x+y}\Psi_2^{\frac{1}{n}}(x,y)\right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2.109)$$

où, $p \geq q > 0$

$$\begin{aligned} \Psi_2(x,y) &= w(x,y) + 2^{n-1} \; L^n \widehat{h_1}^n(x,y) \left(\int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) w(x,y) \right) \\ &\times \exp\left(2^{n-1} \; L^n \int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) \widehat{h_1}^n(x,y)\right) dsdt, \\ \widehat{a}_2(x,y) &= \frac{q}{P} k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)a(s,t) + \frac{P-q}{P} K^{\frac{q}{P}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} \; \log(1+\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}})dsdt, \\ w_2(x,y) &= 2^{n-1}\widehat{a}_2^n(x,y)e^{-n(x+y)}, \\ L_2 &= \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\Gamma(m\alpha - m + 1)\Gamma(m\alpha - m + 1)}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}} \right)^{\frac{1}{m}}, \\ \overline{A}(s,t) &= \frac{1}{1 + \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a(s,t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}}, \end{aligned}$$

et

$$\widehat{h}_2(x,y) = \exp\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t)dsdt)\right) h(x,y).$$

Théorème 2.4.8 *Supposons que toutes les conditions du Théorème 2.4.8 sont vérifiées. Soient* $w_1, w_2 : I \longmapsto I$ *deux fonctions différentiables croissantes sur* $]0, \infty[$ *telles que leurs dérivées premières sur* $]0, \infty[$ *sont continues et décroissantes. Si l'inégalité*

$$\begin{aligned} u^p(x,y) &\leq a(x,y) + \int_0^y \int_0^x b(s,t)g_1\left(u^q(s,t)\right) dsdt \quad (2.110) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} g_2(u^r(s,t))dsdt, \end{aligned}$$

est satisfaite, alors

$$u(x,y) \leq \left[a(x,y) + e^{x+y}\Psi_1^{\frac{1}{n}}(x,y)\right]^{\frac{1}{p}}, \quad (2.111)$$

où $p \neq 0$, $p \geq q \geq 0$ *et* $p \geq r \geq 0$

$$\begin{aligned}
\Psi_3(x,y) &= w(x,y) + 2^{n-1}\ L^n \widehat{h}_3^n(x,y) \left(\int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) w(x,y) \right) \\
&\quad \times \exp\left(2^{n-1}\ L^n \int_0^y \int_0^x \overline{A}^n(s,t) \widehat{h}^n(x,y) \right) dsdt, \\
\widehat{a}_3(x,y) &= \int_0^y \int_0^x b(s,t) g_1 \left(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} h(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1}\ g_2 (\frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-r}{p} k^{\frac{r}{p}}) dsdt, \\
w_3(x,y) &= 2^{n-1} \widehat{a}_3^n(x,y) e^{-n(x+y)}, \\
L_3 &= \frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{\Gamma(m\alpha - m + 1)\Gamma(m\alpha - m + 1)}{m^{2+m(\alpha+\beta-2)}} \right)^{\frac{1}{m}}, \\
A(s,t) &= g_2 \left(\frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-r}{p} k^{\frac{r}{p}} \right),\ \overline{A}(s,t) = g_2' \left(\frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-r}{p} k^{\frac{r}{p}} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\widehat{h}_3(x,y) = \exp\left(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \int_0^y \int_0^x b(s,t) g_1' \left(\frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} a(s,t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}} \right) dsdt \right) h(x,y).$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du Théorème 2.4.8. ∎

2.5 Application

Nous allons présenter quelques exemples pour étudier certaines propriétés de solutions des équations différentielles fractionnaires.

Exemple 2.5.1 *Considérons l'équation intégrale fractionnaire*

$$z(x,y) = l(x,y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} w(x,y) \int_0^y \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} G(s,t,z(s,t)) dsdt, \quad (2.112)$$

où $l(x,y), w(x,y) \in C(D \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $F \in (D \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *pour tout* $(x,y) \in D$ *satisfaisant aux conditions suivantes:*

$$\begin{aligned}
|l(x,y)| &\leq a(x,y)\ , \\
|w(x,y)| &\leq h(x,y)\ , \\
|G(x,y,u)| &\leq g(|u|)\ ,
\end{aligned} \quad (2.113)$$

où a, h, g sont définies comme dans le Théorème 2.4.7.

Preuve. Supposons que $u(x, y)$ est solution de (2.112), alors en combinant (2.113) et (2.112) et en appliquant le Théorème 2.4.7 (avec $p = q = 1$), nous pourrons facilement trouver l'estimation de la solution $u(x, y)$ de (2.112). ■

Proposition 2.5.1 *Supposons que*

$$|G(x, y, z_1) - G(x, y, z_2)| \leq g(|z_1(s, t) - z_2(s, t)|), \tag{2.114}$$

où g est définie dans Théorème 2.4.7 et $z(s, t)$ est une solution de (2.112). Alors l'équation (2.112) possède au plus une solution.

Preuve. Soient $z_1(s, t)$ et $z_2(s, t)$ deux solutions de (2.112), alors

$$z_1(x, y) = a(x, y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^y \int_0^x (x - s)^{\alpha-1} (y - t)^{\beta-1} g(z_1(s, t)) dsdt, \tag{2.115}$$

et

$$z_2(x, y) = b(x, y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^y \int_0^x (x - s)^{\alpha-1} (y - t)^{\beta-1} g(z_2(s, t)) dsdt. \tag{2.116}$$

Faisons la différence ensuite appliquons la valeur absolue au résultat, on trouve

$$\begin{aligned} |z_1(x, y) - z_2(x, y)| \leq\ & |a(x, y) - b(x, y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^y \int_0^x (x - s)^{\alpha-1} (y - t)^{\beta-1} \\ & \times g(|z_1(s, t) - z_2(s, t)|) dsdt. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Appliquons le Théorème 2.4.7 (pour $p = q = 1$) à l'inégalité ci-dessus, nous obtenons que $|z_1(s, t) - z_2(t)| \leq 0$, ce qui donne: $z_1(s, t) = z_2(s, t)$, i.e.,l'équation (2.112) admet une unique solution. ■

CHAPITRE 3 Inégalités intégrales de type Gamidov

Ce chapitre est consacré entièrement aux inégalités de type Gamidov. Ce type des inégalités a été d'abord initié par Gamidov [32] en 1969, tout en étudiant les problèmes aux limites relatifs aux équations différentielles d'ordre supérieur. Par la suite, de nombreux chercheurs ont établi des inégalités plus générales, plus raffinées que celles prouvées par Gamidov[32]. Parmi ces chercheurs, on peut citer : Bainov, Pachpatte, Kendre et Latpate...

En outre, leurs résultats sont considérés comme des outils fondamentaux dans l'étude du comportement qualitatif des solutions de certaines classes d'équations intégrales. Pour plus de détails, nous pouvons consulter[3, 52, 53, 54, 55, 38].

Dans **la première section** de ce chapitre, nous allons établir de nouvelles inégalités de type Gamidov unidimensionnelles sur une échelle de temps quelconque. Tout d'abord, nous introduirons les célèbres inégalités de type Gamidov. Nous contenterons de présenter certaines généralisations apparues dans les revues scientifiques, et établissons notre premier résultat concernant les inégalités intégrale de type Gamidov sur une échelle de temps. Nous présentons, enfin, un exemple adéquat pour valider le résultat obtenu.

Dans **la deuxième section,** nous donnerons de nouvelles généralisations concernant les inégalités de type Gamidov bidimensionnelles. Nous concluons cette section par un exemple illustratif.

Ces nouveaux résultats ont fait l'objet de publications:

K. Boukerrioua, D. Diabi and I. Meziri, New explicit bounds on Gamidov type integral inequalities on times scales and applications. Journal of Mathematical Inequalities Volume 12, Number 3 (2018), 807–825.

K. Boukerrioua, D. Diabi and B. Kilani, **On some new generalizations of certain Gamidov integral inequalities in two independent variables and their applications. Facta Universitatis (Niš)Ser. Math. Inform. Vol. 33, No 3 (2018), 467-479.**

3.1 Quelques célèbres inégalités de type Gamidov

Dans cette première partie, nous énoncerons les inégalités les plus cylèbres de type **Gamidov**. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par J l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

En 1969 **Gamidov** [32] a prouvé les inégalités suivantes afin de les appliquer dans l'étude de certains problèmes de valeurs aux limites.

Corollaire 3.1.1 ([32]) *Soient* u, f, g_1, g_2, h_i $(i = 1, 2, ...n)$ *des fonctions positives, continues et définies sur* J. *Si*

$$u(t) \leq f(t) + g_1(t) \int_{t_1}^{t} h_1(s)u(s)ds + g_2(t) \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s)u(s)ds,$$

où

$$\alpha = t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n = \beta \text{ et } c_i \text{ sont des constantes},$$

telle que

$$\sum_{i=2}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s) \left[g_2(s) + g_1(s) \int_{t_1}^{s} h_1(\tau) g_2(\tau) \times \exp\left(\int_{\tau}^{s} g_1(\tau) h_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right] ds < 1$$

alors, nous avons

$$u(t) \leq p_1(t) + Mp_2(t),$$

où

$$p_1(t) = f(t) + g(t)\int_{t_1}^{t} h_1(s)f(s)\exp\left(\int_s^t g_1(\sigma)h_1(\sigma)d\sigma\right)ds,$$
$$p_2(t) = g_2(t) + g_1(t)\int_{t_1}^{t} h_1(s)g_2(s)\exp\left(\int_s^t g_1(\sigma)\,h_1(\sigma)d\sigma\right)ds,$$

$$M = \left(\sum_{i=2}^{n} c_i\int_{t_1}^{t_i} h_i(s)p_1(s)ds\right)\left(1-\sum_{i=2}^{n} c_i\int_{t_1}^{t_i} h_i(s)p_2(s)ds\right)^{-1}.$$

Théorème 3.1.1 ([32]) *Soient u et k des fonctions positives continue sur J, et soient $0 < p < 1$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ et $a_3 > 0$ des constantes. Supposons que pour tout $t \in J$*

$$u(t) \leq a_1 + a_2\int_{\alpha}^{t} k(s)u^p(s)ds + a_3\int_{\alpha}^{\beta} k(s)u^p(s)ds,$$

alors, nous aurons

$$u(t) \leq \left(x_0^q + a_2 q\int_{\alpha}^{t} k(s)ds\right)^{\frac{1}{q}},$$

où $q = 1 - p$ et x_0 est l'unique racine positive de l'équation

$$\left[\frac{a_2+a_3}{a_3}x - \frac{a_1a_2}{a_3}\right]^q - x^q - a_2 q\int_{\alpha}^{\beta} k(s)ds = 0.$$

En 1989, **Leela et Martynyuk** [40] ont établi une nouvelle inégalité de type Gamidov, dont l'énoncé est le suivant:

Théorème 3.1.2 ([40]) *Soient $m, v \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $T > t_0 \geq 0$. Si l'inégalité*

$$m(t) \leq m(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)m(s)ds + \int_{t_0}^{T} v(s)m(s)ds,$$

est satisfaite, de plus

$$\exp\left(\int_{t_0}^{T} v(s)ds\right) < 2$$

alors, nous obtenons

$$m(t) \leq \frac{m(t_0)}{2-\exp\left(\int_{t_0}^{T} v(s)ds\right)}\exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)ds\right).$$

En 1992, **Bainov et Simeonov**[3] ont démontré une variante du Théorème 3.1.2. Ce résultat est le suivant :

Théorème 3.1.3 ([3]) *Soient $u(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ des fonctions continues sur J telles que $b(t)$ et $c(t)$ sont positives sur J. Admettons que*

$$u(t) \leq a + \int_{\alpha}^{t} b(s)u(s)ds + \int_{\alpha}^{\beta} c(s)u(s)ds, \ t \in J,$$

où a est une constante et si

$$q = \int_{\alpha}^{\beta} C(s) \exp\left(\int_{\alpha}^{s} b\left(\tau\right) d\tau\right) ds < 1,$$

alors,

$$u(t) \leq \frac{a}{1-q} \exp\left(\int_{\alpha}^{t} b(s)ds\right), \ t \in J.$$

Dans[53], **Pachpatte** a établi une version plus générale de l'inégalité de Gamidov, Dont l'énoncé est le suivant, nous notons $\Delta = \{(t,s) \in J^2 : \alpha \leq s \leq t \leq \beta\}$.

Théorème 3.1.4 ([53]) *Soient $u(t) \in C\left(J, \mathbb{R}_+\right)$, $a(t,s)$, $b(t,s) \in C\left(\Delta, \mathbb{R}_+\right)$ telles que $a(t,s)$ et $b(t,s)$ sont des fonctions croissantes en t, pour chaque $s \in J$ et supposons que*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} a(t,s)u(s)ds + \int_{\alpha}^{\beta} b(t,s)u(s)ds,$$

pour tout $t \in J$, où $c \geq 0$ est une constante. Si la condition

$$p(t) = \int_{\alpha}^{\beta} b(t,s) \exp\left(\int_{\alpha}^{s} a(s,\sigma)d\sigma\right) ds < 1$$

est satisfaite, alors nous avons

$$u(t) \leq \frac{c}{1-p(t)} \exp\left(\int_{\alpha}^{t} a(t,s)ds\right), \ \forall t \in J.$$

3.2 Quelques généralisations

3.2.1 Quelques inégalités intégrales de type Gamidov unidimensionnelles

Nous allons exposer, sans démonstration, quelques variantes et généralisations obtenues sur les inégalités présentées dans la section précédente. Pour plus de détails, nous pouvons consulter [53, 54, 38, 3, 14].

Théorème 3.2.1 ([54]) *Soient* $u, a, b, c, f, g \in C(J, \mathbb{R}_+)$

(H_1) *Soit* $a(t)$ *une fonction continûment différentiable sur* J *telle que* $a'(t) \geq 0$ *et*

$$u(t) \leq a(t) + \int_\alpha^t b(s)u(s)ds + \int_\alpha^\beta c(s)u(s)ds, \ \forall t \in J$$

et si

$$p_1 = \int_\alpha^\beta c(s) \exp\left(\int_\alpha^s b(\sigma)d\sigma\right) ds < 1,$$

alors

$$u(t) \leq M_1 \exp\left(\int_\alpha^t b(s)ds\right) + \int_\alpha^t a'(s) \exp\left(\int_s^t b(\sigma)d\sigma\right) ds,$$

où

$$M_1 = \frac{1}{1-p_1}\left[a(\alpha) + \int_\alpha^\beta c(s)(\int_\alpha^s a'(\tau) \exp\left(\int_\tau^s b(\sigma)d\sigma\right) d\tau)ds\right].$$

(H_2) *Supposons que*

$$u(t) \leq a(t) + b(t)\int_\alpha^t f(s)u(s)ds + c(t)\int_\alpha^\beta g(s)u(s)ds, \ \forall t \in J$$

et si nous avons

$$p_2 = \int_\alpha^\beta g(s)k_2(s)ds < 1,$$

alors

$$u(t) \leq k_1(t) + M_2 k_2(t), \, \forall t \in J,$$

avec

$$k_1(t) = a(t) + b(t)\int_\alpha^t f(\tau)a(\tau) \exp\left(\int_\tau^t f(\sigma)\, b(\sigma)d\sigma\right) d\tau,$$
$$k_2(t) = c(t) + b(t)\int_\alpha^t f(\tau)c(\tau) \exp\left(\int_\tau^t f(\sigma)\, b(\sigma)d\sigma\right) d\tau,$$

et

$$M_2 = \frac{1}{1-p_2}\int_\alpha^\beta g(s)k_1(s)ds.$$

(H_3) *Soient* $h(t,s)$ *et sa dérivée partilelle* $\frac{\partial h(t,s)}{\partial t}$ *des fonctions positives et continues pour* $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ *et si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \int_\alpha^t h(t,s)u(s)ds + \int_\alpha^\beta c(s)u(s)ds,$$

est satisfaite pour tout $t \in J$, et si encore

$$P_3 = \int_\alpha^\beta c(s) \exp\left(\int_\alpha^s B^*(\sigma)\, d\sigma\right) ds < 1,$$

alors,

$$u(t) \le a(t) + M_3 \exp\left(\int_\alpha^t B^*(\sigma)\, d\sigma\right) + \int_\alpha^t A^*(s) \exp\left(\int_s^t B^*(\sigma)\, d\sigma\right) ds \ , \ \forall t \in J,$$

où

$$A^*(t) = h(t,t)a(t) + \int_\alpha^t \frac{\partial}{\partial t} h(t,s)a(s)ds \ ,$$
$$B^*(t) = h(t,t) + \int_\alpha^t \frac{\partial}{\partial t} h(t,s)ds,$$

et

$$M_3 = \frac{1}{1-P_3} \int_\alpha^\beta c(s) \left[a(s) + \int_\alpha^s A^*(\tau) \exp\left(\int_\tau^s B^*(\sigma)\, d\sigma\right) d\tau\right] ds.$$

Remarque 3.2.1 *L'inégalité établie dans (H_1, Théorème 3.2.1) est une variante de l'inégalité donnée par Bainov et Simeonov dans le (Théorème 3.1.3), tandis que l'inégalité établie en (H_2) est une variante de l'inégalité donnée par Gamidov dans le Corollaire 3.1.1.*

S. D. Kendre et S. G Latpate[38] ont développé l'inégalité prouvée par **B. G. Pachpatte** dans (H1, Théorème 3.2.1) en démontrant les résultats suivants :

Théorème 3.2.2 ([38]) *Soient $u(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $c(t)$, $c'(t) \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et $p \ge q \ge 0$, $p \ne 0$ sont des constantes.*

Si l'inégalité

$$u^p(t) \le c(t) + \int_\alpha^t f(s)u^q(s)ds + \int_\alpha^\beta g(s)u^p(s)ds,$$

est satisfaite, et

$$\varphi = \int_\alpha^\beta g(s) \exp\left(\int_\alpha^s n_1 f(\sigma)d\sigma\right) ds < 1,$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned} u^p(t) \ \le \ & \frac{c(\alpha) + \int_\alpha^\beta g(s) \left(\int_\alpha^s [c'(\tau) + n_2 f(\tau)] \exp\left(\int_\tau^s n_1 f(\sigma)d\sigma\right) d\tau\right) ds}{1-\varphi} \\ & \times \exp\left(\int_\alpha^t m f(s)ds\right) + \int_\alpha^t [c'(s) + n_2 f(s)] \exp\left(\int_s^t n_1 f(\sigma)\, d\sigma\right) ds, \end{aligned}$$

où

$$k > 0,\ n_1 = \frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \ \ et\ \ n_2 = \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}}.$$

Théorème 3.2.3 ([38]) *Soient $u(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $h(t) \in C\left(J, \mathbb{R}_+\right)$ et $c \geq 0$ une constante. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c + \int_\alpha^t h(s)\left[u^q(s) + \int_\alpha^s f(\sigma)u^q(\sigma)d\sigma + \int_\alpha^\beta g(\sigma)u^p(\sigma)d\sigma\right] ds,\ \forall t \in J,$$

alors

$$u^p(t) \leq c \exp\left(\int_\alpha^t n_1 A(\sigma)d\sigma\right) + \int_\alpha^t n_2 B(s) \exp\left(\int_s^t n_1 A\left(\sigma\right) d\sigma\right),$$

où

$$\begin{aligned} A(t) &= h(t)\left[1 + \int_\alpha^t f(\sigma)d\sigma + \frac{1}{n_1}\int_\alpha^\beta g(\sigma)d\sigma\right], \\ B(t) &= h(t)\left[1 + \int_\alpha^t f(\sigma)d\sigma\right], \end{aligned}$$

et p, q, n_1, n_2 sont exactement les mêmes constantes définies dans le Théorème 3.2.2.

Corollaire 3.2.1 ([38]) *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.2.3 sont vérifiées et soit $c(t) \geq 1$ une fonction croissante. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c(t) + \int_\alpha^t h(s)\left[u^q(s) + \int_\alpha^s f(\sigma)u^q(s)d\sigma + \int_\alpha^\beta g(\sigma)u^p(\sigma)d\sigma\right] ds,$$

est satisfaite, alors

$$u^p(t) \leq c^p(t) \exp \int_\alpha^t n_1 A(\sigma)d\sigma + c^p(t)\int_\alpha^t n_2 B(s) \exp\left(\int_s^t n_1 A(\sigma)d\sigma\right),$$

telle que $p \geq q \geq 1$, $A(t)$, $B(t)$ et n_1, n_2 sont exactement les même fonctions définies dans les Théorème 3.2.3 et 3.2.2 respectivement.

Boukerrioua et Meziri ont obtenu des résultats plus raffinés et des versions plus générales des inégalités représentées dans les deux sections précédentes sur des échelles de temps arbitraires.

Théorème 3.2.4 ([14]) *Assumons que* u, c, $g \in C_{rd}\left([\alpha,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}_{+}\right)$ *et* $c^{\Delta} \geq 0$. *Si* f *est définie comme dans le Théorème 1.1.8 telle que* $f(t,s) \geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ *pour* $t,s \in [\alpha,b]_{\mathbb{T}}$ *avec* $s \leq t$. *Alors*

$$u^{p}(t) \leq c(t) + \int_{\alpha}^{t} f(t,s)u^{q}(s)\Delta s + \int_{\alpha}^{b} g(s)u^{r}(s)\Delta s,$$

implique

$$u(t) \leq \left[m(t) + \frac{\frac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}} e_{P}(t,\alpha) \displaystyle\int_{\alpha}^{b} g(s)m(s)\Delta s}{1 - \frac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}} \displaystyle\int_{\alpha}^{b} g(s)e_{P}(s,\alpha)\Delta s}\right]^{\frac{1}{p}},$$

pour $t \in [\alpha,b]_{\mathbb{T}}^{k}$, *où*

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\left[f(\sigma(t),t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s)\Delta s\right], \\ Q(t) &= c^{\Delta}(t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\left[f(\sigma(t),t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s)\Delta s\right], \end{aligned}$$

et

$$m(t) = c(\alpha)e_{P}(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(s)e_{P}(t,\sigma(s))\Delta s + \frac{p-r}{p}k^{\frac{r}{p}}e_{P}(t,\alpha)\int_{\alpha}^{b} g(s)\Delta s,$$

à condition que

$$\frac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}}\int_{\alpha}^{b} g(s)e_{P}(s,\alpha)\Delta s < 1.$$

Remarque 3.2.2 *Si nous prenons* $T = \mathbb{R}$, $p = q = r = 1$, *l'inégalité donnée dans le Théorème 3.2.4 se réduit à l'inégalité donnée dans [[54], Théorème1,* (a_3)*].*

Théorème 3.2.5 ([14]) *Assumons que* u, h, $g \in C_{rd}\left([\alpha,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}_{+}\right)$, *et* $c \geq 0$ *une constante. Si* f *est définie comme dans le Théorème 1.1.8 telle que* $f(t,s) \geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$

pour $t, s \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}$ avec $s \leq t$. Alors

$$u^p(t) \leq c + \int_\alpha^t h(s) \left[u^q(s) + \int_\alpha^s f(s,\tau) u^q(\tau)\Delta\tau + \int_\alpha^b g(\tau) u^r(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s,$$

implique

$$u(t) \leq \left[c + \int_\alpha^t h(s) \left(m(s) + \frac{l(s)\int_\alpha^b g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_\alpha^b g(\tau)l(\tau)\Delta\tau} \right) \Delta s \right]^{\frac{1}{p}},$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$, à condition que

$$\int_\alpha^b g(\tau)l(\tau)\Delta\tau < 1,$$

où

$$m(t) = (\frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} c + \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} + \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}} \int_\alpha^b g(\tau)\Delta\tau) e_P(t,\alpha) + \int_\alpha^t Q(\tau) e_P(t, \sigma(\tau))\Delta\tau,$$

et

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} h(t) + f(\sigma(t), t) + \int_\alpha^t f^\Delta(t,\tau)\Delta\tau, \\ Q(t) &= \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}} (f(\sigma(t), t) + \int_\alpha^t f^\Delta(t,\tau)\Delta\tau). \end{aligned}$$

Remarque 3.2.3 *Notons que lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $r = p$, $f(t,s) = f(t)$, le Théorème 3.2.5 se réduit à l'inégalité indiquée dans le Théorème 3.3.2 dans [38].*

Inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman-Bihari-Gamidov

Théorème 3.2.6 ([14]) *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème 3.2.4 sont vérifiées. Soit $S : [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ une fonction rd-continue satisfaisant*

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(t,x) - S(t,y) \leq R(t,y)(x-y), \\ S^\Delta(t,0) &\geq 0, \; R^\Delta(t,0) \geq 0, \end{aligned}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$ et $x \geq y \geq 0$, où $R : [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k \times \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+^*$ est une fonction rd-continue. Alors

$$u^p(t) \leq c(t) + \int_\alpha^t f(t,\tau)S(\tau, u^q(\tau))\Delta\tau + \int_\alpha^b g(\tau)S(\tau, u^r(\tau))\Delta\tau,$$

implique

$$u(t) \leq \left\{ m(t) + \frac{l(t)\int_\alpha^b g(\tau)R(\tau, \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_\alpha^b g(\tau)R(\tau, \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})l(\tau)\Delta\tau} \right\}^{\frac{1}{p}},$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$, où

$$l(t) = \frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}} e_P(t,\alpha),$$

$$\begin{aligned} m\ (t) \ &= \ \left(c(\alpha) + \int_\alpha^b g(\tau)S(\tau, \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})\Delta\tau \right) e_P(t,\alpha) \\ &\quad + \int_\alpha^t Q(\tau)e_p(t,\sigma(\tau))\Delta\tau, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(t) \ &= \ \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} R(t, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})f(\sigma(t),t) + \int_\alpha^t \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} R(\tau, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})f^\Delta(t,\tau)\Delta\tau, \\ Q(t) \ &= \ c^\Delta(t) + f(\sigma(t),t)S(t, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) + \int_\alpha^t f^\Delta(t,\tau)S(\tau, \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta\tau. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.4 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $S(t,u(t)) = u(t)$, $f(t,s) = f(t)$, $p = q = r = 1$ et $c(t) = c$ (une constante), l'inégalité donnée dans le Théorème 3.2.6 se réduit à l'inégalité donnée dans [[3],Lemme BS] et si on prend $r = p$, $f(t,s) = f(t)$, le Théorème 3.2.6 se réduit au Théorème 3.2 dans [38].*

3.2.2 Quelques Généralisations des inégalités de type Gamidov bidimensionnelles

K. Cheng et C. Guo[21] ont développé l'inégalité prouvée par **B. G. Pachpatte** dans (H1, Théorème 3.2.1) en démontrant les résultats suivants:

Lemme 3.2.1 ([21]) *Supposons que* $u(x,y),\ a(x,y),\ c(x,y),\ g(x,y) \in C([0,M] \times [0,N], [0,\infty))$. *Si*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + c(x,y) \int_0^M \int_0^N u(s,t)g(s,t)dsdt,$$

alors

$$u(x,y) \leq a(x,y) + \frac{c(x,y) \int_0^M \int_0^N a(s,t)g(s,t)dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N c(s,t)g(s,t)dsdt},$$

pour $(x,y) \in [0,M] \times [0,N]$ à condition que

$$\int_0^M \int_0^N c(s,t)g(s,t)dsdt < 1.$$

Dans tous ce qui suit, nous désignons par $I_1 = [0,M]$, $I_2 = [0,N]$ des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Soit $\Delta = I_1 \times I_2$. $C(U,V))$ l'ensemble des fonctions continues de U dans V.

Théorème 3.2.7 *Soient* $u(x,y),\ a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y),\ f(x,y),\ g(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ *et* $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)$ *des fonctions croissantes en* x *et* y. *Si*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)u(s,t)dsdt + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t)u(s,t)dsdt,$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned} u(x,y) \ \leq\ & \left[a(x,y) + c(x,y) \times \left(\left(\left(\int_0^M \int_0^N a(s,t)g(s,t) \times \exp\left\{ b(s,t) \int_0^s \int_0^t f(u,v)dudv \right\} dsdt \right) \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. \times \left(1 - \int_0^M \int_0^N c(s,t)g(s,t) \times \exp\left\{ b(s,t) \times \int_0^s \int_0^t f(u,v)dudv \right\} \times dsdt \right)^{-1} \right) \right] \\ & \times \exp\left\{ b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)dsdt \right\}, \end{aligned}$$

est valable pour tout $(x,y)\in\Delta$ *à condition que :*

$$\int_0^M\int_0^N c(s,t)g(s,t)\exp\left\{b(s,t)\int_0^s\int_0^t f(u,v)dudv\right\}dsdt<1.$$

Théorème 3.2.8 ([21]) *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.2.7 sont vérifiées. Si l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} u^m x,y) &\leq a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)u^n(s,t)dsdt \\ &\quad +c(x,y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)u^r(s,t)dsdt, \end{aligned}$$

est satisfaite, où $m\geq n\geq 0, m\geq r\geq 0,$*où* m,n *sont des constantes, alors nous avons*

$$\begin{aligned} u(x,y) \leq & \left\{a(x,y)+\left[\overline{A}(x,y)+\overline{C}(x,y)\times\left(\int_0^M\int_0^N \overline{A}(s,t)\overline{G}(s,t)\right.\right.\right. \\ & \left.\times\exp\left\{\overline{B}(s,t)\times\int_0^s\int_0^t\overline{F}(u,v)dudv\right\}dsdt\right), \\ & \left.\left.\times\left(1-\int_0^M\int_0^N\overline{C}(s,t)\overline{G}(s,t)\times\exp\left\{\overline{B}(s,t)\int_0^s\int_0^t\overline{F}(u,v)dudv\right\}\times dsdt\right)^{-1}\right)\right] \\ & \left.\times\exp\left\{\overline{B}(x,y)\int_0^x\int_0^y\overline{F}(s,t)dsdt\right\}\right\}^{\frac{1}{m}}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{A}(x,y) &= b(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)\left[\frac{n}{m}K_1^{(n-m)/m}(s,t)a(s,t)+\frac{m-n}{m}K_1^{\frac{n}{m}}(s,t)\right]dsdt, \\ &\quad +c(x,y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)\left[\frac{r}{m}K_2^{\frac{(r-m)}{m}}(s,t)a(s,t)+\frac{m-r}{m}K_2^{r/m}(s,t)\right]dsdt, \\ \overline{B}(x,y) &= \frac{n}{m}b(x,y),\ \overline{C}(x,y)=\frac{n}{m}c(x,y), \\ \overline{F}(x,y) &= f(x,y)K_1^{\frac{(n-m)}{m}}(x,y), \\ \overline{G}(x,y) &= g(x,y)K_2^{\frac{(r-m)}{m}}(x,y), \end{aligned}$$

pour tout $K_i \in C(\Delta,\mathbb{R}_0)\quad(i=1,2)$.

Ce qui est valable pour tout $(x,y)\in\Delta$ *à condition que :*

$$\int_0^M\int_0^N\overline{C}(s,t)\overline{G}(s,t)\exp\left\{B(s,t)\int_0^s\int_0^t\overline{F}(u,v)dudv\right\}dsdt<1.$$

Corollaire 3.2.2 ([21]) *Supposons que les hypothèses du Théorème 3.2.7 sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$\begin{aligned} u^2x,y) &\leq a(x,y)+b(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)u(s,t)dsdt \\ &+c(x,y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)u(s,t)dsdt, \end{aligned}$$

est satisfaite, où $m\geq n\geq 0, m\geq r\geq 0$,où m,n sont des constantes. Nous avons

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq \left\{a(x,y)+\left[\overline{A}(x,y)+\frac{1}{2}c(x,y)\times\left(\left(\int_0^M\int_0^N\overline{A}(s,t)\overline{G}(s,t)\times\right)\right.\right.\right. \\ &\times\exp\left\{\frac{1}{2}b(s,t)\times\int_0^s\int_0^t\overline{F}(u,v)dudv\right\}dsdt \\ &\left.\left.\times\left(1-\int_0^M\int_0^N\frac{1}{2}c(s,t)\overline{G}(s,t)\times\exp\left\{\frac{1}{2}b(s,t)\int_0^s\int_0^t\overline{F}(u,v)dudv\right\}\times dsdt\right)^{-1}\right)\right] \\ &\left.\times\exp\left\{\frac{1}{2}b(x,y)\int_0^x\int_0^y\overline{F}(s,t)dsdt\right\}\right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{A}(x,y) &= b(x,y)\int_0^x\int_0^y\frac{1}{2}f(s,t)\left[K_1^{\frac{-1}{2}}(s,t)a(s,t)+K_1^{\frac{1}{2}}(s,t)\right]dsdt \\ &+c(x,y)\int_0^M\int_0^N\frac{1}{2}g(s,t)\left[K_2^{\frac{-1}{2}}(s,t)a(s,t)+K_2^{\frac{1}{2}}(s,t)\right]dsdt, \\ \overline{B}(x,y) &= \frac{n}{m}b(x,y),\ \overline{C}(x,y)=\frac{n}{m}c(x,y), \\ \overline{F}(x,y) &= f(x,y)K_1^{\frac{-1}{2}}(x,y), \\ \overline{G}(x,y) &= g(x,y)K_2^{\frac{-1}{2}}(x,y), \end{aligned}$$

pour tout $K_i\in C(\Delta,\mathbb{R}_0)\quad(i=1,2)$, est valable pour tout $(x,y)\in\Delta$ à condition que :

$$\int_0^M\int_0^N\frac{1}{2}c(s,t)\overline{G}(s,t)\times\exp\left\{\frac{1}{2}b(s,t)\int_0^s\int_0^t\overline{F}(u,v)dudv\right\}dsdt<1.$$

Ma et Pečarić [48] ont discuté de l'inégalité intégrale de type **Gamidov** retardée:

Théorème 3.2.9 ([48]) *Soient $u(x,y)$ et $l(x,y)\in C(\Delta,\mathbb{R}_+)$, $a(x,y,s,t)$ et $b(x,y,s,t)\in C(E,\mathbb{R}_+)$, $a(x,y,s,t)$, $b(x,y,s,t)$ sont des fonctions croissantes en x et y pour chaque*

$s \in I_1$, $t \in I_2$, $\alpha \in C^1(I_1, I_2)$ sont des fonctions croissnates avec $\alpha(x) \leq x$ sur I_1, $\beta(y) \leq y$ sur I_2. Si l'inégalité

$$\begin{aligned} u^p(x,y) &\leq l(x,y) + \int_0^{\alpha(x)} \int_0^{\beta(y)} a(x,y,s,t) u^q(s,t) dtds \\ &+ \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(M)} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(N)} b(x,y,s,t) u^r(s,t) dtds, \end{aligned}$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0, p \geq r \geq 0$, où p, q et r sont des constantes, alors on a

$$u(x,y) \leq \left[l(x,y) + \frac{\overline{A}_1(x,y) + B_1(x,y)}{1 - \lambda_1(x,y)} \exp\left(A_1(x,y)\right) \right]^{\frac{1}{p}},$$

pour tout $K_i \in \Delta$ et $K_i(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_0)$ $(i = 1,2)$ où

$$\begin{aligned} A_1(x,y) &= \frac{q}{p} \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(x)} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} a(x,y,s,t) K_1^{\frac{q-p}{p}}(s,t) dtds, \\ \overline{A}_1(x,y) &= \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(x)} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} a(x,y,s,t) \left[\frac{q}{p} K_1^{\frac{q-p}{p}}(s,t)\, l(s,t) + \frac{p-q}{p} K_1^{\frac{q}{p}}(s,t) \right] dtds, \end{aligned}$$

et

$$B_1(x,y) = \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(M)} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(N)} b(x,y,s,t) \left[\frac{r}{p} K_2^{\frac{r-p}{p}} l(s,t) + \frac{p-r}{p} K_2^{\frac{r}{p}}(s,t) \right] dtds,$$

est valable pour tout $(x,y) \in \Delta$ à condition que :

$$\lambda_1(x,y) = \frac{r}{p} \int_{\alpha(x_0)}^{\alpha(M)} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(N)} b(x,y,s,t) K_2^{\frac{r-p}{p}}(s,t) \exp\left(A_1(s,t)\right) dtds < 1.$$

3.3 Nouvelles extensions et généralisations

3.3.1 Sur quelques inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman-Gamidov en dimension une

Dans la présente section, nous examinerons le problème d'obtention de résultats plus raffinés et des versions plus générales des inégalités représentées dans les deux sections précédentes sur des échelles de temps arbitraires.

Lemme 3.3.1 *Soient u, m, l et $n \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+)$ où a, $b \in \mathbb{T}$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0, +\infty[$ telle que sa dérivée première est continue et* *décroissante sur* $]0,+\infty[$. *Si l'inégalité*

$$u(t) \leq m(t) + l(t)\int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s, \tag{3.1}$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq m(t) + \frac{l(t)\displaystyle\int_a^b n(s)g(m(s))\Delta s}{1-\displaystyle\int_a^b g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s}, \tag{3.2}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, à condition que

$$\int_a^b g\Delta m(s))n(s)l(s)\Delta s < 1.(3.3)$$

Preuve. Posons

$$\Sigma = \int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s. \tag{3.4}$$

De toute évidence, Σ est une constante. Il résulte de (3.1) que

$$u(t) \leq m(t) + l(t)\Sigma. \tag{3.5}$$

par une simple application du théorème de la valeur moyenne à la fonction g, nous aurons, pour tout $x \geq y > 0$, il existe $c \in]y,x[$ tel que,

$$g(x) - g(y) = g'(c)(x-y) \leq g'(y)(x-y). \tag{3.6}$$

Ainsi,

$$g(u(t)) \leq g(m(t) + l(t)\Sigma) \leq g'(m(t))l(t)\Sigma + g(m(t)). \tag{3.7}$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité (3.7) par $n(t)$, puis intégrons le résultat obtenu a à b, nous aurons

$$\int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s \leq \int_a^b n(s)g(m(s))\Delta s + \Sigma\int_a^b g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s, \tag{3.8}$$

on peut réécrire l'inégalité (3.8) sous la forme :

$$\Sigma \leq \int_a^b n(s)g(m(s))\Delta s + \Sigma \int_a^b g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s, \tag{3.9}$$

et donc, l'inégalité (3.9) implique l'estimation suivante

$$\Sigma(1 - \int_a^b g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s) \leq \int_a^b n(s)g(m(s))\Delta s, \tag{3.10}$$

utilisons l'inégalité (3.3), l'inégalité précédente devient

$$\Sigma \leq \frac{\int_a^b n(s)g(m(s))\Delta s}{1 - \int_a^b g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s}. \tag{3.11}$$

Le résultat souhaité découle des inégalités (3.11) et (3.5). Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.3.1 *Si nous prenons,* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $a = 0$, $b = T$, *le Lemme 3.3.1 sera réduit au Lemme 2.2 dans [22] .*

Corollaire 3.3.1 *Supposons que toutes les conditions du Lemme 3.3.1 sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq m(t) + l(t)\int_a^b n(s)\arctan(u(s))\Delta s,$$

ce qui implique que

$$u(t) \leq m(t) + \frac{l(t)\int_a^b n(s)\arctan(m(s))\Delta s}{1 - \int_a^b \frac{n(s)l(s)}{1+m^2(s)}\Delta s},$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$, à condition que

$$\int_a^b \frac{n(s)l(s)}{1+m^2(s)}\Delta s < 1,$$

et si

$$u(t) \leq m(t) + l(t) \int_a^b n(s) \ln(u(s)+1) \Delta s,$$

alors

$$u(t) \leq m(t) + \frac{l(t) \displaystyle\int_a^b n(s) \ln(m(s)+1) \Delta s}{1 - \displaystyle\int_a^b \frac{n(s) l(s)}{1+m(s)} \Delta s},$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, à condition que

$$\int_a^b \frac{n(s) l(s)}{1+m(s)} \Delta s < 1.$$

Théorème 3.3.1 *Supposons que $u, c, n \in C_{rd}\left([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+\right)$et $c^{\Delta} \geq 0$. Si f est définie comme dans le Théorème 1.1.8 telle que $f(t,s) \geq 0$ et $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ pour $t, s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ et $s \leq t$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0, +\infty[$ telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq c(t) + \int_a^t f(t,s) u(s) \Delta s + \int_a^b n(s) g(u(s)) \Delta s, \tag{3.12}$$

est satisfaite pout tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}^{k}$, alors

$$u(t) \leq m(t) + \frac{l(t) \displaystyle\int_a^b n(s) g(m(s)) \Delta t}{1 - \displaystyle\int_a^b g'(m(s)) n(s) l(s) \Delta s}, \tag{3.13}$$

où

$$\begin{aligned} m(t) &= c(a) e_P(t,a) + \int_a^t Q(s) e_P(t, \sigma(s)) \Delta s, && (3.14) \\ l(t) &= e_P(t,a), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(t) &= \left[f\left(\sigma\left(t\right), t\right) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s \right], \\ Q(t) &= c^{\Delta}(t), \end{aligned} \tag{3.15}$$

à condition que

$$\int_a^b g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s < 1. \tag{3.16}$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ par

$$z(t) = c(t) + \int_a^t f(t,s)u(s)\Delta s + \int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s, \tag{3.17}$$

alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq z(t), \\ z\left(a\right) &= c(a) + \int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Il résulte de ces deux inégalités (3.17) et (3.18) que

$$z(a) = c(a) + \int_a^b n(s)g(z(s))\Delta s, \tag{3.19}$$

$$z^{\Delta}(t) = c^{\Delta}(t) + f(\sigma\left(t\right), t)u(t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)u(s)\Delta s, \tag{3.20}$$

$$z^{\Delta}(t) \leq c^{\Delta}(t) + (f(\sigma\left(t\right), t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s)z(t), \tag{3.21}$$

alors, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée comme suit :

$$z^{\Delta}(t) \leq P(t)z(t) + Q(t), \tag{3.22}$$

où P et Q sont définies par (3.15).

Appliquons le Lemme 1.4.3 à l'inégalité (3.22), nous obtenons

$$z(t) \leq z(a)e_P(t,a) + \int_a^t Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s. \tag{3.23}$$

La substitution de (3.19) dans (3.23), nous trouvons

$$z(t) \leq \int_a^t Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s + c(a)e_P(t,a) + e_P(t,a)\int_a^b n(s)g(z(s))\Delta s, \tag{3.24}$$

Nous pouvons réécrire l'inégalité (3.24) sous la forme suivante

$$z(t) \leq m(t) + l(t)\int_a^b n(s)g(z(s))\Delta s, \tag{3.25}$$

où m et l sont données par (3.14).

Appliquons le Lemme 3.3.1 et en utilisant l'inégalité (3.18), on obtient l'inégalité voulue (3.13). Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 3.3.2 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $g(x) = x$, l'inégalité donnée dans le Théorème 3.3.1 se réduit à l'inégalité donnée dans*$[[54], Théorème\ 1, (a_3)]$.

Théorème 3.3.2 *Supposons que $u, a, b, n \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+)$ et $c^{\Delta} \geq 0$. Si f est définie comme dans le Théorème 1.1.8 telle que $f(t,s) \geq 0$ et $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ pour $t, s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ et $s \leq t$. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0,+\infty[$ telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t)\left(\int_a^t f(t,s)u^q(s)\Delta s + \int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s\right), \tag{3.26}$$

est satisfaite pout tout $t \in [a,b]^k_{\mathbb{T}}$, alors

$$u(t) \leq m^*(t) + \frac{l^*(t)\displaystyle\int_a^b n(s)g(m^*(s))\Delta s}{1 - \displaystyle\int_a^b g'(m^*(s))n(s)l^*(s)\Delta s}.$$

où

$$m^*(t) = \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(s)\int_a^t Q^*(s)e_{P^*}(t,\sigma(s))\Delta s + \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(t) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}, \quad (3.27)$$

$$l^*(t) = \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(t)e_{P^*}(t,\alpha),$$

et

$$P^*(t) = \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}b(t)f(\sigma(t),t) + \int_a^t \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}b(s)f^{\Delta}(t,s)\Delta s, \quad (3.28)$$

$$Q^*(t) = f(\sigma(t),t)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a(s) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta s,$$

.

à condition que

$$\int_a^b g'(m^*(s))n(s)l^*(s)\Delta s < 1.$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ par

$$z(t) = \int_a^t f(t,s)u^q(s)\Delta s + \int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s, \quad (3.29)$$

alors

$$u(t) \leq (a(t) + b(t)z(t))^{\frac{1}{p}}. \quad (3.30)$$

Utilisons le Lemme 1.4.1(p.24), nous obtenons facilement

$$u(t) \leq \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}(a(t) + b(t)z(t)) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} = w(t), \quad (3.31)$$

$$z(a) = \int_a^b n(s)g(u(s))\Delta s \leq \int_a^b n(s)g(w(s))\Delta s.$$

Ainsi, une simple application du Théorème 1.1.8, nous donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &= f(\sigma(t), t)u^q(t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)u^q(s)\Delta s \qquad (3.32) \\ &\leq f(\sigma(t), t)(a(t)+b(t)z(t))^{\frac{q}{p}} + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)(a(s)+b(t)z(s))^{\frac{q}{p}}\Delta s. \end{aligned}$$

Utilisons le Lemme 1.4.1 pour tout $K>0$, nous obtenons facilement le résultat suivant

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &\leq f(\sigma(t), t)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}(a(t)+b(t)z(t)) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) \qquad (3.33) \\ &+\int_a^t f^{\Delta}(t,s)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}(a(s)+b(s)z(s)) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta s, \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire l'inégalité (3.33) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &\leq (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}b(t)f(\sigma(t), t) + \int_a^t \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}f^{\Delta}(t,s)b(s)\Delta s)z(t) \qquad (3.34) \\ &+f(\sigma(t), t)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}a(s) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta s. \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus peut être reformulée de la manière suivante :

$$z^{\Delta}(t) \leq P^*(t)z(t) + Q^*(t), \qquad (3.35)$$

où P *et Q^* sont définies par (3.28).

Faisons appel au Lemme 1.4 .3, l'inégalité (3.35), donne une estimation de $z(t)$ de la forme suivante

$$z(t) \leq z(a)e_{P^*}(t,a) + \int_{\alpha}^t Q^*(s)e_{P^*}(t,\sigma(s))\Delta s. \qquad (3.36)$$

Il résulte des inégalités (3.31) et (3.36) que

$$\begin{aligned} z(t) &\leq e_{P^*}(t,a)\int_a^b n(s)g(w(s))\Delta s \qquad (3.37) \\ &+\int_{\alpha}^t Q^*(s)e_{P^*}(t,\sigma(s))\Delta s. \end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité (3.37) par $\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(t)$ et en ajoutant $\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(t)+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}$ aux deux côtés de l'inégalité résultante, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(t) &\leq \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(t)e_{P^*}(t,a)\int_a^b n(s)g(w(s))\Delta s \\ &+\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(t)\int_a^t Q^*(s)e_{P^*}(t,\sigma(s))\Delta s+\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(t)+\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

En outre, l'inégalité ci-dessus peut être réécrite sous la forme suivante

$$w(t)\leq m^*(t)+l^*(t)\int_a^b n(s)g(w(s))\Delta s, \tag{3.39}$$

où m^* et l^* sont données par (3.27).

Utilisons le Lemme 3.3.1, l'inégalité (3.39) devient

$$u(t)\leq w(t)\leq m^*(t)+\frac{l^*(t)\int_a^b n(s)g(m^*(s))\Delta s}{1-\int_a^b g'(m^*(s))n(s)l^*(s)\Delta s}. \tag{3.40}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 3.3.2 *Supposons que $u,a,b,c,n\in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}_+)$. Si f est définie comme dans le Théorème 1.1.8 telle que $f(t,s)\geq 0$ et $f^{\Delta}(t,s)\geq 0$ pour $t,s\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ et $s\leq t$. Soit $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0,+\infty[$ telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Si l'inégalité suivante*

$$u^p(t)\leq a(t)+b(t)\int_\alpha^t f(t,s)u^q(s)\Delta s+c(t)\int_a^b n(s)g(u(s)\Delta s, \tag{3.41}$$

est satisfaite pout tout $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}^k$, alors

$$u(t) \leq m^*(t) + \frac{l^*(t) \int_a^b n(s) g(m^*(s)) \Delta s}{1 - \int_a^b g\prime(m^*(s)) n(s) l^*(s) \Delta s}, \tag{3.42}$$

où $m^*(t)$, $l^*(t), P^*(t)$ et $Q^*(t)$ sont données par (3.27) et (3.28), en remplaçant $b(t)$ par $(b(t) + c(t))$, sous la condition

$$\int_a^b g'(m^*(s)) n(s) l^*(s) \Delta s < 1.$$

Preuve. L'inégalité (3.41) peut être estimée comme

$$u^p(t) \leq a(t) + (b(t) + c(t))(\int_a^t f(t,s) u^q(s) \Delta s + \int_a^b n(s) g(u(s))) \Delta s. \tag{3.43}$$

Appliquons le Théorème 3.3.2 à cette dernière, nous en déduisons l'inégalité souhaitée (3.42). ■

Théorème 3.3.3 *Supposons que* $u, c, n \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+)$ *et* $c^{\Delta} \geq 0$. *Si* f *est définie comme dans le théorème 1.1.8 telle que* $f(t,s) \geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ *pour* $t, s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ *et* $s \leq t$. *Soient* g_1, g_2 $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *deux fonctions différentiables croissantes sur* $]0, +\infty[$ *telles que leurs dérivées premières sur* $]0, +\infty[$ *sont continues et décroissantes. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c(t) + \int_a^t f(t,s) g_1(u(s)) \Delta s + \int_a^b n(s) g_2(u(s)) \Delta s, \tag{3.44}$$

est satisfaite pout tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}^k$, alors

$$u(t) \leq m(t) + \frac{l(t) \int_a^b n(s) g_2(m(s)) \Delta s}{1 - \int_a^b g_2'(m(s)) n(s) l(s) \Delta s}, \tag{3.45}$$

à condition que

$$\int_a^b g_2'(m(s))n(s)l(s)\Delta s < 1,$$

où

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}(c(a)e_P(t,a) + \int_a^t Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}, \quad (3.46)\\ l(t) &= \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}e_P(t,a), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(t) &= (f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s)(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}g_1'(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}), \quad (3.47)\\ Q(t) &= c^{\Delta}(t) + \ g_1(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})(f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s). \end{aligned}$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ comme suit

$$z(t) = c(t) + \int_a^t f(t,s)g_1(u(s))\Delta s + \int_a^b n(s)g_2(u(s))\Delta s, \quad (3.48)$$

alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq z^{\frac{1}{p}}(t) \leq \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(t) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} = w(t), \quad (3.49)\\ z^{\Delta}(t) &= c^{\Delta}(t) + f(\sigma(t),t)g_1(u(t)) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)g_1(u(s))\Delta s,\\ z^{\Delta}(t) &\leq c^{\Delta}(t) + (f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s)g_1(w(t)),\\ z(a) &= c(a) + \int_a^b n(s)g_2(u(s))\Delta s \leq c(a) + \int_a^b n(s)g_2(w(s))\Delta s. \end{aligned}$$

A l'aide des propriétés de la fonction g_1 et en utilisant (3.49), il en résulte que

$$z^{\Delta}(t) \leq c^{\Delta}(t) + (f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s)(g_1'(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(t) + g_1(\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})). \quad (3.50)$$

L'inégalité (3.50) peut être reformulée comme suit

$$z^{\Delta}(t) \leq P(t)z(t) + Q(t), \tag{3.51}$$

où P et Q sont données par (3.47).

Faisons appel au Lemme 1.4.3, l'inégalité (3.51) devient, alors

$$z(t) \leq z(a)e_P(t,a) + \int_a^t Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s, \tag{3.52}$$

Substituons l'inégalité (3.49) dans l'inégalité (3.52), nous aurons

$$z(t) \leq c(a)e_P(t,a) + \int_a^t Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s + e_P(t,a)\int_a^b n(s)g_2(w(s))\Delta s, \tag{3.53}$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité (3.53) par $\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}b(t)$ et en ajoutant $\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}$ aux deux côtés de l'inégalité résultante, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(t) \quad \leq \quad & \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}(c(a)e_P(t,a) + \int_a^t Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} \\ & + \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}e_P(t,a)\int_a^b n(s)g_2(w(s))\Delta s, \end{aligned} \tag{3.54}$$

alors, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée comme suit :

$$w(t) \leq m(t) + l(t)\int_a^b n(s)g_2(w(s))\Delta s, \tag{3.55}$$

où m et l sont données par (3.46).

Utilisons le lemme 3.3.1, nous obtenons

$$u(t) \leq w(t) \leq m(t) + \frac{l(t)\int_a^b n(s)g_2(m(s))\Delta s}{1 - \int_a^b g_2'(m(s))n(s)l(s)\Delta s}.$$

Ce qui achève la preuve. ∎

Théorème 3.3.4 *Supposons que* $u, h, n \in C_{rd}\left([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+\right)$ *et* $c \geq 0$. *Si* f *est définie comme dans le e Théorème 1.1.8 telle que* $f(t,s) \geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ *pour* $t, s \in [a,b]_{\mathbb{T}}$*et* $s \leq t$. *Soit* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*une fonction différentiable croissante sur* $]0,+\infty[$ *telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur* $]0,+\infty[$. *Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[u^q(s) + \int_{a}^{s} f(s,\tau) u^q(\tau)\Delta\tau + \int_{a}^{b} n(\tau) g(u(\tau))\Delta\tau \right] \Delta s, \tag{3.56}$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq \left[c + qK^{\frac{q-1}{p}} \int_{a}^{t} h(\tau) \left(m(t) + \frac{l(\tau)\int_{a}^{b} n(t) g(m(t))\Delta t}{1 - \int_{a}^{b} g'(m(t)) r(t) l(t)\Delta t} \right) \Delta\tau \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.57}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, à condition que

$$\int_{a}^{b} g'(m(t)) r(t) l(t)\Delta t < 1, \tag{3.58}$$

où

$$\begin{aligned} m(t) &= \left(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}c + \frac{p-1}{qp}K^{\frac{1}{p}}\right)e_P(t,a) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \frac{1}{q}K^{\frac{1-q}{p}} \int_{\alpha}^{t} Q(s) e_P(t, \sigma(s))\Delta s, \\ l(t) &= \frac{1}{q}K^{\frac{1-q}{p}} e_P(t,a), \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} h(t) + f(\sigma(t),t) + \int_{a}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau, \\ Q(t) &= \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\left(f(\sigma(t),t) + \int_{a}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau\right). \end{aligned} \tag{3.60}$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ par

$$z(t) = c + \int_a^t h(s)\left[u^q(s) + \int_a^s f(s,\tau)u^q(\tau)\Delta\tau + \int_a^b n(\tau)g(u(\tau))\Delta\tau\right]\Delta s, \tag{3.61}$$

alors

$$z(a) = c, \tag{3.62}$$

$$u(t) \leq z^{\frac{1}{p}}(t) \leq \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(t) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}, \tag{3.63}$$

et

$$z^\Delta(t) = \quad h(t)\left[u^q(t) + \int_a^t f(t,\tau)u^q(\tau)\Delta\tau + \int_a^b n(\tau)g(u(\tau))\Delta\tau\right]. \tag{3.64}$$

Utilisons (3.63), comme la fonction $z(t)$ est croissante, l'inégalité (3.64) assure

$$z^\Delta(t) \leq h(t)\left[\left(z^{\frac{q}{p}}(t) + \int_a^t f(t,\tau)z^{\frac{q}{p}}(\tau)\Delta\tau\right) + \left(\int_a^b n(\tau)g(z^{\frac{1}{p}}(\tau))\Delta\tau\right)\right]. \tag{3.65}$$

Utilisons le Lemme 1.4.1 pour l'inégalité précédente, nous obtenons

$$z^\Delta(t) \leq h(t)\left[\begin{array}{c} (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) + \int_a^t f(t,\tau)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(\tau) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta\tau \\ +\int_a^b n(\tau)g(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(\tau) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Delta\tau, \end{array}\right]. \tag{3.66}$$

Définissons une fonction $v(t)$ par

$$v(t) = \left[\begin{array}{c} (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) + \int_a^t f(t,\tau)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(\tau) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta\tau \\ +\int_a^b n(\tau)g(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(\tau) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Delta\tau \end{array}\right]. \tag{3.67}$$

Il est claire que

$$v(a) = \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \int_\alpha^b n(\tau)g(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(\tau) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Delta\tau, \tag{3.68}$$

de plus

$$\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) \leq v(t), \ z^\Delta(t) \leq h(t)v(t) \tag{3.69}$$

et que la fonction $v(t)$ est croissante pour $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}^{k}$. Ainsi, une simple application du Théorème 1.1.8, donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(t) &= \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z^{\Delta}(t) + f(\sigma(t),t)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) \\ &\quad + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)(\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(\tau) + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta\tau, \end{aligned} \tag{3.70}$$

Il résulte des inégalités (3.69) et (3.70) que

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(t) &\leq (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(t) + f(\sigma(t),t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau)v(t) \\ &\quad + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}(f(\sigma(t),t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau). \end{aligned} \tag{3.71}$$

En outre, l'inégalité ci-dessus peut être réécrite sous la forme suivante

$$v^{\Delta}(t) \leq P(t)v(t) + Q(t), \tag{3.72}$$

où P et Q sont définies par (3.60).

Faisons appel au Lemme 1.4.3, l'inégalité (3.72) donne une estimation de $v(t)$ de la forme suivante

$$v(t) \leq v(a)e_{P}(t,a) + \int_{a}^{t} Q(s)e_{P}(t,\sigma(s))\Delta s, \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} v(t) &\leq (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})e_{P}(t,a) \\ &\quad + e_{P}(t,a)\int_{a}^{b} n(\tau)g(\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}z(\tau) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Delta\tau \\ &\quad + \int_{a}^{t} Q(s)e_{P}(t,\sigma(s))\Delta s. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité (3.74) par $\frac{1}{q}K^{\frac{1-q}{p}}$ et en ajoutant $\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}$ aux deux membres de l'inégalité résultante et en utilisant (3.69), nous obtenons

$$\frac{1}{q}K^{\frac{1-q}{p}}v(t) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} \leq m(t) + l(t)\int_{a}^{b} n(\tau)g(\frac{1}{q}K^{\frac{1-q}{p}}v(\tau) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}})\Delta\tau, \tag{3.75}$$

où $l(t)$ et $m(t)$ sont données par (3.59).

Ainsi (3.75) peut être réécrite comme suit :

$$w(t) \leq m(t) + l(t)\int\limits_{\alpha}^{b} n(\tau)g(w(\tau))\Delta\tau, \tag{3.76}$$

où

$$w(t) = \frac{1}{q}K^{\frac{1-q}{p}}v(t) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}. \tag{3.77}$$

Appliquons le Lemme 3.3.1 à l'inégalité (3.77), nous obtenons

$$w(t) \leq m(t) + \frac{l(t)\int\limits_{\alpha}^{b} n(s)g(m(s))\Delta s}{1 - \int\limits_{\alpha}^{b} g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s}. \tag{3.78}$$

Il résulte de (3.77) que

$$\frac{1}{q}K^{\frac{1-q}{p}}v(t) \leq w(t). \tag{3.79}$$

Il résulte des deux dernières inégalités que

$$v(t) \leq qK^{\frac{q-1}{p}}\left(m(t) + \frac{l(t)\int\limits_{\alpha}^{b} n(s)g(m(s))\Delta s}{1 - \int\limits_{\alpha}^{b} g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s}\right), \tag{3.80}$$

Donc, de l'inégalité (3.69), on peut écrire

$$z^{\Delta}(t) \leq qK^{\frac{q-1}{p}}h(t)\left(m(t) + \frac{l(t)\int\limits_{\alpha}^{b} n(s)g(m(s))\Delta s}{1 - \int\limits_{\alpha}^{b} g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s}\right). \tag{3.81}$$

L'intégration des deux membres de la dernière inégalité de (3.81) de a à t, donne

$$z(t) \leq c + qK^{\frac{q-1}{p}}\int\limits_{\alpha}^{t} h(\tau)(m(\tau) + \frac{l(\tau)\int\limits_{\alpha}^{b} n(s)g(m(s))\Delta s}{1 - \int\limits_{\alpha}^{b} g'(m(s))n(s)l(s)\Delta s})\Delta\tau. \tag{3.82}$$

L'inégalité désirée (3.57) découle des deux inégalités (3.82) et (3.63). ■

Remarque 3.3.3 *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *,* $g(x) = x,\ f(t,s) = f(t), p = q = 1,$ *l'inégalité donnée dans le Théorème 3.3.4 se réduit à l'inégalité donnée dans[[55], p.47,* (c_2)*].*

3.4 Applications

La dernière partie de cette section est consacrée à une certaine illustration de nos principaux et récents résultats par la présentation de quelques exemples dont l'objectif principal est explorer et d'étudier certaines propriétés de solutions des équations dynamiques sur des échelles de temps.

Exemple 3.4.1 *Considérons l'équation intégrale générale, mixte et non linéaire suivante*

$$y^p(t) = x(t) + \int_a^t F(s, y^q(s))\Delta s + \int_a^b G(s, y(s))\Delta s > 0, \tag{3.83}$$

pour $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, où $p \geq q \geq 1$, $p \geq r \geq 1$, $y(t)$ est une fonction inconnue, $x \in C_{rd}\left([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}\right), F, G \in C_{rd}\left([a,b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$.

Supposons les fonctions F et G indiquées dans la formule (3.83) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq a(t), \\ |F(s, y^q(s))| &\leq f(s)\,|y|^q\,, \\ |G(s, y(s))| &\leq n(s) g(|y|). \end{aligned} \tag{3.84}$$

où $a(t), n(t), g(t)\ ,\ f(t) \in C_{rd}\left([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+\right)$.

Proposition 3.4.1 *Admettons que* $y(t)$ *est la solution unique de l'équation (3.83) et* $\int_a^b g'(m^*(s)) n(s) l^*(s)\ \Delta s < 1,$ *alors*

$$|y(t)| \leq \left\{ m^*(t) + \frac{l^*(t) \int_a^b n(s)g(m(s))\Delta s}{1 - \int_a^b g'(m(s)n(s)l(s)\Delta s} \right\}, \tag{3.85}$$

pour tout $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$, où $m^*(t)$ et $l^*(t)$ sont définies comme dans le Théorème 3.3.2.

Preuve. A partir des équations (3.83) et (3.84), nous obtenons

$$|y(t)|^p \leq a(t) + \int_a^b f(s) |y(s)|^q \Delta s + \int_a^b n(s)g(|y|)\Delta s. \tag{3.86}$$

En faisant appel au Théorème 3.3.2 à l'inégalité ci-dessus, nous trouvons le résultat voulu (3.85). ■

Remarque 3.4.1 *Si nous prenons,* $g(x) = \arctan(x)$ *dans l'inégalité* (3.86), *alors la solution de (3.83) et (3.84) peut être estimée comme*

$$|y(t)| \leq \left\{ m^*(t) + \frac{l^*(t) \int_a^b n(s) \arctan(m^*(s))\Delta s}{1 - \int_a^b \frac{n(s)l(s)}{1 + m^{*2}(s)}\Delta s} \right\},$$

où $m^*(t)$ et $l^*(t)$ sont définies comme dans le Théorème 3.3.2.

Exemple 3.4.2 *Considérons le problème à valeur initiale suivant :*

$$y^\Delta(t) = h(t) \left[y^q(t) + \int_\alpha^t f(t,s)y^q(s)\Delta s + \int_a^b n(s) \ln(|y(s)| + 1)\Delta s \right], \; y(a) = c, \tag{3.87}$$

où $h(t)$, $f(t,s)$ et $n(t)$ sont exactement définies comme dans le Théorème 3.3.4, et c une constante.

Proposition 3.4.2 *Supposons que* $y(t)$ *est la solution unique de l'équation (3.87). Alors*

$$y(t) \leq \left[c + qK^{\frac{q-1}{p}} \int_a^t h(\tau)(m(t) + \frac{l(\tau) \int_a^b n(s) \ln(m(s) + 1)\Delta s}{1 - \int_a^b \frac{n(s)l(s)}{1 + m(s)}\Delta s})\Delta\tau \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.88}$$

pour tout $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, avec

$$\int_{a}^{b} \frac{n(s)l(s)}{1+m(s)} \Delta s < 1, \tag{3.89}$$

où $m^*(t)$ et $l^*(t)$ sont définies comme dans le Théorème 3.3.4.

Preuve. Si $y(t)$ est l'unique solution de (3.87), alors $y(t)$ peut être exprimée de la manière suivante

$$y(t) = c + \int_{a}^{t} h(s) \left[y^q(s) + \int_{a}^{s} f(s,\tau) y^q(\tau) \Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} n(\tau) \ln(|y(\tau)| + 1) \Delta\tau \right] \Delta s. \tag{3.90}$$

En outre,

$$|y(t)| \leq |c| + \int_{a}^{t} h(s) \left[|y^q(s)| + \int_{a}^{s} f(s,\tau) \left| y^q(\tau) \right| \Delta\tau) + \int_{a}^{b} n(\tau) \ln(|y(\tau)| + 1) \Delta\tau \right] \Delta s. \tag{3.91}$$

Appliquons le Théorème 3.3.4, nous trouvons le résultat voulu (3.88). ■

3.4.1 Sur quelques inégalités de type Gamidov bidimensionnelles

Dans cette partie, nous allons énoncer et prouver quelques nouvelles inégalités intégrales de type Gamidov en dimension deux qui sont des généralisations des résultats obtenus par **K. Cheng et C. Guo**[21].

Lemme 3.4.1 *Supposons que* $u(x,y)$, $a(x,y)$, $c(x,y)$, $g(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$. *Soit* $n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *une fonction différentiable croissante sur* $]0, +\infty[$ *telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur* $]0, +\infty[$. *Si l'inégalité*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + c(x,y) \int_{0}^{M} \int_{0}^{N} n(u(s,t)) g(s,t) ds dt, \tag{3.92}$$

est satisfaite, alors

$$u(x,y) \leq a(x,y) + \frac{c(x,y) \int_{0}^{M} \int_{0}^{N} g(s,t) n(a(s,t)) ds dt}{1 - \int_{0}^{M} \int_{0}^{N} c(s,t) g(s,t) n'(a(s,t)) ds dt}. \tag{3.93}$$

Ceci est valable pour tout $(x,y) \in \Delta$ *à condition que :*

$$\int_{0}^{M} \int_{0}^{N} n'(a(s,t)) c(s,t) g(s,t) ds dt < 1. \tag{3.94}$$

Preuve. De toute évidence $\int_0^M \int_0^N g(s,t)n(u(s,t))dsdt$ est une constante.

Soit

$$\Omega = \int_0^M \int_0^N g(s,t)n(u(s,t))dsdt, \tag{3.95}$$

alors

$$u(x,y) \leq a(x,y) + c(x,y)\Omega. \tag{3.96}$$

Comme n est une fonction croissante sur $]0,+\infty[$, alors, on a

$$n(u(x,y)) \leq n(a(x,y) + c(x,y)\Omega).$$

Et, par une simple application du théorème de la valeur moyenne à la fonction n, nous aurons, pour tout $x_1 \geq y_1 > 0$ l'existence $c \in]y_1, x_1[$ tel que,

$$n(x_1) - n(y_1) = n'(c)(x_1 - y_1) \leq n'(y_1)(x_1 - y_1). \tag{3.97}$$

On peut obtenir aisément

$$n(u(x,y)) \leq n'(a(x,y))c(x,y)\Omega + n(a(x,y). \tag{3.98}$$

Comme $g(x,y)$ est une fonction positive, alors

$$g(x,y)n(u(x,y)) \leq g(x,y)n'(a(x,y))c(x,y)\Omega + g(x,y)n(a(x,y). \tag{3.99}$$

En intégrant les deux membres de (3.99), on obtient

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^M \int_0^N g(s,t)n(u(s,t))dsdt \qquad (3.100) \\ &\leq \Omega \int_0^M \int_0^N n'(a(s,t))c(s,t)g(s,t)dsdt + \int_0^M \int_0^N g(s,t)n(a(s,t))dsdt. \end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité (3.96), l'inégalité précédente devient

$$\Omega \leq \frac{\int_0^M \int_0^N g(s,t)n(a(s,t))dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N c(s,t)g(s,t)n'(a(s,t))dsdt}. \tag{3.101}$$

L'inégalité désirée (3.93) découle des deux inégalités (3.101) et (3.96). ■

Remarque 3.4.2 *Si nous prenons $n(x) = x$, le Lemme 3.4.1 sera réduit au Lemme 3.2.1.*

Corollaire 3.4.1 *Supposons que toutes les conditions du Lemme 3.1 sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$u(x,y) \leq a(x,y) + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) \arctan(u(s,t)) dsdt,$$

est satisfaite, alors

$$u(x,y) \leq a(x,y) + \frac{c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) \arctan(a(s,t)) dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N \frac{c(s,t)g(s,t)}{1+a^2(s,t)} dsdt},$$

pour tout $(x,y) \in \Delta$, sous la condition

$$\int_0^M \int_0^N \frac{c(s,t)g(s,t)}{1+a^2(s,t)} dsdt < 1.$$

Et si

$$u(x,y) \leq a(x,y) + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) \ln(u(s,t)+1) dsdt,$$

alors

$$u(x,y) \leq a(x,y) + \frac{c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) \ln(a(s,t)+1) dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N \frac{c(s,t)g(s,t)}{1+a(s,t)} dsdt},$$

pour tout $(x,y) \in \Delta$, sous la condition

$$\int_0^M \int_0^N \frac{c(s,t)g(s,t)}{1+a(s,t)} dsdt < 1.$$

Théorème 3.4.1 *Soit $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$, $g(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$,et $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ sont des fonctions non décroissantes en x et y . Soit $n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0,+\infty[$ telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$. Si l'inégalité*

$$\begin{aligned} u(x,y) \;\leq\; & a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t)u(s,t) dsdt + c(x,y) \\ & \times \int_0^M \int_0^N g(s,t) n(u(s,t)) dsdt, \end{aligned} \tag{3.102}$$

est satisfaite, alors

$$\begin{aligned} u(x,y) \;\leq\; & A^*(x,y) + C^*(x,y) \\ & \times \frac{\int_0^M \int_0^N g(s,t) n(A^*(s,t)) dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N C^*(s,t)g(s,t)n'(A^*(s,t)) dsdt}, \end{aligned} \tag{3.103}$$

pour tout $(x,y) \in \Delta$, *sous la condition*

$$\int_0^M \int_0^N C^*(s,t)g(s,t)n'(A^*(s,t))dsdt < 1,$$

où

$$\begin{aligned} A^*(x,y) &= a(x,y)\exp\left\{b(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt\right\}, \\ C^*(X,Y) &= c(x,y)\exp\left\{b(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt\right\}. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Preuve. Fixons arbitrairement $(X,Y) \in \Delta$, pour $(x,y) \in \Delta_1 = [0,X]\times\ [0,Y]$, d'aprés (3.102), on a

$$\begin{aligned} u(x,y) \leq\ & a(X,Y) + b(X,Y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)u(s,t)dsdt \\ & + c(X,Y)\times\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(u(s,t))dsdt, \end{aligned} \tag{3.105}$$

Définissons une fonction $z(x,y)$ par

$$\begin{aligned} z(x,y) =\ & a(X,Y) + b(X,Y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)u(s,t)dsdt \\ & + c(X,Y)\times\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(u(s,t))dsdt\ , \end{aligned}$$

alors,

$$u(x,y) \leq v(x,y), \tag{3.106}$$

et

$$v(0,y) = a(X,Y) + c(X,Y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(u(s,t))dsdt, \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}v(x,y) &= b(X,Y)\int_0^y f(x,t)u(x,t)dt \\ &\leq b(X,Y)\int_0^y f(x,t)v(x,t)dt \\ &\leq (b(X,Y)\int_0^y f(x,t)dt)v(x,y). \end{aligned} \tag{3.108}$$

Comme $v(x,y)$ non décroissant en y, alors (3.108) devient

$$\frac{(\partial/\partial x)\,v(x,y)}{v(x,y)} \leq b(X,Y)\int_0^y f(x,t)dt. \tag{3.109}$$

En fixant $x = s$ et en intégrant les deux membres de l'inégalité ci-dessus de 0 à x, nous pouvons obtenir

$$v(x,y) \leq \; v(0,y)\exp\left\{b(X,Y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt\right\}. \tag{3.110}$$

De (3.106) à (3.107), on obtient,

$$\begin{aligned} u(x,y) \;&\leq\; \left[a(X,Y)+c(X,Y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(v(s,t))dsdt\right] \\ &\quad\times\exp\left\{b(X,Y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt\right\} \\ &= a(X,Y)\exp\left\{b(X,Y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt\right\} \\ &\quad+c(X,Y)\exp\left\{b(X,Y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)dsdt\right\} \\ &\quad\times\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(v(s,t))dsdt \\ &= A_1(x,y,X,Y)+C_1(x,y,X,Y) \\ &\quad\times\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(v(s,t))dsdt. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Appliquons le Lemme 3.4.1 à l'inégalité (3.111), nous obtenons

$$\begin{aligned} u(x,y) \;&\leq\; A_1(x,y,X,Y)+C_1(x,y,X,Y) \\ &\quad\times\frac{\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(A_1(s,t,X,Y))dsdt}{1-\int_0^M\int_0^N C_1(x,y,X,Y)g(s,t)n'(A_1(s,t,X,Y))dsdt} \end{aligned} \tag{3.112}$$

puisque l'inégalité (3.112) est valable pour tous $(x,y)\in\Delta_1$, nous prenons $x = X$ et $y = Y$, on obtient,

$$\begin{aligned} u(X,Y) \;&=\; A^*(X,Y)+C^*(X,Y)\times \\ &\quad\frac{\int_0^M\int_0^N g(s,t)n(A^*(s,t))dsdt}{1-\int_0^M\int_0^N C^*(s,t)g(s,t)n'(A^*(s,t))dsdt}, \end{aligned}$$

nous remplaçons X et Y par x et y, respectivement, et nous obtenons l'inégalité (3.103).

■

Remarques 3.4.3 *Si nous prenons $n(x) = x$, le Théorème 3.4.1 sera réduit au Théorème 2 dans [21].*

Théorème 3.4.2 *Soient $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ et $g(x,y)$ des fonctions définies comme dans le Théorème 3.4.1. Si $u(x,y) \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ satisfait à*

$$\begin{aligned} u^p(x,y) &\leq a(x,y) + b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t) u^q(s,t) dsdt + c(x,y) \\ & \quad \times \int_0^M \int_0^N g(s,t) n(u(s,t)) dsdt, \end{aligned} \tag{3.113}$$

où p, q sont des constantes réelles telles que $p \geq q \geq 0$, $p \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq A^*(x,y) + C^*(x,y) \\ & \quad \times \frac{\int_0^M \int_0^N G^*(s,t) n(A^*(s,t)) dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N C^*(s,t) G^*(s,t) n'(A^*(s,t)) dsdt}, \end{aligned} \tag{3.114}$$

est valable pour $(x,y) \in \Delta$, où

$$\begin{aligned} A^*(x,y) &= A_1(x,y) \exp\left\{ B_1(x,y) \int_0^x \int_0^y F^*(s,t) dsdt \right\}, \\ C^*(X,Y) &= C_1(x,y) \exp\left\{ B_1(x,y) \int_0^x \int_0^y F^*(s,t) dsdt \right\}, \end{aligned} \tag{3.115}$$

et

$$\begin{aligned} A_1(x,y) &= \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t) \left[\frac{q}{p} K^{(q-p)/p} a(s,t) + \frac{p-q}{p} \; K^{q/p} \right] dsdt \\ & \quad + \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} a(x,y) + \frac{p-1}{p} K^{\frac{1}{p}}, \\ & \quad B_1(x,y) = \frac{q}{p} K^{(q-p)/p} b(x,y), \quad C_1(x,y) = \frac{1}{p} K^{\frac{1-p}{p}} c(x,y), \\ F^*(x,y) &= f(x,y), \qquad G^*(x,y) = g(x,y), \end{aligned} \tag{3.116}$$

sous la condition

$$\int_0^M \int_0^N C^*(s,t) G^*(s,t) n'(A^*(s,t)) dsdt < 1.$$

Preuve. Définissons une fonction $w(x,y)$ par

$$\begin{aligned} w(x,y) &= b(x,y) \int_0^x \int_0^y f(s,t) u^q(s,t) dsdt \\ & \quad + c(x,y) \int_0^M \int_0^N g(s,t) n(u(s,t)) dsdt, \end{aligned} \tag{3.117}$$

alors

$$u^p(x,y) \leq a(x,y) + w(x,y), \tag{3.118}$$

Utilisons le Lemme 1.4.1 pour tout $K > 0$, nous obtenons facilement

$$\begin{aligned} u(x,y) &\leq (a(x,y)+w(x,y))^{1/p} \leq \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}(a(x,y)+w(x,y)) + \frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}} = v(x,y), \\ u^q(x,y) &\leq (a(x,y)+w(x,y))^{q/p} \leq \frac{q}{p}K^{(q-p)/p}(a(x,y)+w(x,y)) + \frac{p-q}{p}K^{q/p}, \\ \frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}w(x,y) &\leq v(x,y). \end{aligned} \tag{3.119}$$

Il résulte des inégalités (3.117) et (3.119) que

$$\begin{aligned} w(x,y) \leq\ & b(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)\left[\frac{q}{p}K^{(q-p)/p}a(s,t) + \frac{p-q}{p}K^{q/p}\right]dsdt \\ & +qK^{(q-1)/p}b(x,y)\int_0^x\int_0^y f(s,t)v(s,t)dsdt \\ & +c(x,y)\int_0^M\int_0^N g(s,t)\ n(v(s,t))dsdt, \end{aligned} \tag{3.120}$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité (3.120) par $\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}$ et en ajoutant $\frac{1}{p}K^{\frac{1-p}{p}}a(x,y)+$ $\frac{p-1}{p}K^{\frac{1}{p}}$ aux deux côtés de l'inégalité résultante, nous obtenons

$$v(x,y) \leq A_1(x,y) + B_1(x,y)\int_0^x\int_0^y F^*(s,t)v(s,t)dsdt \tag{3.121}$$
$$+C_1(x,y)\int_0^M\int_0^N G^*(s,t)n(v(s,t))dsdt,$$

où $A_1(x,y), B_1(x,y), C_1(x,y), F^*(x,y)$ et $G^*(x,y)$ sont définies par (3.116).

Comme $A_1(x,y), B_1(x,y)$ et $C_1(x,y)$ sont des fonctions croissantes, continues et positives, l'Appliquons du Théorème 3.4.1, donne l'estimation de $v(x,y)$ suivante:

$$\begin{aligned} u(x,y) \leq\ & v(x,y) \leq A^*(x,y) + C^*(x,y) \\ & \times\frac{\int_0^M\int_0^N G^*(s,t)n(A^*(s,t))dsdt}{1-\int_0^M\int_0^N C^*(s,t)G^*(s,t)n'(A^*(s,t))dsdt}. \end{aligned} \tag{3.122}$$

où $A^*(x,y)$ et $C^*(x,y)$ sont données par (3.115). ■

Remarque 3.4.4 *Si nous prenons $n(x) = x$, le Théorème 3.4.2 sera réduit au Théorème 6 [21].*

3.5 Applications

Nous allons présenter quelques exemples pour étudier certaines propriétés des solutions des équations différentielles et intégrales.

Exemple 3.5.1 *Considérons l'équation intégrale suivante:*

$$z(x,y) = a(x,y) + b(x,y)\int_0^x\int_0^y F(s,t,z)dsdt + c(x,y)\int_0^M\int_0^N G(s,t,z)dsdt, \quad (3.123)$$

pour $(x,y) \in \Delta$*, où* $z(x,y) \in C(\Delta,\mathbb{R}), a(x,y), b(x,y), c(x,y) \in C(\Delta,\mathbb{R}_+)$ *sont non décroissants en* x *et* y *et* $F(x,y,z), G(x,y,z) \in C(\Delta\times\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Théorème 3.5.1 *Supposons les fonctions* F *et* G *indiquées dans la formule (3.123) satisfaisant les deux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} |F(s,t,z)| &\leq f(s,t)\,|z|, \\ |G(s,t,z)| &\leq g(s,t)n(|z|), \end{aligned} \quad (3.124)$$

où $f(s,t)$, $g(s,t)$ et n sont définis comme dans le Théorème 3.4.1.

Admettons que $z(x,y)$ est la solution unique de l'équation (3.123). Alors

$$\begin{aligned} |z(x,y)| \leq\ & A^*(x,y) + C^*(x,y) \\ & \times \frac{\int_0^M\int_0^N n(A^*(s,t))g(s,t)dsdt}{1-\int_0^M\int_0^N n'(A^*(s,t))C^*(s,t)g(s,t)dsdt} \end{aligned} \quad (3.125)$$

est valable pour tout $(x,y)\in\Delta$ sous la condition

$$\int_0^M\int_0^N C^*(s,t)g(s,t)n'(A^*(s,t))dsdt < 1. \quad (3.126)$$

où $A^*(x,y)$, $C^*(x,y)$ sont définies comme dans (3.115).

Preuve. Si $z(x,y)$ est la solution unique de (3.123), alors $z(x,y)$ peut être exprimé de la manière suivante

$$\begin{aligned} |z(x,y)| &\leq a(x,y) + b(x,y)\int_0^x \int_0^y f(s,t)\,|z(s,t)|\,dsdt \\ &+ c(x,y)\int_0^M \int_0^N g(s,t)n(|z(s,t)|)dsdt. \end{aligned} \tag{3.127}$$

Appliquons le Théorème 3.4.1 à (3.127), nous trouvons le résultat voulu (3.125). ■

Corollaire 3.5.1 *Si nous prenons, $n(z) = arctan(z)$, dans l'inégalité(3.124), alors la solution unique de (3.123) peut être exprimée par*

$$\begin{aligned} |z(x,y)| &\leq A^*(x,y) + C^*(x,y) \\ &\times \frac{\int_0^M \int_0^N g(s,t)\arctan(A^*(s,t))dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N \frac{C^*(s,t)g(s,t)dsdt}{1+A^{*2}(s,t)}}. \end{aligned}$$

Sous la condition

$$\int_0^M \int_0^N \frac{C^*(s,t)g(s,t)dsdt}{1+A^{*2}(s,t)} < 1.$$

Si nous prenons $n(z) = ln(z+1)$, alors

$$\begin{aligned} |z(x,y)| &\leq A^*(x,y) + C^*(x,y) \\ &\times \frac{\int_0^M \int_0^N g(s,t)\ln(A^*(s,t)+1)dsdt}{1 - \int_0^M \int_0^N \frac{C^*(s,t)g(s,t)dsdt}{1+A^*(s,t)}}. \end{aligned}$$

Sous la condition

$$\int_0^M \int_0^N \frac{C^*(s,t)g(s,t)dsdt}{1+A^*(s,t)} < 1.$$

Proposition 3.5.1 *Supposons que les fonctions F et G dans (3.123) satisfaisant les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} |F(s,t,z)| - F(s,t,\overline{z}) &\leq f(s,t)\,|z-\overline{z}|\,, \\ |G(s,t,z)| - G(s,t,\overline{z}) &\leq g(s,t)n(|z-\overline{z}|), \end{aligned} \tag{3.128}$$

où $f(s,t)$, $g(s,t)$, n sont définies dans le Théorème 3.4.1, $n(0) = 0$. Si

$$\int_0^M \int_0^N C^*(s,t)g(s,t)n'(A^*(s,t))dsdt < 1,$$

où A^*, C^* sont définies dans le Théorème 3.4.1 et $z(x,y)$ est solution de (3.123), alors l'équation (3.123) possède au plus une solution.

Preuve. Soient $z(x,y)$ et $\overline{z}(x,y)$ deux solutions de (3.123), alors

$$\begin{aligned} \overline{z}(x,y) &= a(x,y) + b(x,y)\int_0^x \int_0^y F(s,t,\overline{z})dsdt \\ &\quad + c(x,y)\int_0^M \int_0^N G(s,t,\overline{z})dsdt, \\ z(x,y) &= a(x,y) + b(x,y)\int_0^x \int_0^y F(s,t,z)dsdt \\ &\quad + c(x,y)\int_0^M \int_0^N G(s,t,z)dsdt, \end{aligned} \tag{3.129}$$

de (3.129), nous avons

$$\begin{aligned} |z(x,y) - \overline{z}(x,y)| &\leq b(x,y)\int_0^x \int_0^y |F(s,t,z) - F(s,t,\overline{z})|\, dsdt \\ &\quad + c(x,y)\int_0^M \int_0^N |G(s,t,z) - G(s,t,\overline{z})|\, dsdt \\ &\leq b(x,y)\int_0^x \int_0^y f(s,t)\,|z - \overline{z}|\, dsdt \quad + c(x,y) \\ &\quad \times \int_0^M \int_0^N g(s,t)n(|z - \overline{z}|)dsdt. \end{aligned} \tag{3.130}$$

Appliquons le Théorème 3.4.1, nous obtenons que $|z(x,y) - \overline{z}(x,y)| \leq 0$, ce qui donne : $z(x,y) = \overline{z}(x,y)$ pour $(x,y) \in \Delta$. ■

CHAPITRE 4

Stabilité de quelques systémes perturbés aux échelles de temps par l'approche des inégalités intégrales

La théorie de la stabilité est l'une des branches importantes de la théorie des équations différentielles. Plusieurs activités de recherche sont principalement axées sur cette approche (voir [18] et [39]). Certains résultats relatifs aux équations dynamiques aux échelles de temps sont obtenus [41] . En particulier, l'analyse de la stabilité aux échelles de temps a été lancée dans les années 1990 avec les travaux d'Aulbach et Hilger [2] .

Une attention particulière a été accordée aux équations différentielles delta linéaires et à la stabilité asymptotique utilisant l'approche de Lyapunov dans [62]. Plusieurs articles (Dacunha [28], Peterson et Raffoul [59] , Bohner et Martynyuk [7] , Martynyuk [42] , Martynyuk et al.[43] ont étudié les propriétés de la stabilité exponentielle des systèmes dynamiques aux échelles de temps .

Les équations différentielles ou différentielles linéaires non autonomes régressives décrites par les équations suivantes:

$$x^{\Delta} = A(t)x, \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{T}$ et $A : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ est une fonction régressives à valeurs matricielles; le système a été traité depuis longtemps dans des cas aussi discrets que continus et sous diverses hypothèses pour étudier le comportement des solutions.

Ici, nous représentons la perturbation comme un terme additif au côté droit de l'expression (4.1). Ainsi, le système perturbé associé sur les échelles de temps est donné par l'équation suivante:

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x + F(t, x(t)), \tag{4.2}$$

où $F(t, 0) = 0$ et $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction rd-continues de $\mathbb{T}$.

Dans la première section de ce chapitre, en citant tout d'abord quelques inégalités intégrales dynamiques non linéaires de type Gronwall aux échelles de temps, qui sont utiles pour notre présente étude, nous allons étendre les résultats de stabilité asymptotique du système perturbé (4.2) présentés par B. B. Nasser et K. Boukerrioua [12, 13] . Dans une seconde section , nous énonçons quelques nouveaux résultats sur l'étude de la stabilité exponentielle de système perturbé (4.2), sous différentes conditions imposées sur la perturbation F.

4.1 Inégalités Intégrales de Gronwall sur les échelles de temps

Dans cette section, on cite quelques inégalités intégrales dynamiques non linéaires de type Gronwall aux échelles de temps, qui sont nécessaires à notre étude.

Lemme 4.1.1 ([12]) *Soient* $\phi, \varphi, \alpha, \Psi, \chi \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ *.Si l'inégalité*

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \Psi(t) \int_a^t \{\alpha(s)\varphi(s) + \chi(s)\} \Delta s, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_a^+,$$

est vérifiée, alors

$$\phi(t) \leq \varphi(t) + \Psi(t) \int_a^t \{\alpha(s)\varphi(s) + \chi(s)\} \exp\left[\int_{\sigma(s)}^t \alpha(\tau)\Psi(\tau)\Delta\tau\right] \Delta s, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_a^+.$$

Lemme 4.1.2 ([12]) *Soit p une fonction positive et rd-continue, nous avons les inégalités*

$$1 + \int_{t_0}^{t} p(\tau)\Delta\tau \leq e_p(t, t_0) \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\Delta\tau\right), \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_{t_0}^+.$$

où, l'ensemble noté $\mathbb{T}_{t_0}^+$ est défini par: $\mathbb{T}_{t_0}^+ = \{t, t_0 \in \mathbb{T}, t \geq t_0\}$.

Théorème 4.1.1 ([12]) *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

- le système linéaire (4.1) uniformément asymptotiquement stable.
- Le terme perturbé satisfait

$$F(t, x) \leq d(t) \|x\| + k(t),$$

- $\int_a^{+\infty} \frac{d(s)}{1-\lambda\mu(s)} \Delta s \leq \widetilde{d} < +\infty$, $\int_a^{+\infty} k(s) e_{-\lambda}(a, \sigma(s)) \Delta s \leq \overline{k} < +\infty$. Alors le système perturbé (4.2) est uniformément attractif .

Théorème 4.1.2 ([12]) *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

- le système linéaire (4.1)est uniformément et exponentiellement stable.
- Le terme perturbé satisfait

$$F(t, x) \leq \alpha(t) \|x\| + \chi(t),$$

- $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{\alpha(s)}{1-\lambda\mu(s)} \Delta s \leq \widetilde{d} < +\infty$, $\int_{t_0}^{+\infty} \chi(s) e_{-\lambda}(t_0, \sigma(s)) \Delta s \leq \overline{k} < +\infty$. Alors le système perturbé (4.2) est uniformément partialement et exponentiellement stable.

4.2 Quelques nouveaux résultats sur l'étude la stabilité exponentielle de système perturbée

La solution du système perturbé (4.2) vérifie l'équation intégrale

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(t, \sigma(s))F(s, x(s))\Delta s.$$

Rappelons que $\phi_A(t, t_0)$ est une fonction matricielle est appelée matrice de transition (voir Définition 1.3.2)

Nous énonçons maintenant quelques nouveaux résultats sur l'étude de la stabilité exponentielle de système perturbée.

Théorème 4.2.1 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

- le système linéaire (4.1) uniformément et exponentiellement stable.

- Le terme perturbé satisfait

$$F(t, x) \leq g(t)w(\|x\|), t \geq t_0 \tag{4.3}$$

Où $g(t)$ une fonction positive and rd-continue, $w \in \widehat{H}$ (voir Définition 1.4.1, p.23). Soit r la solution de

$$r^{\Delta}(t) = \gamma\lambda(t)w(r(t), r(t_0) = \gamma \tag{4.4}$$

- Il existe une fonction bijective W satisfaisant

$$\begin{aligned} (W \circ r)^{\Delta} &= \gamma\lambda \text{ sachant que} \int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)\Delta s < \infty, \qquad (4.5) \\ W(u) &= \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{W(s)},\ W(\infty) = \infty. \end{aligned}$$

Alors le système perturbé (4.2) est uniformément et exponentiellement stable.

Preuve. Soit le système linéaire (4.1) uniformément et exponentiellement stable, la fonction correspondante de la matrice de transition satisfait

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0), \tag{4.6}$$

La solution du système perturbé (4.2) vérifie l'équation intégrale

$$x(t) = \Phi_A(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(t,\sigma(s))F(s,x(s))\Delta s, \tag{4.7}$$

En prenant les deux parties de l'équation (4.7) en norme avec l'utilisation de (4.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|\Phi_A(t,t_0)\| \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi_A(t,\sigma(s))\| \|F(s,(x(s))\| \Delta s, \\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0) \|x_0\| + e_{-\lambda}(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))g(s)w(\|x(s)\|)\Delta s, \\
&\leq e_{-\lambda}(t,t_0) \left[\gamma \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))g(s)w(\|x(s\|)\Delta s\right], \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{-\lambda}(t_0,t) \|x(t)\| &\leq \gamma \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))g(s)w(\|x(s\|)\Delta s, \\
\frac{e_{-\lambda}(t_0,t) \|x(t)\|}{\|x_0\|} &\leq \gamma + \gamma \int_{t_0}^{t} \frac{e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))}{\|x_0\|} g(s)w\left(\frac{\|x_0\|}{\gamma e_{-\lambda}(t_0,t)} \frac{\gamma e_{-\lambda}(t_0,t) \|x(s\|}{\|x_0\|}\right)\Delta s
\end{aligned}$$

Posons maintenant, $u(t) = \frac{e_{-\lambda}(t_0,t)\|x(t)\|}{\|x_0\|}$, nous obtenons

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^{t} \frac{e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))}{\|x_0\|} g(s)w\left(\frac{\|x_0\|}{\gamma e_{-\lambda}(t_0,t)} u(s)\right)\Delta s. \tag{4.9}$$

Puisque la fonction w est de classe $\widehat{H}$, nous aurons

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^{t} \frac{e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))}{\|x_0\|} g(s)\phi\left(\frac{\|x_0\|}{\gamma e_{-\lambda}(t_0,t)}\right) w(u(s))\Delta s,$$

En prenons :

$$\lambda(s) = \frac{e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))}{\|x_0\|} g(s)\phi\left(\frac{\|x_0\|}{\gamma e_{-\lambda}(t_0,t)}\right),$$

Nous obtenons

$$u(t) \leq \gamma + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)w(u(s))\Delta s,$$

Appliquons le théorème 2.1.2 (voir page 27), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq W^{-1}\left[W(\gamma) + \gamma \int_{t_0}^{t} \lambda(s)\Delta s\right], \qquad (4.10) \\
&\leq W^{-1}\left[W(\gamma) + \gamma \int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)\Delta s\right],
\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors

$$\|x(t)\| \leq de_{-\lambda}(t, t_0) \|x_0\|$$

où

$$d = W^{-1}\left[W(\gamma) + \gamma \int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)\Delta s\right].$$

Alors le système perturbé (4.2) est uniformément et exponentiellement stable. ■

Théorème 4.2.2 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

i) le système linéaire (4.1) uniformément et exponentiellement stable.

ii) Le terme perturbé satisfait la condition:

$$\|F(t, x)\| \leq \eta \left(d(t) \|x\| + k(t)\right), \tag{4.11}$$

où $d, k \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$, $\eta \ : R_+ \to R_+$ est une fonction croissante différentiable sur $]0, \infty[$telle que sa dérivée première η' est continue et décroissante sur $]0, \infty[$.

iii) $\int_a^{+\infty} \frac{\eta'(k(s))d(s)}{1-\lambda\mu(s)}\Delta s \leq \widetilde{d} < +\infty, \int_a^{+\infty} \eta(k(s))e_{-\lambda}(a, \sigma(s)) \leq \widetilde{k} < +\infty,$

Alors, le systeme perturbé (4.2) est uniformément partialement et exponentiellement stable.

Preuve. La solution du système perturbé (4.2) vérifie l'équation intégrale suivante:

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi_A(t, t_0)\| \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi_A(t, \sigma(s))\| \|F(s, (x(s))\| \Delta s.$$

Comme le système linéaire (4.1) est uniformément et exponentiellement stable, d'aprés les conditions i) et ii), nous obtenons aisément

$$\|x(t)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t, t_0) \|x_0\| + \gamma e_{-\lambda}(t, t_0) \int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0, \sigma(s))g\left(d(s) \|x\| + k(s)\right) \Delta s. \tag{4.12}$$

Par une simple application du Théorème de la valeur moyenne à la fonction η, nous aurons, pour tout $x_1 \geq y_1 > 0$, il existe $c \in]y_1, x_1[$ tel que,

$$\eta(x_1) - \eta(y_1) = \eta'(c)(x_1 - y_1) \leq \eta'(y_1)(x_1 - y_1)$$

Ainsi, nous avons:

$$\eta\left(d(s)\|x\|+k(s)\right)\leq\eta'(k(s))\times(d(s)\|x\|)+\eta(k(s)) \tag{4.13}$$

Et en se servant des inégalités (4.12) et (4.13) précédentes, nous obtenons:

$$\|x(t)\|\leq\gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\|+\gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t}e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\left[\eta'(k(s))\times(d(s)\|x\|)+\eta(k(s)\right]\Delta s,$$

Appliquons le Lemme 4.4.1 à cette dernière inégalité, nous trouvons:

$$\|x(t)\|\leq\gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\left[\begin{array}{c}\|x_0\|+(\int_{t_0}^{t}(e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\eta'(k(s))d(s)\gamma e_{-\lambda}(s,t_0)\|x_0\|+e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))\eta(k(s))\\ \times\exp\left(\int_{\sigma(s)}^{t}e_{-\lambda}(t_0,\sigma(\tau))\eta'(k(\tau))\times d(\tau)\gamma e_{-\lambda}(\tau,t_0)\Delta\tau\right)\Delta s,\end{array}\right] \tag{4.14}$$

D'aprés les conditions ii) et iii), nous déduisons que:

$$\|x(t)\|\leq\gamma\left(1+\gamma\widetilde{d}\exp\left(\gamma\widetilde{d}\right)\right)e_{-\lambda}(t,t_0)\|x_0\|+\gamma\widetilde{k}\exp\left(\gamma\widetilde{d}\right)e_{-\lambda}(t,t_0). \tag{4.15}$$

■

Théorème 4.2.3 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

- le système linéaire (4.1) uniformément et exponentiellement stable.
- Le terme perturbé satisfait la relation suivante:

$$F(t,x)\leq a(t)\beta(\|x\|),t\geq t_0$$

où $a\left(t\right)\in C_{rd}\left(\mathbb{T},\mathbb{R}_+\right)$, $\beta\in S$.

Alors, le système perturbé (4.2) est uniformément et exponentiellement stable.

Preuve. La solution du système perturbé (4.2) vérifie l'équation intégrale suivante:

$$x(t)=\Phi_A(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi_A(t,\sigma(s))F(s,x(s))\Delta s,$$

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &= \|\Phi_A(t,t_0)\|\,\|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi_A(t,\sigma(s))\|\,\|F(s,(x(s))\|\,\Delta s,\\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\,\|x_0\| + e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))a(t)\beta(\|x(s)\|)\Delta s,\\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\,\|x_0\| + e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))a(t)\,\|x_0\|\,\frac{\beta(\|x(s)\|)}{\|x_0\|}\Delta s,\\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\,\|x_0\| + e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))a(t)\,\|x_0\|\,\frac{\beta(\|x(s)\|)}{\|x_0\|}\Delta s,\\
&\leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)\,\|x_0\| + e_{-\lambda}(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \gamma e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))a(t)\,\|x_0\|\,e_{-\lambda}(t,t_0)\beta\left(\frac{\|x(s)\|}{\|x_0\|\,e_{-\lambda}(t,t_0)}\right)\Delta s,\\
&\leq e_{-\lambda}(t,t_0)\,\|x_0\|\left[\gamma + \gamma\int_{t_0}^{t} e_{-\lambda}(t_0,\sigma(s))a(t)\,\|x_0\|\,e_{-\lambda}(s,t_0)\beta\left(\frac{\|x(s)\|}{\|x_0\|\,e_{-\lambda}(s,t_0)}\right)\Delta s\right],
\end{aligned}$$

Prenons: $u(t) = \|x(t)\|\,\|x(t_0)\|^{-1}\,e_{-\lambda}(t_0,t)$, alors, nous obtenons:

$$u(t) \leq \gamma + \gamma\int_{t_0}^{t} \frac{a(s)}{1-\lambda\mu(s)}\,\|x_0\|\,\beta\left(u(s)\right)\Delta s, \tag{4.16}$$

Cela implique par l'inégalité de Bihari [3] que

$$u(t) \leq W^{-1}\left[W(\gamma) + \gamma\int_{t_0}^{t}\lambda(s)\Delta s\right] \leq W^{-1}\left[W(\gamma) + \gamma\int_{t_0}^{\infty}\lambda(s)\Delta s\right], \tag{4.17}$$

Ainsi nous avons

$$x(t) \leq M(t_0)\,\|x_0\|\,e_{-\lambda}(t,t_0),$$

où

$$\begin{aligned}
d &= W^{-1}\left[W(\gamma) + \gamma\int_{t_0}^{\infty}\lambda(s)\Delta s\right], \qquad (4.15)\\
\lambda(s) &= \frac{a(s)}{1-\lambda\mu(s)}\,\|x_0\|\,.
\end{aligned}$$

■

CHAPITRE 5

Conclusion

Cette étude s'inscrit dans la démarche de l'application des outils d'analyse des équations différentielles.Il s'agit d'une certaine généralisation des inégalités intégrales de type Gronwall-Belmann fractionnaires et, également de type Gamidov, pour des fonctions à une et à deux variables.

Le premier chapitre de notre recherche nous a permis d'esquisser la théorie des échelles de temps, des notions basiques de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, ainsi que quelques notions fondamentales et des définitions relatives à la stabilité.

Dans le deuxième chapitre, nous avons traité les inégalités intégro-différentielles fractionnaires uni et bidimensionnelles. Nous avons pu, d'une part, établir de nouvelles inégalités de ce type, et d'autre part, trouver une application pour ces résultats.

Le troisième chapitre a été consacré à l'étude des inégalités intégrales de type Gamidov où il nous a été possible de procéder à leur généralisation pour les fonctions à une et deux variables

respectivement.

Enfin, dans le quatrième et dernier chapitre, on a procédé à l'étude de la stabilité de certains systèmes perturbés aux échelles de temps par l'approche des inégalités intégrales. Nous nous sommes intéressés, plus particulièrement, à la stabilité exponentielle de ces systèmes.

Publications Internationales :

1. **K. Boukerrioua, D. Diabi and T. Chiheb**, **Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5 (2017), no. 1, 109–114.**

2. **K. Boukerrioua, D. Diabi and I. Meziri , New explicit bounds on Gamidov type integral inequalities on times scales and applications. Journal of Mathematical Inequalities Volume 12, Number 3 (2018), 807–825.**

3. **K. Boukerrioua, D. Diabi and B. Kilani**, **On some new generalizations of certain Gamidov integral inequalities in two independent variables and their applications. Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. Vol. 33, No 3 (2018), 467-479.**

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, A propos d'une note de M. Pierre Humbert, C. R. Académie des sciences , 236, 2031-2032(1953).

[2] B. Aulbach and S. Hilger, Linear Dynamic Processes with Inhomogeneous Time Scale, Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems. (Gaussing, 1990), Math. Res. Vol. 59, Akademie Verlag, Berlin, 1990, p. 9-20.

[3] D. Baínov, P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications, vol. 57 of Mathematics and its Applications (East European Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1992), translated by R. A. M. Hoksbergen and V. Covachev.

[4] N.S. Barnett, P. Cerone, S.S. Dragomir, and J. Roumeliotis, Some inequalities for the dispersion of a random variable whose pdf is defined on a finite interval, J. Ineq. Pure and Appl. Math. 2(1) Art. 1, 2001.

[5] M. Bohner, and A. C. Peterson, Dynamic equations on time scales : An Introduction with Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[6] M. Bohner, A.C. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[7] M. Bohner and A. A. Martynyuk, Elements of stability theory of A. M. Liapunov for dynamic equations on time scales. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 7(3):225-251, 2007.

[8] R. Bellman, The stability of solutions of linear differential equations. Duke. Math. J. 10, (1943) , 643-647.

[9] R. Bellman, Asymptotic series for the solutions of linear differential-difference equations. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 7 (1958), 261–269.

[10] P. R. Beesack, Gronwall inequalities. Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 11. Carleton University, Ottawa, Ont, (1975).

[11] I. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations, Acta Math Acad Sci Hunar. 7 (1956), 71 - 94.

[12] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. A. Hammami, On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities, Appl. Sci. 16 (2014), 56–71.

[13] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. A. Hammami, On stability and stabilization of perturbed time scale systems with Gronwall inequalities, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. 11 (2015), 207–235.

[14] K. Boukerrioua , I. Meziri and T. Chiheb, Some Refinements Of Certain Gamidov Integral Inequalities On time Scales And Applications. Kragujevac Journal Of Mathematics. Vol 42, No. (2018), 131–152.

[15] **K. Boukerrioua, D. Diabi and T.Chiheb, Further nonlinear integral inequalities in two independent variables on time scales and their applications. Malaya J. Mat. 5 (2017), no. 1, 109–114.**

[16] **K. Boukerrioua, D. Diabi and I. Meziri , New explicit bounds on Gamidov type integral inequalities on times scales and applications. Journal of Mathematical Inequalities Volume 12, Number 3 (2018), 807–825.**

[17] **K. Boukerrioua, D. Diabi and B. Kilani, On some new generalizations of certain Gamidov integral inequalities in two independent variables and their applications. Facta Universitatis (Niš) Ser. Math. Inform. Vol. 33, No 3 (2018), 467-479.**

[18] F. Brauer and J.A. Nohel, The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations. An Introduction. New York, NY, USA, Dover Publications, 1989.

[19] C. Corduneanu, Principles of Differential and Integral Equations, 55, Allyn and Bacon, Boston, 1971 Volume 2008, Article ID 909156, 13 pages.

[20] W.S. Cheung, Q.H.Ma, S.Tseng, Some New Nonlinear Weakly Singular Integral Inequalities of Wendroff Type with Applications, J. Inequal. Appl, vol. 2008, Article ID 909156, 13 pages, 2008.

[21] K.Cheng, C.Guo, New Explicit Bounds on Gamidov Type Integral Inequalities for Functions in Two Variables and Their Applications, Abstr. Appl. Anal, (2014), Article ID 539701, 9 pages.

[22] K. Cheng, C. Guo, M. Tang, Some Nonlinear Gronwall-Bellman-Gamidov Integral Inequalities and Their Weakly Singular Analogues with Applications, Abstr. Appl. Anal. (2014), Article ID 562691.

[23] S.K. Choi, N. J. Koo, and D.M.Im, h-Stability for Linear Dynamic Equations on Time Scales. J. Math. Anal. Appl., 324(1):707-720, 2006.

[24] S.K. Choi, N. J. Koo, and D.M.Im, Stability of Linear Dynamic Systems on Time Scales. Adv. Differ. Equ., pages Art. ID 670203, 12, 2008.

[25] S. C. Chu, F. T. Metcalf, On Gronwall's inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 18, (1967), 439–440.

[26] T. S. Doan, A. Kalauch, S. Siegmund, Exponential Stability of linear Time-Invariant Systems on Time Scales, Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 9(1), (2009), 37–50.

[27] U. D. Dhongade, S. G. Deo, Some generalizations of Bellman-Bihari integral inequalities, J. Math. Anal. Appl. 44 (1973), 218–226.

[28] J.J. Dacunha, Stability for Time Varying Linear Dynamic Systems on Time Scales. J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), No. 2, 381-410.

[29] A. Erdélyi. Higher, Transcendental Functions, vol. 2. McGraw-Hill, New York (1955).

[30] A. Erdélyi. Higher, Transcendental Functions, vol. 3. McGraw-Hill, New York (1955).

[31] Q. Feng, F. Meng, Some new Gronwall-type inequalities arising in the research of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 2013, 2013:429.

[32] Sh. G. Gamidov, Certain integral inequalities for boundary value problems of differential equations, Differ. Uravn. 5 (1969), 463–472.

[33] T.H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of solutions of a system of differential equations. Ann. of Math. (2) 20 (1919), no. 4, 292–296.

[34] H. E. Gollwitzer, A note on a functional inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969) 642–647.

[35] I. Györi, A generalization of Bellman's inequality for Stieltjes integrals and a uniqueness theorem. Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 137–145

[36] F. Jiang, F. Meng, Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay, J. Comput. Appl. Math. 205 (2007), 479–486.

[37] M. Kuczma, An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality, University of Katowice, Katowice, 1985.

[38] S. D. Kendre, S. G. Latpate, On some mixed integral inequalities and its applications, Theoretical Mathematics and Applications 5 (2015), 1–14.

[39] V. Lakshmikantham, S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Theory and Applications. Academic Press New York and London, Vol 1, 2, 1969.

[40] V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk, Stability analysis of nonlinear systems. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 125. Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.

[41] V. Lakshmikantham, S. Sivasundram, and B. Kaymakcalan, Dynamic Systems on Measure Chains. Kluwer Academic Publishers, Boston, Mass, USA, 1996.

[42] A.A. Martynyuk, On the Exponential Stability of a Dynamical System on a Time Scale. Dokl. Akad. Nauk 421 (2008), No. 3, 312-317. (Russian)

[43] Yu.A. Martynyuk-Chernienko and L.N. Chernetskaya, Analyzing the Exponential Stability of Motion on Time Scales. Int. Appl. Mech. 46 (2010), No. 4, 467-473.

[44] G. M. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. C. R. Académie des Sciences. 137, 554–558 (1903).

[45] G. M. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogéne. Acta Mathematica . 29, 101–182 (1905).

[46] Q.-H. Ma and J. Pečarić, Some new explicit bounds for weakly singular integral inequalities with applications to fractional differential and integral equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 341, no. 2, pp. 894–905, 2008.

[47] Q.H.Ma, J.Pečarić, Estimates on solutions of some new nonlinear retarded Volterra-Fredholm type integral inequalities. Nonlinear Anal. 69, 393-407 (2008).

[48] Q.-H. Ma and J. Pečarić, On certain new nonlinear retarded integral inequalities for functions in two variables and their applications, Journal of the Korean Mathematical Society, vol. 45, no. 1, pp. 121–136, 2008.

[49] K. S. Nisar, G. Rahman, J. Choi, S. Mubeen, and M. Arshad, Certain Gronwall type inequalities associated with Riemann-Liouville k- and Hadamard k-fractional derivatives and their applications.Vol. 34 (2018), No. 3, pp. 249-263.

[50] T. Nurimov, Investigation of the solution of a two-dimensional nonlinear Volterra integral equation. (Russian) Dokl. Akad. Nauk UzSSR 1971, no. 11, 6–8.

[51] J. Norbury and A. M. Stuart, Volterra integral equations and a new Gronwall inequality. I. The linear case. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 106 (1987), no. 3-4, 361–373.

[52] B. G. Pachpatte, Inequalities for differential and integral equations, vol. 197 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1998.

[53] B. G. Pachpatte, Explicit bound on certain integral inequalities, J.Math. analysis and Applications. 267 (2002), 48–61.

[54] B. G. Pachpatte, Explicit bounds on Gamidov type integral inequalities, Tamkang Journal of Mathematics, vol. 37, no. 1, pp. 1–9, 2006.

[55] B. G. Pachpatte, Integral and Finite Difference Inequalities and Applications, vol. 205 of North- Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam, (2006).

[56] B. G. Pachpatte, On generalizations of Bihari's inequality. Soochow J. Math. 31 (2005), no. 2, 261–271.

[57] B. G. Pachpatte, On some new inequalities related to a certain inequality arising in the theory of differential equations. J. Math. Anal. Appl. 251 (2000), no. 2, 736–751.

[58] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, Integrals and Series. Elementary Functions, vol. 1, "Nauka", Moscow, Russia, 1981.

[59] A. Peterson and R.F. Raffoul, Exponential Stability of Dynamic Equations on Time Scales. Adv. Differ. Equ. Appl. 2 (2005), 133-144.

[60] A.E. Hamza and K. M. Oraby, Stability of abstract dynamic equations on time scales. Adv. Difference Equ., 143:15, 2012.

[61] S. Hilger, Ein Ma kettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[62] S. Hilger and P.E. Kloeden, Comparative Time Grainyness and Asymptotic Stability of Dynamical Systems. Autom. Remote Control 55 (1994), No. 1, 1293-1298.

[63] H. Ye, J. Gao and Y. Ding, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 10756-1081.

[64] B.Zheng and Q.H. Feng, New Gronwall-Bellman Type Inequalities and Applications in the Analysis for Solutions to Fractional Differential Equations,vol .2013, article ID 705126, 13 pages.7

[65] B. Zheng, New generalized 2D nonlinear inequalities and applications in fractional differential–integral equations J.Comput. Appl. Math.(2015), 235–246.