وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Année: 2019/2020

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques

Option
Modélisation mathématiques, Contrôle optimal déterministe et stochastique

EXISTENCE, UNICITÉ ET REGULARITE DES SOLUTIONS POUR UNE CLASSE DE PROBLEMES ELLIPTIQUES QUASI-LINEAIRES

Présentée Par
Didi Hana

DIRECTEUR DE THÈSE : Moussaoui Abdelkrim M.C.A U.BEJAIA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE : Khodja Brahim prof. U.B.M ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	Haiour Mohamed	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Laouar Abdelhamid	prof	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Lakehal Hakim	M.C.A	U.SKIKDA
EXAMINATEUR :	Maouni Messaoud	Prof	U.SKIKDA

Table des matières

Remerciements

Mes premiers remerciements vont, comme il se doit, à mon directeur de thèse A. Moussaoui je le remercie d'abord pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je le remercie encore, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui m'ont aidé à mener à bien ce travail. Je me sens privilégié d'avoir été encadré par cet personne. Je le remercie également pour son aide et ses conseils au niveau de la rédaction de la thése. Sans ses idées et son expertise, la réalisation de cette thèse n'aurait pas été possible. Il est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en quelques lignes seulement.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mon co-directeur de thèse B. Khodja, pour son aide, pour ses conseils et ses encouragements.

Je tiens à remercier vivement Monsieur M.Haiour, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

Mes remerciements vont ensuite à H. Lakehal, A Laouar, et M. Maouni qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie enfin mes parents dont le travail n'aurait pu aboutir sans leur soutien et encouragements. Je tiens également à remercier mon frère et mes sœurs, Abd El Hakim, Wafa Hadjer, et Ghozlen, pour leur présence et leur soutien constant. Merci de m'avoir poussé et encouragé à aller au delà de mes capacités. Je tiens à remercier mon mari Abd El Ali que je suis si fier pour son soutien et amour, je tiens aussi à remercier mon petit fils Rassim.

ملـــــــــخص

في هذه الأطروحة قمنا بدراسة الأنظمة شبه الخطية من النوع البيضاوي. هدفنا هو البرهان على وجود و غياب و تعدد الحلول الايجابية وذلك في وجود خصائص تتعلق بالإشارة و الانتظام.

تنقسم هذه الأطروحة إلى ثلاثة فصول:

تبدأ هذه الأطروحة بفصل مخصص للتذكير على الفضاءات الوظيفية (فضاء لوباغ ,فضاء سوبوليف) و طريقة الحلول تحت –فوق و الدرجة الطوبولوجية وكذلك الأدوات الرئيسية التي نستخدمها في الفصول الأخرى.

في الفصل 2 ، ندرس وجود حلول لنظام المعادلات البيضاوية شبه الخطية

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{\alpha_1} v^{\beta_1} + \delta h_1(x) \ dans \ \Omega \\ -\Delta_q v = \lambda u^{\alpha_2} v^{\beta_2} + \delta h_2(x) \ dans \ \Omega \\ u, v > 0 \qquad dans \ \Omega \\ u, v = 0 \qquad sur \ \partial\Omega \end{cases}$$

تم مناقشة ثلاث حالات تتعلق بهيكل المشكلة : شبه متجانسة ومتجانسة ومتجانسة للغاية. تعتمد دراستنا بشكل أساسي على طريقة الحلول تحت –فوق و دراسة عدم وجود حل في الحالات المتجانسة باستخدام الخصائص الطيفية.

في الفصل 3 ، نتناول مسألة تعدد الحلول لفئة من الأنظمة شبه الخطية الفردية.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u, v) \ dans \ \Omega \\ -\Delta_q v = g(u, v) \ dans \ \Omega \\ u, v > 0 \qquad dans \ \Omega \\ u, v = 0 \qquad sur \ \partial\Omega \end{cases}$$

تم الحصول على حلين إيجابيين. الأول باستخدام طريقة الحلول تحت-فوق والثاني باستخدام نظرية الدرجة الطوبولوجية لراي شايدر التي تتطلب الحصول على تقديرات مسبقة للحلول.

الكلمات المفتاحية : نظام المفرد, وجود, طريقة الحلول تحت – فوق, الدرجة الطوبولوجية لراي شايدر

Résumé

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'étude de systèmes quasi-linéaires de type elliptique, présentant des singularités à l'origine. Notre objectif est de montrer l'existence, l'absence et multiplicité de solutions positives et régulières.

Cette thèse est structuré en trois chapitres que nous décrivons brièvement:

Le chapitre 1 est consacré aux rappels sur les espaces fonctionnels (espaces de Lebesgue, espaces de Sobolev), sur la Méthode des sous et sur-solutions, le degré topologique, ainsi que sur les principaux outils dont nous faisons un usage fréquent dans les autres chapitres.

Dans le Chapitre 2, nous étudions l'existence de solutions pour un système d'équations elliptiques quasi-linéaires présentant des singularités à l'origine

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{\alpha_1} v^{\beta_1} + \delta h_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda u^{\alpha_2} v^{\beta_2} + \delta h_2(x) & \text{dans } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Trois situations relatives à la structure du problème sont abordées: sous-homogène, homogène et super-homogène. Notre approche est basée essentiellement sur la méthode des sous et sur-solutions combinée à un argument de perturbation, nous étudions aussi un résultat de non existence de solution dans les cas homogène en utilisant les propriétés spectrales de l'opérateur p-Laplacien.

Dans le chapitre 3, nous abordons la question de multiplicité de solutions pour une classe de systèmes quasi-linéaires singuliers

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = g(u, v) & \text{dans } \Omega \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Deux solutions positives sont obtenues. La première est obtenue en utilisant la méthode des sous et sur solutions et la deuxième en utilisant la théorie du degré topologique de Leray-Schauder qui nécessite d'avoir des estimations a priori sur les solutions.

Mots-clés: Système singulier, p-Laplacian, sous et sur solutions, théorie du degré topologique, régularité.

Abstract

The thesis focuses on the study of quasi-linear elliptic systems, with singularities at the origin. Our aim is to show existence, nonexistence and multiplicity of positive smooth solutions.

This thesis is structured in three chapters that we briefly describe:

Chapter 1 is devoted to reminders on functional spaces (Lebesgue spaces, Sobolev spaces), on sub-supersolutions Method, topological degree, as well as the main tools that we use frequently in the other chapters.

In Chapter 2, we study the existence of solutions for a system of quasi-linear elliptic equations with singularities at the origin

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{\alpha_1} v^{\beta_1} + \delta h_1(x) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda u^{\alpha_2} v^{\beta_2} + \delta h_2(x) & \text{in } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{in } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

Three situations related to the structure of the problem are addressed: subhomogeneous, homogeneous and superhomogeneous. Our approach is chiefly based on sub-supersolutions method, combined with perturbation arguments, we also study a result of nonexistence of solution in homogeneous cases using the spectral properties of the p-Laplacian operator.

In Chapter 3, we discuss the multiplicity of solutions for a class of singular quasilinear elliptic systems

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u,v) & \text{in } \Omega \\ -\Delta_q v = g(u,v) & \text{in } \Omega \\ u, v > 0 & \text{in } \Omega \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

Two positive solutions are obtained. The first one is obtained by using the method of sub-supersolutions and the second by using Leray-Schauder topological degree theory ,this is based on a priori estimates on the solutions.

Keywords: Singular system, p-Laplacian, sub-supersolutions, topological degree theory, regularity.

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier l'existence et la multiplicité de solutions pour des systèmes d'équations elliptiques quasi-linéaires, soumis à des conditions au bord de Dirichlet et présentant des singularités à l'origine. Des solutions explicites sont, en général, impossibles à déterminer, ce qui rend donc l'étude quantitative et qualitative des solutions d'une importance capitale. Cependant, en général, ces résultats ne s'obtiennent pas aisément. La principale difficulté réside dans le choix et l'adaptation de la méthode d'approche, qui est étroitement liée à la structure des non-linéarités présentes dans le problème, ainsi qu'à la géométrie du domaine. Par ailleurs, ces difficultés sont encore plus accentuées quand des singularités apparaissent dans le problème. Cela est dû au fait que les méthodes utilisées pour l'étude des problèmes réguliers (i.e. ne présentant pas de singularités) ne s'adaptent pas forcément au cas singulier. Il est alors impératif de faire appel à d'autres outils d'analyse fonctionnelle pour espérer obtenir des résultats.

L'étude des problèmes elliptiques singuliers est largement justifiée vu qu'ils modélisent de nombreux phénomènes naturels tels que l'écoulement des pseudo-plastiques en mécanique des fluides [16] et certains processus biochimiques [27]. En particulier, nous citons l'important système parabolique et singulier, proposé par Gierer & Meinhardt [22], qui intervient dans l'étude de la morphogenèse.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité des travaux scientifiques antérieurs [5, 18, 21, 31, 32, 33] , relatifs à l'étude du système quasi-linéaire du type:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{\alpha_1} v^{\beta_1} + \delta h_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda u^{\alpha_2} v^{\beta_2} + \delta h_2(x) & \text{dans } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière $\partial\Omega$, et Δ_s $(s = p, q)$ est l'opérateur s-Laplacien donné par

$$\Delta_s u = div\left(|\nabla u|^{s-2} \nabla u\right), \quad \text{avec } 1 < s < \infty.$$

Les exposants α_i, β_i sont des constantes réelles non-nulles vérifiant

$$\alpha_1, \beta_2 < 0 < \alpha_2, \beta_1. \tag{0.0.2}$$

Cela fait apparaitre des singularités à l'origine du fait que les non-linéarités à droite des équations explosent quand u ou v approchent 0. En plus, de (0.0.2) il en découle que le système (0.0.1) est coopératif, c'est-à-dire, en fixant u (resp. v) dans la première (resp. deuxième) équation, la monotonie du terme à droite suit celle de v (resp. u).

Recemment, le système singulier (0.0.1), avec $\delta = 0$, a été étudié dans [18, 21, 31, 32, 33], sous la condition suivante:

$$\beta_1, \alpha_2 > 0, \quad -2 + \frac{1}{p} < \alpha_1 < 0 \text{ et } -2 + \frac{1}{q} < \beta_2 < 0.$$

Un résultat d'existence a été établi dans [33], où les autheurs ont combiné la méthode des sous et sur solutions, dans sa version pour les systèmes quasi-linéaires [10, Section 5.5], avec à un argument de perturbation. Dans [18], un résultat similaire a été obtenu en construisant un schéma itératif, moyennant des sous et sur solutions, tandis que dans [21], ces dernières ont été associées aux méthodes variationnelles. Dans [31], l'existence d'une solution positive a été montré via le théorème du point fixe de Schauder. Le cas semi-linéaire de (0.0.1) (c'est-à-dire, $p = q = 2$) a été considéré dans [17, 20, 34], où la propriété de linéarité de la partie principale des equations a été fortement utilisée. Le cas du système (0.0.1) présentant structure compétitive, en supposant que $\min\{\alpha_2, \beta_1\} < 0$, a été étudié dans [21, 31, 32].

Il est important d'observer que, dans tous les travaux précités, les systèmes étudiés sont associés à une condition sous-homogène. Cela se traduit par le fait que la constante Θ est positive, où Θ est définie comme suit:

$$\Theta = (p - 1 - \alpha_1)(q - 1 - \beta_2) - \beta_1 \alpha_2. \tag{0.0.3}$$

La constante Θ est étroitement liée à la stabilité du système (0.0.1), dont elle est fortement dépendante de son signe. En effet, dans le cas super-homogène, c'est-à-dire, $\Theta < 0$, le problème (0.0.1) est instable du fait qu'il n'est pas possible de construire une suite de solutions monotone et convergente, voir [11]. Autrement dit, si $\Theta < 0$, les méthodes itératives ne peuvent être appliquées afin de montrer l'existence de solutions.

Conformément aux travaux précités et dans l'optique de les compléter, il sera question, dans le chapitre 2, de montrer l'existence et l'absence de solutions pour le système singulier (0.0.1) dans les cas homogène ($\Theta = 0$) et super-homogène ($\Theta < 0$). Le cas sous-homogène est également traité. Des résulats d'existence sont obtenues pour des exposants négatifs α_1 et β_2 pouvant être inférieurs à $-2 + \frac{1}{p}$ et $-2 + \frac{1}{q}$, respectivement, et des résultats de régularité pour eventuellement $\alpha_1, \beta_2 < -1$. Notre approche est basée essentiellement sur la méthode de la sous et sur solutions combinée à un argument de perturbation.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence de multiples solutions pour une classe de systèmes elliptiques singuliers

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u, v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = g(u, v) & \text{dans } \Omega \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.0.4}$$

où les non-linéarités $f, g : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ sont des fonctions continues satisfaisant certaines conditions de croissance. Deux solutions positives et régulières (u_1, v_1)

et (u_2, v_2) sont obtenues. La première (u_1, v_1) est localisée dans un rectangle formé par des sous et sur solutions. Ces dernières ont été construites en exploitant principalement les propriétés des fonctions propres associées aux premières valeurs propres des opérateurs p-Laplacien et q-Laplacien. Dans le même temps, ces propriétés nous renseignent sur le signe de la solution (u_1, v_1), ainsi que sur sa régularité. Plus précisément, nous obtenons que la solution $(u_1, v_1) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ est positive et qu'il existe une constante $\hat{R} > 0$, indépendante de u_1 et v_1, telle que $\|u_1\|_{C^1} + \|v_1\|_{C^1} < \hat{R}$ (voir la définition de la norme $\|\|_{C^1}$ dans la page 11) . Il est important de noter qu'aucune régularisation du système n'est nécessaire malgré la présence de singularité dans le problème considéré. Cela s'explique par l'application d'un Théorème d'existence, impliquant des sous et sur solutions, relatif aux problèmes singuliers (voir [26, Théorème 2]).

La deuxième solution (u_2, v_2) de (0.0.4) est obtenue via l'application du degré topologique de Schauder. C'est une solution differente de (u_1, v_1) du fait qu'elle n'appartient pas à la boule contenant la première solution, c'est-à-dire:

$$B_{\hat{R}}(0) := \{(u, v) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega}) : \|u\|_{C^1} + \|v\|_{C^1} < \hat{R}\}.$$

L'existence de (u_2, v_2) est assurée principallement par la propriété d'excision du degré topologique, en montrant que le degré est bien défini et non-nul sur $B_R(0) \backslash \overline{B}_{\hat{R}}(0)$, avec $R > \hat{R}$. Ici, la boule $B_R(0)$ est constituée de toutes les solutions $(u, v) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ de (0.0.4) vérifiant $\|u\|_{C^1} + \|v\|_{C^1} < R$.

- Le chapitre 2 est un article co-écrit avec B. Khodja et A. Moussaoui, accepté pour publication dans le «Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics » .

- Le chapitre 3 est un article co-écrit avec A. Moussaoui, publié dans le journal « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo».

CHAPITRE 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions essentielles sur les espaces fonctionnels et tout particulièrement, les espaces de Lebesgue L^p et les espaces de Sobolev $W^{1,p}$ et nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats qui nous seront utiles par la suite. Nous abordons aussi la théorie du degré topologique en exposant d'une manière succincte quelques propriétés et résultats la concernant.

1.1 Notations. Espaces fonctionnels

1.1.1 Notations Générales

$N \geq 2$	Entier naturel, dimension de l'espace de travail
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien muni de sa norme usuelle notée $\lvert\cdot\rvert$
Ω	Domaine borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
$d(x)$	Distance du point x à $\partial\Omega$
$p.p.$	Presque partout
$\rightharpoonup$	Convergence faible
$\longrightarrow$	Convergence forte
$\hookrightarrow$	Injection continue
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compacte
p^*	Exposant critique de Sobolev $p^* = \frac{N-p}{Np}$
p'	Exposant conjugué de p (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)
∇u	Gradient de u défini par $\nabla u \overset{def}{=} (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$
$\Delta_p u$	L'opérateur p-Laplacien défini par $\Delta_p u \overset{def}{=} \operatorname{div}\left(\lvert\nabla u\rvert^{p-2} \nabla u\right)$
$\lambda_{1,p}$	Première valeur propre du p-Laplacien sur Ω
$\phi_{1,p}$	Fonction propre positive, associée à $\lambda_{1,p}$
$C(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$
$C_0(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ s'annulant sur $\partial\Omega$
$C^1(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions dérivables sur $\overline{\Omega}$.
$C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$	Ensemble des fonctions de $C^1(\overline{\Omega})$ α-Holderiennes, avec $0 < \alpha < 1$, c'est à dire, $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}) / \forall i \in \{1, ..., N\}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \right\}$
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue standards sur Ω d'exposant p
$L^\infty(\Omega)$	Espace de Lebesgue standards sur Ω d'exposant ∞
$W^{1,p}(\Omega)$	Espace de sobolev standard sur Ω d'exposant p
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour la norme $\lVert u\rVert_{W^{1,p}(\Omega)}$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$\lVert u\rVert_{L^p(\Omega)}$	Norme de u sur $L^p(\Omega)$ définie par $\lVert u\rVert_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$
$\lVert u\rVert_{L^\infty(\Omega)}$	Norme de u sur$L^\infty(\Omega)$ définie par $\lVert u\rVert_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x\in\Omega} \lvert u(x)\rvert$

1.1.2 Les espaces L^p

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue; on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\};$$

On définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \exists c > 0 \ / \ |f(x)| \leq c \ \ \mu - pp \text{ sur } \Omega \}$$

$$\|f\|_\infty = \min \{ M \geq 0 : |f| \leq M \ \mu\text{-presque partout } \}.$$

est la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \, g(x) \ dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intègrables sur Ω, i.e

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : u \in L^1(K) \ \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega \right\}$$

Remarque 1.1.1 *:*

(i) $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$

(ii) L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p \right)$ *est de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$*, séparable pour* $1 \leq p < \infty$ *et réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Théorème 1.1.1 *[8]* ***(convergence dominée)***

Soit (f_n) *une suite de fonction de* $L^1(\Omega)$*. On suppose que:*

a) $f_n(x) \longrightarrow f \ \ p.p. sur \ \Omega$.

b) *Il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n,

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad p.p \quad sur \quad \Omega$$

alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Lemme 1.1.1 *[8] Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ tels que*

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que:
i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω.
ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et p.p. sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

Lemme 1.1.2 *[8] Soit $(p,q,r) \in [1,\infty]$ tels que $q < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.Si $g \in L^q(\Omega)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée de $L^p(\Omega)$ qui converge presque partout sur Ω vers f, alors $f_n g \longrightarrow fg$ dans $L^r(\Omega)$.*

Inégalité de Hölder [8] Soient $1 \leq p < \infty$ et q l'éxposant conjugué de p. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ sont deux fonctions mesurables sur un espace mesuré (Ω, Σ, μ), alors $fg \in L^1(\Omega)$, et

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Inégalité de Young [8] Pour $1 < p < \infty$ et pour tout a et b positifs, on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},$$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

1.1.3 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit la fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit:

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p},$$
$$\|u\|_\infty = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

pour toute fonction u qui donne un sens à cette écriture.

On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables $u \in L^p(\Omega)$ telles que la dérivée au sens faible $D^\alpha u$, $0 \leq |\alpha| \leq \infty$ appartient à $L^p(\Omega)$ et l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On associe à l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ et on a alors la proposition suivante:

Proposition 1.1.1 *i) $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach*
ii) Pour $p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ est séparable
iii) Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

Pour $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ définit comme suit:

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \;\; / \; \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m, \; D^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$H^m(\Omega)$ est un Banach muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2};$$

c'est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.2 (Traces des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$) *Soit un ouvert borné lipschitzien de frontière Γ et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une unique application linéaire continue*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Gamma) \\ & u & \longmapsto & u_{/\Gamma} \end{array}$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. On dit alors que $\gamma_0(u)$ est la trace de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sur Γ.

Théorème 1.1.3 (*[1]*) *Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne (où si $\Omega = \mathbb{R}^N$) on a:*
i) Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.
ii) Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.
iii) pour tout $q \in]N, +\infty[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Si l'on supprime l'hypothèse "à frontière lipschitzienne", alors le dernier théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dans ce cas, et si $N > 1$, (iii) est même valable pour tout $q \in [1, +\infty[$.

Théorème 1.1.4 (*[1]*) *Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne:*
1) Si $1 \leq p < \infty$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.
2) Si $1 < p < \infty$ alors la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ est compacte.

Remarque 1.1.2 *La propriété (2) du théorème précédent est fausse si $p = 1$, puisque*

$$\gamma : W^{1,1}(\Omega) \longrightarrow L^1(\partial\Omega)$$

est surjective.

Lemme 1.1.3 (Inégalité de Hardy-Sobolev [3]) *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $1 < p \leq N$ alors $\frac{u}{\phi_1^\delta} \in L^r(\Omega)$, pour*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\delta}{N}, \quad 0 \leq \delta \leq 1,$$

et

$$\left\| \frac{u}{\phi_1^\delta} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq C \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)},$$

où $C > 0$ est une constante et $\phi_1 > 0$ est la fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 de $\langle -\Delta, H_0^1(\Omega) \rangle$.

Lemme 1.1.4 ([28, page 726])

$$\int_\Omega \phi_1^\delta dx < \infty \quad \text{si, et seulement si,} \quad \delta > -1,$$

avec $\phi_1 > 0$ est la fonction propre associée à la première valeur propre λ_1 de $\langle -\Delta, H_0^1(\Omega) \rangle$.

1.1.4 Espaces de Hölder

Soit Ω un ouvert quelconque non vide de R^N

Définition 1.1.1 $*$ *$B(\bar{\Omega}, E)$ l'espace des fonctions bornées muni de la norme*

$$||f||_{B(\bar{\Omega},E)} = \sup_{x\in\Omega} ||f||_E$$

$*$ *$C(\bar{\Omega}, E)$ l'espace des fonctions continues et bornées , muni de la norme*

$$||f||_{C(\bar{\Omega},E)} = ||f||_{B(\bar{\Omega},E)}$$

$*$ *$C^k(\bar{\Omega}, E)$ avec $k \in N$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'á l'ordre k sont continues et bornées , muni de la norme*

$$||f||_{C^k(\bar{\Omega},E)} = \sum_{|\beta|\leq k} ||\partial^\beta f(x)||_{B(\bar{\Omega},E)}$$

Définition 1.1.2 *Les espace de Hölder des fonctions bornées de Ω dans E, $C^\alpha(\bar{\Omega}; E)$ et $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E)$ avec $k \in N$ sont définis par*

$$C^\alpha(\bar{\Omega}; E) = \{f \in B(\bar{\Omega}, E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{||f(x) - f(y)||_E}{|x-y|^\alpha} < \infty\}$$

on le muni de la norme

$$||f||_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)} = ||f||_{B(\bar{\Omega};E)} + [f]_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}, E) : \partial^\beta f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega}; E)\} \quad |\beta| = k \tag{1.1.1}$$

muni de la norme

$$||f||_{C^{k+\alpha}(\bar{\Omega};E)} = ||f||_{C^k(\bar{\Omega};E)} + [\partial^\beta f]_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)}$$

où β est multi-indice.

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Définitions et propriétés

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace réel de Banach et soit X^* sont dual topologique.

Définition 1.2.1 *Un opérateur $\mathcal{A} : X \to X^*$ est dit:*

- ***Borné*** *s'il applique des ensembles bornés en ensemble borné.*
- ***Continu*** *si $\|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\|_{X^*} \to 0$ lorsque $\|x_n - x\|_X \to 0$.*
- ***Compact*** *si $\mathcal{A}(\overline{B}_X)$ est relativement compacte dans X^*, où B_X désigne la boule unité dans X.*
- ***Coercif*** *si*
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle \mathcal{A}(x), x \rangle}{\|x\|} = +\infty.$$
- ***Monotone*** *si*
$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle \geq 0 \;\; \forall u, v \in X \;\; \textit{avec} \;\; u \neq v$$
- ***Strictement monotone*** *si*
$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle > 0 \;\; \forall u, v \in X \;\; \textit{avec} \;\; u \neq v$$
- ***Pseudo-monotone*** *si*
$$x_n \rightharpoonup x \;\; \textit{dans } X \quad \textit{et} \limsup_{n \to +\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x \rangle \leq 0$$
implique
$$\liminf_{n \to +\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z \rangle \geq \langle \mathcal{A}(x), x - z \rangle, \;\; \textit{pour tout } z \in X.$$
- ***de type*** $(\mathrm{S})_+$ *si*
$$x_n \rightharpoonup x \;\; \textit{dans } X \quad \textit{et} \;\; \limsup_{n \to +\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z \rangle \leq 0$$
implique
$$x_n \to x \;\; \textit{dans} \;\; X.$$

Théorème 1.2.1 (Minty Browder [8, Thèoréme 5.15]) *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $A : E \longrightarrow E'$ une application (non-linéaire) continue, strictement monotone et coercive. Alors, pour tout $f \in E'$, il existe $u \in E$ unique solution de l'équation $Au = f$.*

1.2.2 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien ($1 < p < \infty$) est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour $p \neq 2$, l'opérateur Δ_p est dégénéré. Si $p = 2$, Δ_p coïncide avec l'opérateur de Laplace usuel Δ.

Propriétés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné.

- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, monotone, coercif et de type $(\mathrm{S})_+$
- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est uniformément continu sur tous ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
- $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ est continu.
- L'opérateur composé $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact si $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.
- La première valeur propre $\lambda_{1,p} > 0$ de l'opérateur Δ_p est simple et isolée. La fonction propre $\phi_{1,p}$ corespondant à $\lambda_{1,p}$ est de signe constant et vérifie

  $$\phi_{1,p} \in C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi_{1,p}}{\partial \eta} < 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

  où η est le vecteur normal extrieure au domaine Ω.
- Toute fonction propre ϕ correspondant à une valeur propre $\lambda > \lambda_{1,p}$ de l'opérateur Δ_p est de signe changeant.

1.3 Régularité et principes de comparison

1.3.1 Régularité

Théorème 1.3.1 ([29]) *Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $|u| \leq M_0$, M_0 étant une constante positive, une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que:

$$|f(x,u)| \leq M, \quad \textit{pour tout } (x,u) \in \Omega \times [-M_0, M_0].$$

Alors, il existe des constantes $R > 0$ et $\delta \in (0,1)$ telles que

$$u \in \mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega}) \quad \textit{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega})} < R.$$

Théorème 1.3.2 ([23, Lemme 3.1]) *Soit $h \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ et supposons qu'il existe $\delta \in (0,1)$ et une constante $C > 0$ telles que:*

$$|h(x)| \leq Cd(x)^{-\delta}, \quad \textit{pour tout } x \in \Omega.$$

Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x) & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors, il existe des constantes $R > 0$ et $\delta \in (0,1)$ telles que

$$u \in \mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega}) \quad \textit{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega})} < R.$$

1.3.2 Principes de comparison (voir [6])

Pour $f, g \in W^{-1,p'}(\Omega)$, soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ les solutions des problèmes de Dirichlet suivants:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p v = g(x) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 1.3.1 • *On dit que $f \leq g$ dans Ω si $\langle g - f, w \rangle \geq 0$ pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $w \geq 0$.*

- *On dit que $f \prec g$ dans Ω si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$f(x) + \varepsilon < g(x), \ \textit{pour.tout } x \in K.$$

- *On dit que $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ si $(u - v)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

- *On dit que $u \ll v$ si $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et*

$$u < v \ \textit{dans } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} \ \textit{sur } \partial\Omega.$$

Lemme 1.3.1 (Principe de comparaison faible) *Si $f \leq g$ dans Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ dans Ω.*

Théorème 1.3.3 (Principe de comparaison fort) *Pour $f, g \in L^\infty(\Omega)$ et $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, si $f \prec g$ et $v \gg 0$, alors $u \ll v$ dans Ω.*

1.4 Méthode de sous et sur solutions

On considère le système d'équations elliptiques quasi-linéaires

$$(\mathrm{P}_{F,G}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \mathcal{F}(x, u, v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \mathcal{G}(x, u, v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory.

Le but de cette section est de présenter des théorèmes d'existence de solutions de $(\mathrm{P}_{F,G})$, impliquant des sous et sur solutions pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires

$(\mathrm{P}_{F,G})$. Deux situations liées à la structure du problème $(\mathrm{P}_{F,G})$ seront abordées: le cas singulier et le cas régulier. Le premier cas correspond à la situation où les fonctions non-linéaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ présentent des singularités à l'origine. Cela se traduit par le fait que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ explosent quand u et v approchent zéro. Dans le cas complémentaire, le système $(\mathrm{P}_{F,G})$ est dit régulier.

Définition 1.4.1 *[10] On appelle sous-solution et sur-solution de* $(\mathrm{P}_{F,G})$ *toutes paires* $(\underline{u}, \underline{v})$ *et* $(\overline{u}, \overline{v})$ *dans* $(W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$, *telles que*

$$(\overline{u}, \overline{v}) \geq (\underline{u}, \underline{v}) \quad \textit{dans } \Omega,$$

et qui vérifient

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x, \underline{u}, \omega_2) \varphi \, dx \leq 0 \\ \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x, \omega_1, \underline{v}) \psi \, dx \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x, \overline{u}, \omega_2) \varphi \, dx \geq 0 \\ \int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \, dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x, \omega_1, \overline{v}) \psi \, dx \geq 0, \end{cases}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *avec* $\varphi, \psi \geq 0$ *p.p. dans* Ω *et pour tout* $(w_1, w_2) \in W^{1,p_1}(\Omega) \times W^{1,p_2}(\Omega)$ *dans* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

1.4.1 Systèmes réguliers

On impose aux fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ la condition de croissance suivante:

(**A.1**) Pour tout $\rho > 0$, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\max\{|\mathcal{F}(x, s, t)|, |\mathcal{G}(x, s, t)|\} \leq M$$

dans $\Omega \times [-\rho, \rho]^2$.

Le résultat d'existence impliquant les sous et sur solutions est formulé comme suit.

Théorème 1.4.1 ([9]) *Sous l'hypothèse (A.1), le problème* $(\mathrm{P}_{F,G})$ *admet une solution* $(u, v) \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *pour un certain* $\gamma \in]0, 1[$, *telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \textit{et} \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

1.4.2 Systèmes singuliers

Dans ce cas, les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ dans $(\mathrm{P}_{F,G})$ sont de Carathéodory et présentent des singularités lorsque les variables u et v approchent zéro. Cela rend le Théorème 1.4.1 inapplicable, du fait que l'hypothèse de croissance (A.1) n'est pas satisfaite.

(**A.2**) Il existe des constantes $k_1, k_2 > 0$ et $-1 < \alpha, \beta < 0$ telles que:

$$|\mathcal{F}(x,u,v)| \leq k_1 d(x)^{\alpha} \text{ et } |\mathcal{G}(x,u,v)| \leq k_2 d(x)^{\beta}, \text{ dans } \Omega \times [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}].$$

Théorème 1.4.2 ([26]) *Soient* $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\overline{u}, \overline{v}) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *des sous et sur solutions du problème* $(\mathrm{P}_{F,G})$, *avec*

$$\underline{u}(x), \underline{v}(x) \geq c_0 d(x) \quad \textit{dans } \Omega,$$

pour toute constante $c_0 > 0$, *et supposons que* $(A.2)$ *est vérifiée. Alors, le système* $(\mathrm{P}_{F,G})$ *admet une solution positive* (u,v) *dans* $\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *pour un certain* $\gamma \in (0,1)$, *telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \textit{et} \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}.$$

1.5 Le degré topologique

1.5.1 Le degré topologique de Brouwer

Soit Λ un ensemble défini par:

$$\Lambda = \left\{ (f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right),\ y \notin f(\partial\Omega) \right\}.$$

Il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant:

(i) **Normalisation:** si $y \in \Omega$, alors $d(Id, \Omega, y) = 1$,

(ii) **Additivité**: si $(f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin f(\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y),$$

(iii) **Invariance par homotopie**: si $f : [0,1]\times\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ vérifie $\forall t \in [0,1]$, $y(t) \notin f(t, \partial\Omega)$, alors $d(f(t,\cdot), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.

1.5.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Si E est un espace de Banach et

$$\Lambda = \left\{(Id - f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } E,\ f : \overline{\Omega} \longrightarrow E \text{ compacte, } y \notin (Id - f)(\partial\Omega)\right\},$$

alors il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant:

(i) Si $y \in \Omega$, alors $d(I, \Omega, y) = 1$,

(ii) Si $(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que

$$y \notin (Id - f)(\Omega\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y),$$

(iii) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow E$ vérifie $\forall t \in [0,1]$, $y(t) \notin (Id - h(t,\cdot))(\partial\Omega)$, alors

$$d(Id - h(t,\cdot), \Omega, y(t)) \text{ est indépendant de } t.$$

(iv) Si $K \subset \Omega$ est un fermé de Ω et $y \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$ alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega\backslash K, y).$$

Remarque 1.5.1 *La propriété importante du degré est:*
Si

$$(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda \quad et \quad d(Id - f, \Omega, y) \neq 0,$$

alors il existe $x \in \Omega$ tel que

$$x - f(x) = y.$$

1.6 Définitions et résultats supplémentaires

Définition 1.6.1 (Fonction de Carathéodory) *On dit que* $h : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory si:*

(i) $x \mapsto h(x, s, t)$ *est mesurable pour tout* $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $(s, t) \mapsto h(x, s, t)$ *est continue pour p.p* $x \in \Omega$.

On considère le système quasi-linéaire suivant:

$$(\mathrm{P}_h) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = h_1(x, u, v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = h_2(x, u, v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 1.6.2 (solution faible) *On dit que* $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ *est une solution faible de* (P_h) *si, et seulement si:*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \; dx = \int_\Omega h_1(x, u, v) \varphi \; dx \\ \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi \; dx = \int_\Omega h_2(x, u, v) \psi \; dx \end{cases}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$.

Définition 1.6.3 (Système variationnel) *Le système* (P_h) *est dit variationnel si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- *Il existe une fonction différentiable* $H(x, u, v)$ *pour* $(x, u, v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

  $$\frac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = h_1(x, u, v) \;\; et \;\; \frac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = h_2(x, u, v).$$

  Dans ce cas, (P_h) *est de type Gradient.*

- *Il existe une fonction différentiable* $H(x, u, v)$ *pour* $(x, u, v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

  $$\frac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = h_2(x, u, v) \;\; et \;\; \frac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = h_1(x, u, v).$$

  Dans ce cas, (P_h) *est de type Hamiltonien.*

CHAPITRE 2

Existence et absence de solutions pour un système elliptique quasi-linéaire singulier

On considère le système quasi-linéaire

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda u^{\alpha_1} v^{\beta_1} + \delta h_1(x) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda u^{\alpha_2} v^{\beta_2} + \delta h_2(x) & \text{dans } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ de frontière régulière $\partial\Omega$, $\lambda > 0$ et $\delta \geq 0$ sont des paramètres positifs et $h_1, h_2 \in L^\infty(\Omega)$ sont des fonctions non-négatives. Dans les parties principales de (P_λ), Δ_p et Δ_q $(1 < p, q \leq N)$ sont, respectivement, les opérateurs p-Laplacien et q-Laplacien définis par

$$\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) \quad \text{et} \quad \Delta_q v = div\left(|\nabla v|^{q-2} \nabla v\right).$$

Le système (P_λ) est supposé singulier du fait que les exposants α_i, β_i vérifient

$$\alpha_1, \beta_2 < 0 < \alpha_2, \beta_1. \tag{2.0.1}$$

Notre objectif est de montrer l'existence et l'absence de solutions pour le système singulier (P_λ) dans les cas sous-homogène $(\Theta > 0)$, homogène $(\Theta = 0)$ et super-homogène $(\Theta < 0)$, où la constante Θ est donnée par (0.0.3). Notre approche est basée sur la méthode de la sous et sur solutions, combinée à un argument de perturbation.

La principale difficulté, dans l'étude du problème (P_λ), réside dans la présence de termes singuliers, qui apparaissent sous l'hypothèse (2.0.1). En effet, l'hypothèse considérée ne garantie pas que la fonctionnelle d'Euler, associée au problème (P_λ), soit bien définie. Ceci rend la méthode variationelle inapplicable. En outre, malgré le caractère coopératif du système (P_λ), la méthode des sous et sur solutions est difficilement applicable, particulièrement dans les cas homogène et super-homogène. De ce fait et afin de surmonter les difficultés, nous sommes amenés, tout d'abord, à perturber le problème (P_λ) en introduisant un paramètre $\varepsilon > 0$. En appliquant la méthode de la sous et sur sursolutions, nous montrons que le système régularisé a une solution positive $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ dans $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, pour un certain $0 < \beta < 1$. Il est important de noter qu'un choix de fonctions appropriées avec un ajustement adéquat de constantes est crucial pour pouvoir construire une sur solution $(\overline{u}, \overline{v})$, indépendante de $\varepsilon > 0$, et une sous solution $(\underline{u}, \underline{v})$ qui, en revanche, peut dépendre de ε. Par ailleurs, ce choix permet de traiter simultanément toutes les situations relatives au signe de la constante Θ.

La solution (u, v) du système (P_λ) s'obtient en passant à la limite avec $\varepsilon \to 0$. Ceci est basé sur des estimations a priori, le Lemme de Fatou, l'inégalité de Hardy-Sobolev et la propriété (S_+) des opérateurs p-laplacien et q-Laplacien. La positivité de la solution (u, v) est déduite à la fois de la positivité de la sous solution et de son indépendance de ε quand $\Theta > 0$, alors que si $\Theta \leq 0$, elle est assurée par les fonctions h_1 et h_2, moyennant une hypothèse supplémentaire. La régularité $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ de la solution obtenue est fournie par les résultats de régularité énoncés dans les Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2. Par ailleurs, dans la dernière section, nous présentons une classe d'exposants dans le cas homogène pour laquelle le problème (P_λ) n'admet pas de solutions.

Ce chapitre est divisé en deux sections: les cas homogène et super-homogène sont traités dans la première section tandis que le cas sous-homogène est abordé dans la seconde.

2.1 Cas homogène et super-homogène

2.1.1 Théorèmes d'existence

Le théorème suivant traite le cas super-homogène.

Théorème 2.1.1 *Supposons que (2.0.1) est vérifié avec*

$$\alpha_1 + \beta_1 > p - 1, \ \ \alpha_2 + \beta_2 > q - 1,$$

$$\alpha_1, \beta_2 > -1, \tag{2.1.1}$$

et supposons que

$$\inf_{\Omega} h_1(x), \ \ \inf_{\Omega} h_2(x) > 0. \tag{2.1.2}$$

Alors, il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, le problème (P_λ) *admet une solution (u, v) dans $\mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0, 1)$, qui vérifie*

$$u(x), v(x) \geq cd(x) \ \ \textit{dans } \Omega, \tag{2.1.3}$$

pour une certaine constante $c > 0$, et pour tout $\lambda > 0$.

Le résultat d'existence dans le cas homogène du problème (P_λ) est formulé par le théorème suivant.

Théorème 2.1.2 *Supposons que (2.0.1), (2.1.2) et (2.1.1) sont vérifiés, avec*

$$\alpha_1 + \beta_1 = p - 1 \quad \textit{et} \quad \alpha_2 + \beta_2 = q - 1.$$

Alors, il existe des constantes $\delta_0, \lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ et tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, le problème (P_λ) admet une solution (positive) (u, v) dans $\mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, pour certain $\beta \in (0, 1)$, vérifiant (2.1.3). De plus, si $\delta = 0$ et

$$\beta_1 = \tfrac{q}{p}(p - 1 - \alpha_1) \quad ou \quad \alpha_2 = \tfrac{p}{q}(q - 1 - \beta_2), \tag{2.1.4}$$

Alors, il existe une constante $\lambda_* > 0$ telle que le problème (P_λ) n'admet pas de solutions pour $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

2.1.2 Système régularisé $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère le problème régularisé suivant

$$(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda(u + \varepsilon)^{\alpha_1}(v + \varepsilon)^{\beta_1} + \delta h_1(x) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \lambda(u + \varepsilon)^{\alpha_2}(v + \varepsilon)^{\beta_2} + \delta h_2(x) & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le système $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$ fournit des solutions approximatives pour le problème (P_λ). En appliquant la méthode des sous et sur sursolutions, on montre que $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$ a une solution positive $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ dans $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, pour un certain $0 < \beta < 1$. Ensuite, en passant à la limite avec $\varepsilon \to 0$, on dérive la solution (u, v) de (P_λ).

Construction de la sous solution

Dans tout ce qui suit, on note par $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ les fonctions propres associées, respectivement, aux principales valeurs propres $\lambda_{1,p}$ et $\lambda_{1,q}$ des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$. Ce sont les solutions des problèmes suivants:

$$\begin{cases} -\Delta_p \phi_{1,p} = \lambda_{1,p} \left|\phi_{1,p}\right|^{p-2} \phi_{1,p} & \text{dans } \Omega, \\ \phi_{1,p} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \quad \left\|\phi_{1,p}\right\|_p^p = 1, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{cases} -\Delta_q \phi_{1,q} = \lambda_{1,q} \left|\phi_{1,q}\right|^{q-2} \phi_{1,q} & \text{dans } \Omega, \\ \phi_{1,q} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \quad \left\|\phi_{1,q}\right\|_q^q = 1. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Il existe des constantes positives l_i et $\hat{l}_i$ telles que

$$\hat{l}_1\phi_{1,p}(x) \geq \phi_{1,q}(x) \geq \hat{l}_2\phi_{1,p}(x), \text{ pour tout } x \in \Omega \tag{2.1.7}$$

et

$$l_1 d(x) \geq \phi_{1,p}(x), \phi_{1,q}(x) \geq l_2 d(x), \text{ pour tout } x \in \Omega, \tag{2.1.8}$$

où $d(x) := dist(x, \partial\Omega)$ (voir, par exemple, [19]).

On pose

$$M = \max\{\max_{\overline{\Omega}}\phi_{1,p}(x), \max_{\overline{\Omega}}\phi_{1,q}(x)\}. \tag{2.1.9}$$

Lemme 2.1.1 *Sous la condition (2.0.1) et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ suffisament petite et dépendante de $\varepsilon > 0$, telle que*

$$(\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon) := c_\varepsilon(\phi_{1,p}, \phi_{1,q}), \tag{2.1.10}$$

est une sous solution de $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$, *pour tout $\lambda > 0$ et tout $\delta > 0$.*

Preuve. On fixe ε dans $(0, \varepsilon_0)$. De (2.1.10), (2.0.1) et (2.1.9), les estimations suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned}
&(\underline{u}_\varepsilon + \varepsilon)^{-\alpha_1}(\underline{v}_\varepsilon + \varepsilon)^{-\beta_1}(-\Delta_p\underline{u}_\varepsilon - \delta h_1) \leq (\underline{u}_\varepsilon + \varepsilon_0)^{-\alpha_1}(\underline{v}_\varepsilon + \varepsilon)^{-\beta_1}(-\Delta_p\underline{u}_\varepsilon)\\
&= c_\varepsilon^{p-1}(c_\varepsilon\phi_{1,p} + \varepsilon_0)^{-\alpha_1}(c_\varepsilon\phi_{1,q} + \varepsilon)^{-\beta_1}\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^{p-1}\\
&\leq c_\varepsilon^{p-1}(\phi_{1,p} + \varepsilon_0)^{-\alpha_1}(c_\varepsilon\phi_{1,q} + \varepsilon)^{-\beta_1}\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^{p-1}\\
&\leq c_\varepsilon^{p-1}(M + \varepsilon_0)^{-\alpha_1}\varepsilon^{-\beta_1}\lambda_{1,p}M^{p-1} \leq \lambda \text{ dans } \overline{\Omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\underline{u}_\varepsilon + \varepsilon)^{-\alpha_2}(\underline{v}_\varepsilon + \varepsilon)^{-\beta_2}(\Delta_q\underline{v}_\varepsilon - \delta h_2) \leq (\underline{u}_\varepsilon + \varepsilon)^{-\alpha_2}(\underline{v}_\varepsilon + \varepsilon_0)^{-\beta_2}(\Delta_q\underline{v}_\varepsilon)\\
&= c_\varepsilon^{q-1}(c_\varepsilon\phi_{1,p} + \varepsilon)^{-\alpha_2}(c_\varepsilon\phi_{1,q} + \varepsilon_0)^{-\beta_2}\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^{q-1}\\
&\leq c_\varepsilon^{q-1}(c_\varepsilon\phi_{1,p} + \varepsilon)^{-\alpha_2}(\phi_{1,q} + \varepsilon_0)^{-\beta_2}\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^{q-1}\\
&\leq c_\varepsilon^{q-1}\varepsilon^{-\alpha_2}(M + \varepsilon_0)^{-\beta_2}\lambda_{1,q}M^{q-1} \leq \lambda \text{ dans } \overline{\Omega},
\end{aligned}$$

pour toute constante $c_\varepsilon > 0$ suffisament petite. Donc, il s'ensuit que

$$-\Delta_p\underline{u}_\varepsilon \leq \lambda(\underline{u}_\varepsilon + \varepsilon)^{\alpha_1}(\underline{v}_\varepsilon + \varepsilon)^{\beta_1} + \delta h_1 \text{ dans } \overline{\Omega}$$

et

$$-\Delta_q\underline{v}_\varepsilon \leq \lambda(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_2}(\underline{v}_\varepsilon + \varepsilon)^{\beta_2} + \delta h_2 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

ce qui montre que $(\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon)$ est une sous solution de $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ■

Construction de la sur solution

Soit $\tilde{\Omega}$ un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière régulière $\partial\tilde{\Omega}$, tel que

$$\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}.$$

On note par $\tilde{d}(x) := d(x, \partial\tilde{\Omega})$. Par définition de $\tilde{\Omega}$, il existe une constante $\rho > 0$ telle que

$$\tilde{d}(x) > \rho \text{ dans } \overline{\Omega}. \tag{2.1.11}$$

Soient $w_1, w_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\tilde{\Omega}})$ l'unique solutions des problèmes de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 = 1 \text{ dans } \tilde{\Omega} \\ w_1 = 0 \text{ sur } \partial\tilde{\Omega} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q w_2 = 1 \text{ dans } \tilde{\Omega} \\ w_2 = 0 \text{ sur } \partial\tilde{\Omega}, \end{cases} \tag{2.1.12}$$

telles que

$$w_1(x) \geq c_0\tilde{d}(x) \text{ et } w_2(x) \geq c_0\tilde{d}(x) \text{ dans } \tilde{\Omega}, \tag{2.1.13}$$

pour une certaine constante $0 < c_0 < 1$.

Pour $C > 1$, on pose

$$(\overline{u}, \overline{v}) = C^{-1}(w_1, w_2). \tag{2.1.14}$$

Sans perte de généralité, on suppose que la constante c_ε dans (2.1.10) vérifie

$$0 < c_\varepsilon < c_0 l_1^{-1} C^{-1}. \tag{2.1.15}$$

Alors, de (2.1.14), (2.1.10), (2.1.13) et (2.1.8), on obtient

$$\begin{aligned} \overline{u}(x) &= C^{-1}w_1(x) \geq C^{-1}c_0\tilde{d}(x) \geq C^{-1}c_0 d(x) \\ &\geq l_1^{-1}C^{-1}c_0\phi_{1,p}(x) \geq c_\varepsilon\phi_{1,p}(x) = \underline{u}_\varepsilon(x) \text{ dans } \overline{\Omega} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{v}(x) &= C^{-1}w_2(x) \geq C^{-1}c_0\tilde{d}(x) \geq C^{-1}c_0 d(x) \\ &\geq l_1^{-1}C^{-1}c_0\phi_{1,q}(x) \geq c_\varepsilon\phi_{1,q}(x) = \underline{v}_\varepsilon(x) \text{ dans } \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Par conséquent, on a

$$(\overline{u}, \overline{v}) \geq (\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon) \text{ dans } \overline{\Omega},$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Lemme 2.1.2 *Supposons que (2.0.1) est vérifié et $h_1, h_2 \neq 0$ dans Ω. Alors*

(i) *Si*

$$\alpha_1 + \beta_1 > p - 1 \quad et \quad \alpha_2 + \beta_2 > q - 1,$$

il existe une constante $\delta_0 \geq 0$ tel que, pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$, $(\overline{u}, \overline{v})$ dans (2.1.14) est une sur solution de $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

(ii) *Si*

$$\alpha_1 + \beta_1 = p - 1 \quad et \quad \alpha_2 + \beta_2 = q - 1,$$

il existe des constantes $\delta_0, \lambda_0 > 0$ tel que, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ et tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $(\overline{u}, \overline{v})$ dans (2.1.14) est une sur solution de $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Preuve. D'abord, on traite le cas $\Theta < 0$. On pose

$$\varepsilon_0 = C^{-1}$$

et

$$0 \leq \delta_0 < \min\{\frac{1}{C^{p-1} \|h_1\|_\infty}, \frac{1}{C^{q-1} \|h_2\|_\infty}\}. \tag{2.1.16}$$

En tenant compte de (2.0.1), (2.1.14), (2.1.13), (2.1.11) et (2.1.16), pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ et tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(\overline{u} + \varepsilon)^{-\alpha_1}(\overline{v} + \varepsilon)^{-\beta_1}(-\Delta_p \overline{u} - \delta h_1) \geq \overline{u}^{-\alpha_1}(\overline{v} + \varepsilon_0)^{-\beta_1}(-\Delta_p \overline{u} - \delta \|h_1\|_\infty) \\
&\geq C^{\alpha_1+\beta_1}(c_0 \tilde{d}(x))^{-\alpha_1}(\|w_2\|_\infty + 1)^{-\beta_1}(C^{-(p-1)} - \delta_0 \|h_1\|_\infty) \\
&= C^{\beta_1-(p-1-\alpha_1)}(c_0\rho)^{-\alpha_1}(\|w_2\|_\infty + 1)^{-\beta_1}(1 - \delta_0 C^{p-1} \|h_1\|_\infty) \geq \lambda \ \text{ dans } \overline{\Omega},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(\overline{u} + \varepsilon)^{-\alpha_2}(\overline{v} + \varepsilon)^{-\beta_2}(-\Delta_p \overline{v} - \delta h_2) \geq (\overline{u} + \varepsilon_0)^{-\alpha_2}\overline{v}^{-\beta_2}(-\Delta_p \overline{v} - \delta \|h_2\|_\infty) \\
&\geq C^{\alpha_2+\beta_2}(\|w_1\|_\infty + 1)^{-\beta_1}(c_0 \tilde{d}(x))^{-\beta_2}(C^{-(q-1)} - \delta_0 \|h_2\|_\infty) \\
&= C^{\alpha_2-(q-1-\beta_2)}(\|w_1\|_\infty + 1)^{-\beta_1}(c_0\rho)^{-\beta_2}(1 - \delta_0 C^{q-1} \|h_2\|_\infty) \geq \lambda \ \text{ dans } \overline{\Omega},
\end{aligned}$$

pour tout $\lambda > 0$, et pour toute constante $C > 1$ suffisament grande. Ceci montre que $(\overline{u}, \overline{v})$ est une sur solution pour le problème $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\lambda > 0$, et tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Maintenant, si $\Theta = 0$, en répétant l'argument précèdent, on arrive à la même conclusion, pour $\lambda > 0$ suffisament petit. Ceci complète la preuve. ∎

2.1.3 Existence de solutions pour $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$

Nous énonçons le résultat suivant relatif au système régularisé $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$.

Théorème 2.1.3 *Supposons que (2.0.1) est vérifié et que $h_1, h_2 \neq 0$ dans Ω. Alors*

(1) Si

$$\alpha_1 + \beta_1 > p - 1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 + \beta_2 > q - 1,$$

il existe des constantes $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$ telles que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et tout $\delta \in (0, \delta_0)$, le système $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$ admet une solution (positive) $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, satisfaisant

$$u_\varepsilon(x) \leq \overline{u}(x) \quad \text{et} \quad v_\varepsilon(x) \leq \overline{v}(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{2.1.17}$$

pour tout $\lambda > 0$.

(2) Si

$$\alpha_1 + \beta_1 = p - 1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 + \beta_2 = q - 1,$$

il existe des constantes $\varepsilon_0, \delta_0, \lambda_0 > 0$ telles que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et tout $\delta \in (0, \delta_0)$, le système $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$ admet une solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, satisfaisant (2.1.17), pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

(3) Pour

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq p - 1, \quad \alpha_2 + \beta_2 \geq q - 1,$$

et sous l'hypothèse (2.1.2), il existe des constantes c_2 et c_2', indépendantes de ε, telles que toutes solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ du système $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$ vérifient

$$u_\varepsilon(x) \geq c_2 d(x) \quad \text{et} \quad v_\varepsilon(x) \geq c_2' d(x), \quad \text{pour a.a. } x \in \Omega, \tag{2.1.18}$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Preuve. Sur la base des Lemmes 2.1.1 et 2.1.2, le théorème des sous et sur solutions pour les systèmes d'équations quasi-linéaires (voir Théorème 1.4.1) peut être appliqué. De ce fait, il existe une solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ du problème $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. De plus, en appliquant le Théorème 1.3.1, on déduit que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, avec $\beta \in (0,1)$. Cela prouve (1) et (2).

Il reste à montrer (3). Sur la base de (2.1.2), on considère la constante $\sigma > 0$ telle que

$$\inf_{\Omega} h_1(x), \ \inf_{\Omega} h_2(x) > \sigma.$$

On définit z_1 et z_2 comme étant l'unique solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p z_1 = \delta\sigma \text{ dans } \Omega \\ z_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q z_2 = \delta\sigma \text{ dans } \Omega \\ z_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui vérifient

$$z_1(x) \geq c_2 d(x) \ \text{ et } \ z_2(x) \geq c_2' d(x) \ \text{ dans } \Omega.$$

Alors, il s'ensuit que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon \geq -\Delta_p z_1 \text{ dans } \Omega \\ u_\varepsilon = z_1 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q v_\varepsilon \geq -\Delta_q z_2 \text{ dans } \Omega \\ v_\varepsilon = z_2 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Par conséquent, le Lemme 1.3.1 implique

$$u_\varepsilon(x) \geq z_1(x) \ \text{ et } \ v_\varepsilon(x) \geq z_2(x), \ \text{ pour tout } x \in \Omega,$$

et on déduit

$$u_\varepsilon(x) \geq c_2 d(x) \ \text{ et } \ v_\varepsilon(x) \geq c_2' d(x),$$

pour tout $x \in \Omega$, et tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Ceci complète la preuve théorème. ■

2.1.4 Preuve des résultats principaux

Preuve des Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2. On pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec tout entier positif $n > 1/\varepsilon_0$. Du Théorème 2.1.3 avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on sait qu'il existe $u_n := u_{\frac{1}{n}}$ et $v_n := v_{\frac{1}{n}}$ tels que

$$\begin{cases} \langle -\Delta_p u_n, \varphi \rangle = \lambda \int_\Omega \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\beta_1} \varphi \, dx + \int_\Omega \delta h_1 \varphi dx \\ \langle -\Delta_q v_n, \psi \rangle = \lambda \int_\Omega \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_2} \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\beta_2} \psi \, dx + \int_\Omega \delta h_2 \psi dx \end{cases} \tag{2.1.19}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$. En prenant $\varphi = u_n$ dans (2.1.19), de (2.1.17) et puisque $-1 < \alpha_1 < 0 < \beta_1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|u_n\|_{1,p}^p = \lambda \int_\Omega \left(u_n + \tfrac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(v_n + \tfrac{1}{n}\right)^{\beta_1} u_n \, dx + \int_\Omega \delta h_1 u_n \, dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega u_n^{\alpha_1+1} \left(v_n + 1\right)^{\beta_1} \; dx + \delta \left\|h_1\right\|_\infty \int_\Omega u_n \, dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1+1} \left(\overline{v} + 1\right)^{\beta_1} \; dx + \delta \left\|h_1\right\|_\infty \int_\Omega \overline{u} \, dx \\
&\leq \lambda|\Omega|(\|\overline{u}\|_\infty^{\alpha_1+1} \left(\|\overline{v}\|_\infty + 1\right)^{\beta_1} + \delta \left\|h_1\right\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty).
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Par conséquent, $\{u_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. De manière analogue, on montre que $\{v_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Alors, il est possible d'extraire des sous-suites, encore notée $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$, telles que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega). \tag{2.1.21}$$

La convergence faible dans (2.1.21), combinée au théorème de Rellich, (2.1.17) et (2.1.18) permettent de déduire que

$$c_2 d(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \;\text{ et }\; c_2' d(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x) \;\text{ dans } \Omega. \tag{2.1.22}$$

En posant $(\varphi, \psi) = (u_n - u, v_n - v)$ dans (2.1.19), on a

$$\begin{cases} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle = \int_\Omega \left[\lambda \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\beta_1} + \delta h_1\right] (u_n - u) \, dx \\ \langle -\Delta_q v_n, v_n - v \rangle = \int_\Omega \left[\lambda \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_2} \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\beta_2} + \delta h_2\right] (v_n - v) \, dx. \end{cases}$$

Montrons que

$$\limsup_{n\to\infty} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle -\Delta_q v_n, v_n - v \rangle \leq 0.$$

En effet, d'après (2.1.17), (2.1.18), (2.0.1) et (2.1.22), nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|((u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}(v_n + \frac{1}{n})^{\beta_1} + \delta h_1)(u_n - u)\right| \\
\leq\;& ((u_n)^{\alpha_1}(v_n + \frac{1}{n})^{\beta_1} + \delta h_1)(|u_n - u|) \\
\leq\;& 2((c_2 d(x))^{\alpha_1}(\overline{v} + 1)^{\beta_1} + \delta h_1)\overline{u} \\
\leq\;& 2((c_2 d(x))^{\alpha_1}(\|\overline{v}\|_\infty + 1)^{\beta_1} + \delta \left\|h_1\right\|_\infty) \|\overline{u}\|_\infty \leq \hat{C}_0 d(x)^{\alpha_1} \text{ dans } \Omega,
\end{aligned}$$

avec $\hat{C}_0$ une constante positive. Alors, (2.1.1) et le Lemme 1.1.4 impliquent que

$$((u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}(v_n + \frac{1}{n})^{\beta_1} + \delta h_1)(u_n - u) \in L^1(\Omega). \tag{2.1.23}$$

En utilisant (2.1.21), (2.1.23) et en appliquant le lemme de Fatou, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \textstyle\int_\Omega ((u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1} (v_n + \frac{1}{n})^{\beta_1} + \delta h_1)(u_n - u)\ dx \\ &\le \textstyle\int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \Big(((u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1} (v_n + \frac{1}{n})^{\beta_1} + \delta h_1)(u_n - u) \Big)\ dx \to 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\limsup_{n\to\infty} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle \le 0.$$

En répétant le même argument, on prouve que

$$\limsup_{n\to\infty} \langle -\Delta_q v_n, v_n - v \rangle \le 0.$$

Alors, la propriété $(\mathrm{S})_+$ de $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W_0^{1,q}(\Omega)$, respectivement, (voir Définition 1.2.1) garantit que

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega). \tag{2.1.24}$$

En ayant (2.1.19), en plus de (2.1.24), l'étape suivante consiste à vérifier que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\beta_1} \varphi\ dx = \int u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \varphi\ dx, \tag{2.1.25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_2} \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\beta_2} \psi\ dx = \int u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \psi\ dx, \tag{2.1.26}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$. Par (2.1.17), (2.1.18), (2.0.1) et (2.1.22), on a

$$\left| (u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_1}(v_n + \frac{1}{n})^{\beta_1} \varphi \right| \le (c_2 d(x))^{\alpha_1} (\|\overline{v}\|_\infty + 1)^{\beta_1} |\varphi|$$

et

$$\left| (u_n + \frac{1}{n})^{\alpha_2}(v_n + \frac{1}{n})^{\beta_2} \psi \right| \le (\|\overline{u}\|_\infty + 1)^{\alpha_2} (c_2' d(x))^{\beta_2} |\psi|\,.$$

Alors, sur la base de (2.1.1) et de l'inégalité de Hardy-Sobolev (voir Lemme 1.1.3), le Théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que les assertions (2.1.25) et (2.1.26) sont vérifiées.

Par conséquent, on peut passer à la limite dans (2.1.19) et conclure que (u, v) est une solution du problème (P_λ). En plus, de (2.1.22), on déduit que (u, v) est positive.

Par ailleurs, en utilisant (2.1.22), (2.1.14) et (2.1.18), on a

$$\begin{aligned} u^{\alpha_1} v^{\beta_1} + \delta h_1 &\leq \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} + \delta \|h_1\|_\infty \\ &\leq (c_2 d(x))^{\alpha_1} \|\overline{v}\|_\infty^{\beta_1} + \delta \|h_1\|_\infty d(x)^{\alpha_1 - \alpha_1} \\ &\leq C_1' d(x)^{\alpha_1}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u^{\alpha_2} v^{\beta_2} + \delta h_2 &\leq \overline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} + \delta \|h_2\|_\infty \\ &\leq \|\overline{u}\|_\infty^{\alpha_2} (c_2' d(x))^{\beta_2} + \delta \|h_2\|_\infty d(x)^{\beta_2 - \beta_2} \\ &\leq C_2' d(x)^{\beta_2}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega, \end{aligned}$$

où C_1' et C_2' sont des constantes positives. Donc, (2.1.1) permet d'appliquer le Théorème 1.3.2 de régularité, qui prouve que $(u, v) \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\beta \in (0, 1)$.

Il reste à montrer le résultat de non-existence de solutions indiqué dans le Théorème 2.1.2. Supposons que (u, v) est une solution positive du problème (P_λ) avec $\delta = 0$. En multipliant, respectivement, la première et la deuxième équation dans (P_λ) par u et v, on a:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \lambda \int_\Omega u^{\alpha_1 + 1} v^{\beta_1} dx$$

et

$$\int_\Omega |\nabla v|^q \, dx = \lambda \int_\Omega u^{\alpha_2} v^{\beta_2 + 1} dx$$

Puisque $\alpha_1, \beta_2 > -1$, l'inégalité de Young donne

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq \lambda \int_\Omega \left(\frac{\alpha_1 + 1}{p} u^p + \frac{p - 1 - \alpha_1}{p} v^{\frac{\beta_1 p}{p - 1 - \alpha_1}}\right) dx \tag{2.1.27}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla v|^q \, dx \leq \lambda \int_\Omega \left(\frac{q - 1 - \beta_2}{q} u^{\frac{\alpha_2 q}{q - 1 - \beta_2}} + \frac{\beta_2 + 1}{q} v^q\right) dx. \tag{2.1.28}$$

En additionnant (2.1.27) avec (2.1.28), d'après (2.1.4), on a

$$\|\nabla u\|_p^p + \|\nabla v\|_q^q \leq \lambda \left(\left(\frac{\alpha_1 + 1}{p} + \frac{q - 1 - \beta_2}{q}\right) \|u\|_p^p + \left(\frac{\beta_2 + 1}{q} + \frac{p - 1 - \alpha_1}{p}\right) \|v\|_q^q \right).$$

Comme $\Theta = 0$, alors de (2.1.4), on a

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1+1}{p} + \frac{q-1-\beta_2}{q} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{p} \\ \frac{\beta_2+1}{q} + \frac{p-1-\alpha_1}{p} = \frac{\beta_1+\beta_2+1}{q}. \end{cases} \tag{2.1.29}$$

Donc

$$\|\nabla u\|_p^p + \|\nabla v\|_q^q \leq \lambda \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{p} \|u\|_p^p + \frac{\beta_1+\beta_2+1}{q} \|v\|_q^q \right). \tag{2.1.30}$$

Rappelons que les valeurs propres $\lambda_{1,p}$ et $\lambda_{1,q}$ introduites dans (2.1.5) et (2.1.6) peuvent être caractérisées par le minimum du quotient de Rayleigh

$$\lambda_{1,p} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \backslash \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_p^p} \quad \text{et} \quad \lambda_{1,q} = \inf_{v \in W_0^{1,q}(\Omega) \backslash \{0\}} \frac{\|\nabla v\|_q^q}{\|v\|_q^q}. \tag{2.1.31}$$

Donc, de (2.1.29) - (2.1.31), on obtient

$$(\lambda_{1,p} - \frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{p} \lambda) \|u\|_p^p + (\lambda_{1,q} - \frac{\beta_1+\beta_2+1}{q} \lambda) \|v\|_q^q \leq 0,$$

ce qui est une contradiction pour

$$0 < \lambda < \lambda_* = \min \left\{ \frac{p}{\alpha_1+\alpha_2+1} \lambda_{1,p}, \frac{q}{\beta_1+\beta_2+1} \lambda_{1,q} \right\}.$$

Alors, le problème (P_λ) n'a pas de solution pour $\lambda < \lambda_*$, ce qui complète la démonstration.

■

2.2 Cas sous-homogène

2.2.1 Théorème d'existence

Théorème 2.2.1 *Supposons que (2.0.1) est vérifié tel que*

$$0 < \alpha_1 + \beta_1 < p - 1, \quad 0 < \alpha_2 + \beta_2 < q - 1, \tag{2.2.1}$$

avec

$$\min \{\gamma\alpha_1 + \beta_1, \gamma\alpha_2 + \beta_2\} > -1, \tag{2.2.2}$$

et

$$1 < \gamma < 1 + \min \{\beta_1, \alpha_2\}.$$

Alors le problème (P_λ) *admet une solution (positive)* (u, v) *dans* $\mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0, 1)$, *pour tout* $\lambda > 0$ *et tout* $\delta \geq 0$.

2.2.2 Système régularisé $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$

En vu de montrer le résultat principal et particulièrement, compte tenu de la condition (2.2.2), le problème régularisé $(\mathrm{P}_{\lambda,\varepsilon})$ doit être légèrement modifié comme suit:

$$(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \lambda(u+\varepsilon)^{\alpha_1} v^{\beta_1} + \delta h_1(x) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \lambda u^{\alpha_2}(v+\varepsilon)^{\beta_2} + \delta h_2(x) & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, avec $\varepsilon_0 < 1$.

Théorème 2.2.2 *Supposons que (2.0.1) et (2.2.1) soient vraies. Alors, il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *telle que, pour tout* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *le système* $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$ *admet une solution (positive)* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0, 1)$, *pour tout* $\lambda > 0$ *et tout* $\delta \geq 0$. *En plus, il existent des sous et sur solutions* $(\underline{u}, \underline{v})$ *et* $(\overline{u}, \overline{v})$ *vérifiant*

$$\underline{u}(x) \leq u_\varepsilon(x) \leq \overline{u}(x) \quad \text{et} \quad \underline{v}(x) \leq v_\varepsilon(x) \leq \overline{v}(x), \tag{2.2.4}$$

pout tout $x \in \Omega$, *et tout* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Existence d'une sous solution

Lemme 2.2.1 *Sous les hypothèses (2.0.1), (2.2.1) et (2.2.2),*

$$(\underline{u}, \underline{v}) = C^{-1}(\phi_{1,p}^{\gamma}, \phi_{1,q}^{\gamma}) \tag{2.2.5}$$

est une sous solution de $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$, *pour tout* $\lambda > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, *et toute constante réelle* $C > 1$ *suffisamment grande.*

Preuve. Un calcul direct donne

$$-\Delta_p \underline{u} = C^{-(p-1)}\gamma^{p-1}\phi_{1,p}^{\gamma(p-1)-p}\left(\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p - (\gamma-1)(p-1)\left|\nabla\phi_{1,p}\right|^p\right) \tag{2.2.6}$$

et

$$-\Delta_q \underline{v} = C^{-(q-1)}\gamma^{q-1}\phi_{1,q}^{\gamma(q-1)-q}\left(\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q - (\gamma-1)(q-1)\left|\nabla\phi_{1,q}\right|^q\right). \tag{2.2.7}$$

Multiplions (2.2.6) et (2.2.7) par $(\underline{u}+\varepsilon)^{-\alpha_1}\underline{v}^{-\beta_1}$ et $\underline{u}^{-\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{-\beta_2}$, respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}&(\underline{u}+\varepsilon)^{-\alpha_1}\underline{v}^{-\beta_1}(-\Delta_p\underline{u})\\ &= C^{-(p-1-\beta_1)}\gamma^{p-1}(C^{-1}\phi_{1,p}^{\gamma}+\varepsilon)^{-\alpha_1}\phi_{1,p}^{\gamma(p-1)-p}\phi_{1,q}^{-\gamma\beta_1}\left(\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^p - (\gamma-1)(p-1)\left|\nabla\phi_{1,p}\right|^p\right)\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

et

$$\begin{aligned}&\underline{u}^{-\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{-\beta_2}(\Delta_q\underline{v})\\ &= C^{-(q-1-\alpha_2)}\gamma^{q-1}\phi_{1,p}^{-\gamma\alpha_2}\phi_{1,q}^{\gamma(q-1)-q}(C^{-1}\phi_{1,q}^{\gamma}+\varepsilon)^{-\beta_2}\left(\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^q - (\gamma-1)(q-1)\left|\nabla\phi_{1,q}\right|^q\right).\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Pour toute constante $\sigma > 0$ suffisamment petite, notons par

$$\Omega_\sigma = \{x \in \Omega : dist\,(x, \partial\Omega) < \sigma\}.$$

Comme

$$\phi_{1,p}, \phi_{1,q} = 0 \;\text{ et }\; \left|\nabla\phi_{1,p}\right|, \left|\nabla\phi_{1,q}\right| > 0 \;\text{ sur } \partial\Omega,$$

alors

$$\lambda_{1,p}\phi_{1,p}(x)^p - (\gamma-1)(p-1)\left|\nabla\phi_{1,p}(x)\right|^p \le 0, \;\text{ pour tout }\; x \in \Omega_\sigma \tag{2.2.10}$$

et

$$\lambda_{1,q}\phi_{1,q}(x)^q - (\gamma-1)(q-1)\left|\nabla\phi_{1,q}(x)\right|^q \le 0, \;\text{ pour tout }\; x \in \Omega_\sigma. \tag{2.2.11}$$

Rappelons qu'il existe une constante $\mu = \mu(\sigma) > 0$ telle que

$$\phi_{1,p}(x),\; \phi_{1,q}(x) \ge \mu \text{ in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\sigma. \tag{2.2.12}$$

Fixons $\varepsilon_0 = C^{-1}$. Alors, comme $\gamma > 1$, de (2.0.1), (2.2.18), (2.1.5), (2.1.7), (2.1.9) et (2.2.12), pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et tout $\lambda > 0$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&C^{-(p-1)}\gamma^{p-1}\lambda_{1,p}(C^{-1}\phi_{1,p}^{\gamma}+\varepsilon)^{-\alpha_1}(C^{-1}\phi_{1,q}^{\gamma})^{-\beta_1}\phi_{1,p}^{\gamma(p-1)}\\
&\leq C^{-(p-1-\beta_1)}\gamma^{p-1}\lambda_{1,p}(C^{-1}\phi_{1,p}^{\gamma}+\varepsilon_0)^{-\alpha_1}\phi_{1,q}^{-\gamma\beta_1}\phi_{1,p}^{\gamma(p-1)}\\
&\leq C^{\beta_1-(p-1-\alpha_1)}\gamma^{p-1}\lambda_{1,p}(M^{\gamma}+1)^{-\alpha_1}\hat{l}_2^{-\gamma\beta_1}\phi_{1,p}^{\gamma(p-1-\beta_1)}\\
&\leq C^{\beta_1-(p-1-\alpha_1)}\gamma^{p-1}\lambda_{1,p}(M^{\gamma}+1)^{-\alpha_1}\hat{l}_2^{-\gamma\beta_1}\begin{cases} M^{\gamma(p-1-\beta_1)} & \text{si } \beta_1 \leq p-1\\ \mu^{\gamma(p-1-\beta_1)} & \text{si } \beta_1 \geq p-1\end{cases}\\
&\leq \lambda \ \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_{\sigma},
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

pour $C > 1$ suffisamment grand. Procédons de la même manière, pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, nous obtenons de (2.0.1), (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9) et (2.2.12) que

$$\begin{aligned}
&C^{-(q-1)}\gamma^{q-1}\lambda_{1,q}(C^{-1}\phi_{1,p}^{\gamma})^{-\alpha_2}(C^{-1}\phi_{1,q}^{\gamma}+\varepsilon)^{-\beta_2}\phi_{1,q}^{\gamma(q-1)}\\
&\leq C^{\alpha_2-(q-1)}\gamma^{q-1}\lambda_{1,q}\phi_{1,p}^{-\gamma\alpha_2}(C^{-1}\phi_{1,q}^{\gamma}+\varepsilon_0)^{-\beta_2}\phi_{1,q}^{\gamma(q-1)}\\
&\leq C^{\alpha_2-(q-1-\beta_2)}\gamma^{q-1}\lambda_{1,q}\hat{l}_1^{-\gamma\alpha_2}(M^{\gamma}+1)^{-\beta_2}\phi_{1,q}^{\gamma(q-1-\alpha_2)}\\
&\leq C^{\alpha_2-(q-1-\beta_2)}\gamma^{q-1}\lambda_{1,q}\hat{l}_1^{-\gamma\alpha_2}(M^{\gamma}+1)^{-\beta_2}\begin{cases} M^{\gamma(q-1-\alpha_2)} & \text{si } \alpha_2 \leq q-1\\ \mu^{\gamma(q-1-\alpha_2)} & \text{si } \alpha_2 \geq q-1\end{cases}\\
&\leq \lambda \ \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_{\sigma},
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

sous la condition que la constante $C > 1$ est suffisamment grande.

En rassemblant (2.2.8)-(2.2.11), (2.2.13) et (2.2.14) ensemble et en gardant à l'esprit que $\gamma > 1$ et $h_1, h_2 \geq 0$, nous déduisons que

$$-\Delta_p \underline{u} \leq \lambda(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + \delta h_1 \text{ dans } \overline{\Omega}$$

et

$$-\Delta_q \underline{v} \leq \lambda \underline{u}^{\alpha_2}(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2} + \delta h_2 \ \text{ dans } \overline{\Omega},$$

ce qui montre que $(\underline{u}, \underline{v})$ dans (2.2.18) est une sous solution du problem $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ■

Existence d'une sur solution

Soient $e_1, e_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ l'unique solutions des problèmes de Dirichlet suivants:

$$\begin{cases} -\Delta_p e_1 = e_1^{\theta_1} \text{ dans } \Omega \\ e_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q e_2 = e_2^{\theta_2} \text{ dans } \Omega \\ e_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.15}$$

avec

$$0 > \theta_1, \theta_2 > -1, \tag{2.2.16}$$

qui vérifient

$$c_0 d(x) \leq e_1(x) \leq c_1 d(x) \ \text{ et } \ c_0' d(x) \leq e_2(x) \leq c_1' d(x) \ \text{ dans } \Omega, \tag{2.2.17}$$

où c_0, c_0', c_1 et c_1' sont des constantes positives (voir [19]).

Lemme 2.2.2 *Sous les hypothèses (2.0.1) et (2.2.1),*

$$(\overline{u}, \overline{v}) = C(e_1, e_2), \tag{2.2.18}$$

est une sur solution de $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\lambda > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, et toute constante réelle $C > 1$ suffisamment grande. En plus, on a

$$\overline{u} \geq \underline{u} \ \text{ et } \ \overline{v} \geq \underline{v} \text{ dans } \overline{\Omega}. \tag{2.2.19}$$

Preuve. Pour une constante $C > 1$ assez grande, il est aisé de voir que les inégalités (2.2.19) sont vérifiées.

Montrons que $(\overline{u}, \overline{v})$ dans (2.2.18) est une sur solution du problème $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$. En tenant compte de (2.0.1), (2.2.15) - (2.2.18), pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ et puisque $\alpha_i + \beta_i > 0$ $(i = 1, 2)$, nous avons

$$\begin{aligned}
&(\overline{u} + \varepsilon)^{-\alpha_1} \overline{v}^{-\beta_1}(-\Delta_p \overline{u} - \delta h_1) \geq \overline{u}^{-\alpha_1} \overline{v}^{-\beta_1}(-\Delta_p \overline{u} - \delta \left\| h_1 \right\|_\infty) \\
&\geq C^{-\alpha_1-\beta_1} e_1^{-\alpha_1} e_2^{-\beta_1}(C^{p-1} e_1^{\theta_1} - \delta \left\| h_1 \right\|_\infty) \\
&\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_0 d(x))^{-\alpha_1}(c_1' d(x))^{-\beta_1}((c_1 d(x))^{\theta_1} - C^{-(p-1)}\delta \left\| h_1 \right\|_\infty) \\
&\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} c_0^{-\alpha_1}(c_1')^{-\beta_1} d(x)^{-(\alpha_1+\beta_1)}((c_1 d(x))^{\theta_1} - C^{-(p-1)}\delta \left\| h_1 \right\|_\infty) \geq \lambda \ \text{ dans } \overline{\Omega},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\overline{u}^{-\alpha_2}(\overline{v} + \varepsilon)^{-\beta_2}(-\Delta_q \overline{v} - \delta h_2) \geq \overline{u}^{-\alpha_2} \overline{v}^{-\beta_2}(-\Delta_q \overline{v} - \delta \left\| h_2 \right\|_\infty) \\
&\geq C^{-\alpha_2-\beta_2} e_1^{-\alpha_2} e_2^{-\beta_2}(C^{q-1} e_2^{\theta_2} - \delta \left\| h_2 \right\|_\infty) \\
&\geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2}(c_1 d(x))^{-\alpha_2}(c_0' d(x))^{-\beta_2}((c_1' d(x))^{\theta_2} - C^{-(q-1)}\delta \left\| h_2 \right\|_\infty) \\
&\geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2} c_1^{-\alpha_2}(c_0')^{-\beta_2} d(x)^{-(\alpha_2+\beta_2)}((c_1' d(x))^{\theta_2} - C^{-(q-1)}\delta \left\| h_2 \right\|_\infty) \geq \lambda \ \text{ dans } \overline{\Omega},
\end{aligned}$$

pour $C > 1$ suffisamment grand. Donc, nous déduisons que

$$-\Delta_p \overline{u} \geq \lambda(\overline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} + \delta h_1 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

et

$$-\Delta_q \overline{v} \geq \lambda \overline{u}^{\alpha_2}(\overline{v}+\varepsilon)^{\beta_2} + \delta h_2 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

ce qui prouve que $(\overline{u}, \overline{v})$ est une sur solution de $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ■

Existence de solutions de $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$

Preuve du Théorème 2.2.2. Sur la base des Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, la théorie générale des sous et sur solutions aux systèmes d'équations quasi-linéaires (voir Théorème 1.4.1) peut être appliquée, et montre l'existence d'une solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ du problème $(\tilde{\mathrm{P}}_{\lambda,\varepsilon})$ dans $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. De plus, le Théorème 1.3.1 de régularité assure que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\beta \in (0,1)$, et pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ■

2.2.3 Preuve du théorème d'existence

Preuve du Théorème 2.2.1. On pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec tout entier positif $n > 1/\varepsilon_0$. D'après le Théorème 2.2.2, il existe $u_n := u_{\frac{1}{n}}$ et $v_n := v_{\frac{1}{n}}$ tels que

$$\begin{cases} \langle -\Delta_p u_n, \varphi \rangle = \lambda \int_\Omega \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \; v_n^{\beta_1} \varphi \; dx + \int_\Omega \delta h_1 \varphi dx \\ \langle -\Delta_q v_n, \psi \rangle = \lambda \int_\Omega u_n^{\alpha_2} \left(v_n + \frac{1}{n}\right)^{\beta_2} \psi \; dx + \int_\Omega \delta h_2 \psi dx \end{cases} \tag{2.2.20}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$. En prenant $(\varphi, \psi) = (u_n, v_n)$ dans (2.2.20) et comme $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, on obtient

$$\begin{aligned} &\|u_n\|_{1,p}^p = \lambda \int_\Omega \left(u_n + \tfrac{1}{n}\right)^{\alpha_1} v_n^{\beta_1} u_n \; dx + \int_\Omega \delta h_1 u_n \; dx \\ &\leq \lambda \int_\Omega u_n^{\alpha_1+1} v_n^{\beta_1} \; dx + \int_\Omega \delta h_1 u_n \; dx \\ &\leq \lambda \int_\Omega u_n^{\alpha_1+1} v_n^{\beta_1} \; dx + \delta \left\|h_1\right\|_\infty \int_\Omega u_n \; dx. \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

et

$$\begin{aligned} &\|v_n\|_{1,q}^q = \lambda \int_\Omega u_n^{\alpha_2} \left(v_n + \tfrac{1}{n}\right)^{\beta_2} v_n \; dx + \int_\Omega \delta h_2 v_n \; dx \\ &\leq \lambda \int_\Omega u_n^{\alpha_2} \left(v_n\right)^{\beta_2+1} \; dx + \int_\Omega \delta h_2 v_n \; dx \\ &\leq \lambda \int_\Omega u_n^{\alpha_2} \left(v_n\right)^{\beta_2+1} \; dx + \delta \left\|h_2\right\|_\infty \int_\Omega v_n \; dx. \end{aligned}$$

Si $-1 \leq \alpha_1 < 0$ (Voir (2.1.1)), sur la base de (2.2.4) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il s'ensuit que $\{u_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dans le cas où $\alpha_1 < -1$, de (2.0.1), (2.1.8), (2.2.17) - (2.2.4) et de l'inégalité de Hölder, (2.2.21) conduit à

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{1,p}^p &\leq \lambda \int_\Omega (C^{-1}\phi_{1,p}^\gamma)^{\alpha_1+1}(Ce_2)^{\beta_1}\ dx + \delta \|h_1\|_\infty \int_\Omega u_n\ dx \\ &\leq C_1 \int_\Omega d(x)^{\gamma(\alpha_1+1)+\beta_1}\ dx + C_1' \|u_n\|_{1,p}, \end{aligned}$$

pour certaines constantes C_1 et C_1' indépendantes de n. Comme

$$p > 1 \ \text{ et } \ \gamma(\alpha_1+1)+\beta_1 > 0,$$

(voir (2.2.2)), l'inégalité ci-dessus implique que $\{u_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. De manière analogue, on montre que la suite $\{v_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. Donc, il est possible d'extraire des sous-suites, notée $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$, telles que

$$(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega). \tag{2.2.22}$$

avec

$$0 < \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \ \text{ et } \ 0 < \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x) \ \text{ dans } \Omega. \tag{2.2.23}$$

En tenant compte de (2.0.1), (2.2.2), (2.2.23), (2.2.18), (2.2.17) et (2.1.8), on a

$$\begin{aligned} &|((u_n + \tfrac{1}{n})^{\alpha_1} v_n^{\beta_1} + \delta h_1)(u_n - u)| \\ &\leq (u_n^{\alpha_1} v_n^{\beta_1} + \delta h_1)(|u_n| + u|) \\ &\leq 2(\underline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} + \delta h_1)\overline{u} \\ &\leq C_0 \left(d(x)^{\gamma\alpha_1+\beta_1} + \delta \|h_1\|_\infty\right) \|\overline{u}\|_\infty \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

et

$$\begin{aligned} &\left|(u_n + \tfrac{1}{n})^{\alpha_1} v_n^{\beta_1}\varphi\right| \leq \underline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1}|\varphi| \\ &\leq (C^{-1}\phi_{1,p}^\gamma)^{\alpha_1}(Ce_2)^{\beta_1}|\varphi| \\ &\leq C_0' d(x)^{\gamma\alpha_1+\beta_1}|\varphi|, \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

pour des constantes $C_0, C_0' > 0$ indépendantes de n, et pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De manière analogue, on obtient

$$\begin{aligned} &|(u_n^{\alpha_2}\left(v_n + \tfrac{1}{n}\right)^{\beta_2} + \delta h_2)(v_n - v)| \\ &\leq (u_n^{\alpha_2} v_n^{\beta_2} + \delta h_2)(|v_n| + v|) \\ &\leq 2(\overline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2} + \delta h_2)\overline{v} \\ &\leq \tilde{C}_1(d(x)^{\alpha_2+\gamma\beta_2} + \delta \|h_2\|_\infty) \|\overline{v}\|_\infty \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

et
$$\left| u_n^{\alpha_2}(v_n + \frac{1}{n})^{\beta_2}\psi \right| \leq \overline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2}|\psi| \leq \tilde{C}_1' d(x)^{\alpha_2+\gamma\beta_2}|\psi|, \tag{2.2.27}$$
pour des constantes $\tilde{C}_1, \tilde{C}_1' > 0$ indépendantes de n et pour tout $\psi \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Alors, en gardant à l'esprit (2.2.2) avec les estimations (2.2.24) - (2.2.27) et en suivant un argument similaire à celui de la preuve des Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2, on conclut que (u, v) est une solution du problème (P_λ). En plus, de (2.0.1), (2.2.23), (2.2.18) et (2.1.8), on a
$$\begin{aligned}
&u^{\alpha_1}v^{\beta_1} + \delta h_1 \leq \underline{u}^{\alpha_1}\overline{v}^{\beta_1} + \delta h_1 \\
&\leq (C^{-1}\phi_{1,p}^{\gamma})^{\alpha_1}(Ce_2)^{\beta_1} + \delta \left\| h_1 \right\|_\infty \\
&\leq \breve{C}_1 d(x)^{\gamma\alpha_1+\beta_1} + \delta \left\| h_1 \right\|_\infty, \text{ pour tout } x \in \Omega,
\end{aligned}$$
où $\breve{C}_1 > 0$ est une constante. Si
$$\gamma\alpha_1 + \beta_1 < 0,$$
alors (2.2.2) permet d'appliquer le Théorème 1.3.2 de régularité montrant que $u \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\beta \in (0, 1)$.

Si
$$\gamma\alpha_1 + \beta_1 \geq 0,$$
on arrive à la même conclusion en utilisant le Théorème 1.3.1 de Lieberman, qui est applicable grâce à (2.2.23) avec $\overline{u} \in L^\infty(\Omega)$. Un argument similaire donne que $v \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ avec $\beta \in (0, 1)$. Ceci achève la démonstration. ■

CHAPITRE 3

Multiples solutions pour une classe de systèmes elliptiques quasi-linéaires et singuliers

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'existence de multiples solutions pour le système elliptique quasi-linéaire suivant:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = g(u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, de frontière régulière, et les non-linéarités

$$f, g : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

sont des fonctions continues satisfaisant les conditions de croissance suivantes:

(H.1) Pour tout $\overline{L} > 0$, il existe des constantes $m_i, M_i > 0$ $(i = 1, 2)$ telles que

$$\begin{aligned} m_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1} &\leq f(s,t) \leq M_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1}, \text{ pour tout } 0 < s < \overline{L}, \text{ et tout } t > 0, \\ m_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2} &\leq g(s,t) \leq M_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2}, \text{ pour tout } 0 < t < \overline{L}, \text{ et tout } s > 0, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} -1 < \alpha_1 < 0 < \beta_1 < p - 1 \\ -1 < \beta_2 < 0 < \alpha_2 < q - 1 \end{cases} \tag{3.0.1}$$

(H.2) Pour tout $\overline{L}^* > 0$, il existe des constantes $J_1 > \lambda_{1,p}$ et $J_2 > \lambda_{1,q}$ telles que

$$\begin{aligned} \lim_{s \to +\infty} \frac{f(s,t)}{s^{p-1}} &= J_1 \text{ pour tout } 0 < t < \overline{L}^*, \\ \lim_{t \to +\infty} \frac{g(s,t)}{s^{q-1}} &= J_2 \text{ pour tout } 0 < s < \overline{L}^*, \end{aligned}$$

Le système $(\mathcal{P})$ présente des singularités à l'origine qui apparaissent sous l'hypothèse (H.1). La présence de ces singularités, en plus de la structure non-variationelle du problème, complique davantage l'étude de $(\mathcal{P})$. De ce fait, résoudre ce type de problèmes nécessitent, en général, des techniques mathématiques non-triviales, qui impliquent, entre autre, le degré topologique, les théories de bifurcation et de point Fixe [31, 32], la méthode des sous et sur solutions et la théorie des opérateurs pseudo-monotones. Pour d'ample information sur l'application des méthodes susmentionnées, nous renvoyons le lecteur consulter les références suivantes: Alves & Moussaoui [5], Hai [23], Ghergu & Radulescu [20], Giacomoni, Hernandez & Moussaoui [18], Giacomoni, Hernandez & Sauvy [21], Hernandez, Mancebo & Vega, [24], Khodja & Moussaoui [26], Zhang [41], Zhang & Yu [42], Diaz, Morel & Oswald [15], Alves, Corrêa & Gonçalves [4], Crandall & Rabinowitz [12], Taliaferro [37], Lunning & Perry [30], Motreanu & Moussaoui [31, 32, 33], Moussaoui, Khodja & Tas [34], Agarwall and O'Regan [2], Stuart [36]. Donc, outre l'importance des applications des problèmes singuliers mentionnées dans l'introduction, nous soulignons l'intérêt de les étudier d'un point de vue mathématique.

Dans ce chapitre, notre but est d'établir l'existence de deux solutions positives et régulières pour le problème $(\mathcal{P})$. Le résultat principal est formulé comme suit.

Théorème 3.0.3 *Sous les hypothèses* (H.1) *et* (H.2), *le problème* $(\mathcal{P})$ *possède au moins deux solutions positives dans* $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, *pour certain* $\beta \in (0,1)$.

Notre approche est basée sur la méthode des sous et sur solutions et la théorie du degré topologique. Avant de procéder à la démonstration du Théorème 3.0.3, nous donnons, d'abord, un exemple où les hypothèses (H.1) et (H.2) sont vérifiées.

Exemple 3.0.1 *Soit* $\theta \in C_c(\mathbb{R})$ *avec* $\theta(s) = 1$ *dans un ensemble borné. Considérons les fonctions*

$$f, g : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

dans $(\mathcal{P})$, *définies comme suit:*

$$f(s,t) = \theta(s)s^{\alpha_1}t^{\beta_1} + (1 - \theta(s))J_1 s^{p-1},$$

et

$$g(s,t) = \theta(t)s^{\alpha_2}t^{\beta_2} + (1 - \theta(t))J_2 t^{q-1},$$

pour $s, t > 0$. *Alors, il est aisé de vérifier que les hypothèses* (H.1) *et* (H.2) *sont satisfaites.*

3.1 Existence d'une solution

Dans cette section, on montre l'existence de la première solution du problème $(\mathcal{P})$ en appliquant le Théorème 1.4.1 (voir Chapitre 1), relatif au systèmes singuliers.

Soient w_1 et w_2 l'unique solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 = w_1^{\alpha_1} & \text{dans } \Omega, \\ w_1 > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q w_2 = w_2^{\beta_2} & \text{dans } \Omega, \\ w_2 > 0 & \text{dans } \Omega, \\ w_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

qui vérifient les estimations suivantes:

$$c_2\phi_{1,p}(x) \leq w_1(x) \leq c_3\phi_{1,p}(x) \;\text{ et }\; c_2'\phi_{1,q}(x) \leq w_2(x) \leq c_3'\phi_{1,q}(x), \tag{3.1.2}$$

où $c_i, c_i' > 0$ sont des constantes (voir [19]).

On considère $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ solutions des problèmes de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p \xi_1(x) = \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) & \text{dans } \Omega, \\ \xi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta_q \xi_2(x) = \phi_{1,q}^{\beta_2}(x) & \text{dans } \Omega, \\ \xi_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev (voir Lemme 1.1.3) guarantie que les côtés droit dans les équations de (3.1.3) appartiennent, respectivement, à $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W^{-1,q'}(\Omega)$. Par conséquent, le Théorème 1.2.1 de Minty-Browder assure l'existence d'une unique solutions ξ_1 et ξ_2 dans (3.1.3). En plus, de (3.1.1), (3.1.2) ainsi que de la monotonicité des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$, on dérive

$$c_0\phi_{1,p}(x) \leq \xi_1(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \text{ et } c_0'\phi_{1,q}(x) \leq \xi_2(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ dans } \Omega, \tag{3.1.4}$$

pour certaines constantes positives c_0, c_1, c_0', c_1'.

Soient z_1 et z_2 tels que

$$-\Delta_p z_1(x) = h_1(x) \text{ dans } \Omega, \; z_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.1.5}$$

et

$$-\Delta_q z_2(x) = h_2(x) \text{ dans } \Omega, \; z_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.1.6}$$

où

$$h_1(x) = \begin{cases} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \\ -\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) & \text{sur } \Omega_\delta, \end{cases} \tag{3.1.7}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} \phi_{1,q}^{\beta_2}(x) & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \\ -\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) & \text{sur } \Omega_\delta, \end{cases} \tag{3.1.8}$$

et

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x) < \delta\}.$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev (voir Lemme 1.1.3) combinée avec le Théorème 1.2.1 de Minty-Browder assurent l'existence et l'unicité de z_1 et z_2 dans (3.1.5) et (3.1.6). Par ailleurs, (3.1.5) et (3.1.6), la monotonicité des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$, ainsi que le Théorème 1.3.2, montrent que

$$\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}(x) \leq z_1(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \text{ et } \tfrac{c_0'}{2}\phi_{1,q}(x) \leq z_2(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ dans } \Omega. \tag{3.1.9}$$

On pose

$$(\underline{u}, \underline{v}) = C^{-1}(z_1, z_2) \tag{3.1.10}$$

et

$$(\overline{u}, \overline{v}) = C(\xi_1, \xi_2), \tag{3.1.11}$$

où $C > 0$ est une constante. Pour C assez grand, il apparait clairement que

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v}) \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Théorème 3.1.1 *Sous l'hypothèse* (H.1)*, le système* $(\mathcal{P})$ *admet une solution* (u, v) *dans* $\mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$*, avec* $\beta \in (0,1)$*, qui vérifie*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ et } \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x), \tag{3.1.12}$$

pour tout $x \in \overline{\Omega}$.

Preuve.

Existence d'une sous solution:

Pour tout $C > 0$ on a

$$-C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) < 0 \leq m_1(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1}, \ x \in \Omega_\delta \tag{3.1.13}$$

et

$$-C^{-(q-1)}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) < 0 \leq m_2(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_2}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_2}, \ x \in \Omega_\delta. \tag{3.1.14}$$

Soit une constante $\mu > 0$ telle que

$$\phi_{1,p}(x), \phi_{1,q}(x) \geq \mu \text{ dans } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta. \tag{3.1.15}$$

Puisque $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, (3.1.9) et (3.1.15) impliquent

$$\begin{aligned}
&C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(z_1(x))^{-\alpha_1} \leq C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_1\phi_{1,p}(x))^{-\alpha_1} \\
&= C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}(Mc_1)^{-\alpha_1} < m_1(c_0'\mu)^{\beta_1} \leq m_1(c_0'\phi_{1,q}(x))^{\beta_1} \\
&\leq m_1(z_2(x))^{\beta_1}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta,
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

pour $C > 0$ suffisamment grand. Ceci est équivalent à

$$C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) < m_1(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta. \tag{3.1.17}$$

D'une manière analogue, on a

$$C^{-(q-1)}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) < m_2\left(C^{-1}z_1(x)\right)^{\alpha_2}\left(C^{-1}z_2(x)\right)^{\beta_2} \quad \text{pour tout } x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \tag{3.1.18}$$

pour $C > 0$ assez grand.

D'autre part, un calcul direct donne

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\, dx = C^{-(p-1)}\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta}\phi_{1,p}^{\alpha_1}\varphi\, dx - C^{-(p-1)}\int_{\Omega_\delta}\phi_{1,p}^{\alpha_1}\varphi\, dx \tag{3.1.19}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2}\nabla\underline{v}\nabla\psi = C^{-(q-1)}\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta}\phi_{1,q}^{\beta_2}\psi\, dx - C^{-(q-1)}\int_{\Omega_\delta}\phi_{1,q}^{\beta_2}\psi\, dx, \tag{3.1.20}$$

où $(\varphi,\psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\varphi,\psi \geq 0$.

En combinant (3.1.19), (3.1.20), (3.1.13), (3.1.14), (3.1.16), (3.1.18) et (H.1), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\, dx &\leq m_1\int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}\varphi\, dx\\ &\leq m_1\int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1}\omega_2^{\beta_1}\varphi\, dx \leq \int_\Omega f(\underline{u},\omega_2)\varphi\, dx\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2}\nabla\underline{v}\nabla\psi\, dx &\leq m_2\int_\Omega \underline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2}\psi\, dx\\ &\leq m_2\int_\Omega \omega_1^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2}\psi\, dx \leq \int_\Omega g(\omega_1,\underline{v})\psi\, dx,\end{aligned}$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, avec $\varphi,\psi \geq 0$, pour tout $\omega_1 \geq \underline{u}$ et $\omega_2 \geq \underline{v}$ dans Ω. Ceci prouve que $(\underline{u},\underline{v})$ est une sous solution de $(\mathcal{P})$.

Existence d'une sur solution:

Compte tenu de (3.1.3), (3.1.4), (2.1.9) et (3.0.1), on a

$$\begin{aligned}&\overline{u}^{-\alpha_1}\overline{v}^{-\beta_1}(-\Delta_p\overline{u}) = C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}\xi_2^{-\beta_1} \geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'\phi_{1,q}(x))^{-\beta_1}\\ &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1}(c_1'M)^{-\beta_1} \geq M_1 \text{ dans } \overline{\Omega}\end{aligned}$$

et

$$\overline{u}^{-\alpha_2}\overline{v}^{-\beta_2}(-\Delta_q\overline{v}) \geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2}(c_1M)^{-\alpha_2} \geq M_2 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

sous la condition que $C > 0$ est assez grand. Donc, de (H.1), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, dx \geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \varphi \, dx \\ &\geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \varphi \, dx \geq \int_\Omega f(\overline{u}, \omega_2) \varphi \, dx \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \, dx \geq M_2 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \\ &\geq M_2 \int_\Omega \omega_1^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \geq \int_\Omega g(\omega_1, \overline{v}) \psi \, dx, \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\varphi, \psi \geq 0$, pour tout (ω_1, ω_2) dans $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Alors, $(\overline{u}, \overline{v})$ est une sur solution de $(\mathcal{P})$.

Preuve du Théorème 3.1.1 (conclusion):

En utilisant (H.1), (2.1.8), (3.1.12), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.9) et (3.1.4), pour (u, v) dans $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, on a

$$f(u, v) \leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \leq C_1 d(x)^{\alpha_1}$$

et

$$g(u, v) \leq M_2 u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \leq C_2 d(x)^{\beta_2},$$

pour tout $x \in \Omega$, où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Par conséquent, à travers le Théorème 1.4.2, on déduit qu'il existe une solution $(u, v) \in \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0, 1)$, du problème $(\mathcal{P})$ dans le rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Ceci complète la preuve du Théorème.
■

3.2 Existence d'une seconde solution

D'aprés le Théorème 3.1.1, le problème $(\mathcal{P})$ possède une solution (positive) (u, v) dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, localisée dans le rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Donc, la preuve du Théorème 3.0.3 sera complète si nous montrons que le problème $(\mathcal{P})$ admet une seconde solution. Cependant, il convient de noter que, par le Théorème 3.1.1, l'ensemble de solutions (u, v) dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ du problème $(\mathcal{P})$ n'est pas vide. Alors, sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe une constante $R > 0$ telle que toute solution (u, v) dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ satisfait

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R. \tag{3.2.1}$$

Sinon, il existe une infinité de solutions bornées dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et de ce fait, le Théorème 3.0.3 est prouvé.

Dans tout ce qui suit, on note

$$B_R(0) = \left\{(u, v) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \,:\, \|u\|_{\mathcal{C}^1} + \|v\|_{\mathcal{C}^1} < R\right\},$$

$$\mathcal{O}_R = \{(u, v) \in B_R(0) \,:\, \underline{u} \ll u \ll \hat{u}_R \text{ and } \underline{v} \ll v \ll \hat{v}_R\}$$

et

$$\mathcal{O}_\Lambda = \{(u, v) \in B_R(0) \,:\, \underline{u} \ll u \ll \overline{u}_\Lambda \text{ and } \underline{v} \ll v \ll \overline{v}_\Lambda\},$$

où

$$(\overline{u}_\Lambda, \overline{v}_\Lambda) = \Lambda(\xi_1, \xi_2) \text{ et } (\hat{u}_R, \hat{v}_R) = \Lambda_R(\xi_1, \xi_2), \tag{3.2.2}$$

avec ξ_1, ξ_2 définies dans (3.1.3) et Λ_R, $\Lambda > 0$ sont des constantes qui seront choisies plus tard. Un simple calcul donne que $\mathcal{O}_R$ et $\mathcal{O}_\Lambda$ sont des ensembles ouverts dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Sans perte de généralité, on pose

$$R > \max\{\|\underline{u}\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty, \|\underline{v}\|_\infty, \|\overline{v}\|_\infty, \|\overline{u}_\Lambda\|_\infty, \|\overline{v}_\Lambda\|_\infty\}.$$

Notation 3.2.1 *Rappelons que: $u_1 \ll u_2$ si $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et*

$$u_1(x) < u_2(x) \;\; \forall x \in \Omega \;\; \text{et} \;\; \tfrac{\partial u_2}{\partial \nu} < \tfrac{\partial u_1}{\partial \nu} \;\; \text{sur } \partial\Omega,$$

où ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$.

La proposition suivante sera trés utile pour prouver l'existence d'une deuxième solution.

Proposition 3.2.1 *Supposons que* (H.1) *est vérifié. Alors, toute solution (u, v) de $(\mathcal{P})$ dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, satisfait*

$$u(x) \ll \hat{u}_R(x) \;\; \text{et} \;\; v(x) \ll \hat{v}_R(x) \;\; \text{dans } \Omega, \tag{3.2.3}$$

à chaque fois que

$$u(x) \geq \underline{u}(x) \quad et \quad v(x) \geq \underline{v}(x) \quad dans\ \Omega.$$

De plus, pour toute solution (u, v) *de* $(\mathcal{P})$*, localisée dans* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$*, on a*

$$u(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \quad et \quad v(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x) \quad dans\ \Omega. \tag{3.2.4}$$

Preuve. On montre uniquement la première partie des inégalités (3.2.3) et (3.2.4) car a seconde partie peut être justifiée de la même manière. En rappelant que toute solution (u, v) bornée dans $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ satisfait (3.2.1), alors, de (H.1), (3.1.10) et (3.1.9), et pour

$$u(x) \geq \underline{u}(x) \;\text{ et }\; v(x) \geq \underline{v}(x) \;\text{ dans } \Omega.$$

on a

$$\begin{aligned}
&-\Delta_p u = f(u, v) \leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} R^{\beta_1} \\
&\leq M_1 (C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p})^{\alpha_1} R^{\beta_1} < \Lambda_R^{p-1} \phi_{1,p}^{\alpha_1} \\
&= -\Delta_p(\Lambda_R \xi_1) = -\Delta_p \hat{u}_R \;\text{ dans } \Omega,
\end{aligned}$$

pour Λ_R assez grand. De plus, de (H.1), (3.1.11), (3.1.10), (3.1.4) et (3.1.9), pour $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&-\Delta_p u = f(u, v) \leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \\
&\leq M_1 (C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p})^{\alpha_1} (C c_1' \phi_{1,q})^{\beta_1} \leq C^{-\alpha_1+\beta_1} (\tfrac{c_0}{2})^{\alpha_1} (c_1' M)^{\beta_1} \phi_{1,p}^{\alpha_1} \\
&< \Lambda^{p-1} \phi_{1,p}^{\alpha_1} = -\Delta_p(\Lambda \xi_1) = -\Delta_p \overline{u}_\Lambda \text{ dans } \Omega,
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

à condition que Λ est suffisamment grand. Par conséquent, le principe de comparaison fort (voir le Lemme 1.3.3) conduit à la conclusion souhaitée. ■

3.2.1 Un problème auxiliaire.

Afin de montrer l'existence d'une seconde solution pour le problème $(\mathcal{P})$, nous ferons appel à la théorie du degré topologique. Cependant, les termes singuliers présents dans le système $(\mathcal{P})$ rendent les calculs relatifs au degré indéfinis. Afin surmonter cette difficulté, on perturbe le système $(\mathcal{P})$, en introduisant un paramètre $\varepsilon \in (0, 1)$. Cela donne lieu à un système régularisé de $(\mathcal{P})$, défini pour $\varepsilon > 0$, comme suit:

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(u+\varepsilon, v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v = g(u, v+\varepsilon) & \text{in } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

On applique la théorie du degré topologique pour le problème régularisé $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Ceci revient à trouver une solution positive pour $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, située à l'extèrieur de l'ensemble $\mathcal{O}_\Lambda$.

Le principal résultat concernant le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est énoncé comme suit:

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses* (H.1) *et* (H.2) *sont vérifiées. Alors, le problème* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ *possède une solution positive* $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, *telle que*

$$(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda, \textit{ pour tout } \varepsilon \in (0,1).$$

Remarque 3.2.1 *Il est important d'observer que le même raisonnement utilisé dans la preuve du Théorème 3.1.1 et de la Proposition 3.2.1 montre que* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ *admet une solution* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, *dans* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, *où les fonctions* $(\underline{u}, \underline{v})$ *et* $(\overline{u}, \overline{v})$ *sont des sous et sur solutions de* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ *et* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *vérifie*

$$u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \quad \textit{et} \quad v_\varepsilon(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x) \quad \textit{dans } \Omega,$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Le lemme suivant fournit une propriété de comparaison importante qui sera utilisée dans la preuve des résultats d'existence.

Lemme 3.2.1 *Soient* $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *les solutions des problèmes*

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u_1) = f(x) & \textit{dans } \Omega, \\ u_1 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \begin{cases} \mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u_2) = g(x) & \textit{dans } \Omega, \\ u_2 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u) = -\Delta_p u + \rho(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)} \left|u+\varepsilon\right|^{p-2}(u+\varepsilon), \tag{3.2.6}$$

avec $\rho, \varepsilon > 0$ *et* $f, g \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. *Si* $f \prec g$, *c'est-à-dire, pour chaque ensemble compact* $\mathcal{K} \subset \Omega$, *il existe une constante* $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ *telle que*

$$f(x) + \tau \leq g(x) \quad p.p. \ dans \quad \mathcal{K},$$

alors $u_1 \ll u_2$.

Preuve. La preuve est identique à celle de la Proposition 2.6 dans [6]. ■

3.2.2 Première estimation (le degré sur O_R)

Nous introduisons les fonctions

$$\chi_{\underline{u}}(s) = \begin{cases} s & \text{si } \underline{u} \leq s \\ \underline{u} & \text{si } s \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \chi_{\underline{v}}(s) = \begin{cases} s & \text{si } \underline{v} \leq s \\ \underline{v} & \text{si } s \leq \underline{v} \end{cases}, \tag{3.2.7}$$

et

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} \hat{u}_R & \text{si } \phi \geq \hat{u}_R \\ \phi & \text{si } \underline{u} \leq \phi \leq \hat{u}_R \\ \underline{u} & \text{si } \phi \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \tilde{\varphi} = \begin{cases} \hat{v}_R & \text{si } \varphi \geq \hat{v}_R \\ \phi & \text{si } \underline{v} \leq \varphi \leq \hat{v}_R \\ \underline{v} & \text{si } \varphi \leq \underline{v}, \end{cases} \tag{3.2.8}$$

où $(\underline{u}, \underline{v})$ et $(\hat{u}_R, \hat{v}_R)$ sont données, respectivement, par (3.1.10) et (3.2.2). Nous étudions le problème

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon,t}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q u = \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où les fonctions $\mathcal{F}_{\varepsilon,t}$ et $\mathcal{G}_{\varepsilon,t}$ sont définies par:

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tf(\chi_{\underline{u}}(u) + \varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}(1-t)\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1}, \tag{3.2.9}$$

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tg(\tilde{u}, \chi_{\underline{v}}(v) + \varepsilon) + \bar{\eta}(1-t)\chi_{\underline{v}}(v)^{q-1}, \tag{3.2.10}$$

pour $t \in [0,1]$ et $\varepsilon \in (0,1)$, avec $\bar{\eta} > 0$ une constante qui sera choisie plus tard.

Les résultats suivant sont cruciaux pour établir d'importantes estimations à priori pour le système $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$. Il est montré que les solutions du problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ ne peuvent exister à l'extérieur du rectangle formé par la sous solutions $(\underline{u}, \underline{v})$ et l'estimation à priori des solutions de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$.

Proposition 3.2.2 *Sous l'hypothèse* (H.1), *toute solution* $(u, v) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *de* $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ *satisfait*

$$\underline{u}(x) \ll u(x) \quad et \quad \underline{v}(x) \ll v(x) \quad dans\ \Omega, \tag{3.2.11}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $\varepsilon \in (0,1)$.

Preuve. Tout d'abord, nous transformons $(\mathcal{P}_{t,\varepsilon})$ en un problème possédant une propriété de monotonie qui sera déterminante dans la suite de la démonstration. En effet, nous introduisons le problème auxiliaire

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(u) = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(v) = \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(\tilde{v}) \text{ dans } \Omega \\ u, v = 0 \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(s) = (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s+\varepsilon)^{p-1} \\ \mathcal{L}_{\varepsilon,q}(s) = (\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-(q-1)}(s+\varepsilon)^{q-1}, \end{cases}$$

pour $s \geq 0$ et $\varepsilon \in (0,1)$. Ici, la constante $\rho > 0$ est supposée suffisamment grande de sorte que les inégalités suivantes soient satisfaites:

$$\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R(x)^{\beta_1} + \rho(p-1)\underline{u}(x)^{\alpha_1-(p-1)}s_1^{p-2} \geq 0 \tag{3.2.12}$$

et

$$\beta_2\hat{u}_R(x)^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2-1} + \rho(q-1)\underline{v}(x)^{\beta_2-(q-1)}s_2^{q-2} \geq 0, \tag{3.2.13}$$

uniformément pour $x \in \Omega$, et pour

$$\hat{u}_R \geq s_1 \geq \underline{u} \ \text{ et } \ \hat{v}_R \geq s_2 \geq \underline{v}.$$

Noter que les inégalités (3.2.12) et (3.2.13) sont vérifiées. En effet, de (3.1.10), (3.1.9), (3.2.2), (3.1.4), (2.1.9) et pour toute constante $\rho > 0$ grande, si $p > 2$, nous avons

$$\begin{aligned} &\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s_1+\varepsilon)^{p-2} \\ &\geq \alpha_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(\underline{u}+\varepsilon)^{p-2} \\ &\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \rho(p-1)\right] \\ &\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1} + \rho(p-1)\right] \geq 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

Si $p \leq 2$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1}+\rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s_1+\varepsilon)^{p-2}\\
&\geq \alpha_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1}+\rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(\hat{u}_R+\varepsilon)^{p-2}\\
&\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1}+\rho(p-1)(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}+\varepsilon)^{2-p}(\Lambda_R c_1\phi_{1,p}+\varepsilon)^{p-2}\right]\\
&\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1}+\rho(p-1)C_0(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{2-p}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{p-2}\right]\\
&= (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1}+\rho(p-1)C_0\right]\geq 0 \text{ dans } \Omega,
\end{aligned}$$

où

$$C_0=\min\{1,C^{-1}\frac{c_0}{2}\}^{2-p}\cdot\max\{1,\Lambda_R c_1\}^{p-2}.$$

Ici, du choix de la constante ρ, il est important d'observer que la croissance des fonctions

$$(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1}s_2^{\beta_1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(s_1) \quad\text{et}\quad s_1^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(s_2)$$

suit, respectivement, celle de s_1 et s_2, avec

$$\hat{u}_R\geq s_1\geq \underline{u} \quad\text{et}\quad \hat{v}_R\geq s_2\geq \underline{v},$$

pour tout $\varepsilon\in(0,1)$.

Maintenant, montrons que les inégalités dans (3.2.11) sont vérifiées, pour toute solution (u,v) de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ bornée dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\times\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, pour tout $t\in[0,1]$, et tout $\varepsilon\in(0,1)$. Nous ne montrons que la première inégalité dans (3.2.11) car la seconde peut être prouvée d'une manière similaire. Soient les fonctions $X_i:\Omega\to\mathbb{R}$ définies par

$$X_1(x)=C^{-(p-1)}h_1(x)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})$$

et

$$X_2(x)=\mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}).$$

En tenant compte de (H.1), (3.1.7), (3.2.7)-(3.2.9), nous avons

$$\begin{aligned}
&X_1(x)=-C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})\\
&< tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)\overline{\eta}\underline{u}^{p-1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})\\
&\leq tm_1(\chi_{\underline{u}}(u)+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1}+(1-t)\overline{\eta}\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})\\
&\leq tf(\chi_{\underline{u}}(u)+\varepsilon,\tilde{v})+(1-t)\overline{\eta}\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})\\
&= \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})=X_2(x) \quad\text{dans } \Omega_\delta
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$.

D'autre part, de (3.1.9), (3.0.1), (3.1.10), (3.1.15) et (2.1.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} X_1(x) &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &< M_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \quad \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

et

$$\begin{aligned} m_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} &= M_1(t+1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \\ &\le tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)m_1(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} \\ &\le tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)m_1(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\mu)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'M)^{\beta_1} \\ &\le tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\overline{\eta}(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\mu)^{p-1} \\ &\le tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\overline{\eta}\underline{u}^{p-1} \quad \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

à condition que $\overline{\eta} > 0$ soit trés grande, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. En rassemblant (3.2.15) et (3.2.16) ensemble, nous déduisons que

$$\begin{aligned} X_1(x) &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &< tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\overline{\eta}\underline{u}^{p-1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &\le tm_1(\chi_{\underline{u}}(u)+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + (1-t)\overline{\eta}\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\ &\le \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) = X_2(x) \quad \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. Par conséquent, de (3.2.14) et (3.2.17), pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Omega$, il existe une constante $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} X_1(x) + \tau &= -C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) + \tau \\ &\le \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) = X_2(x) \quad \textit{p.p.} \text{ dans } \mathcal{K}\cap\Omega_\delta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} X_1(x) + \tau &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) + \tau \\ &\le \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) = X_2(x) \quad \textit{p.p.} \text{ dans } \mathcal{K}\cap(\Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta), \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. Donc,

$$X_1 \prec X_2 \quad \text{et} \quad X_i \in L^\infty_{loc}(\Omega),$$

et ainsi, d'aprés le principe de comparaison fort donné par le Lemme 1.3.3, nous concluons que

$$u(x) \gg \underline{u}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Ceci achève la preuve. ∎

Proposition 3.2.3 *Supposons que* (H.1) *et* (H.2) *sont vérifiées. Alors, toute solution* (u,v) *de* $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ *appartient à* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\times\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *et satisfait*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R, \tag{3.2.18}$$

pour tout $t\in[0,1]$ *et tout* $\varepsilon\in(0,1)$.

Preuve. Par contradiction, supposons que, pour tout entier positif n, il existe $t_n\in[0,1]$ et une solution (u_n,v_n) de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t_n})$ tels que

$$t_n\to t\in[0,1] \text{ et } \|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\to\infty \text{ quand } n\to\infty.$$

D'aprés la Proposition 3.2.2, nous avons

$$\underline{u}(x)\ll u_n(x) \text{ et } \underline{v}(x)\ll v_n(x) \text{ dans } \Omega. \tag{3.2.19}$$

Donc, $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t_n})$ est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = t_n f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+\overline{\eta}(1-t)u_n^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v_n = t_n g(\tilde{u}_n,v_n+\varepsilon)+\overline{\eta}(1-t)v_n^{q-1} & \text{dans } \Omega, \\ u_n, v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons assumer que

$$\theta_n := \|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\to\infty \text{ quand } n\to\infty.$$

Notons

$$\mathcal{U}_n := \frac{1}{\theta_n}u_n\in C^1(\overline{\Omega}) \text{ avec } \|\mathcal{U}_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}=1, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}. \tag{3.2.20}$$

La première équation dans $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t_n})$ donne

$$-\Delta_p\mathcal{U}_n = \tfrac{1}{\theta_n^{p_1-1}}\left(t_n f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+(1-t_n)\overline{\eta}u_n^{p-1}\right), \tag{3.2.21}$$

où

$$\mathcal{U}_n(x)>0 \text{ p.p. dans } \Omega,$$

à cause de (3.2.19).

Si $u_n \leq \bar{L}$ dans Ω pour une certaine constante $\bar{L} > 0$, alors de (H.1), (3.2.8), (3.1.10), (3.2.19), (3.2.2), (3.1.4), (3.1.9) et (2.1.8), nous avons

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\theta_n^{p_1-1}}\left(t_n f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+(1-t_n)\overline{\eta}u_n^{p-1}\right)\\
&= \tfrac{t_n}{\theta_n^{p_1-1}} f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+(1-t_n)\overline{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1}\\
&\leq M_1 u_n^{\alpha_1}\tilde{v}_n^{\beta_1}+\overline{\eta}\|\mathcal{U}_n\|^{p-1}_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\\
&\leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1}\hat{v}_R^{\beta_1}+\overline{\eta} \leq C_1\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq \hat{C}_1 d(x)^{\alpha_1} \quad \text{dans } \Omega,
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

où la constante $\hat{C}_1 > 0$ est indépendante de n et ε. Sinon, de (H.2), nous avons

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\theta_n^{p_1-1}}\left(t_n f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+(1-t_n)\overline{\eta}u_n^{p-1}\right)\\
&= \tfrac{t_n}{\theta_n^{p-1}} f(\theta_n(\mathcal{U}_n+\tfrac{\varepsilon}{\theta_n}),\tilde{v}_n)+(1-t_n)\overline{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1}\\
&= t_n(\mathcal{U}_n+\tfrac{\varepsilon}{\theta_n})^{p-1}\tfrac{f(\theta_n(\mathcal{U}_n+\frac{\varepsilon}{\theta_n}),\tilde{v}_n)}{(\theta_n(\mathcal{U}_n+\frac{\varepsilon}{\theta_n}))^{p-1}}+(1-t_n)\overline{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1}\\
&\leq C_2(1+\mathcal{U}_n^{p-1}) \leq C_2(1+\|\mathcal{U}_n\|^{p-1}_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}) \leq \hat{C}_2 \quad \text{dans } \Omega,
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

avec une constante $\hat{C}_2 > 0$ indépendante de n et ε. Donc, du Théorème 1.3.2 (resp. Théorème 1.3.1) dans le cas de (3.2.22) (resp. (3.2.23)), nous déduisons que $\mathcal{U}_n$ est bornée dans $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ avec $\beta \in (0,1)$. L'injection compacte

$$\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

implique

$$\mathcal{U}_n \to \mathcal{U} \quad \text{dans } \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}). \tag{3.2.24}$$

En utilisant (3.2.21), (3.2.24), (H.2) et (3.2.19), nous obtenons

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathcal{U} = (tJ_1+(1-t)\overline{\eta})\mathcal{U}^{p-1} & \text{dans } \Omega \\ \mathcal{U} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.25}$$

avec

$$\mathcal{U} \geq 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Puisque

$$tJ_1+(1-t)\overline{\eta} > \lambda_{1,p_1},$$

alors la fonction propre correspondante $\mathcal{U}$ doit changer de signe et donc, nous avons forcément que $\mathcal{U} = 0$. Ainsi, de (3.2.24),

$$\mathcal{U}_n \to 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),$$

ce qui contredit (3.2.20).

Par conséquent, en augmentant la valeur de la constante $R > 0$ si nécéssaire, toute solution $(u, v) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ satisfait (3.2.18), pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. ∎

Proposition 3.2.4 *Sous la condition (3.0.1), le problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ n'a pas de solutions pour $t = 0$.*

Preuve. En raisonnant par contradiction, supposons que $(\mathring{u}, \mathring{v}) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est une solution non-nulle de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ avec

$$(\mathring{u}, \mathring{v}) \in \mathcal{O}_R \quad \text{et } t = 0, \tag{3.2.26}$$

qui, dû à (3.2.7) et (3.2.11), vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathring{u} = \bar{\eta} \mathring{u}^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q \mathring{v} = \bar{\eta} \mathring{v}^{q-1} & \text{dans } \Omega, \\ \mathring{u}, \mathring{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

De (3.1.9) et (3.1.10), nous avons

$$\underline{u}(x) = C^{-1} z_1(x) \geq C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p}(x) \text{ dans } \Omega.$$

Dans ce qui suit, posons

$$u_1(x) = C^{-1} \frac{c_0}{2} \phi_{1,p}(x) \leq \underline{u}(x) \quad \text{dans } \Omega,$$

et

$$\lambda_\delta = \lambda_{1,p} + \delta \quad \text{pour } \delta > 0.$$

Soit $u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_2 = \lambda_\delta u_1^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour $\delta > 0$ petit et $\bar{\eta}$ grand, nous avons

$$-\Delta_p u_2 = \lambda_\delta u_1^{p-1} \leq \bar{\eta} \mathring{u}^{p-1} = -\Delta_p \mathring{u} \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$-\Delta_p u_1 = \lambda_{1,p} u_1^{p-1} \leq \lambda_\delta u_1^{p-1} = -\Delta_p u_2 \text{ dans } \Omega.$$

Du le principe de comparaison faible donné par le Lemme 1.3.1, nous obtenons

$$u_1(x) \leq u_2(x) \leq \mathring{u}(x) \text{ dans } \Omega.$$

Maintenant, en considèrant les solutions du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda_\delta u_{n-1}^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

nous construisons une suite croissante $\{u_n\}_n$ telle que

$$u_1(x) \leq u_{n-1}(x) \leq u_n(x) \leq \mathring{u}(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En passant à la limite, nous obtenons une solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qui vérifie le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_\delta u^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui est impossible pour $\delta > 0$ suffisamment petit du fait que la première valeur propre du p-Laplacien est isolée. Par conséquent, le problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ n'a pas de solutions pour $t = 0$.

■

On définit l'homotopie $\mathcal{H}_\varepsilon$ dans $[0,1] \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ par

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t,u,v) = I(u,v) - \begin{pmatrix} (-\Delta_p)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta_q)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \\ \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \end{pmatrix}.$$

Comme les fonctions $\mathcal{F}_{\varepsilon,t}$ et $\mathcal{G}_{\varepsilon,t}$ sont dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$, $\mathcal{H}_\varepsilon$ est bien définie. En plus,

$$\mathcal{H}_\varepsilon : [0,1] \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

est complètement continue pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. Cela est dû à la compacité des opérateurs

$$(-\Delta_p)^{-1}, (-\Delta_q)^{-1} : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

Donc, $(u,v) \in \mathcal{O}_R$ est une solution pour $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ si, et seulement si,

$$(u,v) \in \mathcal{O}_R \text{ et } \mathcal{H}_\varepsilon(1,u,v) = 0.$$

Sur la base des Propositions 3.2.2 et 3.2.3, il est clair que les solutions de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ sont localisées dans $\mathcal{O}_R$. En plus, du fait que le problème $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ n'a pas de solutions pour $t = 0$ (voir Proposition 3.2.4), il s'ensuit que

$$\deg\left(\mathcal{H}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_R, 0\right) = 0, \quad \text{pour tout } \varepsilon \in (0,1).$$

Par conséquent, d'après la propriètè d'invariance par homotopie, on a

$$\deg\left(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_R, 0\right) = 0, \quad \text{pour tout } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.2.27}$$

3.2.3 Seconde estimation (le degré sur O_Λ)

Nous montrons que le degré d'un opérateur associé au système $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est égal à 1 sur l'ensemble $\mathcal{O}_\Lambda$. A cet effet, nous modifions le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ de sorte que les solutions ne peuvent pas exister à l'extérieur du rectangle formé par $(\underline{u},\underline{v})$ et $(\overline{u}_\Lambda, \overline{v}_\Lambda)$.

Posons

$$\tilde{u} = \begin{cases} \overline{u}_\Lambda \text{ si } u \geq \overline{u}_\Lambda \\ u \text{ si } \underline{u} \leq u \leq \overline{u}_\Lambda \\ \underline{u} \text{ si } u \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \tilde{v} = \begin{cases} \overline{v}_\Lambda \text{ si } v \geq \overline{v}_\Lambda \\ v \text{ si } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}_\Lambda \\ \underline{v} \text{ si } v \leq \underline{v}, \end{cases} \tag{3.2.28}$$

et définissons le problème tronqué

$$(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$\overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tf(\tilde{u}+\varepsilon, \tilde{v}) + (1-t)\overline{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1}$$

et

$$\overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tg(\tilde{u}, \tilde{v}+\varepsilon) + (1-t)\overline{\eta}(\phi_{1,q}+\varepsilon)^{\beta_2},$$

pour $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1)$ et une constante $\overline{\eta} > 0$.

Nous énonçons le résultat suivant concernant le système $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$.

Proposition 3.2.5 *Sous l'hypothèse* (H.1), *toute solution* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *de* $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$ *est bornée dans* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *avec*

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R,$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $\varepsilon \in (0,1)$. *De plus, on a*

$$\underline{u}(x) \ll u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \text{ et } \underline{v}(x) \ll v_\varepsilon(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.2.29}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $\varepsilon \in (0,1)$.

Preuve. De (H.1), (3.2.28), (3.1.10), (3.1.9), (3.2.2) et (3.1.4), nous avons

$$\overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \leq f(\tilde{u}+\varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq C_1 \phi_{1,p}^{\alpha_1} \text{ dans } \Omega$$

et

$$\overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \leq g(\tilde{u}+\varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}\phi_{1,q}^{\beta_2} \leq M_2 \overline{u}_\Lambda^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} + \bar{\eta}\phi_{1,q}^{\beta_2} \leq C_2 \phi_{1,q}^{\beta_2} \text{ dans } \Omega,$$

où C_1 $C_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de ε. Donc, par le Théorème 1.3.2, nous dérivons que les solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ de $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$ sont bornées dans $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Montrons (3.2.29). Nous ne montrons que la première partie des inégalités dans (3.2.29) car la seconde partie peut être justifiée de la même façon.

Introduisons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(u) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,q}(v) = \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,q}(\tilde{v}) \text{ dans } \Omega \\ u, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1)$ et $\bar{\eta} > 0$. La constante $\rho > 0$ est choisie assez grande de sorte que les inégalités suivantes soient satisfaites:

$$\alpha_1 (s_1+\varepsilon)^{\alpha_1 - 1} s_2^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s+\varepsilon)^{p-2} \geq 0,$$

$$\beta_2 s_1^{\alpha_2} (s_2+\varepsilon)^{\beta_2 - 1} + \rho(q-1)(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-(q-1)}(s+\varepsilon)^{q-2} \geq 0,$$

uniformément pour $x \in \Omega$, pour tout $(s_1, s_2) \in [\underline{u}, \overline{u}_\Lambda] \times [\underline{v}, \overline{v}_\Lambda]$, et tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Définissons les fonctions $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$X_1(x) = C^{-(p-1)} h_1(x) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})$$

et

$$X_2(x) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}).$$

De (2.1.9) et (3.1.9), pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, et tout $t \in [0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(t+1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'M)^{\beta_1} \\
&\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\overline{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} \text{ dans } \Omega,
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

pour $\overline{\eta} > 0$ suffisamment grand. Alors, en suivant un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve de (3.2.11) dans la Proposition 3.2.2, nous obtenons

$$X_1 \prec X_2 \;\text{ avec }\; X_1, X_2 \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

Donc, le principe de comparaison fort (voir Lemma 1.3.3) implique

$$u(x) \gg \underline{u}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Il reste à montrer que

$$u(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

A cet effet, soient les functions $\bar{X}_i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$\bar{X}_1(x) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})$$

et

$$\bar{X}_2(x) = \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda).$$

De (3.1.4), (3.1.11) et du choix de $\rho > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&tM_1(\tilde{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + (1-t)\overline{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\
&\leq M_1(\overline{u}_\Lambda+\varepsilon)^{\alpha_1}\overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \overline{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
&< M_1\overline{u}_\Lambda^{\alpha_1}\overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \overline{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
&= M_1\Lambda^{\alpha_1+\beta_1}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\beta_1} + \overline{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
&\leq M_1\Lambda^{\alpha_1+\beta_1}(c_0\phi_{1,p})^{\alpha_1}(c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \overline{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
&\leq \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \text{ dans } \Omega,
\end{aligned}$$

pour $\Lambda > 0$ suffisamment grande. Donc, pour tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset \Omega$, il existe une constante $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\bar{X}_1(x) + \tau = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) + \tau \\
&\leq \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) = \bar{X}_2(x) \quad \text{p.p. dans } \mathcal{K} \cap \Omega,
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. C'est-à-dire,

$$\bar{X}_1 \prec \bar{X}_2, \quad \text{avec} \quad \bar{X}_i \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

Le principe de comparaison fort, donné par le Lemma 1.3.3, implique

$$u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. Ceci achève la preuve. ■

Définissons l'homotopie $\mathcal{N}_\varepsilon$ sur $[0,1] \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ par

$$\mathcal{N}_\varepsilon(t,u,v) = I(u,v) - \begin{pmatrix} (-\Delta_p)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta_q)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \\ \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.2.31}$$

Il est clair que $\mathcal{N}_\varepsilon$ est bien définie et qu'elle est complètement continue pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et tout $t \in [0,1]$. En plus, $(u,v) \in \mathcal{O}_\Lambda$ est une solution du système $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ si, et seulement si,

$$(u,v) \in \mathcal{O}_\Lambda \ \text{ et } \ \mathcal{N}_\varepsilon(1,u,v) = 0, \ \text{pour tout } \varepsilon \in (0,1).$$

Compte tenu de la Proposition 3.2.5 et d'aprés la définition des fonctions $\overline{u}_\Lambda$ et $\overline{v}_\Lambda$, il s'ensuit que toutes solutions de $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$ sont également des solutions de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. De plus, ces solutions sont localisées dans $\mathcal{O}_\Lambda$. Par ailleurs, pour $t = 0$ dans (3.2.31), le Théorème de Minty-Browder, combiné à l'inégalité de Hardy-Sobolev et au Théorème 1.3.2, assurent que les problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \bar{\eta}(\phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q v = \bar{\eta}(\phi_{1,q} + \varepsilon)^{\beta_2} & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

possèdent, respectivement, une solution unique $\mathring{u}_\varepsilon$ et $\mathring{v}_\varepsilon$ dans $\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, pour $\beta \in (0,1)$ et pour $\varepsilon \in (0,1)$. Donc, la propriété d'invariance par homotopie du degré implique

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_\Lambda, 0) &= \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_\Lambda, 0) \\ &= \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot), B_R(0)), 0) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Puisque

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot) = \mathcal{N}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot) \text{ dans } \mathcal{O}_\Lambda,$$

il s'ensuit que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_\Lambda, 0) = 1, \text{ pour tout } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.2.33}$$

3.2.4 Troisième estimation (le degré sur $O_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda$)

Preuve du Théorème 3.2.1. Dans ce qui suit, on suppose que

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \partial\mathcal{O}_\Lambda.$$

Sinon, il existe une solution $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \partial\mathcal{O}_\Lambda$, qui est différente de la solution (u,v) obtenue dans le Théorème 3.1.1, car $(u,v) \in \mathcal{O}_\Lambda$ et que $(u,v) \notin \partial\mathcal{O}_\Lambda$, du fait que $\mathcal{O}_\Lambda$ est un ensemble ouvert.

D'aprés (3.2.27) et (3.2.33), on déduit de la propriété d'excision du degré que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda, 0) = -1.$$

et donc, le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ admet une solution $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que

$$(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda. \tag{3.2.34}$$

Par conséquent, d'aprés le Théorème 1.3.2, on conclut que $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$. ■

3.2.5 Preuve du résultat principal

Preuve du Théorème 3.0.3. On pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour tout entier positive $n \geq 1$. De (3.2.34) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe une suite de solutions $(\breve{u}_n, \breve{v}_n) := (\breve{u}_{\frac{1}{n}}, \breve{v}_{\frac{1}{n}})$ bornée dans

$\mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, avec $\beta \in (0,1)$, telle que

$$\begin{cases} -\Delta_p \breve{u}_n = f(\breve{u}_n + \frac{1}{n}, \breve{v}_n) \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta_q \breve{v}_n = g(\breve{u}_n, \breve{v}_n + \frac{1}{n}) \text{ dans } \Omega, \\ \breve{u}_n = \breve{v}_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2.35}$$

et

$$(\breve{u}_n, \breve{v}_n) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.36}$$

Sur la base du Théorème d'Arzèlà-Ascoli, il existe $(\breve{u}, \breve{v}) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, solution de $(\mathcal{P})$, telle que

$$(\breve{u}_n, \breve{v}_n) \to (\breve{u}, \breve{v}) \text{ dans } \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

et

$$(\breve{u}, \breve{v}) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda \tag{3.2.37}$$

Finalement, compte tenu de (3.2.37) et de la Proposition 3.2.1, on conclut que $(\breve{u}, \breve{v})$ est une seconde solution positive du problème $(\mathcal{P})$. Ceci achève la preuve du Théorème. ∎

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié certaines classes de systèmes elliptiques quasi-linéaires, gouvernées par les opérateurs p; q-Laplacien et présentant des singularités à l'origine. Plus précisément, nous avons étudié l'existence et l'absence de solutions pour une classe de systèmes elliptiques quasi-linéaires singuliers, où trois situations relatives à la structure du problème sont considérées : sous-homogènes, homogènes et super-homogène. Les résultats d'existence sont obtenus en combinant la méthode des sous et sur solutions avec un argument de perturbation. Par ailleurs, en exploitant les propriétés spectrales de l'opérateur p-Laplacien, un résultat de non-existence de solutions est fourni dans le cas homogène.

D'autre part, nous avons présenté des résultats d'existence et de multiplicité de solutions pour une autre classe de systèmes quasi-linéaires singuliers. Deux solutions y sont obtenues : la première est localisée dans un rectangle formé par des sous et sur solutions. La deuxième solution est montrée en utilisant le degré topologique de Leray-Schauder, à travers des estimations a priori sur les solutions ainsi que l'introduction de fonctions de troncature. La question relative à la régularité des solutions est également abordée.

Actuellement, le travail eectué soulève un certain nombre de questions qui méritent d'être approfondies. Par exemple, il serait judicieux d'étendre et de compléter les résultats obtenus dans le chapitre 2 en précisant les conditions sous lesquelles il y a unicité et multiplicité de solutions pour le problème considéré. Il serait aussi intéressant d'étudier l'existence et la multiplicité de solutions pour des systèmes elliptiques singuliers faisant intervenir l'opérateur p(x)-Laplacien.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York / San Francisco / London, 1975.

[2] R.P. Agarwal & D. O'Regan, *Existence theory for single and multiple solutions to singular positive boundary value problems,* J. Diff. Equat. 175 (2001), 393-414.

[3] C.O. Alves & .FJ.S.A. Corrêa, *On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators,* Appl Math Comput. 185 (2007), 727-736.

[4] C. O. Alves, F. J. S. A. Corrêa & J.V.A. Gonçalves, *Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems,* Adv. Nonlinear Stud. 5 (2005), 265-278.

[5] C. O. Alves & A. Moussaoui, *Existence of solutions for a class of singular elliptic systems with convection term*, Asymptotic Anal. 90 (2014), 237-248.

[6] D. Arcoya & D. Ruiz, *The Ambrosetti-Prodi problem for the p-Laplace operator*, Comm. Partial Diff. Eqts. 31 (2006), 849-865.

[7] G. Astarita & G. Marrucci, *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*, McGraw-Hill, 1974.

[8] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle theorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[9] P. Candito, A. Marano & A. Moussaoui, *Nodal solutions to a Neumann problem for a class of* (p_1, p_2)*-Laplacian systems*, 2019, Preprint.

[10] S. Carl, V. K. Le & D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities.* Comparaison principles and applications, Springer, New York, 2007.

[11] P. Clément, J. Fleckinger, E. Mitidieri & F. de Thelin, *Existence of Positive Solutions for a Nonvariational Quasilinear Elliptic System*, J. Diff. Eqts. 166 (2000), 455 477.

[12] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz & L. Tartar, *On a Dirichlet problem with singular nonlinearity,* Comm. Partial Diff. Eqts. 2 (1977), 193-222.

[13] M. Cuesta & P. Takac, *Nonlinear eigenvalue problems for degenerate elliptic systems.* Diff. Integral Eqts. 23 (2010), 1117-1138.

[14] M. del Pino, *A priori estimates applications to existence-nonexistence for a semilinear elliptic system,* Ind. Univ. Math. J. 43 (1994), 77-129.

[15] I. Diaz, J. M. Morel & L. Oswald, *An elliptic equation with singular nonlinearity,* Comm. Partial Diff. Eqts. 12 (1987), 1333-1344.

[16] W. Fulks & J. S. Maybee, *A singular non-linear equation,* Osaka Math. J. 12 (1960), 1-19.

[17] M. Ghergu, *Lane-Emden systems with negative exponents*, J. Funct. Anal. 258 (2010), 3295–3318.

[18] J. Giacomoni, J. Hernandez & A. Moussaoui, *Quasilinear and singular systems: the cooperative case*, Contemporary Math. 540 (2011), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 79-94.

[19] J. Giacomoni, I. Schindler & P. Takac, *Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation*, A. Sc. N. Sup. Pisa (5) 6 (2007), 117-158.

[20] M. Ghergu & V. Radulescu, *On a class of Gierer-Meinhardt systems arising in morphogenesis*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, *Ser.I* 344 (2007), 163-168.

[21] J. Giacomoni, J. Hernandez & P. Sauvy, *Quasilinear and singular elliptic systems*, Advances Nonl. Anal. 2 (2013), 1-41.

[22] A. Gierer & H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation,* Kybernetik 12 (1972), 30-39.

[23] D. D. Hai, *On a class of singular p-Laplacian boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 383 (2011), 619-626.

[24] J. Hernandez, F.J. Mancebo & J.M.Vega, *Positive solutions for singular semilinear elliptic systems*, Adv. Diff. Eqts. 13 (2008), 857-880.

[25] I. Holopainen, *Quasiregular mappings and the p-Laplace operator. Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces*, Contemp. Math. 338, Amer. Math. Soc. (2003), 219-239.

[26] B. Khodja & A. Moussaoui, *Positive solutions for infinite semipositone/positone quasilinear elliptic systems with singular and superlinear terms*, Diff. Eqts. App. 8(4) (2016), 535-546.

[27] E. H. Kim, *Singular Gierer-Meinhardt systems of elliptic boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 308 (2005), 1-10.

[28] A. C. Lazer & P. J. Mckenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (111), 1991.

[29] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonl. Anal. 12 (1988), 1203–1219.

[30] C. D. Luning & W. L. Perry, *Positive solutions of negative exponent generalized Emden-Fowler boundary value problem,* SIAM J. Math. Anal. 12 (1981), 874-879.

[31] D. Motreanu & A. Moussaoui, *A quasilinear singular elliptic system without cooperative structure,* Act. Math. Sci. 34 B (3) (2014), 905-916.

[32] D. Motreanu & A. Moussaoui, *An existence result for a class of quasilinear singular competitive elliptic systems*, Applied Math. Letters 38 (2014), 33–37.

[33] D. Motreanu & A. Moussaoui, *Existence and boundedness of solutions for a singular cooperative quasilinear elliptic system*, Complex Var. Elliptic Eqts. 59 (2014), 285-296.

[34] A. Moussaoui, B. Khodja & S. Tas, *A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations in* R^N, Nonl. Anal. 71 (2009), 708-716.

[35] C. V. Pao, Nonlinear parabolic and elliptic equations, Plenum Press, New York 1992.

[36] C. A. Stuart, *Existence and approximations of solutions of nonlinear elliptic equations,* Math. Z. 147 (1976), 53-63.

[37] S. Taliaferro, *A nonlinear singular boundary value problem,* Nonl. Anal. Theory Methods Appl. (1979) 897-904.

[38] K. Uhlenbeck, *Regularity for a class of non-linear elliptic systems.* Acta. Math. 138 (1977) 219-240.

[39] J. L. Vazquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations.* Appl. Math. Optim. 12 (1984),191-202.

[40] M. Wu & Z. Yang, *Existence of boundary blow-up solutions for a class of quasilinear elliptic systems with critical case.* Appl. Math. Comput. 198 (2008), 574-581.

[41] Z. Zhang, *On a Dirichlet with a singular nonlinearity,* J. Math. Anal. Appl. 194 (1995), 103-113.

[42] Z. Zhang & J. Yu, *On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term,* SIAM J. Math. Anal. 32 (2000), 916-927.

Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2020, 13(2), 1–9

УДК

Singular Quasilinear Elliptic Systems with (super-) Homogeneous Condition

Hana Didi*
Brahim Khodja†
Badji-Mokhtar Annaba University
23000, Annaba
Algeria
Abdelkrim Moussaoui‡
A. Mira Bejaia University
Targa Ouzemour, 06000, Bejaia
Algeria

Received 02.10.2019, received in revised form 09.12.2019, accepted 16.01.2019

In this paper we establish existence, nonexistence and regularity of positive solutions for a class of singular quasilinear elliptic systems subject to (super-) homogeneous condition. The approach is based on sub-supersolution methods for systems of quasilinear singular equations combined with perturbation arguments involving singular terms.

Keywords: singular system, p-Laplacian, sub-supersolution, regularity.
DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-2-1-9.

Introduction

We consider the following system of quasilinear and singular elliptic equations:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = \lambda u_1^{\alpha_1} u_2^{\beta_1} + \delta h_1(x) \text{ in } \Omega \\ -\Delta_{p_2} u_2 = \lambda u_1^{\alpha_2} u_2^{\beta_2} + \delta h_2(x) \text{ in } \Omega \\ u_1, u_2 > 0 \text{ in } \Omega \\ u_1, u_2 = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$ having a smooth boundary $\partial\Omega$, $\lambda > 0$, $\delta \geqslant 0$ are parameters, and $h_i \in L^\infty(\Omega)$ is a nonnegative function. Here Δ_{p_i} stands for the p_i-Laplacian differential operator with $1 < p_i \leqslant N$. A solution of $(\mathcal{P})$ is understood in the weak sense, that is, a pair $(u_1, u_2) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$, which are positive a.e. in Ω and satisfying

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^{p_i-2} \nabla u_i \nabla \varphi_i \, dx = \int_\Omega (\lambda u_1^{\alpha_i} u_2^{\beta_i} + \delta h_i) \varphi_i \, dx, \text{ for all } \varphi_i \in W_0^{1,p_i}(\Omega),\ i = 1, 2.$$

We consider the system $(\mathcal{P})$ in a singular case assuming that

$$0 < \alpha_2 < p_1^* - 1, \ \ 0 < \beta_1 < p_2^* - 1 \ \text{ and } \ -1 < \alpha_1,\, \beta_2 < 0, \tag{1}$$

*hana.di@hotmail.fr
†brahim.khodja@univ-annaba.org
‡abdelkrim.moussaoui@univ-bejaia.dz

where $p_i^* = \dfrac{Np_i}{N - p_i}$. This assumption makes system $(\mathcal{P})$ be cooperative, that is, for u_1(resp. u_2) fixed the right term in the first (resp. second) equation of $(\mathcal{P})$ is increasing in u_2 (resp. u_1).

Recently, singular cooperative system $(\mathcal{P})$ with $\delta = 0$ was mainly studied in [8, 9, 20]. In [20] existence and boundedness theorems for $(\mathcal{P})$ was established by using sub-supersolution method for systems combined with perturbation techniques. In [8] one gets existence, uniqueness, and regularity of a positive solution on the basis of an iterative scheme constructed through a sub-supersolution pair. In [9] an existence theorem involving sub-supersolution was obtained through a fixed point argument in a sub-supersolution setting. The semilinear case in $(\mathcal{P})$ (i.e. $p_i = 2$) was considered in [7, 13, 21] where the linearity of the principal part is essentially used. In this context, the singular system $(\mathcal{P})$ can be viewed as the elliptic counter-part of a class of Gierer-Meinhardt systems that models some biochemical processes (see, e.g. [21]). It can be also given an astrophysical meaning since it generalizes to the system the well-known Lane-Emden equation, where all exponents are negative (see [7]). For the one dimentional case ($N = 1$) we quote [15] and the references therein. The complementary situation for the system $(\mathcal{P})$ with respect to (1) is the so-called competitive system, which has recently attracted much interest. Relevant contributions regarding this topic can be found in [9, 18, 19]. For the regular case in $(\mathcal{P})$, that is when all the exponents are positive, we refer to [6, 22], while for quasilinear systems with singular weights we cite [2, 4] and their references.

It is worth pointing out that the aforementioned works have examined the subhomogeneous case $\Theta > 0$ of singular problem $(\mathcal{P})$ where

$$\Theta = (p_1 - 1 - \alpha_1)(p_2 - 1 - \beta_2) - \beta_1\alpha_2. \tag{2}$$

The constant Θ is related to system stability $(\mathcal{P})$ that behaves in a drastically different way, depending on the sign of Θ. For instance, for $\Theta < 0$ system $(\mathcal{P})$ is not stable in the sense that possible solutions cannot be obtained by iterative methods (see [5]).

Unlike the subhomogeneous case $\Theta > 0$ studied in the above references, the novelty of this paper is to establish the existence, regularity and nonexistence of (positive) solutions for singular problem $(\mathcal{P})$ by processing the two cases: 'homogeneous' when $\Theta = 0$ and 'superhomogeneous' if $\Theta < 0$. It should be noted that throughout this paper, $\Theta < 0$ (resp. $= 0$) means that $p_i - 1 - \alpha_i - \beta_i < 0$ (resp. $= 0$).

The existence result for problem $(\mathcal{P})$ is stated as follows.

Theorem 1. *Assume (1), $\Theta < 0$ (resp. $\Theta = 0$) and suppose that*

$$\inf_{\Omega} h_1(x), \ \ \inf_{\Omega} h_2(x) > 0. \tag{3}$$

Then, there is $\delta_0 > 0$ (resp. $\delta_0, \lambda_0 > 0$) such that, for all $\delta \in (0, \delta_0)$, problem $(\mathcal{P})$ possesses a (positive) solution (u_1, u_2) in $C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, for certain $\beta \in (0, 1)$, verifying

$$u_i \geqslant cd(x) \quad in\ \Omega,$$

for some constant $c > 0$ and for all $\lambda > 0$ (resp. $\lambda \in (0, \lambda_0)$). Moreover, if $\Theta = \delta = 0$ and

$$\beta_1 = \frac{p_2}{p_1}(p_1 - 1 - \alpha_1) \quad or \quad \alpha_2 = \frac{p_1}{p_2}(p_2 - 1 - \beta_2), \tag{4}$$

then, there exists $\lambda_* > 0$ such that problem $(\mathcal{P})$ has no solution for every $\lambda \in (0, \lambda_*)$.

The main technical difficulty consists in the presence of singular terms in system $(\mathcal{P})$ with (1), expressed through (super-) homogeneous condition. Our approach is chiefly based on sub-supersolution method in its version for systems [3, section 5.5]. However, this method cannot be directly implemented due to the presence of singular terms in $(\mathcal{P})$ under assumption (1). So, we first disturb system $(\mathcal{P})$ by introducing a parameter $\varepsilon > 0$. This gives rise to a regularized system for $(\mathcal{P})$ depending on ε whose study is relevant for our initial problem. By applying the sub-supersolution method, we show that the regularized system has a positive solution $(u_{1,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon})$ in $C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ for some $\beta \in (0,1)$. It is worth noting that the choice of suitable functions with an adjustment of adequate constants is crucial in order to construct the sub-supersolution pair as well as to process the both cases $\Theta < 0$ and $\Theta = 0$. The (positive) solution (u_1, u_2) in $(W_0^{1,p_1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,p_2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ of $(\mathcal{P})$ is obtained by passing to the limit as $\varepsilon \to 0$. This is based on a priori estimates, Fatou's Lemma and S_+-property of the negative p_i-Laplacian. The positivity of the solution (u_1, u_2) is achieved through assumption (3) while $C^{1,\beta}$-regularity is derived from the regularity result in [11].

The rest of the paper is organized as follows. Section 1 is devoted to the existence of solutions for the regularized system. Section 2 established the proof of the main result.

1. The regularized system

Given $1 < p < +\infty$, the space $L^p(\Omega)$ and $W_0^{1,p}(\Omega)$ are endowed with the usual norms $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p}$ and $\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p}$, respectively. We will also use the space $C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ for a suitable $\beta \in (0,1)$.

In what follows, we denote by ϕ_{1,p_i} the positive eigenfunction associated with the principal eigenvalue λ_{1,p_i}, characterized by the minimum of Rayleigh quotient

$$\lambda_{1,p_i} = \inf_{u_i \in W_0^{1,p_i}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u_i\|_{p_i}^{p_i}}{\|u_i\|_{p_i}^{p_i}}. \tag{5}$$

For a later use recall there exist constants $l_i, \hat{l}_i > 0$ such that

$$\hat{l}_1 \phi_{1,p_1}(x) \geqslant \phi_{1,p_2}(x) \geqslant \hat{l}_2 \phi_{1,p_1}(x) \text{ and } l_1 d(x) \geqslant \phi_{1,p_i}(x) \geqslant l_2 d(x) \text{ for all } x \in \Omega, \tag{6}$$

where $d(x) := dist(x, \partial\Omega)$ (see, e.g., [10]).

Let $\tilde{\Omega}$ be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with a smooth boundary $\partial\tilde{\Omega}$ such that $\overline{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. Denote $\tilde{d}(x) := d(x, \partial\tilde{\Omega})$. By the definition of $\tilde{\Omega}$ there exists a constant $\rho > 0$ sufficiently small such that

$$\tilde{d}(x) > \rho \text{ in } \overline{\Omega}. \tag{7}$$

Define $w_i \in C^1(\overline{\tilde{\Omega}})$ the unique solution of the torsion problem

$$-\Delta_{p_i} w_i = 1 \text{ in } \tilde{\Omega}, \ w_i = 0 \text{ on } \partial\tilde{\Omega}, \tag{8}$$

satisfying the estimates

$$w_i(x) \geqslant c_0 \tilde{d}(x) \text{ in } \tilde{\Omega}, \tag{9}$$

for certain constant $c_0 \in (0,1)$ (see [12, Lemma 2.1]).

For a real constant $C > 1$, set

$$(\underline{u}_{i,\varepsilon}, \overline{u}_i) = (c_\varepsilon \phi_{1,p_i}, C^{-1} w_i), \ i = 1, 2, \tag{10}$$

where $c_\varepsilon > 0$ is a constant depending on $\varepsilon > 0$ such that

$$0 < c_\varepsilon < c_0 l_1^{-1} C^{-1}. \tag{11}$$

Then, by (10), (6) and (8), it is readily seen that

$$\begin{aligned}&\overline{u}_i(x) = C^{-1}w_i(x) \geqslant C^{-1}c_0\tilde{d}(x) \geqslant C^{-1}c_0 d(x) \geqslant \\ &\geqslant l_1^{-1}C^{-1}c_0\phi_{1,p_i}(x) \geqslant c_\varepsilon\phi_{1,p_i}(x) = \underline{u}_{i,\varepsilon}(x) \text{ in } \overline{\Omega}, \text{ for } i=1,2.\end{aligned}$$

For every $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, with $\varepsilon_0 < 1$, let introduce the auxiliary problem

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta_{p_1}u_1 = \lambda(u_1+\varepsilon)^{\alpha_1}(u_2+\varepsilon)^{\beta_1} + \delta h_1(x) & \text{in } \Omega \\ -\Delta_{p2}u_2 = \lambda(u_1+\varepsilon)^{\alpha_2}(u_2+\varepsilon)^{\beta_2} + \delta h_2(x) & \text{in } \Omega \\ u_1, u_2 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases},$$

which provides approximate solutions for the initial problem $(\mathcal{P})$.

Lemma 1. *Assume (1) and $h_1, h_2 \neq 0$ in Ω. Then, if $\Theta < 0$ (resp. $\Theta = 0$), there is a constant $\delta_0 > 0$ (resp. $\delta_0, \lambda_0 > 0$) such that for all $\delta \in (0,\delta_0)$, $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$ in (10) is a supersolution of $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ for all $\lambda > 0$ (resp. $\lambda \in (0,\lambda_0)$) and all $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.*

Proof. Assume $\Theta < 0$ and set $\varepsilon_0 = C^{-1}$,

$$\delta_0 = \frac{1}{2}\min_{i=1,2}\left\{\frac{1}{C^{p_i-1}\left\|h_i\right\|_\infty}\right\}. \tag{12}$$

On account of (1), (7)–(10) and (12), for all $\delta \in (0,\delta_0)$ and $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, one derives

$$\begin{aligned}&(\overline{u}_1+\varepsilon)^{-\alpha_1}(\overline{u}_2+\varepsilon)^{-\beta_1}(-\Delta_{p_1}\overline{u}_1 - \delta h_1) \geqslant \overline{u}_1^{-\alpha_1}(\overline{u}_2+\varepsilon_0)^{-\beta_1}(-\Delta_{p_1}\overline{u}_1 - \delta\left\|h_1\right\|_\infty) \geqslant \\ &\geqslant C^{\alpha_1+\beta_1}(c_0\tilde{d}(x))^{-\alpha_1}(\left\|w_2\right\|_\infty+1)^{-\beta_1}(C^{-(p_1-1)} - \delta_0\left\|h_1\right\|_\infty) \geqslant \\ &\geqslant C^{\beta_1-(p_1-1-\alpha_1)}(c_0\rho)^{-\alpha_1}(\left\|w_2\right\|_\infty+1)^{-\beta_1}(1-\delta_0 C^{p_1-1}\left\|h_1\right\|_\infty) \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}C^{\beta_1-(p_1-1-\alpha_1)}(c_0\rho)^{-\alpha_1}(\left\|w_2\right\|_\infty+1)^{-\beta_1} \geqslant \lambda \text{ in } \overline{\Omega},\end{aligned}$$

and similarly

$$\begin{aligned}&(\overline{u}_1+\varepsilon)^{-\alpha_2}(\overline{u}_2+\varepsilon)^{-\beta_2}(-\Delta_{p_2}\overline{u}_2 - \delta h_2) \geqslant (\overline{u}_1+\varepsilon_0)^{-\alpha_2}\overline{u}_2^{-\beta_2}(-\Delta_{p_2}\overline{u}_2 - \delta\left\|h_2\right\|_\infty) \geqslant \\ &\geqslant C^{\alpha_2+\beta_2}(\left\|w_1\right\|_\infty+1)^{-\alpha_2}(c_0\tilde{d}(x))^{-\beta_2}(C^{-(p_2-1)} - \delta_0\left\|h_2\right\|_\infty) = \\ &= C^{\alpha_2-(p_2-1-\beta_2)}(\left\|w_1\right\|_\infty+1)^{-\alpha_2}(c_0\rho)^{-\beta_2}(1-\delta_0 C^{p_2-1}\left\|h_2\right\|_\infty) \geqslant \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}C^{\alpha_2-(p_2-1-\beta_2)}(\left\|w_1\right\|_\infty+1)^{-\alpha_2}(c_0\rho)^{-\beta_2} \geqslant \lambda \text{ in } \overline{\Omega},\end{aligned}$$

for all $\lambda > 0$, provided $C > 1$ is sufficiently large. This shows that $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$ is a supersolution pair for problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. If $\Theta = 0$, by repeating the argument above, the same conclusion can be drawn for $\lambda \in (0,\lambda_0)$ with a constant $\lambda_0 > 0$ that can be precisely estimated. This completes the proof. □

Lemma 2. *Assume (1) and $\Theta \leqslant 0$ hold. Then, $(\underline{u}_{1,\varepsilon}, \underline{u}_{2,\varepsilon})$ is a subsolution of $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ for all $\lambda, \delta > 0$ and every $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.*

Proof. Fix $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. From (10) and (1), we obtain

$$\begin{aligned}&(\underline{u}_{1,\varepsilon}+\varepsilon)^{-\alpha_1}(\underline{u}_{2,\varepsilon}+\varepsilon)^{-\beta_1}(-\Delta_{p_1}\underline{u}_{1,\varepsilon} - \delta h_1) \leqslant \\ &\leqslant c_\varepsilon^{p_1-1}(c_\varepsilon\phi_{1,p_1}+\varepsilon_0)^{-\alpha_1}(c_\varepsilon\phi_{1,p_2}+\varepsilon)^{-\beta_1}\lambda_{1,p_1}\phi_{1,p_1}^{p_1-1} \leqslant \\ &\leqslant c_\varepsilon^{p_1-1}(\phi_{1,p_1}+\varepsilon_0)^{-\alpha_1}(c_\varepsilon\phi_{1,p_2}+\varepsilon)^{-\beta_1}\lambda_{1,p_1}\phi_{1,p_1}^{p-1} \leqslant \\ &\leqslant c_\varepsilon^{p_1-1}\varepsilon^{-\beta_1}(\left\|\phi_{1,p_1}\right\|_\infty+1)^{-\alpha_1}\lambda_{1,p_1}\left\|\phi_{1,p_1}\right\|_\infty^{p_1-1} \leqslant \lambda \text{ in } \overline{\Omega}\end{aligned} \tag{13}$$

and similarly

$$\begin{aligned}
&(\underline{u}_{1,\varepsilon}+\varepsilon)^{-\alpha_2}(\underline{u}_{2,\varepsilon}+\varepsilon)^{-\beta_2}(-\Delta_{p_2}\underline{u}_{2,\varepsilon}-\delta h_2)\leqslant\\
&\leqslant(\underline{u}_{1,\varepsilon}+\varepsilon)^{-\alpha_2}(\underline{u}_{2,\varepsilon}+\varepsilon_0)^{-\beta_2}(\Delta_{p_2}\underline{u}_{2,\varepsilon})=\\
&=c_\varepsilon^{p_2-1}(c_\varepsilon\phi_{1,p_1}+\varepsilon)^{-\alpha_2}(\phi_{1,p_2}+\varepsilon_0)^{-\beta_2}\lambda_{1,p_2}\phi_{1,p_2}^{p_2-1}\leqslant\\
&\leqslant c_\varepsilon^{p_2-1}\varepsilon^{-\alpha_2}(\|\phi_{1,p_2}\|_\infty+\varepsilon_0)^{-\beta_2}\lambda_{1,p_2}\|\phi_{1,p_2}\|_\infty^{p_2-1}\leqslant\lambda\ \text{ in }\overline{\Omega},
\end{aligned}\tag{14}$$

provided $c_\varepsilon>0$ is sufficiently small. Gathering (13) and (14) together yields

$$-\Delta_{p_i}\underline{u}_{i,\varepsilon}\leqslant\lambda(\underline{u}_{1,\varepsilon}+\varepsilon)^{\alpha_i}(\underline{u}_{2,\varepsilon}+\varepsilon)^{\beta_i}+\delta h_i\ \text{ in }\overline{\Omega},$$

proving that $(\underline{u}_{1,\varepsilon},\underline{u}_{2,\varepsilon})$ in (10) is a subsolution pair for problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. □

We state the following result regarding the regularized system.

Theorem 2. *Assume (1) and $h_1,h_2\neq0$ in Ω. Then*

(a) *If $\Theta<0$ (resp. $\Theta=0$) there exist a constant $\delta_0>0$ (resp. $\delta_0,\lambda_0>0$) such that for all $\delta\in(0,\delta_0)$ system $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ has a (positive) solution $(u_{1,\varepsilon},u_{2,\varepsilon})\in C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})\times C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta\in(0,1)$, satisfying*

$$u_{i,\varepsilon}(x)\leqslant\overline{u}_i(x)\text{ in }\Omega,\tag{15}$$

for all $\lambda>0$ (resp. $\lambda\in(0,\lambda_0)$), and every $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

(b) *For $\Theta\leqslant0$ and under assumption (3), if $\delta>0$, there exists a constant $c_0>0$, independent of ε, such that all solutions $(u_{1,\varepsilon},u_{2,\varepsilon})$ of system $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ verify*

$$u_{i,\varepsilon}(x)\geqslant c_0d(x)\text{ for a.a. }x\in\Omega,\ \text{ for all }\varepsilon\in(0,\varepsilon_0).\tag{16}$$

Proof. On the basis of Lemmas 1 and 2 together with [3, section 5.5] there exists a solution $(u_{1,\varepsilon},u_{2,\varepsilon})$ of problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, for every $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Moreover, applying the regularity theory (see [16]), we infer that $(u_{1,\varepsilon},u_{2,\varepsilon})\in C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})\times C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ for a suitable $\beta\in(0,1)$. This proves (a).

Now, according to (3), let $\sigma>0$ be a constant such that $\inf_\Omega h_1(x)$, $\inf_\Omega h_2(x)>\sigma$. Define z_i the only positive solution of

$$-\Delta_{p_i}z_i=\delta\sigma\ \text{ in }\Omega,\ z_i=0\ \text{ on }\partial\Omega,$$

which is known to satisfy $z_i(x)\geqslant c_2d(x)$ in Ω. Then it follows that $-\Delta_{p_i}u_\varepsilon\geqslant-\Delta_{p_i}z_i$ in Ω, $u_{i,\varepsilon}=z_i$ on $\partial\Omega$, for all $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, and therefore, the weak comparison principle ensures the assertion (b) holds true. □

2. Proof of the main result

Set $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ with any positive integer $n>1/\varepsilon_0$. From Theorem 2 with $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$, there exists $u_{i,n}:=u_{i,\frac{1}{n}}$ such that

$$\langle-\Delta_{p_i}u_{i,n},\varphi_i\rangle=\lambda\int_\Omega\Big(u_{1,n}+\frac{1}{n}\Big)^{\alpha_i}\Big(u_{2,n}+\frac{1}{n}\Big)^{\beta_i}\varphi_i\ dx+\delta\int_\Omega h_i\varphi_i dx,\tag{17}$$

for all $\varphi_i \in W_0^{1,p_i}(\Omega), i = 1,2$. Taking $\varphi_1 = u_{1,n}$ in (17), since $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, we get

$$\begin{aligned}
\|u_{1,n}\|_{1,p_1}^{p_1} &= \lambda \int_\Omega \left(u_{1,n} + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(u_{2,n} + \frac{1}{n}\right)^{\beta_1} u_{1,n}\, dx + \int_\Omega \delta h_1 u_{1,n}\, dx \leqslant \\
&\leqslant \lambda \int_\Omega u_{1,n}^{\alpha_1+1} (u_{2,n}+1)^{\beta_1}\, dx + \delta \|h_1\|_\infty \int_\Omega u_{1,n}\, dx \leqslant \\
&\leqslant \lambda \int_\Omega \overline{u}_1^{\alpha_1+1} (\overline{u}_2+1)^{\beta_1}\, dx + \delta \|h_1\|_\infty \int_\Omega \overline{u}_1\, dx \leqslant \\
&\leqslant \lambda|\Omega|(\|\overline{u}_1\|_\infty^{\alpha_1+1} (\|\overline{u}_2\|_\infty+1)^{\beta_1} + \delta \|h_1\|_\infty \|\overline{u}_1\|_\infty)
\end{aligned} \tag{18}$$

Hence, $\{u_{1,n}\}$ is bounded in $W_0^{1,p_1}(\Omega)$. Similarly, we derive that $\{u_{2,n}\}$ is bounded in $W_0^{1,p_2}(\Omega)$. We are thus allowed to extract subsequences (still denoted by $\{u_{i,n}\}$) such that

$$u_{i,n} \rightharpoonup u_i \ \text{ in } \ W_0^{1,p_i}(\Omega), \ i = 1,2. \tag{19}$$

The convergence in (19) combined with Rellich embedding Theorem and (15)–(16) entails

$$c_0 d(x) \leqslant u_i(x) \leqslant \overline{u}_i(x) \ \text{ in } \Omega. \tag{20}$$

Inserting $\varphi_i = u_{i,n} - u_i$ in (17) yields

$$\langle -\Delta_{p_i} u_{i,n}, u_{i,n} - u_i\rangle = \int_\Omega \left[\lambda\Big(u_{1,n} + \frac{1}{n}\Big)^{\alpha_i} \Big(u_{2,n} + \frac{1}{n}\Big)^{\beta_i} + \delta h_i\right](u_{i,n} - u_i)\, dx.$$

We claim that

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\Delta_{p_i} u_{i,n}, u_{i,n} - u_i\rangle \leqslant 0.$$

Indeed, from (15), (16) and (10), we have

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\Big(u_{1,n} + \frac{1}{n}\Big)^{\alpha_1} \Big(u_{2,n} + \frac{1}{n}\Big)^{\beta_1} + \delta h_1\right)(u_{1,n} - u_1)\right| \leqslant \\
&\leqslant \big(u_{1,n}^{\alpha_1} (u_{2,n}+1)^{\beta_1} + \delta h_1\big)(|u_{1,n}| + |u_1|) \leqslant \\
&\leqslant 2\big((c_0 d(x))^{\alpha_1} (\overline{u}_2+1)^{\beta_1} + \delta h_1\big)\overline{u}_1 \leqslant \\
&\leqslant 2\big((c_0 d(x))^{\alpha_1} (\|\overline{u}_2\|_\infty+1)^{\beta_1} + \delta \|h_1\|_\infty\big) \|\overline{u}_1\|_\infty \leqslant \hat{C}_0 d(x)^{\alpha_1} \text{ in } \Omega,
\end{aligned}$$

with some positive constant $\hat{C}_0$. Then, (1) together with Lemma in [14, page 726] imply that

$$\left(\Big(u_{1,n} + \frac{1}{n}\Big)^{\alpha_1} \Big(u_{2,n} + \frac{1}{n}\Big)^{\beta_1} + \delta h_1\right)(u_{1,n} - u_1) \in L^1(\Omega). \tag{21}$$

Using (19), (21) and applying Fatou's Lemma, it follows that

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sup \int_\Omega \left(\left(u_{1,n} + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(u_{2,n} + \frac{1}{n}\right)^{\beta_1} + \delta h_1\right)(u_{1,n} - u_1)\, dx \leqslant \\
&\leqslant \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \sup \left(\left(\left(u_{1,n} + \frac{1}{n}\right)^{\alpha_1} \left(u_{2,n} + \frac{1}{n}\right)^{\beta_1} + \delta h_1\right)(u_{1,n} - u_1)\right) dx \to 0,
\end{aligned}$$

showing that $\lim_{n\to\infty} \sup \langle -\Delta_{p_1} u_{1,n}, u_{1,n} - u_1\rangle \leqslant 0$. Likewise, we prove that

$$\lim_{n\to\infty} \sup \langle -\Delta_{p_2} u_{2,n}, u_{2,n} - u_2\rangle \leqslant 0.$$

Then the S_+-property of $-\Delta_{p_i}$ on $W_0^{1,p_i}(\Omega)$ (see, e.g., [17, Proposition 3.5]) guarantees that

$$u_{i,n} \longrightarrow u_i \text{ in } W_0^{1,p_i}(\Omega),\ i=1,2. \tag{22}$$

On account of (17), besides (22), the next step is to verify that

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(u_{1,n}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_i}\left(u_{2,n}+\frac{1}{n}\right)^{\beta_i}\varphi_i\,dx=\int_\Omega u_1^{\alpha_i}u_2^{\beta_i}\varphi_i\,dx, \tag{23}$$

for all $\varphi_i \in W_0^{1,p_i}(\Omega)$. By (15), (16), (1) and (20), it holds

$$\left|\left(u_{1,n}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_1}\left(u_{2,n}+\frac{1}{n}\right)^{\beta_1}\varphi_1\right| \leqslant (c_0 d(x))^{\alpha_1}(\|\overline{u}_2\|_\infty+1)^{\beta_1}|\varphi_1|$$

and

$$\left|\left(u_{1,n}+\frac{1}{n}\right)^{\alpha_2}\left(u_{2,n}+\frac{1}{n}\right)^{\beta_2}\varphi_2\right| \leqslant (\|\overline{u}_1\|_\infty+1)^{\alpha_2}(c_0 d(x))^{\beta_2}|\varphi_2|.$$

Then, by (1) together with Hardy-Sobolev inequality (see, e.g., [1, Lemma 2.3]), assertion (23) stem from Lebesgue's dominated convergence Theorem. Hence we may pass to the limit in (17) to conclude that (u_1,u_2) is a solution of problem $(\mathcal{P})$ satsifying (20). Furthermore, using (1), (20) and (10), one has

$$\begin{aligned} &u_1^{\alpha_1}u_2^{\beta_1}+\delta h_1 \leqslant u_1^{\alpha_1}\overline{u}_2^{\beta_1}+\delta\|h_1\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant (c_0 d(x))^{\alpha_1}\|\overline{v}\|_\infty^{\beta_1}+\delta\|h_1\|_\infty d(x)^{\alpha_1-\alpha_1} \leqslant \\ &\leqslant C_1' d(x)^{\alpha_1} \text{ for all } x\in\Omega \end{aligned} \tag{24}$$

and

$$\begin{aligned} &u_1^{\alpha_2}u_2^{\beta_2}+\delta h_2 \leqslant \overline{u}_1^{\alpha_2}u_2^{\beta_2}+\delta\|h_2\|_\infty \leqslant \\ &\leqslant \|\overline{u}_1\|_\infty^{\alpha_2}(c_0 d(x))^{\beta_2}+\delta\|h_2\|_\infty d(x)^{\beta_2-\beta_2} \leqslant \\ &\leqslant C_2' d(x)^{\beta_2} \text{ for all } x\in\Omega, \end{aligned} \tag{25}$$

for certain positive constants C_1' and C_2'. Hence, (1) enable us to apply Lemma 3.1 in [11] to infer that $(u,v)\in C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})\times C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ for some $\beta\in(0,1)$.

We are left with the task of determining the nonexistence result stated in Theorem 1. Arguing by contradiction and assume that (u_1,u_2) is a positive solution of problem $(\mathcal{P})$ with $\delta=0$. Multiplying in $(\mathcal{P})$ by u_i, integrating over Ω, applying Young inequality with $\alpha_1,\beta_2>-1$, we get

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p_1}\,dx=\lambda\int_\Omega u_1^{\alpha_1+1}u_2^{\beta_1}dx \leqslant \lambda\int_\Omega\left(\frac{\alpha_1+1}{p_1}u_1^{p_1}+\frac{p_1-1-\alpha_1}{p_1}u_2^{\frac{\beta_1 p_1}{p_1-1-\alpha_1}}\right)dx \tag{26}$$

and

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p_2}\,dx=\lambda\int_\Omega u_1^{\alpha_2}u_2^{\beta_2+1}dx \leqslant \lambda\int_\Omega\left(\frac{p_2-1-\beta_2}{p_2}u_1^{\frac{\alpha_2 p_2}{p_2-1-\beta_2}}+\frac{\beta_2+1}{p_2}u_2^{p_2}\right)dx. \tag{27}$$

Adding (26) with (27), according to (4), this is equivalent to

$$\|\nabla u_1\|_{p_1}^{p_1}+\|\nabla u_2\|_{p_2}^{p_2} \leqslant \lambda\left[\left(\frac{\alpha_1+1}{p_1}+\frac{p_2-1-\beta_2}{p_2}\right)\|u_1\|_{p_1}^{p_1}+\left(\frac{\beta_2+1}{p_2}+\frac{p_1-1-\alpha_1}{p_1}\right)\|v\|_{p_2}^{p_2}\right]. \tag{28}$$

Since $\Theta=0$, observe from (4) that

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1+1}{p_1}+\dfrac{p_2-1-\beta_2}{p_2}=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+1}{p_1} \\ \dfrac{\beta_2+1}{p_2}+\dfrac{p_1-1-\alpha_1}{p_1}=\dfrac{\beta_1+\beta_2+1}{p_2}. \end{cases} \tag{29}$$

Then gathering (5), (28) and (29) together yields

$$\left(\lambda_{1,p_1} - \frac{\alpha_1+\alpha_2+1}{p_1}\lambda\right)\|u_1\|_{p_1}^{p_1} + \left(\lambda_{1,p_2} - \frac{\beta_1+\beta_2+1}{p_2}\lambda\right)\|u_2\|_{p_2}^{p_2} \leqslant 0$$

which is a contradiction for

$$\lambda < \lambda_* = \min\left\{\frac{p_1}{\alpha_1+\alpha_2+1}\lambda_{1,p_1}, \frac{p_2}{\beta_1+\beta_2+1}\lambda_{1,p_2}\right\}.$$

Thus, problem $(\mathcal{P})$ has no solution for $\lambda < \lambda_*$, which completes the proof.

References

[1] C.O.Alves, F.J.S.A. Corrêa, On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators, *Appl. Math. Comput.*, **185**(2007), 727-736.

[2] S. Boulaaras, R. Guefaifia, T. Bouali, Existence of positive solutions for a class of quasilinear singular ellipticsystems involving Caffarelli-Kohn-Nirenberg exponent with sign-changing weight functions, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **49**(2018), no. 4, 705–715.

[3] S.Carl, V.K.Le, D.Motreanu, Nonsmooth variational problems and their inequalities. Comparaison principles and applications, Springer, New York, 2007.

[4] Z.Deng, R.Zhang, Y.Huang, Multiple symmetric results for singular quasilinear elliptic systems with critical homogeneous nonlinearity, *Math. Meth. App. Sci.*, **40**(2017), no. 5, 1538–1552.

[5] P.Clément, J.Fleckinger, E.Mitidieri, F.de Thelin, Existence of Positive Solutions for a Nonvariational Quasilinear Elliptic System, *J. Diff. Eqts.*, **166**(2000), 455–477.

[6] C.Chen, On positive weak solutions for a class of quasilinear elliptic systems, *Nonl. Anal.*, **62**(2005), no. 4, 751–756.

[7] M.Ghergu, Lane-Emden systems with negative exponents, *J. Funct. Anal.*, **258**(2010), 3295–3318.

[8] J.Giacomoni, J.Hernandez, A.Moussaoui, Quasilinear and singular systems: the cooperative case, Contemporary Math., vol. 540, Amer. Math. Soc., 2011, 7–94.

[9] J.Giacomoni, J.Hernandez, P.Sauvy, Quasilinear and singular elliptic systems, *Advances Nonl. Anal.*, **2**(2013), 1–41.

[10] J.Giacomoni, I.Schindler, P.Takac, Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation, *A. Sc. N. Sup. Pisa*, **6**(2007), no. 5, 117–158.

[11] D.D.Hai, On a class of singular p-Laplacian boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **383**(2011), 619–626.

[12] D.D.Hai, H.Wang, Nontrivial solutions for p-Laplacian systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **330**(2007), 186–194.

[13] J.Hernandez, F.J.Mancebo, J.M.Vega, Positive solutions for singular semilinear elliptic systems, *Adv. Diff. Eqts.*, **13**(2008), 857–880

[14] A.C.Lazer, P.J.Mckenna, On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem, *Proc. American Math. Soc.*, **111**(1991), no. 3, 721–730.

[15] Y-H.Lee, X.Xu, Global Existence Structure of Parameters for Positive Solutions of a Singular (p_1, p_2)-Laplacian System, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **42**(2019), no. 3, 1143–1159.

[16] G.M.Lieberman, Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations, *Nonlinear Anal.*, **12**(1988), 1203–1219.

[17] D.Motreanu, V.V.Motreanu, N.S.Papageorgiou, Multiple constant sign and nodal solutions for Nonlinear Neumann eigenvalue problems, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, **10**(2011), no. 5, 729–755.

[18] D.Motreanu, A.Moussaoui, A quasilinear singular elliptic system without cooperative structure, *Act. Math. Sci.*, **34**(2014), no. 3, 905–916.

[19] D.Motreanu, A.Moussaoui, An existence result for a class of quasilinear singular competitive elliptic systems, *Applied Math. Letters*, **38**(2014), 33–37.

[20] D.Motreanu, A.Moussaoui, Existence and boundedness of solutions for a singular cooperative quasilinear elliptic system, *Complex Var. Elliptic Eqts.*, **59**(2014), 285–296.

[21] A.Moussaoui, B.Khodja, S.Tas, A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations in R^N, *Nonlinear Anal.*, **71**(2009), 708–716.

[22] R.S.Rodrigues, Positive solutions for classes of positone/semipositone systems with multiparameters, *Elect. J. Diff. Eqts.*, (2013), no. 192, 1–10.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2
https://doi.org/10.1007/s12215-019-00449-6

Multiple positive solutions for a class of quasilinear singular elliptic systems

Hana Didi[1] · **Abdelkrim Moussaoui**[2]

Received: 5 June 2019 / Accepted: 28 August 2019

Abstract
In this paper we establish the existence of two positive solutions for a class of quasilinear singular elliptic systems. The main tools are sub and supersolution method and Leray–Schauder Topological degree.

Keywords Singular system · p-Laplacian · Leray–Schauder degree · Regularity

Mathematics Subject Classification 35J75 · 35J48 · 35J92

1 Introduction

We consider the following system of quasilinear elliptic equations:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u, v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v = g(u, v) & \text{in } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{in } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

where Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ with $C^{1,\alpha}$ boundary $\partial\Omega$, $\alpha \in (0, 1)$, Δ_p and Δ_q, $1 < p, q < N$, are the p-Laplacian and q-Laplacian operators, respectively, that is, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ and $\Delta_q v = div(|\nabla v|^{q-2} \nabla v)$. The nonlinearities $f, g : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ are continuous functions satisfying the growth condition:

(H.1) For every $\bar{L} > 0$, there are constants $m_i, M_i > 0$ $(i = 1, 2)$ such that

$$m_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1} \leq f(s, t) \leq M_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1}, \quad \text{for all } \ 0 < s < \bar{L}, \ \text{ and all } \ t > 0,$$
$$m_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2} \leq g(s, t) \leq M_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2}, \quad \text{for all } \ 0 < t < \bar{L}, \ \text{ and all } \ s > 0,$$

✉ Hana Didi
hhana.didi@gmail.com

Abdelkrim Moussaoui
abdelkrim.moussaoui@univ-bejaia.dz

1 Mathematic Department, Badji-Mokhtar Annaba University, 23000 Annaba, Algeria

2 Biology Department, A. Mira Bejaia University, Targa Ouzemour, 06000 Bejaïa, Algeria

Published online: 04 September 2019

with

$$\begin{cases} -1 < \alpha_1 < 0 < \beta_1 < p - 1 \\ -1 < \beta_2 < 0 < \alpha_2 < q - 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

(H.2) For every $\bar{L}^* > 0$ there exist constants $J_1 > \lambda_{1,p}$ and $J_2 > \lambda_{1,q}$ such that

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s,t)}{s^{p-1}} = J_1 \quad \text{for all } 0 < t < \bar{L}^*,$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(s,t)}{t^{q-1}} = J_2 \quad \text{for all } 0 < s < \bar{L}^*.$$

We provide an example where (H.1) and (H.2) are fulfilled. Notice that under the above assumptions system (P) is cooperative, that is, for u (resp. v) fixed the right term in the first (resp. second) equation of (P) is increasing in v (resp. u).

Example 1 Let $\theta \in C_c(\mathbb{R})$ with $\theta(s) = 1$ on bounded sets. Consider the functions f, g : $(0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ defined by the following:

$$f(s,t) = \theta(s)s^{\alpha_1}t^{\beta_1} + (1 - \theta(s))J_1 s^{p-1}, \text{ for } s, t > 0$$

and

$$g(s,t) = \theta(t)s^{\alpha_2}t^{\beta_2} + (1 - \theta(t))J_2 t^{q-1}, \text{ for } s, t > 0,$$

which clearly verify assumptions (H.1) and (H.2).

The study of singular elliptic problems is greatly justified because they arise in several physical situations such as fluid mechanics pseudoplastics flow, chemical heterogeneous catalysts, non-Newtonian fluids, biological pattern formation and so on. In Fulks and Maybee [10], the reader can find a very nice physical illustration of a practical problem which leads to singular problem.

With respect to singular system it is worth to cite, among others, the important Gierer–Meinhardt system which is the stationary counterpart of a parabolic system proposed by Gierer–Meinhardt (see [8,15]) which occurs in the study of morphogenesis on experiments on hydra, an animal of a few millimeters in length.

Besides the importance of the physical application above mentioned, we would like to mention that from a mathematical point of view the singular problems are also interesting because to solve some of them are necessary nontrivial mathematical techniques, which involve Topological degree, Bifurcation theory, Fixed point theorems, sub and supersolution Method, Pseudomonotone Operator theory and Variational Methods. Here, it is impossible to cite all papers in the literature which use the above techniques, however the reader can find the applications of the above mentioned methods in Alves and Moussaoui [3], Hai [16], Ghergu and Radulescu [13], Giacomoni et al. [11], Giacomoni, Hernandez and Sauvy [14], Hernandez et al. [17], Khodja and Moussaoui [18], Zhang [27], Zhang and Yu [28], Diaz et al. [9], Alves et al. [2], Crandall et al. [7], Taliaferro [26], Lunning and Perry [20], Motreanu and Moussaoui [21–23], Moussaoui et al. [24], Agarwall and O'Regan [5], Stuart [25] and their references.

After a review bibliography, we did not find any paper where the existence of multiple solutions have been considered for a singular system. Motivated by this fact, we prove in the present paper the existence of at least two positive solutions for system (P). Our main result has the following statement:

Theorem 1 *Under assumptions* (H.1) *and* (H.2) *problem* (P) *possesses at least two (positive) solutions in* $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *for certain* $\gamma \in (0, 1)$.

In the proof of the above theorem, we will use sub and supersolution method combined with Leray–Schauder Topological degree. However, before proving that theorem it was necessary to get some informations about the regularity of the solutions. To this end, the below result was crucial in our approach.

Theorem 2 *Assume* (H.1) *holds. Then, system* (P) *has a positive solution* (u, v) *in* $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ *for some* $\gamma \in (0, 1)$. *Moreover, there exist a sub-supersolution* $\left(\underline{u}, \underline{v}\right)$, $(\overline{u}, \overline{v}) \in C^{1}(\overline{\Omega}) \times C^{1}(\overline{\Omega})$ *for* (P) *such that*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \text{ and } \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x) \text{ for all } x \in \overline{\Omega}. \tag{1.2}$$

In the present paper, a solution of (P) is understood in the weak sense, that is, a pair $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, with u, v positive a.e. in Ω, satisfying

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f(u, v)\varphi \, dx, \\ \int_{\Omega} |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} g(u, v)\psi \, dx, \end{cases} \tag{1.3}$$

for all $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$.

The Proof of Theorem 2 is done in Sect. 2. The main technical difficulty consists in the presence of singular terms in system (P) under condition (H.1). Our approach is based on the sub-supersolution method in its version for systems [18, Theorem 2]. We show the existence of a (positive) solution $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, for certain $\gamma \in (0, 1)$, of problem (P).

The Proof of Theorem 1 is done in Sect. 3. It is based on topological degree theory with suitable truncations. Here, it suffices to show the existence of a second (positive) solution for problem (P). The first one is given by Theorem 2 which is located in a rectangle formed by the sub-supersolutions. However, due to the singular terms in system (P), the degree theory cannot be directly implemented. To handle this difficulty, the degree calculation is applied for the regularized problem (P_ε) for $\varepsilon > 0$. Under assumption (H.1), Theorem 2 ensures the existence of a smooth solution for (P). This gives rise to the possible existence a constant $R > 0$ such that all solutions (u, v) with $C^{1,\gamma}$ -regularity satisfy $\|u\|_{C^{1,\gamma}}$, $\|v\|_{C^{1,\gamma}} < R$. On the basis of this, we show that the degree of an operator corresponding to system (P_ε) on a larger set is 0. Another hand, we show that the degree of an operator corresponding to the system (P_ε) is 1 on an appropriate set. This leads to the existence of a second solution for (P_ε) by using the excision property of Leray–Schauder degree. Then the existence of a second solution for (P) is derived by passing to the limit as $\varepsilon \to 0$.

In what follows, we denote by $\phi_{1,p}$ and $\phi_{1,q}$ the normalized positive eigenfunctions associated with the principal eigenvalues $\lambda_{1,p}$ and $\lambda_{1,q}$ of $-\Delta_p$ and $-\Delta_q$, respectively:

$$-\Delta_p \phi_{1,p} = \lambda_{1,p}|\phi_{1,p}|^{p-2}\phi_{1,p} \text{ in } \Omega, \ \phi_{1,p} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \ \int_{\Omega} \phi_{1,p}^{p} = 1 \tag{1.4}$$

and

$$-\Delta_q \phi_{1,q} = \lambda_{1,q}|\phi_{1,q}|^{q-2}\phi_{1,q} \text{ in } \Omega, \ \phi_{1,q} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \ \int_{\Omega} \phi_{1,q}^{q} = 1. \tag{1.5}$$

The strong maximum principle ensures the existence of positive constants l_1 and l_2 such that

$$l_1\phi_{1,p}(x) \leq \phi_{1,q}(x) \leq l_2\phi_{1,p}(x) \text{ for all } x \in \Omega. \tag{1.6}$$

For a later use we recall that there exists a constant $l > 0$ such that

$$\phi_{1,p}(x), \phi_{1,q}(x) \geq l d(x) \text{ for all } x \in \Omega, \tag{1.7}$$

where $d(x) := dist(x, \partial\Omega)$ (see, e.g., [12]). Moreover, since $\phi_{1,p}$ and $\phi_{1,q}$ belongs to $C^1(\overline{\Omega})$, there is $M > 0$ such that

$$M = \max_{x \in \overline{\Omega}} \{|\phi_{1,p}(x)| + |\phi_{1,q}(x)|\}. \tag{1.8}$$

2 Proof of Theorem 2: Existence of the first solution

Let us define w_1 and w_2 as the unique weak solutions of the problems

$$\begin{cases} -\Delta_p w_1 = w_1^{\alpha_1} & \text{in } \Omega, \\ w_1 > 0 & \text{in } \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \text{ and } \begin{cases} -\Delta_q w_2 = w_2^{\beta_2} & \text{in } \Omega, \\ w_2 > 0 & \text{in } \Omega, \\ w_2 = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

respectively, which are known to satisfy

$$c_2\phi_{1,p}(x) \leq w_1(x) \leq c_3\phi_{1,p}(x) \text{ and } c_2'\phi_{1,q}(x) \leq w_2(x) \leq c_3'\phi_{1,q}(x), \tag{2.2}$$

with positive constants c_2, c_3, c_2', c_3' (see [12]). Consider $\xi_1, \xi_2 \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ the solutions of the homogeneous Dirichlet problems:

$$\begin{cases} -\Delta_p \xi_1(x) = \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) & \text{in } \Omega, \\ \xi_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta_q \xi_2(x) = \phi_{1,q}^{\beta_2}(x) & \text{in } \Omega, \\ \xi_2 = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

The Hardy–Sobolev inequality (see, e.g., [1, Lemma 2.3]) guarantees that the right-hand side of (2.3) belongs to $W^{-1,p'}(\Omega)$ and $W^{-1,q'}(\Omega)$, respectively. Consequently, the Minty–Browder theorem (see [6, Theorem V.15]) implies the existence of unique ξ_1 and ξ_2 in (2.3). Moreover, (2.1), (2.2), the monotonicity of the operators $-\Delta_p$ and $-\Delta_q$ yield

$$c_0\phi_{1,p}(x) \leq \xi_1(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \text{ and } c_0'\phi_{1,q}(x) \leq \xi_2(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ in } \Omega, \tag{2.4}$$

for some positive constants c_0, c_1, c_0', c_1'. Let z_1 and z_2 satisfy

$$-\Delta_p z_1(x) = h_1(x), \;\; z_1 = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{2.5}$$

and

$$-\Delta_q z_2(x) = h_2(x), \;\; z_2 = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{2.6}$$

where

$$h_1(x) = \begin{cases} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) & \text{in } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \\ -\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) & \text{in } \Omega_\delta, \end{cases} \tag{2.7}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} \phi_{1,q}^{\beta_2}(x) & \text{in } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \\ -\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) & \text{in } \Omega_\delta \end{cases} \tag{2.8}$$

and

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x) < \delta\},$$

with a fixed $\delta > 0$ sufficiently small and $d(x) = d\,(x, \partial\Omega)$.

The Hardy–Sobolev inequality together with the Minty-Browder theorem imply the existence and uniqueness of z_1 and z_2 in (2.5) and (2.6). Moreover, (2.5) and (2.6), the monotonicity of the operators $-\Delta_p$ and $-\Delta_q$ and [16, Corollary 3.1] imply that

$$\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}(x) \leq z_1(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \text{ and } \tfrac{c_0'}{2}\phi_{1,q}(x) \leq z_2(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ in } \Omega. \tag{2.9}$$

Next, our goal is to show the existence of sub and supersolution for (P).

Existence of subsolution

For a constant $C > 0$, we have

$$-C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) < 0 \leq m_1(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1},\ x \in \Omega_\delta \tag{2.10}$$

and

$$-C^{-(q-1)}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) < 0 \leq m_2(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_2}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_2},\ x \in \Omega_\delta. \tag{2.11}$$

Let $\mu > 0$ be a constant such that

$$\phi_1(x), \phi_2(x) \geq \mu \text{ in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta. \tag{2.12}$$

Then, since $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, (2.9) and (2.12) lead to

$$\begin{aligned} &C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(z_1(x))^{-\alpha_1} \leq C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_1\phi_{1,p}(x))^{-\alpha_1} \\ &= C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}(Mc_1)^{-\alpha_1} < m_1(c_0'\mu)^{\beta_1} \leq m_1(c_0'\phi_{1,q}(x))^{\beta_1} \\ &\leq m_1(z_2(x))^{\beta_1}, \quad \text{for all } x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \end{aligned} \tag{2.13}$$

provided $C > 0$ large enough. This is equivalent to

$$C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) < m_1(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1}, \quad \text{for all } x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta. \tag{2.14}$$

Similarly,

$$C^{-(q-1)}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) < m_2\left(C^{-1}z_1(x)\right)^{\alpha_2}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_2} \text{ for all } x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \tag{2.15}$$

for $C > 0$ large enough. The pair

$$\left(\underline{u}, \underline{v}\right) = C^{-1}(z_1, z_2). \tag{2.16}$$

is a subsolution for (P), Indeed, a direct computation shows that

$$\int_\Omega \left|\nabla\underline{u}\right|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\, dx = C^{-(p-1)}\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta}\phi_{1,p}^{\alpha_1}\varphi\, dx - C^{-(p-1)}\int_{\Omega_\delta}\phi_{1,p}^{\alpha_1}\varphi\, dx \tag{2.17}$$

and

$$\int_\Omega \left|\nabla\underline{v}\right|^{q-2}\nabla\underline{v}\nabla\psi = C^{-(q-1)}\int_{\Omega\backslash\Omega_\delta}\phi_{1,q}^{\beta_2}\psi\, dx - C^{-(q-1)}\int_{\Omega_\delta}\phi_{1,q}^{\beta_2}\psi\, dx, \tag{2.18}$$

where $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ with $\varphi, \psi \geq 0$. Combining (2.17), (2.18), (2.10), (2.11), (2.13), (2.15) and (H.1), it is readily seen that

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\nabla\underline{u}\right|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla\varphi\, dx &\leq m_1\int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}\varphi\, dx \\ &\leq m_1\int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1}\omega_2^{\beta_1}\varphi\, dx \leq \int_\Omega f(\underline{u}, \omega_2)\varphi\, dx \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla \underline{v}\right|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx &\leq m_2 \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \\ &\leq m_2 \int_\Omega \omega_1^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \leq \int_\Omega g(\omega_1, \underline{v}) \psi \, dx,\end{aligned}$$

for all $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ with $\varphi, \psi \geq 0$, all $\omega_1 \geq \underline{u}$ and $\omega_2 \geq \underline{v}$ in Ω. This proves that $\left(\underline{u}, \underline{v}\right)$ is a subsolution for (P).

Existence of supersolution Next, we prove that

$$(\overline{u}, \overline{v}) = C(\xi_1, \xi_2) \tag{2.19}$$

is a supersolution for problem (P) for $C > 0$ large enough. Obviously, we have $(\overline{u}, \overline{v}) \geq \left(\underline{u}, \underline{v}\right)$ in $\overline{\Omega}$ for C large enough. Taking into account (2.3), (2.4), (1.8) and (1.1) we derive that in $\overline{\Omega}$ one has the estimates

$$\begin{aligned}&\overline{u}^{-\alpha_1} \overline{v}^{-\beta_1} (-\Delta_p \overline{u}) = C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} \xi_2^{-\beta_1} \geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} (c_1' \phi_{1,q}(x))^{-\beta_1} \\ &\geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} (c_1' M)^{-\beta_1} \geq M_1 \text{ in } \overline{\Omega}\end{aligned}$$

and

$$\overline{u}^{-\alpha_2} \overline{v}^{-\beta_2} (-\Delta_q \overline{v}) \geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2} (c_1 M)^{-\alpha_2} \geq M_2 \text{ in } \overline{\Omega},$$

provided that $C > 0$ is sufficiently large. Consequently, by (H.1) , it turns out that

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, dx &\geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \varphi \, dx \\ &\geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \varphi \, dx \geq \int_\Omega f(\overline{u}, \omega_2) \varphi \, dx\end{aligned} \tag{2.20}$$

and

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \, dx &\geq M_2 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \\ &\geq M_2 \int_\Omega \omega_1^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \geq \int_\Omega g(\omega_1, \overline{v}) \psi \, dx,\end{aligned} \tag{2.21}$$

for all $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ with $\varphi, \psi \geq 0$, all (ω_1, ω_2) within $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Thus, $(\overline{u}, \overline{v})$ is a supersolution for (P).

Proof of Theorem 2 (**conclusion**) Using and (H.1), (1.7), (1.2), (2.16), (2.19), (2.9) and (2.4), for (u, v) within $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, one has

$$f(u, v) \leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \leq C_1 d(x)^{\alpha_1} \text{ for all } x \in \Omega$$

and

$$g(u, v) \leq M_2 u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \leq C_2 d(x)^{\beta_2} \text{ for all } x \in \Omega,$$

where C_1 and C_2 are positive constants. Then, owing to [18, Theorem 2] we deduce that there exists a solution $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, for certain $\gamma \in (0, 1)$, of problem (P) within $\left[\underline{u}, \overline{u}\right] \times \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$. This completes the proof.

3 Proof of Theorem 1: existence of the second solution

According to Theorem 2 we know that problem (P) possesses a (positive) solution (u, v) in $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$, located in the rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Thus, to prove Theorem 1 it suffices to show the existence of a second solution for problem (P). However, it is worth noting that by Theorem 2 the set of solutions (u, v) in $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ for problem (P) is not empty. Then, without any loss of generality, we may assume that there is a constant $R > 0$ such that all solutions (u, v) with C^1-regularity satisfy

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < R. \tag{3.1}$$

Otherwise, there are infinity solutions with C^1-regularity and the Proof of Theorem 1 is completed.

Hereafter, we denote

$$\begin{aligned} B_R(0) &= \left\{(u, v) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega}) \; : \; \|u\|_{C^1} + \|v\|_{C^1} < R\right\}, \\ \mathcal{O}_R &= \left\{(u, v) \in B_R(0) \; : \; \underline{u} \ll u \ll \hat{u}_R \text{ and } \underline{v} \ll v \ll \hat{v}_R\right\} \end{aligned}$$

and

$$\mathcal{O}_\Lambda = \left\{(u, v) \in B_R(0) \; : \; \underline{u} \ll u \ll \overline{u}_\Lambda \text{ and } \underline{v} \ll v \ll \overline{v}_\Lambda\right\},$$

where

$$(\overline{u}_\Lambda, \overline{v}_\Lambda) = \Lambda(\xi_1, \xi_2) \text{ and } (\hat{u}_R, \hat{v}_R) = \Lambda_R(\xi_1, \xi_2), \tag{3.2}$$

with ξ_1, ξ_2 fixed in (2.3) and $\Lambda_R,\ \Lambda > 0$ are constants which will be chosen later on. A simple computation gives that $\mathcal{O}_R$ and $\mathcal{O}_\Lambda$ are open sets in $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$.

In what follows, we will assume without loss of generality that

$$R > \max\{\|\underline{u}\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty, \|\underline{v}\|_\infty, \|\overline{v}\|_\infty, \|\overline{u}_\Lambda\|_\infty, \|\overline{v}_\Lambda\|_\infty\}.$$

In the sequel, we use the notation $u_1 \ll u_2$ when $u_1, u_2 \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfy:

$$u_1(x) < u_2(x) \;\; \forall x \in \Omega \text{ and } \tfrac{\partial u_2}{\partial \nu} < \tfrac{\partial u_1}{\partial \nu} \text{ on } \partial\Omega,$$

where ν is the outward normal to $\partial\Omega$.

The next proposition is useful for proving our second main result.

Proposition 1 *Assume* (H.1) *holds. Then all solutions (u, v) of (P) in $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$, satisfy*

$$u(x) \ll \hat{u}_R(x) \textit{ and } v(x) \ll \hat{v}_R(x) \textit{ in } \Omega, \tag{3.3}$$

whenever $u(x) \geq \underline{u}(x)$ and $v(x) \geq \underline{v}(x)$ in Ω. Moreover, for all solutions (u, v) of (P) within $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, it holds

$$u(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \textit{ and } v(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x) \textit{ in } \Omega. \tag{3.4}$$

Proof We prove only the first parts of inequalities (3.3) and (3.4) because the second ones can be justified similarly. Recalling that all solutions (u, v) with $C^{1,\gamma}$-regularity satisfy (3.1), by (H.1), (2.16) and (2.9), for $u(x) \geq \underline{u}(x)$ and $v(x) \geq \underline{v}(x)$ in Ω, one has

$$
\begin{aligned}
-\Delta_p u &= f(u,v) \leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} R^{\beta_1} \\
&\leq M_1 (C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1} R^{\beta_1} < \Lambda_R^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \\
&= -\Delta_p(\Lambda_R \xi_1) = -\Delta_p \hat{u}_R \text{ in } \Omega,
\end{aligned}
$$

for Λ_R large enough. Furthermore, from (H.1), (2.19), (2.16), (2.4) and (2.9), for $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, it follows that

$$
\begin{aligned}
-\Delta_p u &= f(u,v) \leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \\
&\leq M_1 (C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p})^{\alpha_1} (Cc_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} \leq C^{-\alpha_1+\beta_1}\left(\frac{c_0}{2}\right)^{\alpha_1}(c_1'M)^{\beta_1}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \\
&< \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1} = -\Delta_p(\Lambda\xi_1) = -\Delta_p \overline{u}_\Lambda \text{ in } \Omega,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

provided that Λ is large enough. Consequently, the strong comparison principle found in [4, Proposition 2.6] leads to the conclusion. This ends the proof. □

3.1 An auxiliary problem

We will make use the topological degree theory to get the second solution for system (P). However, the singular terms in system (P) prevents the degree calculation to be well defined. To overcome this difficulty, we disturb system (P) by introducing a parameter $\varepsilon \in (0, 1)$. This gives rise to a regularized system for (P) defined for $\varepsilon > 0$ as follows:

$$
(\mathcal{P}_\varepsilon) \begin{cases} -\Delta_p u = f(u+\varepsilon, v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v = g(u, v+\varepsilon) & \text{in } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

We apply the degree theory for the regularized problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. This leads to find a positive solution for $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ lying outside of the set $\mathcal{O}_\Lambda$. Our main result regarding problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ is stated as follows:

Theorem 3 *Assume* (H.1) *and* (H.2) *hold. Then problem* $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ *possesses a positive solution* $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *for certain* $\gamma \in (0, 1)$, *such that* $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda$, *for all* $\varepsilon \in (0, 1)$.

Remark 1 It is very important to observe that the same reasoning exploited in the Proof of Theorem 2 and Proposition 1 furnishes that problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ has a (positive) solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in (0, 1)$, within $\left[\underline{u}, \overline{u}\right] \times \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$, where functions $(\underline{u}, \underline{v})$ and $(\overline{u}, \overline{v})$ are sub-supersolutions of $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ and $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ verifies

$$
u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \text{ and } v_\varepsilon(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x) \text{ in } \Omega,
$$

for all $\varepsilon \in (0, 1)$.

The next lemma provides a helpful comparison property which will be used later on.

Lemma 1 *Let* $u_1, u_2 \in C^1(\overline{\Omega})$ *be the solutions of the problems*

$$
\begin{cases} \mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u_1) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u_2) = g(x) & \text{in } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}
$$

where

$$
\mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u) = -\Delta_p u + \rho(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}\,|u+\varepsilon|^{p-2}\,(u+\varepsilon),
\tag{3.6}
$$

with constants $\rho, \varepsilon > 0$ and $f, g \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. If $f \prec g$, that is, for each compact set $\mathcal{K} \subset \Omega$, there is $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ such that

$$f(x) + \tau \leq g(x) \quad a.e \text{ in } \quad \mathcal{K},$$

then $u_1 \ll u_2$.

Proof The proof is very similar to that of Proposition 2.6 in [4]. □

3.2 Topological degree results

3.2.1 The first estimate (the degree on $\mathcal{O}_R$)

We transform the problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ to one with helpful monotonicity properties. To this end, let us introduce the functions

$$\chi_{\underline{u}}(s) = \begin{cases} s & \text{if } \underline{u} \leq s \\ \underline{u} & \text{if } s \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \chi_{\underline{v}}(s) = \begin{cases} s & \text{if } \underline{v} \leq s \\ \underline{v} & \text{if } s \leq \underline{v} \end{cases}, \tag{3.7}$$

and

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} \hat{u}_R & \text{if } \phi \geq \hat{u}_R \\ \phi & \text{if } \underline{u} \leq \phi \leq \hat{u}_R \\ \underline{u} & \text{if } \phi \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \tilde{\varphi} = \begin{cases} \hat{v}_R & \text{if } \varphi \geq \hat{v}_R \\ \phi & \text{if } \underline{v} \leq \varphi \leq \hat{v}_R \\ \underline{v} & \text{if } \varphi \leq \underline{v}, \end{cases} \tag{3.8}$$

where $(\underline{u}, \underline{v})$ and $(\hat{u}_R, \hat{v}_R)$ are given by (2.16) and (3.2), respectively. We shall study the homotopy class of problem

$$(\mathcal{P}_{\varepsilon,t}) \begin{cases} -\Delta_p u = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q u = \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{in } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where functions $\mathcal{F}_{\varepsilon,t}$ and $\mathcal{G}_{\varepsilon,t}$ are defined as follows:

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tf(\chi_{\underline{u}}(u) + \varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}(1-t)\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1}, \tag{3.9}$$

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tg(\tilde{u}, \chi_{\underline{v}}(v) + \varepsilon) + \bar{\eta}(1-t)\chi_{\underline{v}}(v)^{q-1}, \tag{3.10}$$

for $t \in [0,1]$ and $\varepsilon \in (0,1)$, with constant $\bar{\eta} > 0$ which will be chosen later on.

The next results are crucial in our approach which establish an important prior estimate for system $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$. Moreover, it is also shown that the solutions of problem $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ cannot occur outside the rectangle formed by the subsolution $(\underline{u}, \underline{v})$ and the a priori estimates of solutions of $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$.

Proposition 2 *Under assumption* (H.1), *all solutions* $(u, v) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ *of* $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ *satisfy*

$$\underline{u}(x) \ll u(x) \text{ and } \underline{v}(x) \ll v(x) \text{ in } \Omega, \tag{3.11}$$

for all $t \in [0,1]$ and all $\varepsilon \in (0,1)$.

Proof First, we transform the problem $(\mathcal{P}_{t,\varepsilon})$ to one with helpful monotonicity properties. To this end, let us introduce the auxiliary problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(u) = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) & \text{in } \Omega \\ -\Delta_q v + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(v) = \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(\tilde{v}) & \text{in } \Omega \\ u, v = 0 & \text{on } \Omega, \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(s) = (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s+\varepsilon)^{p-1} \\ \mathcal{L}_{\varepsilon,q}(s) = (\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-(q-1)}(s+\varepsilon)^{q-1}, \end{cases}$$

for $s \geq 0$ and $\varepsilon \in (0,1)$. Here the constant $\rho > 0$ is assumed sufficiently large so that the following inequalities are satisfied:

$$\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R(x)^{\beta_1} + \rho(p-1)\underline{u}(x)^{\alpha_1-(p-1)}s_1^{p-2} \geq 0$$

and

$$\beta_2\hat{u}_R(x)^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2-1} + \rho(q-1)\underline{v}(x)^{\beta_2-(q-1)}s_2^{q-2} \geq 0,$$

uniformly in $x \in \Omega$, for $\hat{u}_R \geq s_1 \geq \underline{u}$ and $\hat{v}_R \geq s_2 \geq \underline{v}$. This is possible because from (2.16), (2.9), (3.2); (2.4) and (1.8) and for $\rho > 0$ sufficiently large, if $p > 2$, one has

$$\begin{aligned} &\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s_1+\varepsilon)^{p-2} \\ &\quad \geq \alpha_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(\underline{u}+\varepsilon)^{p-2} \\ &\quad \geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \rho(p-1)\right] \\ &\quad \geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1} + \rho(p-1)\right] \geq 0 \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

If $p \leq 2$, one gets

$$\begin{aligned} &\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s_1+\varepsilon)^{p-2} \\ &\quad \geq \alpha_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(\hat{u}_R+\varepsilon)^{p-2} \\ &\quad \geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \rho(p-1)(C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p}+\varepsilon)^{2-p}(\Lambda_R c_1\phi_{1,p}+\varepsilon)^{p-2}\right] \\ &\quad \geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1} + \rho(p-1)C_0(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{2-p}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{p-2}\right] \\ &\quad = (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1} + \rho(p-1)C_0\right] \geq 0 \text{ in } \Omega, \end{aligned}$$

where $C_0 = \min\{1, C^{-1}\frac{c_0}{2}\}^{2-p} \cdot \max\{1, \Lambda_R c_1\}^{p-2}$, provided $\rho > 0$ large enough. Here, it is important to observe, by the choice of ρ, that functions

$$(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1}s_2^{\beta_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(s_1) \text{ and } s_1^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(s_2)$$

increases as $\hat{u}_R \geq s_1 \geq \underline{u}$ and $\hat{v}_R \geq s_2 \geq \underline{v}$ increases, respectively, for all $\varepsilon \in (0,1)$.

Next, let us prove that (3.11) holds true for every solution (u, v) of $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ bounded in $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$, for all $t \in [0,1]$ and all $\varepsilon \in (0,1)$. We only show the first inequality in (3.11) because the second one can be justified similarly. To this end, we set the functions $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ given by

$$X_1(x) = C^{-(p-1)}h_1(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})$$

and

$$X_2(x) = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}).$$

On account of (H.1), (2.7), (3.7)–(3.9), we have

$$\begin{aligned} X_1(x) &= -C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &< tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\bar{\eta}\underline{u}^{p-1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &\leq tm_1(\chi_{\underline{u}}(u)+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + (1-t)\bar{\eta}\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq tf(\chi_{\underline{u}}(u)+\varepsilon,\tilde{v})+(1-t)\bar{\eta}\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\ &= \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})=X_2(x) \text{ in } \Omega_\delta \end{aligned} \tag{3.12}$$

for all $t \in [0, 1]$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$.

On another hand, by (2.9), (1.1), (2.16), (2.12) and (1.8), we obtain

$$\begin{aligned} X_1(x) &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &< M_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \text{ in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \end{aligned} \tag{3.13}$$

and

$$\begin{aligned} m_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} &= M_1(t+1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \\ &\leq tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)m_1\left(C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p}\right)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} \\ &\leq tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)m_1\left(C^{-1}\frac{c_0}{2}\mu\right)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'M)^{\beta_1} \\ &\leq tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)\bar{\eta}\left(C^{-1}\frac{c_0}{2}\mu\right)^{p-1} \\ &\leq tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)\bar{\eta}\underline{u}^{p-1} \text{ in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

provided that $\bar{\eta} > 0$ sufficiently large, for all $t \in [0, 1]$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$. Gathering (3.13) and (3.14) together leads to

$$\begin{aligned} X_1(x) &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &< tm_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1}+(1-t)\bar{\eta}\underline{u}^{p-1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ &\leq tm_1(\chi_{\underline{u}}(u)+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1}+(1-t)\bar{\eta}\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1}+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\ &\leq \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})=X_2(x) \text{ in } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta, \end{aligned} \tag{3.15}$$

for all $t \in [0, 1]$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$. Consequently, it follows from (3.12) and (3.15) that for each compact set $\mathcal{K} \subset\subset \Omega$, there is a constant $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ such that

$$\begin{aligned} X_1(x)+\tau &= -C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})+\tau \\ &\leq \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})=X_2(x) \text{ a.e. in } \mathcal{K}\cap\Omega_\delta \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} X_1(x)+\tau &= C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})+\tau \\ &\leq \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v)+\rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})=X_2(x) \text{ a.e. in } \mathcal{K}\cap(\Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta), \end{aligned}$$

for all $t \in [0, 1]$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$. Hence $X_1 \prec X_2$ and $X_i \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ and thereby, by the strong comparison principle in Lemma 1, we infer that

$$u(x) \gg \underline{u}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

The proof of the second inequality in (3.21) is carried out in a similar way. This ends the proof. □

Proposition 3 *Assume* (H.1) *and* (H.2) *hold. Then all solutions* (u, v) *of* $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ *belong to* $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ *and satisfy*

$$\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} < R, \tag{3.16}$$

for all $t \in [0, 1]$ *and all* $\varepsilon \in (0, 1)$.

Proof By contradiction suppose that for every positive integer n there exist $t_n \in [0,1]$ and a solution (u_n, v_n) of $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t_n})$ such that $t_n \to t \in [0,1]$ and $\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|v_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to \infty$ as $n \to \infty$. Thanks to Proposition 2, we have

$$\underline{u}(x) \ll u_n(x) \text{ and } \underline{v}(x) \ll v_n(x) \ \text{ in } \Omega. \tag{3.17}$$

Thus, $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t_n})$ is equivalent to

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = t_n f(u_n+\varepsilon, \tilde{v}_n) + \bar{\eta}(1-t)u_n^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v_n = t_n g(\tilde{u}_n, v_n+\varepsilon) + \bar{\eta}(1-t)v_n^{q-1} & \text{in } \Omega, \\ u_n, v_n = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Without loss of generality we may admit that

$$\theta_n := \|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to \infty \text{ as } n \to \infty.$$

Denote

$$\mathcal{U}_n := \frac{1}{\theta_n} u_n \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ with } \|\mathcal{U}_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1 \text{ for all } n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

The first equation in $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t_n})$ results in

$$-\Delta_p \mathcal{U}_n = \tfrac{1}{\theta_n^{p_1-1}} \left(t_n f(u_n+\varepsilon, \tilde{v}_n) + (1-t_n)\bar{\eta} u_n^{p-1} \right), \tag{3.19}$$

where $\mathcal{U}_n(x) > 0$ a.e. in Ω because of (3.17).

If $u_n \leq \bar{L}$ in Ω for certain constant $\bar{L} > 0$, from (H.1), (3.8), (2.16), (3.17), (3.2), (2.4), (2.9) and (1.7), we have

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta_n^{p_1-1}} \left(t_n f(u_n+\varepsilon, \tilde{v}_n) + (1-t_n)\bar{\eta} u_n^{p-1} \right) \\ &= \frac{t_n}{\theta_n^{p_1-1}} f(u_n+\varepsilon, \tilde{v}_n) + (1-t_n)\bar{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1} \\ &\leq M_1 u_n^{\alpha_1} \tilde{v}_n^{\beta_1} + \bar{\eta}\|\mathcal{U}_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}^{p-1} \\ &\leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} \hat{v}_R^{\beta_1} + \bar{\eta} \leq C_1 \phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq \hat{C}_1 d(x)^{\alpha_1} \text{ in } \Omega, \end{aligned} \tag{3.20}$$

where a constant $\hat{C}_1 > 0$ is independent of n and ε. Otherwise, by (H.2), one has

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\theta_n^{p_1-1}} \left(t_n f(u_n+\varepsilon, \tilde{v}_n) + (1-t_n)\bar{\eta} u_n^{p-1} \right) \\ &= \frac{t_n}{\theta_n^{p-1}} f\left(\theta_n \left(\mathcal{U}_n + \frac{\varepsilon}{\theta_n} \right), \tilde{v}_n \right) + (1-t_n)\bar{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1} \\ &= t_n \left(\mathcal{U}_n + \frac{\varepsilon}{\theta_n} \right)^{p-1} \frac{f(\theta_n(\mathcal{U}_n + \frac{\varepsilon}{\theta_n}), \tilde{v}_n)}{(\theta_n(\mathcal{U}_n + \frac{\varepsilon}{\theta_n}))^{p-1}} + (1-t_n)\bar{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1} \\ &\leq C_2(1+\mathcal{U}_n^{p-1}) \leq C_2\left(1 + \|\mathcal{U}_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}^{p-1}\right) \leq \hat{C}_2 \text{ in } \Omega, \end{aligned} \tag{3.21}$$

for some constant $\hat{C}_2 > 0$ independent of n and ε. Thus, owing to [16, Lemma 3.1] (resp. [19]) in the case of (3.20) (resp. (3.21)), one derive that $\mathcal{U}_n$ is bounded in $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ for certain $\gamma \in (0,1)$. The compactness of the embedding $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \subset C^1(\overline{\Omega})$ implies

$$\mathcal{U}_n \to \mathcal{U} \text{ in } C^1(\overline{\Omega}). \tag{3.22}$$

From (3.19), (3.22), (H.2) and (3.17), we find

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathcal{U} = (tJ_1 + (1-t)\bar{\eta})\mathcal{U}^{p-1} & \text{in } \Omega \\ \mathcal{U} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

with $\mathcal{U} \geq 0$ in Ω. Since $tJ_1 + (1-t)\bar{\eta} > \lambda_{1,p_1}$, the corresponding eigenfunction $\mathcal{U}$ should change sign. This forces that $\mathcal{U} = 0$. Therefore, by (3.22), $\mathcal{U}_n \to 0$ in $C^1(\overline{\Omega})$, which contradicts (3.18).

Consequently, by increasing the constant $R > 0$ if necessary, all solutions $(u, v) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ of $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ satisfy (3.16) for all $t \in [0, 1]$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$. This completes the proof. □

Proposition 4 *Under the assumption (1.1) problem $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ has no solutions for $t = 0$.*

Proof Arguing by contradiction, let $(\mathring{u}, \mathring{v}) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ be a nontrivial solution of $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ with

$$(\mathring{u}, \mathring{v}) \in \mathcal{O}_R \text{ and } t = 0, \tag{3.24}$$

which reads as

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathring{u} = \bar{\eta}\mathring{u}^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q \mathring{v} = \bar{\eta}\mathring{v}^{q-1} & \text{in } \Omega, \\ \mathring{u}, \mathring{v} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

because of (3.7) and (3.11). From (2.9) and (2.16)

$$\underline{u}(x) = C^{-1} z_1(x) \geq C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p}(x) \text{ in } \Omega.$$

In the sequel, we fix $u_1(x) = C^{-1} \frac{c_0}{2} \phi_{1,p}(x) \leq \underline{u}(x)$ in Ω and take $\lambda_\delta = \lambda_{1,p} + \delta$ for $\delta > 0$. Let $u_2 \in C^1(\overline{\Omega})$ be the solution of the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u_2 = \lambda_\delta u_1^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Then for $\delta > 0$ small and $\bar{\eta}$ large enough, we have

$$-\Delta_p u_2 = \lambda_\delta u_1^{p-1} \leq \bar{\eta}\mathring{u}^{p-1} = -\Delta_p \mathring{u} \text{ in } \Omega$$

and

$$-\Delta_p u_1 = \lambda_{1,p} u_1^{p-1} \leq \lambda_\delta u_1^{p-1} = -\Delta_p u_2 \text{ in } \Omega.$$

By weak comparison principle we get

$$u_1(x) \leq u_2(x) \leq \mathring{u}(x) \text{ in } \Omega.$$

Now considering solutions of problems

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda_\delta u_{n-1}^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

we obtain an increasing sequence $\{u_n\}_n$ such that

$$u_1(x) \leq u_{n-1}(x) \leq u_n(x) \leq \mathring{u}(x) \text{ a.e. in } \Omega.$$

Passing to the limit we get a positive solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ for problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_\delta u^{p-1} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

which is impossible for $\delta > 0$ small enough because the first eigenvalue for p-Laplacian is isolate. Hence, problem $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ has no solutions for $t = 0$. □

Define the homotopy $\mathcal{H}_\varepsilon$ on $[0, 1] \times C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ by

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t, u, v) = I(u, v) - \begin{pmatrix} (-\Delta_p)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta_q)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x, u, v) \\ \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x, u, v) \end{pmatrix}.$$

Since functions $\mathcal{F}_{\varepsilon,t}$ and $\mathcal{G}_{\varepsilon,t}$ belong to $C(\overline{\Omega})$ for all $x \in \overline{\Omega}$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$, $\mathcal{H}_\varepsilon$ is well defined. Moreover, $\mathcal{H}_\varepsilon : [0, 1] \times C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega})$ is completely continuous for all $\varepsilon \in (0, 1)$. This is due to the compactness of the operators $(-\Delta_p)^{-1}$, $(-\Delta_q)^{-1}$: $C(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$. Hence, $(u, v) \in \mathcal{O}_R$ is a solution for $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ if, and only if,

$$(u, v) \in \mathcal{O}_R \ \text{ and } \ \mathcal{H}_\varepsilon(1, u, v) = 0.$$

From the previous Propositions 2 and 3 it is clear that solutions of $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ must lie in $\mathcal{O}_R$. Thus, the fact that problem $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ has no solutions for $t = 0$ (see proposition 4) implies that

$$\deg\left(\mathcal{H}_\varepsilon(0, \cdot, \cdot), \mathcal{O}_R, 0\right) = 0, \ \text{ for all } \varepsilon \in (0, 1).$$

Consequently, from the homotopy invariance property, it follows that

$$\deg\left(\mathcal{H}_\varepsilon(1, \cdot, \cdot), \mathcal{O}_R, 0\right) = 0, \ \text{ for all } \varepsilon \in (0, 1). \tag{3.25}$$

3.2.2 The second estimate (the degree on $\mathcal{O}_\Lambda$)

We show that the degree of an operator corresponding to the system $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ is 1 on the set $\mathcal{O}_\Lambda$. To this end, we modify the problem to ensure that solutions cannot occur outside of the rectangle formed by $(\underline{u}, \underline{v})$ and $(\overline{u}_\Lambda, \overline{v}_\Lambda)$. Set

$$\tilde{u} = \begin{cases} \overline{u}_\Lambda & \text{if } u \geq \overline{u}_\Lambda \\ u & \text{if } \underline{u} \leq u \leq \overline{u}_\Lambda \\ \underline{u} & \text{if } u \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \tilde{v} = \begin{cases} \overline{v}_\Lambda & \text{if } v \geq \overline{v}_\Lambda \\ v & \text{if } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}_\Lambda \\ \underline{v} & \text{if } v \leq \underline{v}, \end{cases} \tag{3.26}$$

and let us define the truncation problem

$$(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t}) \ \begin{cases} -\Delta_p u = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) & \text{in } \Omega \\ -\Delta_q v = \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) & \text{in } \Omega \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

with

$$\overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) = t f(\tilde{u} + \varepsilon, \tilde{v}) + (1 - t)\bar{\eta}(\phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1}$$

and

$$\overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) = t g(\tilde{u}, \tilde{v} + \varepsilon) + (1 - t)\bar{\eta}(\phi_{1,q} + \varepsilon)^{\beta_2},$$

for $t \in [0, 1]$, $\varepsilon \in (0, 1)$ and a constant $\bar{\eta} > 0$.

We state the following result regarding truncation system $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$.

Proposition 5 *Under assumption* (H.1) *every solution* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *of* $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$ *is bounded in* $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ *with*

$$\|u_\varepsilon\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|v_\varepsilon\|_{C^1(\overline{\Omega})} < R,$$

for all $t \in [0, 1]$ *and all* $\varepsilon \in (0, 1)$. *Moreover, it holds*

$$\underline{u}(x) \ll u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \text{ and } \underline{v}(x) \ll v_\varepsilon(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.27}$$

for all $t \in [0, 1]$ *and all* $\varepsilon \in (0, 1)$.

Proof By (H.1), (3.26), (2.16), (2.9), (3.2) and (2.4), one has

$$\overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) \leq f(\tilde{u} + \varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq M_1\underline{u}^{\alpha_1}\overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq C_1\phi_{1,p}^{\alpha_1} \text{ in } \Omega$$

and

$$\overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) \leq g(\tilde{u} + \varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}\phi_{1,q}^{\beta_2} \leq M_2\overline{u}_\Lambda^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2} + \bar{\eta}\phi_{1,q}^{\beta_2} \leq C_2\phi_{1,q}^{\beta_2} \text{ in } \Omega,$$

with certain constants C_1 $C_2 > 0$ independent of ε. Then, thanks to [16, Lemma 3.1], one derive the $C^{1,\gamma}$ -boundedness of solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ of $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$ for all $\varepsilon \in (0, 1)$.

Now, let us prove (3.27). We only show the first part of inequalities in (3.27) because the second ones can be justified similarly. Let us introduce the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(u) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \text{ in } \Omega \\ -\Delta_q v + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(v) = \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(\tilde{v}) \text{ in } \Omega \\ u, v = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

for $t \in [0, 1]$, $\varepsilon \in (0, 1)$ and $\bar{\eta} > 0$. The constant $\rho > 0$ is chosen sufficiently large so that the following inequalities are satisfy:

$$\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}s_2^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s+\varepsilon)^{p-2} \geq 0,$$
$$\beta_2 s_1^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2-1} + \rho(q-1)(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-(q-1)}(s+\varepsilon)^{q-2} \geq 0,$$

uniformly in $x \in \Omega$, for $(s_1, s_2) \in [\underline{u}, \overline{u}_\Lambda] \times [\underline{v}, \overline{v}_\Lambda]$, and for all $\varepsilon \in (0, 1)$.

Set the functions $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ given by

$$X_1(x) = C^{-(p-1)}h_1(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})$$

and

$$X_2(x) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u, v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}).$$

From (1.8) and (2.9), for all $\varepsilon \in (0, 1)$ and all $t \in [0, 1]$, one has

$$\begin{aligned} &(t + 1 - t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \\ &\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} \\ &\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1}\frac{c_0}{2}\phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'M)^{\beta_1} \\ &\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\bar{\eta}(\phi_{1,p} + \varepsilon)^{\alpha_1} \text{ in } \Omega, \end{aligned} \tag{3.28}$$

provided that $\bar{\eta} > 0$ is sufficiently large. Then, following the quite similar argument which proves (3.11) in Proposition 2, we obtain $X_1 \prec X_2$ with $X_1, X_2 \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Thus, the strong comparison principle (see Lemma 1) imply

$$u(x) \gg \underline{u}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

It remains to show that $u(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x)$, $\forall x \in \Omega$. To do so, set functions $\bar{X}_i : \Omega \to \mathbb{R}$ defined by

$$\bar{X}_1(x) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})$$

and

$$\bar{X}_2(x) = \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda).$$

Using (2.4), (2.19) and the choice of $\rho > 0$ we get

$$\begin{aligned}
& t M_1(\tilde{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + (1-t)\bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\
& \leq M_1(\overline{u}_\Lambda+\varepsilon)^{\alpha_1}\overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
& < M_1\overline{u}_\Lambda^{\alpha_1}\overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
& = M_1\Lambda^{\alpha_1+\beta_1}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
& \leq M_1\Lambda^{\alpha_1+\beta_1}(c_0\phi_{1,p})^{\alpha_1}(c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \\
& \leq \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \text{ in } \Omega,
\end{aligned}$$

for $\Lambda > 0$ sufficiently large. Thus, for each compact set $\mathcal{K} \subset\subset \Omega$, there is a constant $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ such that

$$\begin{aligned}
\bar{X}_1(x) + \tau &= \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x, u, v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) + \tau \\
&\leq \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) = \bar{X}_2(x) \text{ a.e. in } \mathcal{K}\cap\Omega,
\end{aligned}$$

for all $t \in [0, 1]$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$. That is, $\bar{X}_1 \prec \bar{X}_2$, with $\bar{X}_i \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ and therefore, by the strong comparison principle in Lemma 1, we infer that

$$u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \quad \forall x \in \Omega, \text{ for all } \varepsilon \in (0, 1).$$

A quite similar argument provides that $v_\varepsilon(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x)$ for all $x \in \Omega$ and all $\varepsilon \in (0, 1)$. This ends the proof. □

Let us define the homotopy $\mathcal{N}_\varepsilon$ on $[0, 1] \times C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ by

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\varepsilon(t, u, v) = I(u, v) - &\begin{pmatrix} (-\Delta_p)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta_q)^{-1} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \\ \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \end{pmatrix}, \text{ for } \varepsilon \in (0, 1). \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Clearly, $\mathcal{N}_\varepsilon$ is well defined and completely continuous homotopy for all $\varepsilon \in (0, 1)$ and all $t \in [0, 1]$. Moreover, $(u, v) \in \mathcal{O}_\Lambda$ is a solution of system $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ if, and only if,

$$(u, v) \in \mathcal{O}_\Lambda \text{ and } \mathcal{N}_\varepsilon(1, u, v) = 0 \text{ for all } \varepsilon \in (0, 1).$$

In view of Proposition 5 and from the definition of function $\overline{u}_\Lambda$ and $\overline{v}_\Lambda$ it follows that all solutions of $(\overline{\mathcal{P}}_{\varepsilon,t})$ are also solutions of $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Moreover, these solutions must be in the set $\mathcal{O}_\Lambda$. Moreover, for $t = 0$ in (3.29), Minty-Browder Theorem together with Hardy–Sobolev Inequality and [16, Lemma 3.1] ensure that problems

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \text{ and } \begin{cases} -\Delta_q v = \bar{\eta}(\phi_{1,q}+\varepsilon)^{\beta_2} & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

admit unique positive solutions $\mathring{u}_\varepsilon$ and $\mathring{v}_\varepsilon$ in $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ for certain $\gamma \in (0,1)$ and for $\varepsilon \in (0,1)$, respectively. Then, the homotopy invariance property of the degree gives

$$\begin{aligned}\deg(\mathcal{N}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_\Lambda,0) &= \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_\Lambda,0)\\ &= \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot),B_R(0)),0)\\ &= 1.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Since

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot) = \mathcal{N}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot) \text{ in } \mathcal{O}_\Lambda,$$

it follows that

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_\Lambda,0) = 1, \text{ for all } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.31}$$

3.2.3 Proof of Theorem 3

Herafter, we will assume that

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \partial\mathcal{O}_\Lambda,$$

otherwise we will have a solution $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \partial\mathcal{O}_\Lambda$, which is different from the solution (u,v) in Theorem 2, because $(u,v) \in \mathcal{O}_\Lambda$. Here, we have used that $\mathcal{O}_\Lambda$ is an open set, then $(u,v) \notin \partial\mathcal{O}_\Lambda$.

By (3.25) and (3.31), we deduce from the excision property of Leray–Schauder degree that

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_R\backslash\overline{\mathcal{O}}_\Lambda,0) = -1$$

and thus problem $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ has a solution $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ with

$$(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{O}_R\backslash\overline{\mathcal{O}}_\Lambda. \tag{3.32}$$

Then, owing to [16, Lemma 3.1] we conclude $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ for some $\gamma \in (0,1)$.

3.3 Proof of Theorem 1

Set $\varepsilon = \frac{1}{n}$ with any positive integer $n \geq 1$. From (3.32) with $\varepsilon = \frac{1}{n}$, we know that there exist $(\breve{u}_n, \breve{v}_n) := (\breve{u}_{\frac{1}{n}}, \breve{v}_{\frac{1}{n}})$ bounded in $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ for some $\gamma \in (0,1)$ such that

$$\begin{cases} -\Delta_p \breve{u}_n = f(\breve{u}_n + \frac{1}{n}, \breve{v}_n) & \text{in } \Omega,\\ -\Delta_q \breve{v}_n = g(\breve{u}_n, \breve{v}_n + \frac{1}{n}) & \text{in } \Omega,\\ \breve{u}_n = \breve{v}_n = 0 & \text{on } \partial\Omega,\end{cases} \tag{3.33}$$

satisfying

$$(\breve{u}_n, \breve{v}_n) \in \mathcal{O}_R\backslash\overline{\mathcal{O}}_\Lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.34}$$

Employing Arzelà–Ascoli's theorem, we may pass to the limit in $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ and the limit functions $(\breve{u}, \breve{v}) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ satisfy (P) with

$$(\breve{u}, \breve{v}) \in \mathcal{O}_R\backslash\overline{\mathcal{O}}_\Lambda \tag{3.35}$$

Finally, on account of (3.35) and Proposition 1, we achieve that $(\breve{u}, \breve{v})$ is a second solution of problem (P). This complete the Proof of Theorem 1.

References

1. Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A.: On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators. Appl. Math. Comput. **185**, 727–736 (2007)
2. Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A., Gonçalves, J.V.A.: Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems. Adv. Nonlinear Stud. **5**, 265–278 (2005)
3. Alves, C.O., Moussaoui, A.: Existence of solutions for a class of singular elliptic systems with convection term. Asympt. Anal. **90**, 237–248 (2014)
4. Arcoya, D., Ruiz, D.: The Ambrosetti-Prodi problem for the p-Laplace operator. Commun. Partial Differ. Equ. **31**, 849–865 (2006)
5. Agarwal, R.P., O'Regan, D.: Existence theory for single and multiple solutions to singular positive boundary value problems. J. Differ. Equ. **175**, 393–414 (2001)
6. Brézis, H.: Analyse Fonctionnelle Theorie et Applications. Masson, Paris (1983)
7. Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H., Tartar, L.: On a Dirichlet problem with singular nonlinearity. Commun. Partial Differ. Equ. **2**, 193–222 (1977)
8. del Pino, M.: A priori estimates applications to existence-nonexistence for a semilinear elliptic system. Indiana Univ. Math. J. **43**, 77–129 (1994)
9. Diaz, I., Morel, J.M., Oswald, L.: An elliptic equation with singular nonlinearity. Commun. Partial Differ. Equ. **12**, 1333–1344 (1987)
10. Fulks, W., Maybee, J.S.: A singular non-linear equation. Osaka Math. J. **12**, 1–19 (1960)
11. Giacomoni, J., Hernandez, J., Moussaoui, A.: Quasilinear and Singular Systems: The Cooperative Case, Contemporary Mathematics, 540, American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 79–94 (2011)
12. Giacomoni, J., Schindler, I., Takac, P.: Sobolev versus H ölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation. A. Sc. N. Sup. Pisa (5) **6**, 117–158 (2007)
13. Ghergu, M., Radulescu, V.: On a class of Gierer–Meinhardt systems arising in morphogenesis. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **344**, 163–168 (2007)
14. Giacomoni, J., Hernandez, J., Sauvy, P.: Quasilinear and singular elliptic systems. Adv. Nonlinear Anal. **2**, 1–41 (2013)
15. Gierer, A., Meinhardt, H.: A theory of biological pattern formation. Kybernetik **12**, 30–39 (1972)
16. Hai, D.D.: On a class of singular p-Laplacian boundary value problems. J. Math. Anal. Appl. **383**, 619–626 (2011)
17. Hernandez, J., Mancebo, F.J., Vega, J.M.: Positive solutions for singular semilinear elliptic systems. Adv. Differ. Equ. **13**, 857–880 (2008)
18. Khodja, B., Moussaoui, A.: Positive solutions for infinite semipositone/positone quasilinear elliptic systems with singular and superlinear terms. Differ. Equ. Appl. **8**(4), 535–546 (2016)
19. Lieberman, G.M.: Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. Nonlinear Anal. **12**, 1203–1219 (1988)
20. Luning, C.D., Perry, W.L.: Positive solutions of negative exponent generalized Emden–Fowler boundary value problem. SIAM J. Math. Anal. **12**, 874–879 (1981)
21. Motreanu, D., Moussaoui, A.: A quasilinear singular elliptic system without cooperative structure. Act. Math. Sci. **34B**(3), 905–916 (2014)
22. Motreanu, D., Moussaoui, A.: An existence result for a class of quasilinear singular competitive elliptic systems. Appl. Math. Lett. **38**, 33–37 (2014)
23. Motreanu, D., Moussaoui, A.: Existence and boundedness of solutions for a singular cooperative quasilinear elliptic system. Complex Var. Elliptic Equ. **59**, 285–296 (2014)
24. Moussaoui, A., Khodja, B., Tas, S.: A singular Gierer–Meinhardt system of elliptic equations in R^N. Nonlinear Anal. **71**, 708–716 (2009)
25. Stuart, C.A.: Existence and approximations of solutions of nonlinear elliptic equations. Math. Z. **147**, 53–63 (1976)
26. Taliaferro, S.: A nonlinear singular boundary value problem. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **3**, 897–904 (1979)
27. Zhang, Z.: On a Dirichlet with a singular nonlinearity. J. Math. Anal. Appl. **194**, 103–113 (1995)
28. Zhang, Z., Yu, J.: On a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term. SIAM J. Math. Anal. **32**, 916–927 (2000)