

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA**



**جامعة باجي مختار
- عنابة -**

Faculté des Sciences

Année : 2019/2020

Département de Mathématiques

Laboratoire de Modélisation Mathématiques et Simulation Numérique



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en Mathématiques

**APPLICATION DES OUTILS MATHÉMATIQUES
EN TRAITEMENT D'IMAGES**

Option

Équations Différentielles et Applications

Par

BENSEGHIR Mounder

DIRECTEUR DE THÈSE : NOURI Fatma Zohra Prof. U.B.M. ANNABA

CO-DIRECTEUR DE THÈSE : TAUBER Pierre Clovis MC(A). U. TOURS-FRANCE

Devant le jury

PRESIDENT : HAIOUR Mohamed Prof. U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : TAALLAH Frekh M.C.(A) U.B.M. ANNABA

EXAMINATEUR : HACHAMA Mohammed Prof. U. Khemis Miliana
AIN DEFLA

EXAMINATEUR : MAOUNI Messaoud Prof. U. SKIKDA

Remerciements

*Grand Merci à **Allah** le Seul puissant - Savant qui m'a réservé l'aptitude, la persévérance et la faculté de raisonnement; j'espère être à la hauteur pour servir la science et pour élever avec habilité et avec mes modestes connaissances, mon pays : l'Algérie.*

Mes parents trouveront ici mes sentiments de remerciements, mais aussi de grand respect et d'amour exceptionnel, pour leur aide dans mes études depuis ma tendre enfance.

Mme Nouri Fatma Zohra, enseignante chercheur, d'une honnêteté rare sur le plan scientifique, a mis au point la thématique. Durant toutes ces années, grâce à ses conseils pour l'art scientifique de lire, l'art scientifique d'écrire, l'art de comprendre en vue d'une logique de communication universitaire aboutie en mathématiques, ma plume a retrouvé avec beaucoup de facilité le parcours pour récapituler en quelques pages mes investigations dans cet écrit. Je témoigne, avec un doux souvenir, qu'elle m'a procuré le plaisir de constater quelle enseignante si parfaitement dévouée elle était. Merci et grand merci à elle à jamais.

Mr Tauber Pierre Clovis, enseignant chercheur de l'Université de Tours a accepté, sans aucune hésitation, un co-encadrement. Son expérience et son aide précieuse durant mes stages en France a enrichi notre démarche par une application dans le domaine médical.

Mr Haiour Mohamed, président de jury a le mérite de vifs remerciements pour avoir accepté de conduire le jury pour l'examination et le jugement.

Mr Taallah Frekh, examinateur, a sans hésitation accepté d'examiner et de critiquer ce travail. Il l'enrichira probablement de part son expérience d'enseignant chercheur. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Mr Hachama Mohammed et Mr Maouni Messaoud, examinateurs, m'ont fait le grand honneur de prendre le soin de lire et d'évaluer ce document. J'ai apprécié aussi sensiblement, lors de nos rencontres, leurs conseils avisés ainsi que leur intérêt à l'égard de mon travail en vue de parfaire par le jugement mes investigations en traitement d'images. Ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Tous les membres du laboratoire, toute fonction confondue, sont remerciés pour leur accueil et aide multiforme inoubliables.

A tous les enseignants(es) du master 1 et 2, à ceux depuis l'école primaire, en particulier **Mr Hadji Mohamed Lakhdar, Mr Mazouzi Said, Mr Ferdjani Moncef et Mr Boukhari Youcef**, qui ont partagé avec moi leurs connaissances, j'exprime ma reconnaissance pour toutes les longues étapes d'initiation et de formation. Qu'ils trouvent tous ici les remerciements les plus sincères !

Mme Benseghir Allouahe Nadia, mon épouse m'a encouragé à poursuivre l'entreprise de cette importante action, elle m'a guidé dans de nombreuses démarches en particulier dans sa patience. Qu'elle trouve ici affectueusement les remerciements les plus sincères !

Merci à tous pour la contribution, de près et de loin. Ils se reconnaîtront dans ce modeste travail.

تطبيق الأدوات الرياضية في معالجة الصور

ملخص

الموضوعات التي تمت معالجتها في هذه الأطروحة هي طرق تعديل الصور الرقمية من خلال ملأ المناطق المفقودة أو التالفة داخل الصورة أو التقليل من الضوضاء. دراستنا للمناهج السابقة و المقارنة بينها دفعتنا الى اقتراح طرق أكثر كفاءة تهدف الى استعادة الصورة و ذلك من خلال مقاربتين:

المقاربة الأولى المقترحة تركز على اشكالية تعبئة الاجزاء المفقودة داخل الصورة باستخدام المعادلات التفاضلية الجزئية (م. ت. ج). تعتمد هذه الطريقة على موتر البنية الغير الخطي لتقييم قوة واتجاه الانتشار وكذلك مرشحات الصدمات للحفاظ و لتحسين الهياكل الهندسية المتواجدة بالصورة اضافة إلى ذلك ، تُستخدم منهجية التقسيم والتعديل لتقدير معلمات التباين التي تتحكم في قوة دوال التدفق مما يساعد على تجاوز مشكلة اختيارها بطريقة تكيفية.

تستند المقاربة الثانية المقترحة في هذا العمل على شكليات المعادلات التفاضلية العشوائية ذات الانعكاس، من أجل حل المعادلة التفاضلية الاعتبائية نستخدم مخطط أويلر المعدل بزمين توقف عشوائي و معلمة نشر تعتمد على البنية الهندسية للصورة. تصاغ مصطلحات الانجراف والانتشار بعناية لتحقيق غرض الانتشار الغير المتجانس.

كذلك تعرض المخططات العددية الفعالة التي تسمح بتنفيذ الطرق المقترحة وكذلك نتائج خوارزمياتنا لاستعادة الصور الرقمية ثنائية و ثلاثية الأبعاد كذلك الشأن بالنسبة للصور الملونة. تتم مقارنة أداء نماذجنا من حيث مقاييس الجودة مع طرق أخرى في ذات السياق.

الكلمات المفتاحية : معالجة الصور، ترميم الصور، تقليل الضوضاء، المعادلات التفاضلية الجزئية، المعادلات التفاضلية العشوائية.

APPLICATION DES OUTILS MATHÉMATIQUES EN TRAITEMENT D'IMAGES

Résumé

Les sujets traités dans cette thèse sont les méthodes d'inpainting, d'amélioration et de débruitage d'images numériques. L'étude et la comparaison des méthodes existantes ont guidé notre réflexion pour proposer de nouvelles méthodes de restauration d'images plus performantes. La première approche proposée se focalise sur la problématique de l'inpainting par une approche basée sur une équation aux dérivées partielles (EDPs). Cette méthode utilise le tenseur de structure non-linéaire (TSNL) afin d'évaluer la force et l'orientation de la diffusion ainsi que les filtres de choc pour préserver et améliorer les structures géométriques de l'image. De plus, une méthodologie de partitionnement et d'ajustement est utilisée pour estimer les paramètres de contraste qui contrôlent la force des fonctions de diffusivité, ce qui surmonte l'inconvénient du choix de plusieurs paramètres d'une manière adaptative. La seconde approche proposée dans ce travail se base sur le formalisme des équations différentielles stochastiques (EDS) avec réflexion. Afin de résoudre l'EDS considérée, on utilise un schéma d'Euler modifié avec un temps d'arrêt aléatoire et un paramètre de diffusion dépendant de la géométrie des images. Les termes de drift et de diffusion sont soigneusement formulés afin d'exprimer le concept de la diffusion anisotrope par les EDS. On présente aussi des schémas numériques efficaces permettant la mise en œuvre des approches proposées ainsi que les résultats numériques de nos algorithmes de restauration d'images scalaires 2D, 3D et d'images couleurs. La performance de nos modèles est comparée en termes de PSNR et de SSIM à d'autres méthodes s'inscrivant dans le même contexte.

Mots-clés : Traitement d'Images, Inpainting, Débruitage, EDP, EDS.

APPLICATION OF MATHEMATICAL TOOLS IN IMAGE PROCESSING

Abstract

The topics covered in this thesis are the methods of inpainting, improving and denoising digital images. The study and the comparison of the existing methods oriented us to propose more efficient new image restoration models. The first proposed approach focuses on the problem of inpainting using partial differential equations (PDEs). This method uses the nonlinear structure tensor (NLST) to evaluate the strength and orientation of diffusion as well as shock filters to preserve and enhance image geometric structures. In addition methodology of partition and adjustment is used to estimate the contrast parameters that control the strength of the diffusivity functions which overcomes the disadvantage of choosing several parameters in an adaptive manner. The second approach proposed in this work is based on the formalism of stochastic differential equations (SDE) with reflection. In order to solve the considered SDE, we make use of a modified Euler scheme with a random stopping time and a diffusion parameter depending on images geometric features. The drift and the diffusion terms are carefully formulated to express the concept of anisotropic diffusion by SDE. Effective numerical schemes allowing the implementation of the proposed approaches as well as the numerical results of our algorithms for the restoration of 2D, 3D scalar images and color images are presented. The performance of our models is compared in terms of PSNR and SSIM to other related methods.

Keywords : Image Processing, Inpainting, Denoising, PDE, SDE.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Contexte général et notations mathématiques	5
1.1 Traitement d'images numériques et applications	5
1.1.1 Qu'est ce que le traitement d'images?	5
1.1.2 Définition de l'image numérique	8
1.1.3 Évaluation de la qualité de l'image	10
1.1.4 Notations et structures dans l'image	12
1.2 Le cadre des EDP en traitement d'images	16
1.2.1 Diffusion isotrope	17
1.2.2 Diffusion anisotrope	20
1.3 Résolution numérique des EDP	29
1.4 Conclusion	32
2 Inpainting par diffusion anisotrope basée sur le tenseur de structure non linéaire et le filtrage de choc	33
2.1 Inpainting d'images	34
2.1.1 Définition et principe	34
2.1.2 États de l'art de l'inpainting	36
2.2 Modèles d'inpainting basées TSL	40
2.3 Modèle d'inpainting proposé	42
2.3.1 Tenseur de structure non linéaire	43
2.3.2 Modèle proposé	44

2.3.3	Extension au cas tridimensionnel	45
2.3.4	Méthode d'approximation des paramètres de contraste	46
2.4	Mise en œuvre numérique	48
2.4.1	Discrétisation du modèle	48
2.4.2	Stabilité et implémentation numérique	49
2.5	Résultats numériques	51
2.6	Conclusion	59
3	Utilisation des équations différentielles stochastiques en restauration d'images	60
3.1	Débruitage d'images	60
3.2	Lissage anisotrope en termes d'EDS	61
3.2.1	Travaux connexes	61
3.2.2	Modèle proposé	63
3.2.3	Existence et unicité de la solution de l'EDS proposé	65
3.3	Implémentation	69
3.4	Résultats numériques	70
3.5	Conclusion	76
	Conclusions et perspectives	77
	Annexe A. Algorithmes d'implémentation du modèle développé dans le chapitre 2	79
	Bibliographie	81

Liste des Figures

1.1.1 Segmentation des régions d'un cerveau humain pour mesurer l'étendue des lésions de la sclérose en plaques [52] : (a) Image IRM. (b) Image segmentée.	6
1.1.2 Recalage pour la fusion d'informations provenant de deux modalités différentes [101] : (a) Image IRM, (b) Image scanner, (c) Image recalée.	7
1.1.3 Image couleur décomposée en ses trois canaux constitutifs : (a) image couleur, (b) canal rouge, (c) canal vert, (d) canal bleu.	10
1.1.4 Base orthonormale en chaque point de la ligne de niveau $U(X) = c$	14
1.2.1 Application de l'équation de la chaleur : (a) image originale, (b)-(c)-(d) images auxquelles on a appliqué l'équation (1.2.1), respectivement pour des temps $t=1, 2, 5$	18
1.2.2 Application de l'équation de la chaleur inverse : (a) image à laquelle on a appliqué l'équation (1.2.1) pour $t=1$, (b) on a appliqué l'équation (1.2.3) à l'image (a) pour $t=0.5$, (c) bruit gaussien ajouté à l'image (a), (d) on a appliqué l'équation (1.2.3) à l'image (c) pour $t=0.5$	19
1.2.3 Courbes représentatives des coefficients c_ξ (en bleu) et c_η (en orange) pour (a) la fonction rationnelle et (b) la fonction exponentielle.	21
1.2.4 Le modèle CED appliqué à une image d'empreinte digitale : (a) image originale, (b) amélioration de l'image.	25
1.2.5 Filtre de choc appliqué à un signal sigmoïdal	29
2.1.1 Objectif de l'inpainting	35

2.1.2 Différentes solutions au même problème d’inpainting : (a) image originale, (b) image masquée, (c) solution 1, (d) solution 2.	36
2.1.3 Élimination des rayures d’une vieille photographie [14]	37
2.1.4 Suppression d’un objet indésirable dans une image [14]	37
2.1.5 Effacement d’un texte dans une image [14]	37
2.1.6 Restauration d’une ancienne fresque [7]	38
2.1.7 Agrandissement d’une image par un facteur de 4 [112]	38
2.1.8 Elimination d’occlusions dans une image [85]	39
2.1.9 Inpainting des lésions de sclérose en plaques dans une image IRM [110]	39
2.5.1 Résultats d’inpainting pour un angle (T=290)	54
2.5.2 Résultats d’inpainting pour une courbure (T=500)	55
2.5.3 Effacement d’un texte (T=400)	56
2.5.4 Restauration de 50% de pixels manquants.	57
2.5.5 Inpainting de lésions de SEP dans une image IRM : (a)-(d)-(g) coupes axiale, sagittale et coronale d’un cerveau humain sain, (c)-(f)-(i) résultats du remplissage des lésions.	58
3.4.1 Résultats du débruitage d’une image synthétique.	72
3.4.2 Résultats du débruitage d’une image réelle.	73
3.4.3 Résultats du débruitage d’une image couleur.	74
3.4.4 Résultat de l’inpainting.	75

Introduction générale

Depuis la première photographie réalisée en 1825 par Joseph Nicéphore Niépce en utilisant une technique connue sous le nom d'héliogravure, l'imagerie n'a cessé de se développer. Avec l'émergence des ordinateurs suivie de l'apparition des images numériques, l'analyse et le traitement des images sont devenus un champ de recherche très actif compte tenu de leur omniprésence dans une multitude de domaines (médecine, biologie, astrophysique, sismologie, pour n'en nommer que quelques-uns).

Le traitement des images numériques couvre des domaines aux techniques et aux finalités très diverses allant de l'acquisition des données jusqu'à l'interprétation humaine. Dans cette thèse, on s'intéresse à l'un des problèmes fondamentaux du traitement d'images qui est la restauration. En effet, l'image numérique présente, en certaines situations, des imperfections telles que le bruit, le flou ou des zones manquantes qui peuvent avoir des causes différentes (défaut du capteur, l'atmosphère, erreurs lors de la transmission...). La restauration consiste à améliorer sa qualité visuelle afin de rendre cette information plus fiable pour un traitement ultérieur. Le point crucial des approches de restauration est de faire la distinction entre les caractéristiques importantes de l'image qui doivent être conservées, améliorées ou même reconstruites et les parties du contenu de l'image considérées comme des artefacts et devant être supprimées. Dans ce manuscrit, on aborde deux catégories de ces méthodes :

- Le débruitage : l'ensemble des opérations qui visent à réduire voire supprimer des perturbations indésirables présentes dans l'image de manière à retrouver l'originale.
- L'inpainting : la procédure qui consiste à récupérer les parties manquantes ou corrompues d'une image à partir de l'information connue sur son voisinage. Ce processus dif-

fère du problème du débruitage par la taille de la région détériorée laquelle peut s'étendre sur une zone relativement large avec perte totale de l'information. L'inpainting s'étend aussi à l'opération de supprimer des parties considérées comme indésirables dans l'image.

Les processus de traitement et d'analyse d'images reposent principalement sur des modèles mathématiques, entre autres on peut citer : les modèles linéaires, les modèles fréquentiels, les modèles statistiques/probabilistes et les modèles différentiels.

Dans ce travail de recherche, on s'intéresse plus particulièrement à cette dernière classe de modèles. En premier lieu, on utilise le formalisme des équations aux dérivées partielles (EDPs) à diffusion anisotrope qui est particulièrement adapté à l'inpainting d'image. Le principe est fondé sur la recherche de la solution du problème de restauration comme la modification successive d'un état initial soumis à des contraintes issues de l'analyse de la structure locale de l'image. Les modèles basés sur les EDPs ont prouvé leur efficacité à reconstruire des structures géométriques complexes, telles que les angles, les courbures et les jonctions qui représentent des caractéristiques perceptuelles très importantes, au regard du système visuel humain. Dans cette partie, on consacre aussi une étude assez particulière aux tenseurs de structures par une analyse spectrale.

En second lieu, des méthodes basées sur les équations différentielles stochastiques (EDSs) sont abordées. Ces dernières sont plus réalistes que celles basées sur les EDPs, de part la présence de perturbations aléatoires dans les images. Elles proposent des solutions très efficaces pour la reconstruction de la composante géométrique mais aussi dans une certaine mesure la composante texturée.

Cette thèse fait l'objet d'une étude approfondie sur plusieurs approches de restauration d'images et propose de contribuer à améliorer certains aspects de ces méthodes. Ce document est organisé de la façon suivante :

Chapitre 1:

On essaie de décrire ici l'utilité et l'importance des mathématiques en traitement d'images et à la vision par ordinateur. On définit ensuite les notions mathématiques de bases utiles à la bonne compréhension de ces travaux. L'outil essentiel utilisé afin d'aborder le problème de la restauration d'images étant les EDPs, une partie importante

de ce chapitre est consacrée à la présentation des modèles classiques dans ce domaine où on s'applique à lier ces nombreuses méthodes entre elles en les comparant et en illustrant leur comportement local pour le problème particulier de la restauration d'images.

Chapitre 2 :

On commence par introduire la problématique de l'inpainting en imagerie où on présente un état de l'art des méthodes existantes dans ce cadre. Le choix a porté non pas sur une présentation exhaustive des méthodes d'inpainting mais plutôt sur une présentation des méthodes basées sur les tenseurs de structures.

La suite du chapitre est consacrée à décrire notre méthode d'interpolation. Cette technique est basée sur les estimations du tenseur de structure non linéaire (TSNL) afin d'évaluer plus précisément l'anisotropie locale des données de l'image et l'orientation de la diffusion. Pour préserver les propriétés géométriques de l'image, un processus de diffusion orientée est associé à un filtrage de choc afin de reconstruire les grandes régions manquantes dans les images en niveaux de gris contenant des géométries complexes. Les paramètres de contraste des différents termes sont estimés d'une manière semi-automatique. Un schéma numérique supporté par un nouvel algorithme est présenté ainsi que des résultats numériques confirmant l'efficacité et la compétitivité de la méthode en termes de rapport signal sur bruit (PSNR), de mesure de similarité structurelle (SSIM) et de qualité visuelle par rapport à plusieurs autres approches d'inpainting. De plus, une version 3D de notre modèle appliquée aux données volumétriques est présentée. Il est bien connu qu'en imagerie médicale, la présence de lésions de sclérose en plaques (SEP) dans le cerveau affecte le traitement de l'imagerie par résonance magnétique (IRM), tels que le recalage, les mesures de volume cérébral, les outils de classification automatisée des tissus, etc. Des techniques d'inpainting ont été proposées pour le remplissage de lésions réduisant considérablement l'impact de la SEP dans de nombreux protocoles d'analyse IRM. Dans ce cadre, on s'intéresse à l'analyse et à l'expérimentation numériquement du modèle proposé.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, on met en évidence l'utilité des EDSs en traitement d'images ainsi que leurs propriétés principales. Des liens forts qu'on évoque unissent théoriquement cette approche à celle basée sur les EDPs. On présente ensuite quelques travaux basés sur les EDSs du domaine du débruitage d'images en décrivant leurs avantages et leurs limites ainsi que le positionnement de notre contribution basée sur une EDS avec réflexion. Afin de résoudre l'EDS considérée, on utilise un schéma d'Euler modifié avec un temps d'arrêt aléatoire et un paramètre de diffusion dépendant de la géométrie des images. Les termes de drift et de diffusion sont soigneusement formulés afin d'exprimer le concept de la diffusion anisotrope par les EDSs. Des résultats numériques des algorithmes proposés pour la restauration d'images en niveaux de gris et couleurs sont présentés. La performance de ce modèle est comparée ensuite à d'autres méthodes basées sur les EDSs et les EDPs en faisant usage des mesures de qualité PSNR et SSIM.

Contexte général et notations mathématiques

Dans ce chapitre, on essaie de décrire l'utilité et l'importance des mathématiques en traitement d'images et à la vision par ordinateur ainsi qu'un aperçu des méthodes de restauration proposées dans la littérature. On définit la plupart des notations utilisées dans la suite de ce manuscrit et rappelons également quelques notions classiques utiles à la bonne compréhension de cette thèse.

1.1 Traitement d'images numériques et applications

1.1.1 Qu'est ce que le traitement d'images?

"On a coutume de dire qu'une image vaut mille mots, cette citation est d'autant plus applicable de nos jours. À titre d'exemple purement informatif, selon le rapport annuel Mary Meeker sur les tendances d'Internet [86], plus de 2.8×10^{15} d'images sont créées et partagées chaque jour!"

Dans notre société moderne, on rencontre des images numériques dans de nombreuses situations différentes: de vie quotidienne, à leur utilisation professionnelle en médecine (imagerie aux rayons X, par résonance magnétique, par scintigraphie...), sciences de la terre et de l'univers (imagerie satellite, aérienne, sismique, moléculaire, cellulaire...), in-

dustrie, agriculture et sécurité (imagerie thermique, multispectrale...). Les images produites dans ces situations doivent généralement être organisées et éventuellement post-traitées. C'est ce qui est connu sous le nom de traitement d'images ou vision par ordinateur.

Le processus de traitement reçoit comme entrée une image (ou plusieurs images ou vidéos) et dont la sortie peut être une image de meilleure qualité si l'image originale présente des imperfections (artefacts, flou, bruit, zones manquantes...) ou un ensemble de caractéristiques ou de paramètres liés à l'image tels que les contours, des mesures statistiques en rapport avec les textures, des informations liées au bruit...

Parmi les objectifs du traitement d'image on peut citer :

- **Reconnaissance d'objets ou de formes** : elle est souvent associée à la segmentation, à la détection de contours ou à la reconnaissance de formes et au suivi d'objets. Le but de cette application est d'extraire certaines informations de l'image comme les textures, les contours et les objets (voir l'exemple dans la figure 1.1.1). Le lecteur peut consulter [89] et [90] pour des travaux classiques sur ce sujet.

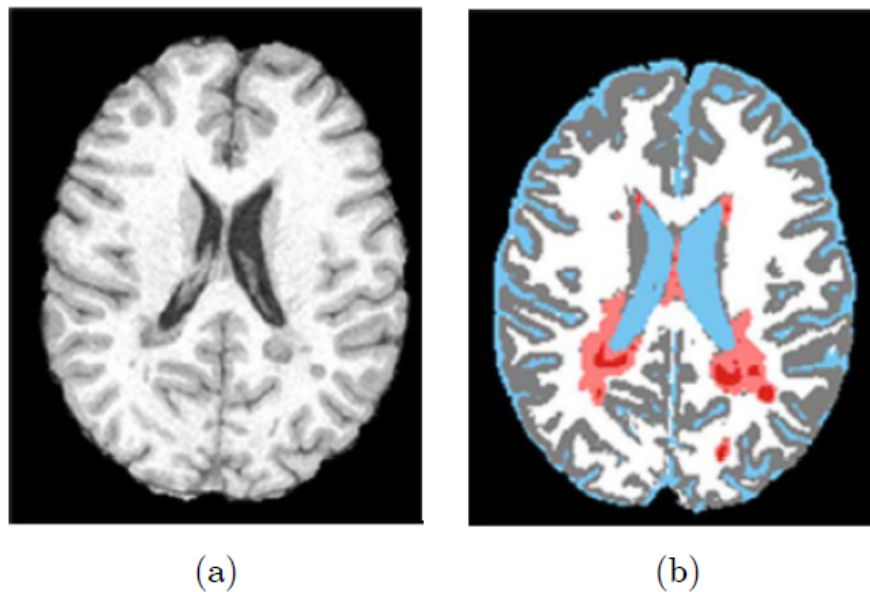


Figure 1.1.1 : Segmentation des régions d'un cerveau humain pour mesurer l'étendue des lésions de la sclérose en plaques [52] : (a) Image IRM. (b) Image segmentée.

- **Organisation des données** : on retrouve cette application par exemple dans la classification d'images de même type et la mise en correspondance d'images obtenues par des modalités d'acquisition différentes ceci afin de pouvoir comparer ou combiner leurs informations comme dans la figure 1.1.2 (communément appelée recalage d'images). On y a recours dans de nombreuses situations allant de l'aide au diagnostic médical (voir par exemple [110]) à la compression des données.

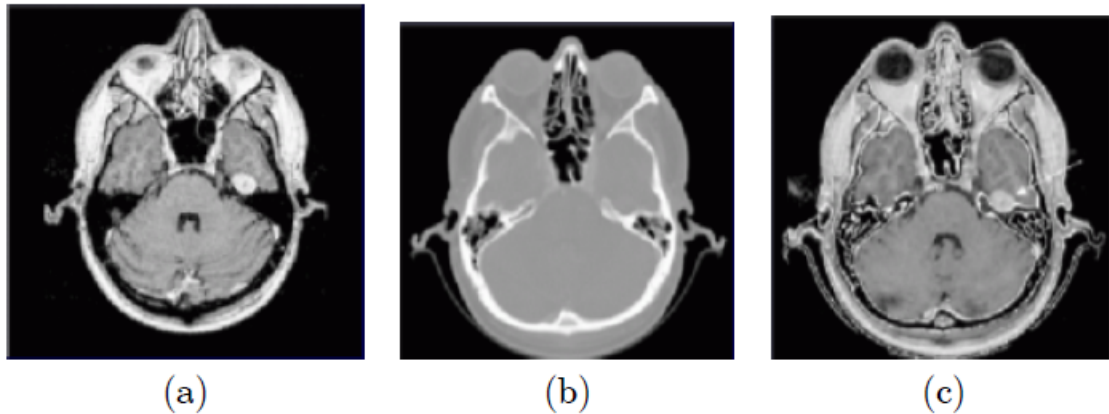


Figure 1.1.2 : Recalage pour la fusion d'informations provenant de deux modalités différentes [101] : (a) Image IRM, (b) Image scanner, (c) Image recalée.

- **Restauration d'images** : les images numériques présentent en certaines situations des imperfections comme le bruit, le flou, des zones manquantes qui peuvent avoir des causes différentes (défaut du capteurs, atmosphère, erreurs lors la transmission d'images...). L'idée derrière les algorithmes de restauration est de fournir des méthodes qui améliorent la qualité de ces images. Plus de détails, en rapport avec cette application, sont donnés dans les chapitres 2 et 3 de ce manuscrit où on aborde deux cas distincts de cette application, à savoir le débruitage et l'inpainting d'images.

Parmi les modèles mathématiques fondamentaux utilisés pour traiter les images, on peut citer :

- **Les modèles linéaires** : l'image est généralement convoluée par un filtre, appelé masque de convolution, qui est une opération qui effectue une combinaison linéaire entre les pixels voisins de l'image;

- **Les modèles fréquentiels :** on procède par l'utilisation de la transformée de Fourier souvent employée pour donner une nouvelle représentation de l'image dans l'espace des fréquences. Ici, le traitement de l'image se fait par l'intermédiaire de filtres qui suppriment ou modifient certaines fréquences. Cet outil a donné naissance à l'analyse espace-fréquence au moyen de la transformée en ondelettes.
- **Les modèles statistiques/probabilistes :** en exploitant les données statistiques de l'image (par exemple : l'histogramme, la corrélation entre des pixels ou des patches, les matrices de co-occurrence des structures ou des textures...etc), ces modèles sont particulièrement adaptés pour construire des processus de décision afin de produire des algorithmes de traitement non supervisés (automatiques).
- **Les modèles différentiels:** ici, l'image est considérée comme une fonction continue et son comportement local est décrit à l'aide de ses dérivées. Cela permet entre autres à étudier les variations spatiales et à construire des processus de traitement adaptés aux caractéristiques importantes de l'image. Ces modèles sont abordés en détail dans la suite de cette thèse.

Pour une introduction plus complète au traitement des images numériques, on se réfère à [5] et [80].

Compte tenu de l'énorme volume d'applications de traitement d'images énumérées précédemment et aux différents modèles mathématiques s'y associant, qui sont toutefois une liste non exhaustive, et du fait qu'il existe encore beaucoup de problèmes ouverts dans ce domaine, il n'est pas surprenant qu'il s'agisse d'un champ de recherche très actif. Avant d'approfondir certains domaines, on a besoin de se familiariser avec l'image numérique.

1.1.2 Définition de l'image numérique

Une image numérique est une approximation d'une scène du monde réel (une réalité 3D) générée à l'aide de dispositifs de capture d'images appelés numériseurs tel qu'un appareil photo numérique ou un scanner. Ce passage de l'analogique vers le numérique se fait par l'échantillonnage qui consiste à prélever périodiquement des échantillons d'un

signal continu et la quantification qui consiste à affecter une valeur numérique à chaque échantillon prélevé (pour plus de particularités sur ces procédures voir [5], [65]).

Une image numérique est donc décrite dans un domaine discret bidimensionnel ou tridimensionnel et est définie par un ensemble fini de points/volumes, appelés Pixels (**P**icture **E**lements) dans le cas 2D et Voxels (**v**olumic **p**ixels) dans le cas 3D. Ils sont espacés sur une grille régulière où chaque pixel/voxel est décrit par sa position X et une valeur numérique $U(X)$ appelée intensité. Il est à noter que $X = (x, y)$ dans le cas 2D et $X = (x, y, z)$ pour le cas 3D (dans la suite on utilise la notation U au lieu de $U(X)$ quand aucune ambiguïté n'est envisageable).

Ainsi, les images sont stockées sur les ordinateurs à l'aide d'une représentation discrète. Lors de l'analyse mathématique d'images numériques, on suppose généralement que la discrétisation est suffisamment fine pour pouvoir approcher ces signaux discrets par des fonctions continues (ou du moins par morceaux). On renvoie le lecteur à [47] pour une explication assez complète sur ce sujet.

Une représentation continue d'une image numérique est définie sur un domaine fermé $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ où $d = 2$ dans le cas des images 2D et $d = 3$ pour les images 3D. L'image est appelée **binaire** lorsque $U : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ où l'intensité prend uniquement la valeur 0 (noir) ou la valeur 1 (blanc). Par contre, une image en **niveaux de gris** est définie par $U : \Omega \rightarrow [0, 255]$ et autorise un dégradé de gris entre le noir (0) et le blanc (255). Enfin, l'image **vectorielle** est définie de telle sorte que chaque point de l'image est un vecteur de dimension n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Il est à noter que les images couleurs, dans le système RGB par exemple, sont décrites par trois canaux représentant l'intensité des trois couleurs primaires Rouge, Vert et Bleu (voir la figure 1.1.3). Elles correspondent ainsi à $n = 3$ avec des valeurs vectorielles dans $(R; V; B)$, et on peut écrire $U : \Omega \rightarrow [0, 255]^3$. De la sorte, il est possible de représenter $256^3 = 16777216$ couleurs différentes dans ce modèle (d'autres espaces de couleurs sont possibles voir [61]).

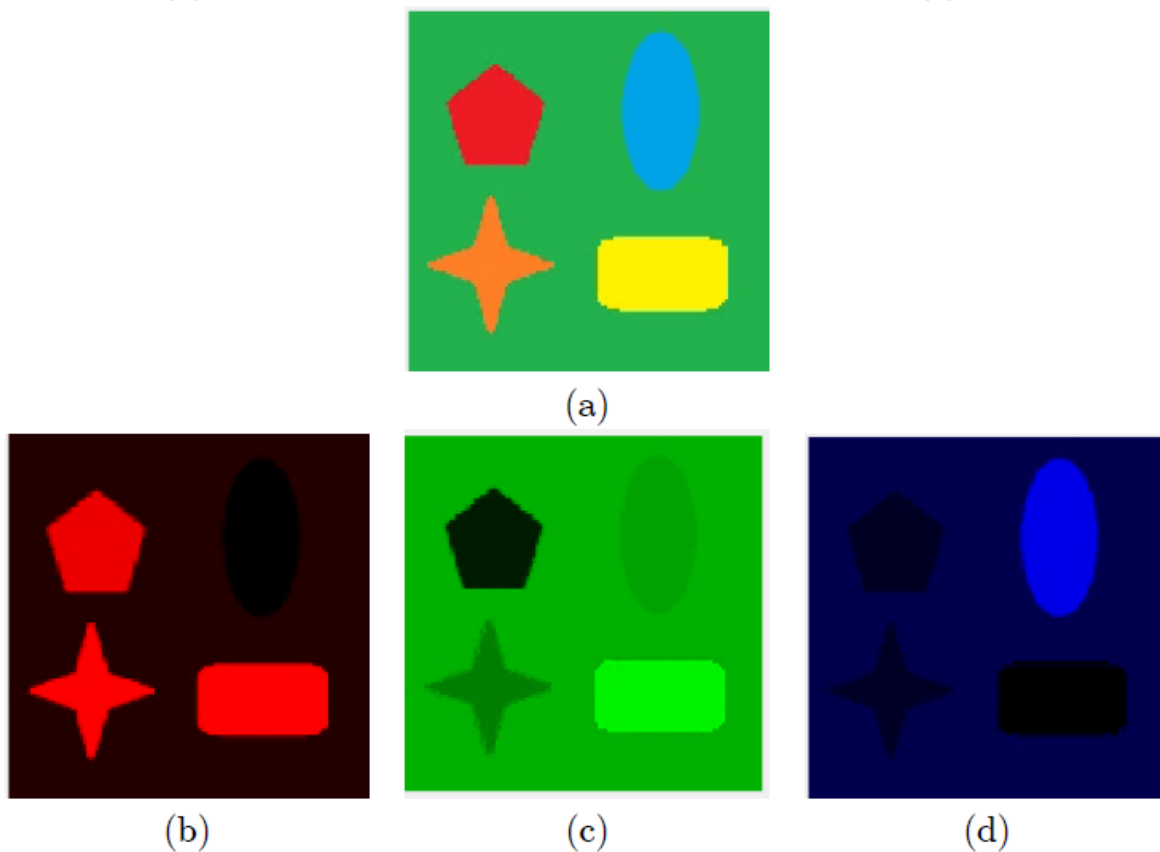


Figure 1.1.3 : Image couleur décomposée en ses trois canaux constitutifs : (a) image couleur, (b) canal rouge, (c) canal vert, (d) canal bleu.

1.1.3 Évaluation de la qualité de l'image

Les images numériques sont sujettes à une grande variété de dégradation lors de l'acquisition, du traitement, de la compression, du stockage et de la transmission ce qui peut en résulter une baisse de la qualité visuelle. La méthode d'évaluation de la qualité d'une image fondée sur le jugement humain se base sur l'analyse de certains critères comme l'étendue de la dynamique de l'image, le rapport entre la définition (taille) et la résolution de l'image, les déformations géométriques, la présence du bruit... Cependant, cette évaluation subjective est généralement peu pratique, longue et coûteuse. Dans un souci de prédire automatiquement la qualité d'une image, des méthodes d'évaluation dites objectives ont été développées et se basent sur des mesures quantitatives explicites. Elles

sont très utilisées aussi pour évaluer et optimiser des systèmes et des algorithmes de traitement d'images. Ceci est accompli en comparant une image de référence (l'image originale) à une image test (l'image de post-traitement). Dans ce cadre, la mesure de qualité la plus simple et la plus largement utilisée est le *MSE* (*Mean Squared Error*) calculé à partir de :

$$MSE(u_0, u) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u_{i,j}^0 - u_{i,j})^2 \quad (1.1.1)$$

où u_0 désigne l'image originale et u l'image traitée toutes deux de même taille $M \times N$. Une autre mesure qui découle directement du *MSE* est le *PSNR* (*Peak Signal-to-Noise Ratio*) donné par :

$$PSNR(u_0, u) = 10 \log_{10} \left(\frac{L^2}{MSE(u_0, u)} \right) \quad (1.1.2)$$

où L correspond à la valeur d'intensité maximale possible dans l'image ($L = 255$ pour une image en niveaux de gris). Il est clair que plus l'image u est fidèle à u_0 plus le *MSE* se rapproche de 0 et ainsi le *PSNR* tend vers l'infini. Par conséquent, de fortes différences numériques entre les deux images impliquent une petite valeur de *PSNR*.

Au lieu d'utiliser les méthodes de totalisation des erreurs pour mesurer la similarité entre deux images (comme dans (1.1.1)), Wang et al. [121] ont développé la mesure *SSIM* (*Structural Similarity Index Measure*) considérée comme étant corrélée à la perception de la qualité par le système visuel humain (SVH). Le *SSIM* est défini par :

$$SSIM(u_0, u) = [l(u_0, u)]^\alpha \cdot [c(u_0, u)]^\beta \cdot [s(u_0, u)]^\gamma \quad (1.1.3)$$

où

$$\begin{cases} l(u_0, u) = \frac{2\mu_{u_0}\mu_u + c_1}{\mu_{u_0}^2 + \mu_u^2 + c_1} \\ c(u_0, u) = \frac{2\sigma_{u_0}\sigma_u + c_2}{\sigma_{u_0}^2 + \sigma_u^2 + c_2} \\ s(u_0, u) = \frac{\sigma_{u_0 u} + c_3}{\sigma_{u_0}^2 + \sigma_u^2 + c_3} \end{cases}$$

Le premier terme de (1.1.3) est la fonction de comparaison de luminance qui mesure la proximité de la luminance moyenne (μ_{u_0} et μ_u) des deux images. Ce facteur est maximal et égal à 1 uniquement si $\mu_{u_0} = \mu_u$. Le deuxième terme est la fonction de comparaison de contraste qui mesure la proximité du contraste des deux images. Ici, le contraste est mesuré par les écarts-types σ_{u_0} et σ_u . Ce terme est maximal et égal à 1 seulement si

$\sigma_{u_0} = \sigma_u$. Le troisième terme est la fonction de comparaison des structures qui mesure le coefficient de corrélation entre les deux images u_0 et u où σ_{u_0u} est la covariance entre u_0 et u . Les constantes positives c_1 , c_2 et c_3 sont utilisées pour éviter des dénominateurs nuls et les trois paramètres α , β et γ définissent l'importance de chaque terme. Il est à noter que le *SSIM* prend des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ où la valeur 0 signifie qu'il n'y a aucune correspondance entre les deux images u_0 et u alors que la valeur 1 signifie qu'elles sont identiques.

Il y a beaucoup d'autres mesures de qualité qui sont explicitées dans ([6] et [38]). Mais à ce jour, il n'existe pas une mesure de qualité universelle car à chaque mesure sa sensibilité à telle ou telle dégradation. Par exemple, certaines études ([122], [57], [6]) révèlent que le *MSE* et donc le *PSNR*, contrairement au *SSIM*, se comportent mal pour évaluer les déformations géométriques car divers types de dégradations appliquées à la même image peuvent donner la même valeur de *MSE*. Tandis que les mêmes études ont montré que le *MSE*, et par conséquent le *PSNR*, sont les plus performants pour évaluer la qualité des images bruitées.

Comme il n'y a pas de règles précises pour la sélection du *SSIM* ou du *PSNR* lorsque l'évaluation de la qualité d'images est requise, lors de nos expérimentations numériques on estime les deux valeurs.

1.1.4 Notations et structures dans l'image

Dans cette partie, on suppose que l'image $U : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois continûment différentiable ($U \in C^2(\Omega)$). On notera ses dérivées partielles premières et secondes par rapport à ses coordonnées spatiales X par :

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, U_y = \frac{\partial U}{\partial y}, U_z = \frac{\partial U}{\partial z}, U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \dots \quad (1.1.4)$$

Le **gradient** de U noté par ∇U est donné par :

$$\begin{cases} \nabla U = (U_x, U_y)^T & (\text{quand } d = 2) \\ \nabla U = (U_x, U_y, U_z)^T & (\text{quand } d = 3) \end{cases} \quad (1.1.5)$$

La **divergence** de U notée par ∇U est donnée par :

$$\begin{cases} \operatorname{div} U = U_x + U_y & (\text{quand } d = 2) \\ \operatorname{div} U = U_x + U_y + U_z & (\text{quand } d = 3) \end{cases} \quad (1.1.6)$$

Le **laplacien** de U noté par ΔU est donné par :

$$\begin{cases} \Delta U = U_{xx} + U_{yy} & (\text{quand } d = 2) \\ \Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} & (\text{quand } d = 3) \end{cases} \quad (1.1.7)$$

La **dérivée directionnelle** d'une image suivant un vecteur $V \in \mathbb{R}^d$ est notée par :

$$U_V = \frac{\partial U}{\partial V} = \nabla U \cdot V \quad (1.1.8)$$

et est donnée par :

$$\begin{cases} \text{pour } d = 2, V = (v_1, v_2)^T, & U_V = v_1 U_x + v_2 U_y \\ \text{pour } d = 3, V = (v_1, v_2, v_3)^T, & U_V = v_1 U_x + v_2 U_y + v_3 U_z \end{cases} \quad (1.1.9)$$

La **dérivée directionnelle seconde** d'une image suivant un vecteur $V \in \mathbb{R}^d$ est notée par :

$$U_{VV} = \frac{\partial^2 U}{\partial V^2} = \nabla(\nabla U \cdot V) \cdot V \quad (1.1.10)$$

et est donnée par :

$$\begin{cases} \text{pour } d = 2, V = (v_1, v_2)^T, & U_{VV} = v_1^2 U_{xx} + 2v_1 v_2 U_{xy} + v_2^2 U_{yy} \\ \text{pour } d = 3, V = (v_1, v_2, v_3)^T, & U_{VV} = v_1^2 U_{xx} + 2v_1 v_2 U_{xy} + 2v_1 v_3 U_{xz} \\ & + v_2^2 U_{yy} + 2v_2 v_3 U_{yz} + v_3^2 U_{zz} \end{cases} \quad (1.1.11)$$

On appelle **ensemble de niveau** c associé à l'image U l'ensemble défini par :

$$\chi_c(U) = \{X \in \Omega / U(X) \geq c\} \quad (1.1.12)$$

Un **contour** dans une image correspond à un saut brusque de niveau de gris (intensité) et donc à une accumulation des frontières des ensembles de niveau, appelés lignes de niveau. Le **gradient** est souvent utilisé dans l'analyse des variations d'intensités de l'image : sa direction pointe dans celles de ces variations (lorsqu'il est non nul il est perpendiculaire

aux lignes de niveau et par conséquent aux contours) et sa norme, notée $\|\nabla U\|$, mesure leurs vitesses et est calculée comme suit :

$$\begin{cases} \|\nabla U\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} & (\text{quand } d = 2) \\ \|\nabla U\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} & (\text{quand } d = 3) \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Ainsi, il est possible de définir une base orthonormale en chaque point de l'image à partir du gradient et de son orthogonal (voir figure 1.1.4) par les vecteurs :

$$\eta = \frac{\nabla U}{\|\nabla U\|}, \quad \xi = \frac{\nabla^\perp U}{\|\nabla U\|} \quad (1.1.14)$$

où $\nabla^\perp U = (-U_y, U_x)^T$. Il est à noter que dans la pratique quand $\|\nabla U(X)\| = 0$, on suppose que $\|\nabla U(X)\| = \epsilon$ avec $\epsilon \rightarrow 0^+$.

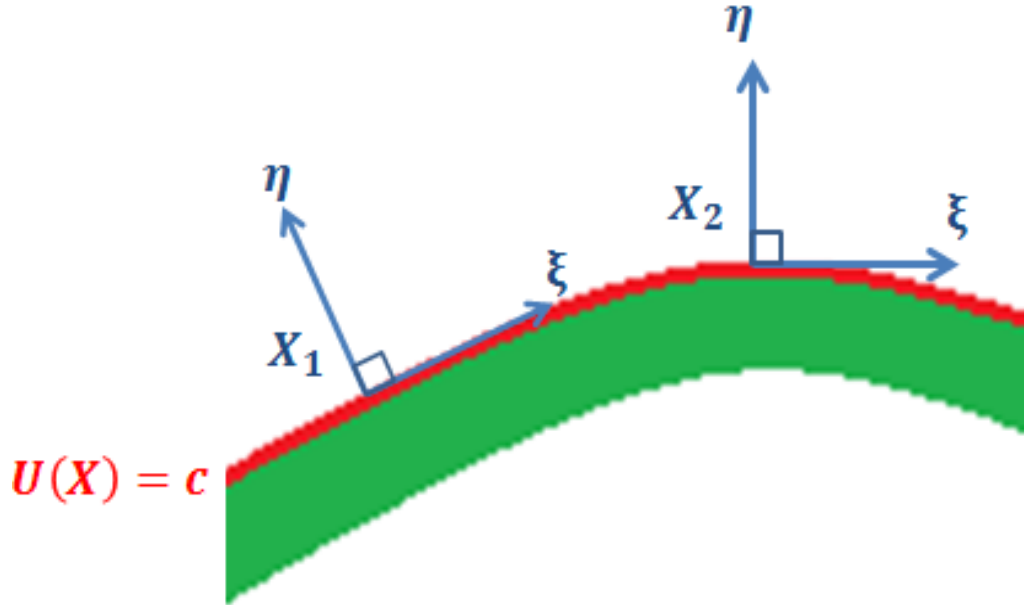


Figure 1.1.4 : Base orthonormale en chaque point de la ligne de niveau $U(X) = c$.

Afin d'identifier des caractéristiques telles que les angles ou de mesurer la cohérence locale des structures, un descripteur de structure qui prend en compte la manière dont l'orientation du gradient change au voisinage de tout point étudié est souhaitable. Le **tenseur de structure linéaire (TSL)** est l'estimateur le plus populaire pour étudier les orientations au lieu des directions des variations de l'image (pour de multiples applications

voir [120], [102], [48], [60]). Le tenseur de structure est une matrice donnée par la formule suivante :

$$L = G_\rho * (\nabla U_\sigma \nabla U_\sigma^T) \quad (1.1.15)$$

où $U_\sigma = U * G(0, \sigma)$ désigne la convolution de l'image par un noyau gaussien rendant l'estimation des structures insensible au bruit à des échelles inférieures à σ et la convolution du tenseur $\nabla U_\sigma \nabla U_\sigma^T$ par $G(0, \rho)$ permet non seulement de rendre l'estimation plus robuste aux textures ou aux artefacts présents au voisinage des contours mais aussi de déterminer la taille du voisinage pris en compte dans l'analyse des structures. Cela joue un rôle important dans la détection des coins ou des jonctions qui ne peuvent être déterminés qu'au travers des informations fournies par le voisinage.

En se plaçant dans le cas 2D, il est facile de vérifier que la matrice $L = (L_{i,j})_{i,j=1,2}$ est symétrique et semi-définie positive possédant ainsi deux vecteurs propres orthogonaux donnés par :

$$\begin{aligned} V &\parallel \left(L_{22} - L_{11} + \sqrt{(L_{22} - L_{11})^2 + 4L_{12}^2} \right), \\ V^\perp &\parallel \left(L_{22} - L_{11} + \sqrt{(L_{22} - L_{11})^2 + 4L_{12}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

et deux valeurs propres données par :

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \frac{1}{2} \left(L_{11} + L_{22} + \sqrt{(L_{22} - L_{11})^2 + 4L_{12}^2} \right), \\ \lambda^- &= \frac{1}{2} \left(L_{11} + L_{22} - \sqrt{(L_{22} - L_{11})^2 + 4L_{12}^2} \right). \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

En analysant les valeurs propres du **TSL**, on peut constater que dans les régions homogènes on aura ($\lambda^+ \approx \lambda^- \approx 0$) ; au voisinage d'un contour droit on aura ($\lambda^+ \gg \lambda^- \approx 0$) mais en présence d'une jonction, d'un angle ou d'une courbure on aura ($\lambda^+ \geq \lambda^- > 0$). Ainsi, la mesure $|\lambda^+ - \lambda^-|$, appelée mesure de la cohérence locale, fournit une très bonne information concernant l'anisotropie locale de l'image. Il est à noter que le vecteur V , correspondant à la valeur propre maximale λ^+ , fournit l'orientation de la variation maximale de l'intensité et que dans la pratique on utilise des versions normalisées des vecteurs propres ($\frac{V}{\|V\|}$ et $\frac{V^\perp}{\|V^\perp\|}$).

Pour les images 3D, le TSL (1.1.15) possède trois vecteurs propres orthogonaux qui fournissent les orientations locales des variations de l'image et les valeurs propres associées fournissent le contraste moyen le long de ces directions. Le vecteur propre associé à la valeur propre maximale représente la direction normale à la structure locale qui est une surface et les variations de niveaux de gris dans ce plan tangent sont données par les deux autres vecteurs.

Il existe des versions plus avancées de tenseurs de structure (présentées dans [91], [120] et [125]) qui permettent d'obtenir de meilleures performances que le TSL pour l'analyse des structures dont une version non linéaire du tenseur (1.1.15) qu'on présentera dans le chapitre 2.

1.2 Le cadre des EDP en traitement d'images

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont des expressions impliquant une fonction inconnue dépendant de plusieurs variables. Comme elles expriment des changements continus, elles sont omniprésentes pour formuler une multitude de phénomènes physiques: thermodynamique (équation de la chaleur), hydrodynamique (équations de Navier-Stokes), électromagnétisme (équations de Maxwell), optique (équation du flot optique) et bien d'autres domaines encore.

La restauration d'images est l'un des problèmes centraux du traitement des images numériques. Elle vise à améliorer la qualité d'une image, que ce soit pour un observateur humain ou comme étape de pré-traitement pour un système de vision par ordinateur. Le point crucial dans cette approche est de faire la distinction entre les caractéristiques importantes de l'image qui doivent être conservées, retrouvées ou même améliorées et les parties du contenu de l'image considérées comme du bruit et devant être supprimées. Dans cette section, on donne un bref aperçu de plusieurs classes de méthodes de traitement d'images fondées sur le formalisme des EDPs guidant notre réflexion pour construire des approches de restauration présentées aux chapitres suivants. Il est à noter qu'on décrit que les différentes classes de méthodes utilisées pour les images 2D, les équations pour les

images 3D sont assez similaires ou peuvent être trouvées dans les références citées dans le texte.

1.2.1 Diffusion isotrope

Équation de la chaleur

Certaines études (comme [128] par exemple) ont proposé une analyse multi-échelle de l'image par l'intermédiaire de convolutions successives de l'image originale par une série de noyaux gaussiens de tailles croissantes σ . Cela permet entre autre d'éliminer toute information qui présente des variations spatiales à des échelles inférieures à σ ce qui aboutit à des versions plus simplifiées de l'image. Ce procédé linéaire est utilisé pour atténuer le bruit et avoir une estimation plus fiable des structures de l'image. Koenderink [69] a montré que des résultats similaires peuvent être obtenus par le processus évolutif suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U \quad (1.2.1)$$

avec la condition initiale $U(X, 0) = U_0$ qui représente l'image originale à traiter (les conditions initiales sont les mêmes pour toutes les méthodes présentées dans cette thèse et ne seront donc pas écrites explicitement à chaque fois) et les conditions sur les bords de l'image $\partial\Omega$:

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}(X) = 0, \forall X \in \partial\Omega \quad (1.2.2)$$

L'utilisation de l'équation (1.2.1) correspond au filtrage de l'image U_0 itérativement en lui ajoutant à chaque itération son laplacien ; une famille multi-échelle $U(X, t)$ est obtenue où le temps t représente le paramètre d'échelle (pour des exemples d'application de l'analyse multi-échelle voir [76] [77], [64] et [68]). Il est à noter que les mêmes résultats de (1.2.1) sont obtenus en convoluant l'image par un noyau gaussien d'écart-type $\sigma = \sqrt{2t}$.

L'utilisation de l'EDP de la chaleur ici est motivée par la considération de la distribution des niveaux de gris de l'image comme de la distribution des intensités de chaleur et le processus de la diffusion d'information est considéré comme de la conduction de chaleur dans un matériau isotrope en isolation thermique totale avec son environnement d'où

les conditions aux limites de Neumann (1.2.2). Cela permet de faire une diffusion dans toutes les directions de manière non privilégiée (**diffusion isotrope**) sans tenir compte des structures de l'image. Un tel schéma de diffusion entraîne un mélange des intensités ce qui va altérer significativement les contours. La figure 1.2.1 présente une image à laquelle on applique l'équation (1.2.1) où on remarque que l'image devient de plus en plus floue lorsque t augmente. Dans le cadre de la restauration d'images floues, par une approche



Figure 1.2.1 : Application de l'équation de la chaleur : (a) image originale, (b)-(c)-(d) images auxquelles on a appliqué l'équation (1.2.1), respectivement pour des temps $t=1, 2, 5$.

simpleste, il semble donc raisonnable de lui appliquer l'équation de la chaleur inverse, c'est

à dire :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\Delta U \quad (1.2.3)$$

cette méthode ne donne des résultats acceptables que pour des petites valeurs de t ou quand l'image n'est pas bruitée car la résolution numérique de (1.2.3) est intrinsèquement instable et est très sensible aux conditions initiales ; ceci est illustré dans la figure 1.2.2 . On verra plus loin une autre approche bien plus stable appelée *filtrage de choc*. Des

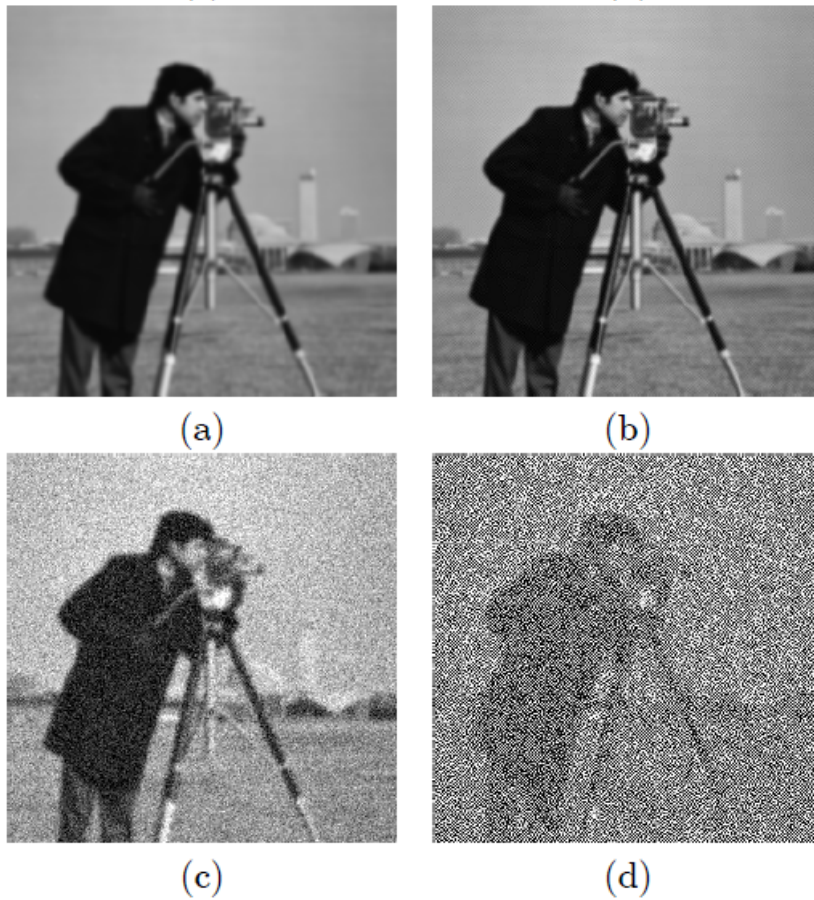


Figure 1.2.2 : Application de l'équation de la chaleur inverse : (a) image à laquelle on a appliqué l'équation (1.2.1) pour $t=1$, (b) on a appliqué l'équation (1.2.3) à l'image (a) pour $t=0.5$, (c) bruit gaussien ajouté à l'image (a), (d) on a appliqué l'équation (1.2.3) à l'image (c) pour $t=0.5$.

travaux réalisés dans le cadre de l'amélioration du lissage isotrope ont été abordés ([24],

[59], [97], [40], [45] et [46]) mais toute variante des modèles linéaires doit être effectuée en sacrifiant leurs linéarités. On verra comment ces difficultés peuvent être surmontées par l'utilisation de modèles non linéaires. Les travaux réalisés dans ce cadre feront l'objet du paragraphe suivant. Il est à noter quand dans cette thèse on utilise le terme **anisotrope** en opposition à **isotrope**. En considérant le formalisme de Weickert [124], cela se traduit par non-homogène et homogène.

1.2.2 Diffusion anisotrope

Équation de Perona-Malik

En 1987, Perona et Malik [98] ont introduit la notion de diffusion anisotrope ; cette dernière est privilégiée dans certaines directions de telle sorte à préserver les contours lors du processus de diffusion. L'idée est construite sur le fait que l'équation (1.2.1) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla U) \quad (1.2.4)$$

Les auteurs remplacent la conductivité constante de l'équation de la chaleur (1.2.4) par une fonction scalaire $g(\|\nabla U\|)$ qui prend en compte les propriétés locales de l'image. L'équation correspondante est :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div}(g(\|\nabla U\|)\nabla U) \quad (1.2.5)$$

Ici, la fonction g , appelée fonction de diffusivité ou fonction stop, est choisie de manière à conduire à un lissage adaptatif et est définie comme une fonction décroissante prenant des valeurs importantes dans les zones homogènes et proche de zéro en présence de contours. Plusieurs exemples de telles fonctions peuvent être trouvées dans [5]. Dans l'article [99], les auteurs proposent les fonctions suivantes :

$$g(\|\nabla U\|) = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla U\|^2}{k^2}} \quad (1.2.6)$$

$$g(\|\nabla U\|) = \exp\left(-\frac{\|\nabla U\|^2}{k^2}\right) \quad (1.2.7)$$

où la variable k joue le rôle de paramètre de contraste pour distinguer les régions à lisser des discontinuités devant être conservées. Pour étudier le comportement du processus

de diffusion via l'équation (1.2.1), certains auteurs ([31] et [72]) ont remarqué qu'en la développant et en utilisant un changement de base, elle peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c_\xi U_{\xi\xi} + c_\eta U_{\eta\eta} \quad (1.2.8)$$

où $c_\xi = g(\|\nabla U\|)$ et $c_\eta = g(\|\nabla U\|) + \|\nabla U\|g'(\|\nabla U\|)$. Ici, $U_{\xi\xi}$ et $U_{\eta\eta}$ représentent les dérivées directionnelles suivant les vecteurs ξ et η décrits dans (1.1.14). Ainsi, une interprétation du comportement directionnel de la diffusion est rendue plus facile en utilisant cette écriture dite en *laplaciens orientés*. En effet en traçant les courbes représentatives des fonctions c_ξ et c_η (voir figure 1.2.3), on observe que c_ξ et c_η sont proches de 1 dans les zones homogènes car $\|\nabla U\| \simeq 0$ et le comportement local de l'équation (1.2.8) s'approche d'une diffusion isotrope type (1.2.1). Par contre, plus la norme du gradient augmente moins le lissage est important dans la direction tangentielle aux lignes de niveau car c_ξ s'approche de 0 tandis que dans la direction du gradient on constate un effet de rehaussement des contours dû au fait que c_η devient négatif à partir d'un certain seuil dépendant du paramètre k ($\|\nabla U\| > k$ pour la fonction donnée en (1.2.6) et $\|\nabla U\| > k\sqrt{2}$ pour celle donnée en (1.2.7)). Cela engendre un comportement local type équation de la chaleur inverse (1.2.3), connue pour son instabilité, dans les zones à très fort gradient. Le choix du paramètre k est généralement fondé sur une connaissance à priori des variations de l'image et est choisi d'une manière adaptative. Plusieurs travaux se sont intéressés au choix du paramètre de contraste ([127], [17], [75] et [49]) ; le point commun entre ces méthodes est le choix qui est fait d'une manière globale. D'autres travaux, notamment [22], choisissent le paramètre k d'une manière locale semi-automatiquement. Plus de précisions en rapport avec cette technique seront données dans le chapitre suivant.

Le comportement de l'équation (1.2.8), décrit précédemment, aboutit à une transition entre lissage et rehaussement, ce qui améliore significativement l'aspect visuel de l'image par rapport à la diffusion isotrope vue dans la section précédente. Néanmoins, lorsque l'image présente un niveau de bruit élevé, la diffusion inverse a tendance à l'amplifier au lieu de le supprimer. Certains travaux ont été effectués dans ce sens, à l'exemple de Kichenassamy dans [67] qui a montré que le problème de Perona-Malik n'est pas bien

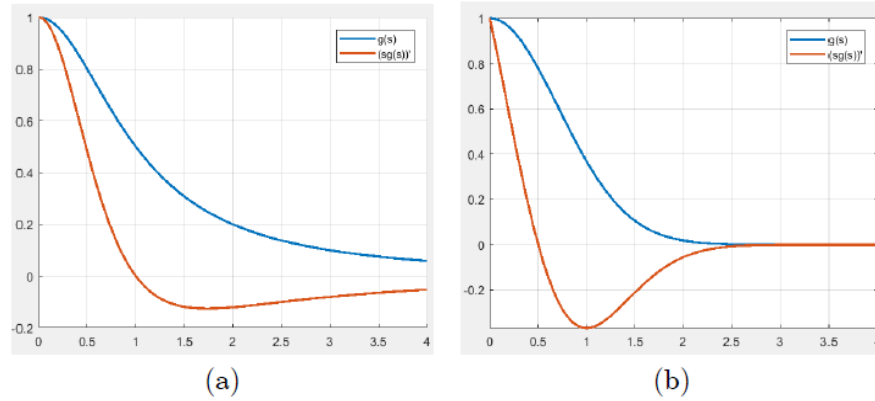


Figure 1.2.3 : Courbes représentatives des coefficients c_ξ (en bleu) et c_η (en orange) pour (a) la fonction rationnelle et (b) la fonction exponentielle.

posé dans le cadre continu (pour une étude théorique complète le lecteur peut se référer à [124]). Le problème théorique soulevé par le modèle précédent a conduit à une version régularisée introduite par Cattée et al. [25]. Elle consiste à lisser l'image en amont par un noyau gaussien, ce qui permet de distinguer les forts gradients provenant du bruit de ceux provenant des structures. Ce modèle contourne non seulement l'inconvénient du modèle de Perona-Malik concernant l'amplification du bruit et de plus le modèle est bien posé et numériquement stable. Dans le même cadre, d'autres chercheurs ont proposé d'autres versions plus complexes ([127], [93] et [11]).

En fin de compte, la formulation de Perona-Malik a été l'impulsion de départ pour une multitude de nouvelles méthodes impliquant des EDP non linéaires en traitement d'images. On passera rapidement en revue les principales approches dans les sections suivantes.

Méthodes variationnelles

Initialement introduite par Tikhonov [116] comme technique pour déterminer des solutions de problèmes mal posés, les méthodes variationnelles sont également devenues populaires dans le domaine du traitement d'image ([94], [109], [31], [107] et [108]). Dans le cadre de la régularisation d'une image bruitée, l'idée est de minimiser les variations de

l'image U par :

$$\min_{U:\Omega\rightarrow\mathbb{R}} E(U) = \int_{\Omega} \phi(\|\nabla U\|)d\Omega \quad (1.2.9)$$

De la sorte, cela consiste à trouver U en minimisant une fonction-coût $E(U)$, appelée énergie par analogie physique où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante qui maîtrise le comportement de la régularisation et pénalise les gradients forts. Ici, l'objectif est de supprimer les faibles variations de l'image dues principalement au bruit, tout en préservant les hautes représentant les contours de l'image. Il est à noter que dans l'approche originale [116] un terme supplémentaire, appelé terme d'attache aux données, $\|U_0 - U\|$ est ajouté afin que U soit proche de la donnée originale U_0 . Ici, le point important sur lequel on insiste est la minimisation du seul terme de régularisation qui aboutit à la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange associé via la méthode itérative de descente de gradient. Cela aboutit à l'EDP de diffusion suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\dot{\phi}(\|\nabla U\|)}{\|\nabla U\|} \right) \quad (1.2.10)$$

Il est évident que par un choix adapté de la fonction de pénalisation ϕ , un certain nombre d'approches pourrait être reformulé. À titre d'exemple pour $\phi(\|\nabla U\|) = \|\nabla U\|^2$, on retrouve l'équation de diffusion isotope (1.2.1), pour $\phi(\|\nabla U\|) = 1 - \exp(-\frac{\|\nabla U\|^2}{k^2})$ l'équation (1.2.10) coïncide avec le modèle de Perona-Malik (1.2.5) ou encore pour $\phi(\|\nabla U\|) = \|\nabla U\|$ on obtient le célèbre flot de variation totale [106]. D'autres choix possibles peuvent être trouvés dans [92]. Par ce caractère unificateur, il semble donc judicieux de choisir la fonctionnelle ϕ afin d'orienter le comportement du processus de diffusion de l'équation (1.2.10) ; certains auteurs ([132], [72]) proposent la formulation en laplaciens orientés suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c_{\xi}U_{\xi\xi} + c_{\eta}U_{\eta\eta} \quad (1.2.11)$$

où $c_{\xi} = \frac{\dot{\phi}(\|\nabla U\|)}{\|\nabla U\|}$ et $c_{\eta} = \phi(\|\nabla U\|)$. De la sorte certains critères doivent être satisfaits par les coefficients c_{ξ} et c_{η} :

- Éviter la diffusion inverse, pour cela il est impératif que c_{ξ} et c_{η} soient toujours positifs.

- Prévenir l'effet de flou au voisinage des contours en lissant l'image de préférence dans la direction des lignes de niveaux ξ au lieu que dans celle du gradient.
- Reproduire une diffusion isotrope dans les zones homogènes.

Certaines fonctions, proposées dans la littérature, respectent ces contraintes ([30] et [53]). Cependant, il est à remarquer que c_ξ et c_η ne sont pas indépendants mais liés par une fonction qui désactive au moins un degré de liberté. Cet inconvénient peut être contourné par des formulations permettant plus d'indépendance pour concevoir l'EDP de diffusion faisant l'objet des deux sous-sections suivantes.

Modèles tensoriels

Jusqu'à présent, dans la plupart des EDP présentées précédemment les structures de l'image sont représentées par le vecteur gradient (direction et amplitude). À partir d'une loi physique (loi de Fick), Weickert [124] propose d'utiliser un tenseur pour contrôler la diffusion au lieu d'une diffusivité scalaire. Ce nouvel outil se base sur un calcul préalable de l'orientation des structures locales de l'image à travers le TSL (1.1.15) dont on a détaillé les avantages dans la section 1.1.4. Le modèle tensoriel est formulé comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{div}(T\nabla U) \quad (1.2.12)$$

où T est une matrice symétrique semi-définie positive qui s'écrit en utilisant une décomposition spectrale :

$$T = \mu_1 VV^T + \mu_2 V^\perp V^{\perp T} \quad (1.2.13)$$

où V et V^\perp sont les vecteurs propres du TSL donnés par (1.1.16) et les valeurs propres μ_1 et μ_2 sont choisies de telle sorte à contrôler les quantités de diffusion selon ces orientations et cela selon l'application visée. En débruitage d'image, les valeurs propres peuvent être choisies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mu_1 = 1 - \exp\left(\frac{-1}{\left(\frac{|\lambda^+ + \lambda^-|}{k}\right)^2}\right) \\ \mu_2 = 1 \end{cases} \quad (1.2.14)$$

où $k > 0$ est un paramètre de contraste et μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres du TSL. Ce modèle, appelé *Edge Enhancing Diffusion (EED)*, se caractérise par un comportement isotrope en zones homogènes ($\mu_1 \simeq \mu_2$) et un fort et permanent lissage le long des contours ($\mu_1 \simeq 1$).

Un autre modèle, appelé *Coherence Enhancing Diffusion (CED)*, consiste à améliorer des images présentant des structures orientées (telles les images d'empreintes digitales figure 1.2.4). Pour favoriser le filtrage unidirectionnel le long des structures, les valeurs propres peuvent être déterminées par exemple par :

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha, \\ \mu_2 = \alpha + (1 - \alpha) \exp\left(\frac{-1}{(\lambda^+ - \lambda^-)^2}\right) \end{cases} \quad (1.2.15)$$

avec $\alpha > 0$ détermine la vitesse de diffusion ; il est choisi généralement proche de zéro pour favoriser une diffusion dans la direction tangentielle aux contours. En présence de structures marquées ($\mu_2 \simeq 1$), le modèle permet de les améliorer voir même de reconstruire les contours interrompus. Mais, dans certains cas cette méthode crée de nouvelles structures ce qui n'est pas souhaitable. Pour contourner ce problème, d'autres versions plus complexes ont été proposées, par exemple le travail de [88] permet de balancer entre la CED et le EED localement. Il est à noter que les premiers modèles tensoriels ont été proposés dans [33] et [34]. Mais c'est la formulation de Weickert qui a permis de reproduire les propriétés des modèles de diffusion scalaire vue dans les sections précédentes. Par exemple si $\mu_1 = \mu_2 = 1$, on retrouve le comportement de l'équation de la chaleur (1.2.1) ou encore si $\mu_1 = \mu_2 = g(\|\nabla U\|)$ avec g une fonction stop, on reproduit l'effet du processus de diffusion de Pérona-Malik (1.2.5).

Modèles directionnels

Pour ces méthodes directionnelles, dites en laplaciens orientés, le processus de diffusion est considéré comme deux flux de chaleur 1D orthogonaux et pondérés. La forme générale de l'équation de diffusion est la suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c_1 U_{V_1 V_1} + c_2 U_{V_2 V_2} \quad (1.2.16)$$

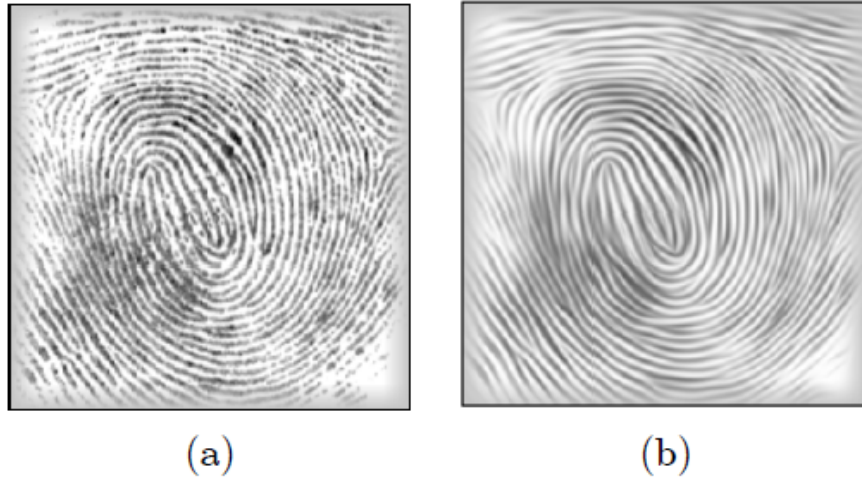


Figure 1.2.4 : Le modèle CED appliqué à une image d'empreinte digitale : (a) image originale, (b) amélioration de l'image.

Ici, le comportement de diffusion est entièrement défini par la connaissance des directions de lissage V_1 et V_2 (où $V_1 \perp V_2$) et les poids correspondants c_1 et c_2 (avec $c_1, c_2 \geq 0$). Ainsi, en choisissant $V_1 = \xi$ et $V_2 = \eta$ la formulation (1.2.16) permet de retrouver des équations bien connues comme celles présentées précédemment : (1.2.1), (1.2.5) et (1.2.11). Un autre exemple tout aussi intéressant est l'équation du mouvement par courbure moyenne [111], obtenu avec $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_{\xi\xi} \quad (1.2.17)$$

Ici, les auteurs optent pour l'annulation de la diffusion dans la direction du gradient pour interdire la diffusion entre les régions et préserver ainsi davantage les contours. D'un point de vue géométrique, cette équation fait évoluer les lignes de niveau de l'image selon une vitesse proportionnelle à leur courbure moyenne dans la direction du gradient. L'équation (1.2.17) perd son caractère isotrope même dans les zones homogènes, ce qui n'est pas désirable.

D'autres auteurs ([73] et [71]) proposent de choisir $c_1 = 1$ et $c_2 = g(\|\nabla U\|)$ une fonction stop (proche de 1 en régions homogènes et de 0 en présence d'un contour),

l'équation correspondante est:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_{\xi\xi} + g(\|\nabla U\|)U_{\eta\eta} \quad (1.2.18)$$

Cela permet de retrouver le comportement d'une diffusion isotrope dans les régions homogènes et un lissage fort et permanent le long des contours, même quand le gradient est très élevé, ce qui a pour effet de ne pas préserver les structures géométriques tels que les coins.

La formulation (1.2.16) permet de voir la solution du problème de filtrage comme un choix adapté des orientations V_1 et V_2 et des poids c_1 et c_2 . Dans le souci de trouver un bon compromis entre les objectifs de robustesse contre le bruit et de permettre une préférence géométrique pour l'orientation de la diffusion, certains auteurs (comme dans [112]) ont vu préférable d'utiliser les informations fournies par le TSL (1.1.15) en prenant $V_1 = V^\perp$, $V_2 = V$ et en choisissant des coefficients c_1 et c_2 dépendants de ses valeurs propres λ^+ et λ^- avec la propriété que c_2 décroisse plus vite que c_1 (à titre de rappel $V^\perp, V^\perp, \lambda^+$ et λ^- sont donnés dans (1.1.16) et (1.1.17)). Ce qui a permis d'apporter des améliorations significatives en restauration d'image en effectuant la diffusion dans l'orientation locale préférentielle selon une force adéquate.

A ce stade, on est amené à se demander si les deux processus de diffusion basée tenseur (1.2.12) et basée laplaciens orientés (1.2.21) coïncident?

La réponse est négative dans le cas général, précisément dans le cas où les coefficients c_1 et c_2 varient. Dans [117], la relation entre les deux formalismes a été étudiée en détail. Ici, on en donne que quelques points essentiels :

L'auteur a tout d'abord remarqué que les expressions des dérivées directionnelles secondes dans les directions V_1 et V_2 peuvent s'écrire sous la forme :

$$U_{V_1V_1} = V_1^T H V_1 \text{ et } U_{V_2V_2} = V_2^T H V_2 \quad (1.2.19)$$

où H est la matrice hessienne de U définie par :

$$H = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{pmatrix} \quad (1.2.20)$$

L'auteur a ensuite formulé une nouvelle écriture de l'équation (1.2.16) par une forme plus pratique :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \text{trace}(TH) \quad (1.2.21)$$

où T est la matrice 2×2 symétrique dont les valeurs propres sont c_1 et c_2 et les vecteurs propres respectifs sont V_1 et V_2 , donnée par :

$$T = c_1 V_1 V_1^T + c_2 V_2 V_2^T \quad (1.2.22)$$

Le développement du terme de divergence $\text{div}(T\nabla U)$ donne :

$$\text{div}(T\nabla U) = \text{trace}(TH) + \nabla U^T \vec{\text{div}}(T) \quad (1.2.23)$$

où

$$\vec{\text{div}}(T) = \begin{pmatrix} (T_{11})_x + (T_{12})_y \\ (T_{21})_x + (T_{22})_y \end{pmatrix} \quad (1.2.24)$$

De ce fait, $\text{div}(T\nabla U) \neq \text{trace}(TH)$, de plus le terme supplémentaire $\nabla U^T \vec{\text{div}}(T)$ apporte un changement non négligeable dans le résultat de restauration d'images. Une discussion plus approfondie sur le lien étroit entre les laplaciens orientés et la diffusion tensorielle peut être trouvée dans [117] où une formulation générale, regroupant les deux modèles, a été proposé.

Filtrage de choc

Dans le cadre de rehaussement des contours flous, Osher et Rudin proposent le premier filtre de choc [105] :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\text{sign}(\Delta U) \|\nabla U\| \quad (1.2.25)$$

Ici, ΔU est utilisé afin de détecter les points d'inflexion (passage par zéro de la dérivée seconde). Rehausser les structures de l'image consiste à mettre en évidence certains éléments pertinents de l'image en renforçant leur contraste. Un tel comportement est illustré pour le cas unidimensionnel par la figure 1.2.5 ; un filtre de choc transforme progressivement un signal sigmoïdal en un échelon en abaissant ou en rehaussant les valeurs d'intensité avec une amplitude correspondante à la valeur de la norme du gradient.

Ce comportement recrée une discontinuité (choc) au niveau du point d'inflexion. Cette équation inverse est instable et les auteurs proposent quelques aménagements numériques pour contourner cet inconvénient. Dans le cas où l'image présente un niveau de bruit

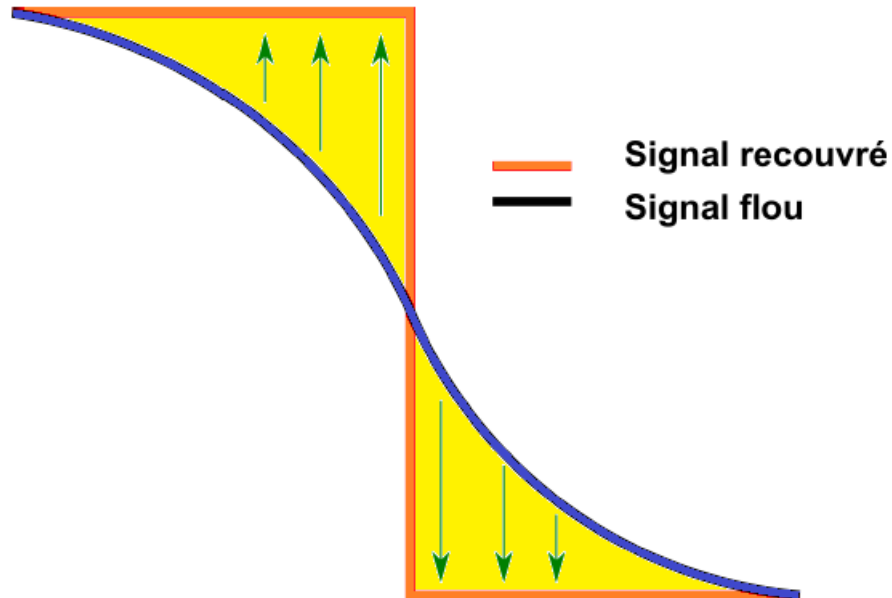


Figure 1.2.5 : Filtre de choc appliqué à un signal sigmoïdal

important, le rehaussement est perturbé, certains auteurs [2] proposent comme solution d'utiliser une version lissée de l'image originale par un noyau gaussien $U_\sigma = G_\sigma * U$, l'EDP associée prend la forme de :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\text{sign}((U_\sigma)_{\eta\eta}) \|\nabla U\| \quad (1.2.26)$$

Ici, le laplacien est remplacé par la dérivée directionnelle seconde suivant la direction η du gradient. Pour rendre la détection des points d'inflexion encore plus robuste au bruit, d'autres auteurs (comme dans [126]) proposent d'utiliser les estimations fournies par le TSL (1.1.15) comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\text{sign}(U_{VV}) \|\nabla U\| \quad (1.2.27)$$

Dans ce filtre, le vecteur η est remplacé par le vecteur propre V associé à la valeur propre maximale λ^+ du TSL (1.1.16). Ce type de filtrage est souvent couplé au modèle

de restauration d'image afin de compenser l'effet du flou créé par le processus de diffusion. De la sorte, il contribue à la préservation des éléments significatifs de l'image tout en améliorant la netteté des contours. De tels schémas couplés sont appelés schémas d'*advection-diffusion*. Ce procédé sera illustré dans le chapitre suivant.

1.3 Résolution numérique des EDP

La plupart des EDP décrites dans la section précédente peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = R(U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}), & \text{pour } t > 0 \text{ et } (x, y) \in \Omega \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y) & \text{pour } (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad (1.3.1)$$

où R décrit la relation entre $\frac{\partial U}{\partial t}$ et les dérivées successives de l'image U suivant x et y .

La méthode des différences finies se révèle particulièrement adaptée à la résolution numérique des EDP en traitement d'images. Sa prépondérance est due principalement au fait que l'image numérique est stockée sur un ordinateur à l'aide d'une représentation discrète dans laquelle elle est décrite par un ensemble fini de points (pixels) espacés sur une grille régulière. Afin de résoudre l'EDP (1.3.1), il est alors naturel de considérer le maillage suivant :

$$x_i = ih, \quad y_j = jh \text{ et } t_n = n\Delta t \text{ avec } i = \{0, 1, \dots, M - 1\}, \quad j = \{0, 1, \dots, N - 1\} \text{ et } n = \{0, 1, \dots, T - 1\}$$

où M et N correspondent respectivement aux nombres de lignes et colonnes dans l'image, le pas h désigne la distance spatiale entre deux pixels (en pratique on prend $h = 1$), Δt le pas de discrétisation du temps et n le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'échelle t ($t = \Delta t \times T$). Le choix de Δt repose sur deux critères : le premier est le nombre d'itérations requis pour effectuer le traitement ; par conséquent il ne doit pas être trop petit et le second est la stabilité numérique du schéma numérique ; ce qui impose qu'il ne doit pas être trop grand non plus. Ainsi, la fonction $U(x, y, t)$ devient $U(x_i, y_j, t_n)$ qu'on note en écriture indicielle $U_{i,j}^n$.

Le schéma d'Euler explicite est souvent choisi en raison de son implantation simple et sa rapidité. Il repose sur le calcul de la dérivée en temps par l'approximation décentrée à

droite :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (1.3.2)$$

Pour approximer les dérivées spatiales, une démarche classique consiste à utiliser les différences finies centrées. Cela donne pour les dérivées d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{i,j}^n &= \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2h} \\ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{i,j}^n &= \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2h} \end{aligned}$$

et pour les dérivées d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n &= \frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{i,j}^n &= \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_{i,j}^n &= \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n}{h^2} \end{aligned}$$

de la sorte, on aura le système itératif suivant :

$$\begin{cases} U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta t [R(U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy}, U_{xy})]_{i,j}^n \\ U(x_i, y_i, 0) = U_{i,j}^0 \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Pour mieux présenter le principe de cette démarche on donne ci-dessous, à titre d'exemple, la discrétisation de l'équation de la chaleur (1.2.1) :

$$U_{i,j}^{n+1} = (1 - 4\Delta t)U_{i,j}^n + \Delta t(U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) \quad (1.3.4)$$

Il est clair que (1.3.4) est très simple à implémenter (pour remplir la condition de stabilité, le pas de temps doit être choisi : $\Delta t \leq 0.25$). Pour plus de détails sur les méthodes de résolution des EDP en traitement d'images, on renvoie le lecteur à [124].

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté dans la section 1.2 les principales EDP utilisées pour restaurer les images. On ne peut conclure que cet état d'art est complet sans renvoyer aux recherches entreprises et récapitulées dans les ouvrages ([5], [80], [83] et [51]). On a vu aussi que les méthodes directionnelles, se basant sur les informations fournies par le tenseur de structure, permettent d'effectuer la diffusion dans l'orientation locale préférentielle selon une force adéquate. Cet aspect a motivé notre démarche pour utiliser ce formalisme dans nos approches de restauration qu'on présente dans les deux chapitres suivants.

Inpainting par diffusion anisotrope basée sur le tenseur de structure non linéaire et le filtrage de choc

Dans cette partie, on présente une technique d'inpainting combinant un processus de diffusion anisotrope par une équation aux dérivées partielles et le filtrage de choc. Cette technique se base sur un tenseur de structure non linéaire (TSNL) afin d'évaluer la vitesse et l'orientation de la diffusion ainsi que les filtres de choc pour préserver au mieux les structures géométriques présentes dans l'image. Une méthodologie de partitionnement et d'ajustement est utilisée pour estimer les paramètres de contraste qui contrôlent la force des fonctions stop ; ce qui surmonte l'inconvénient du choix de plusieurs paramètres d'une manière adaptative. On présente aussi un schéma numérique pour lequel on dérive une condition de stabilité et un nouvel algorithme d'inpainting permettant de restaurer des régions manquantes relativement larges dans des images en niveaux de gris contenant des géométries complexes. Notre modèle est étendu au cas tridimensionnel où des expérimentations numériques ont été menées sur le remplissage des lésions cérébrales de la sclérose

en plaques sur des images médicales. L'efficacité et la compétitivité de l'algorithme proposé sont comparées numériquement à d'autres approches sur des images synthétiques et réelles. Il est à noter que ces travaux ont déjà fait l'objet de deux publications [12] et [13].

Avant de rentrer dans le vif du sujet, on commence par introduire la problématique de l'inpainting en imagerie en présentant un état de l'art des méthodes existantes dans ce cadre.

2.1 Inpainting d'images

2.1.1 Définition et principe

Le terme "inpainting" vient du monde de l'art et signifie restauration de parties manquantes ou endommagées d'images à la main. Dans le monde numérique, le processus d'inpainting fait allusion à l'application d'algorithmes pour remplacer les données manquantes ou corrompues de l'image à partir des données préservées. La terminologie de l'inpainting numérique est apparue pour la première fois dans les travaux de Bertalmio et al. [14]. Le but est de combler la région cible par un contenu approprié au point de rendre les zones reconstruites difficilement décelables. Le problème de l'inpainting est essentiellement un type d'interpolation et peut être formulé de la manière suivante :

Étant donnée une image U_0 définie sur un domaine Ω , soit un sous-ensemble $D \subset \Omega$ une partie de l'image considérée manquante. L'objectif est d'estimer la valeurs des pixels à l'intérieur du domaine D à partir de l'information disponible dans $\Omega \setminus D$ (figure 2.1.1).

La première étape de l'inpainting consiste à délimiter la région à reconstruire. Cette étape correspond à la construction d'un masque binaire où les régions manquantes sont identifiées. Dans ce travail, cette phase préliminaire est faite d'une manière manuelle. Pour une application donnée, il est envisageable d'automatiser l'étape de la construction du masque à l'aide d'algorithmes appropriés. Ce domaine à interpoler, qui peut être de forme et de taille quelconque, influe beaucoup sur le résultat de l'inpainting car il peut inclure plusieurs régions de l'image ayant des textures différentes et contenir des objets à géométries complexes. Il est important de noter aussi que l'objectif de l'inpainting est

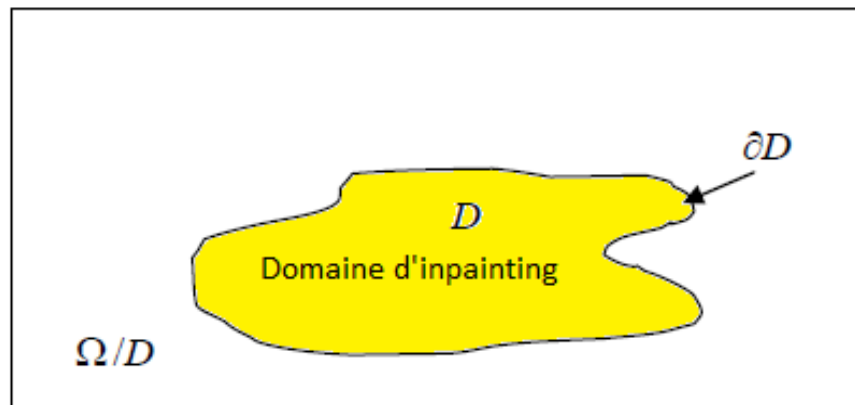


Figure 2.1.1 : Objectif de l'inpainting

de reconstruire un contenu plausible. Par conséquent, il peut y avoir plusieurs résultats différents acceptables (exemple figure 2.1.2).

Domaines d'application

Il existe plusieurs facteurs qui peuvent conduire à la détérioration ou au manque d'informations dans une image. Ainsi, l'inpainting est largement utilisé dans différentes applications :

- La restauration de photographies et de vieux films (figure 2.1.3),
- La suppression cohérente d'objets réels dans des images (figure 2.1.4),
- L'effacement d'un texte dans une image comme l'élimination de dates, de sous-titres ou de publicités (figure 2.1.5),
- La restauration numérique de peintures anciennes à des fins de conservation sans altération du tableau réel pendant les essais (figure 2.1.6),
- La reconstruction à très haute résolution et l'agrandissement (figure 2.1.7),
- La désocclusion (Figure 2.1.8),
- La correction d'erreurs lors de la transmission d'images (voir [74]),

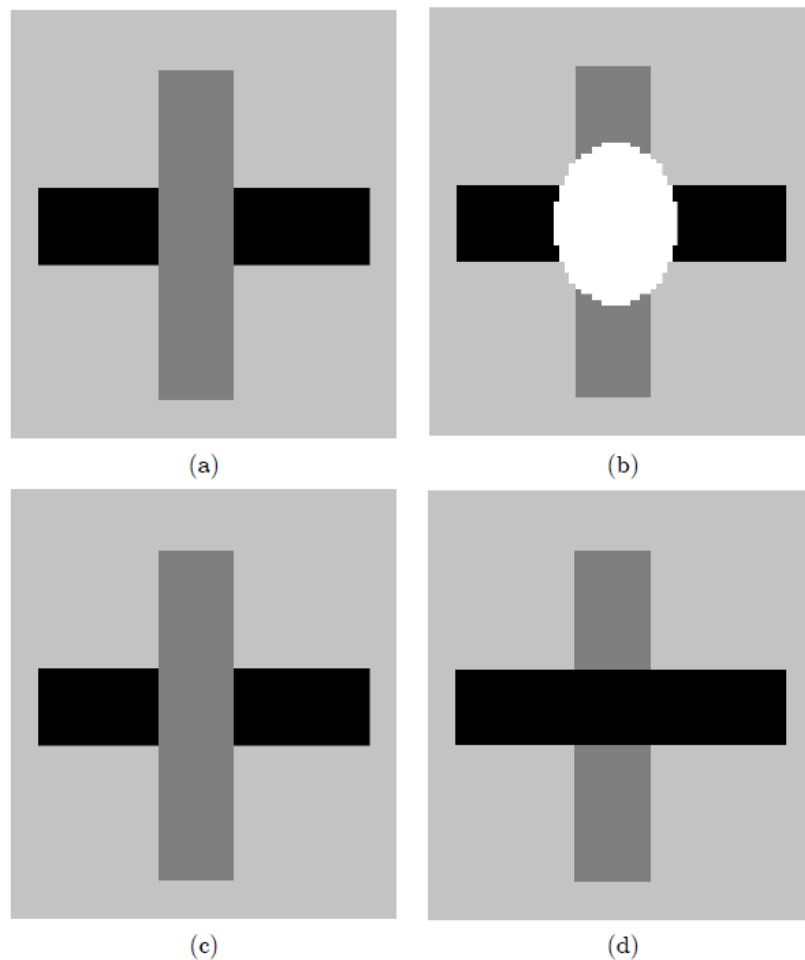


Figure 2.1.2 : Différentes solutions au même problème d'inpainting : (a) image originale, (b) image masquée, (c) solution 1, (d) solution 2.

- L'aide au diagnostic médical (figure 2.1.9).

2.1.2 États de l'art de l'inpainting

L'inpainting d'images numériques a connu ses débuts dans les travaux d'ingénieurs et d'informaticiens par des approches statistiques et des algorithmes dit de "copier-coller". Il a été utilisé particulièrement pour la correction d'erreurs lors de la transmission d'images ([74], [63]), l'interpolation de données manquantes dans des images et des vidéos ([4], [70]) et la suppression d'objets dans des images par synthèse de textures ([58])



Figure 2.1.3 : Élimination des rayures d'une vieille photographie [14]



Figure 2.1.4 : Suppression d'un objet indésirable dans une image [14]

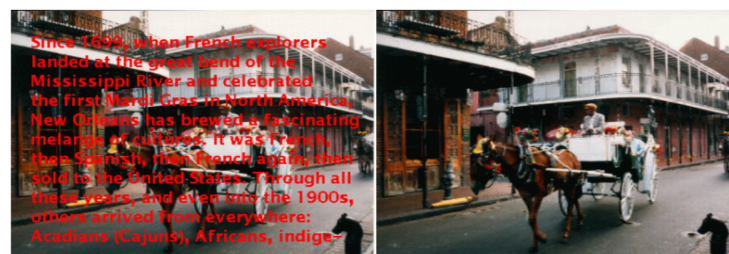


Figure 2.1.5 : Effacement d'un texte dans une image [14]

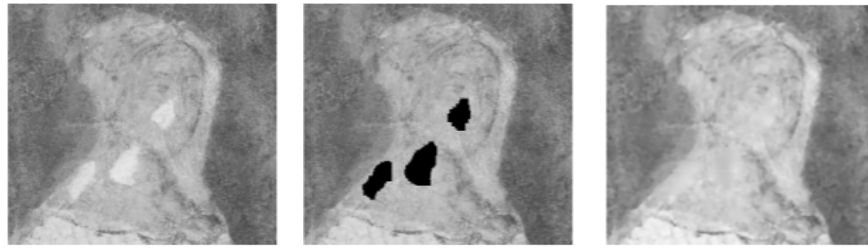


Figure 2.1.6 : Restauration d'une ancienne fresque [7]



Figure 2.1.7 : Agrandissement d'une image par un facteur de 4 [112]

Initiée par les travaux précurseurs de [84], [14] et [26], la communauté mathématique s'est également impliquée pour résoudre la problématique de l'inpainting en utilisant principalement des équations aux dérivées partielles et des méthodes variationnelles. À partir de là, différentes stratégies ont été envisagées pour proposer une solution à ce problème et deux grandes classes ont émergé "**les méthodes orientées textures**" et "**les méthodes orientées structures**". La première classe se base sur la synthèse et la reconstruction de la texture ([35], [42], [39], [44], [54], [104] et [131]). Ces méthodes sont basées sur la recherche et la copie de patchs similaires au voisinage de la région à reconstruire grâce à des modèles statistiques du contenu de l'image. Le remplissage s'effectue du bord extérieur vers le centre de la région cible et un ordre de remplissage est généralement adopté. Par exemple, dans [35], les patchs des zones à fort gradient (présence de contours) sont traités en premier. Ces méthodes de rééchantillonnage non-paramétrique, dites également méth-

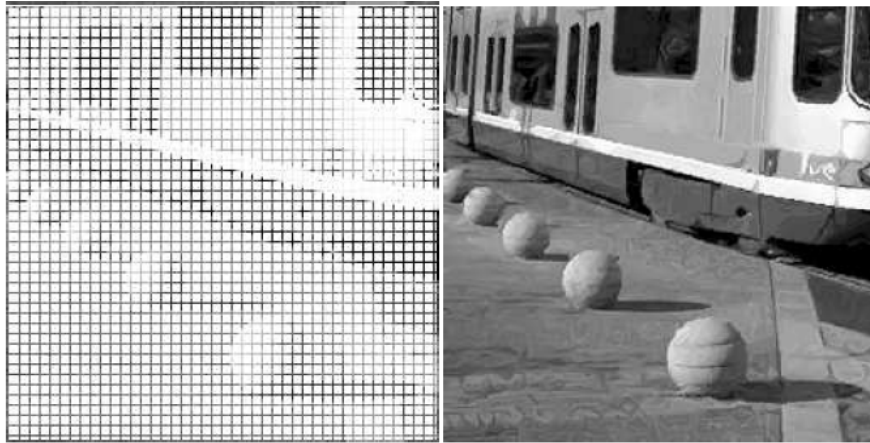


Figure 2.1.8 : Elimination d'occlusions dans une image [85]

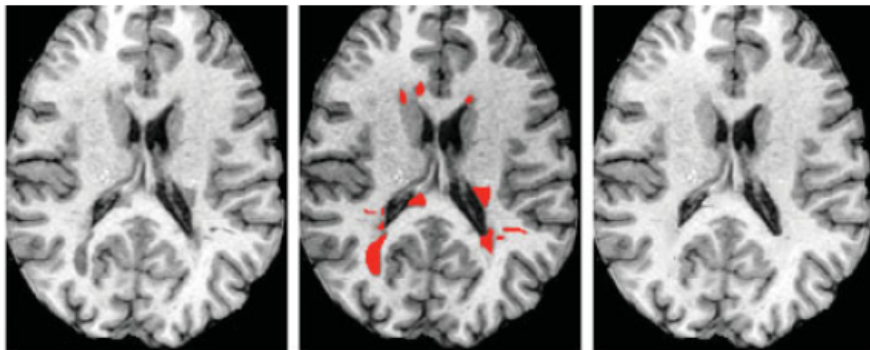


Figure 2.1.9 : Inpainting des lésions de sclérose en plaques dans une image IRM [110]

odes par l'exemple, ont prouvé leur capacité à reconstruire des structures stochastiques dans les régions cibles, mais aussi, dans une certaine mesure, la géométrie. Toutefois, dans le cas où un patch non optimal aurait été choisi, ceci peut arriver lorsque le masque coupe un contour, le contour sera reconstruit de part et d'autre sans aucune certitude de joindre les deux extrémités au centre. Ceci rend d'autant plus délicat la stratégie de remplissage qui est une difficulté en soi. La deuxième classe se focalise sur la reconstruction des structures géométriques de l'image. Parmi ces méthodes, un certain nombre d'elles sont variationnelles ou basées sur les EDP. Ces techniques utilisent des EDPs à diffusion anisotrope pour synthétiser artificiellement une image compatible avec le système visuel humain. L'idée principale de ces approches est de restaurer les données photométriques et

structurelles telles que les contours, les angles, les courbures et les jonctions. Leur principe est basé sur l'application de diffusion successive de l'intensité des pixels de l'image, localement orientée pour restaurer les structures géométriques de l'image. La solution au problème d'inpainting par les différents modèles variationnels proposés ([90], [28], [85]) est obtenue en trouvant l'image restaurée qui minimise une certaine fonctionnelle (voir section 1.2.2). Ce problème d'optimisation aboutit à la résolution de l'équation d'Euler-Lagrange associé via la méthode itérative de descente de gradient. Il existe également des méthodes dans lesquelles une EDP est directement définie comme dans [14], [16], [27], [115], [87] et [112]), et elles sont capables de reconstruire des régions contenant des structures géométriques prononcées. Dans ce cadre, dans [14] les auteurs proposent une méthode où les zones manquantes sont remplies par propagation des données de l'image vers l'intérieur de la région manquante le long des lignes de niveau. Il est à noter que même si ces méthodes réussissent généralement à reconstruire correctement les structures géométriques de l'image, elles fournissent des résultats insatisfaisants au niveau des détails de nature stochastique. En effet, ce type de méthodes tend à fournir un contenu inapproprié (lisse) dans des zones texturées.

Les insuffisances des deux premières classes de méthodes sont dues à leur nature locale, inadaptée à la complexité des images naturelles. Subséquemment, une troisième classe hybride est apparue tirant profit des deux premières en essayant d'assurer aussi bien la reconstruction de la composante géométrique que celle de la composante texturée par des stratégies non locales ([129], [50], [3], [15], [103], [43]).

2.2 Modèles d'inpainting basées TSL

Corroboré par un constat crucial, en vision humaine, stipulant que les contours jouent un rôle important dans la perception visuelle [27], l'inpainting par EDPs à diffusion anisotrope a fait l'objet de nombreux travaux car ces méthodes permettent de reconnecter les contours interrompus et de préserver les structures reconstruites. La plupart de ces techniques utilisent le vecteur gradient pour estimer l'orientation des contours (voir section 1.2.2). Cela ne permet malheureusement pas de fournir une estimation vraiment

précise concernant les structures géométriques de l'image. Par exemple, la non prise en compte de l'information présente dans le voisinage de chaque pixel ne permet pas de distinguer les angles des contours droits. Récemment, les nouvelles méthodes d'inpainting développées préfèrent exploiter les estimations évaluées par le TSL (1.1.15) qui est connu pour sa performance à fournir une estimation précise des orientations des structures de l'image.

Par exemple, afin de mieux protéger les angles pendant le processus de restauration Zhang et al. [134] propose l'EDP suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f(c) \cdot f(\|\nabla U\|) \cdot U_{\eta\eta} + \alpha U_{\xi\xi} \quad (2.2.1)$$

où $U_{\eta\eta}$ et $U_{\xi\xi}$ sont les dérivées directionnelles secondes dans la direction du gradient ($\eta = \frac{\nabla U}{\|\nabla U\|}$) et dans la direction tangentielle ($\xi = \frac{\nabla U^\perp}{\|\nabla U\|}$). $\alpha \geq 1$ est une constante qui permet au modèle d'effectuer une diffusion forte et permanente le long des lignes de niveau. Pour contrôler la force de diffusion dans la direction du gradient, l'auteur emploie dans le premier terme de (2.2.1) deux fonctions stop dont la première est $f(\|\nabla U\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla U\|}{k}\right)^2}$ utilisée pour préserver les contours et la seconde est $f(c) = \frac{1}{1 + \left(\frac{c}{k}\right)^2}$ qui sert à protéger les angles lors du processus de restauration où $c = |(\nabla \cdot (V^\perp V^{\perp T}))^T \cdot \nabla U|$ est l'intensité du coin à chaque pixel (V^\perp est le vecteur propre, associé à la valeur propre minimale, donné dans (1.1.16)) et $k > 0$ est un paramètre de contraste adaptif (pour plus détails voir [134]).

Il convient de souligner que l'équation (2.2.1) peut préserver les caractéristiques géométriques de l'image au cours du processus d'inpainting, mais elle ne restaure pas les angles lorsque la région manquante est large. De plus, la méthode proposée par Zhang et al. [134] ne prend pas en compte les informations d'orientation contenues dans le TSL et n'emploie pas de filtrage de choc adéquat ; ce qui amoindrit sa capacité à protéger ou à restaurer les structures géométriques de l'image.

Pour surmonter certaines de ces limitations, Shao et al. [112] proposent l'EDP suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= f_V \cdot U_{VV} + f_{V^\perp} \cdot U_{V^\perp V^\perp} \\ &- \gamma \cdot \text{sign}(U_{VV}) \|\nabla U_\sigma\| - (f_{V^\perp} - f_V) \cdot ((\nabla \cdot (V^\perp V^{\perp T}))^T \cdot \nabla U) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Cette équation combine la diffusion orientée et le filtrage de choc et est utilisée dans de nombreuses applications (débruitage, inpainting, reconstruction pour la super-résolution, etc.). Ici, U_{VV} , $U_{V^\perp V^\perp}$ sont les dérivées directionnelles secondes suivant les vecteurs propres du TSL, V et V^\perp donnés par (1.1.16). Les fonctions stop f_V et f_{V^\perp} sont choisies avec la propriété que f_V décroît plus vite que f_{V^\perp} comme suit : $f_V(|\lambda^+ - \lambda^-|) = \frac{1}{1 + \frac{|\lambda^+ - \lambda^-|}{k}}$ et $f_{V^\perp}(|\lambda^+ - \lambda^-|) = \frac{1}{1 + (\frac{|\lambda^+ - \lambda^-|}{k})^a}$, où λ^+ et λ^- sont les valeurs propres maximale et minimale du TSL avec $0 < a \leq 1$ et $k > 0$. Le troisième terme de l'équation (2.2.2) est un filtre de choc des contours, où γ est un petit paramètre de contrôle positif et le dernier terme est un filtre de choc des coins. Ces deux derniers termes sont ajoutés afin de favoriser à la fois la préservation et la netteté des structures de l'image.

Bien que ce modèle ait montré sa capacité pour mieux préserver les contours et d'éliminer les artefacts dans leurs voisinages lors du processus de restauration, ses performances s'avèrent limitées lorsqu'il s'agit de reconstruire des angles très pointus. De plus, le lissage gaussien utilisé dans le TSL induit une délocalisation des discontinuités de l'image ; ce qui produit un effet de flou au voisinage des contours restaurés.

2.3 Modèle d'inpainting proposé

Pour surmonter les inconvénients des modèles précédents, on propose une technique d'inpainting basée sur un TSNL. Il s'agit d'un estimateur de structure plus adaptatif qui donne une meilleure estimation des orientations des structures de l'image que son équivalent linéaire TSL. Dans l'approche proposée, des filtres de choc des contours et des coins basés sur le TSNL sont utilisés pour améliorer et protéger les structures pendant le processus de remplissage. La force de diffusion est contrôlée par plusieurs fonctions stop soigneusement sélectionnées pour assurer un bon compromis entre la diffusion orientée et le filtrage de choc. De plus, afin d'éviter l'inconvénient de choisir plusieurs constantes de manière adaptative, une méthodologie de partitionnement et d'ajustement est proposée pour estimer les paramètres de contraste contrôlant la force des fonctions de diffusivité.

2.3.1 Tenseur de structure non linéaire

Dans cette sous-section, on présente la méthode de calcul du TSNL telle que proposée initialement par Brox et al. [23].

L'estimation du TSL donné par l'équation (1.1.15) peut être modélisée par l'équation de diffusion suivante :

$$S_0 = \nabla U \nabla U^T = (s_{ij}^0), \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = \Delta s_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.3.1)$$

où le temps t relie l'écart-type du noyau gaussien utilisé pour filtrer l'image avant le calcul du TSL avec $t = \frac{\sigma^2}{2}$. Pour estimer le TSNL, l'équation (2.3.1) est remplacé par un processus de diffusion anisotrope de Perona-Malik [99] afin de réduire le lissage en présence de structures et de rehausser les contours. Ce processus est donné par:

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial t} = \text{div}[g(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) \cdot \nabla s_{ij}], \quad i, j = 1, 2. \quad (2.3.2)$$

où $g(r) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + (\frac{r}{k})^2}}$ est une fonction stop avec $\varepsilon > 0$ une constante utilisée pour éviter les singularités et la mesure $r = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|$ détermine la cohérence des données de l'image ($\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ sont les valeurs propres maximales et minimales de S). La donnée initiale S_0 est semi-définie positive et le processus de diffusion appliqué aux données de la matrice multivaluée $S = (s_{ij})_{i,j=1,2}$ préserve cette propriété (pour plus de détails, voir [23]). Ainsi, le TSNL peut s'écrire sous la forme de la décomposition suivante:

$$S = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\max} & 0 \\ 0 & \lambda_{\min} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

En analysant les valeurs propres du TSNL, la mesure $r = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|$ fournit une très bonne information concernant l'anisotropie locale de l'image de telle sorte que dans les régions homogènes $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| \approx 0$, au voisinage d'un contour droit $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| \gg 0$ mais en présence d'une jonction, d'un angle ou d'une courbure $|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}| > 0$. Le vecteur propre V_1 , correspondant à la valeur propre maximale λ_{\max} , représente la direction de la variation maximale du signal et le vecteur propre V_2 , associé à λ_{\min} , fournit l'orientation des structures.

Comparé au TSL, le TSNL (2.3.3) a mis en évidence ses performances à évaluer avec plus de précision l'orientation des structures grâce à la diffusion anisotrope utilisée pour son estimation. Cela lui confère l'avantage majeur d'éviter la délocalisation des contours ; ce qui améliore significativement l'information concernant l'anisotropie locale de l'image.

De la même manière que dans le modèle de Shao et al. (voir l'équation (2.2.2)), le vecteur propre V_2 associé à la valeur propre minimale du TSNL permet de définir un filtre de choc pour les angles, il est donné par :

$$C_s = -(\nabla \cdot (V_2 V_2^T))^T \cdot \nabla U \quad (2.3.4)$$

Le filtre C_s a démontré sa supériorité par rapport à d'autres filtres dans la préservation des coins, notamment grâce à sa précision concernant la localisation des régions des coins mais aussi dans sa robustesse contre le bruit (pour plus de précisions voir [23]). La mesure $C = |C_s|$ peut même être utilisée pour définir l'intensité d'un coin, comme dans (2.2.1).

En tenant compte de ces critères positifs, on utilise le TSNL pour l'inpainting d'images contenant des géométries complexes.

2.3.2 Modèle proposé

Dans notre approche, on a couplé la diffusion orientée par EDP et le filtrage de choc afin de diffuser l'information à l'intérieur de la zone manquante. Les deux stratégies utilisent les estimations fournies par le TSNL (2.3.3) pour déterminer la force et l'orientation de diffusion. Ce processus d'inpainting peut être formulée comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & f_1 \cdot U_{V_1 V_1} + f_2 \cdot U_{V_2 V_2} \\ & - f_3 \cdot \text{sign}(U_{V_1 V_1}) \|\nabla U\| - f_4 ((\nabla \cdot (V_2 V_2^T))^T \cdot \nabla U) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

où $U_{V_1 V_1}$ et $U_{V_2 V_2}$ sont les dérivées directionnelles secondes suivant les vecteurs V_1 et V_2 . La diffusion suivant ces orientations est pondérée par les fonctions stop :

$$f_1(r, k_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - (\frac{r}{k_1 \sqrt{2}})^2] & \text{si } r \leq k_1 \sqrt{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } f_2(r, k_2) = \frac{1}{(1 + \frac{r}{k_2})^a} \quad (2.3.6)$$

avec $r = |\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|$ et $a = 0.3$. L'estimation de k_1 et k_2 est précisée dans la sous-section suivante. Il faut noter que la fonction f_1 , étudiée dans [17], contraint la diffusion

à être faible dans la direction orthogonale au contour tant que la variation de l'intensité dans l'image est assez petite pour éviter l'effet d'escalier et ainsi donner un effet naturel au résultat de restauration. La fonction f_2 quant à elle, utilisée dans [112], encourage une forte diffusion le long des contours de l'image. Cela garantit la reconstruction des structures géométriques et assure la continuité des lignes de niveau.

Les deux derniers termes dans (2.3.5) sont les filtres de choc pour les contours et les angles, comme employés dans [112]. Ils sont contrôlés par :

$$f_3(|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|, k_3) = e^{-\frac{|\lambda_{\max} - \lambda_{\min}|^2}{k_3^2}} \quad \text{et} \quad f_4(C, k_4) = e^{-\frac{C}{k_4^2}} \quad (2.3.7)$$

où $C = |\nabla \cdot (V_2 V_2^T)|^T \cdot \nabla U|$ est l'intensité de l'angle ; les paramètres k_3 et k_4 seront précisés ultérieurement. Il est facile de constater que les fonctions f_3 et f_4 , respectivement étudiées dans [99] et [134], décroissent plus vite que f_1 et f_2 . Ainsi, le filtrage de choc adopté diminue la vitesse de diffusion en présence de discontinuités importantes sans pour autant l'annuler; ce qui permet de préserver et de rehausser les structures de l'image.

L'utilisation de l'estimateur TSNL et des fonctions stop adéquates garantit un bon compromis entre la diffusion dans les directions robustes V_1 et V_2 et les filtres de choc. Il permet entre autres à l'équation (2.3.5) de satisfaire certaines conditions très importantes décrites comme suit :

- (a) Dans les régions homogènes, seuls les deux premiers termes sont significatifs et on obtient une diffusion isotrope.
- (b) Au voisinage d'un contour droit, la diffusion (2.3.5) devient anisotrope (très forte dans la direction la plus cohérente) et le filtre de choc dans le troisième terme préserve les contours.
- (c) En présence d'un coin ou d'une courbure, la diffusion est forte le long des structures et les filtres de choc des deux derniers termes rehaussent la structure.

2.3.3 Extension au cas tridimensionnel

Dans cette partie, on s'intéresse à l'extension de notre méthode au cas tridimensionnel.

L'équation (2.3.5) peut être reformulée comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & f_{V_1} \cdot U_{V_1 V_1} + f_{V_2} \cdot U_{V_2 V_2} + f_{V_3} \cdot U_{V_3 V_3} \\ & - f_E \cdot \text{sign}(U_{V_1 V_1}) \cdot \|\nabla U\| - f_C \cdot ((\nabla \cdot (V_3 V_3^T))^T \cdot \nabla U) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Notons qu'on a trois vecteurs propres V_1 , V_2 et V_3 associés aux valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, conduisent à un terme supplémentaire $f_{V_3} \cdot U_{V_3 V_3}$. Ici les contours sont des surfaces ; donc en prenant en compte les variations de niveaux de gris les plus élevées données par le vecteur V_1 , on choisit :

$$f_{V_1} = f_1(|\lambda_1 - \lambda_3|, k_1) \quad (2.3.9)$$

afin d'exclure la diffusion au travers des surfaces formant les structures de l'image ($|\lambda_1 - \lambda_3| \gg 0$). L'équation (2.3.8) doit parvenir à effectuer une diffusion isotrope dans le plan tangent lorsque les iso-surfaces sont homogènes ($|\lambda_2 - \lambda_3| \approx 0$). Cependant, lorsque la surface n'est pas isotrope, la diffusion doit s'effectuer principalement selon la meilleure orientation locale V_3 . Ces objectifs sont remplis en mettant :

$$f_{V_2} = f_2(|\lambda_1 - \lambda_2|, k_2), \quad (2.3.10)$$

$$f_{V_3} = f_2(|\lambda_2 - \lambda_3|, k_3) \quad (2.3.11)$$

Enfin, dans les deux derniers termes de (2.3.8), les filtres de choc sont contrôlés par :

$$f_E = f_3(|\lambda_1 - \lambda_3|, k_4) \quad (2.3.12)$$

et

$$f_C = f_4(|\nabla \cdot (V_3 V_3^T)|, k_5), \quad (2.3.13)$$

Ils permettent d'éviter l'effet de flou près des structures géométriques, où $(f_i)_{i=1}^4$ sont respectivement données dans (2.3.6) et (2.3.7) et $(k_i)_{i=1}^5$ sont les paramètres de contraste.

2.3.4 Méthode d'approximation des paramètres de contraste

Inspiré des travaux Borroto-Fernández et al. [22], on utilise une méthodologie de partitionnement et d'ajustement appelé algorithme KMLS afin d'approximer les paramètres

de contraste $(k_i)_{i=1}^5$ utilisés dans (2.3.5) et (2.3.8) conformément à la mesure d'anisotropie locale et à l'intensité des coins données par le TSNL.

Étant donné une fonction de diffusivité $f(r, k)$ décroissante dans l'intervalle $[0, 1]$, il est connu qu'elle est très sensible au choix du paramètre de contraste. En effet, au voisinage d'un contour ($r > k$), l'effet de lissage est plus faible et les structures sont préservées, toutefois près des régions homogènes ($r < k$) l'effet de lissage est plus fort. Cela signifie que ces paramètres interfèrent d'une manière ou d'une autre avec le processus de diffusion et sont choisis en fonction de la variation des données photométriques de l'image, qui diffèrent d'une image à une autre. Ce processus est basé sur une méthodologie de partitionnement et d'ajustement qui est réalisée à chaque itération en deux étapes: (note de rappel : $X = (x, y)$ dans le cas 2D et $X = (x, y, z)$ pour le cas 3D)

Étape 1 : Partitionnement

Étant donné une fonction stop $f(r, k)$

- L'ensemble des pixels/voxels de l'image P est partitionné en trois groupes (*clusters*): P_1 pour les pixels/voxels X se trouvant dans les zones homogènes, P_2 pour ceux avoisinant les contours et $P_3 = P \setminus (P_1 \cup P_2)$.

(a) Sélection des moyennes initiales:

$$\begin{aligned} m_1 &= \min\{r(X), X \in P\} \quad \text{pour } P_1, \\ m_3 &= \max\{r(X), X \in P\} \quad \text{pour } P_3, \\ m_2 &= \frac{m_1 + m_3}{2} \quad \text{pour } P_2. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

(b) Affectation des pixels:

$$X \in P_i \text{ si } d(r(X), m_i)_{i=1}^3 = \min |r(X) - m_i| \tag{2.3.15}$$

(c) Calcul des nouvelles moyennes comme étant les centres des clusters

$$m_i = \sum_{X \in P_i} \frac{r(X)}{n_i}, i = 1, 2, 3 \tag{2.3.16}$$

où n_i est le nombre de pixels de chaque groupe P_i ($i = 1, 2, 3$).

Les opérations (b) et (c) sont répétées jusqu'à un état d'équilibre.

(d) Sélection des moyennes finales:

$$\begin{aligned} m_1 &= \max\{r(X), X \in P_1\} \\ m_3 &= \min\{r(X), X \in P_3\} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Etape 2 : Ajustement

On applique la méthode des moindres carrés à la fonction f avec les valeurs m_1, m_3 (données par (2.3.17)) et les valeurs sep et wep , avec sep un seuil préservant les contours et wep un seuil permettant un lissage fort. Cela revient à estimer le paramètre k en minimisant, par la méthode de descente de gradient, la fonction suivante :

$$S(k_i) = [sep - f(m_1, k)]^2 + [wep - f(m_3, k)]^2 \quad (2.3.18)$$

2.4 Mise en œuvre numérique

2.4.1 Discrétisation du modèle

Pour résoudre l'équation (2.3.5) en accord avec les nouveaux paramètres de contraste $k_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ et 4, on propose un schéma numérique basé sur la méthode des différences finies. On utilise un schéma en avant en temps et centré en espace avec un pas de temps $\tau = \Delta t$ choisi selon des critères de stabilité (condition CFL précisée dans la sous-section suivante) et les pas en espace $\Delta x = \Delta y = 1$. La forme discrète de l'équation (2.3.5) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} &= U_{i,j}^n + \tau [f_1^n \cdot U_{V_1^n V_1^n}^n + f_2^n \cdot U_{V_2^n V_2^n}^n \\ &\quad - f_3^n \cdot \text{sign}(U_{V_1^n V_1^n}^n) \cdot \|\nabla U^n\| - f_4^n ((\nabla \cdot (V_2^n V_2^{nT}))^T \cdot \nabla U^n)]_{i,j} \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

avec $U_{i,j}^n = U(x_i, y_j, t_n)$.

Dans le cas 3D, $U_{i,j}^n = U(x_i, y_j, z_l, t_n)$ et (2.3.8) devient :

$$\begin{aligned} U_{i,j,l}^{n+1} &= U_{i,j,l}^n + \tau [f_{V_1}^n \cdot U_{V_1^n V_1^n}^n + f_{V_2}^n \cdot U_{V_2^n V_2^n}^n + f_{V_3}^n \cdot U_{V_3^n V_3^n}^n \\ &\quad - f_E^n \cdot \text{sign}(U_{V_1^n V_1^n}^n) \cdot \|\nabla U^n\| - f_C^n ((\nabla \cdot (V_3^n V_3^{nT}))^T \cdot \nabla U^n)]_{i,j,l} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

2.4.2 Stabilité et implémentation numérique

Dans cette sous-section, tout d'abord on dérive une condition de stabilité pour assurer les propriétés de convergence du schéma (2.4.1) proposé dans la section précédente puis on décrit l'algorithme de résolution associé.

Notons par v_1 et v_2 les coordonnées du vecteur propre du TSNL (2.3.3) associé à la valeur propre maximale λ_{\max} .

Proposition 2.4.1 *Le schéma numérique (2.4.1) satisfait la condition de stabilité suivante :*

$$\tau = \Delta t \leq \frac{1}{2(f_1 + f_2 + P)} \text{ avec } P = \frac{v_1 \cdot v_2 \cdot (f_1 - f_2)}{2(v_1^2 + v_2^2)}$$

selon le choix des pas en espace $h = \Delta x = \Delta y = 1$

Preuve. Pour prouver ce résultat, on utilise l'analyse de Fourier. Considérons l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f_1 \cdot U_{V_1 V_1} + f_2 \cdot U_{V_2 V_2} \quad (2.4.3)$$

où $V_1 = V_2^\perp = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre du TSNL. Ainsi, l'équation précédente peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f_1 \cdot \frac{v_1^2 U_{xx} + 2v_1 v_2 U_{xy} + v_2^2 U_{yy}}{v_1^2 + v_2^2} + f_2 \cdot \frac{v_2^2 U_{xx} - 2v_1 v_2 U_{xy} + v_1^2 U_{yy}}{v_1^2 + v_2^2} \quad (2.4.4)$$

$$= \frac{(f_1 v_1^2 + f_2 v_2^2) \cdot U_{xx} + (f_1 v_2^2 + f_2 v_1^2) \cdot U_{yy} + 2v_1 v_2 (f_1 - f_2) \cdot U_{xy}}{v_1^2 + v_2^2} \quad (2.4.5)$$

Si on choisit $\Delta x = \Delta y = 1$, le schéma discrétisé de l'équation (2.4.5) s'écrit sous la forme suivante :

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta t [A_1 \cdot (U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) + A_2 \cdot (U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n) + A_3 \cdot (U_{i+1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n - U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n)] \quad (2.4.6)$$

où $A_1 = \frac{f_1 v_1^2 + f_2 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}$, $A_2 = \frac{f_1 v_2^2 + f_2 v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}$ et $A_3 = \frac{1}{4} \frac{2v_1 v_2 (f_1 - f_2)}{v_1^2 + v_2^2}$.

En remplaçant une solution de la forme $U_{i,j}^n = \hat{U}^n e^{I\pi h(ki+mj)}$ avec k et m des modes fixés et $I^2 = -1$ dans l'équation (2.4.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{U}^{n+1} e^{I\pi h(ki+mj)} = & \hat{U}^n e^{I\pi h(ki+mj)} + \Delta t [A_1 \cdot (\hat{U}^n e^{I\pi h(k(i+1)+mj)} - 2\hat{U}^n e^{I\pi h(ki+mj)} + \hat{U}^n e^{I\pi h(k(i-1)+mj)}) \\ & + A_2 \cdot (\hat{U}^n e^{I\pi h(ki+m(j+1))} - 2\hat{U}^n e^{I\pi h(ki+mj)} + \hat{U}^n e^{I\pi h(ki+m(j-1))}) \\ & + A_3 \cdot (\hat{U}^n e^{I\pi h(k(i+1)+m(j+1))} + \hat{U}^n e^{I\pi h(k(i-1)+m(j-1))} - \hat{U}^n e^{I\pi h(k(i+1)+m(j-1))} - \hat{U}^n e^{I\pi h(k(i-1)+m(j+1))})] \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

En divisant par $e^{I\pi h(ki+mj)}$, dans l'équation (2.4.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{U}^{n+1} = & \hat{U}^n [1 + \Delta t (A_1 \cdot (e^{I\pi h k} - 2 + e^{-I\pi h k}) + A_2 \cdot (e^{I\pi h m} - 2 + e^{-I\pi h m}) \\ & + A_3 \cdot (e^{I\pi h(k+m)} + e^{-I\pi h(k+m)} - e^{I\pi h(k-m)} - e^{-I\pi h(k-m)})] \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Maintenant, pour simplifier l'écriture on note $k\pi h = a_k$ et $m\pi h = b_m$, l'équation (2.4.8) s'écrit sous la forme suivante (ici on utilise la formule $e^{\alpha I} = \cos(\alpha) + I \sin(\alpha)$)

$$\begin{aligned} \hat{U}^{n+1} = & \hat{U}^n [1 + \Delta t (A_1 \cdot (2 \cos(a_k) - 2) + A_2 \cdot (2 \cos(b_k) - 2) \\ & + A_3 \cdot (2 \cos(a_k + b_k) - 2 \cos(a_k - b_k))] \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

en utilisant les formules :

$$\begin{aligned} \cos(a_k + b_k) &= \cos(a_k) \cos(b_k) - \sin(a_k) \sin(b_k), \\ \cos(a_k - b_k) &= \cos(a_k) \cos(b_k) + \sin(a_k) \sin(b_k), \\ \cos(a_k) - 1 &= -2 \sin^2\left(\frac{a_k}{2}\right), \\ \cos(b_k) - 1 &= -2 \sin^2\left(\frac{b_k}{2}\right), \end{aligned}$$

l'équation (2.4.9) devient :

$$\hat{U}^{n+1} = \hat{U}^n [1 + \Delta t [A_1 \cdot (-4 \sin^2\left(\frac{a_k}{2}\right)) + A_2 \cdot (-4 \sin^2\left(\frac{b_k}{2}\right)) + A_3 \cdot (-4 \sin(a_k) \sin(b_k))] \quad (2.4.10)$$

Le schéma (2.4.10) est stable si $|\frac{\hat{U}^{n+1}}{\hat{U}^n}| \leq 1$. Ainsi on obtient :

$$|1 - 4\tau [A \cdot (\sin^2\left(\frac{a_k}{2}\right)) + C \cdot (\sin^2\left(\frac{b_k}{2}\right)) + B \cdot (\sin(a_k) \sin(b_k))]| \leq 1 \quad (2.4.11)$$

Ici, $\sin^2\left(\frac{a_k}{2}\right) \leq 1$, $\sin^2\left(\frac{b_k}{2}\right) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(a_k) \sin(b_k) \leq 1$, ce qui implique que :

$$\left| \frac{\hat{U}^{n+1}}{\hat{U}^n} \right| \leq |1 - 4\Delta t [A_1 + A_2 + A_3]| \quad (2.4.12)$$

$$-1 \leq 1 - 4\Delta t[A_1 + A_2 + A_3] \leq 1 \quad (2.4.13)$$

$$0 \leq \Delta t[A_1 + A_2 + A_3] \leq \frac{1}{2} \quad (2.4.14)$$

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{2[A_1 + A_2 + A_3]} \quad (2.4.15)$$

où $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{f_1 v_1^2 + f_2 v_2^2}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{f_1 v_2^2 + f_2 v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{v_1 v_2 (f_1 - f_2)}{2(v_1^2 + v_2^2)} = f_1 + f_2 + \frac{v_1 v_2 (f_1 - f_2)}{2(v_1^2 + v_2^2)}$.

Ceci est le résultat cherché. Ainsi pour avoir un schéma numérique stable le pas de temps doit satisfaire :

$$\Delta t \leq \frac{2}{9} \quad (2.4.16)$$

Il est à noter que d'une manière similaire, on peut déduire une condition de stabilité pour le cas 3D. ■

Pour restaurer une image par l'algorithme associé à notre modèle, l'implémentation repose sur l'exécution de trois instructions :

1. Estimation des mesures d'orientation des structures locales ;
2. Calcul des paramètres de contraste ;
3. Remplissage de la région cible.

Les algorithmes correspondant à chaque instruction sont donnés dans l'Annexe A où des indications précisant les stratégies d'implémentation sont données facilitant ainsi leurs utilisations.

2.5 Résultats numériques

Dans cette section, les résultats obtenus sont comparés à ceux des algorithmes de Zhang et al.[134] (ZH), Shao et al. [112] (SH) et Chan et al. [26] (VT). Ces résultats sont analysés selon différentes approches: qualité visuelle, PSNR et SSIM.

Tous les calculs sont effectués sur des images synthétiques et réelles à l'aide de Matlab (R2012a) sur un ordinateur personnel doté d'un processeur 4 cœurs 2.40GHz et de 4GO de RAM.

Pour les approches de [112] et [134], certains paramètres sont choisis comme des constantes fixées : pour l'approche (ZH), on prend $\sigma = 1.5$, $\rho = 2$, $\alpha = 1$ et $k = 5$, alors

que pour (SH) $\sigma = 1.5$, $\rho = 2$, $\gamma = 0.01$ et $a = 0.3$. Le pas de temps est choisi $\tau = 0.2$ pour toutes les méthodes. Pour l'algorithme du TSNL, les paramètres sont définis comme suit: le pas de temps $\Delta t = 0.1$, $k = 4$ et un nombre d'itérations $T_1 = 10$ suffisent pour obtenir un résultat satisfaisant. Les seuils de préservation des contours de la méthode d'ajustement sont choisis : $sep = 0.01$ et $wep = 0.5$. Le principe de détermination du nombre d'itérations T est basé sur notre qualité perceptuelle des images restaurées et sur les valeurs de $PSNR$ et $SSIM$. Les résultats numériques obtenus sont résumés comme suit:

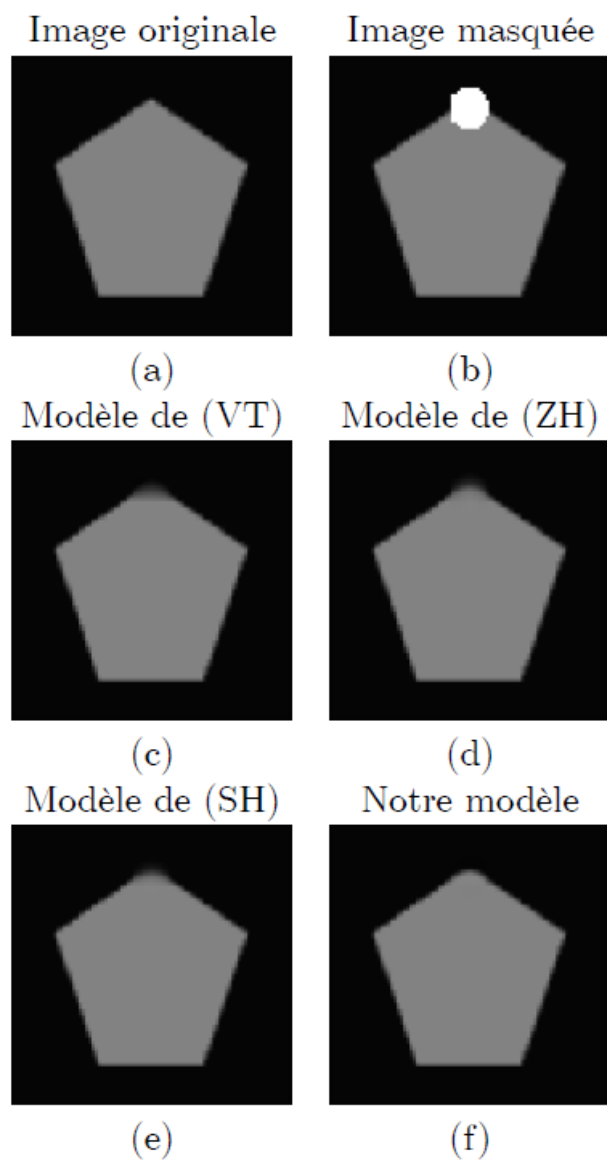
Dans les Figures 2.5.1-4, on remarque que les résultats visuels sont plus ou moins similaires, mais dans ceux obtenus par notre approche les images sont plus fidèles à celles d'origines avec moins de flou et des caractéristiques géométriques plus apparentes.

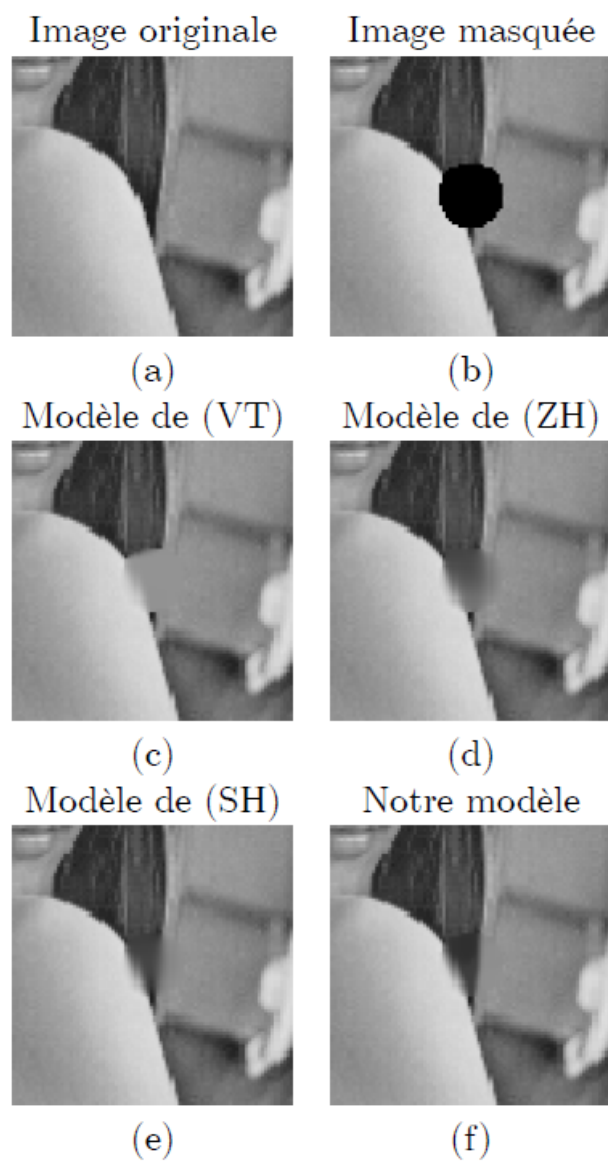
De plus, à partir du Tableau 2.5.1 où une comparaison du PSNR et du SSIM est présentée et les figures 2.5.3-4 (g) à (l) où on présente des images agrandies de celles de (a) à (f), on en déduit que notre approche conduit à des résultats plus significatifs et meilleurs que les autres. Cependant, on remarque un effet lissé (voir Figure 2.5.2 (f)) caractéristique des approches d'inpainting par EDPs qui ne permettent pas de reconstruire la texture ; ici une étape de synthèse de la texture est parfois nécessaire.

La figure 2.5.5 présente quelques coupes de cerveau illustrant les performances de notre modèle 3D en terme de reproduction de la fidélité des parties saines comme illustré dans les figures 2.5.5 (c), (f) et (i). Des lésions artificielles de volumes fixes (sphéroïdes $5 \times 5 \times 5$ voxels, voir figures 2.5.5 (b), (e) et (h)) sont ajoutées au cerveau en bonne santé et placées à de multiples endroits (sites de matière blanche infra-tentorielle, périvertriculaire et juxta-corticale) similaires aux sites de lésions observés chez différents patients atteints de SEP. D'après les résultats des figures 2.5.5 (c), (f) et (i), on peut en conclure que ce modèle peut donner des résultats satisfaisants.

Modèles	Mesures	Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4
TV	PSNR	24.55	20.05	30.11	25.51
	SSIM	0.7757	0.8302	0.9489	0.9311
ZH	PSNR	32.17	24.08	28.82	25.24
	SSIM	0.7858	0.8711	0.9466	0.9305
SH	PSNR	30.66	24.17	30.62	25.49
	SSIM	0.8220	0.8862	0.9538	0.9281
Notre modèle	PSNR	35.65	26.99	31.01	27.18
	SSIM	0.8636	0.9155	0.9475	0.9455

Tableau 2.5.1 : Les valeurs de PSNR et de SSIM des résultats d'inpainting obtenus par les différentes approches

Figure 2.5.1 : Résultats d'inpainting pour un angle ($T=290$)

Figure 2.5.2 : Résultats d'inpainting pour une courbure ($T=500$)

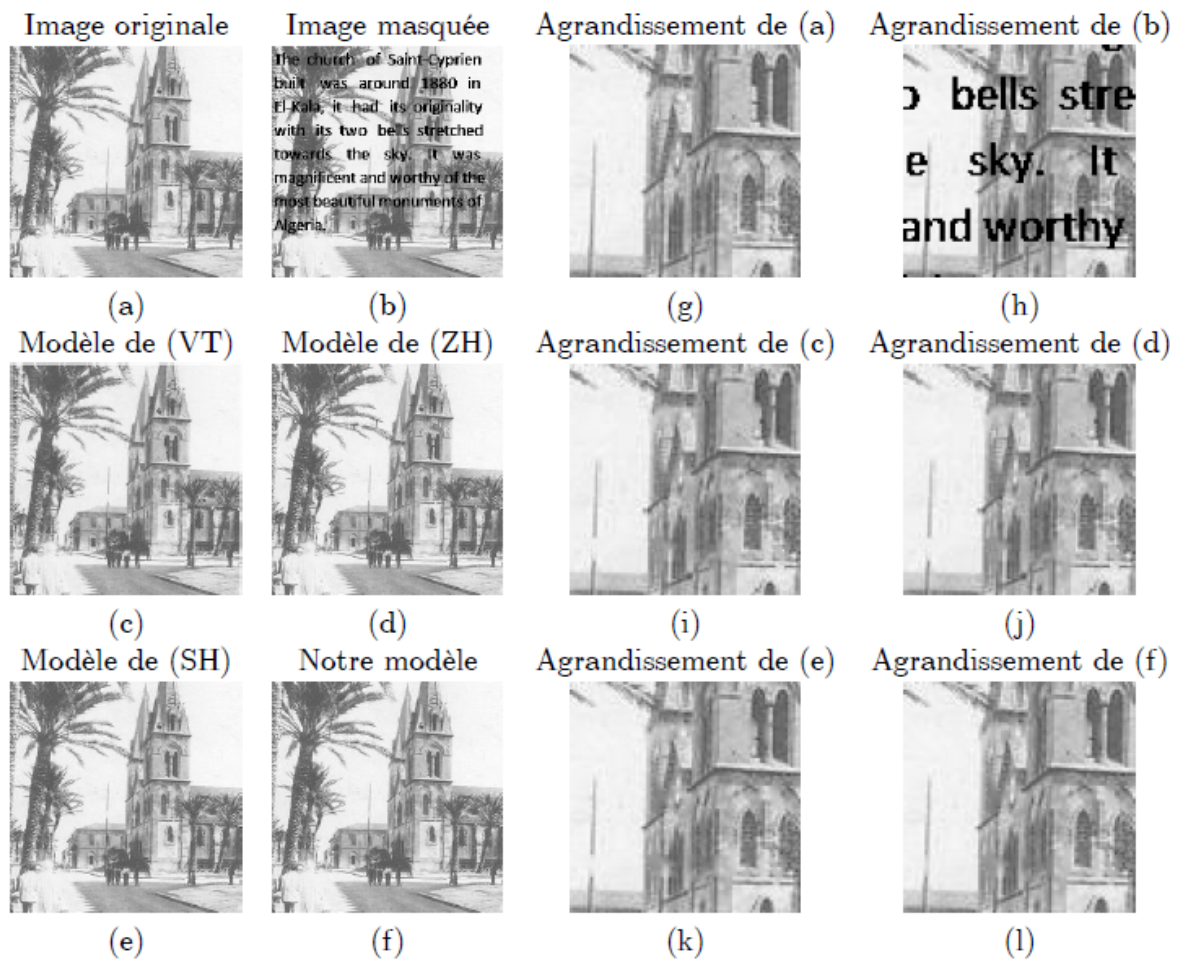


Figure 2.5.3 : Effacement d'un texte (T=400)

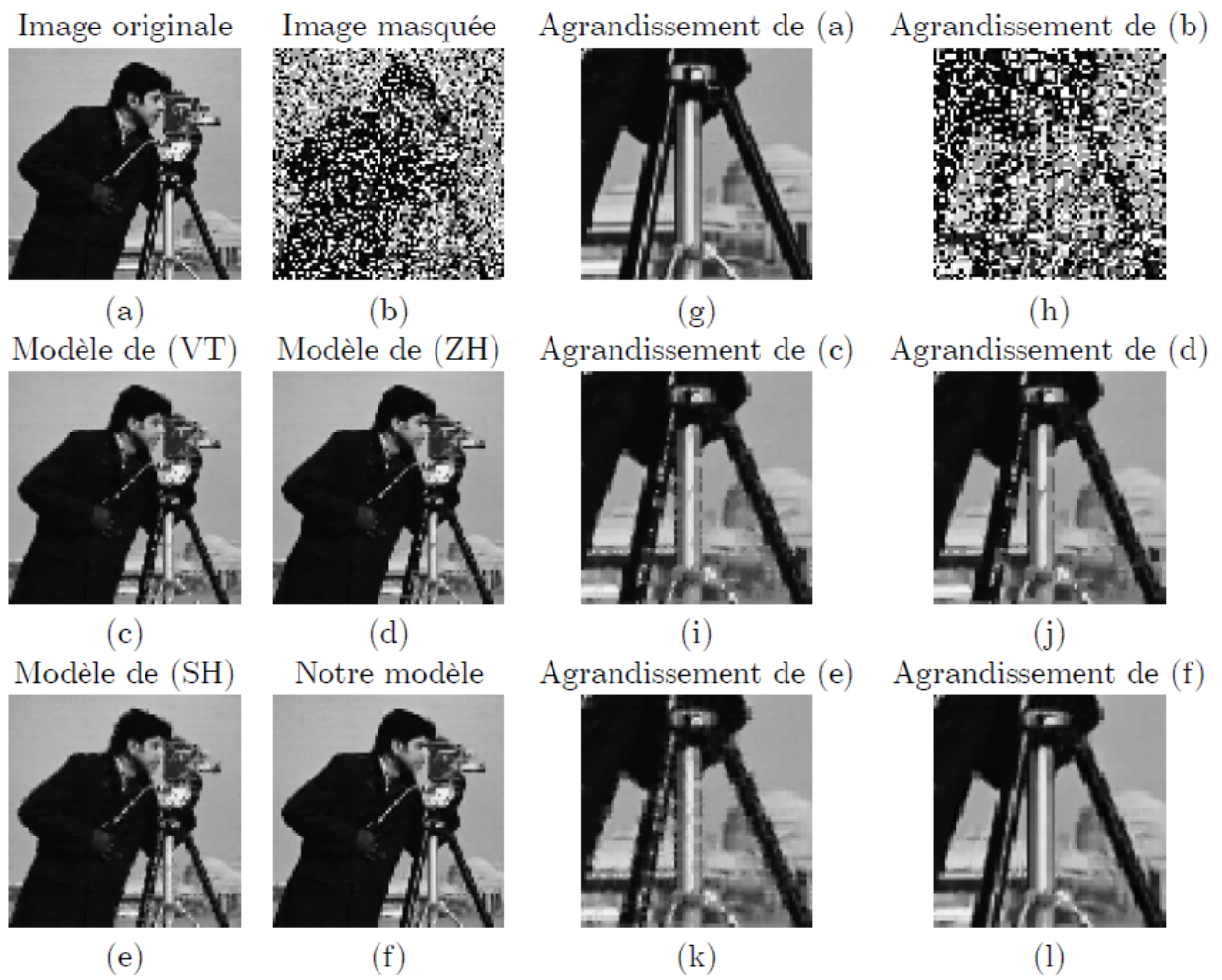


Figure 2.5.4 : Restauration de 50% de pixels manquants.

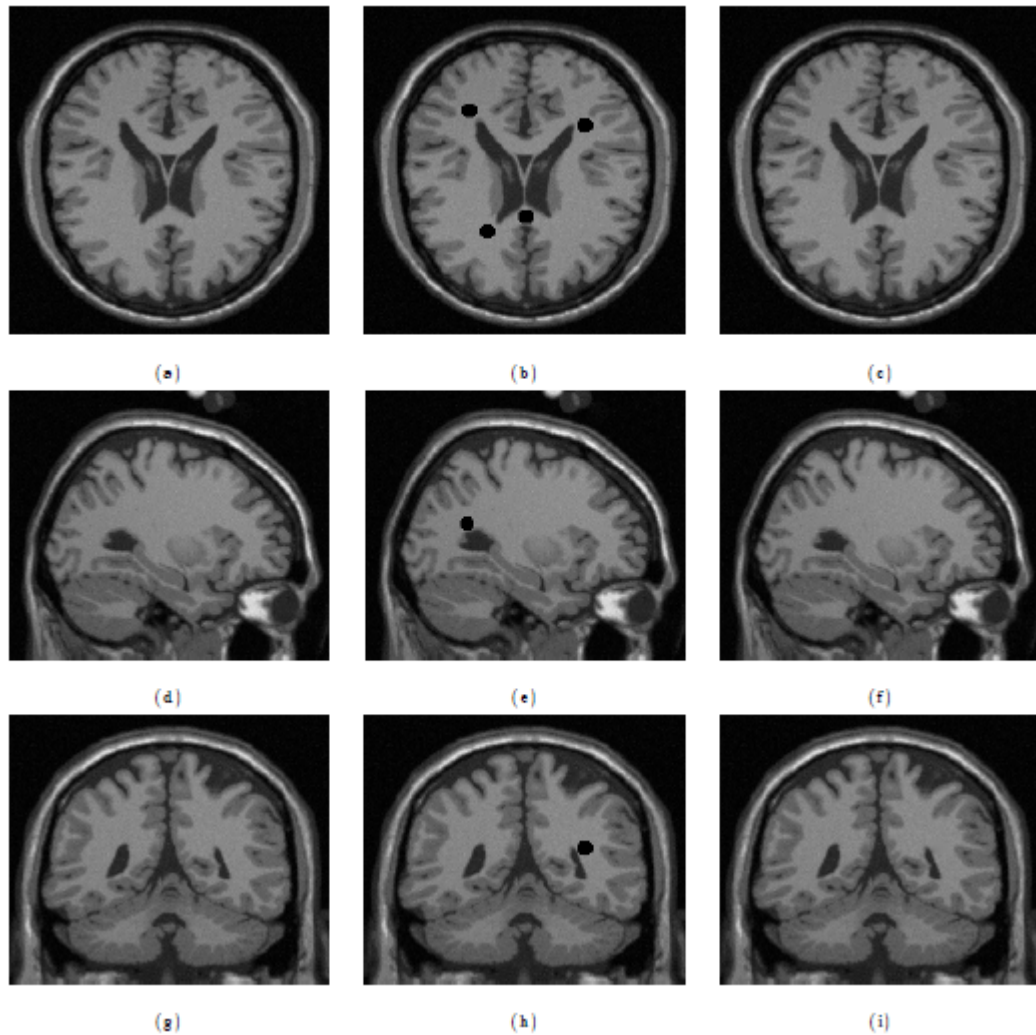


Figure 2.5.5 : Inpainting de lésions de SEP dans une image IRM : (a)-(d)-(g) coupes axiale, sagittale et coronale d'un cerveau humain sain, (c)-(f)-(i) résultats du remplissage des lésions.

2.6 Conclusion

Dans ce travail, on a proposé une approche d'inpainting d'images combinant une diffusion orientée basée sur le TSNL, le filtrage de choc et l'algorithme KMLS. On conclut que le schéma est non seulement capable de préserver les structures géométriques pendant le processus de restauration et élimine également les artefacts situés le long des contours et au voisinage immédiat des structures. L'estimation des paramètres de contraste, adaptés à la complexité des structures contenues dans l'image, a surmonté l'inconvénient de leur choix adaptatif. Les résultats expérimentaux d'inpainting, obtenus en termes de SSIM, de PSNR et de qualité visuelle, confirment l'efficacité et la compétitivité de l'algorithme proposé comparés à d'autres algorithmes (voir tableau 2.5.1 et figures 2.5.1-4). Il convient de préciser aussi que:

1- Les fonctions stop, choisies en fonction de la mesure de l'anisotropie fournie par le TSNL et des paramètres de contraste estimés à chaque itération, constituent un bon compromis entre diffusion à orientation robuste et le filtrage de choc ;

2- Un plus petit nombre d'itérations peut être utilisé pour les différentes approches (ZH), (SH) et (TV) ;

3- L'incorporation de filtres de choc dans les méthodes (ZH) et (TV), peut donner de meilleurs résultats ;

4- En raison de l'estimation du TSNL et des paramètres de contraste à chaque itération, il faut plus de temps de calcul.

Utilisation des équations différentielles stochastiques en restauration d'images

Dans ce chapitre, on aborde le problème de la restauration d'images par une approche basée sur les équations différentielles stochastiques (EDSs) avec réflexion. Afin de résoudre l'EDS considérée, on utilise un schéma d'Euler modifié avec un temps d'arrêt aléatoire et un paramètre de diffusion dépendant de la géométrie des images. Les termes de drift et de diffusion sont rigoureusement formulés afin d'exprimer le concept de la diffusion anisotrope par les EDSs. Les résultats numériques de l'algorithme proposé sont très encourageants ; ils démontrent sa compétitivité par rapport à d'autres méthodes basées sur des EDSs ou sur des équations différentielles partielles (EDPs).

3.1 Débruitage d'images

L'objectif principal du débruitage d'images est de réduire les perturbations dues au bruit tout en préservant les caractéristiques importantes de l'image. Dans ce cadre, diverses méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème inverse. On retrouve

essentiellement des approches basées sur : la théorie des ondelettes [36], [56], le filtrage linéaire et non-linéaire [113], [66], les EDPs [25], [123], [117] des méthodes variationnelles [29], [62], les champs de Markov [41], [81], etc.

Motivés par la présence de perturbations aléatoires des les images, de nouveaux modèles basés sur les EDSs ont vu le jour et de nombreuses procédures de restauration d'images ont été mises au point (voir [9], [20] et les références qu'ils contiennent). Dans de nombreux travaux, [96], [8], [119] par exemple, la relation entre les EDSs et les EDPs est établie et la transition entre elles est exprimée à l'aide de la formule de Feynman-Kac. En fait, il est montré dans [95] et [133] que la diffusion d'une particule est généralement mieux modélisée par une EDS, représentant le processus microscopique sous-jacent de l'évolution d'un pixel ; la dynamique de cette évolution à un niveau macroscopique est ensuite capturée par une EDP. Dans ce cadre, on présente dans la suite de ce chapitre de nouvelles techniques de restauration d'images basées sur des EDSs où on montre comment elles représentent une bonne alternative aux EDPs non linéaires.

3.2 Lissage anisotrope en termes d'EDS

Dans cette partie on présente deux modèles basés sur les EDSs et dont on s'est inspiré pour construire le notre. Il est à noter qu'on n'aborde pas ici la théorie du calcul stochastique que le lecteur peut consulter dans [95].

3.2.1 Travaux connexes

Soit D un domaine convexe et borné de \mathbb{R}^2 et $U_0 : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ l'image observée de la forme :

$$U_0 = u + \eta, \tag{3.2.1}$$

où η représente un bruit blanc gaussien et $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ l'image originale.

Le modèle général de l'EDS avec réflexion utilisé pour la restauration d'images est donné par l'équation suivante:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t + N_D(X_t)dt, t \in [0, T] \\ X(0, x, y) = X_0 \in \bar{D} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

où $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ est le processus de diffusion et W_t représente un mouvement brownien défini dans un espace probabilisé (Ω, F, P) à filtration $(F_t)_{t \geq 0}$. Les termes $\mu(X_t)$ et $\sigma(X_t)$ représentent respectivement le vecteur de drift et la matrice de diffusion et $N_D(X_t)$ est le vecteur normal unitaire. La solution de (3.2.2) satisfait l'équation suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + K_t^{\bar{D}}, t \in [0, T], \quad (3.2.3)$$

Il est à noter que pour chaque $w \in \Omega$ fixé, la fonction $t \rightarrow X_t(w)$ est appelée trajectoire de X et $\{K_t^{\bar{D}}\}_{t \in [0, T]}$ dans (3.2.3) est la valeur minimale ajoutée afin de forcer les trajectoires du processus de diffusion à rester dans le domaine de l'image. Ainsi, l'image restaurée est déterminée comme suit:

$$U(x, y) = E[U_0(X_T)] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M U_0(X_T(w_i)), \quad (3.2.4)$$

où E est l'espérance mathématique, M le nombre d'itérations de la méthode de Monte-Carlo et $X_T(w_i)$ est l'approximation de la trajectoire du processus stochastique X .

Dans ce contexte, Barbu et *al.* [9] ont proposé le modèle stochastique suivant :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t dW_s + K_t^{\bar{D}}, t \in [0, T], \quad (3.2.5)$$

où le vecteur du drift est donné par la formule suivante:

$$\mu(X_t) = (-e^{-\alpha_1(X_1(t)^2 + X_2(t)^2)}, -e^{-\alpha_2(X_1(t)^2 + X_2(t)^2)})^T, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \quad (3.2.6)$$

Ce modèle donne de bons résultats numériques sauf que la non prise en compte des structures géométriques présentes dans l'image donne un effet indésirable de lissage isotrope. Il est à noter que les auteurs ont obtenu un modèle efficace basé sur une EDP en utilisant l'équation de Kolmogorov associée au modèle stochastique (3.2.5) donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \xi) = \frac{m^2}{2} \Delta u(t, \xi) - \mu(\xi) \nabla u(t, \xi), \quad \forall t \geq 0, \forall \xi \in \bar{D} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \xi) = 0, \quad \text{sur } \partial \bar{D} \\ u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad \forall \xi \in \bar{D} \end{array} \right. \quad (3.2.7)$$

D'une manière différente, Borkowski et al. [18] ont proposé l'équation suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + K_t^{\bar{D}}, t \in [0, T], \quad (3.2.8)$$

où la matrice $\sigma(X_t)$ est définie par :

$$\sigma(X_t) = \begin{pmatrix} -(1-c) \frac{(G_\gamma * U_0)_y(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * U_0)(X_t)|} & c \frac{(G_\gamma * U_0)_x(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * U_0)(X_t)|} \\ (1-c) \frac{(G_\gamma * U_0)_x(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * U_0)(X_t)|} & c \frac{(G_\gamma * U_0)_y(X_t)}{|\nabla(G_\gamma * U_0)(X_t)|} \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

Ici, la notation $G_\gamma * u_0$ désigne la convolution de l'image par un noyau gaussien d'écart-type γ (dans la pratique un masque 3×3) pour rendre les estimations insensibles au bruit. $(G_\gamma * u_0)_x$ et $(G_\gamma * u_0)_y$ représentent les dérivées premières et enfin le paramètre c est donné par :

$$c = \begin{cases} 0, & \text{si } |\nabla(G_\gamma * U_0)(X_t)| \leq d \\ c = 1, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2.10)$$

avec d un paramètre qui détermine la direction vers laquelle les trajectoires de $X(w)$ sont entraînées (dans les directions tangentielles ou perpendiculaires aux contours). L'expression de la matrice de diffusion $\sigma(X_t)$ permet entre autre d'aboutir à un processus de lissage anisotrope qui réduit le bruit et préserve les contours; ce qui est fortement comparable à une diffusion anisotrope (voir section 1.2.2). Dans l'équation (3.2.8), on remarque en première instance, l'absence du drift. Cela a été fortement encouragé par le théorème de Girsanov [78] où il a été démontré que la modification du terme de drift, d'un processus d'Itô donné, n'a pas d'impact significatif sur la loi du processus.

Afin d'améliorer de façon significative le modèle (3.2.8), l'auteur l'a combiné dans [19] à la méthode des moyennes non locales (*NL-means*) dans le but d'utiliser les informations non locales présentes dans l'image et pour que le modèle puisse aussi préserver la composante texturée.

3.2.2 Modèle proposé

Dans cette partie, on présente une nouvelle approche basée sur une EDS avec réflexion où on combine les deux modèles précédents. Cette modeste contribution permet d'une

façon simple mais efficace d'accroître leurs performances. Le modèle proposé est donné par l'équation suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s + K_t^{\bar{D}}, t \in [0, T], \quad (3.2.11)$$

Au lieu d'utiliser le vecteur gradient pour estimer les orientations des variations de l'image, on propose d'utiliser le tenseur de structure TSL donné dans (1.1.15) lequel, rappelons-le, fournit des estimations des structures locales plus précises, principalement en présence de géométries complexes. En analysant les valeurs propres du TSL (formulées dans 1.1.17), Tschumperlé et *al.* démontrent dans [117] que la mesure $N = |\lambda^+ + \lambda^-|$ donne de très bonnes informations concernant l'anisotropie locale de l'image. Il est à noter que d'autres versions du tenseur de structure peuvent être utilisées (comme le TSNL explicité dans (2.3.2)). Ainsi, le terme de diffusion peut être écrit comme suit :

$$\sigma(X_t) = \left(-(1 - f(N)) \frac{V^-}{|V^-|}, f(N) \frac{V^+}{|V^+|} \right) \quad (3.2.12)$$

où V^- et V^+ , donnés dans (1.1.16), correspondent aux vecteurs propres du TSL. Ici, au lieu d'utiliser un paramètre constant, comme dans (3.2.9), on utilise une fonction stop qui détermine les directions vers lesquelles les trajectoires du processus X sont entraînées. Elle est définie par :

$$f(N) = \frac{1}{(1 + \frac{N}{k})^\alpha}, \alpha \in [0.1, 0.4], k > 0 \quad (3.2.13)$$

Lors de nos essais numériques, il a été constaté que la négligence du terme de drift dans (3.2.8) entraîne la persistance du bruit dans des zones homogènes due au fait que les dérivées premières de (3.2.9) tendent vers 0. C'est la motivation de l'introduction du terme de drift :

$$\mu(X_t) = C(X_t) \frac{V^-}{|V^-|} \quad (3.2.14)$$

où :

$$C(X_t) = \frac{2^{-t}}{N} (\sin(2\theta)(v_{xx} - v_{yy}) - \cos(2\theta)2v_{xy}) \quad (3.2.15)$$

Ici, pour simplifier, $(G_\gamma * U_0)(X_t)$ est notée par v et θ représente l'angle entre la normale la ligne de niveau et l'axe des abscisses en chaque pixel (x, y) ; elle est calculé par la formule

suivante :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2L_{1,2}}{L_{1,1} - L_{2,2}}\right) \quad (3.2.16)$$

où $(L_{l,q})_{l,q=1,2}$ représentent les éléments de la matrice (1.1.15).

Pour inciter le déplacement dans des zones homogènes, on utilise ici (3.2.14), introduit pour la première fois dans le cadre des contours actifs [119]. On lui ajoute la fonction $g(t) = 2^{-t}$ pour inciter les trajectoires à rester au voisinage de chaque pixel car $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

Il est à noter que les termes de drif et de diffusion pointent tous deux dans les directions tangentiels aux contours. Cela permet entre autres à préserver les structures géométriques de l'image. Il convient de souligner aussi que le modèle précédent peut être adapté pour l'inpainting d'images en utilisant une stratégie de remplissage adéquate (plus de précisions sont données dans la section 3.3).

Nous allons maintenant voir comment généraliser le modèle précédent aux images en couleur. Plutôt que d'appliquer simplement le même processus à chaque canal séparément, on exploite la corrélation entre les canaux pour que les trajectoires du processus X soient communes pour toutes les couleurs. Soit i un canal de couleur, inspiré du détecteur des contours pour les images à valeurs vectorielles de Di Zenzo [37] ; l'extension naturelle du modèle (3.2.11) s'obtient simplement en remplaçant le TSL (1.1.15) par un tenseur de structure d'images à valeurs vectorielles de la forme:

$$L(\nabla \vec{v}_\gamma) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 G_\rho * (v_x^i)^2 & \sum_{i=1}^3 G_\rho * (v_x^i v_y^i) \\ \sum_{i=1}^3 G_\rho * (v_x^i v_y^i) & \sum_{i=1}^3 G_\rho * (v_y^i)^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

où $\vec{v}_\gamma = (G_\gamma * U_0^i)_{i=1,2,3}$.

3.2.3 Existence et unicité de la solution de l'EDS proposé

Dans cette partie, on montre que l'équation (3.2.11) admet une solution unique. On commence par énoncer un théorème général d'existence et d'unicité dû à [78] :

Théorème 3.2.1 soit $T > 0$ et $\mu(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ des fonctions mesurables satisfaisant :

$$|\mu(t, X_t)| + |\sigma(t, X_t)| \leq C(1 + |X_t|); \quad X_t \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (3.2.18)$$

pour une certaine constante C ; où $|\mu| = \sqrt{\sum \mu^2}$ et $|\sigma| = \sqrt{\text{tr}(\sigma\sigma^t)}$ et tel que :

$$|\mu(t, X_t) - \mu(t, Y_t)| + |\sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)| \leq L|X_t - Y_t|; \quad X_t, Y_t \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \quad (3.2.19)$$

pour une certaine constante L . Soit Z une variable aléatoire indépendante de la σ -algèbre $F_\infty^{(m)}$ générée par $W_s(\cdot)$, $s \geq 0$ tel que

$$E[|Z|^2] < \infty. \quad (3.2.20)$$

Alors l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t; \quad t \in [0, T], X_0 = Z \quad (3.2.21)$$

admet une t -solution unique $X_t(w)$ adaptée à la filtration F_t^Z générée par Z et $W_s(\cdot)$; $s \leq t$ où

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2 dt\right] < \infty \quad (3.2.22)$$

En première instance, on considère l'équation (3.2.21) avec $X_0 = \{(i, j)\}_{i=1, M, j=1, N}$ (vecteur relatif aux positions de départ de l'image initiale de taille $M \times N$ qui satisfait clairement la condition(3.2.20)), le terme de drift

$$\mu(t, X_t) = 2^{-t} \frac{\nabla U(X_t)^\perp}{|\nabla U(X_t)|} \quad (3.2.23)$$

et la matrice de diffusion :

$$\sigma(t, X_t) = \left(-(1 - f(|\nabla U(X_t)|)) \frac{\nabla U(X_t)^\perp}{|\nabla U(X_t)|}, f(|\nabla U(X_t)|) \frac{\nabla U(X_t)}{|\nabla U(X_t)|} \right) \quad (3.2.24)$$

où :

$$f(|\nabla U(X_t)|) = \frac{1}{(1 + \frac{|\nabla U(X_t)|}{k})^\alpha}, \quad \alpha > 0, k > 0 \quad (3.2.25)$$

Pour simplifier, on note par la suite X_t et $U(X_t)$ respectivement par X et U^X . On montre ci-dessous que les termes de drift (3.2.23) et de diffusion (3.2.24) vérifient la condition (3.2.18) :

on a

$$\begin{aligned} |\mu(t, X)|^2 &= 2^{-2t} \left(\left(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} \right)^2 + \left(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} \right)^2 \right) \\ &\leq 2^{-2t} \leq 1 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

et

$$\begin{aligned} |\sigma(t, X)|^2 &= (1-f)^2 \left(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} \right)^2 + f^2 \left(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} \right)^2 + (1-f)^2 \left(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} \right)^2 + f^2 \left(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} \right)^2 \\ &= (1-f)^2 + f^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Ainsi

$$|\mu(t, X)| + |\sigma(t, X)| \leq 2; \quad (3.2.28)$$

Cela implique qu'il existe une certaine constante C qui satisfait la relation suivante

$$|\mu(t, X_t)| + |\sigma(t, X_t)| \leq C(1 + |X_t|); X_t \in \bar{D}, t \in [0, T] \quad (3.2.29)$$

Maintenant, on montre qu'ils vérifient aussi la condition (3.2.19) :

on a

$$\begin{aligned} |\mu(X) - \mu(Y)|^2 &= 2^{-2t} \left| \left(\begin{array}{c} -\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} + \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|} \\ \frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|} \end{array} \right) \right|^2 \\ &= 2^{-2t} \left(\left(-\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} + \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 + \left(-\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} + \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 \right) \\ &= 2^{-2t} \left(1 + 1 - 2 \frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|} - 2 \frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|} \right) \\ &= 2^{-2t} \times 2 \left[1 - \left(\frac{\nabla U^X}{|\nabla U^X|} \frac{\nabla U^Y}{|\nabla U^Y|} \right) \right] \\ &= 2^{-2t} \times 2 \left[1 - \left(\frac{\nabla U^X}{|\nabla U^X|} \frac{\nabla U^Y}{|\nabla U^Y|} \right) \right] \\ &\leq 1 \times 2 \times 2 = 4 \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

et

$$\begin{aligned}
 |\sigma(t, X) - \sigma(t, Y)|^2 &= \left| \begin{pmatrix} -(1-f)(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|}) & f(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|}) \\ (1-f)(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|}) & f(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|}) \end{pmatrix} \right|^2 \quad (3.2.31) \\
 &= (1-f)^2 \left(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 + f^2 \left(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 \\
 &\quad + (1-f)^2 \left(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 + f^2 \left(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 \\
 &= [(1-f)^2 + f^2] \left[\left(\frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 + \left(\frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} - \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|} \right)^2 \right] \\
 &= [(1-f)^2 + f^2] \left[1 + 1 - 2 \frac{U_y^X}{|\nabla U^X|} \frac{U_y^Y}{|\nabla U^Y|} - 2 \frac{U_x^X}{|\nabla U^X|} \frac{U_x^Y}{|\nabla U^Y|} \right] \\
 &= 2[(1-f)^2 + f^2] \left[1 - \left(\frac{U_y^X U_y^Y + U_x^X U_x^Y}{|\nabla U^X| |\nabla U^Y|} \right) \right] \\
 &= 2[(1-f)^2 + f^2] \left[1 - \left(\frac{\nabla U^X \cdot \nabla U^Y}{|\nabla U^X| |\nabla U^Y|} \right) \right] \\
 &\leq 2 \times 1 \times 2 = 4
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|\mu(t, X_t) - \mu(t, Y_t)| + |\sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)| \leq 4; \quad (3.2.32)$$

Cela implique qu'il existe une certaine constante L qui satisfait la relation suivante

$$|\mu(t, X_t) - \mu(t, Y_t)| + |\sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)| \leq L |X_t - Y_t|; X_t, Y_t \in \bar{D}, t \in [0, T] \quad (3.2.33)$$

Il est à noter que :

Remarque 3.2.1 - $U : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait $a \leq U(x, y) \leq b$ avec $b > a \geq 0$

- Weickert, dans [124], a prouvé qu'il existe une limite inférieure positive pour les valeurs propres de TSL et ses vecteurs propres vérifient $V^+ ||\nabla U$ et $V^- ||\nabla U^\perp$. Cela permet de généraliser les résultats précédents pour notre modèle.

- Tanaka H. et al., dans [114], garantit que les EDS avec réflexion admettent une solution unique si le domaine \bar{D} est convexe et borné où si $\dim(\bar{D}) = d$. Ces conditions sont satisfaites pour le domaine de l'image considéré.

3.3 Implémentation

Pour résoudre l'équation (3.2.11), on propose le schéma d'Euler modifié suivant :

$$H_{t_k}^m = \Pi_{\bar{D}}[X_{t_{k-1}}^m + \mu(X_{t_{k-1}}^m)\Delta t + \sigma(X_{t_{k-1}}^m)(W_{t_k}^m - W_{t_{k-1}}^m)] \quad (3.3.1)$$

avec $t_k = kh, h = \frac{T}{m}$ et $\Pi_{\bar{D}}$ désigne la projection sur le domaine \bar{D} . Ensuite $X_{t_k}^m$ est déterminé par :

$$X_{t_k}^m = \begin{cases} H_{t_k}^m, & \text{si } \Theta \\ X_{t_{k-1}}^m, & \text{sinon} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, \tau_m \quad (3.3.2)$$

où $\tau_m = \min\{k; k \geq m \text{ et } \Theta \text{ est vraie } m \text{ fois}\}$ et la condition Θ est donnée par :

$$\left| (G_\gamma * U_0)(H_{t_k}^m) - (G_\gamma * U_0)(X_{t_{k-1}}^m) \right| < p \quad (3.3.3)$$

Il faut remarquer que le paramètre p permet de conditionner les trajectoires de telle sorte à n'utiliser que des patches plus au moins similaires. Néanmoins, dans les régions où l'image présente un fort gradient dans toutes les directions, la condition Θ pourrait ne pas fonctionner qui impliquerait sinon une persistance du bruit au voisinage des contours. Cela est la motivation de l'introduction du temps d'arrêt aléatoire τ_m afin d'être sûr d'avoir au moins m trajectoires pour chaque pixel. Dans l'implémentation, $(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$ est approximé par un générateur de nombres aléatoires suivant une loi normale c'est à dire $(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \sim N(0, t_k - t_{k-1})$. La version restaurée de l'image initiale $U_0(x, y)$ est déterminée comme suit :

$$U(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M U_0(X_T^m(w_i)), \quad (3.3.4)$$

où M le nombre d'itérations de la méthode de Monte-Carlo et $X_T^m(w)$ est l'approximation de la trajectoire du processus stochastique.

Il convient de mentionner qu'il n'y a pas de changement majeur dans l'algorithme pour l'inpainting d'images. Néanmoins, une stratégie de remplissage est requise. Soit U_0 l'image observée contenant une région $\Phi \subset \bar{D}$ considérée manquante. L'inpainting de l'image se fait à partir de l'information disponible dans $(\Psi = \bar{D} \setminus \Phi)$ de la manière suivante:

- Tout d'abord, on sélectionne la région cible Φ à remplir ;

- Ensuite, pour garantir la continuité des structures linéaires, on utilise la stratégie dite "*onion peel method*" en calculant des termes de priorité (égaux à 1 pour les pixels à remplir en premier et à 0 pour les autres) ;

- Ensuite, les nouvelles valeurs des pixels à remplacer sont calculées à l'aide de l'équation (3.3.4) et les termes de priorité sont mis à jour ;

- Enfin, l'étape précédente est refaite jusqu'à ce que tous les pixels soient remplis.

Il est à noter que le schéma (3.3.4) ne fonctionne que si le modèle de l'image numérique est continu. Dans la pratique, on utilise l'interpolation linéaire pour avoir la valeur de $U_0(X_{t_k})$ pour chaque pixel.

3.4 Résultats numériques

Afin de confirmer l'efficacité de l'approche proposée et de démontrer sa compétitivité par rapport à d'autres algorithmes de restauration d'images, on compare nos résultats à ceux obtenus par les techniques basées sur des EDSs (Barbu T. et *al.* [9] et Borkowski D. et *al.* [18] qu'on note respectivement (BAR) et (BOR)) et une basée sur une EDP (Catté F. et *al.* [25] qu'on note (CAT)). Les essais numériques sont faits sur des images en niveaux de gris et couleur altérées par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $V = 0.01$ (voir figures 3.4.1-3). À partir de ces résultats, on remarque que les qualités visuelles des différentes images restaurées sont plus ou moins similaires ; ce qui démontre à quel point les modèles basés sur les EDSs représentent une bonne alternative aux EDPs non linéaires. De plus, la comparaison des valeurs de *PSNR* et de *SSIM* pour différentes variances de bruit appliqués à l'image synthétique figures 3.4.1 (a) résumée dans le tableau 3.4.1 et les différents résultats obtenus dans les figures 3.4.1-3 permettent de conclure que notre modèle donne des résultats très satisfaisants.

Sur la figures 3.4.4, on présente un résultat d'inpainting : on constate que l'image reconstruite est très proche de l'originale et on remarque aussi qu'il n'y a pas d'effet lisse comparée aux résultats obtenus par notre modèle basé sur l'EDP du chapitre précédent.

En ce qui concerne les algorithmes de Catté F. et *al.* [25] Barbu T. et *al.*, [9] et Borkowski D. et *al.* [18], les paramètres (pas de temps, nombre d'itérations, fonction

stop, paramètre de contraste ou autres constantes adaptatives) sont choisis à partir de leurs travaux. Néanmoins, certains d'entre eux sont adaptés pour obtenir le meilleur résultat pour les images utilisées pour les essais.

Pour le modèle proposé, le choix des paramètres est résumé comme suit: $p \in [10, 30]$, $k \in [20, 30]$, $\rho = 2$, $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 1$, $T \in [5, 20]$ (il est à noter que le paramètre T définit la taille du voisinage utilisé dans le processus de restauration). Le principe de détermination du nombre d'itérations M pour la méthode de Monte-Carlo est basé sur la qualité perceptuelle des images traitées et les valeurs de $PSNR$ et $SSIM$ (généralement $M = 100$ est suffisant pour obtenir un résultat satisfaisant).

Tous les calculs sont effectués à l'aide de Matlab (R2017a) sur un ordinateur personnel doté d'un processeurs 4 Core 2.40GHz et de 8 Go de RAM.

	Catté F. et <i>al.</i>		Barbu T. et <i>al.</i>		Borkowski D. et <i>al.</i>		Model Proposé	
Variance	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
0.01	35.70	0.98	30.96	0.86	36.58	0.96	38.60	0.96
0.03	31.66	0.94	28.19	0.73	32.48	0.90	33.13	0.90
0.05	28.70	0.91	26.33	0.66	28.82	0.84	29.21	0.84
0.1	23.88	0.77	23.04	0.56	23.52	0.71	23.54	0.71

Tableau. 3.4.1 : Tableau comparatif des méthodes pour différentes variances de bruit appliqués à l'image synthétique Figure 3.4.1 (a)

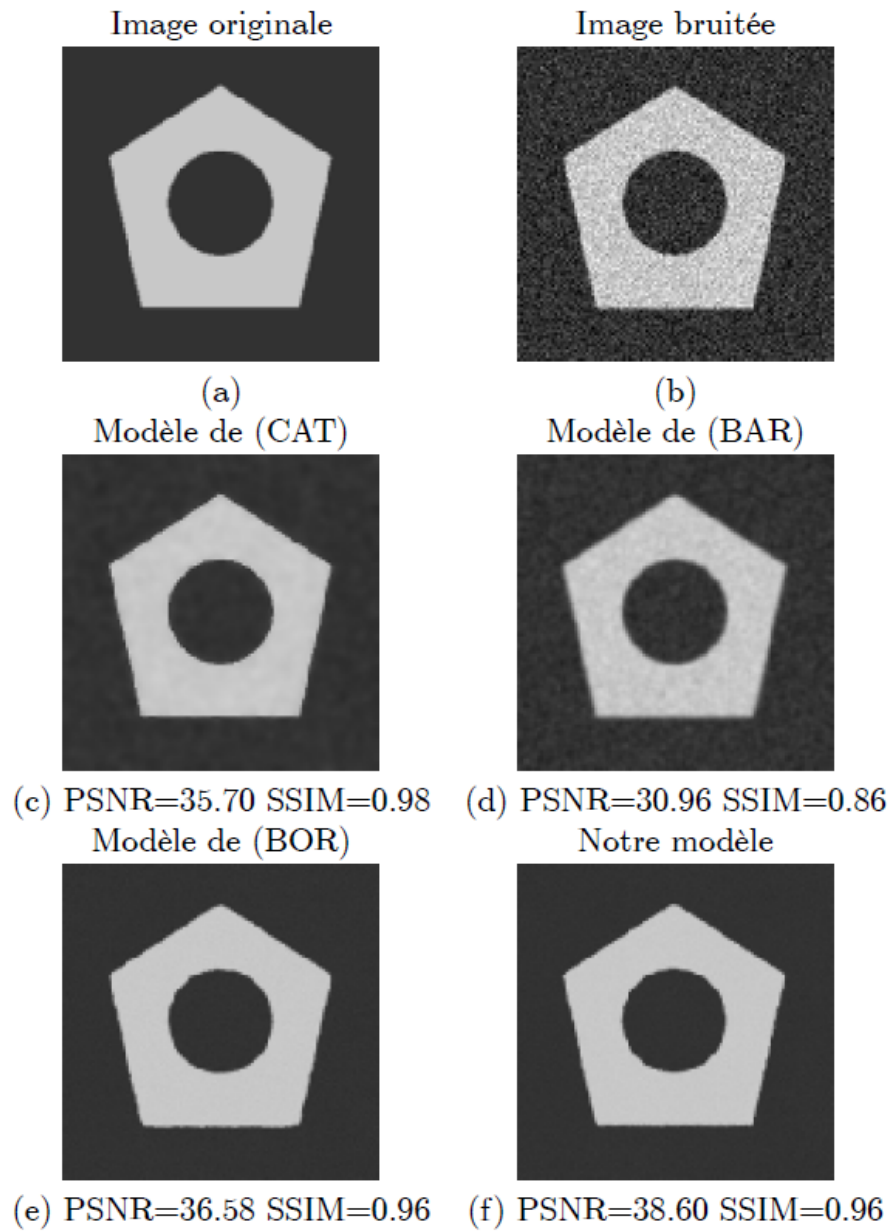


Figure 3.4.1 : Résultats du débruitage d'une image synthétique.

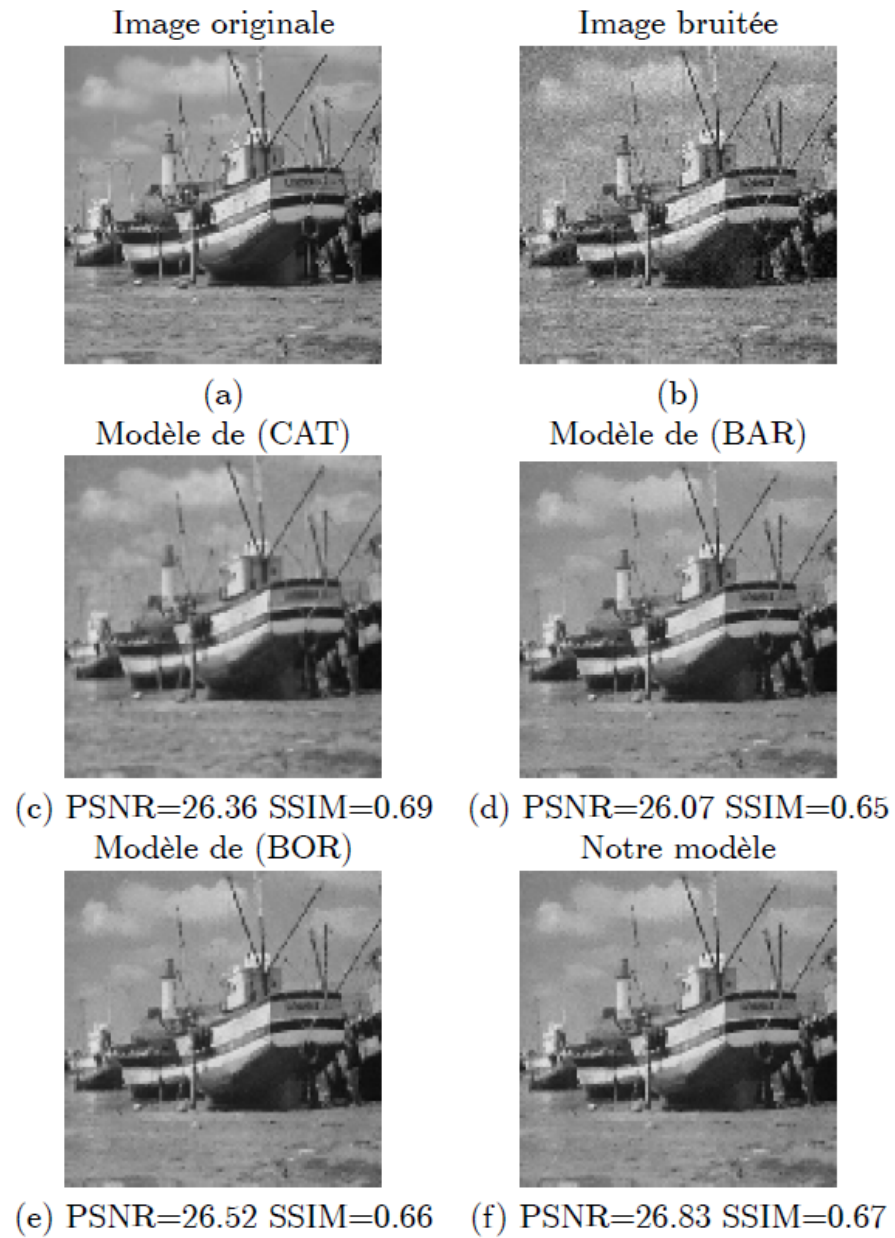


Figure 3.4.2 : Résultats du débruitage d'une image réelle.

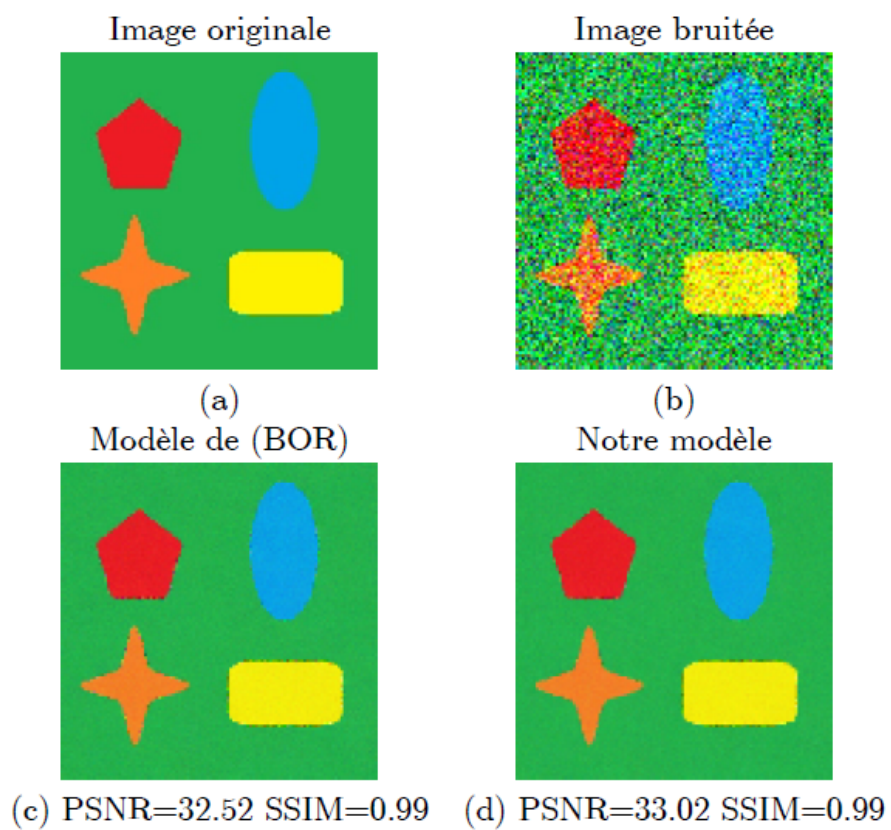


Figure 3.4.3 : Résultats du débruitage d'une image couleur.

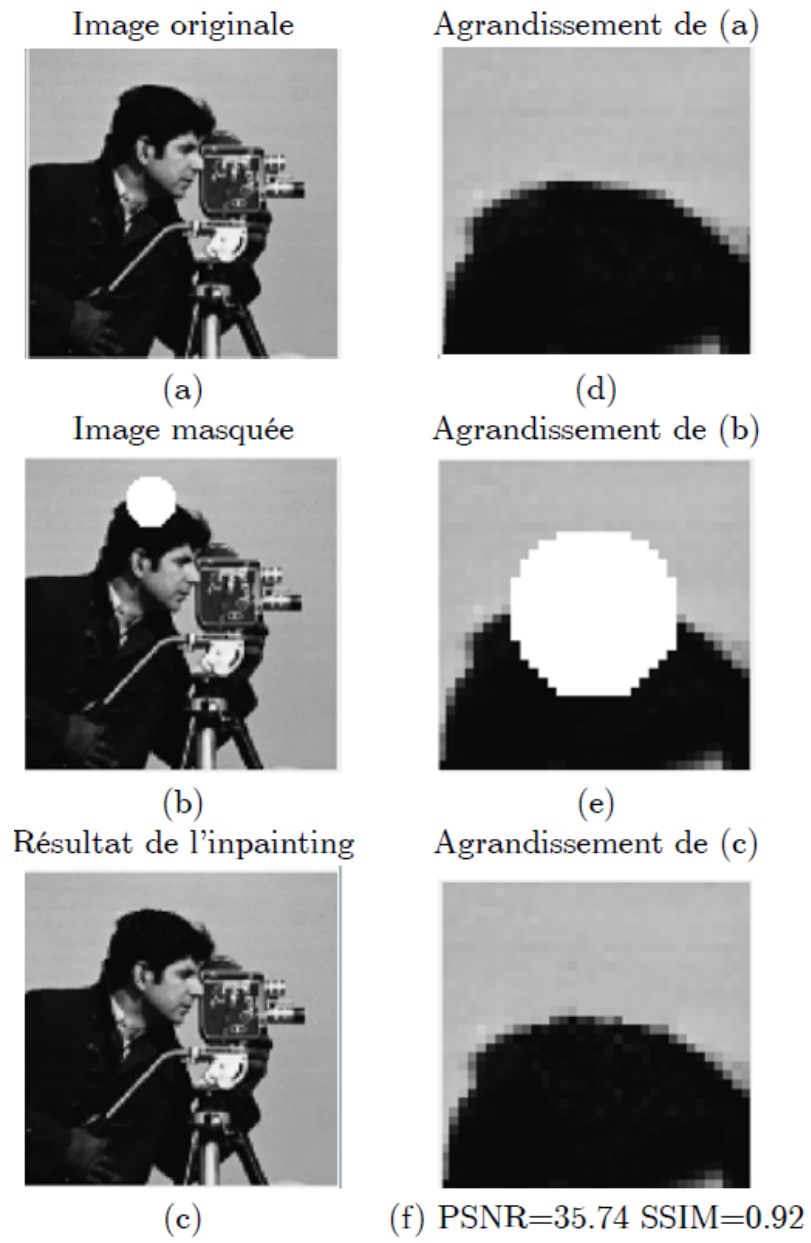


Figure 3.4.4 : Résultat de l'inpainting.

3.5 Conclusion

Dans ce travail, on propose une approche de restauration d'image basée sur une EDS avec réflexion. Les termes de drift et de diffusion ont été rigoureusement choisis afin de s'adapter au mieux à la complexité des structures contenues dans l'image. Le schéma d'Euler modifié à temps d'arrêt aléatoire a permis non seulement de contourner des trajectoires non recevables mais aussi de réduire le temps de calcul par la méthode de Monte Carlo. Les résultats expérimentaux obtenus (Figures 3.4.1-4 et Tableau 3.4.1) ont confirmé l'efficacité de l'algorithme proposé et ont démontré sa compétitivité en terme d'indices de qualité par rapport à d'autres algorithmes de restauration d'image [9] [18] et [25].

Conclusion et perspectives

Conclusion générale :

Tout au long de nos recherches dans le domaine de la restauration d'images, on a pu faire l'étude, l'implémentation et la comparaison du comportement géométrique local des méthodes existantes dans ce cadre. Cet aspect a servi de guide pour ensuite proposer de nouvelles méthodes de restauration d'images plus performantes. Ceci se résume dans les contributions apportées par de nouveaux modèles originaux basés sur les EDPs et les EDSs présentés dans les chapitre 2 et 3 ainsi que dans [12] et [13].

Plus précisément, on propose une approche d'inpainting d'images combinant la diffusion orientée basée sur les informations fournies par le TSNL et le filtrage de choc. Le schéma d'interpolation est non seulement capable de préserver les structures géométriques lors du processus de restauration mais aussi d'éliminer les artéfacts le long des contours ainsi qu'au voisinage des jonctions. L'estimation des paramètres de contraste par l'algorithme KMLS, s'adaptant à la complexité des structures contenues dans l'image, permet de surmonter l'inconvénient du choix adaptif des constantes. Comparé avec d'autres algorithmes ([134], [112] et [26] par exemple), les résultats expérimentaux d'inpainting obtenus en termes de *SSIM*, de *PSNR* et de qualité visuelle, confirment l'efficacité de l'algorithme proposé. Néanmoins, on doit souligner qu'en raison de l'estimation du TSNL et des paramètres de contraste à chaque itération, plus de temps de calcul est requis lorsque l'image présente une région manquante relativement large. Il est à noter aussi

qu'au regard du caractère local du modèle proposé, il est inadapté pour reconstruire la composante texturée.

Dans la seconde partie de ce travail, on propose une approche de restauration d'images basée sur une EDS avec réflexion. Les termes de drif et de diffusion ont été rigoureusement choisis afin de s'adapter au mieux à la complexité des structures contenues dans l'image. Le schéma d'Euler modifié à temps d'arrêt aléatoire permet non seulement de contourner des trajectoires non recevables mais aussi de réduire le temps de calcul par la méthode de Monté-Carlo. Les résultats expérimentaux obtenus confirment l'efficacité de l'algorithme proposé et démontrent sa compétitivité en terme d'indices de qualité par rapport à d'autres algorithmes de restauration d'images basés sur les EDSs et les EDPs ([9] [18] et [25]).

Perspectives :

Pour les perspectives de recherche immédiates, il serait souhaitable en premier lieu, de faire valider par des spécialistes du domaine médical nos résultats obtenus par l'approche basée sur les EDPs dans le remplissage de lésions de sclérose en plaques des images IRM afin de valoriser l'aspect applicatif de nos méthodes mais aussi pour pouvoir développer des algorithmes capables de reconstruire aussi bien la composante géométrique que la composante texturée. En second lieu, on désire approfondir les investigations faites dans l'utilisation des EDSs en restauration d'images. Plus précisément, on aspire à coupler le modèle présenté dans le chapitre 3 à une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) afin de reproduire le concept du filtrage de choc ; ceci dans l'objectif de satisfaire simultanément le rehaussement et la préservation des contours.

Compte tenu de l'énorme volume d'applications du traitement d'images, et du fait qu'il existe encore beaucoup de problèmes ouverts dans ce domaine, il n'est pas surprenant qu'il s'agisse d'un champ de recherche très actif de nos jours avec le développement de l'intelligence artificielle. Ainsi à titre de perspectives d'avenir s'ouvrant à la suite de ce travail de thèse, on espère affiner nos connaissances dans le domaine de l'imagerie afin de produire des algorithmes capables d'aider dans le diagnostic des maladies d'une manière non-supervisée.

Annexe A

Ici, les algorithmes précisant la stratégie d'implantation du modèle d'inpainting d'images proposé dans le chapitre 2 sont explicités.

Algorithme 1 : Estimation des mesures d'orientation et de structure locale

1. Initialisation : le pas de temps Δt_1 , le nombre d'itérations T_1 et le paramètre de contraste k .
2. Approximation des dérivées partielles en espace $U_x^n, U_y^n, U_z^n, U_{xx}^n, U_{yy}^n$ et U_{xy}^n en utilisant un schéma de différences finies centrées.
3. Calcul de tenseur de structure S_0^n à partir de l'équation (2.3.1).
4. Calcul des valeurs propres initiales λ_{\max}^n et λ_{\min}^n
5. Calcul des éléments du TSNL à partir de :

$$\frac{s_{p,q}^{n+1}}{\Delta t} = \text{div}[g(|\lambda_{\max}^n - \lambda_{\min}^n|) \cdot \nabla s_{p,q}^n]$$

6. Si le nombre d'itérations est inférieur à T_1 , répéter l'étape 5.
7. Calcul de λ_{\max}^n , λ_{\min}^n , V_1^n et V_2^n .
8. Estimation de la mesure d'anisotropie locale $r^n = |\lambda_{\max}^n - \lambda_{\min}^n|$ et de l'intensité du coin $C^n = |(\nabla \cdot (V_2^n V_2^{nT}))^T \cdot \nabla U^n|$.

Algorithme 2 : Calcul des paramètres de contraste**Étape 1 : Partitionnement**

1. - Initialisation: sélection des moyennes initiales par les formules(2.3.14),
 - Affectation des pixels par l'équation (2.3.15) et calcul des nouvelles moyennes à partir de (2.3.16), ceci est répété jusqu'à un état d'équilibre,
 - Sélection des moyennes finales via (2.3.17),

Étape 2 : Ajustement

Calcul des paramètres de contraste k_i à partir de (2.3.18),

Algorithme 3 : Inpainting de l'image

1. Initialisation : Entrer l'image masquée U^0 , le pas de temps $\tau = \Delta t$ et le nombre d'itérations T
2. Estimation des mesures d'orientation et de structure locale par l'**Algorithme 1**
3. Calculer f_1^n, f_2^n, f_3^n et f_4^n en utilisant les paramètres de contraste k_1, k_2, k_3 et k_4 calculés par l'**Algorithme 2**
4. Calcul des dérivées directionnelles $U_{V_1^n V_1^n}^n, U_{V_2^n V_2^n}^n$

Estimation des filtres de choc $- \text{sign}(U_{V_1^n V_1^n}^n) \|\nabla U^n\|$ et $-((\nabla \cdot (V_2^n V_2^{nT}))^T \cdot \nabla U^n)$.

1. Calcul de U^{n+1} à partir de (2.4.1)
2. Si le nombre d'itérations est égale à T stop, sinon répéter les étapes de 2 à 7.

Bibliographie

- [1] L. Alvarez, P.L. Lions, et J.M. Morel, Image Selective Smoothing and Edge Detection by Nonlinear Diffusion. II. SIAM Journal on numerical analysis. vol. 29, no. 2, pp. 845-866, 1992.
- [2] L. Alvarez et L. Mazorra, Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol.31, no. 2, pp. 590-605, 1994.
- [3] P. Arias, V. Caselles, et G.A. Sapiro, variational framework for non-local image inpainting. In International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 345-358, 2009.
- [4] S. Armstrong, A. Kokaram, et P.J.W. Rayner, Nonlinear interpolation of missing data using min-max functions, In Proceedings of IEEE International Conference on Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP), 1997.
- [5] G. Aubert, et P. Kornprobst, Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Springer Science & Business Media, vol. 147, 2006.
- [6] I. Avcibas, B. Sankur, et K. Sayood, Statistical evaluation of image quality measures, Journal of Electronic Imaging, vol. 11, no. 2, pp. 206-223, 2002.
- [7] W. Baatz, M. Fornasier, P. Markowich, et C.B. Schönlieb, Inpainting of ancient austrian frescoes, In Conference proceedings of Bridges, pp. 150-156, 2008.

- [8] T. Barbu, G. Da Prato, et L. Tubaro, Kolmogorov equation associated to the stochastic reflection problem on a smooth convex set of a Hilbert space II. *Annales de l'IHP Probabilités et statistiques*, vol. 47 , no. 3, pp. 699-724, 2011.
- [9] T. Barbu, et A. Favini, Novel stochastic differential model for image restoration. *Proceedings of the Romanian Academy - Series A: Mathematics, Physics, Technical Sciences, Information Science*. vol. 17, no. 2, pp. 109-116, 2016.
- [10] M. Battaglini, M. Jenkinson, et N. De Stefano, Evaluating and reducing the impact of white matter lesions on brain volume measurements, *Human brain mapping*, vol. 33, no. 9, pp. 2062-2071, 2012.
- [11] A. Belahmidi, Équations aux dérivées partielles appliquées à la restauration et à l'agrandissement des images, Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine, 2003.
- [12] M. Benseghir, F.Z. Nouri, et P.C. Tauber, An inpainting Result by a Nonlinear Structure Tensor, In *Proceedings of the 20th International Conference on Information Visualisation (IV) IEEE*, pp. 367-370, 2016.
- [13] M. Benseghir, F.Z. Nouri et P.C. Tauber, A New Partial Differential Equation For Image Inpainting, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, SPM -ISSN-2175-1188 Online, ISSN-00378712 in Press*.
- [14] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, et C. Ballester, Image inpainting, In *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques Computer graphics, SIGGRAPH 2000*, pp. 417-424, 2000.
- [15] M. Bertalmio, L. Vese, G. Sapiro, et S. Osher, Simultaneous structure and texture image inpainting, *IEEE transactions on image processing*, vol.12, no.8, pp. 882-889, 2003.

- [16] M. Bertalmio, Strong-continuation, contrast-invariant inpainting with a third-order optimal PDE, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.15, no.7, pp. 1934-1938, 2006.
- [17] M.J. Black, G. Sapiro, D.H. Marimont, et D. Heeger, Robust anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, no. 3, pp. 421-432, 1998.
- [18] D. Borkowski, Euler's Approximations to Image Reconstruction. In *International Conference on Computer Vision and Graphics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [19] D. Borkowski, Dariusz, et K. Jańczak-Borkowska, Image Restoration Using Anisotropic Stochastic Diffusion Collaborated with Non Local Means. In *IFIP International Conference on Computer Information Systems and Industrial Management*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [20] D. Borkowski, Forward and backward filtering based on backward stochastic differential equations, *Inverse Problems & Imaging*, vol. 12 , no. 2, pp. 305-325, 2016.
- [21] D. Borkowski, et K. Jańczak-Borkowska, Image Denoising Using Backward Stochastic Differential Equations, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pp. 185-194, 2017.
- [22] M. Borroto-Fernández, M. González-Hidalgo, et A. León-Mecías, New estimation method of the contrast parameter for the Perona-Malik diffusion equation, *Computer Methods In Biomechanics And Biomedical Engineering: Imaging and Visualization*, vol. 4 , no. 3-4, pp. 238-252, 2016.
- [23] T. Brox, J. Weickert, B. Burgeth, et P. Mrázek, Nonlinear structure tensors, *Image and Vision Computing*, vol. 24, no. 1, pp. 41-55, 2006.
- [24] J. Canny, A computational approach to edge detection, *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, no. 6, pp. 679-698, 1986.

-
- [25] F. Catté, P.L. Lions, J.M. Morel et T. Coll, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 29, no 1, pp. 182-193, 1992.
- [26] T.F. Chan, et J. Shen, Mathematical models for local nontexture inpaintings, *Journal of Applied Mathematics*, vol. 62 , no. 3, pp. 1019-1043, 2001.
- [27] T.F. Chan, et J. Shen, Nontexture inpainting by curvature-driven diffusions, *Journal of Visual Communication et Image Representation*, vol. 12, no. 4, pp. 436-449, 2001.
- [28] T.F. Chan, et J. Shen, Variational Image Inpainting, *Comm. Pure Applied Math*, vol. 58, no. 5, pp. 579-619, 2005.
- [29] T.F. Chan, S. Esedoglu, F. Park, et A. Yip, Total Variation Image Restoration: Overview and Recent Developments. In: N. Paragios, Y. Chen, O. Faugeras (eds) *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*. Springer, Boston, MA, 2006.
- [30] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-Féraud, et M. Barlaud, Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, vol. 2, pages 168-172, 1994.
- [31] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, et M. Barlaud, Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, no. 2, pp. 298–311, 1997.
- [32] D.T. Chard, J.S. Jackson, D.H. Miller, et C.A.M. Wheeler-kingscott, Reducing the impact of white matter lesions on automated measures of brain gray and white matter volumes, *Journal of magnetic resonance imaging*, vol. 32, no 1, pp. 223-228, 2010.
- [33] G.H. Cottet, et L. Germain, Image processing through reaction combined with nonlinear diffusion, *Mathematics of computation*, vol. 61, no.204, pp. 659-673, 1993.

- [34] G.H. Cottet, et M. El Ayyadi, Nonlinear PDE operators with memory terms for image processing, In Proceedings IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), Laussane, Switzerland, vol.1, pp. 481-484, 1996.
- [35] A. Criminisi, P. Perez, et K. Toyama, Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 13, no. 9, pp. 1200-1212, 2004.
- [36] I. Daubechies, et G. Teschke, Variational image restoration by means of wavelets: Simultaneous decomposition, deblurring, and denoising, Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 19, no. 1, pp. 1-16, 2005.
- [37] S. Di Zenzo, A note on the gradient of a multi-image, Computer vision, graphics, and image processing, vol. 33, no 1, p. 116-125, 1986.
- [38] R. Dosselmann et X.D. Yang, Existing and emerging image quality metrics, In Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, pp. 1906-1913, 2005.
- [39] I. Drori, D. Cohen-Or, et H. Yeshurun, Fragment-based image completion, ACM Transactions on Graphics, vol. 22, pp. 303–312, 2003.
- [40] R. Duits, L. Florack, J. de Graaf, et B. Ter Haar Romeny. On the axioms of scale space theory. Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol.20, pp. 267-298, 2004.
- [41] A. A. Efros, et T. K. Leung, Texture synthesis by non-parametric sampling, In Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on Computer Vision, Kerkyra, Greece, vol.2, pp. 1033-1038, 1999.
- [42] A.A. Efros, et T.F. William, Image quilting for texture synthesis and transfer, In Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM, pp. 341-346, 2001.

-
- [43] M. Elad, J.L. Starck, P. Querre, et D.L. Donoho, Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA), *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 19, no. 3, pp. 340-358, 2005.
- [44] C.W. Fang, et J.J. Lien, Fast image replacement using multi-resolution approach, In *Asian Conference on Computer Vision (ACCV)*, pp. 509-520, 2006.
- [45] M. Felsberg, et G. Sommer, Scale-adaptive filtering derived from the Laplace equation. In *Joint Pattern Recognition Symposium*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 124-131, 2001.
- [46] M. Felsberg, et G. Sommer, The monogenic scale-space: A unifying approach to phase-based image processing in scale-space. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 21, no. 1, pp. 5-26, 2004.
- [47] L. Florack. *Image Structure, Computational imaging and vision. (CIVI)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, vol. 10, 1997.
- [48] M.A. Förstner, E. Gülch, A fast operator for detection and precise location of distinct points, corners and centres of circular features, In *Proceedings of inter-commission conference on fast processing of photogrammetric data (ISPRS)*, pp. 281-305, 1987.
- [49] G. Gilboa, N. Sochen, Y. Zeevi, Forward-and-backward diffusion processes for adaptive image enhancement and denoising, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol.11, no.7, pp. 689-703, 2002.
- [50] G. Gilboa, et S. Osher, Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation, *Multiscale Modeling & Simulation*, vol. 6, no 2, pp. 595-630, 2007.
- [51] R.C. Gonzalez, R.E. Woods, E.L. Eddins, *Digital Image Processing Using MATLAB*, Gatesmark Publishing, 2009.
- [52] K.A. Govindarajan, S. Datta, K.M. Hasan, S. Choi, M.H. Rahbar, et S.S. Cofield, MRI Analysis Center at Houston, The CombiRx Investigators Group. Effect of in-

- painting on cortical thickness measurements in multiple sclerosis: A large cohort study. *Human brain mapping*, vol. 36, no. 10, pp. 3749-3760, 2015.
- [53] P.J. Green, Bayesian reconstruction from emission tomography data using a modified em algorithm. *IEEE transactions on medical imaging*, vol. 9, no 1, pp. 84-93, 1990.
- [54] C. Guillemot, M. Turkan, O. L. Meur, et M. Ebdelli, Image inpainting using LLE-LDNR and linear subspace mappings, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech , and Signal Processing (ICASSP '13)*, pp. 1558-1562, 2013.
- [55] N. Guizard, K. Nakamura, P. Coupé, V.S. Fonov, D.L. Arnold, et D.L. Collins, Non-Local Means Inpainting of MS Lesions in Longitudinal Image Processing, *Frontiers in Neuroscience*, vol. 9, pp. 456, 2015.
- [56] M.L. Hadji, M. Maouni, et F. Z. Nouri, A Wavelet Inpainting by a Tixotrop Model, In *14th International Conference Information Visualisation*, London, pp. 559-563, 2010.
- [57] A. Hore, et D. Ziou, Image quality metrics: PSNR vs. SSIM. In *20th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 2366-2369, 2010.
- [58] H. Igehy, et L. Pereira, Image replacement through texture synthesis, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, 1997.
- [59] R. Illner, et H. Neunzert. Relative entropy maximization and directed diffusion equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 16, no 8, pp. 545-554, 1993.
- [60] B. Jähne, *Spatio-temporal image processing*, *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 751, Springer, Berlin, 1993.
- [61] B. Jähne, *Computer Vision and Applications A Guide for Students and Practitioners*, Elsevier, 2000.

- [62] M. Jiang, Review of Image processing and analysis: variational, PDE, Wavelet, and Stochastic methods by Tony F. Chan and Jianhong (Jackie) Shen. *Biomedical engineering online*, vol. 5, no. 1, pp. 1-3, 2006.
- [63] K.H. Jung, J.H. Chang, et C.W. Lee, Error concealment technique using data for block-based image coding, *Visual Communications and Image Processing'94*. International Society for Optics and Photonics, vol. 2308, pp. 1466-1477, 1994.
- [64] F. Kanters, L. Florack, B. Platel, et B. ter Haar Romeny. Image reconstruction from multiscale critical points. In *International Conference on Scale-Space Theories in Computer Vision*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 464-478, 2003.
- [65] J.P. Khane, P. Gilles, et R. Lemerie, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998.
- [66] C. Khare, et K. Nagwanshi, Image Restoration Technique with Non Linear Filter. *International Journal of Advanced Science and Technology*, vol. 39, pp. 67-74, 2012.
- [67] S. Kichenassamy, The Perona-Malik paradox. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 57, no. 5, pp. 1328-1342, 1997.
- [68] R. Kimmel, N. Sochen, et J. Weicker, Scale-Space and PDE Methods in Computer Vision, In *Proceedings of 5th International Conference, Scale-Space 2005*, Hofgeismar, Germany, vol. 3459, pp. 431-442, 2005.
- [69] J. Koenderink, The structure of images, *Biological Cybernetics*, vol.50, pp. 363-370, 1984.
- [70] A.C. Kokaram, R.D. Morris, W.J. Fitzgerald, et P.J.W. Rayner, Interpolation of missing data in image sequences II, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, no.4, pp. 1509-1519, 1995.
- [71] P. Kornprobst, R. Deriche, et G. Aubert. Image restoration via PDE's. In *First Annual Symposium on Enabling Technologies for Law Enforcement and Security SPIE Conference 2942 : Investigative Image Processing.*, Boston, Massachusetts, USA, 1996.

- [72] P. Kornprobst, R. Deriche, et G. Aubert. Nonlinear operators in image restoration. In Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 325-331, 1997.
- [73] P. Kornprobst. Contributions à la Restauration d'Images et à l'Analyse de Séquences: Approches Variationnelles et Solutions de Viscosité, thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [74] W. Kwok, et H. Sun, Multidirectional interpolation for spatial error concealment, IEEE Transactions on consumer electronics, vol. 39, no 3, pp. 455-460, 1993.
- [75] X. Li, et T. Chen, Nonlinear diffusion with multiple edginess thresholds, Pattern Recognition, vol.27, no.8, pp.1029-1037, 1994.
- [76] T. Lindeberg. Edge detection and ridge detection with automatic scale selection. International Journal of Computer Vision, vol. 30, no. 2, pp. 117-154, 1998.
- [77] T. Lindeberg, Feature detection with automatic scale selection. International Journal of Computer Vision, vol. 30, no. 2, pp. 79-116, 1998.
- [78] E.M. Lungu, B. Øksendal. Optimal harvesting from a population in a stochastic crowded environment. Mathematical Biosciences, vol. 145, no. 1, pp. 47-75, 1997.
- [79] J. Ma, P. Protter, J. San Martín, et S. Torres, Numerical Method for Backward Stochastic Differential Equations. The Annals of Applied Probability, vol. 12, no. 1, pp. 302-316, 2002.
- [80] H. Maitre, Le traitement des images - Hermès Science - Editions Lavoisier, 2003.
- [81] M. Malfait, et D. Roose, Wavelet-based image denoising using a Markov random field a priori model, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 6, no. 4, pp. 549-565, 1997.
- [82] M. Maouni, F.Z. Nouri, et D. Meskine, Image Restoration by Non-standard Diffusion, IEEE Geometric Modeling and Imaging , Modern Techniques and Applications, Vol. 9 , No. 11, pp. 98-101, 2008.

-
- [83] M. Maouni, Fluid Mechanics Models in image Processing, Thèse de Doctorat, Département de Mathématiques, UBM-Annaba, 2010.
- [84] S. Masnou, et J. Morel, Level Lines based Disocclusion, In Proceedings of International Conference on Image Processing (ICIP98) (Cat. No. 98CB36269), pp.259-263, 1998.
- [85] S. Masnou, Disocclusion : a variational approach using level lines, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 11 , No. 2, pp. 68-76, 2002.
- [86] M. Meeker. The Internet Trends report. <https://www.bondcap.com/report/itr19/>
- [87] D. Mezhoud, Problèmes Inverses en Traitement d'Images, Thèse de Doctorat, UBM-Annaba, 2017.
- [88] J.M. Mirebeau, J. Fehrenbach, L. Risser, et S. Tobji, Anisotropic Diffusion in ITK, arXiv preprint arXiv:1503.00992, 2015.
- [89] J.M. Morel, et S. Solimini. Segmentation of images by variational methods: A constructive approach. *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, vol. 1, no 1-2-3, pp. 169-182, 1988.
- [90] D. Mumford, et J. Shah. Boundary detection by minimizing functionals. In Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 22-26, 1985.
- [91] H.H. Nagel, et A. Gehrke, Spatiotemporally adaptive estimation and segmentation of OF-fields, in: H. Burkhardt, B. Neumann (Eds.), *Computer Vision – ECCV'98*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 1407, Springer, Berlin, pp. 86-102, 1998.
- [92] M. Nikolova, Minimizers of cost-functions involving nonsmooth datafidelity terms. Application to the processing of outliers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 40, no.3, pp. 965-994, 2002.

- [93] M. Nitzberg, T. Shiota, Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.14, no.8, pp. 826-833,1992.
- [94] N. Nordström, Biased anisotropic diffusion, a unified regularization and diffusion approach to edge detection. *Image and Vision Computing*, vol. 8, no 4, pp. 318-327, 1990.
- [95] B. Oksendal, *Stochastic differential equations an introduction with applications*, Berlin, Germany: Springer, 1996.
- [96] E. Pardoux, *Backward Stochastic Differential Equations and Viscosity Solutions of Systems of Semilinear Parabolic and Elliptic PDEs of Second Order*, *Stochastic Analysis and Related Topics VI. Progress in Probability*, vol. 42, 1998.
- [97] E. J. Pauwels, L. J. Van Gool, P. Fiddelaers, et T. Moons, An extended class of scale-invariant and recursive scale space filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, no.7, pp. 691–701, 1995.
- [98] P. Perona, et J. Malik, Scale space and edge detection using anisotropic diffusion, *Proc. IEEE Comp. Soc. Workshop on Computer Vision* , IEEE Computer Society Press, Washington, 16-22, 1987.
- [99] P. Perona, et J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 7, pp. 629-639, 1990.
- [100] P. Peter, J. Weickert, A. Munk, T. Krivobokova, et H. Li, Justifying tensor-driven diffusion from structure-adaptive statistics of natural images, In *International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition*, Springer International Publishing, pp. 263-277, 2015.

- [101] C. Petitjean, Le recalage d'images, Cours de master en science médicales et pharmaceutiques. Université de Rouen, France, http://www.carolinepetitjean.free.fr/enseignements/ti/coursrecalage_petitjean
- [102] A.R. Rao, et B.G. Schunck, Computing oriented texture fields, *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, vol. 53, pp. 157-185, 1991.
- [103] A. Rares, M.J. Reinders, et J. Biemond, Edge-based image restoration, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 14, no. 10, pp. 1454-1468, 2005.
- [104] M.M.O.B.B. Richard, et M.Y.S. Chang, Fast digital image inpainting, In *Appeared in the Proceedings of the International Conference on Visualization, Imaging and Image Processing (VIIP)*, pp. 106-107, 2001.
- [105] L. Rudin, *Images, Numerical analysis of singularities and shock filters*, Phd thesis, California Institute of Technology, 1987.
- [106] L. I. Rudin, S. Osher, et E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: nonlinear phenomena*, vol. 60, no 1-4, pp. 259-268, 1992.
- [107] O. Scherzer, Denoising with higher order derivatives of bounded variation and an application to parameter estimation. *Computing*, vol. 60, no.1, pp. 1-27, March 1998.
- [108] O. Scherzer, et J. Weickert, Relations between regularization and diffusion filtering. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 12, no 1, pp. 43-63, 2000.
- [109] C. Schnörr, Unique reconstruction of piecewise smooth images by minimizing strictly convex non-quadratic functionals. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 4, no 2, pp. 189-198, 1994.
- [110] M. Sdika, et D. Pelletier, Nonrigid registration of multiple sclerosis brain images using lesion inpainting for morphometry or lesion mapping, *Human brain mapping*, vol. 30, no 4, pp. 1060-1067, 2009.

- [111] J. Sethian, curvature and the evolution of fronts, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 101, no 4, pp. 487-499, 1985.
- [112] W. Shao et Z. Wei, Edge-and-corner preserving regularization for image interpolation and reconstruction, *Image and Vision Computing*, vol. 26, no. 12, pp. 1591-1606, 2008.
- [113] R. Shilpa, J. Sonika Jindal, et K. Bhavneet. A Brief Review on Image Restoration Techniques. *International Journal of Computer Applications*, vol. 150, no. 12, pp. 30-33, 2016.
- [114] H. Tanaka, Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Condition in Convex Regions, *stochastic Processes: Selected Papers of Hiroshi Tanaka*, vol. 9, pp. 157-171, 1979.
- [115] X.C. Tai, S. Osher et R. Holm, Image Inpainting Using a TV-Stokes Equation, *Image Processing Based on Partial Differential Equations: Proceedings of the International Conference on PDE-Based Image Processing and Related Inverse Problems*, pp. 3-22, 2007.
- [116] A. N. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Mathematics Doklady*, vol. 4, no.2, pp. 1035-1038, 1963.
- [117] D. Tschumperlé, PDE's based regularization of multivalued images and applications, *Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis*, 2002.
- [118] D. Tschumperlé et R. Deriche, Vector-valued image regularization with PDEs: a common framework for different applications, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 27, no. 4, pp. 506-517, 2005.
- [119] G. Unal, Gozde, H. Krim et A. Yezzi, Stochastic differential equations and geometric flows. *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society*. vol. 11, no. 12, pp. 1405-1416, 2002.

- [120] R. van den Boomgaard, et J. Van de Weijer, Robust estimation of orientation for texture analysis, In proceeding of 2nd International Workshop on Texture Analysis and Synthesis, Copenhagen, 2002.
- [121] Z. Wang, A.C. Bovik, H.R. Sheikh, et E. P. Simoncelli, Image quality assessment: From error visibility to structural similarity, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 13, no. 4, pp. 600-612, 2004.
- [122] Z. Wang, et A.C. Bovik, Mean squared error: love it or leave it?, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 26, pp. 98-117, 2009.
- [123] J. Weickert, A review of nonlinear diffusion filtering. In: ter Haar Romeny B., Florack L., Koenderink J., Viergever M. (eds) *Scale-Space Theory in Computer Vision Scale-Space 1997*. Lecture Notes in Computer Science, vol 1252. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [124] J. Weickert, *Anisotropic diffusion in image processing*, Stuttgart : Teubner, vol. 1, pp. 59-60, 1998.
- [125] J. Weickert, T. Brox, Diffusion and regularization of vector- and matrix-valued images, in: M.Z. Nashed and O. Scherzer, editors, *Inverse Problems, Image Analysis, and Medical Imaging*, Contemporary Mathematics, AMS, Providence, vol. 313, pp. 251-268, 2002.
- [126] J. Weickert, Coherence-enhancing shock filter, *Pattern Recognition Symposium*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 1-8, 2003.
- [127] R. Whitaker, *Geometry limited diffusion*, Thèse de doctorat, University of North Carolina, 1993.
- [128] A. Witkin, Scale-space filtering, In *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1019-1021, 1983.

- [129] A. Wong, et J. Orchard, A nonlocal-means approach to exemplar-based inpainting. In 2008 15th IEEE International Conference on Image Processing, pp. 2600-2603, 2008.
- [130] J. Wu, Z. Feng, et Z. Ren, Improved structure-adaptive anisotropic filter based on a nonlinear structure tensor, *Cybernetics and Information Technologies*, vol. 14, no. 1, pp. 112-127, 2014.
- [131] H. Yamauchi, J. Haber, et H.P. Seidel, Image restoration using multiresolution texture synthesis and image inpainting, In *Proceedings of Computer Graphics International*, IEEE, pp. 120-125, 2003.
- [132] Y.L. You, W. Xu, A. Tannenbaum, et M. Kaveh, Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing, *IEEE Transactions on image processing*, vol. 5, no. 11, pp. 1539-1553, 1996.
- [133] B. Yufang, et H. Krim, Smart nonlinear diffusion: a probabilistic approach, in *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, no. 1, pp. 63-72, 2004.
- [134] F. Zhang, Y. Chen, Z. Xiao, L. Geng, J. Wu, T. Feng, P. Liu, Y. Tan, et J. Wang, Partial Differential Equation Inpainting Method Based on Image Characteristics, In *Proceedings of 8th International Conference in Image and Graphics*, pp.11-19, 2015.