



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-
ANNABA**

**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

**Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LANOS**

THÈSE



Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de
Doctorat en Sciences

**Méthodes de décomposition de domaine dans
la théorie des EDP et du contrôle optimal**

Option : ANALYSE NUMÉRIQUE

Par

HANNACHE Amel

Directeur de Thèse : LAOUAR Abdelhamid Pr Université B.M Annaba
Co-Directeur de Thèse : SISSAOUI Hocine Pr Université B.M Annaba

Devant le jury

Président : BENCHETTAH Azzedine Pr Université B.M. Annaba
Examineurs : AISSAOUI Mohamed Zine Pr Université de Guelma
GUESMIA Amar Pr Université de Skikda
MAOUNI Messaoud Pr Université de Skikda

Année : 2019

Dédicace

A mes chers parents, à mon mari, à mes frères et sœurs, à mes enfants, mes nièces et neveux et à ma belle famille, je dédie ce modeste travail.

Remerciements

Je remercie très vivement mon directeur de thèse le Professeur **Abdelhamid Laouar** pour sa confiance qu'il m'a accordée ainsi que pour sa disponibilité, sa patience et ses qualités humaines et scientifiques.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon co-directeur le Professeur **Hocine Sissaoui** à l'université Badji Mokhtar Annaba pour ses orientations, ses conseils et son expérience. Je n'oublie jamais ses encouragements, sa confiance et son aide.

Je tiens à remercier vivement le Professeur **A. Benchettah** de l'université Badji-Mokhtar Annaba d'avoir accepté de présider ce jury de thèse.

Je remercie vivement le Professeur **Z. Aissaoui** de l'université de Guelma d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont aussi aux Professeurs **A. Guesmia** et **M. Maouni** de l'université de Skikda pour l'honneur qu'ils me font d'accepter de faire membre de ce jury.

J'adresse également un grand merci à messieurs **M. C. Bouras** et **K. Slimani**, chefs des départements de mathématiques, respectivement à l'université de Annaba et celle de Skikda.

ملخص

في هذه الرسالة نطبق تقنيات التحليل على مشكلتين ممثلتين بمعادلات تفاضلية جزئية و المعروف بمشكلة بيلا لابس بعقبة و مشكلة بيلا بلاس مع شروط على الحدود من نوع نيومان.

في المشكل الأول نستعمل التقنية المرتبطة بطريقة سياري رافيار و التي تسمى بالطريقة المختلطة مع طريقة العقوبات. أثنا الحل العددي استعملنا طريقة الاسترخاء التكراري و طريقة قوص سيدال. بالنسبة للمشكلة الثانية تم تطبيق تقنية تقسيم مجال بدون أو مع التداخل.

و للتوضيح قدمنا خوارزميات متتالية و متوازية و قمنا بالتعليق على النتائج المحصل عليها.

الكلمات المفتاحية: مؤثر بيلا بلاس، طريقة تقسيم نطاق، الطرق التكرارية، الصيغة المختلطة، مسألة العقبة.

Résumé

Dans cette thèse, on applique les techniques de décomposition sur deux problèmes modélisés par des EDP ou des IV, à savoir: le problème du bilaplacien avec obstacle de type contrainte unilatérale et le problème du bilaplacien avec conditions aux limites de Neumann.

Pour le premier problème, on a utilisé la technique de décomposition due à Ciarlet-Raviart (dite aussi formulation mixte) associée à la méthode de pénalisation. Pour la résolution numérique, nous avons étudié deux exemples pour lesquels on applique la méthode itérative de relaxation et celle de Gauss Seidel. Concernant le deuxième problème, on a appliqué la technique de décomposition de domaine de Schwarz avec/ou sans recouvrement. Pour illustration, une variante d'algorithmes séquentiels est proposée et les résultats numériques sont commentés.

Mots clés: Bilaplacien; Méthode de décomposition de Schwarz; Algorithme itératif; Formulation mixte; Méthode de pénalisation; Problème de l'obstacle.

Abstract

In this dissertation, we apply the decomposition techniques on two problems modeled by PDE namely; the bilaplacian obstacle problem with unilateral type constraint and the bilaplacian problem with boundary conditions of Neumann.

For the first problem, we used the decomposition technique due to Ciarlet and Raviart (also called mixed formulation) associated with the penalization method. For numerical solution, we studied two examples for which we apply the iterative relaxation method and the Gauss Seidel method.

Concerning the second problem, the Schwarz domain decomposition technique is applied with or without overlap. For an illustration, a variant of sequential algorithms is proposed and the numerical results are commented.

Keys words: Bilaplacian; Schwarz decomposition method; Iterative algorithms; Mixed formulation; Penalization method; Obstacle problem.

Notations et conventions

Ensembles

Ω : un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

$\bar{\Omega}$: la fermeture de Ω .

Γ : la frontière de Ω .

Ω_i : le sous domaine i de Ω .

$\partial\Omega_i$: la frontière de Ω_i .

Γ_{ij} : l'interface commune entre les deux sous domaines Ω_i et Ω_j .

Espaces fonctionnels et de Sobolev

$C^0(\Omega)$: Espace des fonctions continues sur Ω dans \mathbb{R} .

$C^1(\Omega)$: Espace des fonctions une fois continûment dérivables sur Ω (les dérivées partielles d'ordre un existent et sont continues).

$\mathcal{D}(\Omega) = \{v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid v \in C^\infty(\Omega), \text{supp } v \subset \Omega\}$.

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$, norme associée :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$, norme associée :

$L^2(\Gamma)$: Espace des fonctions définies sur Γ et de carré sommable pour la mesure surfacique.

$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable tel que } \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\}$

$\text{supess}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \{c, |f(x)| < c \text{ p.p. sur } \Omega\}$.

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p, \quad \forall i = \overline{1,n} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}$, pour $p = 2$ on note $W^{1,2}(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

$W_0^{1,2}(\Omega)$ est noté, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \quad / v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, $H_0^1(\Omega) = \overline{H^1(\Omega)}^{\mathcal{D}(\Omega)}$; norme associée à $H^1(\Omega)$, $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in \mathbb{N}$.

$$\|v\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ f = v_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \text{avec} \quad v_0, v_1, \dots, v_N \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$$H^m(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^k v}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \in L^2(\Omega), \quad \forall k = \overline{0,m} \right\}.$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$$H_0^2(\Omega) = H^2(\Omega) \cap \left\{ v / v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

$$H^4(\Omega) = \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^k v}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \in L^2(\Omega), \quad \forall k = \overline{0:4} \right\}.$$

$$H_0^4(\Omega) = H^4(\Omega) \cap \left\{ v / v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

$$\|v\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla|^2 d\Omega \right)^{1/2}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

$$\|v\|_{2,\Omega} = \left[\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{0,\Omega}^2 \right]^{1/2}, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Opérateurs

$$\Delta : \text{Laplacien} \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

$$\Delta^2 : \text{Bilaplacien} \quad \Delta^2 = \Delta(\Delta) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

$$\nabla u : \text{gradient de } u \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^t.$$

$$\text{div}(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Abrégés

MEF : Méthode des éléments finis.

MDF : Méthode des différences finies.

EDO : Équation différentielle ordinaire.

EDP : Équation aux dérivées partielles.

GS : Méthode itérative de Gauss- Seidel.

IV : Inéquation variationnelle.

n : vecteur normal extérieur à Ω .

PC : Problème continu.

PV : Problème variationnel.

$Pmix$: Problème mixte.

$Pmin$: Problème de minimisation.

$p.p$: Presque partout.

(\cdot, \cdot) : Produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

M_N : Espace des matrices carrées d'ordre $N \times N$.

$s.c.i$: semi continu inférieurement.

SOR : Méthode itérative de sur-relaxation.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Résumé en arabe	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Notations et conventions	vi
Introduction générale	1
1 Préliminaires	7
1.1 Définitions et théorèmes	7
1.1.1 Formule de Green et ses variantes	7
1.1.2 Théorèmes de base	8
1.1.3 Quelques inégalités usuelles	11
1.1.4 Base orthonormée dans un espace de Hilbert	11
1.1.5 Problèmes bien posés	12
1.2 Description du problème de l'obstacle dans un cadre général	12
2 Étude analytique et numérique du bilaplacien avec contrainte unilatérale	16

2.1	Position du problème	17
2.2	Problème (PC) réécrit en terme d'IV	19
2.2.1	Existence et unicité de la solution	19
2.3	Autre formulation variationnelle du Problème (PC)	20
2.3.1	Existence et unicité	20
2.4	Pénalisation des problèmes PIV et PC	21
2.4.1	Pénalisation des problèmes PIV et PIV'	21
2.5	Discrétisation du Problème PC par la MDF	22
2.6	Expérimentations numériques	27
3	Formulation mixte du bilaplacien avec contrainte unilatérale	28
3.1	Problème mixte	29
3.2	Pénalisation	31
3.2.1	Analogie discret du problème (3.3)	33
3.2.2	Analogie discret du problème pénalisé (3.6)	34
3.3	Exemples numériques	36
3.4	Conclusion	40
4	Méthode de décomposition de domaine appliquée au problème de l'obstacle	41
4.1	Position du problème	42
4.2	Formulation du problème (4.1) en terme d'IV	42
4.3	Décomposition de domaine Ω	43
4.4	Méthode des Multiplicateurs de Lagrange	45
4.5	Algorithme	50
	Conclusion et perspectives	51
	Bibliographie	52

Introduction générale

La simulation numérique et le calcul scientifique jouent un rôle essentiel dans l'ensemble du champ de la science de l'ingénieur, à la fois comme instruments de description et de prédiction. L'évolution des ressources informatiques et des besoins de conception conduisent à la formulation de systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDPs), ou des inéquations variationnelles (IVs) de plus en plus sophistiqués et complets. La simulation et le développement de nouvelles méthodes numériques adaptées au calcul parallèle sont devenus primordiaux. Ainsi, le calcul scientifique se développe maintenant hors des domaines traditionnels comme la biologie, le génie des procédés, etc., et fait souvent appel à des modèles d'EDPs/IVs pour modéliser des phénomènes multi-physiques et multi-échelles. La complexification de la modélisation multi-physique conduit à devoir simuler des systèmes d'EDPs/IVs ayant un très grand nombre d'inconnues et dont la raideur évolue avec la dynamique des solutions. Le temps de calcul pour des applications industrielles devient dès lors très important et nécessite de concevoir et d'implémenter des méthodes mathématiques précises, stables et consistantes, adaptées aux architectures des multiprocesseurs de calcul, afin de réduire le temps de restitution des résultats.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés aux problèmes connus sous le nom "problèmes de l'obstacle" qui constituent une catégorie très importante des problèmes non linéaires. Ces problèmes ont été largement étudiés d'un point de vue théorique et numérique par Lions [37], Glowinski et al. [26], Sissaoui [44], Hlavacek et al. [32], Leger et Pozzolini [35], Lions [38], et sont généralement rencontrés dans divers domaines : la mécanique, la physique, l'économie, le contrôle optimal, etc. Les premières recherches avaient porté sur l'étude des problèmes d'ordre 2 avec contraintes (on peut se référer pour plus de détails aux livres de Duvaut-Lions [19] et de

Glowinski et al. [26]). Dans [19], on trouve les résultats généraux d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes stationnaires et évolutifs. Ces derniers correspondent à des problèmes de forte non linéarité qui est due à la nature même non linéaire des contraintes imposées à la solution à l'intérieur du domaine Ω ou sur la frontière $\partial\Omega$. Dans [26], une approche d'unification a été établie pour les problèmes de l'obstacle de Signorini et constitue une référence de base pour cette classe de problèmes. Ainsi, les auteurs [26] ont montré que la différence entre ces deux problèmes réside dans le choix d'une fonction particulière définie sur la frontière $\partial\Omega$ concernant le problème de Signorini et dans le domaine global Ω concernant le problème d'obstacle. Pour la compréhension de ces problèmes, nous donnons le problème modèle dans un cadre général abstrait.

Trouver $u \in V$ telles que

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega, & (a) \\ u \geq q & \text{dans } \Omega, & (b) \\ (Au - f)(u - q) = 0 & \text{dans } \Omega, & (c) \\ +\text{Conditions aux limites et initiales,} & (d) \end{cases}$$

où A est généralement un opérateur elliptique ou parabolique, f une fonction donnée appartenant à un espace qui assure la régularité de la solution u , q représente la contrainte unilatérale et V un espace de Hilbert.

L'équation (c) s'appelle la condition de complémentarité qui regroupe et vérifie à la fois l'équation (a) et l'inéquation (b).

Les problèmes d'ordre 2 qui servent de modèles simplifiés ayant fait l'objet de plusieurs études (analytique et numérique), restent toujours des problèmes d'actualité. Nous citons à titre d'exemple le récent papier [13] dans lequel les auteurs ont étudié le problème 3D d'obstacle, plus précisément un problème semi-imperméable issu de la mécanique de fluides avec des contraintes unilatérales à la frontière. La discrétisation de l'opérateur dépendant du temps t par la MDF utilise un schéma implicite associé à la méthode de décomposition de domaine. Un algorithme itératif parallèle asynchrone a été appliqué pour réduire drastiquement le temps de résolution numérique du problème.

Concernant les problèmes d'ordre 4, c'est vrai qu'ils ont reçu moins d'attention dans le passé mais durant ces trois dernières décennies ont connu un grand intérêt en raison de l'existence de plusieurs applications industrielles importantes dans des domaines variés (pour plus de détails,

nous suggérons les références [2], [5], [6], [7], [8], [11], [16], [19], [26], [28], [31], [36], [40]). Ainsi, une grande importance a été accordée à la construction d'algorithmes numériques itératifs tenant compte des contraintes unilatérales (voir [6], [13], [20], [45]). Nous remarquons que ces problèmes sont mal posés (voir Muvasharkhan et al. [39]) et ainsi le théorème du Principe du Maximum ne s'applique pas, contrairement aux problèmes d'ordre 2. Nous citons quelques travaux récents concernant les problèmes d'ordre 4. Muvasharkhan et al. [39] ont transformé le problème mal posé en un problème de contrôle optimal et ont mis en place des conditions optimales nécessaires. Dans [20], les auteurs ont obtenu des résultats qui montrent que la discrétisation du problème d'obstacle pour une plaque élastique mince par la méthode des éléments finis associée à une formulation variationnelle obtenue directement à partir de l'inégalité de l'hypersphère qui conduit à des taux de convergence optimaux.

Pour notre part, nous allons focaliser notre étude sur le problème du bilaplacien avec obstacle de type contrainte unilatérale dans les chapitres 2 et 3, et le laplacien avec contrainte unilatérale dans le chapitre 4. Deux approches de décomposition seront développées, par la suite, à savoir la décomposition de l'opérateur du bilaplacien en deux laplaciens, due à Ciarlet-Raviart et la décomposition du domaine global en plusieurs sous-domaines, connue sous le nom "méthode alternée de Schwarz". Nous allons étudier d'abord le problème en l'écrivant sous forme d'IV et donnons les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution. En outre, nous leur appliquons la méthode de pénalisation afin d'éliminer la contrainte unilatérale et travailler sur tout l'espace. Pour la résolution numérique, nous utilisons la MDF et proposons des algorithmes itératifs. Dans une deuxième étape de cette étude qui constitue notre apport original, nous adoptons la technique due à Ciarlet-Raviart [16], dite "formulation mixte", en prenant en considération toutes les propriétés induites sur les espaces fonctionnels (Pour plus de détails, nous renvoyons aux références [5], [9]). Il faut savoir que cette technique exige moins de régularité de la solution que celle du bilaplacien et ne nécessite que l'utilisation d'éléments finis P1 de type Lagrange de continuité $C^0(\Omega)$ pour la discrétisation du problème, contrairement au problème de 4^{ème} ordre qui requiert une continuité $C^1(\Omega)$. En effet, l'idée de base repose sur la décomposition de l'opérateur bilaplacien en deux laplaciens couplés, bien sûr, en choisissant des espaces appropriés. Pour ce faire, introduisons la fonction Φ de sorte que la solution u du problème bilaplacien soit définie par $-\Delta u = \Phi$, où $\Phi \in L_2(\Omega)$ et $\Delta \Phi \in H^{-1}(\Omega)$ (le terme Δu a un grand intérêt puisqu'il

représente le moment de flexion en élasticité et le tourbillon en hydrodynamique). Un nombre important de travaux a été établi utilisant cette technique de décomposition mais pour le cas d'un problème linéaire, i.e., l'équation du bilaplacien sans l'obstacle de la contrainte unilatérale (voir [2], [6], [36], [43]). Pour appliquer cette technique, nous allons citer, ci-dessous quelques travaux qui traitent de l'équation du bilaplacien sans obstacle afin de se familiariser avec les développements ultérieurs. Kezavan et Vanninathan [33] ont appliqué la méthode des éléments finis mixtes et ont obtenu non seulement l'approximation u_h de la solution u mais également l'approximation Φ_h de Δu , où u_h et Φ_h sont respectivement les approximations de Φ et u . Dans [14], les auteurs ont introduit les polynômes de degré k , avec $k \geq 2$, pour le cas particulier d'un domaine polygonal et ont obtenu un ordre de convergence de type

$$\|u - u_h\| + \|\Phi - \Phi_h\| = o(h^{k-1}),$$

où h représente le pas de discrétisation.

Amara et El Dabaghi [2] ont proposé une méthode qui permet d'obtenir une formulation d'opérateurs de types laplaciens sur des frontières opposées du domaine Ω , avec une préservation de toutes les propriétés de l'équation originale et ont utilisé la méthode du gradient conjugué pour une résolution itérative des deux sous-problèmes du type Laplacien-Dirichlet (voir Glowinski et Pironneau [28]). Les résultats obtenus confirment l'efficacité de cette méthode notamment concernant le calcul de l'approximation Φ_h au voisinage de la frontière du domaine.

Cette étude se propose de déterminer les petits déplacements verticaux d'une plaque élastique mince rectangulaire parfaitement encastrée aux bords : ($u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$), ou bien avec des conditions aux limites simplement supportées : ($u = \Delta u = 0$ sur $\partial\Omega$), dus à une force f .

Nous établissons la formulation du problème en termes d'inéquations variationnelles (IVs) et donnons les avantages et les inconvénients de cette formulation. Ensuite, nous appliquons la méthode de pénalisation sur les IVs obtenues afin d'éliminer la contrainte en l'incorporant dans la fonctionnelle du problème pour travailler sur tout l'espace. La technique de décomposition convient mieux à ce type de problèmes puisqu'elle permet la transformation du problème d'ordre 4 à deux sous-problèmes d'ordre 2 exigeant ainsi moins de régularité à la solution.

En conséquence, comme avantage numérique, il s'agit de résoudre des systèmes linéaires couplés avec des matrices de tailles très réduites qui sont des M-matrices, contrairement à celle de la matrice de discrétisation du bilaplacien. Ainsi, la résolution du problème nécessite moins de temps

de calcul par rapport au système discret du problème bilaplacien.

Concernant l'approche de décomposition du domaine en plusieurs sous-domaines (voir [17], [34]), elle est bien adaptée à la plupart des méthodes numériques pour la résolution des systèmes complexes qui nécessitent une discrétisation du domaine dont le nombre de degrés de liberté à déterminer peut dépasser la capacité de mémoire de l'ordinateur, surtout, par exemple, lorsqu'il s'agit de discrétiser des problèmes 3D par élément finis. Ainsi, ces méthodes de calcul peuvent faire intervenir un très grand nombre d'inconnues qui peuvent encombrer la mémoire vive de l'ordinateur (MPI). Pour surmonter cette difficulté, l'idée est alors de découper le domaine global en plusieurs sous-domaine et de calculer la solution sur chaque sous domaine. Bien sûr, il faut tenir compte des conditions aux limites imposées pour assurer que la solution obtenue du problème sur le sous-domaine correspondant soit la restriction de la solution du problème original sur tout le domaine global. D'autre part, cette technique de décomposition a aussi un intérêt pour résoudre des problèmes dont la géométrie du domaine est complexe par le choix d'un découpage adéquat sous forme de domaines élémentaires plus faciles. Généralement, la difficulté réside sur les conditions aux limites imposées au bord de chaque sous domaine (frontière fictive). Pour ce faire, deux stratégies sont appliquées : la première consiste à découper le domaine global en plusieurs sous-domaines qui se recouvrent partiellement et à utiliser la solution de l'étape précédente (un procédé itératif) des sous domaines voisins pour déterminer les conditions aux limites du sous-domaine considéré ; cette technique est connue sous le nom de la méthode alternée de Schwarz (voir [17], [18], [22]). La deuxième approche est celle de Lions [38] et qui consiste à découper le domaine sur une partition et d'imposer des conditions de continuité aux interfaces. Une fois le découpage est adopté, la méthode de résolution sur chaque sous domaine sera identique à celle envisagée sur le domaine global, mais fera intervenir un nombre moins important de degrés de liberté. Le prix à payer est alors le caractère itératif de l'algorithme, avec l'avantage d'arriver à faire tenir les données du problème en mémoire de l'ordinateur.

Cette thèse comporte quatre chapitres, une introduction générale et une conclusion. Le premier chapitre donne un ample rappel d'outils mathématiques qui seront utilisés dans toute la suite de cette thèse. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème du bilaplacien avec obstacle de type contrainte unilatérale. Sa formulation en termes d'IV associée à la méthode de pénalisation est proposée. Pour la résolution numérique, une discrétisation par la MDF et une méthode

itérative S.O.R sont proposées. Le troisième chapitre utilise la technique due à Ciarlet-Raviart associée à la méthode de pénalisation et la discrétisation des problèmes obtenus se fait par la MEF de type P1 de Lagrange. Pour la résolution numérique, une variante des méthodes itératives est appliquée. Enfin, le dernier chapitre est consacré à la méthode de décomposition de domaine pour un problème d'ordre 2.

Préliminaires

Ce chapitre est composé de deux parties. La première rappelle quelques définitions et certains outils mathématiques de base. La deuxième partie donne une description générale de la modélisation du problème de l'obstacle dans un cadre général et les théorèmes d'existence et d'unicité de la solution. Pour plus de détails concernant ces notions fondamentales, voir [1], [4], [9], [12] et [41].

1.1 Définitions et théorèmes

Définition 1.1 Soient E et F deux espaces de Banach et f une application de E dans F . f est appelée application contractante s'il existe une constante k , $0 < k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in E \quad \|f(x) - f(y)\|_F < k\|x - y\|_E.$$

Définition 1.2 Soit $f : E \rightarrow E$, on dit que x est un point fixe de f si

$$f(x) = x.$$

Théorème 1.1 [9] Soient E un espace de Banach et f une application contractante définie sur E alors f admet un point fixe.

1.1.1 Formule de Green et ses variantes

Théorème 1.2 [12] Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est continu, admettant tout au plus des discontinuités de première espèce pour le vecteur tangent (i.e., typiquement des point

anguleux). Si u et v sont deux fonctions de variables (x_1, \dots, x_n) , définies de Ω à valeurs réelles, appartenant à $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\Gamma, \quad (1.1)$$

où n_i désigne la composante suivant la $i^{\text{ème}}$ coordonnée x_i du vecteur normal \vec{n} extérieur à l'ouvert Ω .

La formule de Green (1.1) n'est rien d'autre que la généralisation de la formule d'intégration par parties en dimension un.

Théorème 1.3 [12] Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , dont la frontière $\partial\Omega = \Gamma$ est continu, admettant tout au plus des discontinuités de première espèce pour le vecteur tangent (i.e., typiquement des point anguleux). Si u et v sont deux fonctions des variables (x_1, \dots, x_n) , définies de Ω à valeurs réelles, tels que

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

On a alors

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma, \quad (1.2)$$

où n désigne le vecteur normal extérieur à l'ouvert Ω et $\frac{\partial u}{\partial n}$ la projection du vecteur gradient dans la direction de la normale n .

1.1.2 Théorèmes de base

Théorème des traces

On sait qu'une fonction Lipschitzienne définie sur un ouvert Ω peut se prolonger par continuité jusqu'au bord de Ω , ce qui permet de donner un sens à la notion de trace de la fonction sur le bord.

Théorème 1.4 [12] Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de \mathbb{R}^d . L'application

$$\gamma_0 : u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$$

se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi défini l'application de traces.

Notons que l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$.

Proposition 1.1 [12] *L'opérateur de trace permet d'écrire une formule d'intégration par parties*

$$\forall u \in H^1(\Omega), \forall \Phi \in (H^1(\Omega))^d, \int_{\Omega} u \cdot \text{div} \Phi dx + \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot u dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) \cdot (\gamma_0 \Phi) \cdot \nu ds.$$

Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.5 [9] *Soient V un espace de Hilbert, $a(.,.)$ une forme bilinéaire définie sur $V \times V$ et $L(.)$ une forme linéaire définie sur V , vérifiant les propriétés suivantes :*

- $a(.,.)$ continue et $\exists C_1 > 0 /$

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall (u, v) \in V \times V,$$

- $a(.,.)$ V -elliptique et $\exists C_2 > 0 /$

$$a(v, v) \geq C_2 \cdot \|v\|^2, \quad \forall v \in V,$$

- $L(.)$ continue et $\exists C_3 > 0 /$

$$|L(v)| \leq C_3 \|v\|, \quad \forall v \in V,$$

alors, il existe un seul u appartenant à V solution du problème variationnel

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Définition 1.3 [9] *Soit K un sous ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert V , on dit que y est la projection de x sur K si*

$$\|u - y\|_V = \min_{v \in K} \|u - v\|_V. \quad (1.3)$$

Théorème 1.6 (Théorème de projection)

Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert V . Alors pour tout $u \in V$, il existe $y \in V$ unique tel que

$$\|u - y\|_V = \min_{v \in K} \|u - v\|_V, \quad (1.4)$$

de plus y est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall v, y \in K, \quad (u - y, v - y)_V \leq 0.$$

On note $y = \underset{K}{\text{Proj}}(u)$.

Preuve• **Existence**

On pose $d = \min_{v \in K} \|u - v\|$ et $d_n = \|u - v_n\|$,

avec d_n une suite de minimisation tel que $d_n \rightarrow d$, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Montrons que la suite (v_n) est convergente, il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy.

Soient $v_n, v_m \in K$ et l'identité de parallélogramme :

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.$$

Prenons

$$a = u - v_n, \quad b = u - v_m$$

$$\|2u - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2\|u - v_n\|^2 + \|u + v_m\|^2$$

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4\|u - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2.$$

Utilisons l'inégalité :

$$\|2u - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 \leq 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4d^2.$$

En effet,

$$\frac{v_n + v_m}{2} \in K \implies \|4 - \frac{v_n + v_m}{2}\| \geq d, \quad (\text{car } K \text{ est convexe}).$$

Alors (v_n) est une suite de Cauchy, donc converge vers y dans K (fermé), d'où $y \in K$ et

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - v_n\| = \|u - y\|.$$

• **Unicité**

Supposons $y, z \in K$ tel que $\|x - y\| = d$, et $\|x - z\| = d$.

Montrons que $y = z$, par l'égalité de parallélogramme :

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= \|(y - x) - (z - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|z - x\|^2 - \|(y + z) - x\|^2 \end{aligned}$$

$$= 2\|y - x\|^2 + 2\|x - z\|^2 - 4\left\|\frac{y+z}{2} - x\right\|^2.$$

Il faut que $\frac{y+z}{2} \in K$ pour que $\left\|\frac{y+z}{2} - x\right\| \geq d$.

Ceci implique que le membre droit est inférieur ou égal à $2d^2 + 2d^2 - 4d^2$.

Donc l'inégalité $\|y - z\| \leq 0$ et $\|y - z\| \geq 0$, alors $y = z$.

Théorème 1.7 (Riesz)[9] Soit V un espace de Hilbert, pour tout $F \in V'$ (V' est le dual de V), il existe un unique $v \in V$ telle que

$$f(u) = (u, v), \quad \forall u \in V, \quad (1.5)$$

en plus

$$\|F\|_{V'} = \|v\|_V.$$

1.1.3 Quelques inégalités usuelles

Inégalité de Cauchy - Schwarz

Soient u et v deux fonctions appartenant à $L^2(\Omega)$, on a :

$$\left| \int_{\Omega} u.v.d\Omega \right| \leq \left[\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.6)$$

Inégalité de Poincaré

Soit u une fonction appartenant à l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Il existe une constante $C(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} |u|^2 d\Omega \leq C(\Omega) \cdot \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega. \quad (1.7)$$

1.1.4 Base orthonormée dans un espace de Hilbert

Définition 1.4 [9] Soit $\{e_j\}_{j \in I}$ une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert H .

1— On dit que cette famille est orthonormée si

$$\forall i, j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

2– On dit que cette famille est totale si

$$\overline{\{e_j\}_{j \in I}} = H.$$

3– Une famille $(e_j)_{j \in I}$ de vecteurs de H totale et orthonormée s'appelle une base hilbertienne de H .

Proposition 1.2 Soit $(e_j)_{j \in I}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H . Alors, on a

$$\forall x \in H, \quad \sum_{j \in I} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Proposition 1.3 Soit $(e_j)_{j \in I}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert H . Alors

$$\forall x \in H, \quad x = \sum_{j \in I} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Théorème 1.8 Soit $(e_j)_{j \in I}$ une famille orthonormée de H . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(e_j)_{j \in I}$ est une base orthonormée de H .
- $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{j \in I} |\langle x, e_j \rangle|^2$ (Égalité de Bessel).

1.1.5 Problèmes bien posés

Hadamard a introduit la notion de problème bien posé, il s'agit donc d'un problème dont

- la solution existe,
- elle est unique,
- elle dépend continûment des données.

Ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent.

1.2 Description du problème de l'obstacle dans un cadre général

Soit une plaque élastique mince carrée Ω (voir figure 1.1) parfaitement encastrée le long de la frontière $\partial\Omega$ et soumise à une force verticale perpendiculaire.

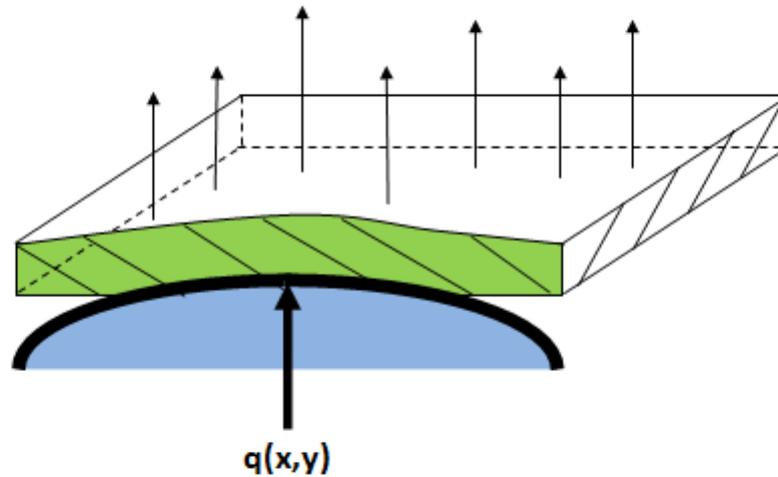


FIGURE 1.1 – Plaque élastique mince bien encastrée soumise à une force verticale

Le problème de l'obstacle dans la théorie de l'élasticité peut être formulé de façon abstraite :

Soit $q(x, y)$ la fonction décrivant l'obstacle, on suppose que $q \in C^0(\overline{\Omega})$ et $q(x, y) \geq 0$.

Soit $E(\cdot)$ l'énergie totale correspondant à un déplacement $u(x, y)$ du système suivant :

$$E(u) = \inf \left\{ E(v) / v \text{ est l'ensemble des déplacements tel que } v \geq q \right\}. \quad (1.8)$$

On suppose aussi que l'énergie interne est proportionnelle au déplacement $u(x, y)$ et avec l'hypothèse des petits déplacements, le problème ci dessus peut être modélisé comme suit :

Le problème consiste à trouver un élément $u \in K$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in K} \{J(v)\}, \quad (1.9)$$

où $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(u, v) - L(v) \quad \forall v \in V, \quad (1.10)$$

avec $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive définie sur $V \times V$ et $L(v)$ une forme linéaire continue et définie sur V .

K est un sous ensemble convexe fermé non vide de V tel que

$$K = \left\{ v \in V / v(x, y) \geq q(x, y) \right\}.$$

Enonçons les résultats principaux concernant l'existence et l'unicité du problème (1.9)

Théorème 1.9 *Soit V un espace de Hilbert et K un ensemble convexe non vide de V . Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et V -elliptique alors le problème abstrait (1.9) admet une solution unique .*

En outre, si la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, (i.e., $a(u, v) = a(v, u)$) la solution du problème (1.9) est caractérisée par

$$a(u, v - u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in K.$$

Le problème (1.9) est formulé en terme d'IV comme suit :

$$(PIV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u)_V \geq L(v - u), \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Théorème 1.10 (Stampacchia) [9] *Si la forme bilinéaire continue $a(.,.)$ est V -elliptique et le sous ensemble K est un convexe fermé non vide de V alors le problème (1.11) admet une solution unique.*

Le problème (1.11) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$(PIV') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ telle que} \\ (Au, v - u)_V \geq (f, v - u)_V, \quad \forall v \in K, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

où $(.,.)_V$ désigne le produit scalaire associé à l'espace V et l'opérateur $A : V \longrightarrow V$ est un opérateur différentiel elliptique tel que

$$L(v - u) = \int_{\Omega} f(v - u) d\Omega$$

le problème (1.12) est aussi appelé I.V.

Définition 1.5 On dit qu'un opérateur $A : V \longrightarrow V$ est Lipschitzien continu s'il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $u, v \in V$

$$\|Au - Av\|_V \leq c\|u - v\|_V.$$

Définition 1.6 Un opérateur $A : V \longrightarrow V$ est fortement monotone s'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_V \geq M\|u - v\|_V.$$

Théorème 1.11 ([3]) Supposons que l'opérateur $A : V \longrightarrow V$ est fortement monotone et Lipschitzien continu, et K un sous ensemble convexe fermé non vide de V , alors le problème (1.12) admet une solution unique.

En outre, selon [3], si $A : V \longrightarrow V$ est un opérateur linéaire continu, alors on peut lui associer une forme bilinéaire continue $a(u, v)$ telle que

$$\text{si } u \in V, \quad a(u, v) = (Au, v)_V, \quad \forall v \in V, \quad (1.13)$$

alors le problème (1.12) est équivalent à

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K. \quad (1.14)$$

Étude analytique et numérique du bilaplacien avec contrainte unilatérale

Introduction

On rencontre les problèmes avec contraintes de type inégalité dans des domaines variés (mécanique, physique, économie, contrôle optimal, etc.). Ces problèmes sont très importants tant sur le plan théorique (mathématique) que numérique et algorithmique. De tels problèmes sont, en général, modélisés par des inéquations variationnelles. Le problème de l'obstacle est l'un des problèmes les plus étudiés de l'analyse numérique et possède différentes formulations mathématiques ([19],[26]).

Dans ce chapitre, nous allons donner la formulation du problème en termes d'inéquations variationnelles associées à la méthode de pénalisation. Cette formulation possède plusieurs avantages pour la résolution numérique du problème. Les questions d'existence, d'unicité et de régularité de la solution sont vérifiées (voir [3]). La formulation variationnelle associée à ce problème permet de construire des approximations numériques faisant appel à la méthode des éléments finis(MEF) ou la méthode des différences finies(MDF)(voir [7], [12]). Les problèmes de type obstacle sont donc une classe importante de problèmes non linéaires qui ont été étudiés surtout pour des opérateurs d'ordre deux d'un point de vue théorique et numérique par [19], [26] et [32].

La recherche a été axée sur l'étude des problèmes d'ordre deux avec contraintes unilatérales. On cite, par exemple, [19] et [26]. Dans [37], l'auteur établit un résultat général d'existence et d'uni-

cité de la solution de problèmes stationnaires et évolutifs. Ces problèmes correspondent à des problèmes non linéaires ; la non linéarité est due à la nature non linéaire des contraintes imposées sur la solution sur Ω où sur la frontière $\partial\Omega$. Dans [19], on peut trouver une approche unique des problèmes d'obstacle classiques et de Signorini. La différence principale entre ces deux problèmes distincts consiste dans le choix d'une fonctionnelle particulière définie par une intégrale sur la frontière pour le problème de Signorini ou dans le domaine pour le problème de l'obstacle.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. On cherche une fonction $u \in H_0^4(\Omega)$ telles que

$$(PC) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, & (a) \\ u \geq q & \text{dans } \Omega, & (b) \\ (\Delta^2 u - f)(u - q) = 0 & \text{dans } \Omega, & (c) \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, & (d) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f \in L^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ une fonction donnée, $q(x,y)$ représente un obstacle donné et n le vecteur normal extérieur à Ω .

Notons que l'équation (c) traduit la condition de complémentarité et (d) les conditions aux limites.

Cette dernière est remplacée dans certaines applications par la condition dite simplement supportée définie par

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.2)$$

Le problème (PC) est un problème à frontière libre que l'on peut interpréter ainsi : la solution u divise le domaine Ω en deux sous domaines

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.3)$$

avec

$\Omega_1 = \{x \in \Omega / u = q\}$ est la région de contact et $\Omega_2 = \{x \in \Omega / u > q\}$ est la région de non contact.

Ces deux sous domaines sont séparés par une interface S (voir figure 2.1) qui est a priori inconnue

$$S = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2, \text{ appelée frontière libre.}$$

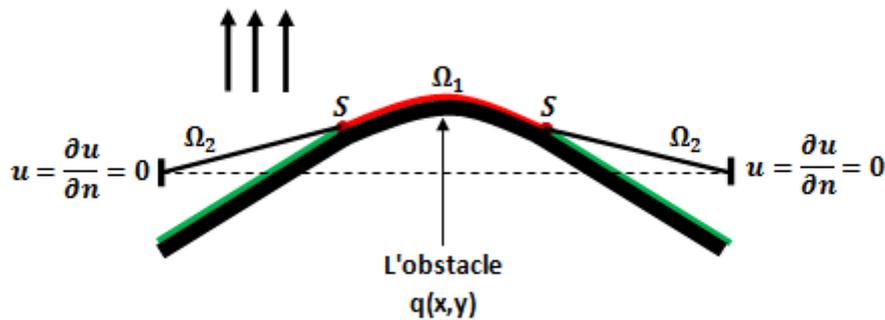


FIGURE 2.1 – Problème de l’obstacle pour une plaque élastique mince encastrée

Le problème (PC) avec les conditions aux limites (2.2) a été étudié par Bishnu [6]. Le problème (PC) peut être réécrit sous forme d’un problème d’optimisation. Pour ce faire, considérons le problème suivant :

$$(Pmin) \begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) = \inf_{v \in K} \{J(v)\}, \end{cases} \quad (2.4)$$

où J est une fonctionnelle définie comme suit :

$$\begin{aligned} J : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ J(v) &= \frac{1}{2}a(v, v) - F(v), \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue définie sur $V \times V$ et $F \in V'$ (V' le dual de V), respectivement données par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx \quad \text{et} \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Le convexe fermé non vide K est défini par

$$K = \left\{ v \in H_0^2(\Omega) / v \geq q \right\}.$$

Les espaces $H^2(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$ ($H_0^2(\Omega)$ sous espace fermé de $H^2(\Omega)$) sont des espaces de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{2,\Omega}^2$ (voir Brezis [9]).

Théorème 2.1 Soient V (ici $V = H_0^2$) un espace de Hilbert et K un convexe fermé non vide de V . Soit $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et V -elliptique, alors il existe une solution unique du problème (Pmin). En outre, comme $a(.,.)$ est symétrique, cette solution est caractérisée par

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K,$$

appelée inéquation variationnelle notée PIV.

2.2 Problème (PC) réécrit en terme d'IV

Le problème de minimisation peut s'écrire en terme d' inéquation variationnelle IV sous la forme suivante :

$$(PIV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq F(v - u), \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

2.2.1 Existence et unicité de la solution

Soient V un espace de Hilbert (ici $V = H_0^2(\Omega)$) muni de la norme $\|\cdot\|$ et K un sous ensemble convexe fermé de V , le problème (PIV) admet une solution unique d'après le théorème suivant :

Théorème 2.2 (*Stampacchia*) *Si la forme bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique et le sous ensemble K est un convexe fermé non vide de V , alors le problème (PIV) admet une solution unique.*

Preuve (Voir [3])

2.3 Autre formulation variationnelle du Problème (PC)

D'après [6] et [38], le problème (PC) peut être formulé aussi comme suit :

$$(PIV') \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ (Au, v - u)_V \geq (f, v - u)_V, \forall v \in K, \end{array} \right.$$

où : $A = \Delta^2$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est le produit scalaire associé à l'espace V .

2.3.1 Existence et unicité

Le problème (PIV') admet une solution unique d'après le théorème suivant :

Théorème 2.3 ([3]) *Supposons que l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ est fortement monotone et continu Lipschitzien, K un sous ensemble convexe fermé non vide, alors le problème (PIV') admet une solution unique.*

D'après ([3], [38]), si A est un opérateur linéaire continu, alors on peut lui associer une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur V définie comme suit :

$$\forall u \in V \quad a(u, v) = (Au, v)_V, \quad \forall v \in V.$$

Remarque 2.1 *La solution u du problème (PIV) appartient à $H_0^2(\Omega)$; mais l'inconvénient de la formulation (PIV), est que l'on ne peut pas utiliser les éléments finis $P1$ de Lagrange puisqu'elle implique que le membre de gauche de (PIV) sera identiquement nul. En effet, les dérivées secondes partielles d'une fonction de degré inférieur ou égal à un par rapport au couple de variables (x, y) étant nulles. Donc le laplacien est nul. Il n'est donc pas recommandé d'utiliser des polynômes $P1$ de Lagrange pour un tel problème. A cet effet, dans le chapitre 3, nous proposons la formulation dite mixte de Ciarlet-Raviart.*

2.4 Pénalisation des problèmes PIV et PC

La pénalisation est un concept simple qui permet de transformer un problème d'optimisation avec contrainte ayant une utilité à la fois théorique et numérique en un problème sans contraintes. En analyse, l'approche par pénalisation est parfois utilisée pour étudier un problème d'optimisation avec contraintes difficiles à prendre en compte numériquement, tandis que le problème pénalisé offre des propriétés d'implémentation plus simples ([4] et [25]). Si la pénalisation est bien choisie, des passages à la limite parfois délicats permettent d'obtenir des propriétés du problème original (comme, par exemple, l'existence de la solution).

D'un point de vue numérique, cette transformation en un problème sans contrainte permet d'utiliser des algorithmes d'optimisation sans contrainte pour obtenir la solution de problèmes dont l'ensemble admissible peut avoir une structure complexe. Disons que la méthode de pénalisation n'a de sens que si le problème pénalisé est nettement plus simple à résoudre que le problème initial P .

2.4.1 Pénalisation des problèmes PIV et PIV'

On introduit l'opérateur $\eta : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \eta & \text{(convexe propre et s.c.i),} \\ \eta(v) \geq 0 & \text{sii } v \in V, \\ \eta(v) = 0 & \text{sii } v \in K. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, le problème pénalisé associé au problème (PIV) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\epsilon \in V \text{ tel que} \\ a(u_\epsilon, V) + \frac{1}{\epsilon} \eta(u_\epsilon, v) = (f, v). \end{cases} \quad (2.8)$$

Ici $\eta(u, v) = (u - q)^-$ avec $u - q = (u - q)^+ - (u - q)^-$, $(u - q)^+$ désigne la partie positive de $(u - q)$ et $(u - q)^-$ la partie négative, et $V = H_0^2(\Omega)$.

Pénalisation de (PIV')

On introduit l'opérateur $\beta : V \rightarrow V$, qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \text{ continu lipschizien (globalement ou localement),} \\ \beta(v) = 0 \text{ si et seulement si } v \in K, \\ \beta \text{ est monotone.} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, le problème pénalisé associé au problème (PC) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\epsilon \in V \text{ tel que} \\ (Au_\epsilon, V) + \frac{1}{\epsilon}\beta(u_\epsilon, v) = (f, v). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

2.5 Discrétisation du Problème PC par la MDF

Comme nous l'avons signalé précédemment, la méthode des éléments finis (P1) de Lagrange ne peut pas être appliquée au problème (PIV), alors nous proposons la méthode des différences finies pour la discrétisation du problème (PC).

A cet effet, on introduit un pas de discrétisation constant h et un maillage uniforme de Ω et on construit un ensemble de points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_j) . Pour $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en $N+1$ sous intervalles de longueur $\Delta x = h_x = \frac{1}{N+1}$ (resp. $\Delta y = h_y = \frac{1}{N+1}$). Les noeuds de discrétisation sont les $x_i = x_0 + ih$, (resp. $y_j = y_0 + jh$, $j = \overline{1, N}$ et avec $x_0 = y_0 = 0$, $x^{N+1} = y_{N+1} = 1$).

Approximations des dérivées premières

L'approximation des dérivées premières aux points (x_i, y_j) sont données respectivement par les schémas décentrés à droite et à gauche :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} & \text{et} & \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} & \text{et} & \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}. \end{aligned}$$

Les schémas aux différences finies centrées aux points M_{ij} sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}.\end{aligned}$$

Approximations des dérivées secondes

Les approximations des dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ s'obtiennent aisément à partir des schémas centrés aux différences finies

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &\simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}.\end{aligned}$$

Les approximations des dérivées secondes s'obtiennent en emboîtant les schémas centrés aux différences finies

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &\simeq \frac{\partial_x u(x_i, y_{j+1})}{2h} - \frac{\partial_x u(x_i, y_{j-1})}{2h} \\ &\simeq \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1})}{4h^2} - \frac{u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j-1})}{4h^2}\end{aligned}$$

On aboutit au schéma centré à 4 points d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2}$$

Schéma numérique de l'équation principale

En utilisant les schémas obtenus précédemment, on aboutit à la discrétisation des équations respectives aux noeuds (x_i, y_j) :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{(i,j)} &\simeq \frac{1}{h^4} [u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}], \\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{(i,j)} &\simeq \frac{1}{h^4} [u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}], \\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{(i,j)} &\simeq \frac{1}{h^4} [4u_{i,j} - 2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \\ &\quad + u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}].\end{aligned}$$

La représentation aux noeuds (x_i, y_j) du maillage uniforme est donnée par :

$$\begin{aligned} (\Delta^2 u)_{(i,j)} \simeq & \frac{1}{h^4} \left[20u_{i,j} - 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \right. \\ & + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + \\ & \left. u_{i+2,j} + u_{i-2,j} + u_{i,j+2} + u_{i,j-2} \right]. \end{aligned}$$

Assemblage de la matrice globale (par exemple, pour $n = m = 5$) : On a la matrice globale M

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & C & I & 0 & 0 \\ C & A_2 & C & I & 0 \\ I & C & A_3 & C & I \\ 0 & I & C & A_4 & C \\ 0 & 0 & I & C & A_5 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

Le système global à résoudre s'écrit :

$$MU = F, \quad (2.12)$$

où M est la matrice (2.11), U la solution recherchée et F le second membre :

$$F = (f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,n}; f_{2,1}, \dots, f_{2,n}; \dots; f_{n,1}, \dots, f_{n,n})^t$$

où les sous matrices $A_i, i = \overline{1,5}, B$ et I sont respectivement

$$A_1 = A_5 = \begin{pmatrix} \rho & b & r & 0 & 0 \\ b & \varphi & b & r & 0 \\ r & b & \varphi & b & r \\ 0 & r & b & \varphi & b \\ 0 & 0 & r & b & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 21 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 21 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 21 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 22 \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \psi & p & t & 0 & 0 \\ p & e & p & t & 0 \\ t & p & e & p & t \\ 0 & t & p & e & p \\ 0 & 0 & t & p & \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -8 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 21 \end{pmatrix}, \quad i = 2, 3, 4$$

$$C = \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & 0 \\ d & c & d & 0 & 0 \\ 0 & d & c & d & 0 \\ 0 & 0 & d & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$f + a + e = \rho, \quad a + e = \varphi \quad \text{et} \quad a + f = \psi$$

L'analogie discret du problème (2.10) pénalisé est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{\varepsilon,h} \in V_{1,h} \text{ tel que} \\ A_h u_{\varepsilon,h} + \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_{\varepsilon,h}) = f_{\varepsilon,h}, \end{cases} \quad (2.13)$$

où A_h est la matrice de discrétisation du problème (PC). Pour simplifier la notation, nous omettons les indices ε et h partout dans la formulation et nous remplaçons les indices i, j dans $u_{i,j}$ et $q_{i,j}$

en choisissant une notation simple. Pour $i = \overline{0, N-1}$, le système (2.13) devient

$$\sum_{l=0}^{N-1} a_{i,l} u_l - \frac{1}{\varepsilon} (u_i - q_i)^- = f_i, \quad (2.14)$$

où $(a_{i,l})_{i,l=\overline{0,N-1}}$ sont les coefficients de la matrice de discrétisation A_h .

Le système (2.14) peut être explicité dans deux cas :

1. si $u_i \geq q_i$, alors $(u_i - q_i)^- = 0$, pour $i = \overline{0, N-1}$ ainsi l'équation (2.14) devient

$$\sum_{l=0}^{N-1} a_{i,l} u_l = f_i. \quad (2.15)$$

La résolution se fait par la méthode S.O.R : A L'itération k , pour $i = \overline{0, N-1}$, nous avons la suite itérative suivante :

$$u_i^{k+1} = (1 - \omega) u_i^k - \frac{\omega}{a_{i,i}^{(2)}} \left(f_i^{k+1} + \sum_{l=0}^{i-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^{k+1} + \sum_{l=i+1}^{N-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^k \right), \quad (2.16)$$

où ω est le paramètre de relaxation.

2. si $u_i < q_i$ d'où $(u_i - q_i)^- = q_i - u_i$, pour $i = \overline{0, N-1}$ ainsi l'équation (2.14) s'écrit

$$\sum_{l=0}^N a_{i,l} u_l - \frac{1}{\varepsilon} (q_i - u_i) = f_i. \quad (2.17)$$

À l'itération k , pour $i = \overline{0, N-1}$, nous avons

$$u_i^{k+1} = (1 - \omega) u_i^k - \frac{\omega}{\tilde{a}_{i,i}} \left(\tilde{f}_i^{k+1} + \sum_{l=0}^{i-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^{k+1} + \sum_{l=i+1}^{N-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^k \right), \quad (2.18)$$

où $\tilde{a}_{i,i} = a_{i,i} + \frac{1}{\varepsilon}$ et $\tilde{f}_i = f_i + \frac{1}{\varepsilon} q_i$.

Remarque Les coefficients diagonaux et le second membre pour le cas 2 sont respectivement $\tilde{a}_{ii} = a_{ii} + \frac{1}{\varepsilon}$ et $\tilde{f}_i = f_i + \frac{1}{\varepsilon} q_i$.

Définition 2.1 (*M- matrice*) Une matrice inversible $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une M-matrice si $a_{ij} \leq 0$ pour $(i \neq j)$ et si tous les termes de son inverse sont positifs ou nuls.

Remarque La matrice M du système (2.12) est une M-matrice , alors le système (2.12) admet une solution unique.

2.6 Expérimentations numériques

Nous allons calculer l'estimation d'erreur en utilisant les normes $\|\cdot\|_{L^2}$ et $\|\cdot\|_{\infty}$, pour le cas

$$f(x, y) = 24[(y^2 - 2y^3 + y^4) + (x^2 - 2x^3 + x^4)] + 2[(2 - 12y + 12y^2) + (2 - 12x + 12x^2)],$$

avec différents maillages correspondants aux nombres de nœuds : 36; 676; 2116; 4356; 7396.

Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau 2.1.

Nœuds $m \times n$	36	676	2116	4356
$\ u - u_h\ _{L^2}$	0.0725	0.0691	0.0689	0.0612
$\ u - u_h\ _{\infty}$	0.1311	0.1280	0.1276	0.1275

Tableau 2.1- Erreurs en fonction du nombre de nœuds.

Pour l'expérimentation numérique, la solution exacte est $u(x, y) = [e^x + (x + 1)e^y]x^2y^2(1 - x^2)(1 - y)^2$ et l' obstacle est

$$q(x, y) = \begin{cases} -\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2}, & \text{if } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Commentaire La discrétisation du bilaplacien du problème (PC) par la MDF donne une matrice de grande taille du système (2.14) ainsi sa résolution numérique nécessite beaucoup d'itérations qui vont engendrer une amplification des erreurs d'arrondi, d'une part, et un temps d'exécution important, d'autre part. La méthode de pénalisation permet de travailler sur tout l'espace sans la contrainte de l'obstacle évitant ainsi de faire une projection sur le convexe K.

Formulation mixte du bilaplacien avec contrainte unilatérale

Introduction

La résolution du problème $\Delta^2 u = f$ par une méthode conforme nécessite l'utilisation d'éléments finis de classe C^1 tandis que l'approche faisant appel aux méthodes mixtes nécessite une régularité C^0 . Dans le cas d'une régularité minimale sur f , un certain nombre de méthodes (voir [5], [10], [23], [24] et [42]) ont été développées. On suppose dans la suite que $f \in H^{-1}(\Omega)$ et on s'intéresse particulièrement à la méthode proposée par Ciarlet-Raviart [16] qui permet d'utiliser des éléments finis de classe C^0 en se basant sur la décomposition $(u - \Phi)$ avec $(-\Delta u) = \Phi$. La discrétisation induite utilise des espaces d'éléments finis de degré k avec $k \geq 1$. Si $k \geq 2$, $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et $\Phi \in H^k(\Omega)$ et donne l'estimation d'erreur (voir [14])

$$\|\Phi - u_h\|_{0,\Omega} + |u - \Phi_h|_{1,\Omega} \leq Ch^{k-1}(|\Phi|_{k,h} + |u|_{k+1,\Omega}),$$

où Φ_h et u_h sont respectivement les approximations de Φ et u .

Cette méthode possède un autre avantage décrit par Ciarlet-Glowinski [14] et mis en valeur par Glowinski-Pironneau [28]. Le problème approché est ramené à un problème d'opérateur frontière qui permet d'utiliser des techniques numériques adéquates de type gradient conjugué ou de Gauss-Seidel pour sa résolution.

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser la décomposition $u - \Phi$ dans un cadre variationnel naturel à

savoir Φ dans $L^2(\Omega)$ avec $\Delta\Phi$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et u dans $H_0^1(\Omega)$. Cette décomposition et les propriétés des espaces fonctionnels induits sont décrites dans [5], [23] et [42]. Ce cadre va nous permettre de définir une méthode approchée de classe C^0 ayant un bon comportement.

Nous allons réécrire le problème (2.1) posé dans le chapitre 2 sous une forme avec pour objectif d'utiliser des éléments finis $P1$ de Lagrange. A cet effet, Ciarlet - Raviart [16] ont proposé une méthode basée sur une formulation dite formulation mixte pour utiliser des éléments finis de classe C^0 [30].

Cette méthode repose sur la décomposition du problème (2.1) en deux sous problèmes découplés : A cet effet, soit u une solution du problème(2.1), on introduit une fonction Φ définie par

$$\Delta u = -\Phi \quad (3.1)$$

et ainsi si dans (2.1), on pose $\Delta u = -\Phi$ et en construisant un cadre variationnel approprié à savoir, Φ dans $L^2(\Omega)$, $\Delta\Phi$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, on obtient la formulation décrite ci-dessous.

3.1 Problème mixte

Reprenons le problème déjà étudié au chapitre précédent :

$$(PC) \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{dans } \Omega, & (a) \\ u \geq q & \text{dans } \Omega, & (b) \\ (\Delta^2 u - f)(u - q) = 0 & \text{dans } \Omega, & (c) \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. & (d) \end{cases}$$

Si u est une solution du problème (PC), alors cherchons le couple $(\phi, u) \in H^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ solution du problème continu suivant.

Trouver le couple $(\Phi, u) \in H^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ solution du problème continu suivant :

$$(P_{mix}) \quad \begin{cases} -\Delta\phi = f & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u = \phi & \text{dans } \Omega, \\ u \geq q & \text{dans } \Omega, \\ (\Delta\phi + f)(\Delta u + \phi)(u - q) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour donner la formulation en inéquation variationnelle qui correspond au problème continu (P_{mix}) , soit (Ψ, v) un couple de fonctions tests qui appartiennent à $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, où la fonction Ψ sera la fonction test associée à ϕ et v la fonction test associée à la seconde variable u . Ainsi, on peut introduire les propriétés souhaitées dans l'espace fonctionnel dans lequel la fonction Ψ sera générique. Les conditions aux limites sur $\partial\Omega$ sont respectivement remplacées dans le nouveau système d'équations du problème (P_{mix}) en choisissant comme espace fonctionnel $H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ pour les inconnues (ϕ, u) et l'espace $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ pour le couple de fonction tests (Ψ, v) . D'où, le système d'inéquations variationnelles couplé correspondant au problème (P_{mix}) :

$$\begin{cases} \text{Trouver le couple } (\phi, u) \in H^1(\Omega) \times K_1 \\ \text{tels que} \\ a_1(\phi, \Psi) = L_f(\Psi), \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega) & (i) \\ a_2(u, v - u) \geq L_\phi(v - u), \quad \forall v \in K_1, & (ii) \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$\begin{aligned} a_1(\phi, \Psi) &= \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\Psi d\Omega, & L_f(\Psi) &= \int_{\Omega} f \cdot \Psi d\Omega, \\ a_2(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega, & L_\phi(v) &= \int_{\Omega} \phi \cdot v d\Omega, \end{aligned}$$

et

$$K_1 = \{v \in V_1 / v > q\}, \quad \text{avec } V_1 = H_0^1(\Omega) \cap \left\{ v / \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \right\}.$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution des IV couplées (3.3), on utilise les théorèmes suivants.

Théorème 3.1 Soit V ($V = H^1(\Omega)$) un espace de Hilbert, et la forme bilinéaire $a_1(.,.)$ continue et V -elliptique sur V et $L_f(.)$ la forme linéaire continue sur V . Alors, d'après le théorème de Lax-Milgram, l'équation variationnelle (3.3) (i) admet une solution unique ϕ appartenant à $H^1(\Omega)$.

De la même façon, on introduit le théorème suivant pour l'IV (3.3) (ii).

Théorème 3.2 [3] Soient V_1 un espace de Hilbert et K_1 un sous ensemble convexe fermé non vide de V_1 , la forme bilinéaire $a_2(\cdot, \cdot)$ continue et V -elliptique, et $L_\phi(\cdot)$ une forme linéaire continue dans V_1 , alors le problème (3.3) (ii) admet une solution unique u appartenant à V_1 .

3.2 Pénalisation

Dans ce paragraphe, on introduit la méthode de pénalisation pour le problème (Pmix), pour plus de détails, voir [3] et [25].

Définition 3.1 La fonctionnelle $f : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est propre, si $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in V$ et f est identiquement différente de ∞ .

Définition 3.2 La fonctionnelle $f : V \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est semi continue inférieurement en x , si pour toute suite $\{x^j\}_{j \geq 0}$ qui converge vers x , nous avons $f(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} f(x^j)$.

Introduisons la fonctionnelle

$$\gamma : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

qui vérifie les hypothèses suivantes

$$(H1) \quad \begin{cases} \gamma \text{ est convexe, propre et s.c.i,} \\ \gamma(v) \geq 0, \quad \forall v \in V \text{ (ici } V = H_0^2(\Omega)), \\ \gamma(v) = 0 \quad \text{si et seulement si } v \in K. \end{cases}$$

i) Pénalisation de (PIV)

Pour tout $\varepsilon > 0$, la pénalisation du problème (PIV) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \gamma(v) - \frac{1}{\varepsilon} \gamma(u_\varepsilon) \geq F(v - u_\varepsilon), \text{ pour tout } v \in H_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.4)$$

Théorème 3.3 ([3]) *Sous les hypothèses (H1), le problème (3.4) admet une solution unique pour tout ε fixe et $\varepsilon > 0$.*

Théorème 3.4 ([3]) *Soit u la solution du problème (PIV) et soit u_ε la solution du problème (3.4), alors on a :*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\| &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \gamma(u_\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

ii) Pénalisation de (PIV')

Pour pénaliser le problème (PIV'), introduisons l'opérateur $\beta : V \rightarrow V'$ (V' est l'espace dual de V) possédant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} -\beta \text{ est continu Lipschitzien (globalement ou localement)}; \\ -\ker(\beta) = K, \text{ i.e., } \beta(v) = 0 \text{ si et seulement si } v \in K; \\ -\beta \text{ est monotone.} \end{cases}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème pénalisé associé au problème (PIV') est donné par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H_0^2(\Omega) \text{ tel que} \\ (Au_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v) \geq F(v), \text{ pour tout } v \in H_0^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.5)$$

Ici $A = \Delta$.

iii) Pénalisation du problème mixte

Pour pénaliser le problème (3.3), nous remplaçons dans les hypothèses (H1) l'espace V par $H_0^1(\Omega)$ et le sous ensemble K par K_1 , alors le problème est donné par

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\phi, u_\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a_1(\phi_\varepsilon, \Psi) = L_f(\Psi), \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega), & (i_\varepsilon) \\ a_2(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\gamma(v) - \frac{1}{\varepsilon}\gamma(v_\varepsilon) = L_{\phi_\varepsilon}(v - u_\varepsilon), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). & (ii_\varepsilon) \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après le théorème (3.3), le problème (3.6) (ii_ε) admet une solution unique pour tout ε fixe tel que $\varepsilon > 0$, et la solution u_ε converge fortement vers u la solution du problème (PIV).

Algorithme de pénalisation

L' algorithme de pénalisation pour le problème (3.5) est donné comme suit

S0 : choisir u^0, ε_1
S1 : poser $k = 1$,
S2 : trouver $u^k \in V$ solution de problème (3.5), en choisissant u^{k-1} comme vecteur initial ,
S3 : donner un critère d'arrêt , si u^k est "satisfaisant" stop,
sinon poser $k := k + 1$, choisir $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ et aller à S2.

3.2.1 Analogie discret du problème (3.3)

Soit $\{V_{1,h}\}_{h>0}$ une famille de sous espaces fermés de V_1 (de dimension finie). Soit $\{K_{1,h}\}_{h>0}$ une famille de sous ensembles convexes fermés non vides de V_1 tel que $K_{1,h} \subset V_{1,h}$, pour tout h et la famille $\{K_{1,h}\}_{h>0}$ approxime l'ensemble K_1 , i.e., $\lim_{h \rightarrow 0} K_{1,h} = K_1$.

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\{v_h\}_{h>0}$ est une suite tels que $v_h \in K_{1,h}$, pour tout $h > 0$ et $v_h \rightarrow v$ faiblement dans V_1 , alors $v \in K_1$;
- pour tout $v \in K_1$, il existe une suite $\{v_h\}_{h>0}$ tels que $v_h \in K_{1,h}$ pour que $h > 0$ et $v_h \rightarrow v$ fortement dans V_1 .

Introduisons une grille de noeuds équidistants comme suit : $x_i = ih$, pour $i = 0, 1, \dots, N$ avec $h = 1/N$ et $y_j = jk$, pour $j = 0, 1, \dots, M$ avec $k = 1/M$ (pour simplifier, on prend $N = M$).

Les sous-espaces $V_{1,h} \subset V_1$ sont définis par

$$V_{1,h} = \{v_h \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega) / v|_\Gamma \in P_1 \text{ sur chaque triangle}\}$$

et

$$\tilde{V}_{1,h} = \{v_h \in V_{1,h} \text{ tel que } v_h = \frac{\partial v_h}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

L'ensemble convexe discret est donné par :

$$K_{1,h} = \{v_h \in \tilde{V}_{1,h} / v_h(x_i, y_j) \geq q(x_i, y_j) \text{ dans } \Omega, \text{ avec } (x_i, y_j) \text{ représentant les noeuds}\}.$$

L'analogue discret du problème (3.3) est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le couple } (\phi_h, u_h) \in V_{1,h} \times K_{1,h} \\ \text{tels que} \\ a_1(\phi_h, \Psi_h) = L_f(\Psi_h), \quad \forall \Psi_h \in \tilde{V}_{1,h}(\Omega), \quad (i_h) \\ a_2(u_h, v_h - u_h) \geq L_\phi(v_h - u_h), \quad \forall v_h \in K_{1,h}. \quad (ii_h) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

3.2.2 Analogue discret du problème pénalisé (3.6)

Construisons maintenant l'analogue discret du problème pénalisé (3.6). Pour tout $v_h \in V_{1,h}$ représenté par le vecteur de coefficients qui appartient à R^{N+1} . Notons respectivement $v_{i,j}$ et $q_{i,j}$ pour le $v_h(x_i, y_j)$ et $q(x_i, y_j)$. $K_{1,h}$ peut être réduit à $R_{1,h} \subset R^{N+1}$.

Pour $i, j = \overline{0, N-1}$, $R_{1,h}$ est défini par

$$R_{1,h} = \left\{ (v_{i,j} \in (R^{N+1})^2 / v_{i,j} |_{\partial\Omega} = \frac{\partial v_{i,j}}{\partial n} |_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{et } v_{i,j} \geq q_{i,j}) \right\}. \quad (3.8)$$

Introduisons maintenant la fonction

$$T : R^{N+1} \rightarrow R, \\ T(v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n ((v_{i,j} - q(x_i, y_j))^-)^2 \quad \text{pour } \{v_{i,j}\}_{i,j=0}^N,$$

où $(v_{i,j} - q(x_i, y_j))^-$ est la partie négative de $(v_{i,j} - q(x_i, y_j))$ pour $i, j = 0, \dots, N$, et définie par

$$(v_{i,j} - q(x_i, y_j))^- = \max_{0 \leq i,j \leq N} \{0, (q(x_i, y_j) - v_{i,j})\}.$$

Pour $i, j = 0, 1, \dots, N$, nous avons

$$\frac{\partial T}{\partial v_{i,j}}(v) = (v_{i,j} - q(x_i, y_j))^- \frac{\partial}{\partial v_{i,j}}((v_{i,j} - q(x_i, y_j))^-) = -(v_{i,j} - q(x_i, y_j))^-.$$

On définit l'opérateur $\eta : R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$ comme suit :

$$\eta(v) = \nabla T(v), \quad \forall v \in R^{N+1}. \quad (3.9)$$

Lemme 3.1 ([3]) L'opérateur $\eta : R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$ défini par (3.9) vérifie les propriétés suivantes :

- η est Lipschitzien continu,
- $\eta(v) = 0$ si et seulement si $v \in R_{1,h}$,
- η est monotone.

L'analogue discret des problèmes pénalisés (3.6) est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\phi_{\varepsilon,h}, u_{\varepsilon,h}) \in V_{1,h} \times K_{1,h} \\ \text{tels que} \\ A_{1,h}\phi_{\varepsilon,h} = f_h, \quad (i_{\varepsilon,h}) \\ A_{2,h}u_{\varepsilon,h} + \frac{1}{\varepsilon}\eta(u_{\varepsilon,h}) = \phi_{\varepsilon,h}, \quad (ii_{\varepsilon,h}) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

où $A_{1,h}$ et $A_{2,h}$ sont les matrices de discrétisation des problèmes respectifs (3.6, *i*) et (3.6, *ii*).

Pour simplifier la notation, nous omettons les indices ε et h partout dans les prochaines formulations et nous remplaçons les indices i, j de $u_{i,j}$ et $q_{i,j}$ en choisissant un indice unique en choisissant une nouvelle numérotation.

Pour $i = \overline{0, N-1}$, le système (3.10) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{N-1} a_{i,l}^{(1)} \phi_l = f_i \quad (i'_\varepsilon) \\ \sum_{l=0}^{N-1} a_{i,l}^{(2)} u_l - \frac{1}{\varepsilon}((u_i - q_i)^- = \phi_i, \quad (ii'_\varepsilon), \end{array} \right. \quad (3.11)$$

où $(a_{i,l}^{(1)})_{i,l=0,\dots,N-1}$ et $(a_{i,l}^{(2)})_{i,l=0,\dots,N-1}$ sont respectivement les coefficients des matrices de discrétisation $A_{1,h}$ et $A_{2,h}$.

Le système linéaire (3.11, i'_ε) peut être résolu, par exemple, par la méthode itérative de Gauss Seidel. Pour le système non linéaire (3.11, ii'_ε) on le résout par la méthode S.O.R.

Pour $l = 0, \dots, N-1$, on a deux cas :

1 si $u_i \geq q_i$, alors $(u_i - q_i)^- = 0$ pour $i = \overline{0, N-1}$ et le système (3.11 - ii'_ε) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{N-1} a_{i,l}^{(1)} \phi_l = f_i, \\ \sum_{l=0}^{N-1} a_{i,l}^{(2)} u_l = \phi_i. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Nous résolvons le premier système (3.12) par la méthode de Gauss-Seidel et le second par la méthode S.O.R.

À l'itération k , pour $i = \overline{0, N-1}$, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{i,i}^{(1)}} \left(f_i + \sum_{l=0}^{i-1} a_{i,l}^{(1)} \phi_l^{k+1} + \sum_{l=i+1}^{N-1} a_{i,l}^{(1)} \phi_l^k \right), \\ u_i^{k+1} = (1 - \omega)u_i^k - \frac{\omega}{a_{i,i}^{(2)}} \left(\phi_i^{k+1} + \sum_{l=0}^{i-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^{k+1} + \sum_{l=i+1}^{N-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^k \right), \end{array} \right. \quad (3.13)$$

où ω est le paramètre de relaxation.

2 si $u_i < q_i$ d'où $(u_i - q_i)^- = q_i - u_i$ pour $i = \overline{0, N-1}$ et le système couplé (3.11) devient

$$\begin{cases} \sum_{l=0}^N a_{i,l}^{(1)} \phi_l = f_i, \\ \sum_{l=0}^N a_{i,l}^{(2)} u_l - \frac{1}{\varepsilon}(q_i - u_i) = \phi_i. \end{cases} \quad (3.14)$$

À l'itération k , pour $i = \overline{0, N-1}$, nous avons

$$\begin{cases} \phi_i^{k+1} = -\frac{1}{a_{i,i}^{(1)}} \left(f_i + \sum_{l=0}^{i-1} a_{i,l}^{(1)} \phi_l^{k+1} + \sum_{l=i+1}^{N-1} a_{i,l}^{(1)} \phi_l^k \right), \\ u_i^{k+1} = (1 - \omega) u_i^k - \frac{\omega}{\tilde{a}_{i,i}} \left(\tilde{\phi}_i^{k+1} + \sum_{l=0}^{i-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^{k+1} + \sum_{l=i+1}^{N-1} a_{i,l}^{(2)} u_l^k \right), \end{cases} \quad (3.15)$$

où $\tilde{a}_{i,i} = a_{i,i}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon}$ et $\tilde{\phi}_i = \phi_i + \frac{1}{\varepsilon} q_i$.

3.3 Exemples numériques

Pour illustrer l'étude décrite ci dessus, nous considérons deux exemples .

Exemple 1. Soient $f \equiv 0$ et

$$q(x, y) = \begin{cases} -\frac{2}{5} + \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2}, & \text{si } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{3}. \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ et la solution exacte est donnée par l'expression suivante

$$u(x, y) = (e^x + (x + 1)e^y)x^2y^2(1 - x)^2(1 - y)^2,$$

qui satisfait évidemment les conditions aux limites d'encastrement $u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Cherchons le meilleur choix du paramètre de relaxation ω qui permet de réduire le nombre d'itérations et le temps d'exécution de l'algorithme (3.12)-(3.15). Pour cela, nous utilisons le paramètre de pénalisation $\varepsilon = 10^{-4}$ et les différentes normes $\frac{|u - u_h|_{0,\Omega}}{|u|_{0,\Omega}}$, $\frac{|u - u_h|_{1,\Omega}}{|u|_{1,\Omega}}$ et $\frac{|\phi - \phi_h|_{0,\Omega}}{|\phi|_{0,\Omega}}$.

Nous donnons les résultats dans les tableaux 3.1 et 3.2. Pour $h = \frac{1}{64}$.

ω	1.6	1.7	1.8	1.9
Iterations	128	128	84	89

Tableau 3.1 – Nombre d'itérations pour différentes valeurs de ω .

On constate que le paramètre ω le plus approprié est 1.8 correspondant au nombre d'itérations minimal.

On donne dans le tableau 3.2, l'erreur relative selon le rayon de convergence en utilisant les différentes normes pour les nœuds N_1 jusqu'à N_9 (voir figure 3.1 ci-après).

	$\frac{ u-u_h _{0,\Omega}}{ u _{0,\Omega}}$	$\frac{ u-u_h _{1,\Omega}}{ u _{1,\Omega}}$	$\frac{ \phi-\phi_h _{0,\Omega}}{ \phi _{0,\Omega}}$
N1	5.43290e-01	6.32693e-01	6.32041e-01
N2	3.26972e-01	4.01635e-01	5.16879e-01
N3	1.30302e-01	1.89139e-01	3.34937e-01
N4	3.99107e-02	8.32646e-02	1.88319e-01
N5	1.08809e-02	3.88438e-02	9.92016e-02
N6	2.82773e-03	1.89646e-02	5.08074e-02
N7	7.19891e-04	9.41839e-03	2.56967e-02
N8	1.81559e-04	4.70081e-03	1.29204e-02
N9	1.49139e-04	3.99039e-03	1.01139e-02

Tableau 3.2- Estimations des erreurs aux noeuds N1 à N9.

De la même manière, on pourra faire des tests similaires pour le paramètre de pénalisation. D'après les résultats donnés ci-dessus, nous constatons que la méthode converge et que la précision de la solution est acceptable.

Exemple 2. Dans cet exemple, nous appliquons la méthode décrite dans le problème (Pmix) avec les conditions aux limites relatives à une plaque simplement supportée sur Γ .

Nous reprenons un exemple (voir [29]), où la fonction f est donnée par

$$f = \frac{k(x,y)}{D},$$

k est la charge et D est donné par

$$D = \frac{E.ep^3}{12.(1 - \nu^2)},$$

avec ep l'épaisseur de la plaque en mm , ν le coefficient de Poisson adimensionnel, E le module de Young en DaN/mm^2 et L la longueur de la plaque en mm .

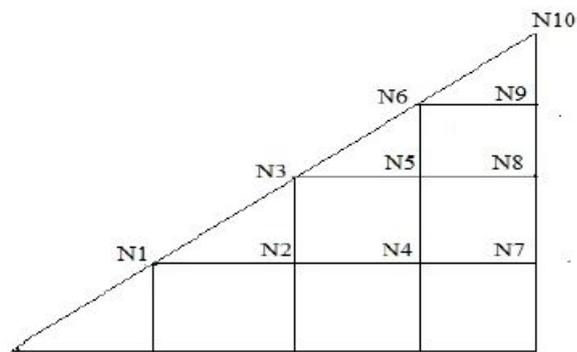
Pour résoudre le problème (3.12)-(3.15), nous utilisons la méthode de Gauss-Seidel (i.e., le paramètre de relaxation $\omega = 1$). Nous effectuons plusieurs expérimentations afin de déterminer le meilleur choix du paramètre de pénalisation ε .

Pour la simulation numérique, nous prenons le même obstacle q de l'exemple 1 et les données $k = 10$, $ep = 1$, $\nu = 0.3$, $E = 21000$ et $L = 20$.

Nous choisissons une tolérance $tol = 10^{-10}$ et un pas de discrétisation $h = 1/40$. Nous donnons maintenant dans le tableau 3.3, le nombre d'itérations (iter) et les solutions aux mêmes noeuds : noeud N_1 jusqu'au noeud N_9 (voir Figure 3.1).

	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$
iter	161	160	107	161
N1	0.35148241980	0.35145024454	0.35144800092	0.65084870177
N2	0.65091791811	0.65085372995	0.65084924526	0.87362326465
N3	0.87372465890	0.87363063270	0.87362404760	0.65084570177
N4	0.65091791811	0.65085372995	0.65084924526	1.20942564367
N5	1.20956577721	1.20943583177	1.20942672684	1.62605721021
N6	1.62626743670	1.62607251321	1.62605880566	0.87362326465
N7	0.87372465890	0.87360632704	0.87362404760	1.62605721021
N8	1.62626743674	1.62607251321	1.62605880566	1.62605721021
N9	2.18626575728	2.18595974290	2.18593808993	2.18593563510
cpu	4.130524E + 01	4.017213E + 01	4.13552E + 01	4.2505531E + 01

Tableau 3.3- Solutions aux neouds N1 à N9 pour différentes valeurs de ε .

FIGURE 3.1 – Les noeuds N_1 à N_9

Nous constatons à partir de la dernière colonne du tableau ci-dessus qu'il y a divergence pour $\varepsilon = 10^{-4}$.

Nous calculons les résultats numériques aux mêmes noeuds N_1 jusqu'à N_9 (voir Tableau 3.4) en variant le pas de discrétisation h .

h	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$
iter	156	520	161
N1	0.35461036999	0.35192505960	0.35145024454
N2	0.65591825902	0.65153232928	0.65085372995
N3	0.87996516152	0.87438361745	0.87363063270
N4	0.65591825902	0.65153232928	0.65085372995
N5	1.21748764448	1.21034203389	1.20943583177
N6	1.63639174975	1.62704232558	1.62607251321
N7	0.87996516152	0.87438361745	0.87360632704
N8	1.63639174975	1.62704232558	1.62607251321
N9	2.20019244146	2.18704648324	2.19855974290
cpu	1.76769941	10.4258	4.0172133E + 01

Tableau 3.4- Solutions aux noeuds N_1 à N_9 pour différents pas h .

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons combiné la formulation mixte et la méthode de pénalisation classique pour une classe de problèmes à frontière libre (i.e. avec obstacle). L'intérêt de la formulation mixte est de réduire les problèmes d'ordre 4 à des problèmes d'ordre 2. Ces derniers problèmes exigent moins de régularité à la solution et conduisent à la résolution de deux sous problèmes couplés du laplacien classique, avec conditions aux limites de type Dirichlet classiques et des contraintes unilatérales. D'un point de vue numérique, les problèmes obtenus conduisent à la résolution d'un système couplé de deux laplaciens dont les matrices représentatives sont de tailles plus petites jouissant de la propriété de M-matrice. La résolution des sous problèmes demande moins de temps de calcul que la résolution du système obtenu par la discrétisation du problème bilaplacien. Mieux encore, les problèmes couplés utilisent seulement des éléments finis $P1$ de type Lagrange.

Méthode de décomposition de domaine appliquée au problème de l'obstacle

Introduction

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires dans le cas général nécessitent une discrétisation du domaine de la solution. Le nombre de degrés de liberté à déterminer peut dépasser les capacités des ordinateurs surtout, par exemple dans le cas du calcul par éléments finis en 3D. Les méthodes de calcul peuvent faire intervenir la résolution des systèmes linéaires avec un très grand nombre d'inconnues. La taille de la matrice dépassera les capacités du stockage de la mémoire vive de l'ordinateur. On peut surmonter cette difficulté en découpant le domaine Ω en plusieurs sous domaines Ω_i plus petits, et calculer la solution sur chacun des sous domaines et la solution globale sera formée des solutions sur chaque sous domaine. Cette méthode permet aussi de simplifier la résolution de problèmes posés sur des domaines de géométrie complexe en choisissant un découpage en sous domaines de forme élémentaire plus facile à discrétiser .

La difficulté due à cette technique réside dans la détermination des conditions aux limites imposées aux bords de chaque sous domaine (frontières fictives).

Deux stratégies, toutes les deux itératives, sont possibles ; la première consiste à découper le domaine en sous domaines qui se recouvrent partiellement et à utiliser la solution à l'étape précédente sur les sous domaines voisins pour déterminer les conditions aux limites sur le sous

domaine considéré.

La deuxième consiste à découper le domaine sur une partition et à imposer des conditions de continuité aux interfaces. Une fois le découpage adopté, la méthode de résolution sur chaque sous domaine sera identique à celle envisagée sur le domaine global mais fera intervenir un nombre important de degrés de liberté [34].

Le prix à payer est le caractère itératif de l'algorithme mais avec la possibilité de ne pas dépasser les capacités de stockage de la mémoire de l'ordinateur et ainsi arriver à faire tenir les données du problème en mémoire de l'ordinateur.

4.1 Position du problème

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ . On considère le problème de l'obstacle suivant :

Trouver $u \in H^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) & \text{dans } \Omega, & (i) \\ u \geq q & \text{dans } \Omega, & (ii) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, & (iii) \end{cases} \quad (4.1)$$

où f est une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$, $q(x, y)$ désignant l'obstacle.

Le problème (4.1) a été étudié par plusieurs auteurs pour des questions d'existence, d'unicité et de régularité de la solution u (voir [13], [19], [26], [37] et [38]).

4.2 Formulation du problème (4.1) en terme d'IV

Introduisons les éléments suivants :

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

et K le sous-ensemble convexe fermé de V

$$K = \{v \in V / v \geq q\}.$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega,$$

est la forme bilinéaire.

$$L(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega.$$

est la forme linéaire. La formulation du problème (4.1) en terme d'IV s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (4.2)$$

Comme la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, le problème (4.2) équivaut à un problème de minimisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (4.3)$$

où la fonctionnelle $J : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v). \quad (4.4)$$

La fonctionnelle (4.4) étant convexe, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive sur V , le problème de minimisation (4.3) équivaut au problème (4.1).

Notons que le problème (4.2) admet une solution unique selon le théorème de Stampacchia [9].

4.3 Décomposition de domaine Ω

Décomposons le domaine Ω en plusieurs sous-domaines (dans cette étude, on considère le cas simple de deux sous domaines), Ω_1 et Ω_2 comme illustré sur la figure 4.1 donnée ci-dessous.

Notons Γ_{12} l'interface entre les deux sous-domaines, i.e.

$$\Gamma_{12} = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}. \quad (4.5)$$

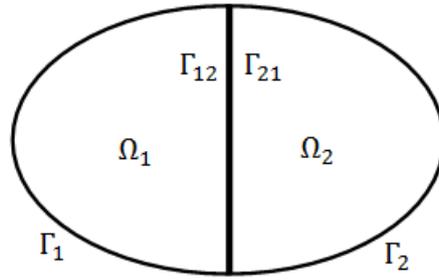


FIGURE 4.1 – Décomposition en deux sous domaines

La partition Ω_i induit une partition $\{\Gamma_i\}_{i=1,2}$ sur la frontière Γ définie par

$$\Gamma_1 = \Gamma \cap \Omega_1, \quad \Gamma_2 = \Gamma \cap \Omega_2. \quad (4.6)$$

Considérons alors les deux sous-problèmes découplés suivants :

Pour $i = 1, 2$, on a

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i & \text{dans } \Omega_i & (i) \\ u_i \geq q_i & \text{dans } \Omega_i & (ii) \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i. & (iii) \end{cases} \quad (4.7)$$

On associe au problème (4.7), les conditions aux limites supplémentaires à l'interface Γ_{12}

$$u_1 = u_2 \quad \text{sur } \Gamma_{12}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial n_2} \quad \text{sur } \Gamma_{12}, \quad (4.9)$$

où n_i est la normale (unitaire) extérieure à Ω_i et Γ_{12} . La relation (4.8) est dite condition de continuité et d'admissibilité cinématique tandis que (4.9) est la condition qui permet d'assurer l'équilibre des efforts sur l'interface.

Remarque 4.1 Par cette décomposition, on distingue deux cas .

- 1^{er} cas : l'obstacle se situe dans les deux sous- domaines Ω_1 et Ω_2 .
- 2^{eme} cas : l'obstacle se situe dans l'un des sous- domaines.

Le premier cas donne le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ u_i \geq q_i & \text{dans } \Omega_i \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases}$$

Concernant le deuxième cas, si par exemple, l'obstacle se trouve dans Ω_1 et non dans Ω_2 , alors le problème (4.7) s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1 \geq q_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ u_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ u_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Dans ce travail, on considère le premier cas. On dit que la décomposition (4.7) est consistante, si les problèmes (4.1.i)-(4.1.iii) et (4.7.i)-(4.7.iii) ont la même solution.

4.4 Méthode des Multiplicateurs de Lagrange

Soit

$$[u_{12}] = (u_1 - u_2)|_{\Gamma_{12}} \quad (4.10)$$

l'erreur de la solution à l'interface .

Le principe de la méthode de décomposition de domaine est de résoudre itérativement le problème (4.7) pour qu'à la convergence les conditions (4.8) et (4.9) soient satisfaites .

Nous nous limitons dans cette étude aux méthodes de décomposition de domaine de type multiplicateurs de Lagrange.

La méthode des moindres carrés peut être aussi utilisée mais ne fait pas l'objet de cette étude.

Pour ce faire, on associe l'erreur à l'interface $[u_{12}]$ laquelle est calculée à chaque itération.

Introduisons les sous espaces

$$V_i = \{v \in H^1(\Omega_i) / v = 0 \text{ sur } \Gamma_i\},$$

les sous ensembles convexes fermés de V_i , pour $i = 1, 2$

$$K_i = \{v \in V_i / v_i \geq q_i \text{ dans } \Omega_i \text{ et } v_1 = v_2 \text{ sur } \Gamma_{12}\}. \quad (4.11)$$

et les formes bilinéaires

$$a_i(u_i, w_i) = \int_{\Omega_i} \nabla u_i \cdot \nabla w_i d\Omega \quad \forall v_i, w_i \in V_i \quad (4.12)$$

$$(u_i, w_i) = \int_{\Omega_i} u_i \cdot w_i d\Omega \quad \forall v_i, w_i \in V_i, \quad (4.13)$$

$$(v, w)_{\Gamma_{12}} = \int_{\Gamma_{12}} v \cdot w d\Gamma, \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (4.14)$$

Soient $u = (u_1, u_2)$ et $V = V_1 \times V_2$.

En tenant compte de ces nouvelles notations données ci-dessus, la fonctionnelle de l'énergie (4.4) s'écrit

$$J(v) = J_1(v_1) + J_2(v_2), \quad (4.15)$$

où

$$J_i(v_i) = \frac{1}{2} a_i(v_i, v_i) - (f_i, v_i),$$

avec

$$f_i = f |_{\Omega_i}, \quad v_i = v |_{\Omega_i}, \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Le multiplicateur de Lagrange λ assure la continuité des dérivées normales (4.9) à travers l'interface Γ_{12} .

La méthode des multiplicateurs de Lagrange conduit à un problème d'optimisation avec contrainte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u = (u_1, u_2), \text{ tels que} \\ J_1(u_1) + J_2(u_2) \leq J_1(v_1) + J_2(v_2), \quad \forall (v_1, v_2) \in V \\ u_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma_{12}. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

A priori , le problème (4.16) n'est pas le même que le problème (4.3). En effet, il manque la condition sur la continuité des dérivées normales à travers la frontière commune Γ_{12} .

Cette difficulté sera surmontée en utilisant une méthode appropriée pour résoudre (4.16).

Pour ce faire, le Lagrangien \mathcal{L} du problème (4.16) défini sur $V \times L^2(\Gamma_{12})$ est donné par

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \mu) = J_1(v_1) + j_2(v_2) + \int_{\Gamma_{12}} \mu(v_2 - v_1) d\Gamma_{12}(x) \quad \forall (v_1, v_2) \in V \times L^2(\Gamma_{12}) \quad (4.17)$$

où $\mu \in L^2(\Gamma_{12})$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $[u_{12} = 0]$.

A l'aide de la convexité, le problème d'optimisation (4.16) est équivalent au problème point-selle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda_{12}) \in V \times L^2(\Gamma_{12}) \text{ tels que} \\ \mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda_{12}) \leq \mathcal{L}(v, \mu), \quad \forall (v, \mu) \in V \times L^2(\Gamma_{12}) \end{array} \right. \quad (4.18)$$

ou encore

$$\mathcal{L}(u, \lambda_{12}) = \sup_{\lambda_{12} \in L^2(\Gamma_{12})} \inf_{u \in W} \mathcal{L}(u, \lambda_{12}). \quad (4.19)$$

En annulant les dérivées directionnelles par rapport à u et λ_{12} , on obtient les équations qui caractérisent le point selle (u, λ_{12}) de \mathcal{L}

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \lambda_{12}) \in V \times L^2(\Gamma_{12}) \text{ tels que} \\ a(u_i, v_i - u_i) \geq (f_i, v_i - u_i)_{\Gamma_{12}} - \epsilon_{ij}(\lambda_{12}, v_i)_{\Gamma_{12}} \quad \forall v_i \in V_i, \quad i = 1, 2 \quad (i) \\ (\mu, u_1 - u_2)_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \forall \mu \in L^2(\Gamma_{12}), \quad (ii) \end{array} \right.$$

où ϵ_{ij} désigne le signe du sous domaine Ω_i ($\epsilon_{12} = 1, \epsilon_{21} = -1$).

L'avantage de ces IV (4.20) est que, pour λ_{12} donné, l'IV (4.20)(i) est découplée. De cette IV, on déduit que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_i = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ u_i \geq q_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial n_i} = -\epsilon_{ij} \lambda_{12} \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ \lambda_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial n_2} \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Le multiplicateur de Lagrange λ_{12} assure la continuité des dérivées normales à travers Γ_{12} .

Supposons que $u = u(\lambda_{12})$ soit solution du problème découplé

$$u_i(\lambda_{12}) \in V_i; \quad a_i(u_i(\lambda_{12}), v) \geq (f_i, v)_{\Omega_i} - \epsilon_{ij}(\lambda_{12}, v)_{\Gamma_{12}}, \quad \forall v \in V_i \quad i = 1, 2. \quad (4.21)$$

En posant $v = u_i(\lambda_{12})$ dans (4.22) et en remplaçant dans (4.17), on obtient la fonctionnelle duale

$$J^*(\lambda_{12}) = \mathcal{L}(u(\lambda_{12}), \lambda_{12}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 a(u_i(\lambda_{12}), u_i(\lambda_{12})). \quad (4.22)$$

Comme les formes bilinéaires symétriques a_i sont coercives, la fonctionnelles J^* est concave. Le problème de maximisation

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda_{12} \in L^2(\Gamma_{12}) \text{ tel que} \\ J^*(\lambda_{12}) \geq J^*(\mu) \quad \forall \mu \in L^2(\Gamma_{12}) \end{cases} \quad (4.23)$$

admet une solution unique. La méthode de décomposition de domaine proposée ici est basée sur la résolution du problème de maximisation (4.24) par une méthode itérative de type Uzawa [34]

$$\lambda_{12}^{(k+1)} = \lambda_{12}^{(k)} + t_k \mu^{(k)}, \quad (4.24)$$

où $\mu^{(k)}$ est une direction de montée de $J^*\left(\frac{\partial J^*(\lambda_{12}^{(k)})}{\partial \lambda_{12}}\right) \cdot \mu^{(k)} > 0$ et t_k est le pas de déplacement.

L'application $\lambda_{12} \rightarrow u(\lambda_{12})$ est linéaire et continue et on a

$$u(\lambda_{12}^{(k)} + t_k \mu^{(k)}) = u(\lambda_{12}) + h w, \quad (4.25)$$

où $w = (w_1, w_2) \in V$ est solution du problème découplé

$$w_i \in V_i, \quad a_i(w_i, v) \geq -\epsilon_{ij}(\mu_{12}, v)_{\Gamma_{12}}, \quad \forall v \in V_i \quad i = 1, 2. \quad (4.26)$$

En effet

$$a_i(u_i(\lambda_{12} + t\mu_{12}) - u_i(\lambda_{12}), v_i) \geq \epsilon_{ij}(\mu_{12}, v_i)_{\Gamma_{12}} \quad \forall v_i \in V_i. \quad (4.27)$$

Si w_i est solution de

$$a_i(w_i, v_i) \geq -\epsilon_{ij}(\mu_{12}, v_i)_{\Gamma_{12}}, \quad \forall v_i \in W_i, \quad (4.28)$$

alors par unicité de la solution on a

$$u_i(\lambda_{12} + t\mu_{12}) - u_i(\lambda_{12}) = t w_i. \quad (4.29)$$

Ainsi on peut calculer la dérivée directionnelle de J^* dans la direction μ_{12}

$$\frac{\partial J^*(\lambda_{12})}{\partial \lambda_{12}} \cdot \mu_{12} = - \sum_{i=1}^2 a_i(u_i, w_i) \quad (4.30)$$

J^* est continûment différentiable, son gradient $\nabla J^*(\lambda_{12})$ existe et doit vérifier

$$\frac{\partial J^*(\lambda_{12})}{\partial \lambda_{12}} \cdot \mu_{12} = (\nabla J^*(\lambda_{12}), \mu_{12})_{\Gamma_{12}}. \quad (4.31)$$

En posant $v = u_i$ dans l'IV (4.27), on obtient

$$a_i(w_i, v_i) \geq -\epsilon_{ij}(\mu_{12}, [u_{12}])_{\Gamma_{12}}. \quad (4.32)$$

En remplaçant cette IV dans (4.31) et en considérant (4.32), on déduit que

$$\gamma = \nabla J^*(\lambda_{12}) = [u_{12}] \forall \lambda_{12} \in L^2(\Gamma_{12}). \quad (4.33)$$

On peut maintenant construire une direction de montée avec ∇J^* , J^* est quadratique convexe, la meilleure direction est celle du gradient conjugué, à chaque itération k la direction de montée du gradient conjugué est donnée par

$$\beta_k = \frac{\|\gamma^k\|_{L^2(\Gamma_{12})}^2}{\|\gamma^{k-1}\|_{L^2(\Gamma_{12})}^2}, \quad (4.34)$$

$$\mu_{12}^k = \gamma^k + \beta_k \mu_{12}^{k-1} \quad (4.35)$$

Le pas de déplacement t_k est calculé de façon à maximiser la fonction définie par

$$\Phi(t) = J^*(\lambda_{12}^k + t\mu_{12}^k), \quad (4.36)$$

J^* est quadratique et fortement concave alors

$$\Phi'(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda_{12}} J^*(\lambda_{12}^k + t\mu_{12}^k) \cdot \mu_{12}^k = (\nabla J^*(\lambda_{12}^k + t\mu_{12}^k), \mu_{12}^k)_{\Gamma_{12}} = 0. \quad (4.37)$$

On obtient

$$([u_{12}^k] + t[w_{12}^k], \mu_{12}^k)_{\Gamma_{12}}, \quad (4.38)$$

et alors

$$t_k = - \frac{([u_{12}^k], \mu_{12}^k)_{\Gamma_{12}}}{([w_{12}^k], \mu_{12}^k)_{\Gamma_{12}}}. \quad (4.39)$$

4.5 Algorithme

Les différentes étapes de calcul sont résumées dans l'organigramme suivant

$k = 0$, initialisation, λ_{12}^0 donné

Calculer $u^0 = (u_1^0, u_2^0) \in W = W_1 \times W_2$ solution de

$$a_i(u_i^0, v) \geq (f_i, v)_{\Omega_i} - \epsilon_{ij}(\lambda_{12}^0, v)_{\Gamma_{12}}, \quad \forall v \in W_i, i = 1, 2$$

Gradient initial : $\gamma^0 = [u_{12}^0]$

Direction initiale : $\mu_{12} = \gamma^0$

Itération $k \geq 0$ On suppose $\lambda_{12k}, u^k, \gamma^k$ et μ_{12}^k connus

sensibilité

calculer $w^k = (w_1^k, w_2^k) \in W$ solution de

$$a_i(w_i^k, v)_{\Omega_i} \geq -\epsilon_{ij}(\lambda_{12}^0, v)_{\Gamma_{12}}, \quad \forall v \in W_i, i = 1, 2$$

Pas de déplacement

$$t_k = -\frac{([u_{12}^k], \mu_{12}^k)_{\Gamma_{12}}}{([w_{12}^k], \mu_{12}^k)_{\Gamma_{12}}}$$

Mise à jour des inconnues

$$\lambda_{12}^{(k+1)} = \lambda_{12}^{(k)} + t_k \mu^{(k)}$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k + t_k w_i^k, i = 1, 2$$

Gradient

$$\gamma^{k+1} = [u_{12}^{k+1}]$$

Direction du gradient conjugué

$$\beta_k = \frac{\|\gamma^k\|_{L^2(\Gamma_{12})}^2}{\|\gamma^{k-1}\|_{L^2(\Gamma_{12})}^2}$$

$$\mu_{12}^{k+1} = \gamma^{k+1} + \beta_k \mu_{12}^k$$

Test d'arrêt

$$\frac{\|\gamma^{k+1}\|_{L^2(\Gamma_{12})}^2}{\|\gamma^k\|_{L^2(\Gamma_{12})}^2} < \epsilon$$

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons considéré deux formulations celle de la formulation mixte et celle de la méthode de pénalisation classique pour une classe de problèmes à frontière libre (i.e. avec obstacle). L'intérêt de la formulation mixte est la réduction des problèmes d'ordre 4 en des problèmes d'ordre 2. Ces derniers problèmes exigent moins de régularité à la solution et alors conduira à la résolution de deux sous problèmes du laplacien classique couplés avec conditions aux limites de Dirichlet classiques et des contraintes unilatérales. D'un point de vue numérique, les problèmes obtenus conduisent à la résolution d'un système couplé de deux laplaciens dont les tailles des matrices sont plus petites avec la propriété de M- matrice. La résolution de ces problèmes nécessite moins de temps de calcul que l'approche utilisant le bilaplacien. En outre, les problèmes couplés exigent des éléments finis de Lagrange $P1$ de classe C^0 .

A travers cette étude, nous voulions tester l'efficacité de cette technique dans le but de l'appliquer à d'autres problèmes plus complexes que celui présenté dans cette étude notamment les problèmes de type hyperbolique ou parabolique rencontrés en hydrodynamique, en finance ou en contrôle optimal. Nous comptons généraliser cette méthode aux problèmes de contrôle optimal dont l'équation d'état est une équation aux dérivées partielles de type parabolique. En outre, nous comptons aussi étudier des problèmes mixtes en 3 D utilisant la méthode des volumes finis.

Bibliographie

- [1] Allaire, G. , *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'école polytechnique -91128 Palaiseau Cedex, (2006).
- [2] Amara, M. and El Dabaghi, F., *Une méthode optimale d'éléments finis de classe C^0 d'approximation du bilaplacien 2D : analyse théorique et résultats numériques*. Rapport de recherche N 3068, INRIA (1996).
- [3] Arnàutu, V and Neittaanmaki, P., *Optimal Control From Theory to Computer Programs*. Kluwer Academic Publishers, London (2003).
- [4] Bergounioux, M., *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires*. Éditions Dunod, (2001).
- [5] Bernardi, C., Girault, V. and Maday, Y., *Mixed spectral element approximation of the Navier Stokes equations in the stream function and vorticity formulation*. IMA Journal of Numerical Analysis, 12, pp 565-608, (1992).
- [6] Bishnu, P. Lamichhane, *A mixed finite element method for the biharmonic problem using biorthogonal or quasi-biorthogonal systems*. Journal of Scientific Computing, 46, 3, pp 379-396, (2011).
- [7] Bohe Wang, *The Application of Finite Difference Method and Matlab in Engineering Plates*. Master thesis of Science in Computer science, Morgantown, WV (1999).
- [8] Brenner, S. C., *Finite Element Methods for Fourth Order Elliptic Variational Inequalities*. In NA and Sc. Computing conference in honor of Wolfgang Hackbusch's 65 th birthday, (2013).

- [9] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Éditions Masson, Paris (1987).
- [10] Brezzi, F. and Fortin, M., *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer series in Computational Mathematics, 15 Springer Verlag, New York, (1991).
- [11] Caffarelli Luis, A. and Friedman, A., *The obstacle problem for the biharmonic operator*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 6, (1979).
- [12] Chaskalovic, J., *Méthode des éléments finis pour les sciences de l'ingénieur*. Editions Lavoisier, (2004).
- [13] Chau, M., Laouar, A., Garcia, T. and Spiteri P, *Grid solution of problem with unilateral constraints*. Numerical Algorithms, Springer (2017).
- [14] Ciarlet, P. and Glowinski, R., *Dual iterative techniques for solving finite element approximation of the biharmonic equation*. Springer Verlag (1984).
- [15] Ciarlet, P. and Lions, J.L., *Finite Element Methods, part 2. Numerical Methods for Solids*. Handbook of Numerical Analysis, IV, North Holland, (1996).
- [16] Ciarlet, P. and Raviart, P., *A mixed method for biharmonic problem. Mathematical aspect of finite elements in partial differential equations*. Carl de Boor, Academic Press , New york, (1974).
- [17] Danaila, I., Joly, P., Kaber, S. M. et Postel, M., *Introduction au calcul scientifique par la pratique*. Editions Dunod (2005).
- [18] Dubon, O., *Optimized Schwarz methods for a diffusion problem with discontinuous coefficients*. 17th International Conference on domain decomposition Methods, (2006).
- [19] Duvaut, G. and Lions, J.L., *Les inéquations en mécanique*. Éditions Dunod (1972).
- [20] Fernane, K. and Ayadi, A., *Nonconforming finite element analysis for a plate contact problem*. Inter. J. of Math. and Comput., 11, (2011).
- [21] Fučík, S. and Kufner, A., *Nonlinear Differential Equations. Studies in Applied Mechanics*. Editions Elsevier, (1980).

- [22] Gander, M. J., *Optimized Schwarz methods*. Journal on Numerical Analysis, 44, 2, pp 699-731, (2006).
- [23] Girault, V. , Giroire, J. and Sequeira A., *A stream function-vorticity variational formulation for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces*. Math.Meth. in the Applied Sciences, 15, 5, pp 345-363, (1992).
- [24] Girault, V. and Raviart, P., *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and Algorithms*. Editions Springer Verlag Berlin, (1986).
- [25] Ghennam, K., *Algorithme de pénalisation pour les problèmes à frontière libre*. Mémoire de Magister, Université Badj Mokhtar Annaba, (2005).
- [26] Glowinski, R., Lions J. L. and Tremolieres R., *Numerical analysis of variational inequalities*. North Holland, London, (1981).
- [27] Glowinski, R., Marini, L. D. and Vidrascu, M., *Finite element approximations and iterative solutions of a 4th order elliptic variational inequalities*. IMA Journal of Numer. Analy., 4, pp 127-167, (1984).
- [28] Glowinski, R. and Pironneau, O., *Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensional Stokes problem*. SIAM, Review, 17, pp 167-212, (1984).
- [29] Gourdin, A. and Boumahrat, M., *Méthodes numériques appliquées*. OPU Press, Algérie, (1993).
- [30] Hannache, A., Laouar, A. and Sissaoui, H. *A Mixed Formulation in Conjunction with the Penalization Method for Solving the Bilaplacian Problem with Obstacle Type Constraints*. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 13(1), pp 41-60, (2019).
- [31] Haslinger, J., *On numerical solution of variational inequality of the fourth order by finite element method*. Applicace , Matematky, 23, pp 334-345, (1978).
- [32] Hlavacek, I., Haslinger, J., Necas, J. and Lovisek J., *Numerical solution of variational inequalities*. Editions Springer, (1988).

- [33] Kezavan, S. and Vanninathan, M., *Sur une méthode d'éléments finis mixte pour l'équation biharmonique*. RAIRO, Analyse numérique, 11, pp 255-270, (1977).
- [34] Koko, J., *Calcul scientifique avec MATLAB, outils MATLAB spécifiques, équations aux dérivées partielles*. Éditions ellipses, (2009).
- [35] Leger, A. and Pozzolini, C., *Un résultat de stabilité dans le problème d'obstacle pour une plaque en flexion*. 9ème Congrès de Mécanique, FS Semlalia, Marrakech, (2009).
- [36] Lin, M., Wang, J., Wang, Y. and Xiu, Y., *A weak Galerkin mixed finite element method for biharmonic equations*. arXiv :1210.3818v2, math.NA, (2012).
- [37] Lions, J. L., *Sur les problèmes unilatéraux*. Séminaire N. Bourbaki 350, pp 55-77, (1969).
- [38] Lions, J. L., *Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal*. Les presses de l'université de Montréal, (1976).
- [39] Muvasharkhan, T., and al., *ll-posed problem for the biharmonic equation*. AIP Conference Proceedings, pp 1500-1511, (2014).
- [40] Qingping, D. and Shen, Sh., *A nonconforming finite element method for a fourth-order elliptic variational inequality*. Num. Funct. Anal. Opti., 15, pp 55-64, (1994).
- [41] Raviart, P., *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Éditions Dunod, Paris, (1998).
- [42] Ruas, V., *On formulations of vorticity systems for a viscous incompressible flow with numerical applications*. ZAMM Z angew Math.Mech., 74, 1, pp 43-55, (1994).
- [43] Scholz, R., *A mixed method for fourth order problem using finite elements*. RAIRO, Analyse numérique, 12, pp 85-90, (1998).
- [44] Sissaoui, H., *Variational Methods for Inequality Constraint Problems*. Ph.D Thesis, University of Seffield, U. K., (1983).
- [45] Westbrook, D. R., *The obstacle problem for Beams and plates*. Journal Comp. Appl. Math., 30, pp 295-311, (1990).