وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR -ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année : 2019

THÈSE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de doctorat en sciences

SOLVABILITE DE CERTAINES CLASSES D'EQUATIONS D'OPERATEURS DANS LES ESPACES DE BANACH

Option
Mathématiques fondamentales

Par
Ahfouda Belhadi

DIRECTEUR DE THÈSE :	Mansour Abdelouahab	Prof.	U.H.L.ELOUED
CO-DIRECTEUR DE THÈSE :	Salmi Abdelouahab	MCA.	U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	Benouhiba Nawel	Prof	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Djebabla Abdelhak	M.C.A	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Bouzenada Smail	M.C.A	U.L.T.TEBESSA
EXAMINATEUR :	Mecheri Hacene	M.C.A	U.L.T.TEBESSA

Abstract

It is well known that a matrix (or an operator) has an inverse, if it is square and of non-zero determinant. However, in several areas of applied mathematics we have need some types of partial inverses of a singular matrix, or even rectangular. For example, solutions of equations or linear systems may exist even if the matrix defining this system is singular. Which leads to the inverse so called generalized of a matrix. Invertibility is one of the most common disciplines in mathematics, many problems are interpreted by an equation of the type Ax = y ; where A is a given linear transformation, which is in our situation a matrix of type m x n on K.

Keywords :

Drazin inverse, operator equation, consistent equation, generalized inverse.

Résumé

Il est bien connu qu'une matrice (ou un opérateur) a une inverse, si elle est carrée et de déterminant non nul. Cependant, dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées on a besoin de quelques types d'inverses partielles d'une matrice singulière, ou même rectangulaires. Par exemple, les solutions des équations ou des systèmes linéaires peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière. Ce qui conduit à l'inverse ainsi nommé généralisée d'une matrice. L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation du type $Ax = y$; où A est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice de type mxn sur K.

Mots-clés :

Inverse de Drazin, Équation d'opérateurs, Équation consistente, inverse généralisée
.

ملخّص

من المعروف أنّ المصفوفة أو المؤثر تقبل معكوسا ، إذا كانت مربعة ومحددها غير معدوم.

ومع ذلك، في العديد من مجالات الرياضيات التطبيقية نحن بحاجة إلى بعض أنواع المعكوسات لمصفوفات شاذة، أو محددها معدوم أو حتى مستطيلة.

على سبيل المثال، قد توجد حلول المعادلات أو الجمل الخطية حتى لو كانت المصفوفة التي تؤطر هذا النظام غير منتظمة، مما يؤدي إلى ضرورة ما يسمى بالمعكوس المعمم لمصفوفات شاذة.

نظرية المعكوسات هي إحدى أكثر التخصصات شيوعا في الرياضيات، ويتم تفسير العديد من المشكلات بواسطة معادلة من النوع $Ax = y$ حيث A مؤثر خطي يمكن أن يمثل بمصفوفة $n \times m$ معرفة على K .

الكلمات المفتاحية :

معكوس درزا ، معكوس معمم ، معادلة مؤثرات، معادلة مستقرة.

Remerciements

Ce travail de thèse, je le dois beaucoup à toutes les personnes qui m'ont entouré pendant ces dernières années. A cet effet, je tiens à leur exprimer, mes remerciements les plus sincères.
Tout d'abord, ma plus grande gratitude s'adresse tout particulièrement à mon directeur de thèse, Abdelouahab Mansour, qui m'a choisi ce sujet extrêmement intéressant et co directeur de thèse, Salmi Abdelouahab, qui m'a donné beaucoup de suggestions et remarques pour compléter ce travail.
Merci également aux membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : La présidence du jury assurée par Mme. Le professeur Benouhiba Nawel, est très honorable pour moi. Je remercie sincèrement Mrs. Bouznada Smail, Djebabla Abdelhak et Mecheri Hacene, pour l'honneur qu'ils me font d'accepter de participer à ce jury et de juger mon travail.

Je tiens également adresser mes plus sincères remerciements pour Mrs. Hechifa Abderrazak et Moumen Bekkouche Mohammed.
Je remercie du fond de coeur, ma famille, mes très chers parents, mes frères, soeurs et mes enfants, ainsi que mes amis. Ils m'ont tous largement aidé et soutenu tout au long des diverses épreuves de ces dernières années.

Table des matières

Notations génrales

H : Espace de Hilbert.
$(.;.)$: Produit scalaire.
$\|.\|$: Norme.
$B(H)$: espace des opérateurs linéaires bornés sur H.
A^{-1} : L'inverse de l'opérateur A.
A^* : L'adjoint de l'opérateur A.
$R(A)$: L'image de l'opérateur A.
$N(A)$: Le noyau de l'opérateur A.
$\sigma(A)$: Le spectre de l'opérateur A.
$\sigma_p(A)$: Le spectre ponctuel de l'opérateur A.
$\sigma_c(A)$: Le spectre continu de l'opérateur A.
$\sigma_r(A)$: Le spectre résiduel de l'opérateur A.
$r(A)$: Le rayon spectral de A.
$(FP)_{B(H)}$: La propriété de Fuglède-Putnam.
$a \otimes b$: Produit tensoriel de deux vecteurs a et b.
$\mathcal{A}$: algèbre de Banach.
$\mathcal{N}(A)$: classe des opérateurs quasi nilpotentes.

Introduction

La résolution des équations d'opérateurs et des systèmes d'équations dans les différents espaces a joué un rôle primordial dans la physique et dans beaucoup spécialité d'ingénierie.
Dans la pratique, il existe plusieurs cas de singularité, on sait en général, qu'une matrice (ou un opérateur) admet une inverse, si elle est carrée et de déterminant non nul..
Cependant, pour certains cas de singularité on a besoin de quelques types d'inverses partielles d'une matrice singulière, ou même rectangulaire, Par exemple, les solutions d'un système linéaire peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière. Ce qui conduit à l'inverse généralisée d'une matrice. L'inversibilité des matrices et des opérateurs est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation du type $Ax = y$; où A est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre cas une matrice de type $m \times n$ sur K (ou un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel E dans un autre F de dimensions n et m). Ces problèmes dans des différents domaines tels que l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires et plusieurs domaines d'ingénierie, sont traités via le concept d'une inverse généralisée (ou le pseudo inverse) d'une matrice (ou d'un opérateur linéaire). Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuelle réjouit, et d'une manière que cette inverse existe pour une classe aussi large d'opérateurs linéaires..

L'inverse de Drazin d'une matrice carrée a été récemment utilisée dans la solution des systèmes et des équations d'opérateurs ou matricielles [1, 2, 12], et plus particulièrement dans la solution d'équations différentielles avec matrices singulières à coefficients constants [12]. Les méthodes de calcul de l'inverse de Drazin sont donc d'un certain intérêt..

Dans [36] une méthode est donnée pour calculer l'inverse de Drazin d'une matrice $A(n \times n)$ comme polynôme de degré $n - 1$ ou moins pourvu que les valeurs

propres de A soient connues.
Cette méthode a été utilisée pour la solvabilitée des équations différentielles avec matrices singulières à coefficients constants [12]..

Soit X l'espace de Banach à dimension infini et $B(X)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires définis sur X. Nous rappelons que l'inverse de Drazin de l'opérateur $A \in B(X)$ est l'opérateur unique $A^D \in B(X)$, à condition qu'il existe un entier positif k, remplissant les conditions suivantes $A^D A = AA^D$, $A^D AA^D = A^D$, $A^{k+1}A^D = A^k$.
Le plus petit nombre naturel k satisfaisant le système d'équations précédent est appelé indice de l'opérateur A est noté ind (A). Castro-Gonzàlez et al. [8] ont pu arrivé à une expression explicite pour l'inverse de Drazin A^D..
Le concept de l'inverse généralisée de Drazin (GD-inverse) sur un espace de Banach à dimension infinie a été introduit par Koliha [26], qui est l'élément A^D dans $B(X)$ tel que $A^D A = AA^D$, $A^D AA^D = A^D$, $A - A^2A^D$ est quasi-nilpotent. Ces dernières années, les caractérisations de 1 inverses de Drazin des matrices ou d'opérateurs sur un espace de Banach de dimension infini ont été considérées par de nombreux auteurs[3, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 17, 20, 44, 46]. Caradus [6], Bhaskara[3] et Brnes[5], ont étudiés l'inverse de Drazin de quelques opérateurs linéaires bornés sur des espaces complexes de Banach..
Caradus[6] a prouvé qu'un opérateur linéaire borné A sur un espace complexe de Banach admet une inverse de Drazin si et seulement si 0 est un pôle du résolvant $(\lambda I - A)^{-1}$ de A ; l'ordre du pôle est égal à l'indice de Drazin de A. (Voir aussi Nicolas [36] .).
Castro-González et Al[8], Mosic et Djordjevic[32, 33, 34] , Nashed[35] et Koliha[26] Lian et Zeng[29] ont étudié l'inverse généralisée de Drazin sur un espace de Banach. Quelques propriétés additives et les expressions explicites de l'inverse de GD de la somme produit sont obtenues dans[1, 10, 13, 17, 18, 19, 27]..
Dans cette thèse, en utilisant la technique des matrices blocs d'opérateurs, nous examinerons des représentations explicites de l'inverse généralisée de Drazin de la somme $(A + B)^D$ en termes de A, A^D B, B^D sous la condition $AB = BA$..

Nashed et Zhao [35] ont généralisé l'inverse de Drazin pour les opérateurs linéaires fermés et ses applications à des équations d'évolution singulières et partielles..

Dans [1], moi-même, Mansour et Salmi, on a pu arriver à des bons résultats concernant les conditions de solvabilité de plusieur types d'équations d'opérateurs (En basant toujours sur les propriétés des inverses de Drazin). La thèse se compose d'une introduction, cinq chapitres et une liste bibliographique.

Le premier chapitre, en plus de son caractère introductif, il est consacré á rappeler quelques propriétés des opérateurs linéaires bornés, quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$, les définitions et les caractérisations des opérateurs sur un espace de Banach, ainsi que quelques propriétés et techniques opératorielles..

Le deuxième chapitre traite principalement quelques types des d'équations opératorielles, telles que l'équation de Sylvester et d'autres types..

Dans le troisième chapitre on présente la théorie des inverses généralisées, et principalement quelque méthodes de calcul d'une inverse généralisée, et la solution de quelques équations, en utilisant les inverses généralisées..

Le quatrième chapitre traite quelques définitions et propriétés de l'inverse de Drazin, et la résolution des équations et systémes d'opérateurs en appliquant l'inverse de Drazin..

Le dernier chapitre est consacré à la solvabilité de plusieurs équations d'opérateurs en utilisant l'inverse de Drazin.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Opérateurs linéaires bornés sur les espaces de Hilbert

1.1.1 Espaces de Hilbert.

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on appelle un produit scalaire l'application $\langle ., . \rangle$: $H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$, qui à tout couple (x, y) associe le nombre complexe $\langle\ x,\ y \rangle$ telle que $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

1. $\langle \lambda x + \mu z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle z, y \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Si H est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Un espace vectoriel H sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire est dit espace pré-hilbertien, tout espace pré-hilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Si l'espace pré-hilbertien est complet, il est appelé espace de Hilbert.

Définition 1 (Identité de parallélogramme)**.** *Soit $x, y \in H$, avec H est un espace pré-hilbertien alors $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.*

Remarque 1. *Un espace vectoriel normé est un espace pré-hilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité de parallélogramme.*

Définition 2. *On dit que deux élément x, y d'un espace pré-hilbertien sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ et on note $x \perp y$.*

Définition 3. *On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{C}$.*

Remarque 2. *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si sa norme vérifie l'identité de parallélogramme.*

Exemple. $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ et , $L^2(\Omega)$ munis de leurs produits scalaires usuels sont des espaces de Hilbert.

1.1.2 Opérateurs linéaires bornés.

Nous allons utiliser les notations suivantes $B(X, Y)$ l'ensembles des Opérateurs linéaires bornés de l'espace vectoriel X dans $Y, R(A)$, l'image de l'opérateur A. $N(A)$ le noyau de A tel que
$R(A) = \{y \in Y : y = Ax, et \quad x \in X \quad \}, N(A) = \{x \in X, \quad Ax = 0\}.$

Définition 4. *Soient X_1, X_2 deux espaces vectoriels de X. On dit que X_1, X_2 sont supplémentaires si $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, et $X_1 + X_2 = X$, et X est la somme direct de X_1 et X_2 et on note $X_1 \oplus X_2 = X$.*

Définition 5. *On appelle opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$, toute application telle que $\forall x, y \in X, A(x + y) = A(x) + A(y)$ et $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$, on ait $A(\alpha x) = \alpha A(x)$.*

Définition 6. *On dit qu'un opérateur linéaire A de X dans Y est borné s'il existe un réel c positif pour lequel, pour tout $x \in X$, l'inégalité suivante est réalisée : $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$. Le plus petit c vérifiant l'égalité précédente est appelé norme de l'opérateur A, et est noté par $\|A\|$.*

1.1.3 L'adjoint d'un opérateur.

Définition 7. *Pour tout opérateur $A \in B(H)$, $A^\star$ désigne l'opérateur adjoint de l' opérateur A, défini par $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle$, pour tout $x, y \in H$. Rappelons dans la proposition suivante quelques propriétés élémentaires.*

Proposition 1. *Si A et B sont deux opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert H, alors leurs adjoints $A^\star, B^\star$ sont aussi deux opérateurs linéaires bornés sur H et les propriétés suivantes sont vérifiées :*
(i) $\|A^\star\| = \|A\|$
(ii) $(A + B)^\star = A^\star + B^\star$
(iii) $(\alpha A)^\star = \bar{\alpha} A^\star, \alpha \in C.$
(iv) $(A^\star)^\star = A$
(v) $(A^\star)^{-1} = (A^{-1})^\star$, *si A est inversible*
(vi) $(AB)^\star = B^\star A^\star.$

1.2 Quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$.

Un opérateur $A \in B(H)$ est dit :

— **Compact**, si $\langle Ax_n, x_n \rangle \to 0$ pour toute suite orthonormée (x_n) de H.
— **De rang fini**, si $R(A)$ est de dimension finie.
— **Positif**, si $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$; on note $A \geq 0$.
— **Auto-adjoint**, si $A = A^*$.
— **projection** si $A^2 = A$.
— **projection orthogonale** si $A^2 = A$ et $A = A^*$.
— **Isométrie**, si $A^*A = I_H$.
— **Unitaire**, si $A^*A = AA^* = I$.
— **Dominant**, si $R(A - \lambda) \subseteq R(A - \lambda)^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
— **Normal**, si $A^*A - AA^* = 0$.
— **Sous-normal**, s'il admet une extension normale.
— **Quasinormal**, s'il commute avec A^*A.
— **Hyponormal**, si $A^*A - AA^* \geq 0$.
— **Semi-normal**, si A ou A^* est hyponormal.
— k**-quasihyponormal**, si $A^{*k}(A^*A - AA^*)A^k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Remarque 3. *On a la série des inclusions des classes d'opérateurs suivantes* $positifs \subset autoadjoints \subset normaux \subset quasinormaux \subset hyponormaux \subset k-hyponormaux$

1.3 Spectres, résolvantes et images numériques

Pour $A \in B(H)$, on introduit les notions suivantes :

• Le spectre de A est l'ensemble $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$

• L'ensemble résolvant de A est le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du spectre de A, on le note $\varrho(A)$ et est donnée par $\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda I \text{ est inversible}\}$

• L'application résolvante de A est l'application qui à tout $\lambda \in \varrho(A)$ associe $(\lambda I - A)^{-1}$, et pour $\lambda \in \varrho(A)$ on a $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

• Le rayon spectral de A est le scalaire

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

• Le spectre ponctuel de A est l'ensemble $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}$.

• Le spectre approché (ou approximatif) de A est l'ensemble
$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists (x_n) \subset H : \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} (A - \lambda I)\, x_n = 0\}$.

Définition 8. *Pour $A \in B(H)$, dans le cas H est un espace de Hilbert, l'image numérique de l'opérateur A est définie par* $W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$.

1.4 Autres définitions et caractérisations des opérateurs sur un espace de Banach.

Définition 9. *On dit qu'un espace vectoriel normé E est de Banach si E est complet.*

Exemple : $E = \mathbb{R}^n$ est un espace de Banach pour la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|, x \in E$.

1.4.1 Algèbres de Banach.

Définition 10. *On appelle algèbre de Banach $\mathcal{A}$ tout espace de Banach sur lequel on définit une deuxième loi de composition interne notée multiplication telle que :*
1) $\forall A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$
$A_1(A_2.A_3) = (A_1.A_2)\, A_3$
2)$A_1(A_2 + A_3) = A_1.A_2 + A_1.A_3$
3)$\forall \lambda \in \mathbb{C}, A_1.(\lambda A_2) = \lambda (A_1.A_2)$
4) $\|A_1.A_2\| \leq \| A_1 \| \, \|A_2\|$.

1.4.2 Propriétés des algèbres de Banach

Théorème 1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, alors, si $A \in \mathcal{A}$ et $\| A \| < 1$ la série $\sum A^n$ est convergente.*

Démonstration Comme

$$\| A \| < 1 \text{ et } \| A.A \| = \| A^2 \| \leq \| A \|^2,$$

il vient

$$\| A^n \| \leq \| A \|^n$$

en utilisant un raisonnement par récurrence, il s'en suit que la série géométrique de terme général A^n est normalement convergente, donc convergente puisque $B(X)$ est un espace de Banach.

Théorème 2. *Si A est un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach E, l'opérateur $I - A$ (I désigne l'opérateur identité sur E) est inversible si $\| A \| < 1$.*

Démonstration Il faut montrer qu'il existe $B \in B(E)$ tel que $(I-A)B = B(I-A) = I$ on a $(I-A)(I+A+...+\ A^n) = I - A^{n+1}$, et comme $\| A \| < 1$, il vient $B = \lim (I+A+...+\ A^n)$, quand $n \to \infty$, posons $B_n = I+A+...+A^n$.

□

1.5 Propriétés et techniques opératorielles

1.5.1 Commutateurs

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie.

Définition 11. (1) *Un élément X de $B(E)$ est dit commutateur s'il existe A, B de $B(E)$ tel que $X = AB - BA = [A, B]$.*
(2) *Le commutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par*

$$\{A\}' = \{B \in B(E) : AB = BA\}.$$

(3)*Le bicommutant de $A \in B(E)$ est l'ensemble défini par*

$$\{A\}'' = \left\{C \in B(E) : CB = BC, \forall B \in \{A\}'\right\}.$$

Propriétés :
(1) $\{A\}'' = \left\{\{A\}'\right\}$
(2) $\{A\}'$est un sous- algèbre fermé de $B(E)$
(3) $\{A\}''$ est un sous- algèbre commutatif de $B(E)$
(4) Tout polynôme de A appartient à $\{A\}''$.

1.5.2 Similarité

Définition 12. *Soient A et B deux opérateurs dans $B(E)$, on dit que A et B sont similaires si et seulement s'il existe un opérateur inversible Q tel que $B = QAQ^{-1}$.*

Lemme 1. *Soient A et B deux opérateurs dans $B(E), R_\lambda(A), R_\lambda(B)$ leurs applications résolvantes respectivement, alors $R_\lambda(A)$ et $R_\lambda(B)$ sont similaires si et seulement si A et B les sont.*

Démonstration Soient A et B deux opérateurs similaires dans $B(E)$, alors il existe un opérateur inversible Q tel que $B = QAQ^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} R_\lambda(B) &= R_\lambda\left(QAQ^{-1}\right) \\ &= \left(QAQ^{-1} - \lambda I\right)^{-1} \\ &= \left((QA - \lambda Q)\, Q^{-1}\right)^{-1} \\ &= Q\,(QA - \lambda Q)^{-1} \\ &= Q\,(A - \lambda I)^{-1} Q^{-1} \\ &= QR_\lambda(A)\, Q^{-1}. \end{aligned}$$

D'où la similarité de $R_\lambda(A)$ et $R_\lambda(B)$. Pour la réciproque on passe aux inverses dans l'égualité précédente.

□

1.5.3 Propriété de Fuglède-Putnam

Définition 13. *Soient A et $B \in B(H)$, on dit que la paire (A, B) satisfait $(FP)_{B(H)}$ (propriété de Fugléde-Putnam), si $AC = CB$ où $C \in B(H)$ implique $A^*C = CB^*$.*

Lemme 2. *Si S est un opérateur auto adjoint dans $B(H)$, alors les deux opérateurs e^{iS} et e^{-iS} sont des opérateurs unitaires.*

Démonstration Soit S un opérateur auto adjoint dans $B(H)$, alors on a

$$(e^{iS})^* = e^{-iS^*} = e^{-iS},$$

donc

$$(e^{iS})^* e^{iS} = e^{-iS} e^{iS} = I \quad et \quad e^{iS}(e^{iS})^* = e^{iS} e^{-iS} = I,$$

de même on obtient

$$(e^{-iS})^* e^{-iS} = e^{iS} e^{-iS} = I \quad et \quad e^{-iS}(e^{-iS})^* = e^{-iS} e^{iS} = I.$$

Alors e^{-iS} et e^{iS} sont des opérateurs unitaires.

□

Théorème 3. *Soient A et B deux opérateurs normaux dans $B(H)$, si $AX = XB$ pour $X \in B(H)$, alors $A^*X = XB^*$.*

Démonstration Soient A et B deux opérateurs normaux dans $B(H)$, tels que $AX = XB$ pour $X \in B(H)$, on peut démontrer par récurrence que $A^nX = XB^n$ pour tout entier naturel n . D'où on peut avoir facilement

$$e^{i\bar{\lambda}A} X = X e^{i\bar{\lambda}B},$$

pour tout nombre complexe λ, et par conséquent

$$X = e^{i\overline{\lambda}A} X e^{-i\overline{\lambda}B}.$$

On définit la fonction f par

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*},$$

en combinant cette fonction par la forme de X donnée par

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} e^{i\overline{\lambda}A} X e^{-i\overline{\lambda}B} e^{-i\lambda B^*},$$

donc par la normalité de A et B on peut écrire

$$f(\lambda) = e^{i(\lambda A^* + \overline{\lambda}A)} X e^{-i(\overline{\lambda}B + \lambda B^*)}.$$

On a

$$(\lambda A^* + \overline{\lambda}A)^* = \overline{\lambda}A + \lambda A^* \quad et \quad (\overline{\lambda}B + \lambda B^*)^* = \lambda B^* + \overline{\lambda}B,$$

alors

$$\overline{\lambda}A + \lambda A^* et \lambda B^* + \overline{\lambda}B,$$

sont auto adjoints, donc d'après le lemme précédent

$$e^{i(\lambda A^* + \overline{\lambda}A)} et e^{-i(\overline{\lambda}B + \lambda B^*)}$$

sont unitaires. $f(\lambda)$ est analytique, pour tout nombre complexe λ. Le théorème de Liouville nous assure alors que $f(\lambda)$ est constante.
On peut donc prendre $f(\lambda) = f(0) = X$, donc $e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*} = X$, d'où $e^{i\lambda A^*} X = X e^{i\lambda B^*}$, et par conséquent $A^* X = X B^*$.

$\square$

Chapitre 2

Quelques types d'équations opératorielles

Dans ce chapitre on va étudier la solvabilité d'une famille d'équations d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe séparable et de dimension infinie H. On considère l'équation $AX - XB = C$ où A, B, C sont dans $B(H)$.

2.1 Résultats et définitions utiles

Rappelons que si M est un sous espace vectoriel fermé de H et $T \in B(H)$, alors T s'écrit selon la décomposition $H = M \oplus M^{\perp}$ comme suit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

où $A \in B(M)$, $B \in B\left(M^{\perp}, M\right)$, $C \in B\left(M, M^{\perp}\right)$ et $D \in B\left(M^{\perp}\right)$. Nous rappelons les propriétés basiques suivantes.

Proposition 2. *Soit* $\mathbf{A}$ *un opérateur linéaire borné défini sur* $H \oplus H$ *par*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$$

alors son adjoint $\mathbf{A}^{\star}$ *est donné par*

$$\mathbf{A}^{\star} = \begin{pmatrix} Q^{\star} & S^{\star} \\ R^{\star} & T^{\star} \end{pmatrix}.$$

Lemme 3. *[42] Si la matrice opérateur* $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ *définie sur* $H \oplus H$ *est inversible, alors l'opérateur* $S^{\star}S + Q^{\star}Q$ *est inversible sur* H.

2.2 Solvabilité de l'équation $AX - XB = C$

2.2.1 Solvabilité de l'équation $AX - XB = Y$

Théorème 4. (*Bhatia* [4]) *Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$, tels que*

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \text{ et } \sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\},$$

où ρ est un nombre réel strictement positif. Alors pour tout opérateur Y dans $B(H)$ une solution de l'équation $AX - XB = Y$ est donnée par

$$X = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n$$

Démonstration On démontre que la série

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n$$

est convergente, puis on vérifie que la solution X donnée par l'expression

$$X = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n.$$

est une solution de notre équation

$$AX - XB = Y.$$

Soit le nombre réel strictement positif ρ qui vérifie

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \text{ et } \sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\},$$

alors

$$\sigma(A^{-1}) \subset \{z, |z| \leq \rho^{-1}\}.$$

Donc d'après la formule du rayon spectral on a

$$\exists N > 0, \forall n \geq N \text{ tel que } \|B^n\| \leq \rho_1^n$$

et

$$\|A^{-n}\| \leq \rho^{-n} \text{ avec } \rho_1 \leq \rho.$$

Alors, $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} \left\|A^{-n-1} Y B^n\right\| &\leq \left\|A^{-n}\right\| \left\|A^{-1} Y\right\| \|B^n\| \\ &\leq \rho^{-n} \left\|A^{-1} Y\right\| \rho_1^n \\ &= \left\|A^{-1} Y\right\| \left(\rho_1 \rho^{-1}\right)^n. \end{aligned}$$

D'où la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} YB^n.$$

Vérifions maintenant que

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} YB^n$$

est une solution de notre équation, on a

$$\begin{aligned} AX - XB &= A\left(\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} YB^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} YB^n B \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n} YB^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} YB^{n+1} \\ &= Y + \sum_{n=1}^{\infty} (A)^{-n} YB^n - \sum_{n=1}^{\infty} (A)^{-n} YB^n = Y. \end{aligned}$$

Une autre forme de la solution de l'équation $AX - XB = Y$ est obtenue par la considération suivante.

Théorème 5. (*Bhatia* [4]) . *Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$, leurs spectres $\sigma(A)$ contenu dans le demi-plan ouvert droit, et $\sigma(B)$ contenu dans le demi-plan ouvert gauche, alors une solution de l'équation $AX - XB = Y$ est donnée par*

$$X = \int_0^{\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt.$$

Démonstration L'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt$$

est convergent [Voir Heinz (22)] .
Vérifions que X est une solution de l'équation $AX - XB = Y$. On a

$$\begin{aligned} AX - XB &= A\int_0^{\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt - \left(\int_0^{\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt\right) B \\ &= \int_0^{\infty} \left(Ae^{-At} Y e^{Bt} - e^{-At} Y B e^{Bt}\right) dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(-e^{-At} Y e^{Bt}\right)' dt \\ &= \left[-e^{-At} Y e^{Bt}\right]_0^{\infty} = Y. \end{aligned}$$

donc X est bien une solution de l'équation $AX - XB = Y$.

Théorème 6. (*Bhatia* [4]) . *Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$ leurs spectres $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont disjoints. Si Γ est un contour fermé dans plan complexe d'indice un autour de $\sigma(A)$ et zéro autour de $\sigma(B)$, on peut exprimer la solution de l'équation $AX - XB = Y$ par*

$$X = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R_{\zeta}(A)\, R_{\zeta}(B)\, d\zeta.$$

Démonstration Pour tout nombre complexe ζ on peut écrire

$$X(\zeta I - B) - (\zeta I - A)\, X = Y.$$

Si $(\zeta I - A)$ et $(\zeta I - B)$ sont inversibles, on compose par $(\zeta I - A)^{-1}$ à gauche et par $(\zeta I - B)^{-1}$ à droite, on obtient

$$R_{\zeta}(A)\, X - XR_{\zeta}(B) = R_{\zeta}(A)\, Y R_{\zeta}(B)\, .$$

En intégrant les deux cotés de cette derniére égalité sur le contour Γ et prenant en considération le fait que

$$\int_{\Gamma} R_{\zeta}(A)\, d\zeta = 2\pi i \text{ et } \int_{\Gamma} R_{\zeta}(B)\, d\zeta = 0$$

on obtient

$$X = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R_{\zeta}(A)\, R_{\zeta}(B)\, d\zeta.$$

Si les opérateurs A et B sont normaux, auto-adjoints ou unitaires, on peut avoir des formes spéciales des solutions de notre équation $AX - XB = Y$ dans chaque cas. Si A et B sont tous les deux auto-adjoints, alors iA et iB sont auto -adjoints, donc leurs spectres se trouvent sur la droite imaginaire. Si on veut imiter cette solution, on doit essayer avec l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt,$$

mais cette intégrale n'est pas convergente en générale, c'est pour cette raison on essaye d'insérer un facteur de convergence $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si on pose

$$X = \int_0^{\infty} e^{-At} Y e^{Bt} f(t)\, dt,$$

c'est un opérateur bien défini pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, car on sait que e^{-At} et e^{Bt} sont unitaires. Comment choisir f pour que X soit une solution.

Théorème 7. [4] *Si l'espace H est de dimension finie, A et B sont deux opérateurs auto-adjoints dans $B(H)$, tels que leurs spectres $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont disjoints. Si f est une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$, telle que $\hat{f}(s) = \frac{1}{S}$($\hat{f}$ est la transformation de Fourier de f) pour $s \in \sigma(A) - \sigma(B)$, alors la solution de l'équation $AX - XB = Y$ peut être écrite sous la forme*

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iAt} Y e^{iBt} f(t)\, dt,$$

Démonstration Soient α et β deux valeurs propres de A et B avec vecteurs propres associés u, v respectivement. En utilisent le fait que e^{itA} est unitaire et son adjoint est e^{-itA} et A est auto-adjoint, on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle u, Ae^{-itA} Y e^{itB} v \right\rangle &= \left\langle e^{-itA} Au, Y e^{itB} v \right\rangle \\ &= e^{-it(\beta-\alpha)} \alpha \left\langle u, Yv \right\rangle. \end{aligned}$$

Avec une considération similaire on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle u, e^{-itA} Y e^{itB} Bv \right\rangle &= \left\langle e^{-itA} u, Y e^{itB} Bv \right\rangle \\ &= e^{-it(\beta-\alpha)} \beta \left\langle u, Yv \right\rangle. \end{aligned}$$

Si $X = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iAt} Y e^{iBt} f(t)\, dt$, alors

$$\begin{aligned} \left\langle u, (AX - BX) v \right\rangle &= (\alpha - \beta) \left\langle u, Yv \right\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(\alpha-\beta)} f(t)\, dt \\ &= (\alpha - \beta) \left\langle u, Yv \right\rangle \hat{f}(\alpha - \beta) \\ &= \left\langle u, Yv \right\rangle, \end{aligned}$$

d'où $AX - BX = Y$. On a supposé dans les théorèmes que l'on a vu auparavant que les spectres des opérateurs sont disjoints de telle façon qu'on peut les isoler par une droite ou un plan, dans la suite on ne va pas exiger cette condition.

□

Théorème 8. *Si l'espace H est un espace de Hilbert de dimension infinie, A et B sont deux opérateurs dans $B(H)$ tel que A est inversible, on suppose qu'il existe une suite (a_n) de réels strictement positifs, si pour tout x de H les séries de termes généraux $(a_n) \left\| (A^\star)^{-n} x \right\|^2$ et $(a_n^{-1}) \left\| (b)^n x \right\|^2$ sont convergentes, alors pour tout Y dans $B(H)$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} Y B^n$ est ultra faiblement convergente dans $B(H)$ et sa limite X est une solution de l' équation de Sylvester $AX - XB = Y$.*

Démonstration La preuve est analogue à la preuve de la proposition 1.4. dans [[7] *Cassier, J.O.T* 2005] .

Soient $x, y \in H$,

$$\left|\left\langle \sum_{m_1}^{m_2} A^{-n-1} Y B^n y, x \right\rangle\right| \leq \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \left\langle A^{-n-1} A^{\star -n-1} x, x\right\rangle} \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1} \left\langle B^{\star n} Y^\star Y B^n y, y\right\rangle}$$
$$\leq \|Y\| \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \left\langle A^{-n-1} \left(A^\star\right)^{-n-1} x, x\right\rangle} \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1} \left\langle \left(B^\star\right)^n \left(B\right)^n y, y\right\rangle}.$$

On voit donc que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle A^{-(k+1)} Y B^k x, y\right\rangle$ est de Cauchy, donc convergente ce qui permet de définir X en posant $\langle Xx, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle A^{-(k+1)} Y B^k x, y\right\rangle$. De plus avec les théorème de Banach Steinhaus, les hypothèses, on voit que

$$\sup \left\| \sum_{k=0}^{n} A^{-(k+1)} Y B^k \right\| < \infty.$$

Ceci entraine la convergence de $\sum_{k=0}^{\infty} A^{-(k+1)} Y B^k$ pour la topologie faible de $B(H)$. On vérifie ensuite que X est une solution de l'équation de Sylvester
$AX - XB = Y$.

Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent on obtient ce résultat.

Corollaire 1. *Si l'opérateur Y est de rang un (i.e $Y = u \otimes v$) la solution de l'équation de Sylvester sera $X = \sum_{k=0}^{\infty} A^{-(n+1)} u \otimes (B^n)^\star v$.*

Remarque 4. *On obtient le théorème de Bhatia* [4] *comme corollaire. En effet si*

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \quad et \quad \sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\}$$

avec $\rho > 0$. Alors les séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{2n} A^{-k} \left(A^\star\right)^{-k} \; et \sum_{k=0}^{\infty} a^{-2n} B^k \left(B^\star\right)^k$$

sont convergentes pour la norme de $B(H)$, pour $r(B) < a < \rho$. D'où la convergence sous les hypothèses du théorème 8 avec $a_n = a^{2n}$.

Théorème 9. *Si l'espace H est un espace de Hilbert de dimension infinie, A et B sont deux opérateurs dans $B(H)$, on suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive sur $\mathbb{R}$, telle que les intégrales*

$$\int_0^{+\infty} \left\|e^{-At}\right\|^2 f(t)\, dt \quad et \quad \int_0^{+\infty} \left\|e^{Bt}\right\|^2 (f(t))^{-1}\, dt$$

sont convergentes pour tout x de H, pour tout Y de $B(H)$, l'opérateur

$$X = \int_0^{+\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt$$

est bien défini et est solution de l'équation de Sylvester $AX - XB = Y$.

Démonstration D'après ([7] *Cassier, J.O.T* 2005) l'intégrale $X = \int_0^{+\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt$ est bien définie au sens de Bochner et on a

$$\|X\| \leq \sqrt{\left\| \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-At} e^{-A^\star t} dt \right\|} \sqrt{\left\| \int_0^{+\infty} (f(t))^{-1}\, e^{B^\star t} Y^\star Y e^{Bt} dt \right\|}$$

$$\leq \|Y\| \sqrt{\left\| \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-At} e^{-A^\star t} dt \right\|} \sqrt{\left\| \int_0^{+\infty} (f(t))^{-1}\, e^{B^\star t} e^{Bt} dt \right\|}$$

Comme les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t) \left\| e^{-At} x \right\|^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} (f(t))^{-1} \left\| e^{Bt} x \right\|^2 dt$ sont convergentes pour tout x de H, alors l$'$ opérateur $\int_0^{+\infty} e^{-At} Y e^{Bt} dt$ est bien défini pour tout x de H, on vérifie que X donnée par cet opérateur est une solution de l'équation $AX - XB = Y$.

Remarque 5. *Dans ces deux derniers théorèmes, nous donnons aussi une estimation à priori de la solution de l'équation $AX - XB = Y$ en fonction de Y*

Théorème 10. *Si A est un opérateur normal dans $B(H)$, B et C deux opérateurs dans $B(H)$. Si la paire (A, B) satisfait la propriété Fuglede-Putnam dans $B(H)$, alors l'équation*

$$AX - XB = C$$

admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad et \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sont deux opérateurs similaires sur $H \oplus H$.

Démonstration Si l'équation $AX - XB = C$ admet une solution X, alors

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sont similaires. Supposons maintenant que les opérateurs

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sont similaires, alors il existe un opérateur inversible

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$$

dans $B(H \oplus H)$ tel que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} AQ & AR \\ BS & BT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QA & QC + RB \\ SA & SC + TB \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne après identification terme par terme

$$QA = AQ, AR - RA = QC, \;\; BS = SA \text{ et } BT - TB = SC.$$

En appliquant la propriété de Fuglede-Putnam dans $B(H)$ sur les égalités $QA = AQ$ et $BS = SA$, on obtient $B^\star S = SA^\star$ et $AQ^\star = Q^\star A$. D'une part A commute avec Q et $Q^\star$ donc avec $Q^\star Q$. Et d'autre part, en passant á l'adjoint dans $B^\star S = SA^\star$ on obtient $S^\star B = AS^\star$. Revenons á l'égalité $BS = SA$, composons a gauche les deux cotés par $S^\star$, il vient $S^\star BS = S^\star SA$ mais comme $S^\star B = AS^\star$, on obtient $AS^\star S = S^\star SA$, d'où A commute avec $S^\star S$, donc avec la somme $S^\star S + Q^\star$, l'inverse $(S^\star S + Q^\star Q)^{-1}$, commute aussi avec A, de plus, on obtient

$$\begin{aligned}
(S^\star S + Q^\star Q)\, C &= S^\star SC + Q^\star QC \\
&= S^\star (BT - TB) + Q^\star (AR - RB) \\
&= Q^\star (AR - RB) + S^\star (BT - TB) \\
&= Q^\star AR - Q^\star RB + S^\star BT - S^\star TB.
\end{aligned}$$

Comme $Q^\star A = AQ^\star$ et $S^\star B = AS^\star$, il vient

$$(S^\star S + Q^\star Q)\, C = AQ^\star R - Q^\star RB + AS^\star T - S^\star TB = A(Q^\star R + S^\star T) - (Q^\star R + S^\star T)\, B$$

d'après lemme 3, l'opérateur $S^\star S + Q^\star Q$ est inversible, son inverse commute avec A . Par conséquent

$$C = A(S^\star S + Q^\star Q)^{-1}(Q^\star R + S^\star T) - (S^\star S + Q^\star Q)^{-1}(Q^\star R + S^\star T)\, B$$

d'oú la solution

$$X = (S^\star S + Q^\star Q)^{-1}(Q^\star R + S^\star T).$$

2.2.2 Solution de l'équation de Sylvester $AX - XB = C$ sur le sous espace $Ker\,(B - \lambda I)$.

Sur le sous espace $Ker\,(B - \lambda I)$. Si A, B et C sont des opérateurs dans $B\,(H)$, tels que $\sigma\,(A) \cap \sigma\,(B) = \emptyset$ et si λ est un scalaire complexe alors l'équation

$$AX - XB = C$$

peut se mettre sous la forme

$$(A - \lambda I)\,X - X\,(B - \lambda I) = C.$$

Soit maintenant $x \in Ker\,(B - \lambda I)$, alors $(A - \lambda I)\,Xx = Cx$, alors pour $\lambda \in \sigma_p\,(B)$ on aura ($\lambda \in \rho\,(A)$ car $\sigma\,(A) \cap \sigma\,(B) = \emptyset$)

$$Xx = (A - \lambda I)^{-1}\,Cx$$

et par conséquent la solution de l'équation
$AX - XB = C$ sur $Ker\,(B - \lambda I)$ coincide avec $(A - \lambda I)^{-1}\,C$ c-a-d que l'on a

$$X\,|_{Ker(B-\lambda I)} = (A - \lambda I)^{-1}\,C\,|_{Ker(B-\lambda I)}.$$

2.3 L'équation $AXB - CXD = E$.

Dans cette section on donne une condition nécessaire et suffisante pour la solvabilité de chacune des deux équations $AXB - XD = E$ et $AXB - CXD = E$, qui couvrent le cas de l'équation de Stein $AXB - X = E$, où A, B, C, D et E sont des opérateurs dans $B\,(H)$.

2.3.1 L'équation $AXB - XD = E$.

On remarque que si B est inversible avec une condition sur l'opérateur DB^{-1} l'équation $AXB - XD = E$ peut se mettre sous la forme de l'équation de Sylvester.

Définition 14. *Deux opérateurs T, S de $B\,(H)$ sont dits équivalents, si et seulement s'il existe deux opérateurs inversibles U et V tels que $S = UTV$.*

Définition 15. *Deux couples d'opérateurs (T_1, T_2) et (S_1, S_2) appartenant à $B\,(H) \times B\,(H)$ sont dits équivalents, s'il existe deux opérateurs inversibles U et V tels que $S_i = UT_iV$ pour $i = 1, 2$.*

Théorème 11. *Soient A, B et D des opérateurs normaux dans $B\,(H)$, (D peut être seulement quasi normal) tels que $BD = DB$. L'équation*

$$AXB - XD = E$$

admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si les deux couples

$$\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) \text{ et } \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right)$$

sont équivalents dans $B(H \oplus H)$.

Démonstration Supposons que X est une solution de l'équation $AXB - XD = E$. Posons

$$U = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}. \text{ Et } V = \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs U et V sont bien inversibles et on a d'une part

$$\begin{aligned} U\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & E + XD \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} V &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & AXB \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} U\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} V &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe deux opérateurs inversibles

$$U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \quad \text{et } V = \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix},$$

tels que

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{'} & R^{'} \\ S^{'} & T^{'} \end{pmatrix}.$$

Et

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{'} & R^{'} \\ S^{'} & T^{'} \end{pmatrix}.$$

Alors, il vient

$$QA = AQ^{'}, QE + RD = AR^{'},$$
$$SA = DS^{'},$$
$$SE + TD = DT^{'}, Q = Q^{'}, RB = R^{'},$$
$$S = BS^{'}$$

et

$$TB = BT^{'}.$$

Comme $QA = AQ^{'}$ et $Q = Q^{'}$, le théorème de Fuglede-Putnam nous donne $QA^{\star} = A^{\star}Q$. D'où

$$\begin{aligned} Q^{\star}QE &= Q^{\star}AR^{'} - Q^{\star}RD \\ &= Q^{\star}ARB - Q^{\star}RD \\ &= A\left(Q^{\star}R\right)B - \left(Q^{\star}R\right)D \end{aligned}$$

Et $S^{\star}SE = S^{\star}DT^{'} - S^{\star}TD$. Mais on a

$$BSA = BDS^{'} = DBS^{'} = DS.$$

Le théorème de Fuglede-Putnam généralisé [voir Weiss 44] nous donne $B^{\star}SA^{\star} = D^{\star}S$. En passant á l'adjoint, on obtient $AS^{\star}B = S^{\star}D$. D'où

$$\begin{aligned} S^{\star}SE &= AS^{\star}BT^{'} - S^{\star}TD \\ &= A\left(S^{\star}T\right)B - \left(S^{\star}T\right)D. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)E &= Q^{\star}QE + S^{\star}SE \\ &= A\left(Q^{\star}R\right)B - \left(Q^{\star}R\right)D + A\left(S^{\star}T\right)B - \left(S^{\star}T\right)D \\ &= A\left(\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)\right)B - \left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)D. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$Q^{\star}QA = Q^{\star}AQ = AQ^{\star}Q$$

et

$$\begin{aligned} S^\star SA &= S^\star DS' \\ &= AS^\star BS' \\ &= AS^\star S. \end{aligned}$$

D'où $(Q^\star Q + S^\star S)\, A = A\,(Q^\star Q + S^\star S)$. Comme $U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ est inversible, l'opérateur $Q^\star Q + S^\star S$ l'est aussi et on a donc $(Q^\star Q + S^\star S)^{-1} A = A\,(Q^\star Q + S^\star S)^{-1}$. par suite

$$\begin{aligned} E &= (Q^\star Q + S^\star S)^{-1} A\,((Q^\star R + S^\star T))\, B - \ (Q^\star Q + S^\star S)^{-1} (Q^\star R + S^\star T)\, D. \\ &= A\,(Q^\star Q + S^\star S)^{-1} ((Q^\star R + S^\star T))\, B - \ (Q^\star Q + S^\star S)^{-1} (Q^\star R + S^\star T)\, D \\ &= AXB - XD. \end{aligned}$$

Avec $X = (Q^\star Q + S^\star S)^{-1} (Q^\star R + S^\star T)$.

□

2.3.2 L'équation $AXB - CXD = CE$.

Théorème 12. *Soient A, B, C et D des opérateurs normaux dans $B(H)$, tels que $BD = DB$ et $AC = CA$ et C injectif avec $ImA \subseteq ImC$, Alors l'équation*

$$AXB - CXD = CE$$

admet une solution X dans $B(H)$ si et seulement si les deux couples

$$\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) \quad et \quad \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$$

sont équivalents dans $B(H \oplus H)$.

Démonstration Supposons que X est une solution de l'équation

$$AXB - CXD = CE.$$

Posons

$$U = \begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs U et V sont bien inversibles, et on a d'une part

$$\begin{aligned} U \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & E + CXD \\ 0 & D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & AXB \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Et

$$U \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C & CXB \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Et d'autre part

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C & CXB \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe deux opérateurs inversibles

$$U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \quad \text{et } V = \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

tels que

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}.$$

Et

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}.$$

Alors, il vient $QA = AQ', QE + RD = AR', SA = DS', SE + TD = DT', QC = CQ', RB = CR'$, $SC = BS'$ et $TB = BT'$. Comme $QE + RD = AR'$, il vient $Q^\star QE = Q^\star AR' - Q^\star RD$. On a $QA = AQ'$, d'où

$$CQA = CAQ' = ACQ' = AQC$$

Le théorème de Fuglede-Putnam généralisé nous donne $C^\star QA^\star = A^\star QC^\star$. En passant á l'adjoint, il vient $AQ^\star C = CQ^\star A$. Donc

$$\begin{aligned} CQ^\star QE &= CQ^\star AR' - CQ^\star RD \\ &= AQ^\star CR' - CQ^\star RD \\ &= A\left(Q^\star R\right)B - C\left(Q^\star R\right)D \end{aligned}$$

Et $CS^{\star}SE = CS^{\star}DT^{'} - CS^{\star}TD$. Mais on a

$$\begin{aligned} BSA &= BDS^{'} \\ &= DBS^{'} \\ &= DSC. \end{aligned}$$

Le théorème de Fuglede-Putnam généralisé nous donne $B^{\star}SA^{\star} = D^{\star}SC^{\star}$. En passant á l'adjoint, on obtient $AS^{\star}B = CS^{\star}TD$. D'où

$$\begin{aligned} CS^{\star}SE &= CAS^{\star}BT^{'} - CS^{\star}TD \\ &= A\left(S^{\star}T\right)B - C\left(S^{\star}T\right)D. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{gathered} C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)E = CQ^{\star}QE + CS^{\star}SE \\ = A\left(Q^{\star}R\right)B - C\left(Q^{\star}R\right)D + A\left(S^{\star}T\right)B - C\left(S^{\star}T\right)D \\ = A\left(\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)\right)B - C\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)D. \end{gathered}$$

D'où

$$C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)E = A\left(\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)\right)B - C\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)D...........(A)$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} CQ^{\star}QA &= CQ^{\star}AQ^{'} \\ &= AQ^{\star}CQ^{'} \\ &= AQ^{\star}QC \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} CS^{\star}SA &= CS^{\star}DS^{'} \\ &= CAS^{\star}BS^{'} \\ &= AS^{\star}SC. \end{aligned}$$

D'où

$$C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)A = A\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C.$$

Comme $ImA \subseteq ImC$, d'après le critère de Douglas $(Voir20)$ A peut s'écrive sous la forme $A = C\widetilde{A}$ et l'équation

$$AXB - CXD = CE$$

devient alors

$$C\widetilde{A}XB - CXD = CE.$$

Comme l'opérateur C est injectif, alors il vient

$$\widetilde{A}XB - XD = E$$

qui n'est autre que l'équation $AXB - CXD = CE$. résolue par le théorème 11. Comme

$$A\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C = \ C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)A,$$

alors

$$C\widetilde{A}\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C = C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C\widetilde{A}.$$

Mais l'opérateur C est injectif, alors il vient

$$\widetilde{A}\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C = \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C\widetilde{A}............(\star)$$

On a d'une part

$$A = C\widetilde{A}, \quad C^2\widetilde{A} = CA = AC = C\widetilde{AC}.$$

Mais l'opérateur C est injectif, alors il vient

$$C\widetilde{A} = \widetilde{AC}$$

Avec $(\star)$, il s'ensuit que

$$\widetilde{A}\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C = \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)C\widetilde{A}C.$$

Comme C est un opérateur normal et injectif, son image est dense, et part suite

$$\widetilde{A}\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right) = \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)\widetilde{A},$$

ce qui nous donne

$$\widetilde{A}\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1} = \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\widetilde{A}.$$

Donc on remplaçant A par $C\widetilde{A}$ dans l'équation (A), il vient

$$C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)E = C\widetilde{A}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)B - C\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)D.$$

L'opérateur C étant injectif, on obtient $\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)E = \widetilde{A}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)B - \left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)D$.
D'oú

$$\begin{aligned} E &= \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\widetilde{A}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)B - \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)D \\ &= \widetilde{A}\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)B - \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right). \end{aligned}$$

En composant par C à gauche, il vient

$$CE = C\widetilde{A}$$

$$\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)B - C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right).$$

Et par conséquent

$$CE = A\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)B - C\left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right).$$

D'oú on a

$$CE = AXB - CXD.$$

Avec $X = \left(Q^{\star}Q + S^{\star}S\right)^{-1}\left(Q^{\star}R + S^{\star}T\right)$

Chapitre 3

Théorie des inverses généralisées

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad ou \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$) et A un opérateur linéaire défini de E dans F. Nous définissons B l'inverse généralisée de A, par solution du système suivant

$$\begin{cases} ABA = A \\ BAB = B \end{cases}$$

Où B est un opérateur défini de F dans E. Remarquons que le système précèdent admet plusieurs solutions.

3.1 Inverse généralisée Intérieure

Définition 16. *Soit $B : F \longrightarrow E$ un opérateur linéaire, on dit que B est une inverse généralisée intérieure de A, si $ABA = A$, l'ensemble des inverses de l'opérateur A est noté par $A^{(1)}$ ou $A\{1\}$.*

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ admet $B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ldots$

Comme inverses généralisées intérieures. car

$$\begin{aligned} AB_1A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'inverse généralisée intérieure n'est pas unique.

Proposition 3. *[35] Soit B une inverse intérieure de A, alors*

1. $(AB)^2 = AB$ *et* $(BA)^2 = BA$
2. $R(AB) = R(A)$ *et* $N(A) = N(BA)$

Démonstration

1.

$$\begin{aligned} ABA = A &\Longrightarrow ABAB = AB \\ &\Longrightarrow (AB)^2 = AB. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ABA = A &\Longrightarrow BABA = BA \\ &\Longrightarrow (BA)^2 = BA \end{aligned}$$

2. $R(A) = R(ABA) \subset R(AB) \subset R(A)$.
   $N(A) \subset N(BA) \subset N(ABA) = N(A)$.

□

Théorème 13. *[35] Tout opérateur linéaire admet une inverse intérieure.*

Proposition 4. *Soit B une inverse intérieure de A, alors $(I - BA)$ est un projecteur sur $N(A)$*

Démonstration

$$\begin{aligned} (I - BA)^2 &= I - 2BA + (BA)^2 \\ &= I - BA. \end{aligned}$$

$$(I - BA)v = v - BAv = v, \forall v \in N(A) \, (i.e, R(I - BA) = N(A)).$$

□

Proposition 5. *Soit $B : F \longrightarrow E$ une inverse intérieure de A, alors*

$$E = N(A) \oplus R(BA) \text{ et } F = R(A) \oplus N(AB)$$

Proposition 6. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $ABA = A$
2. $(AB)^2 = AB$ *et* $R(AB) = R(A)$
3. $(BA)^2 = BA$ *et* $N(A) = N(BA)$

4. $(BA)^2 = BA$ *et* $E = N(A) \oplus R(BA)$
5. $(AB)^2 = AB$ *et* $F = R(A) \oplus N(AB)$
6. $(BA)^2 = BA$ *et* $N(A) \cap R(A) = \{0\}$

Démonstration $1) \Longrightarrow 2)$
$ABA = A \Longrightarrow ABAB = AB \Longrightarrow (AB)^2 = AB$
$R(A) = R(ABA) \subset R(AB) \subset R(A) \Longrightarrow R(AB) = R(A)$.

Exemple. Soit $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, défini par $A(x,y,z) = (x,0,0)$.
$B(x,y,z) = (x,y,0)$ est une inverse intérieure de A

— $ABA(x,y,z) = AB(x,0,0) = A(x,0,0) = (x,0,0) = A(x,y,z)$.
— $N(B) = \{(0,0,c) : c \in \mathbb{R}\}$;
— $N(A) = N(AB) = \{(0,b,c) : b,c \in \mathbb{R}\}$;
— $R(B) = \{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$
— $R(A) = R(AB) = \{(a,0,0) : a \in \mathbb{R}\}$

Proposition 7. *Soit B une inverse intérieure de A, et soit $P' = 1 - BA$ et $Q' = AB$ deux projecteurs tels que $R(P') = N(A)$ et $R(Q') = R(A)$, alors $B' = (I + P - P')B(I - Q + Q') = (2I - BA - P')B(I - AB + Q')$ est une autre inverse de A satisfait $I -\ B'A = P'$ et $AB = Q'$.*

3.2 Inverse généralisée extérieure

Définition 17. *Soit $B : F \longrightarrow E$ un opérateur linéaire, on dit que B est une inverse extérieur de A, si $BAB = B$ l'ensemble des inverses extérieures de l'opérateur A est notée par $A^{(2)}$ ou $A\{2\}$*

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
est une inverse extérieure de A, car

$$\begin{aligned} BAB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Proposition 8. *Soit $B : F \longrightarrow E$ une inverse extérieure de A, alors*

1. $(AB)^2 = AB$ *et* $(BA)^2 = BA$.
2. $R(BA) = R(B)$ *et* $N(B) = N(AB)$.
3. $E = N(BA) \oplus R(B)$, $F = R(AB) \oplus N(B)$.

Proposition 9. *[35] Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $BAB = B$,
2. $(BA)^2 = BA$ *et* $R(BA) = R(B)$,
3. $(BA)^2 = BA$ *et* , $E = N(BA) \oplus R(B)$,
4. $(BA)^2 = BA$ *et* $N(B) = N(AB)$,
5. $(AB)^2 = AB$ *et* $F = N(B) \oplus R(AB)$,
6. $(AB)^2 = AB$ *et* $N(A) \cap R(B) = \{0\}$.

3.3 Inverse généralisée

Soit $B : F \longrightarrow E$ un opérateur linéaire, on dit que B est une inverse généralisée de A, si $BAB = B$ et $ABA = A$. Si B est une inverse généralisée de A, alors $B \in A^{(1)} \cap A^{(2)}$.

Proposition 10. *Tout opérateur linéaire admet une inverse généralisée.*

Exemple. On rappelle que $C([0,1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Soit $A : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ un opérateur linéaire tel que $A(x(t)) = x(t^2)$, on défini B de $C([0,1])$ dans lui même par $B(x(t)) = x\left(\sqrt{t}\right)$. Nous avons

$$ABA(x(t)) = AB(x(t^2)) = A(x(t));$$

$$\text{et } BAB(x(t)) = BA\left(x\left(\sqrt{t}\right)\right) = B(x(t)).$$

Proposition 11. *Soit B une inverse généralisée de A, alors ,*

1. $(AB)^2 = AB$ *et* $(BA)^2 = BA$
2. $N(B) = N(AB)$ *et* $N(A) = N(BA)$
3. $R(AB) = R(A)$ *et* $R(BA) = R(B)$.
   D'autre part,
   $E = N(A) \oplus R(B)$, $F = N(B) \oplus R(A)$.

Remarque 6. *Si B est une inverse généralisée de A, alors AB est un projecteur sur $R(A)$ et BA est un projecteur sur $R(B)$. On suppose que*
$E = T \oplus N(A)$ *et* $F = R(A) \oplus S$.
Soient P et Q deux projecteurs sur $N(A), R(A)$ respectivement tels que $N(P) = T, N(Q) = S$. Alors le système suivant

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ AX = Q \\ XA = 1 - P \end{cases}$$

admet une solution unique, on le note par $A_{P,Q}$.

Démonstration $X = (XA)X = (1-P)X = YAX = YQ = YAY = Y$.

□

Théorème 14. *[35] Soient P et Q deux projecteurs tels que $R(P) = N(A)$ et $R(Q) = R(A)$, alors le système*

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ AX = Q \\ XA = 1 - P \end{cases}$$

admet la solution unique $A_{P,Q}$.

Démonstration $X = (XA)X = (1-P)X = YAX = YQ = YAY = Y$. Il est évident que $A_{P,Q}$ est une solution du système

□

Proposition 12. *[34] Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *B est une inverse généralisée A.*
2. $(AB)^2 = AB, \quad F = N(B) \oplus R(A)$.
3. $(BA)^2 = BA, \quad E = N(A) \oplus R(B)$.
4. $(AB)^2 = AB, \quad N(B) = N(AB)$ *et* $R(A) = R(AB)$.
5. $(BA)^2 = BA, \quad R(B) = R(BA)$ *et* $N(A) = N(BA)$.
6. $B = B_{T,S} = \hat{A}^{-1}Q$ *où* $\hat{A} = A_{/_T}$ $, E = T \oplus N(A), F = R(A) \oplus S$, *tel que Q est un projecteur sur $R(A)$.*
7. *B est une inverse intérieure de A, s'il vérifie : $BA(x) = x$, $\forall x \in T$ et $B(y) = 0; \forall y \in S$. $B(y_1 + y_2) = B(y)$ tels que $y_1 \in R(A); \forall y_2 \in S$.*
8. *$B = B_{T,S} = (I-P)B_1Q$ tels que $AB_1A = A$,*
   P et Q sont des projecteurs sur $N(A)$ et $R(A)$ respectivement.

Démonstration On utilise les proposition6 et 10.

Proposition 13. *[35] Soient B_1, B_2 deux inverse intérieures de A, on pose $AB_1 = Q_1,\ AB_2 = Q_2, I - P_1 = B_1 A$ et $I - P_2 = B_2 A$, Alors*
a) $B_1 A B_2 = A^{\neq}_{P_1,Q_2}$
b) $A^{\neq}_{P_1,Q_1} = A^{\neq}_{P_1,Q_2} A A^{\neq}_{P_2,Q_1}$

Démonstration a) $AB_1AB_2 = AB_2 = Q_2, \quad I - B_1AB_2A = I - B_1A = P_1$.
b) $A^{\neq}_{P_1,Q_1} = B_1AB_1 = (B_1AB_2)A(B_2AB_1) = A^{\neq}_{P_1,Q_2} A A^{\neq}_{P_2,Q_1}$.

□

3.4 Inverse intérieure topologique

3.4.1 Inverse droite intérieure topologique

Dans tous ce que suit E et F sont des espaces vectoriels topologiques $\overline{R(A)}$ est la fermeture de $R(A)$ dans F, Q est un projecteur sur F tels que : $Q \in B(F)$ et $R(Q) = \overline{R(A)}$. On écrit alors,

$$F = \overline{R(A)} \oplus S, G_Q = R(A) \oplus S = R(A) \oplus N(Q).$$

Maintenant on considère

$$A : E \longrightarrow G_Q \text{ et } Q^{-} = Q/G_Q.$$

Si

$$B_{Q^-} : G_Q \longrightarrow E$$

est une inverse intérieure de A et $AB_{Q^-} = Q^-$, alors B_{Q^-} est dit inverse droite intérieure topologique.
Soit B une inverse intérieure de A, si AB est un projecteur (continu) sur $R(A)$ dans G_Q on a par le théorème 14

$$B_{Q^-} = B(1 - AB + Q^-)$$

est une inverse droite intérieure topologique.
Nous utilisons la notation $A_{d,Q}$ pour l'inverse droite intérieure topologique.

Proposition 14. *[35] Soit Q un projecteur sur $\overline{R(A)}$, alors A admet une inverse droite intérieure topologique si et seulement s'il existe un opérateur linéaire, noté par $A_{d,Q}$ vérifiant*
$A_{d,Q} : R(A) \oplus N(Q) \longrightarrow E$ tel que $AA_{d,Q}A = A$ sur E et $AA_{d,Q} = Q$ sur $R(A) \oplus N(Q)$.
Soient E et F des espaces de dimension finie, oùF est un espace de Hilbert et Q est le projecteur orthogonal sur $R(A)$, alors A admet une inverse droite intérieure topologique $A_{d,Q}$; $AA_{d,Q}A = A$ sur E $(AA_{d,Q})^* = AA_{d,Q}$

3.4.2 Inverse gauche intérieure topologique

Soit A un opérateur défini sur $D(A) \subset E$ dans F tel que E un espace vectoriel topologique.

Définition 18. *Soit $D(A) \subset E$, on dit que le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $P \in B(E)$ si $D(A) \subset R(P), \forall x \in D(A), P(x) \in N(A)$ et $D(A) \cap N(P)$ dense dans $N(P)$ Dans ce cas nous appelons $C_r = D(A) \cap N(P)$, le support de A.*

Définition 19. *Soit B une inverse intérieure de A, si BA admet une extension au projecteur $(1-P) \in B(E)$ tel que $R(1-P) = \overline{R(BA)}$, alors on dit que B est une inverse gauche intérieure topologique. Nous utilisons la notation $A_{g,P}$ pour l'inverse gauche intérieure topologique.*

Théorème 15. *Soit $A : D(A) \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Si $U = A_{g,P}$, alors $D(A)$ est décomposable par rapport à P.*

Démonstration $\forall z \in N(A), UAz = (1-P)z = 0 \Longrightarrow \forall z \in N(A); Pz = z$. Donc, $N(A) \subset R(P)$. $UAz = (1-P)z = 0; \forall z \in D(A) \Longrightarrow Pz = z - UAz, \forall z \in D(A) \Longrightarrow APz = Az - AUAz = 0; \forall z \in D(A)$. Alors, $Pz \in N(P), \forall z \in D(A)$. Nous avons. $\overline{R(UA)} = N(P)$. donc, $D(A) \cap N(P)$ est dense dans $N(P)$.

Théorème 16. *Si le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $P \in B(E)$, Alors A admet une inverse gauche intérieure topologique*

Démonstration Soit U' une inverse intérieure de A, on écrit $P' = I - U'A$.. Soit $\widetilde{P}$ la restriction de P à $D(A)$ Par la proposition 14, $U = (2I - U'A - \widetilde{P})U'$ et $UA = I - \widetilde{P}$ aussi, $R(UA) = N(P) = N(P) \cap D(A) = C_P$, qui est dense dans $N(P) = R(I-P)$. Si E et F sont des espaces de dimensions finies, où E est un espace de Hilbert, soit P le projecteur orthogonal sur $N(A)$, alors A admet une inverse gauche intérieure topologique $A_{g,p}$, qui vérifie : $\{AA_{g,p}A = A, (AA_{g,p})^* = AA_{g,p}\}$.

□

3.5 Inverse généralisée topologique

Définition 20. *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire, si U vérifie :*

1. *U est une inverse droite intérieure topologique de A*
2. *U est une inverse gauche intérieure topologique de A*
3. *$UAU = U$. Alors, U est dit inverse généralisée topologique, on le note par $A^*_{P,Q}$.*

Théorème 17. [35] *Soit $A : D(A) \to W$ un opérateur linéaire, si le domaine de A est décomposable par rapport au projecteur $P \in B(E)$ et s' il existe un projecteur Q sur $\overline{R(A)}$, alors A admet l'inverse généralisée topologique unique (relatif au choix de P et Q) noté par $A^*_{P,Q}$ et vérifie :*
1)$D(A^*_{P,Q}) = R(A) \oplus N(Q)$,
2)$R(A^*_{P,Q}) = C_p(A)$,
3)$N(A^*_{P,Q}) = N(Q)$,
4)$A^*_{P,Q}Ax = x - Px$, pour tout $x \in D(A)$. et
5)$AA^*_{P,Q}y = QY$, pour tout $y \in D(A^*_{P,Q})$..

Théorème 18. *[35] Soit $A \in B(E,F)$ on suppose que $N(A)$ admet un supplémentaire topologique dans E et $\overline{R(A)} = R(A)$ admet un supplémentaire topologique dans F, soit P un projecteur sur $N(A)$ dans E et Q un projecteur sur $R(A)$ dans F, alors A admet l'inverse généralisée topologique unique notée par $A^*_{P,Q}$ qui vérifie les conditions suivantes :*
1)$AA^*_{P,Q}A = A$ sur E
2)$A^*_{P,Q}AA^*_{P,Q} = A^*_{P,Q}$ sur F
3)$A^*_{P,Q}Ax = x - Px$, pour tout $x \in E$
4)$AA^*_{P,Q}y = Qy$, pour tout $y \in F$.

Démonstration On définit $A^*_{P,Q}$ par : $A^*_{P,Q}Ax = x$; $x \in N(P)$ $A^*_{P,Q}y = A^*_{P,Q}y_1$, $A^*_{P,Q}y_2 = 0$ où $y = y_1 + y_2, y_1 \in R(A)$ et $y_2 \in N(Q)$. Il est évident que l'inverse généralisée est unique.

□

Remarque 7. *$A^*_{P,Q}$ dans ce cas est une application continue. Ci-aprés on présente quelque méthodes de calcul des inverses généralisées.*

3.6 Quelques méthodes de calcul d'une inverse généralisée

3.6.1 Calcul de l'inverse généralisée par factorisation préservant le rang

la méthode se résume dans le lemme suivant.

Lemme 4. *[2] Pour toute matrice A de type $m \times n$ de rang r, il existe une matrice inversible à gauche B et une matrice inversible à droite C, de rang r, telles que $A = BC$. De plus B^tB et CC^t sont inversibles. Alors $A^{(1,2)} = C^t\left(CC^t\right)^{-1}\left(B^tB\right)^{-1}B^t$.*

3.6.2 Calcul de l'inverse généralisée par la méthode de la matrice partitionée

Soit A une matrice sous la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ou A_{11} est une matrice inversible d'ordre $r = r(A)$. un inverse généralisée de A est $A^{(1,2)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $.A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors, $r(A) = 3$,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(1,2)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & *1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.6.3 L'inverse généralisée d'un block de Jordan

3.6.3.1 Forme de Jordan

Dans le cas de la matrice non semi-simple (i.e le matrice qui n'est pas transformable á la forme $T^{-1}AT = D_\lambda$, oú T est singulière, D_λ diagonal).On peut transformer Cette matrice à la forme $\widetilde{T^{-1}}A\widetilde{T} = J$ qui s'appelle forme de Jordan. Soit λ une valeur propre de multiplicité m, les autres valeurs propres sont distinctes. $\{\lambda^m, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, ..., \lambda_n\}$ telles que $\lambda_{m+i} \neq \lambda_{m+j}, i \neq j$.
Soit $\{u_1, u_2, ..., u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, ..., u_n\}$ les vecteurs propres de la matrice A. On trouve que $\{u_{m+1}, u_{m+2}, ..., u_n\}$ sont indépendantes mais $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ ne les sont pas. Donc la matrice $T\,[u_1 \mid u \mid, ... \mid u_m \mid u_{m+1} \mid u_{m+2} \mid ... \mid u_n]$ est singulière.

Proposition 15. *Si $\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, ..., \widetilde{u}_m$ vérifient*

$$(A - \lambda I)\,\widetilde{u}_1 = 0, (A - \lambda I)\,\widetilde{u}_i = \widetilde{u}_{i-1}, \quad i = 2, 3, ..., m,$$

alors les vecteurs $\{\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, ..., \widetilde{u}_m\}$ sont indépendants.

Démonstration Soit

$$\begin{aligned}
c_1\widetilde{u}_1 + c_2\widetilde{u}_2 + ... + c_m\widetilde{u}_m = 0 &\Longrightarrow c_1 (A-\lambda I)\,\widetilde{u}_1 + c_2 (A-\lambda I)\,\widetilde{u}_2 + ... + c_m (A-\lambda I)\,\widetilde{u}_m = 0 \\
&\Longrightarrow c_2\widetilde{u}_1 + c_3\widetilde{u}_2 + ... + c_m\widetilde{u}_{m-1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\
&\Longrightarrow c_2 (A-\lambda I)\,\widetilde{u}_1 + c_3 (A-\lambda I)\,\widetilde{u}_2 + ... + c_m (A-\lambda I)\,\widetilde{u}_{m-1} = 0 \ldots (2) \\
&\Longrightarrow c_3\widetilde{u}_1 + c_4\widetilde{u}_2 + ... + c_m\widetilde{u}_{m-2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\
&\Longrightarrow c_4\widetilde{u}_1 + c_5\widetilde{u}_2 + ... + c_m\widetilde{u}_{m-3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\
&\vdots \\
&\Longrightarrow c_{m-1}\widetilde{u}_1 + c_m\widetilde{u}_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (m-2) \\
&\Longrightarrow c_m\widetilde{u}_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (m-1)
\end{aligned}$$

d'après l'équation $(m-1)$ on trouve que $c_m = 0$, d'après l'équation $(m-2)$ on trouve que $c_{m-1} = 0$, d'après l'équation (2) on trouve que $c_3 = 0$, d'après l'équation (1) on trouve que $c_2 = 0$ et d'après l'équation initial on trouve $c_1 = 0$ donc les vecteurs $\{\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, ..., \widetilde{u_m}\}$ sont indépendantes. Ce que vérifie $(A-\lambda I)\ \widetilde{u_1} = 0, (A-\lambda I)$ $\widetilde{u_i} = \widetilde{u_{i-1}}$, $i = 2, 3, ..., m$.

Proposition 16. *La matrice $\widetilde{T}$ qui est définie par $\widetilde{T} = [\widetilde{u_1} \mid \widetilde{u} \mid, ... \mid \widetilde{u_m} \mid u_{m+1} \mid u_{m+2} \mid ... \mid u_n]$ est non singulière (i.e admet une inverse $\widetilde{T^{-1}}$), et vérifie $\widetilde{T^{-1}}A\widetilde{T} = J$ qui s'appelle forme de Jordan, tel que J est définie par :*

$$J = \begin{pmatrix}
\lambda & \sigma & ... & ... & 0 & 0 & & & & \\
0 & \lambda & \sigma & ... & ... & 0 & & & & \\
. & . & . & . & & . & & 0 & & \\
. & . & . & . & . & . & & & & \\
0 & .. & .. & .. & \lambda & \sigma & & & & \\
0 & 0 & .. & .. & .. & \lambda & & & & \\
 & & & & & & \lambda_{m+1} & ... & 0 & 0 \\
 & & 0 & & & & . & \lambda_{m+1} & ... & 0 \\
 & & & & & & . & . & . & . \\
 & & & & & & 0 & ... & ... & \lambda_n
\end{pmatrix}$$

tel que σ prend les valeurs 0 ou 1.

Définition 21. *Une matrice carrée d'ordre n de la forme*

$$\begin{pmatrix}
\lambda & 1 & 0 & .. & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0.. & 0 \\
.. & .. & . & .. & .. \\
0 & ... & 0 & \lambda & 1 \\
0 & ... & .. & 0 & \lambda
\end{pmatrix}$$

est dite bloc de Jordan correspondant à la valeur propre λ,, on le note par $J_n(\lambda)$.

Lemme 5. *Tout bloc de Jordan* $J_n(\lambda)$, *a un* $\{1,2\}-$ *inverse* $J_n^{(1,2)}(\lambda)$ *tel que* $J_n^{(1,2)}(\lambda) = \begin{cases} J_n^{-1}(\lambda) & pour\ \lambda \neq 0 \\ J_n^{t}(\lambda) & pour\ \lambda = 0. \end{cases}$

3.7 Solution du système linéaire $AXB = C$

Théorème 19. *[2] Soit* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{p\times q}, C \in \mathbb{C}^{m\times q}$, *soit l'équation matricielle,*

$$AXB = C$$

consistent si et seulement si pour toutes inverses généralisées $A^{(1)}, B^{(1)}$, *on a*

$$AA^{(1)}CB^{(1)}B = C$$

dans ce cas la solution générale donne sous la forme

$$X = A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)},$$

pour tout élément arbitraire Y *.*

Démonstration

$$\text{Si } AA^{(1)}CB^{(1)}B = C$$

est vérifiée, alors $X = A^{(1)}CB^{(1)}$ est la solution de l'équation $AXB = C$. Inversement, si X est solution de l'équation $AXB = C$, alors

$$C = AXB = AA^{(1)}AXBB^{(1)}B = AA^{C}BA^{(1)}B.$$

D'autre part, soit X solution de l'équation $AXB = C$, alors

$$C = AXB = AA^{(1)}CB^{(1)}B + AYB - AA^{(1)}AYBB^{(1)}B = A\left(A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}\right)B$$

alors en déduire que

$$X = A^{(1)}CB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}$$

tel que $Y \in B(H)$ est arbitraire, est une solution de l'équation $C = AXB$.

3.8 Inverse généralisée de Moore -Penrose

Ce genre d'inverses généraisées sont plus importantes, car elles conservent une bonne partie des propriétés, telle que l'unicité de l'inverse, les propriétés de symétrie et beaucoup d'autres qui sont très utiles en algèbre linéaire, analyse numérique et dans diverses applications. L'inverse de Moore- Penrose est une généralisation de la notation de l'inverse qui contient l'inverse des matrices non carrées ou une matrice de déterminant nul, ces matrices ne sont pas inversibles, au sens classique. Cette méthode a été fournie la première fois par Aickm Moore en 1920 et Roger Penrose en 1955.

3.8.1 Inverse de Moore -Penrose d'un opérateur

Soient H_1, H_2 des espaces de Hilbert

Proposition 17. *Soit $A \in B(H_1, H_2)$ et $R(A) = \overline{R(A)}$, il existe une inverse généralisée unique de A, on le note par A^+, qui est solution de système suivante :*

$$\begin{cases} AXA = A ... (1) \\ XAX = X ... (2) \\ AX = P_{R(A)} \; ... (3) \\ XA = I - P_{N(A)} \quad ... (4) \end{cases}$$

A^+ est appelé inverse de Moore -Penrose de l'opérateur A..

Démonstration $N(A)$ et $R(A)$ sont des sous espaces H_1 fermés dans H_1 et H_2, alors ils existent deux projecteurs orthogonaux $P_{N(A)}$ et $P_{R(A)}$ sur $N(A)$ et $R(A)$ respectivement, tels que $H_1 = N(A) \oplus N\left(P_{N(A)}\right) = N(A) \oplus N(A)^{\perp}$ $H_2 =, R(A) \oplus N\left(P_{R(A)}\right) = R(A) \oplus R(A)^{\perp}$ par proposition (19), A^+ existe et est définie par :
$A^+(y) = 0; \forall y \in R(A)^{\perp}$ et $A^+(y) = \left(A_{R(A^*)}\right)^{-1} y\,; \forall y \in R(A)$.
Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, on définit $A^+ : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ par $A^+(y) = 0; \forall y \in R(A)^{\perp}$
et $A^+(y) = \left(A_{R(A^*)}\right)^{-1} y, \forall y \in R(A)$. Remarquons que A^+ est une inverse généralisée de A.

□

Proposition 18. *Soit $A \in (\mathbb{C}^{m,n})$, alors*

1. *$A^+Ax = 0, \forall x \in N(A)$ et $A^+Ax = x, \forall x \in R(A^*) = R(A^+)$.*
2. *$AA^+y = 0, \forall x \in R(A)^{\perp}$ et $AA^+y = y, \forall y \in R(A)$.*
3. *A^+A est un projecteur orthogonal sur $R(A^*) = R(A^+)$ dans $\mathbb{C}^m$.*
4. *A^+A est un projecteur orthogonal sur $R(A)$ dans $\mathbb{C}.^n$.*

Démonstration

1. $Ax = 0, \forall x \in N(A) \Longrightarrow A^+Ax = 0, \forall x \in N(A)$ et $\forall x \in R(A); \forall x \in R(A^\star)$
   $A^+Ax = \left(A_{R(A^\star)}\right)^{-1} Ax = x; \forall x \in R(A^\star)$.
2.

$$\begin{aligned} \forall y \in R(A)^{\perp} &\Longrightarrow A^+y = 0; \forall y \in R(A) \\ &\Longrightarrow AA^+y = 0, \forall y \in R(A)^{\perp} \; et \; \forall y \in A^+ \\ &\Longrightarrow A^+y = \left(A_{R(A^\star)}\right)^{-1} y \\ &\Longrightarrow AA^+y = A\left(A_{R(A^\star)}\right)^{-1} y = y. \end{aligned}$$

3. Nous avons $R\left(A^{+}A\right)=R\left(A^{+}\right)$ appliquons 1) on trouve $A^{+}A$ est un projecteur de $R\left(A^{+}\right)$ dans $\mathbb{C}^{m}$. Soient $x,x^{'}\in\mathbb{C}^{n}$,nous avons $x=x_1+x_2, x^{'}=x_1^{'}+x_2^{'}$, tels que $x_1,x_1^{'}\in N\left(A\right)$ et $x_2,x_2^{'}\in R\left(A^{\star}\right).$

$$\begin{aligned}\left\langle A^{+}Ax,x^{'}\right\rangle &= \left\langle A^{+}A\left(x_1+x_2\right),x_1^{'}+x_2^{'}\right\rangle\\ &= \left\langle A^{+}Ax_1,x_1^{'}\right\rangle+\left\langle A^{+}Ax_1,x_2^{'}\right\rangle+\left\langle A^{+}Ax_2,x_1^{'}\right\rangle+\left\langle A^{+}Ax_2,x_2^{'}\right\rangle\\ &= \left\langle x_1,x_1^{'}\right\rangle\left\langle x,A^{+}Ax^{'}\right\rangle\\ &= \left\langle x_1+x_2,A^{+}A\left(x_1^{'}+x_2^{'}\right)\right\rangle\\ &= \left\langle x_1,A^{+}Ax_1^{'}\right\rangle+\left\langle x_1,A^{+}Ax_2^{'}\right\rangle+\left\langle x_2,A^{+}Ax_1^{'}\right\rangle+\left\langle x_2,A^{+}Ax_2^{'}\right\rangle\\ &= \left\langle x_1,x_1^{'}\right\rangle.\end{aligned}$$

Donc $\left(A^{+}A\right)^{\star}=A^{+}A.$

4. De même façon, nous montrons que AA^{+} est un projecteur orthogonal sur $R\left(A\right).$

Définition 22. ***Inverse généralisée de Moore :*** *Si $A\in\mathbb{C}^{m,n}$, alors A^{+} est l'unique inverse généralisée qui vérifie les équations suivantes :*

1. $A^{+}A=P_{R(A^{*})}$

2. $AA^{+}=P_{R(A)}$

Définition 23. *[2] (Inverse généralisée de Penrose) Si $A\in\mathbb{C}^{m,n}$, alors A^{+} est la solution unique du système suivant*

$$\begin{cases} AXA=A....\left(1\right)\\ XAX=X...\left(2\right)\\ \left(AX\right)^{\star}=AX...\left(3\right)\\ \left(XA\right)^{\star}=XA...\left(4\right)\end{cases}\tag{3.1}$$

Théorème 20. *Les deux définitions précédentes sont équivalents*

Démonstration Supposons que $A^{+}A=P_{R(A^{\star})}$ et $AA^{+}=P_{R(A)}$, on a $A^{+}A$ et AA^{+} sont des projecteurs orthogonaux . D'autre part, $A^{+}AA^{+}=P_{R(A^{\star})}A^{+}=P_{R(A^{+})}A^{+}=A^{+}$,. Enfin ,$A^{+}$ est une solution du système $\left(3.1\right).$
Réciproquement, si A^{+} est une solution du système $\left(3.1\right)$, alors , nous avons ,

$$\begin{aligned}AA^{+}A=A &\Longrightarrow AA^{+}AA^{+}=AA^{+}\\ &\Longrightarrow \left(AA^{+}\right)^{2}=AA^{+}\end{aligned}$$

par proposition (1) on a $\left(A^{+}A\right)^{\star}=A^{+}A$ et $R\left(A^{+}A\right)=R\left(A^{+}\right)=R\left(A^{\star}\right).$
Donc $A^{+}A=P_{R(A^{\star})}$. De même façon, nous montrons que $AA^{+}=P_{R(A)}$.

$\square$

Proposition 19. *L'inverse A^+ est une solution unique du système* (3.1).

Démonstration On suppose que A_1^+, A_2^+ deux inverses de Penrose de A, alors

$$\begin{aligned}
A_1^+ = A_1^+ A A_1^+ & \\
&= A_1^+ \left(A A_1^+\right)^\star \\
&= A_1^+ \left(A_1^+\right)^\star (A)^\star \\
&= A_1^+ \left(A_1^+\right)^\star (A)^\star \left(A_2^+\right)^\star (A)^\star \\
&= A_1^+ \left(A A_1^+\right)^\star \left(A A_2^+\right)^\star \\
&= A_1^+ A A_1^+ A A_2^+ \\
&= A_1^+ A A_2^+ = A_1^+ A A_2^+ A A_2^+ \\
&= \left(A_1^+ A\right)^\star \left(A_2^+ A\right)^\star A_2^+ \\
&= (A)^\star \left(A_1^+\right)^\star \left((A)^\star A_2^+\right)^\star A_2^+ \\
&= (A)^\star \left(A_2^+\right)^\star A_2^+ = \left(A_2^+ A\right)^\star A_2^+ \\
&= A_2^+ A A_2^+ = A_2^+.
\end{aligned}$$

□

Théorème 21. *Soit $A = BC$ une décomposition de rang maximal, alors $A^+ = C^\star \left(B^\star A C^\star\right)^{-1} B^\star$.*

Démonstration On doit d'abord montrer que $B^\star A C^\star$ est régulière, or $B^\star A C^\star = B^\star B C C^\star = (B^\star B)(C C^\star)$ 'où $B^\star B$ et $CC^\star$ sont des matrices carrées de rang plein donc régulières, $B^\star A C^\star$ est donc régulière et a pour inverse $\left(B^\star A C^\star\right)^{-1} = (CC^\star)^{-1} (B^\star B)^{-1}$ $X = (CC^\star)^{-1} (B^\star B)^{-1}$, il est élémentaire de vérifier que X satisfait les quatres propriétés. L'unicité de la pseudo inverse entraine $X = A^+$.

□

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (BA)^+$, depuis BA est hermitienne et idempotente, on a

$$\begin{aligned}A^{+} &= \left(A^{T}A\right)^{-1}A^{T}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}B^{+} &= B^{T}\left(BB^{T}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2\\ 0 & 1\\ -0 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où $A^{+}B^{+} \neq (BA)^{+}$.

Proposition 20. *Soit* $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}$*, alors*

1. $(A^{+})^{+} = A$
2. $(A^{+})^{\star} = (A^{\star})^{+}$
3. $(\lambda A)^{+} = A^{+}\lambda^{+}$*tels que si* $\lambda \neq 0,$ *alors* $\lambda^{+} = \frac{1}{\lambda}$ *et si* $\lambda = 0,$ *alors* $\lambda^{+} = 0.$
4. $A^{\star} = A^{\star}AA^{+} = A^{+}AA^{\star}$
5. $A^{+} = (A^{\star}A)^{+}A^{\star} = A^{\star}(AA^{\star})^{+}$
6. $(A^{\star}A)^{+} = A^{+}(A^{\star})^{+}$
7. $(UAV)^{+} = V^{\star}A^{+}U^{\star}$, *tels que* U *et* V *sont des matrices unitaires.*

Démonstration

1. $\forall x \in R(A^{\star}), (A^{+})^{+}x = \left(A_{R(A^{\star})}\right)^{-1}x = x.$
   Et $\forall x \in (R(A^{\star}))^{\perp}\,(A^{+})^{+}x = 0$, Donc $(A^{+})^{+} = A$.
2. $\forall x \in R(A^{\star}), (A^{\star})^{+}y = \left(A^{\star}_{R(A)}\right)^{-1}y = \left(\left(A_{R(A^{\star})}\right)^{-1}\right)^{\star} = (A^{+})^{\star}y$. D'autre part, $N\left((A^{+})^{+}\right) = (R(A^{\star}))^{\perp}; N\left((A^{+})^{+}\right) = (R(A^{+}))^{\perp} = (A^{\star})^{\perp}$.
3. évident
4. $A^{+}AA^{\star} = P_{R(A^{+})}A^{\star} = A^{\star}$, puisque $A^{+}A$ et AA^{+} sont des projecteurs orthogonaux sur $R(A^{\star})$ et $R(A)$ respectivement.

5. $A^\star (AA^\star)^+ = A^\star \left(A^+\right)^\star A^+ = A^\star A^{+\star} A^+ = (A^+A)^\star A^+ = A^+AA^+ = A^+.$
   D'autre part $(A^\star A)^+ A^\star = A^+ \left(A^\star\right)^\star A^\star = A^+ (AA^+)^\star = A^+AA^+ = A^+.$
6. Il suffit de vérifier que la matrice $A^+ (A^\star)^+$ est une solution du système

$$(S_1) \begin{cases} X (A^\star A) X = X \\ (A^\star A) X (A^\star A) = A \\ (X (A^\star A))^\star = X (A^\star A) \\ ((A^\star A) X)^\star = (A^\star A) X \end{cases}$$

7. il suffit de vérifier que la matrice $V^\star A^\star U^\star$ est une solution du système

$$(S_2) \begin{cases} X (UAV) X = X \\ (UAVV) X (UAV) = A \\ (X (UAV))^\star = X (UAV) \\ ((UAV) X)^{star} = (UAV) X \end{cases}$$

□

Proposition 21. *Soit* $A \in \mathbb{C}^{m,n}$, *alors*

1. $R(A) = R(AA^+) = R(AA^\star)$.

2. $R(A^+) = R(A^\star) = R(A^+A) = R(A^\star A)$.

3. $R(1 - AA^+) = N(AA^+) = (R(A^\star A))^\perp$.

4. $R(1 - A^+A) = N(A^+A) = N(A) = (R(A^\star))^\perp$.

3.9 propriétés algébriques de l'inverse de Moore-Penrose

1. L'application $A \to A^+$ est une involution,
2. A^+A, AA^+ auto -adjoints (ortho projecteurs),
3. La régle de $+ -$ simplification : Pour tout opérateurs X et Y,
   si $A^+AX = A^+AY$, alors $AX = AY$. En effet

$$\begin{aligned} A^+AX = A^+AY &\Longrightarrow AA^+AX = AA^+AY \\ &\Longrightarrow AX = AY. \end{aligned}$$

4. L'inversibilité de $A^+A + \alpha I_n$, $AA^+ + \alpha I_m$ pour tout $\alpha \succ 0$: Comme A^+A (resp. AA^+) est un projecteur, alors, ses valeurs propres sont 0 ou 1, det $(A^+A+\alpha I_n)= 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ ou 0. Par conséquent, $\forall \alpha > 0$, det $(A^+A+\alpha I_n)\neq 0$, ce qui signifie que $A^+A+\alpha I_n$(resp. $AA^++\alpha I_m$) est inversible. Toutefois,

si A est une matrice carrée, on a AA^+ -$A^+A \neq I$ sinon, AA^+ =$A^+A + I$ est inversible. D'autre part, AA^+ est un projecteur, ce qui implique $AA^+ = I$, A^+ est l'inverse á droite de la matrice A, ce qui exige d'être de rang maximal, et que $AA^+ = A^+A = I$. Par conséquent, nous avons $I = 2I$, ce qui impossible.

Remarque 8. *Pour prouver que A^+, pour $k \succ 0, (A^+)^k = \left(A^k\right)^+$ n'est pas vrai pour toutes les matrices, nous allons donner un contre exemple.*

Exemple On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = A$, $A^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A^2)^+ = A^+$ tandis que $(A^+)^2 = \frac{1}{2}A^+$.

3.10 Résolution des équations et systèmes des opérateurs en utilisant l'inverse de Moore-Penrose

3.10.1 Solution de l' équation d'opérateurs $AXB = C$

Théorème 22. *[38] Soient A, B et C des opérateurs dans $B(H)$ L'équation*

$$AXB = C$$

est consistent si et seulement si pour certains A^+,B^+, on a

$$AA^+CB^+B = C\ ,$$

dans ce cas la solution générale est donnée par $X = A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+$ tel que $Y \in B(H)$ est arbitraire.

Démonstration Si $AA^+CB^+B = C$ est vérifiée, alors $X = A^+CB^+$ est la solution de l'équation $AXB = C$. Inversement, si X est solution de l'équation $AXB = C$, alors

$$C = AXB = AA^+AXBB^+B = AA^+CB^+B.$$

D'autre part, soit X solution de l'équation $AXB = C$, alors

$$C = AXB = AA^+CB^+B + AYB - AA^+AYBB^+B = A\left(A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+\right)B$$

alors en déduire que

$$X = A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+$$

tel que $Y \in B(H)$ est arbitraire. Eet une solution de l'équation $C = AXB$.

□

3.10.2 Solution de l'équation d' opérateurs de la forme $A^{\star}X+X^{\star}A=B$

Soient H et K des espaces de Hilbert et $\mathcal{B}(B,K)$ l'ensemble des opérateurs bornés de H dans K, on note par $\mathcal{B}(H)=\mathcal{B}(H,H)$. Nous donnons un opérateur $A\in\mathcal{B}(H,K)$, $B\in\mathcal{B}(H)$,on peut cherché de solution $X\in\mathcal{B}(H,K)$ de l'équation : $A^{\star}X+X^{\star}A=B$.

Théorème 23. *[18] $A\in\mathcal{B}(H,K)$ inversible, et $B\in\mathcal{B}(H)$. Alors, il existe une solution $X\in\mathcal{B}(H,K)$ du l'équation $A^{\star}X+X^{\star}A=B$. si et seulement si $B=B^{\star}$ avec $X=\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}B+ZA$, tel que $Z\in\mathcal{B}(K)$ vérifie que $Z^{\star}=-Z$*

Démonstration Si on pose X est solution de l'équation $A^{\star}X+X^{\star}A=B$

$$\begin{aligned} B=A^{\star}X+X^{\star}A\Longrightarrow B^{\star}&=(A^{\star}X+X^{\star}A)^{\star}\\ &=(X^{\star}A)^{\star}+(A^{\star}X)^{\star}\\ &=A^{\star}X+X^{\star}A\\ &=B. \end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{aligned} B=B^{\star}&=A^{\star}X+X^{\star}A\\ &=A^{\star}(X^{\star})^{\star}+X^{\star}(A^{\star})^{\star}\\ &=(X^{\star}A)^{\star}+(A^{\star}X)^{\star}\\ &=(A^{\star}X+X^{\star}A)^{\star} \end{aligned}$$

par d'autre part

$$\begin{aligned} A^{\star}X+X^{\star}A=B&\Longrightarrow(A^{\star})^{-1}A^{\star}X+(A^{\star})^{-1}X^{\star}A=(A^{\star})^{-1}B\\ &\Longrightarrow X+(A^{\star})^{-1}X^{\star}A=(A^{\star})^{-1}B\\ &\Longrightarrow X=(A^{\star})^{-1}B-(A^{\star})^{-1}X^{\star}A \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (A^{\star})^{-1}X^{\star}=(A^{\star})^{-1}BA^{-1}-XA^{-1}\Longrightarrow X&=\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}B+\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}B-(A^{\star})^{-1}X^{\star}A\\ &=\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}B+\left(\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}BA^{-1}-(A^{\star})^{-1}X^{\star}\right)A\\ &=\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}B+\left(\frac{1}{2}\left((A^{\star})^{-1}X^{\star}+XA^{-1}\right)-(A^{\star})^{-1}X^{\star}\right)A\\ &=\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}B+\frac{1}{2}\left(\left(XA^{-1}\right)-(A^{\star})^{-1}X^{\star}\right)A\\ &=\frac{1}{2}(A^{\star})^{-1}B+ZA, \end{aligned}$$

avec, $Z = \frac{1}{2}\left((XA^{-1}) - (A^{\star})^{-1} X^{\star}\right)$, on peut facilement démontre que $Z^{\star} = -Z$.

$$\begin{aligned}
Z^{\star} &= \frac{1}{2}\left(\left(XA^{-1}\right) - (A^{\star})^{-1} X^{\star}\right)^{\star} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(XA^{-1}\right)^{\star} - \left((A^{\star})^{-1} X^{\star}\right)^{\star}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-(X^{\star})^{\star}\left((A^{\star})^{-1}\right)^{\star} + \left(A^{-1}\right)^{\star} X^{\star}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-(X^{\star})^{\star}\left(\left(A^{-1}\right)^{\star}\right)^{\star} + \left(A^{-1}\right)^{\star} X^{\star}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\left(XA^{-1}\right) - (A^{\star})^{-1} X^{\star}\right) \\
&= -Z.
\end{aligned}$$

Théorème 24. *[18] Soit $A \in \mathcal{B}(H,K)$ de rang finie, et $B \in \mathcal{B}(H)$. Alors, il existe une solution $X \in \mathcal{B}(H,K)$ de l'équation $A^{\star}X + X^{\star}A = B$, si et seulement si $B = B^{\star}$ et $(I - A^{+}A)\, B\, (I - A^{+}A) = 0$. Si les conditions nécessaires et suffisantes sont satisfaites, alors la solution de l'équation $A^{\star}X + X^{\star}A = B$, prend la forme suivant : $X = \frac{1}{2}(A^{+})^{\star} BA^{+}A + (A^{+})^{\star} B(I - A^{+}A) + (I - A^{+}A)Y + A^{+}AZA$ tel que $Z \in \mathcal{B}(K)$ verifie que $A^{\star}(Z + Z^{\star})A = 0$, et $Y \in \mathcal{B}(H,K)$ est arbitraire.*

Démonstration On suppose que $X \in \mathcal{B}(H,K)$ est une solution de l'équation $A^{\star}X + X^{\star}A = B$, puisque

$$\begin{aligned}
\left(I - A^{+}A\right) B \left(I - A^{+}A\right) &= \left(I - A^{+}A\right)(A^{\star}X + X^{\star}A)\left(I - A^{+}A\right) \\
&= \left(I - A^{+}A\right) A^{\star}X \left(I - A^{+}A\right) + \left(I - A^{+}A\right) X^{\star}A \left(I - A^{+}A\right) \\
&= \left(A^{\star} - AA^{+}A^{\star}\right) X \left(I - A^{+}A\right) + \left(I - A^{+}A\right) X^{\star}A \left(I - A^{+}A\right) \\
&= \left(A^{\star} - \left(AA^{+}\right)^{\star} A^{\star}\right) X \left(I - A^{+}A\right) + \left(I - A^{+}A\right) X^{\star}A \left(I - A^{+}A\right) \\
&= \left(A^{\star} - \left(AA^{+}A\right)^{\star}\right) X \left(I - A^{+}A\right) + \left(I - A^{+}A\right) X^{\star}A \left(I - A^{+}A\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Inversement, d'après la condition $(I - A^{+}A)\, B\, (I - A^{+}A) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\left(I - A^{+}A\right) B \left(I - A^{+}A\right) = 0 &\Leftrightarrow \left(B - A^{+}AB\right)\left(I - A^{+}A\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow B - BA^{+}A - A^{+}AB + A^{+}ABA^{+}A = 0 \\
&\Leftrightarrow B = BA^{+}A - A^{+}AB + A^{+}ABA^{+}A
\end{aligned}$$

alors, nous démontrons que

$$X = \frac{1}{2}\left(A^{+}\right)^{\star} BA^{+}A + \left(A^{+}\right)^{\star} B \left(I - A^{+}A\right) + \left(I - A^{+}A\right) Y + A^{+}AZA$$

est une solution de l'équation $A^\star X + X^\star A = B$.
On a

$$\begin{aligned}
A^\star X &= \frac{1}{2} A^\star \left(A^+\right)^\star BA^+A + A^\star \left(A^+\right)^\star B\left(I - A^+A\right) + A^\star\left(I - A^+A\right)Y + A^\star A^+AZA \\
&= \frac{1}{2}\left(A^+A\right)^\star BA^+A + \left(A^+A\right)^\star B\left(I - A^+A\right) + \left(A\left(I - A^+A\right)\right)^\star Y + \left(AA^+A\right)^\star ZA \\
&= \frac{1}{2} A^+ABA^+A + A^+AB\left(I - A^+A\right) + \left(A\left(I - A^+A\right)\right)^\star Y + A^\star ZA \\
&= \frac{1}{2} A^+ABA^+A + A^+AB - A^+ABA^+A + A^\star ZA
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
X^\star A &= \left[\frac{1}{2}\left(A^+\right)^\star BA^+A + \left(A^+\right)^\star B\left(I - A^+A\right) + \left(I - A^+A\right)Y + A^+AZA\right]^\star AA \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(A^+\right)^\star BA^+A\right)^\star A + \left(\left(A^+\right)^\star B\left(I - A^+A\right)\right)^\star A + \left(\left(I - A^+A\right)Y\right)^\star A + \left(A^+AZA\right)^\star A \\
&= \frac{1}{2} A^+ABA^+A + \left(I - A^+A\right)^\star BA^+A + Y^\star\left(I - A^+A\right)A + A^\star Z^\star\left(A^+A\right)^\star A \\
&= \frac{1}{2} A^+BAA^+A + BA^+A - AA^+BA^+A + Y^\star\left(I - AA^+\right)A + A^\star Z^\star AA^+A \\
&= \frac{1}{2} A^+BAA^+A + BA^+A - AA^+BA^+A + A^\star Z^\star A,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
A^\star X + X^\star A &= \frac{1}{2} A^+ABA^+A + A^+AB - A^+ABA^+A + A^\star ZA + \frac{1}{2} A^+BAA^+A + BA^+A - AA^+BA^+ \\
&= A^+AB - A^+ABA^+A + BA^+A + A^\star ZA + A^\star Z^\star A \\
&= B + A^\star\left(Z + Z^\star\right)A \\
&= B,
\end{aligned}$$

car

$$A^\star\left(Z + Z^\star\right)A = 0.$$

$\square$

Chapitre 4

Inverse de Drazin : Définitions et propriétés

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés autour de l'inverse de Drazin.

Définition 24. *Soit A une matrice carrée, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, le plus petit entier positif k tel que $R\left(A^{k+1}\right) = R\left(A^{k}\right)$, s'appelle indice de A, et on le note par $ind(A) = k$.*

Définition 25. *Soit A une matrice carré d'indice k. L'inverse de Drazin de A est une matrice carrée notée A^D, qui satisfait les conditions suivantes,*

$$\begin{cases} A^D A = AA^D \\ A^D AA^D = A^D \\ A^D A^{K+1} = A^K, \quad tel k = ind(A) \end{cases}$$

Définition 26. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, $A \in \mathcal{A}$ est inversible au sens de Drazin, s'il existe un élément $B \in \mathcal{A}$ satisfait les conditions suivantes.*

$$\begin{cases} AB = BA \\ BAB = B \\ A - ABA \in \mathcal{N}(A) \end{cases}$$

Définition 27. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach, $A \in \mathcal{A}$ est inversible au sens de Drazin d'indice k, s'il existe un élément $B \in \mathcal{A}$ satisfait les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} AB = BA \\ BAB = B \\ A^k = A^k BA. \end{cases}$$

Proposition 22. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre,$A \in \mathcal{A}$est inversible au sens de Drazin d'indice k, $B \in \mathcal{A}$ est l'inverse de Drazin de A, alors $A - ABA \in \mathcal{N}(A)$ est équivalent à $A^k = A^k BA$..*

4.1 Groupe inverse

Définition 28. *[2] Si $ind\,(A) = 1$, alors A^D est noté par $A^{\neq}$, où $A^{\neq}$, est dit groupe inverse.*

Définition 29. *Le groupe inverse d'une matrice carrée A est une matrice carrée notée $A^{\neq}$, qui satisfait les conditions suivantes*

$$\begin{cases} A^{\neq}AA^{\neq} = A^{\neq} \\ A^{\neq}A = AA^{\neq} \\ AA^{\neq}A = A. \end{cases}$$

Proposition 23. *Soit A est idempotent, alors $A = A^{\neq}$.*

Démonstration Soit A est une matrice idempotent, alors

$$\begin{aligned} A &= A^2A^{\neq} = AA^{\neq} = A(A^{\neq})^2A \\ &= A^2(A^{\neq})^2 = A(A^{\neq})^2 \\ &= A^{\neq} \end{aligned}$$

Théorème 25. *[2] Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, alors $A^{\neq}$ si et seulement si rang $(A) =$ rang (A^2)*

Démonstration Si $rang\,(A) = rang\,(A^2) \Longrightarrow ind\,(A) = 1 \Longrightarrow A^{\neq}$ existe. Si

$$\begin{aligned} A^{\neq} existe &\Longrightarrow A^2A^{\neq} = A \\ &\Longrightarrow R\left(A^2\right) = R\,(A) \\ &\Longrightarrow rang\,(A) = rang\left(A^2\right) \end{aligned}$$

Théorème 26. *[37] Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice d'indice 1, alors rang $(A) =$ rang $\left(A^{\neq}\right)$.*

Démonstration On a
$rang\left(A^{\neq}\right) = rang\left(A^{\neq}AA^{\neq}\right) \leq rang\left(AA^{\neq}\right) \leq rang\,(A)\,, \ldots\ (1)\,.$
et
$rang\,(A) = rang\left(AA^{\neq}A\right) \leq rang\left(A^{\neq}A\right) \leq rang\left(A^{\neq}\right) \ldots\ (2)\,,$
d'aprés (1) et (2) on a
$rang\left(A^{\neq}\right) = rang\,(A)\,.$

□

Corollaire 2. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice non singulière, alors $ind\,(A) = 0$.*

Démonstration Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice non singulière, alors
$rang\,(A) = rang\,(I_n) = n \Longrightarrow rang\,(A) = rang\,(A^0) = n \Longrightarrow ind\,(A) = 0.$

□

Corollaire 3. *Si A est un élément idempotent, alors $ind\,(A) = 1$.*

Démonstration

$$\begin{aligned} A \quad est \quad idempotent \quad &\Longrightarrow A^2 = A \\ &\Longrightarrow rang\,(A) = rang\left(A^2\right) \\ &\Longrightarrow ind\,(A) = 1. \end{aligned}$$

Théorème 27. *[37] Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice symétrique d'indice 1, alors $A^{\neq} = \left(A^{\neq}\right)^{\star}$.*

Démonstration Comme $A^{\neq}$ est un groupe inverse de A, et $A = A^{\star}$, alors

$$\begin{aligned} \left(A^{\neq}\right)^{\star} A &= \left(A^{\neq}\right)^{\star} A^{\star} \\ &= A^{\star}\left(A^{\neq}\right)^{\star} = A\left(A^{\neq}\right)^{\star}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(A^{\neq}\right)^{\star} A \left(A^{\neq}\right)^{\star} &= \left(A^{\neq}\right)^{\star} A^{\star} \left(A^{\neq}\right)^{\star} \\ &= \left(\left(A^{\neq}\right) A \left(A^{\neq}\right)\right)^{\star} = \left(A^{\neq}\right)^{\star} = A^{\neq}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\left(A^{\neq}\right)^{\star} A &= A^{\star}\left(A^{\neq}\right)^{\star} A^{\star} \\ &= \left(A\left(A^{\neq}\right)A\right)^{\star} = A^{\star} = A. \end{aligned}$$

Corollaire 4. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, telle que $ind\,(A) = 1$, alors $\left(A^{\neq}\right)^{\neq} = A$.*

Lemme 6. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, et $A, B \in \mathcal{A}$, si $B \in \{A\}'$ et $BAB = B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A - BAB)^k = 0$ si et seulement si $A^k = A^k BA$.*

Démonstration

$$\begin{aligned} (I - BA)^2 &= (I - BA)(I - BA) \\ &= I - BA - BA + BABA \\ &= I - BA - BA + BA = I - BA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad A^k = A^k BA &\Leftrightarrow A^k - A^k BA = 0 \\ &\Leftrightarrow A^k (I - BA) = 0 \\ &\Leftrightarrow A^k (I - BA)^k = 0 \\ &\Leftrightarrow (A(I - BA))^k = 0 \\ &\Leftrightarrow (A - ABA)^k = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Lemme 7. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, $A \in \mathcal{A}$ et B une inverse de Drazin de A, alors si A est d'indice k, alors A est d'indice $k+1$.*

Démonstration Supposons que $A \in \mathcal{A}^D$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui admet une inverse de Drazin, et B est une inverse de Drazin de A d'indice k

$$A^{k+1} = AA^k = A\left(A^k BA\right) = AA^k BA = A^{k+1}BA.$$

Corollaire 5. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach $A \in \mathcal{A}$ et B est une inverse de Drazin de A, alors, si A est d'indice k, alors B est d'indice l, tel que $l \geq k$.*

Proposition 24. *A^D est une inverse de Drazin de A d'indice k, alors*

$$A^k \left(A^D\right)^{k+1} = A^D.$$

Démonstration

$$A^k \left(A^D\right)^{k+1} = A^k \left(A^D\right)^k A^D = \left(AA^D\right)^k A^D = A^D AA^D = A^D.$$

4.2 Propriétés de l' inverses de Drazin

1. Si A est inversible $\Longrightarrow ind\,(A) = 0$.
2. Si A est une matrice non singulière, alors $ind\,(A) = 0$.
3. $A^D A$ et AA^D sont des projecteurs sur $R\,(A)$.
4. $R\left(A^D\right) = R\left(A^k\right)$, $N\left(A^D\right) = N(A^k)$, tel que $ind\,(a) = k$.
5. Si A est idempotent, alors $A = A^D$.
6. $\left(A^D\right)^D = A$ si et seulement si $\mathrm{ind}(A) = 1$.
7. $\left(\left(A^D\right)^D\right)^D = A^D$.
8. $(A^\star)^D = \left(A^D\right)^\star$.
9. $(A^l)^D = (A^D)^l$, pour tout $l = 1, 2, 3, ...$
10. Si A d'indice k, alors $\left(A^l\right)$ d'indice 1 et $\left(A^l\right)^{\neq} = \left(A^D\right)^l$.
11. Si A d'indice k, alors $R\left(A^D\right) = R\left(A^l\right)$, $N\left(A^D\right) = N\left(A^l\right)$, pour tout $l \geq k$.

4.3 Autres propriétés de l'inverses de Drazin

Lemme 8. *[46] Pour tout opérateur $A \in B(H), R(A)$ est fermé si et seulement s'il existe $X \in B(H)$ tel que $AXA = A$.*

Lemme 9. *[46] Soit $A \in B(H)$, s'il existe un entier positif k et un opérateur $X \in B(H)$, tel que $AX = XA, XAX = X$ et $A^{k+1}X = A^k$, alors $R\left(A^k\right) = R\left(A^{k+1}\right)$ et $R\left(A^k\right)$ est fermé.*

Démonstration En général $R\left(A^{k+1}\right) \subset R\left(A^k\right)$, puisque $A^{k+1}X = A^k$ implique que $R\left(A^k\right) \subset R\left(A^{k+1}\right)$, donc $R\left(A^k\right) = R\left(A^{k+1}\right)$, comme $AX = XA, XAX = X$ et

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k+1}X = A^kXA \\ &= A^kXAXA = A^kX^2A^2 = A^kX^2AAXA \\ &= A^kX^3A^3 = ... = A^kX^kA^k. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent $R\left(A^k\right)$ est fermé.

Lemme 10. *Soit $A \in B(H)$ et $ind(A) = k$. Si A^D est l'inverse de Drazin de A. Alors $R\left(A^D\right) = R\left(A^k\right)$.*

Démonstration Comme

$$A^DAA^D = A^D$$

et

$$AA^D = A^DA,$$

on trouve

$$A^D = A^k\left(A^D\right)^{k+1},$$

alors $R\left(A^D\right) \subset R\left(A^k\right)$. D'autre part $AA^D = A^DA$ et $A^{k+1}\ A^D = A^k$, on peut écrire $A^k = A^{k+1}A^D$, alors $R\left(A^k\right) \subset R\left(A^D\right)$. Donc $R\left(A^D\right) \subset R\left(A^k\right)$, et $R\left(A^k\right) = R\left(A^D\right)$. □

Théorème 28. *[37] Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tel que $ind(A) = k$, alors $ind(A) = ind(A^\star)$.*

Démonstration Comme $ind(A) = k$, on a par définition $rang\left(A^{k+1}\right) = rang\left(A^k\right)$,

$$(A^n)^\star = (A^\star)^n,$$

et

$$rang(A) = rang(A^\star),$$

ce qui entrainent

$$\begin{aligned} rang(A^{k+1}) &= rang\left(\left(A^{k+1}\right)^{\star}\right) \\ &= rang\left((A^{\star})^{k+1}\right) \end{aligned}$$

et

$$rang\left(A^{k}\right) = rang\left(\left(A^{k}\right)^{\star}\right) = rang\left((A^{\star})^{k}\right).$$

Ce qui implique $rang(A^{\star})^{k+1} = rang(A^{\star})^{k}$, alors $ind\,(A^{\star}) = k$.

Théorème 29. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tel que $ind\,(A) = k$, alors,*

$$rang\,(A) = rang\left(A^{D}\right).$$

Démonstration D'autre part, on a

$$\begin{aligned} rang\left(A^{D}\right) &= rang\left(A^{D}AA^{D}\right) \\ &\leq rang\left(AA^{D}\right) \\ &\leq rang\,(A)\,, ...(1). \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} rang\,(A) &= rang\left(AA^{D}A\right) \\ &\leq rang\left(A^{D}A\right) \\ &\leq rang\left(A^{D}\right) ....(2). \end{aligned}$$

D'après (1) et (2) on déduit que $rang\,(A) = rang\left(A^{D}\right)$.

Corollaire 6. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, une matrice, telle que $ind\,(A) = k > 1$, alors,*

$$ind\,(A) = ind\left(A^{T}\right).$$

Démonstration Comme $ind\,(A) = k$ implique $rang\left(A^{k+1}\right) = rang\left(A^{k}\right)$, d'après la formule $((A)^{n})^{T} = \left((A)^{T}\right)^{n}$ on a $\left((A)^{k+1}\right)^{T} = \left((A)^{T}\right)^{k+1}$,
$\left((A)^{k}\right)^{T} = \left((A)^{T}\right)^{k}$ et $rang\,(A) = rang\left(A^{T}\right)$ implique

$$\begin{aligned} rang\left(A^{k+1}\right) &= rang\left(\left(A^{k+1}\right)^{T}\right) \\ &= rang\left((A)^{T}\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} rang\left(A^{k}\right) &= rang\left(\left(A^{k}\right)^{T}\right) \\ &= rang\left((A)^{T}\right)^{k} \end{aligned}$$

alors on trouve $rang\left((A)^{T}\right)^{k+1} = rang\left((A)^{T}\right)^{k}$ qui implique $ind\left(A^{T}\right) = ind\,(A) = k$.

Théorème 30. *[34] Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne d'indice k alors,*

$$ind\,(A) = ind\,(A^{\star}) = ind\,(AA^{\star}) = ind\,(A^{\star}A).$$

Corollaire 7. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice normale d'indice k, alors,*

$$\begin{aligned} ind\,(A) &= ind\,(A^{\star}) \\ &= ind\,(AA^{\star}) = ind\,(A^{\star}A)\,. \end{aligned}$$

Théorème 31. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice symétrique d'indice k tel que $k > 1$, alors, $A^D = \left(A^D\right)^T$.*

Démonstration Comme A est une matrice symétrique, alors $A = A^T$,

$$\begin{aligned} \left(A^D\right)^T A = \left(A^D\right)^T A^T = \left(AA^D\right)^T &= \left(A^D A\right)^T \\ &= A^T \left(A^D\right)^T \\ &= A \left(A^D\right)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(A^D\right)^T A \left(A^D\right)^T &= \left(A^D\right)^T A^T \left(A^D\right)^T \\ &= \left(A^D A A^D\right)^T = \left(A^D\right)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{k+1} \left(A^D\right)^T &= \left(A^T\right)^{k+1} \left(A^D\right)^T \\ &= \left(A^{k+1}\right)^T \left(A^D\right)^T = \left(A^{k+1} A^D\right)^T \\ &= \left(A^k\right)^T = \left(A^T\right)^k = A^k. \end{aligned}$$

Théorème 32. *[35] Si λ est une valeur propre de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^D.*

Démonstration λ est une valeur propre de A alors

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x, (x \neq 0) &\Longrightarrow A^D A x = \lambda A^D x \\ &\Longrightarrow AA^D x = \lambda A^D x \\ &\Longrightarrow A^D A A^D x = \lambda A^D A^D x \\ &\Longrightarrow A^D x = \lambda A^D A^D x \\ &\Longrightarrow y = \lambda A^D y \quad tel \quad que \quad y = A^D x, \\ &\Longrightarrow A^D y = \frac{1}{\lambda} y. \end{aligned}$$

Lemme 11. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, l'inverse au sens de Drazin de tout élément $A \in \mathcal{A}$ est unique.*

Démonstration Soit $\mathcal{A}$ et B une inverse de Drazin de A d'indice k_1, C une inverse de Drazin de A d'indice k_2. Si $k_1 \prec k_2$, alors C est d'indice k_1.
On a

$$\begin{aligned} B &= BAB = B\left(AB\right)^{k_2} = B^{k_2+1}A^{k_2} \\ &= B^{k_2+1}A^{k_2}CA = B^{k_2+1}A^{k_2}\left(CA\right)^{k_2+1} = B^{k_2+1}A^{2k_2+1}C^{k_2+1}.. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= CAC \\ &= \left(CA\right)^{k_2} cA^{k_2}C^{k_2+1} = A^{k_2}\left(BA\right)C^{k_2+1} \\ &= A^{k_2}\left(BA\right)^{k_2}C^{k_2+1} = B^{k_2+1}A^{2k_2+1}C^{k_2+1}. \end{aligned}$$

Donc $B = C$, alors l'inverse de Drazin de A est unique.

4.4 Méthode de factorisation

Cette méthode est utilisée pour trouver l'inverse de Drazin d'une matrice carrée singulière.

Lemme 12. *[2] Soient B et $C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pour toute factorisation $A = BC$; on a $A^D = B[(CB)^D]^2C$.*

Démonstration On remarque que pour toute matrice carrée A et k entier positif, nous avons $\left(A^D\right)^m A^n = \left(A^D\right)^{m-n}$, si $m > n$. Et $A^{n+m}\left(A^D\right)^n = A^m$, si $m \geq k$ et $k = ind\left(A\right)$. Nous allons montrer que $\left(BC\right)^D = \left(BC\right)^{k+1}\left(\left(BC\right)^D\right)^{k+2}$. En effet

$$\begin{aligned} \left(BC\right)^{k+1}\left(\left(BC\right)^D\right)^{k+2} &= \left(BC\right)^k\left(BC\right)\left(\left(BC\right)^D\right)^2\left(\left(BC\right)^D\right)^k \\ &= \left(BC\right)^k\left(\left(BC\right)^D\right)^{k+1} \\ &= \left(BC\right)^{k-1}\left(BC\right)\left(\left(BC\right)^D\right)^2\left(\left(BC\right)^D\right)^{k-2} \\ &= \left(BC\right)^{k-1}\left(\left(BC\right)^D\right)^k \\ &= ... = \left(BC\right)^{k-(k-2)-1}\left(\left(BC\right)^D\right)^{k-(k-2)} \\ &= \left(BC\right)\left(\left(BC\right)^D\right)^2 \\ &= \left(BC\right)^D. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^D = (BC)^D = (BC)^{k+1}\left((BC)^D\right)^{k+2} \\
&= B\,(CB)^k\,C\left((BC)^D\right)^{k+2} \\
&= B\left((BC)^D\right)^{k+2}(CB)^{2k+2}\,C\left((BC)^D\right)^{k+2} \\
&= B\left((BC)^D\right)^{k+2}C\,(CB)^{2k+2}\left((BC)^D\right)^{k+2} \\
&= B\left((BC)^D\right)^{k+2}C\,(CB)^k \\
&= B\left((BC)^D\right)^{k+2}(CB)^k\,C \\
&= B\left((BC)^D\right)^2 C.
\end{aligned}$$

4.5 L'inverse de Drazin et la puissance

Lemme 13. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre, $A \in \mathcal{A}$. On dit que B est une inverse de Drazin de A si et seulement si B^k est un groupe inverse de A^k dans $\mathcal{A}$*

Démonstration On suppose que B est une inverse de Drazin de $A \in \mathcal{A}$., nous montrons que B^k est un groupe inverse de A^k dans $\mathcal{A}$ alors

$$A^kB^k = (AB)^k = (BA)^k = B^kA^k$$

$$\text{et}\ \ B^k = (BAB)^k = B^kA^kB^k$$

$$\begin{aligned}
\text{et}\ \ A^k &= A^{k+1}B = A^k\,(BA) \\
&= A^k\,(BA)^k = A^kB^kA^k.
\end{aligned}$$

Inversement, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k$ admet un groupe inverse tel que $\left(A^k\right)^{\neq} = C$, alors CA^{k-1} est une inverse de Drazin de A d'indice k. On a

$$\begin{aligned}
A\left(CA^{k-1}\right) &= CA^k \\
&= \left(CA^{k-1}\right)A,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(CA^{k-1}\right)A\left(CA^{k-1}\right) &= CA^kCA^{k-1} \\
&= CA^{k-1}et
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A^k\left(CA^{k-1}\right)A &= A^kCA^k \\
&= A^k.
\end{aligned}$$

Corollaire 8. *Soit $\mathcal{A}$, une algébre, si $A \in \mathcal{A}$ est inversible au sens de Drazin d'indice k, alors A^k est inversible au sens de Drazin d'indice $l, l > 1$, et $\left(A^k\right)^D = \left(A^D\right)^k$, et $A^D = (A^n)^D A^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,.*

Démonstration Soit $A \in \mathcal{A}$ inversible au sens de Drazin, d'après le lemme 13, on a A^k admet une groupe inverse, tel que

$$\begin{aligned} \left(A^k\right)^D &= \left(A^k\right)^{\neq} = \left(A^{\neq}\right)^k \\ &= \left(A^D\right)^k \\ &= \left(A^D\right)^k. \end{aligned}$$

$i)$ Puisque $A^n A = AA^n$, on pose $C = (A^n)^D$,

$$\begin{aligned} AA^D &= A(A^n)^D A^{n-1} \\ &= ACA^{n-1} = CAA^{n-1} = \left(CA^{n-1}\right)A = A^D A. \end{aligned}$$

$ii)$ $A^D A A^D = \left(CA^{n-1}\right)A\left(CA^{n-1}\right) = CA^n CA^{n-1} = CA^{n-1} = A^D$.
$iii)$ Soit $ind(A^n) = k$ et $l = nk$, puisque $A^n A^{n-1} = A^{n-1}A^n$, on a

$$\begin{aligned} A^{l+1}\left(CA^{n-1}\right) &= A^{nk+1}\left(CA^{n-1}\right) \\ &= A^{nk+1}A^{n-1}C \\ &= (A^n)^{k+1}C \\ &= (A^n)^k = A^l. \end{aligned}$$

Nous remarquons que l'indice de l'inverse de Drazin de A^n est déterminé uniquement par celui de A.

Lemme 14. *[24] Supposons que A, B et $C \in B(E)$ satisfaisant $ABA = ACA$. Alors AC est inversible au sens de Drazin si et seulement si BA est inversible au sens de Drazin. Dans ce cas on a :*
$i)$ $|ind(AC) - ind(BA)| \leq 1$,
$ii)$ $(BA)^D = B\left((AC)^D\right)^2 A$ et $(AC)^D = A\left((BA)^D\right)^2 C$.

Théorème 33. *[24] Supposons que A, B et $C \in B(E)$ satisfaisant $ABA = ACA$. Soit $n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $(AC)^n$ est inversible au sens de Drazin, alors $(BA)^m$ est inversible au sens de Drazin. Dans ce cas on a :*

$$((BA)^m)^D = B((AC)^n)^D A(BA)^{n-m-1}, \quad si \ \ n \geq m+1$$

et

$$((BA)^m)^D = B\left[((AC)^n)^D\right]^{m+2-n} A(BA)^{(n-1)(m+1-n)} \quad si \ .n < m+1.$$

2. *Si* $(BC)^n$ *est inversible au sens de Drazin, alors* $(AC)^m$ *est inversible au sens de Drazin. Dans ce cas on a :*

$$((AC)^m)^D = A\left((BC)^n\right)^D C\,(AC)^{n-m-1} \quad si \;\; n \geq m+1$$

et

$$((AC)^m)^D = A\left[\left((BC)^n\right)^D\right]^{m+2-n} C\,(AC)^{(n-1)(m+1-n)} \quad si \;\; n < m+1.$$

Démonstration (i) Si $n \geq m+1$ d'après le théorème et le lemme précédents on trouve

$$\begin{aligned}
((BA)^m)^D &= \left((BA)^D\right)^m \\
&= \left(B\left((AC)^D\right)^2 A\right)^m \\
&= \underbrace{\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]...\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]}_{mfois} \\
&= \underbrace{\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[BAC\left((AC)^D\right)^3 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]...\left[B\left((AC)^D\right)^2\right.}_{(m-2)fois} \\
&= \underbrace{\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[CAC\left((AC)^D\right)^3 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]...\left[B\left((AC)^D\right)^2\right.}_{(m-2)fois} \\
&= \underbrace{\left[B\left((AC)^D\right)^2\right]\left[(AC)^2\left((AC)^D\right)^3 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]...\left[B\left((AC)^D\right)^2\right.}_{(m-2)fois} \\
&= \underbrace{\left[B\left((AC)^D\right)^2\right]\left[\left((AC)^D\right) A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]...\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]}_{(m-2)fois} \\
&= \underbrace{\left[B\left((AC)^D\right)^3 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]...\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]}_{(m-2)fois} \\
&= B\left((AC)^D\right)^{m+1} A \\
&= B\left((AC)^D\right)^n (AC)^{n-m-1} A \\
&= B\left((AC)^n\right)^D (AC)^{n-m-1}.
\end{aligned}$$

Si $n \geq m+1$ d'après le théorème et le lemme précédents on trouve

$$\begin{aligned}
((BA)^m)^D &= \left((BA)^D\right)^m \\
&= \left(B\left((AC)^D\right)^2 A\right)^m \\
&= \underbrace{\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]...\left[B\left((AC)^D\right)^2 A\right]}_{mfois} \\
&= B\left((AC)^D\right)^{m+1} A \\
&= B\left((AC)^D\right)^n (AC)^{m+1-n} A \\
&= B\left((AC)^n\right)^D \left[((AC)^n)^D (AC)^{n-1}\right]^{m+1-n} A \\
&= B\left[((AC)^n)^D\right]^{m+2-n} (AC)^{(n-1)(m+1-n)} A \\
&= B\left[((AC)^n)^D\right]^{m+2-n} A\,(BA)^{(n-1)(m+1-n)}
\end{aligned}$$

(ii) La preuve est similaire à (i). Le résultat suivant concerne les expressions explicites pour le pseudo inverse de Drazin de A et $(A)^n$, les deux termes l'un de l'autre.

Théorème 34. *[24]*

1. *Soit $A \in B(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Si A^n admet un pseudo inverse au sens de Drazin, alors A admet un pseudo inverse au sens de Drazin et $A^{pD} = (A^n)^{pD} A^{n-1}$.*

2. *Soit $A \in B(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Si A admet un pseudo inverse au sens de Drazin, alors A^n admet un pseudo inverse au sens de Drazin et $(A^n)^{pD} = \left(A^{pD}\right)^n$. De plus $\frac{ind(A)}{n} \leq ind(A^n) < \frac{ind(A)}{n} + 1$.*

Démonstration On suppose que A^n admet un pseudo inverse au sens de Drazin $B = (A^n)^{pD}$ et on montre que $A^{pD} = BA^{n-1}$.
(i) on trouve $(BA^{n-1})\,A\,(BA^{n-1}) = BA^nBA^{n-1} = BA^{n-1}$.
(ii) Soit $C \in \{A\}'$. Alors $CA^n = A^nC$, puisque $B \in \{A\}''(A), BC = CB$. Donc $C(BA^{n-1}) =$

$B(CA^{n-1}) = (BA^{n-1})\,C$,

par conséquent $BA^{n-1} \in A''(A)$.
(iii) Soit $ind(A^n) = k$ et $l = nk$, puisque $A^nA^{n-1} = A^{n-1}A^n$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
A^{l+1}BA^{n-1} &= A^{nk+1}A^{n-1}B = A^{nk+n}B \\
&= (A^n)^{k+1} B = (A^n)^k = A^{nk} = A^l.
\end{aligned}$$

Aussi, on peut en déduire que $\frac{ind(A)}{n} \leq ind(A^n)$. Pour prouver que $ind(A^n) \leq \frac{ind(A)}{n} + 1$, aussi nous laissons $ind(A^n) = k$. Alors nous allons montrer que $ind(A) >$

$nk-n$, on pose $ind\,(A) \leq nk-n$, il vient

$$\begin{aligned}(A^n)^k (A^n)^{pD} - (A^n)^{k-1} &= A^{nk-n+1} A^{n-1} (A^n)^{pD} - A^{nk-n} \\ &= A^{nk-n+1} \left(A^{pD}\right)^n A^{n-1} - A^{nk-n} \\ &= A^{nk-n+1} A^{pD} - A^{nk-n} \in J(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Ce qui est contradiction avec l'hypothèse.

(2) Supposons que A admet une pseudo inverse de Drazin et soit $B = A^{pD}$. Ensuite, nous avons $(A^n)^{pD} = B^n$, évidente, on a : $B^n A^n B^n = B^n$, et $A^n B^n = B^n A^n$. Soit $ind\,(A) = m$ et q est un nombre satisfait $q \geq \frac{m}{n}$. Puisque $AB = BA$ et $BAB = B$, $A^{n+m}A^n - A^m = A^m BA - A^m \in J(\mathcal{A})$. Alors, $(A^n)^{q+1}(B^n) - (A^n)^q = A^{nq-m}A^{m+n}(B^n) - A^{nq-m}A^m = A^{nq-m}(A^{m+n}B^n - A^m) \in J(\mathcal{A})$, la preuve et achevée.

De même, le pseudo inverse de Drazin de A^n est déterminé uniquement par celui de A.

Lemme 15. *[24] Si A, B et $C \in B(E)$ satisfaisant que $ABA = ACA$. Alors AC est pseudo inverse au sens de Drazin si et seulement si BA est pseudo inverse au sens de Drazin. Dans ce cas on a*

1. $|ind(AC) - ind(BA)| \leq 1$.
2. $(BA)^{pD} = B\left((AC)^{pD}\right)^2 A$ *et* $(AC)^{pD} = A\left((BA)^{pD}\right)^2 C$..

Dans le cas de l'algèbre de Banach et la présence de $ABA = ACA$. Nous donnons dans le théorème suivant une expression explicite pour le pseudo inverse de Drazin de $(AC)^n$ et $(BA)^m$.

Théorème 35. *[24] Soient A, B et $C \in \mathcal{A}$ tels que, $ABA = ACA$, et $n, m \in \mathbb{N}$, alors*

(1)

1. *Si $(AC)^n$ est pseudo inversible au sens de Drazin, alors $(BA)^m$ l'est aussi. Dans ce cas on a :*

$$\begin{aligned}((BA)^m)^{pD} &= B\,((AC)^n)^{pD} A\,(BA)^{n-m-1} \quad si \;\; n \geq m+1, \\ ((BA)^m)^{pD} &= B\left[((A)^n)^{pD}\right]^{m+2-n} A\,(BA)^{(n-1)(m+1-n)} \quad si \;\; n < m+1\end{aligned}$$

2. *Si $(BC)^n$ est pseudo inversible au sens de Drazin, alors $(AC)^m$, l'est aussi. Dans ce cas on a*

$$\begin{aligned}((AC)^m)^{pD} &= A\,((BA)^n)^{pD} C\,(AC)^{n-m-1} \quad si \;\; n \geq m+1, \\ ((AC)^m)^{pD} &= A\left[((BA)^n)^{pD}\right]^{m+2-n} C\,(AC)^{(n-1)(m+1-n)} \; si \;\; n < m+1.\end{aligned}$$

Démonstration Nous appliquons la preuve du théorème 33 à la pseudo inverse de Drazin, en utilisant le théorème 34 et le lemme 15. Dans le théorème suivant, nous donnons une expression explicite pour l'inverse généralisée de Drazin de A en fonction de A^n.

Théorème 36. *[24]* (1) *Soit $A \in B(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Si A^n admet une inverse généralisée de Drazin, alors A admet un inverse généralisée au sens de Drazin et*

$$A^{gD} = (A^n)^{gD} A^{n-1}.$$

(2). *Soit $A \in B(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Si A admet une invere généralisé au sens de Drazin, alors A^n admet une inverse généralisé au sens de Drazin et*

$$(A^n)^{gD} = \left(A^{gD}\right)^n.$$

Démonstration (1) Supposons que A^n admet une inverse généralisée au sens de Drazin et soit $B = (A^n)^{gD}$. Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} A^{gD} &= (A^n)^{gD} A^{n-1} \\ &= BA^{n-1}. \end{aligned}$$

Comme dans la preuve du théorème 34, nous obtenons
(i) $(BA^{n-1}) A (BA^{n-1}) = BA^{n-1}$ et
(ii) $BA^{n-1} \in \{A\}'$.
(iii) Puisque b est une inverse généralisée de Drazin de A^n. $p = I - A^n B$ est idempotent et commute avec A. Donc $(pA)^n = pA^n$ est quasi nilpotent. Soit $C \in \{pA\}'$. Alors $C^n \in \{(pA)^n\}'$ et $(I - (pA)^n C^n) = (I - pAC)\left(I + pAC + (pAC)^2 + \dots (pAC)^{n-1}\right)$ est inversible,donc $I - pAC$ est inversible. par suite $A - A(BA^{n-1})A = (I - A^n B)A = pA$ est quasi nilpotent.

Lemme 16. *[24] Soient A, B et $C \in B(E)$ tels que $ABA = ACA$. Alors AC admet une inverse généralisée au sens de Drazin si et seulement si BA admet une inverse généralisée au sens de Drazin.Dans ce cas on a*

$$(BA)^{gD} = B\left(\left(AC\right)^{gD}\right)^2 A \text{ et } (AC)^{gD} = A\left(\left(BA\right)^{gD}\right)^2 C.$$

Dans le cas d'algèbre de Banach et sous l'hypothèse $ABA = ACA$, nous donnons dans le théorème suivant une expression explicite pour l' inverse généralisé de Drazin de $(AC)^n$ et $(BA)^m$.

Théorème 37. *[24] Soient A, B et $C \in \mathcal{A}$ tels que $ABA = ACA$, et $n, m \in \mathbb{N}$.*
(1) *Si $(AC)^n$, admet une inverse généralisée au sens de Drazin, alors $(BA)^m$ l'est aussi. Dans ce cas on a*

$$\left((BA)^m\right)^D = B\left((AC)^n\right)^D A\,(BA)^{n-m-1} \text{ si } n \geq m+1,$$
$$\left((BA)^m\right)^D = B\left[\left((AC)^n\right)^D\right]^{m+2-n} a\,(BA)^{(n-1)(m+1-n)} \text{ si } n < m+1.$$

(2) *Si* $(BA)^n$ *admet une inverse généralisée au sens de Drazin, alors* $(AC)^m$ *l'est aussi. Dans ce cas on a*

$$\left((AC)^m\right)^D = A\left((BA)^n\right)^D C\,(AC)^{n-m-1} \text{ si } n \geq m+1,$$
$$\left((AC)^m\right)^D = A\left[\left((BA)^n\right)^D\right]^{m+2-n} C\,(AC)^{(n-1)(m+1-n)} \text{ si } n < m+1.$$

Démonstration Nous appliquons la preuve du théorème 34 de l' inverse généralisée de Drazin, en utilisant le théorème 33 et le lemme 18.

4.6 Représentation de l'inverse de Drazin par une matrice bloc

Soit A une matrice donnée sous la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

Le résultat suivant donne l'inverse de Drazin A^D en termes de l'inverse de Drazin d'un produit de sous matrices.

Théorème 38. *Si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est une matrice bloc définie par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

telle que $B \in \mathbb{C}^{p\times n-p}$*, et* $C \in \mathbb{C}^{n-p\times p}$*. Alors l'inverse de Drazin de* A *est*

$$A^D = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C\,(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$

de plus si $ind\,(BC) = s$*, alors* $ind\,(A) \leq 2s+1$.

Démonstration

$$AA^D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C\,(BC)^D & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} BC\,(BC)^D & 0 \\ 0 & C\,(BC)^D B \end{pmatrix},$$

$$A^D A = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} BC^D(BC) & 0 \\ 0 & C(BC)^D B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^D A A^D &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} BC^D(BC) & 0 \\ 0 & C(BC)^D B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D BC(BC)^D B \\ C(BC)^D BC(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} = A^D. \end{aligned}$$

Alors A^D satisfait $AA^D = A^D A$ et $A^D A A^D = A^D$.
Soit $ind\,(BC) = s$

$$\begin{aligned} A^{2s+2} A^D &= \begin{pmatrix} (BC)^{s+1} & 0 \\ 0 & (CB)^{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^{s+1}(BC)^D B \\ (CB)^{s+1} C(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^s B \\ C(BC)^{s+1}(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^s B \\ C(BC)^s & 0 \end{pmatrix} = A^{2s+1}. \end{aligned}$$

d'après [12] $indA \leq 2s + 1$, et $X = A^D$. □

Lemme 17. *Si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice quelconque, alors*

$$\left(U^2\right)^D = \left(U^D\right)^2.$$

Lemme 18. *Si $V \in \mathbb{C}^{m\times n}$ et $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$, alors*

$$(VW)^D = V\left((WV)^2\right)^D W.$$

Lemme 19. *Si $B \in \mathbb{C}^{p\times(n-p)}, C \in \mathbb{C}^{(n-p)\times p}$, alors,*

$$(BC)^D B = B(CB)^D.$$

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
(BC)^D B &= B\left((CB)^2\right)^D CB \\
&= B\left((CB)^D\right)^2 (CB) \\
&= B\,(CB)^D\,(CB)^D\,(CB) \\
&= B\,(CB)^D\,(CB)\,(CB)^D = B\,(CB)^D\,.
\end{aligned}$$

d'après le lemme 19 on aboutit à $(CB)^D C = C\,(BC)^D$. Par utilisation du lemme 17, on trouve une autre représentation de A^D.

Corollaire 9. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned}
A^D &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ C\,(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & B\,(CB)^D \\ C\,(BC)^D & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D B \\ (CB)^D C & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & B\,(CB)^D \\ (CB)^D C & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Nous terminons cette partie, avec quelques cas particuliers pour A^D. Dans le corollaire si A est non singulier, alors B, C sont nécessairement non singulières et la formule de ce corollaire réduit à $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Si BC est nilpotent, alors $(BC)^D$, A^D, est égal à zero.

Si $C = B^\star \in \mathbb{C}^{(n-p)\times p}$ tel que $rang\,(B) < p$, alors $BB^\star$ est singulière et hermitienne, $ind\,(BB^\star) = 1$. Aussi A est hermitienne et $ind\,(A) = 1$, dans ce cas, $A^D = A^{\neq} = A^+$. $A^{\neq}$ est un groupe inverse de A, A^+ est une inverse de Moore Penroose de A).

$$\begin{aligned}
A^D &= \begin{pmatrix} 0 & (BB^\star)^+ B \\ B^\star\,(B^\star B)^+ & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & B^{\star+} \\ B^+ & 0 \end{pmatrix} = A^+.
\end{aligned}$$

4.6.1 L'indice de A et l'indice de BC.

Le résultat dans cette partie nous indiquons l'indice A en fonction de l'indice de BC et l'indice BC pourrait être exprimé en fonction de l'indice de CB. Soit une matrice A donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} BC & 0 \\ 0 & CB \end{pmatrix}$, $A^{2j} = \begin{pmatrix} (BC)^j & 0 \\ 0 & (CB)^j \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^{2j+1} &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^j B \\ (CB)^j C & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (BC)^j B \\ C(BC)^j & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B(CB)^j \\ (CB)^j C & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$rang\left(A^{2j}\right) = rang\left((BC)^j\right) + rang\left((CB)^j\right), \tag{4.1}$$

et

$$rang\left(A^{2j+1}\right) = rang\left((BC)^j B\right) + rang\left(C(CB)^j\right). \tag{4.2}$$

Lemme 20. *Si $U \in \mathbb{C}^{m\times k}, V \in \mathbb{C}^{k\times n}$ et $W \in \mathbb{C}^{n\times p}$, alors $rang(UV) + rang(VW) = rang(V) + rang(UVW)$.*

Théorème 39. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ et tel que $ind(BC) = s \geq 1$. Alors, $ind(A) = 2s-1$, $2s$ ou $2s+1$.*

Démonstration d'après le théorème 39 ; $ind(A) \leq 2s+1$, et le lemme 19.

$$\begin{aligned} rang\left(B(CB)^{s-1}\right) + rang\left((CB)^{s-1}C\right) \leq & \quad rang(CB)^{s-1} + rang(BC)^s \\ < & \quad rang(CB)^{s-1} + rang(BC)^{s-1}. \end{aligned}$$

Si $ind(BC) = s$, l'utilisation de (4.1) et (4.2) nous donne $rang(A^{2j-1}) < rang(A^{2j-2})$, et $ind(A) > 2s-2$, donc, $ind(A) = 2s-1$, $2s$, ou $2s+1$.

□

Théorème 40. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, et $ind(BC) = s \geq 1$. Alors, $ind(A) = 2s-1$ si et seulement si*

i) $rang(BC)^s = rang\left((BC)^{s-1}B\right)$ *et* $rang(CB)^s = rang\left((CB)^{s-1}C\right)$ *Ou*

ii) $rang(BC)^s = rang\left((CB)^{s-1}C\right)$ *et* $rang(CB)^s = rang\left((BC)^{s-1}B\right)$.

Démonstration D'après le théorème 42 $ind\,(A) \geq 2s-1$, et par l'utilisation (4.1),(4.2), on trouve $rang\,(A^{2s}) = rang\,(A^{2s-1})$ si et seulement si

$$rang\,(BC)^s + rang\,(CB)^s = rang\left((BC)^{s-1}B\right) + rang\left((CB)^{s-1}C\right)$$

Lemme 21. *Si $ind\,(BC) = s$, alors*

$$\begin{aligned} rang\,(BC)^{s+1} &= rang\,(BC)^s \\ &= rang\,((BC)^s B) \\ &= rang\,(C\,(BC)^s) \\ &= rang\,(CB)^{s+1}. \end{aligned}$$

Démonstration Soit $t = rang\,(BC)^s$, on a $ind\,(BC) = s$, alors

$$\begin{aligned} t &= rang\,(BC)^s \\ &= rang\,(CB)^{s+1} \\ &= rang\,((BC)^s B) \\ &= rang\,(C\,(BC)^s). \end{aligned}$$

Les deux égalités satisfaisant

$$\begin{aligned} t = rang\,(CB)^{s+1} &\leq rang\,((BC)^s B) \\ &\leq rang\,(BC)^s = t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t = rang\,(CB)^{s+1} &\leq rang\,(C\,(BC)^s) \\ &\leq rang\,(BC)^s = t, \end{aligned}$$

d'après lemme 20

$$rang\,(C\,(BC)^s) + rang\,((BC)^s B) \leq rang\,(BC)^s + rang\,(CB)^{s+1},$$

aussi

$$\begin{aligned} 2t &\leq +rang\,(CB)^{s+1} \\ &= rang\left(A^{2k+2}\right) \\ &\leq rang\left(A^{2k+1}\right) = 2t. \end{aligned}$$

Donc, $rang\,(CB)^{s+1} = t$.

$\square$

Théorème 41. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$, *telle que* $ind\,(BC) = s \geq 1$. *Alors* $ind\,(A) = 2s$ *si et seulement si* $ind\,(CB) = s$ *et l'un de deux assertions sont stisfait.*
(i) $rang\,(BC)^s < rang\,(BC)^{s-1}\,B$ *ou,*
(ii) $rang\,(CB)^s < rang\,(CB)^{s-1}\,C$.

Démonstration Soit $t = rang\,(BC)^s$, et $ind\,(A) = 2s+1$. Alors d'après la preuve du théorème 45, si $t < rang\,(BC)^s$. D'après le lemme 21 $rang\,(CB)^{s+1} = rang\,(CB)^s\,C = rangC\,(BC)^s = t$. Donc, $rang\,(CB)^s > rang\,(CB)^s\,C$.

□

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(BC)^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^D = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^D\,B \\ C\,(BC)^D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple Soit $A \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ une matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(BC)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu que $rang\,(BC) = rang\,(BC)^2 = 2$ et $ind\,(BC) = 1$. Alors,

$$(BC)^D = (BC)^{\neq} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^D = \begin{pmatrix} 0 & (BC)^{\neq} B \\ C\,(BC)^{\neq} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.7 Résolution des équations et systèmes en appliquant l'inverse de Drazin

.

4.7.1 Solution de l'équation $x^{'} + Ax = f$

Soit l'équation différentielle (E) $x^{'} + Ax = f$ La solution générale est donnée par

$$x = e^{-At} \left(\int e^{-At} f\,(t)\,dt \right),$$

Si A une matrice inversible, alors $\int e^{-At}dt = A^{-1}e^{-At} + G$, G est une matrice de $n \times n$, si A une matrice non inversible, pour étudier le probléme nous utilisons les théorèmes suivantes.

Théorème 42. *[15] Si A une matrice singulière $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, d'indice k, A^D est l'inverse de Drazin de A, alors,*

$$\int e^{At}dt = A^D e^{At} + \left(1 - AA^D\right) t \left[I + \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{3|}t^2 + \frac{A^3}{4!}t^3 + \ \dots \ + \frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1} \right] + G. \tag{4.3}$$

Démonstration

$$\frac{d}{dt}\left(A^De^{At}+\left(1-AA^D\right)t\left[I+\frac{A}{2}t+\frac{A^2}{3!}t^2+\frac{A^3}{4!}t^3+\ ...\ +\frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right]+G.\right)$$
$$=A^DAe^{At}+\left(1-AA^D\right)\left[I+\frac{A}{2}+\frac{A^2}{2!}t^2+\frac{A^3}{3!}t^3+\ ...\ +\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right]$$
$$=\left[I+\frac{A}{1}t+\frac{A^2}{2!}t^2+\frac{A^3}{3!}t^3+\ ...\ +\frac{A^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right]=e^{At}.$$

Corollaire 10. *Si $f(t)$ est un vecteur constant (i.e., $f(t)=b$), alors l'équation $x^{'}+Ax=f$ admet une solution de la forme.*

$$x=\left\{A^D+\left(1-AA^D\right)t\left[I+\tfrac{A}{2}t+\tfrac{A^2}{3!}t^2+\tfrac{A^3}{4!}t^3+\ ...\ +\tfrac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right]\right\}b.$$

Démonstration La solution de l'équation $x'+Ax=b$ est donnée par

$$x=e^{-At}\left(\int e^{-At}dt\right)b=e^{-At}\left(A^De^{At}+\left(1-AA^D\right)t\left[I+\frac{A}{2}t+\frac{A^2}{3!}t^2+\frac{A^3}{4!}t^3+...\ +\frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right]\right)$$
$$=\left\{A^D+\left(1-AA^D\right)t\left[I+\frac{A}{2}t+\frac{A^2}{3!}t^2+\frac{A^3}{4!}t^3+\ ...\ +\frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1}\right]\right\}b.$$

4.7.2 L'équation différentielle $Ax^{'}+Bx=f, avecAB=BA$

Théorème 43. *[15] Soient A et $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, deux matrices singulières, telles que $AB=BA$, alors $y=e^{-A^DBt}AA^Dq$ est une solution de l'équation $Ax^{'}+Bx=0$ pour tout vecteur q.*

Démonstration Soit $y=e^{-A^DBt}AA^Dq$, alors

$$\begin{aligned}Ay^{'}&=-AA^DBe^{-A^DBt}AA^Dq\\&=-Be^{-A^DBt}AA^DAA^Dq\\&=-Be^{-A^DBt}AA^Dq=-By.\end{aligned}$$

Corollaire 11. *Si $AB=BA$ et $A^DAf=f$, alors*

$$y=e^{-A^DBt}\int e^{A^DBt}f(t)\,dt$$

est une solution particulière de l'équation $Ax^{'}+Bx=f$.

Démonstration Soit $y=e^{-A^DBt}\int e^{-A^DBt}f(t)\,dt$ et $A^DAf=f$, alors,

$$\begin{aligned}Ay^{'}&=-AA^DBe^{-A^DBt}\int e^{-A^DBt}f(t)\,dt+f(t)\\&=-Be^{-A^DBt}\int e^{-A^DBt}AA^Df(t)\,dt+f(t)\\&=-Be^{-A^DBt}\int e^{-A^DBt}f(t)\,dt+f(t)\\&=-By.+f(t)\,.\end{aligned}$$

Lemme 22. *[15] Soient $AB = BA$ et $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, alors*

$$\left(I - AA^D\right) BB^D = \left(I - AA^D\right). \tag{4.4}$$

Démonstration Supposons que $AB = BA$ et $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, soit A

$$A = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \widetilde{N} \end{bmatrix} T^{-1}$$

tel que J est inversible, $\widetilde{N}^k = 0$. Soit

$$B = .T \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Si $AB = BA$, alors

$$\begin{aligned} AB &= T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \widetilde{N} \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \widetilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} JB_1 & JB_2 \\ \widetilde{N}B_3 & \widetilde{N}B_4 \end{bmatrix} T^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= T \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \widetilde{N} \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} B_1 J & B_2\widetilde{N} \\ B_3 J & B_4\widetilde{N} \end{bmatrix} T^{-1}. \end{aligned}$$

Si $AB = BA$, on obtient

$$B_1 J = JB_1, \widetilde{N}B_4 = B_4\widetilde{N}, JB_2 = B_2\widetilde{N} \text{ et } \widetilde{N}B_3 = B_3 J. \tag{4.5}$$

est satisfait, alors $J^k B_2 = B_2\widetilde{N^k}$, on trouve $B_2 = 0$ aussi J^k est inversible. aussi $B_3 J^k = \widetilde{N^k} B_3$, on trouve

$$B_3 = 0.\ BB^D = T \begin{bmatrix} B_1 B_1^D & 0 \\ 0 & B_4 B_4^D \end{bmatrix} T^{-1} \text{ et } \left(I - AA^D\right) = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T^{-1}$$

Si B_4 est inversible, alors $B_4^D = B_4^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} \left(I - AA^D\right) BB^D &= T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} B_1 B_1^D & 0 \\ 0 & B_4 B_4^D \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T^{-1} = \left(I - AA^D\right). \end{aligned}$$

Si $\widetilde{N} = 0$, $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ implique $N(B_4) = \{0\}$. Si $\widetilde{N} \neq 0$, supposons qu'il existe $v \neq 0$ tel que $v \in N(B_4)$. Alors $\widetilde{N^p} v \in N(B_4)$ pour tout entier $p \geq 0$ $\widetilde{N} B_4 = B_4 \widetilde{N}$ et comme $\widetilde{N}$ est nilpotent il existe un entier l non négative tel que $\widetilde{N}^{\ l} \neq 0$, mais $\widetilde{N}^{\ l+1} = 0$. Ce qui implique $0 \neq \widetilde{N}^{\ l} v \in N(A) \cap N(B)$, donc contradiction. Alors $N(B_4) = \{0\}$. et B_4 est inversible.

Théorème 44. *[15] Si $AB = BA$ et $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, alors*

$$y = e^{-A^D B t} A A^D q, q \in \mathbb{C}^n \tag{4.6}$$

est une solution générale de l'équation $Ax' + Bx = 0$.

Démonstration d'après le théorème précédent, on a $y = e^{-A^D B t} A A^D q$ pour tout y est une solution général de l'équation $Ax' + Bx = 0$. Nous démonterons que y est une solution, alors $(3), (4)$ sont satisfaites pour $f = 0$. Comme $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ donc B est un et un seul rang de N (par lemme 22). Alors

$$0 = N^k x_2' + N^{k-1} B x_2 = N^{k-1} B x_2.$$

donc $N^{k-1} x_2 = 0$ implique

$$0 = N^{k-1} x_2' = -B N^{k-2} x_2.$$

on continue de le même manière, on trouve $Bx_2 = 0, Nx_2 = 0$ et $\left(I - AA^D\right) x_2 = 0$, D'ou $x_2 = 0$ et $x = x_1$ d'après (7), nous obtenons

$$x_1 = e^{-C^D B t} q = e^{-A^D B t} q \text{ pour tout } q$$

donc

$$x = x_1 = A A^D x_1 = e^{-A^D B t} A A^D q \text{ pour tout } q.$$

Théorème 45. *[15] Si $AB = BA$ et $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Soit $k = ind(A)$. Si $f \in C^{(n)}$, alors l'équation*

$$Ax' + Bx = f$$

admet une solution particulière,

$$x = A^D e^{-A^D B t} \int_a^t e^{A^D B t} f(s)\, ds + \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}. \tag{4.7}$$

tel que a est arbitraire.

Démonstration Supposons que $AB = BA$ et $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Soit

$$x_1 = A^D\, e^{-A^D B t} \textstyle\int_a^t e^{A^D B t} f(s)\, ds,$$

et

$$x_2 = \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}$$

alors on peut démontrér que

$$Ax_1^{'} + Bx_1 = \left(AA^D\right) f \tag{4.8}$$

$$Ax_2^{'} + Bx_2 = \left(I - AA^D\right) f \tag{4.9}$$

on a $x = x_1 + x_2$, premièrement nous démontrons (6)

$$\begin{aligned} Ax_1^{'} &= A\left(-A^D Bx_1 + A^D e^{-A^D Bt} e^{A^D Bt} f(t)\right) \\ &= -AA^D Bx_1 + AA^D f \\ &= -Bx_1 + AA^D f. \end{aligned}$$

Nous démontrons (7)

$$\begin{aligned} Ax_2^{'} =& A\left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n+1)} \\ &= \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^{n+1} f^{(n+1)} \\ &= \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n \left(AB^D\right)^{n+1} f^{(n+1)} \\ &= \left(I - AA^D\right) \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n f^{(n)} \\ &= \left(I - AA^D\right) B \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)} \\ &= \left(I - AA^D\right) B \left(x_2 - B^D f\right) \\ &= \left(I - AA^D\right) Bx_2 + \left(I - AA^D\right) BB^D f \\ &= \left(I - AA^D\right) Bx_2 + \left(I - AA^D\right) f \\ &= -Bx_2 + \left(I - AA^D\right) f. \end{aligned}$$

Théorème 46. *[15] Si $AB = BA$ et $N(A) \cap N(B) = \{0\}$, alors la solution générale de l'équation $Ax^{'} + Bx = f$, est donnée par*

$$x = e^{-A^D Bt} AA^D q + A^D e^{-A^D Bt} \int_a^t e^{A^D Bt} f(s)\, ds + \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}, \tag{4.10}$$

tel que q est un vecteur constant, $k = ind(A)$, et a est arbitrer

Corollaire 12. *Si $AB = BA$ et $N(A) \cap N(B) = \{0\}$. Alors il existe une solution $x(0) = x_0$ de l'équation $Ax' + Bx = f$, si et seulement si*

$$x_0 = A^D A q + \left(I - AA^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(AB^D\right)^n B^D f^{(n)}(0),$$

pour tout vecteur q et x_0 est unique.

4.7.3 L'équation différentielle $Ax' + Bx = f$

Dans cette section nous étudiions les conditions nécessaires et suffisantes de l'unicité de la solution de l'équation $Ax' + Bx = f$.

Lemme 23. *Soit c un nombre tel que $(cA + B)$ est inversible. Alors $(cA + B)^{-1} A$ et $(cA + B)^{-1} B$ commutent.*

Théorème 47. *L'équation*

$$Ax' + Bx = 0,$$

admet une solution unique avec une condition initiale si et seulement s'il existe un nombre c tel que $(cA + B)$ est inversible.

Démonstration On suppose que $(cA + B)$ est inversible. Alors
$N(A) \cap N(B) = \{0\}$, donne

$$N(A) = N\left((cA + B)^{-1} A\right) \text{ et } N(B) = N\left((cA + B)^{-1} B\right).$$

Donc

$$(cA + B)^{-1} Ax' + (cA + B)^{-1} Bx = 0, \tag{4.11}$$

admet une unique solution d'après le théoréme 44, il est claire que l'équation

$$(cA + B)^{-1} Ax' + (cA + B)^{-1} Bx = 0$$

est équivalent à

$$Ax' + Bx = 0.$$

Inversement, supposons que $(cA + B)$ n'est pas inversible pour tout nombre c. Alors pour tout c il existe un vecteur φ_c tel que $(cA + B)\varphi_c = 0$, donc $x_c = e^{tc}\varphi_c$ est une solution de l'équation $Ax' + Bx = 0$.

Théorème 48. *supposons que $Ax^{'} + Bx = 0$ admet une solution unique vérifie le condition initiale. Soit c un nombre tel que $(cA + B)$ est inversible on définit $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$ par*

$$\widetilde{A} = (cA + B)^{-1} A, \widetilde{B} = (cA + B)^{-1} B, \widetilde{f}_c = (cA + B)^{-1} f_c. \tag{4.12}$$

Soit $k = ind\left(\widetilde{A}\right)$. Alors l'équation

$$\begin{cases} Ax^{'} + Bx = f, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

á une solution si et seulement si x_0 est définie par

$$x_0 = \widetilde{A}\widetilde{A}^D q + \left(1 - \widetilde{A}\widetilde{A}^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(\widetilde{A}\widetilde{B}^D\right)^n \widetilde{B}^D \widetilde{f}_c^{(n)}(0), \tag{4.13}$$

pour tout vecteur q. et une solution particulier

$$x = \widetilde{A}^D e^{-\widetilde{A}^D \widetilde{B}t} \int_a^t e^{\widetilde{A}^D} \widetilde{B}t\widetilde{f}(s)\, ds + \left(\ 1 - \widetilde{A}\widetilde{A}^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(\widetilde{A}\widetilde{B}^D\right)^n \widetilde{B}^D \widetilde{f}^{(n)}, \tag{4.14}$$

tel que a est arbitrer. La solution générale de l'équation $Ax' + Bx = f$, est donnée par

$$x = e^{-\widetilde{A}^D \widetilde{B}t} \widetilde{A}\widetilde{A}^D q + \widetilde{A}^D e^{-\widetilde{A}^D \widetilde{B}t} \int_a^t e^{\widetilde{A}^D} \widetilde{B}t\widetilde{f}(s)\, ds\ \ + \left(1 - \widetilde{A}\widetilde{A}^D\right) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \left(\widetilde{A}\widetilde{B}^D\right)^n \widetilde{B}^D \widetilde{f}^{(n)}, \tag{4.15}$$

tel que $q \in \mathbb{C}^n$.

Théorème 49. *Soient A, B deux matrices dans $\mathbb{C}^{n\times n}$ tel que$(cA + B)^{-1}$ existe pour tout c. Alors $\widetilde{A}_c^D \widetilde{A}_c, \widetilde{A}_c^D \widetilde{B}_c, \widetilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}, \widetilde{B}_c^D (cA + B)^{-1}$, $\widetilde{A}_c^D \widetilde{B}_c^D$ et $ind\left(\widetilde{A}_c\right)$ sont indépendants de c.*

Démonstration Puisque $\widetilde{A_c}\widetilde{B_c} = \widetilde{B_c}\widetilde{A_c}$, il est clair que $\widetilde{A_c}^D (cA + B)^{-1}, \widetilde{B_c}^D (cA + B)^{-1}$ et $ind\left(\widetilde{A}_c\right)$ sont indépendants de c. Supposons que $(\lambda A + B), (cA + B)$ sont inversibles. Alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{\lambda}^{D}\left(\lambda A+B\right)^{-1} &= \left[\left(\lambda A+B\right)^{-1}A\right]^{D}\left(\lambda A+B\right)^{-1} \\
&= \left[\left(\lambda A+B\right)^{-1}\left(cA+B\right)\left(cA+B\right)^{-1}A\right]^{D}\left(\lambda A+B\right)^{-1} \\
&= \left[\left(\left(\lambda A+B\right)\left(cA+B\right)^{-1}\right)^{-1}\left(cA+B\right)^{-1}A\right]^{D}\left(\lambda A+B\right)^{-1} \\
&= \left[\left(\left(\lambda A+B\right)\left(cA+B\right)^{-1}\right)^{-1}\widetilde{A}_{c}\right]^{D}\left(\lambda A+B\right)^{-1} \\
&= \widetilde{A}_{c}^{D}\left[\left(\lambda\left(cA+B\right)^{-1}A+\left(cA+B\right)^{-1}B\right)^{-1}\right]^{D}\left(\lambda A+B\right)^{-1} \\
&= \widetilde{A}_{c}^{D}\left(\lambda\left(cA+B\right)^{-1}A+\left(cA+B\right)^{-1}B\right)\left(\lambda A+B\right)^{-1} \\
&= \widetilde{A}_{c}^{D}\left(cA+B\right)^{-1}\left(\lambda A+B\right)\left(\lambda A+B\right)^{-1} \\
&= \widetilde{A}_{c}^{D}\left(cA+B\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\widetilde{A}_{c}^{D}\left(cA+B\right)^{-1}$ est indépendant de c, de la même manière nous démontrons que $\widetilde{B}_{c}^{D}\left(cA+B\right)^{-1}$ est indépendant de c, pour tout entier k

$$\begin{aligned}
rang\left(\widetilde{A}_{\lambda}^{k}\right) &= rang\left[\left(\lambda\widetilde{A}_{c}+\widetilde{B}_{c}\right)^{-1}\widetilde{A}_{c}\right]^{k} \\
&= rang\left[\left(\lambda\widetilde{A}_{c}+\widetilde{B}_{c}\right)^{-k}\widetilde{A}_{c}^{k}\right] \\
&= rang\left(\widetilde{A}_{c}^{k}\right),
\end{aligned}$$

donc $ind\left(\widetilde{A}_{c}\right)$ est indépendant de c.

4.8 Calcul de l'inverse de Drazin en utilisant les valeurs propres

Dans cette section nous montrons que l'inverse de Drazin peut être calculée si les valeurs propres sont connues. Supposons que zero est une valeur propre de multiplicité l, et les autres valeurs propres distincts de zero λ_i sont de multiplicités $n_i, i = 1, 2, ..., r$. Alors, si $m = n_1 + n_2 + ... + n_r$, nous avons $m + l = n$. Considérons le polynôme caractéristique de dégrée $n - 1$

$$p\left(\lambda\right) = \lambda^{l}\left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + ... + \alpha_{r-1}\lambda^{r-1}\right) \tag{4.16}$$

pour déterminer les coefficient de $c\left(\lambda\right)$. Nous résolvons les m équations suivantes.

$$\frac{1}{\lambda_i} = p\left(\lambda_i\right) \tag{4.17}$$

$$-\frac{1}{\lambda_i^2} = p^{'}\left(\lambda_i\right) \tag{4.18}$$

$$\frac{\left(-1\right)^{n_i-1}\left(n_i-1\right)!}{\left(\lambda_i\right)^{n_i}} = p^{\left(n_i-1\right)}\left(\lambda_i\right) \tag{4.19}$$

Théorème 50. *Si* $p(\lambda)$ *est défini par* (14) *et* (15), *alors* $A^D = p(A)$.

Exemple

1) Soit

$$c(\lambda) = \lambda^2 (\lambda^2 + 5\lambda + 1)$$

l'équation caractéristique de C est

$$\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0,\ 1 = -\lambda^2 - 5\lambda,$$

$$\lambda^{-1} = -\lambda - 5,$$

$$\lambda^{-2} = -5\lambda^{-1} - 1 = -5(-\lambda - 5) - 1 = 5\lambda + 24$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \lambda^{-3} &= 5 + 24\lambda^{-1} \\ &= 5 + 24(-\lambda - 5) \\ &= -24\lambda - 115 \end{aligned}$$

$$A^D = A^2 p(A) = A^2(-24A - 115).$$

2) Soit

$$c(\lambda) = \lambda^2 (\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1),$$

puisque

$$\lambda \neq 1\ \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = \tfrac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1}$$

donc

$$\lambda^5 = 1,\ \lambda^{-5} = 1,$$

$$\rho(\lambda) = \lambda^{-3} = \lambda^2,\ \ A^D = A^2 \rho(A) = A^4$$

3)Soit

$$c(\lambda) = \lambda^4 (\lambda - 1)^3$$

$$\rho(\lambda) = \lambda^{-5} = [1 + (\lambda - 1)]^{-5}$$

tel que

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

En utilisant le théorème binomial, nous avons

$$\rho(\lambda) = 1 - 5(\lambda - 1) + 15(\lambda - 1)^2.$$

$$A^D = A^4\rho(A) = A^4\left[1 - 5(A-1) + 15(A-1)^2\right]$$

4) Considérons l'équation différentielle homogène

$$Ax' + Bx = 0,$$

tel que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -27 & -22 & -17 \\ 18 & 14 & 10 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

A et B sont singulières et ne commutent pas. Puisque $A+B$ est inversible, on pose $c=1$, on multiplie

$$Ax' + Bx = 0$$

par $(A+B)^{-1}$ on trouve

$$\widetilde{A}x' + \widetilde{B}x = 0 \tag{4.21}$$

tel que

$$\widetilde{A} = (A+B)^{-1}A, \widetilde{B} = (A+B)^{-1}B$$

$$\widetilde{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 6 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \; et \; \widetilde{B} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

il existe une unique solution si et seulement si le vecteur initial $x(0)$ satisfisant

$$\left(I - \widetilde{A}\widetilde{A}^D\right)x(0) = 0, \tag{4.23}$$

les valeurs propres de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont $(0,1,3)$ et $(0,1,-2)$ respectivement. On trouve

$$\widetilde{A}^D = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} -27 & -41 & -28 \\ 54 & 77 & 48 \\ -27 & -34 & -14 \end{bmatrix} et \widetilde{B} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 24 & 19 & 14 \\ -24 & -16 & -8 \\ 12 & 5 & -2 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Par utilisation de l'équation

$$\left(I - \widetilde{A}\widetilde{A}^D\right)x(0) = 0$$

on peut calculés

$$9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) = 0 \tag{4.25}$$

puisque, les valeurs propres de $-\widetilde{A}^D\widetilde{B}$ sont $\{0, 0, \frac{2}{3}\}$. Alors

$$x(t) = e^{-\widetilde{A}^D\widetilde{B}t}x(0) = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 18 & 1 - e^{\frac{2}{3}t} & 2\left(1 - e^{\frac{2}{3}t}\right) \\ 0 & 28 - 8e^{\frac{2}{3}t} & 16\left(1 - e^{\frac{2}{3}t}\right) \\ 0 & 13\left(e^{\frac{2}{3}t} - 1\right) & 26e^{\frac{2}{3}t} - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

tel que

$$x_1(0), x_2(0), x_3(0)$$

vérifiant

$$9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) = 0.$$

maintenant, considérons l'équation non homogène suivante

$$Ax' + Bx = b.,$$

tel que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -27 & -22 & -17 \\ 18 & 14 & 10 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

et b est un vecteur constant défini par $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Multiplions $Ax' + Bx = b.$ par

$$(A + B)^{-1},$$

on obtient

$$\widetilde{A}x' + \widetilde{B}x = \widetilde{b}, \tag{4.28}$$

tel que

$$\widetilde{A} = (A + B)^{-1} A, \widetilde{B} = (A + B)^{-1} B,$$

$$\widetilde{b} = (A + B)^{-1} b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -11 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Si le vecteur initial satisfait les conditions pour trouver la solution unique.d'après le théoréme 48 la solution est donnée par la formule

$$x(t) = e^{-\widetilde{A}^D\widetilde{B}t}\widetilde{A}\widetilde{A}^D q + \widetilde{A}^D e^{-\widetilde{A}^D\widetilde{B}t}\int_0^t e^{\widetilde{A}^D\widetilde{B}t}\widetilde{b}ds + \left(1 - \widetilde{A}\widetilde{A^D}\right)\widetilde{B^D}\widetilde{b}. \tag{4.30}$$

Dans ce cas $\widetilde{A}$ est d'indice 1. Si on pose $t = 0$ on trouve

$$\left(1 - \widetilde{A}\widetilde{A}^D\right)\left(x(0) - \widetilde{B}^D\widetilde{b}\right) = 0 \tag{4.31}$$

qui est une condition nécessaire et suffisante de l'existence de la solution initiale $x(0)$. utilisons (24) pour avoir

$9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) + 1 = 0$. Puisque $\widetilde{b}$ est constant..L'intégrale (23) peut être évaluée à l'aide de la formule (1) . puisque $\widetilde{A}^D\widetilde{B}, \widetilde{A}, \widetilde{B}$ sont indices un. La formule (1) est simplifiée

$\int_0^t e^{\widetilde{A}^D\widetilde{B}t}\widetilde{b}ds = \left\{\widetilde{A}^D\widetilde{B}\left(e^{\widetilde{A}^D\widetilde{B}t} - I\right) + \left(I - \widetilde{A}\widetilde{A}^D\widetilde{B}^D\right)\right\}\widetilde{b}.$

lévaluation de (34) donne

$$x(t) = e^{-\widetilde{A}^D\widetilde{B}t}\left(x(0) - \widetilde{B}^D\widetilde{b}\right) + \widetilde{B}^D\widetilde{b} + \widetilde{A}^D\left(I - \widetilde{B}\widetilde{B^D}\right)t\widetilde{b}.$$

En substituant (26) en (23) et en simplifiant, nous trouvons la solution

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{1}{18}e^{\frac{2}{3}t}\left(x_2(0) + 2x_3(0)\right) - \frac{13}{18}x_2(0) - \frac{4}{9}x_3(0) - \frac{2}{9} - t,\\
x_2(t) &= -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}t}\left(x_2(0) + 2x_3(0)\right) - \frac{13}{9}x_2(0) + \frac{8}{9}x_3(0) + \frac{2}{9} + 2t,\\
x_3(t) &= -\frac{13}{18}e^{\frac{2}{3}t}\left(x_2(0) + 2x_3(0)\right) - \frac{13}{18}x_2(0) - \frac{4}{3}x_3(0) - \frac{10}{9} - t,
\end{aligned}$$

Où $x_1(0)$ a été éliminée en utilisant (28) .

Chapitre 5

Solvabilité des équations d'opérateurs en utilisant l'inverse de Drazin

Dans ce chapitre on utilise quelque propriétés principales, on trouve les solutions des équations des classes des opérateurs avec nouvelles conditions. Dans tout ce que suit, on note par $\mathcal{A}$ l'algèbre de banach et $\mathcal{A}^D$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ qui admet ue inverse de Drazin, p et q sont idempotents, $A, B \in \mathcal{A}$.

5.1 Quelques lemmes et propositions utiles.

Lemme 24. *[17] Pour $A, B \in \mathcal{A}$, les assertions suivantes sont satisfaites*
1. Si $AB = BA$, alors $A^D B = AB^D$
2. Si $AB = BA = 0$, alors $(A + B)^D = A^D + B^D$.

Lemme 25. *[49] Si $A, B \in \mathcal{A}^D$ tels que $AB = BA$, alors $AB \in \mathcal{A}^D$ et*

$$((AB)^D = A^D B^D = B^D A^D$$

.

Lemme 26. *[8] Si $A, B \in \mathcal{A}$, tels que $AB \in \mathcal{A}^D$, alors $BA \in \mathcal{A}^D$ et*

$$(BA)^D = B(\left(AB)^D\right)^2 A.$$

Lemme 27. *[13]*

1. *Soient $A, B \in \mathcal{A}$, alors $(I - AB) \in \mathcal{A}^D$, si et seulement si $(I - BA) \in \mathcal{A}^D$.*
2. *Soient $A, B \in \mathcal{A}^D$ et $p^2 = p \in \mathcal{A}$ si $Ap = pA, Bp = pB$, alors $Ap+, B(I - p) \in \mathcal{A}^D$ et $(Ap + B(I - p))^D = A^D p + B^D (I - p)$*

Proposition 25. *Soient $A, B, C \in \mathcal{A}$ tels que $CA = BC$, alors*

$$CA^n = B^n C.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, on obtient $CA = BC$, qui est valable par hypothèse.
Si on suppose que

$$CA^n = B^n C$$

on obtient

$$CA^{n+1} = CAA^n = BCA^n = BB^nC = B^{n+1}C$$

.

Proposition 26. *Soient $A, B, C \in \mathcal{A}$ tels que $p^2 = p, C\,(pA) = (Bp)\,C$, alors*

$$C\,(p)A^n) = (B^n p)\,C.$$

Démonstration.
Pour $n = 0$, le résultat découle de l'hypothèse $Cp = pC$.
Pour $n = 1$ vient de l'hypothèse

$$C\,(pA) = (Bp)\,C.$$

Donc si on suppose que

$$C\,(p)A^n) = (B^n p)\,C.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
C\left(pA^{n+1}\right) &= C\,(pAA^n) \\
&= C\,(pA^n)\,A \\
&= (B^n p)\,CA, (d'après\ l'hypothèse\ de\ récurrence) \\
&= (B^n\,(pA)\,C \\
&= (B^n\,(Cp)\,A, (d'après\ l'hypothèse\ Cp = pC) \\
&= (B^n\,(Bp)\,C, (d'aprèsl'hypothèse\ C(pA) = (Bp)\,C.) \\
&= \left(B^{n+1}p\right)C.
\end{aligned}$$

Théorème 51. *Soient $A, B \in \mathcal{A}^D$, et $C \in \mathcal{A}$. Si $CA = BC$ alors $CA^D = B^D C$*

Démonstration On suppose que $A, B \in \mathcal{A}^D$, et $CA = BC$ On peut voir facilement que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} BB^DC - BB^DBCA^D &= BB^DC - BB^DCAA^D \\ &= BB^DC\left(I - AA^D\right) \\ &= \left(BB^D\right)^n C\left(I - AA^D\right) \\ &= \left(B^D\right)^n (B)^n C\left(I - AA^D\right) \\ &= \left(B^D\right)^n CA^n\left(I - AA^D\right), \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \|BB^DC - BB^DBCA^D\| &= \| \left(B^D\right)^n CA^n\left(\left(I - AA^D\right)\right) \| \\ &\leq \|B^D\| \|C\|^{\frac{1}{n}} \|A^n\left(I - AA^D\right)\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$. Ainsi,

$$BB^DC = BB^DBCA^D,$$

ou équivalent à

$$B^DC = B^DBCA^D.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} CA^DA - B^DCAA^DA &= CA^DA - B^DBCA^DA \\ &= \left(I - B^DB\right) CA^DA \\ &= \left(I - B^DB\right) \mathbb{C} \left(A^DA\right)^n \\ &= \left(I - B^DB\right) CA^n\left(A^D\right)^n \\ &= \left(I - B^DB\right) B^nC\left(A^D\right)^n. \end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} \|CA^DA - B^DCAA^DA\|^{\frac{1}{n}} &= \| \left(I - B^DB\right) B^nC\left(A^D\right)^n \|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \| \left(I - B^DB\right) B^n\|^{\frac{1}{n}} \|C\|^{\frac{1}{n}} \|A^D\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$. Alors,

$$CA^DA = B^DCAA^DA,$$

ce qui signifie que

$$CA^D = B^DCAA^D.$$

Par conséquent, nous en déduisons

$$CA^D = B^DC.$$

5.2 L'inverse de Drazin d'opérateurs de la forme $Ap(I-q), Bq(I-p), Aq(I-p), Bp(I-q)$.

Théorème 52. *Soient $A, B \in \mathcal{A}^D$ où p, q sont des éléments idempotents, tels que $p, q \in \{A\}' \cap \{B\}'$ et $Bq = qB$, $pq = qp$ alors*

1. $Ap(I-q) \in \mathcal{A}^D$ *et* $Bq(I-p) \in \mathcal{A}^D$.
2. $Ap(I-q)+Bq(I-p) \in A^D$ *et* $(Ap(I-q)+Bq(I-p))^D = (Ap(I-q))^D + (Bq(I-p))^D$

Démonstration Puisque $p^2 = p$, on a $p^D = p$, ainsi $p, q \in A^D$. Rappelons ensuite que $Ap = pA$ et $Bp = pB$, donc nous obtenons par le lemme 25

$$(Ap)^D = A^D p \text{ et } (Bq)^D = B^D q.$$

Ensuite, notons que $Aq = qA$, $Bp = pB$ et $Ap(I-q) = (I-q)Ap$, nous obtenons

$$(Ap(I-q))^D = A^D p(I-q) \text{ et } Bq(I-p) = (I-p)Bq.$$

Par conséquent,

$$(Bq(I-p))^D = B^D q(I-p).$$

Maintenant, observons que

$$Ap(I-q)Bq(I-p) = Bq(I-p)Ap(I-q) = 0.$$

Nous obtenons

$$(Ap(I-q)+Bq(I-p))^D = A^D p(I-q) + B^D q(I-p).$$

□

Théorème 53. *Soient $A, B \in \mathcal{A}^D$ où p, q sont des éléments idempotents, tels que $p, q \in \{A\}' \cap \{B\}'$ et , $pq = qp$ alors*

1. $Aq(I-p) \in \mathcal{A}^D$ *et* $Bp(I-q) \in \mathcal{A}^D$.
2. $Aq(I-p)+Bp(I-q) \in \mathcal{A}^D$ *et* $(Aq(I-p)+Bp(I-q))^D = (Aq(I-p))^D + (Bp(I-))^D$

Corollaire 13. *pour tout $A = I = B$ et $pq = qp$, on a*

$$(p(1-q)+q(1-p))^D = p(1-q)+q(1-p).$$

5.3 L'inverse de Drazin d'opérateurs $Ap(I-q)p, Bq(I-p)q, Bp(I-q)p, Aq(I-p)q,$

Théorème 54. *Soient $A, B \in \mathcal{A}^D$, p, q sont deux éléments idempotents tels que $pq = qp$. Les assertions suivantes sont satisfaites*

1. $Ap\,(I-q)\,p \in \mathcal{A}$ *et* $Bq\,(1-p)\,q \in \mathcal{A}^D$
2. $Ap\,(I-q)\,p + Bq\,(I-p)\,q \in \mathcal{A}^D$ *et*
$$\left(Ap\,(I-q)\,p + Bq\,(I-p)\,q\right)^D = A^Dp\,(I-q)\,p + B^Dq\,(I-p)\,q.$$
3. $Aq\,(I-p)\,q \in \mathcal{A}^D$ *et* $Bp\,(I-q)\,p \in \mathcal{A}^D$
4. $Aq\,(I-p)\,q + Bp\,(I-q)\,p \in \mathcal{A}^D$ *et*
$$\left(Aq\,(1I-p)\,q + Bp\,(I-q)\,p\right)^D = A^Dq\,(I-p)\,q + B^Dp\,(I-q)\,p.$$

Démonstration La première assertion est similaire au théorème 53. Alors on démontre la deuxième assertion. On a

$$Ap\,(1-q)\,p = Ap - Apqp = Ap - Aqp^2 = Ap - Aqp = Ap - Apq = Ap\,(1-q) \in \mathcal{A}^D.$$

□

5.4 Solvabilité de l'équation d'opérateurs $AXB = C$

Théorème 55. *Soit $A, B \in \mathcal{A}^D$ et $C \in \mathcal{A}$, p idempotent tel que $C\,(pA) = (Bp)\,C$ et $Cp = pC$. Alors $C\left(pA^D\right) = \left(B^Dp\right)C$.*

Démonstration On peut voir facilement que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
BB^DpC - BB^DBCp^AD &= BB^DpC - BB^DCpAA^D \\
&= BB^DpC\left(I - AA^D\right) \\
&= \left(BB^D\right)^n pC\left(I - AA^D\right) \\
&= \left(B^D\right)^n (B)^n pC\left(I - AA^D\right) \\
&= \left(B^D\right)^n CpA^n\left(I - AA^D\right),
\end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned}\|BB^DpC - BB^DBCpA^D\| &= \|\left(B^D\right)^n CpA^n\left(\left(I - AA^D\right)\right)\| \\ &\leq \|B^D\|\|Cp\|^{\frac{1}{n}}\|A^n\left(I - AA^D\right)\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$. Ainsi,

$$BB^DpC = BB^DBCpA^D,$$

ou équivalent à

$$B^DpC = B^DBCpA^D.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}CpA^DA - B^DpCAA^DA &= CpA^DA - B^DBpCA^DA \\ &= \left(I - B^DB\right)CpA^DA \\ &= \left(I - B^DB\right)Cp\left(A^DA\right)^n \\ &= \left(1 - B^DB\right)cpA^n\left(A^D\right)^n \\ &= \left(I - B^DB\right)B^npC\left(A^D\right)^n.\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}\|CpA^DAB^DpCAA^DA\|^{\frac{1}{n}} &= \|\left(I - B^DB\right)B^npC\left(A^D\right)^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \|\left(I - B^DB\right)B^n\|^{\frac{1}{n}}\|pC\|^{\frac{1}{n}}\|A^D\| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$. Alors,

$$CpA^DA = B^DpCAA^DA,$$

ce qui signifie que

$$CpA^D = B^DpAA^D.$$

Par conséquent, nous en déduisons

$$CpA^D = B^DCp.$$

Corollaire 14. *Soit $A, B \in \mathcal{A}^D$ et $C \in \mathcal{A}$. Si $CA = BC$, alors $CA^D = B^DC$. Nous obtenons le résultat du [10] comme un cas particulier $p = I$.*

Corollaire 15. *Soit $A \in \mathcal{A}^D$ et $CA = AC$, alors $CA^D = A^DC$. Nous obtenons le résultat du [19] comme un cas particulier $A = B$.*

Théorème 56. *Soient $A, B, C \in B(H)$. L'équation*

$$AXB = C \tag{5.1}$$

est consistente si et seulement si pour certains A^D, B^D, on a

$$AA^DCB^DB = C, \tag{5.2}$$

dans ce cas la solution générale est donnée par

$$X = A^D CB^D + Y - A^D AYBB^D \tag{5.3}$$

pour tout élément arbitraire $Y \in B(H)$.

Démonstration Si (5.2) est vérifiée, alors $X = A^D CB^D$ est la solution de (5.1). Inversement, si X est une solution de (5.1) alors

$$C = AXB = AA^D AXBB^D B = AA^D CB^D B.$$

De plus, il découle de (5.2) et la définition de A^D et B^D que chaque X de la forme (5.3) satisfait (5.1). D'autre part, soit X une solution de (5.1). Alors

$$\begin{aligned} C &= AXB \\ &= AA^D CB^D B + AYB - AA^D AYBB^D B \\ &= AA^D CB^D B + AYB - AYB \\ &= AA^D CB^D B. \end{aligned}$$

D'où $X = A^D CB^D$.

□

Théorème 57. *Soientt* $A, B, C \in B(H)$ *tel que* $CA = BC$. *Alors l'équation*

$$AXB = C \tag{5.4}$$

yyukjhh,,est consistente si et seulement si pour certains A^D, B^D *on a*

$$A^D CB = C \tag{5.5}$$

dans ce cas la solution générale est donnée par

$$X = A^D CB + Y - A^D AYBB^D \tag{5.6}$$

pour tout élément arbitraire $Y \in B(H)$.

Démonstration Si $CA = BC$ alors $CA^D = B^D C$ (voir corollaire 14). Par théorème 54, on obtient

$$\begin{aligned} AXB = C &\iff AA^D CB^D B = C \\ &\iff AA^D A^D CB = C \\ &\iff A^D CB = C. \end{aligned}$$

Maintenant, chaque fois $X = A^D CB^D + Y - A^D AYBB^D$ on obtient

$$AXB = AA^D CB^D B + AYB - AA^D AYBB^D B.$$

Par conséquent,

$$AXB = A^D CB + AYB - AYB.$$

Ce qui signifie

$$AXB = A^D CB.$$

Corollaire 16. *Soit* $A, C, \in B(H)$ *tel que* $AC = CA$*. Alors l'équation*

$$AXA = C \tag{5.7}$$

est consistante si et seulement si pour certains A^D *on a* $AA^DCA = C$*.*

Démonstration Nous avons la série des implications suivantes.

$$AXA = C \implies AA^DCA^DA = C \implies AA^DA^DCA = C \implies AA^DCA = C.$$

□

5.5 Équations d'opérateurs de la forme $ABA = A^2\sqrt{A}$

Dans cette section, nous donnons quelques résultats utiles sur l'inversibilité de Drazin et la relation avec les équations d'opérateurs.

Proposition 27. *Si* $P; Q$ *deux éléments idempotents dans B(H) avec,* $A = (PQ)^2$ *et* $B = (QP)^2$ *; alors* $AB^2A = A^3\sqrt{A}; BA^2B = B^3\sqrt{B}$*.*

Démonstration

$$\begin{aligned} AB^2A\mathcal{A} &= (PQ)^2((QP)^2)^2(PQ)^2 \\ &= PQ(PQQP)(QP)^3(PQ)^2 \\ &= (PQ)^2 P (QP)^2 Q (PQ)^2 \\ &= (PQ)^2 P (PQ)^3 Q (PQ)^2 = \left((PQ)^2\right)^3 PQ \\ &= A^3\sqrt{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA^2B &= (QP)^2((PQ)^2)^2(QP)^2 \\ &= B^3\sqrt{B}. \end{aligned}$$

De la même manière en changeant les rôles de A et B.

Proposition 28. *Si* $P; Q$ *deux éléments idempotents dans*$B(H)$ *avec* $A = (PQ)^2$ *;* $B = (QP)^2$ *. Alors* $AQ = A$ *et* $BP = B$*.*

Démonstration D'autre part

$$\begin{aligned} AQ &= (PQ)^2Q \\ &= (PQ)(PQ^2) \\ &= (PQ)(PQ) \\ &= (PQ)^2 = A, \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} BP &= (QP)^2 P \\ &= (QP)(QP^2) \\ &= (QP)(QP) \\ &= (QP)^2 = B. \end{aligned}$$

Proposition 29. *Si A et B sont inversible au sens de Drazin , $A^D = C, B^D = D, i(A) = i(B) = k$. Alors $C^k A^{k+1} = A, D^k B^{k+1} = B, C^{k+1} A^k = C$ et $D^{k+1} B^k = D$.*

Démonstration

$$\begin{aligned} C^k A^{k+1} &= C^{k-1} \left(CA^2 \right) A^{k-1} \\ &= C^{k-1} A^k \\ &= C^{k-2} A^{k-1} = ... = CA^2 = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^k B^{k+1} &= D^{k-1} \left(DB^2 \right) B^{k-1} \\ &= D^{k-1} B^k \\ &= D^{k-2} B^{k-1} = ... = DB^2 = B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{k+1} A^k &= C^{k-1} \left(C^2 A \right) A^{k-1} \\ &= C^k A^{k-1} \\ &= C^{k-1} A^{k-2} = ... = C^2 A = C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{k+1} B^k &= D^{k-1} \left(D^2 B \right) B^{k-1} \\ &= D^k B^{k-1} \\ &= D^{k-1} B^{k-2} = ... = D^2 B = D. \end{aligned}$$

Théorème 58. *a) - SI P, Q sont deux des éléments idempotents dans $B(E)$,*

$$A = (PQ)^2 \text{ et } B = (QP)^2 .$$

Alors

$$ABA = A^2 \sqrt{A} \text{ et } BAB = B^2 \sqrt{B}.$$

b) - Supposons que $A, B \in B(E)$ sont inversible au sens de Drazin,

$$A^D = C,\ B^D = D;\ ind(A) = ind(B) = k\ ABA = A^2 \sqrt{A},\ BAB = B^2 \sqrt{B}.$$

Alors $P, Q \in B(E)$ *tel que*

$$P^2 = P,\ Q^2 = Q,\ A = (PQ)^2\,;\ B = (QP)^2\,.$$

Démonstration a)- nous avons

$$\begin{aligned} ABA &= (PQ)^2\,(QP)^2\,(PQ)^2 \\ &= PQ(PQQP)(QPPQ)PQ \\ &= PQ(PQP)(QPQ)PQ \\ &= (PQ)^5 = A^2\sqrt{A} \end{aligned}$$

$BAB = B^2\sqrt{B}$, (de la même manière en changeront les rôles de A et B).
b)- Puisque

$$ind\,(A) = ind\,(B) = k;$$

il existe $C, D \in B(E)$, avec

$$CAC = C, AC = CA, A^{k+1}C = A^k;\ DBD = D, BD = BD, B^{k+1}D = B^k.$$

Supposons que

$$P = C^2A\sqrt{A}BetQ = BA\sqrt{A}C^2.$$

On a

$$\begin{aligned} P^2 &= (C^2A\sqrt{A}B)^2 \\ &= C^2\sqrt{A}ABAC^2\sqrt{A}B \\ &= C^2\sqrt{A}A^2\sqrt{A}C^2\sqrt{A}B \\ &= C^2\left(A^3C^2\right)\sqrt{A}B \\ &= C^2A\sqrt{A}B = P. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q^2 &= (BA\sqrt{A}C^2)^2 \\ &= B\sqrt{A}C^2ABA\sqrt{A}C^2 \\ &= B\sqrt{A}C^2A^2\sqrt{A}\sqrt{A}C^2 \\ &= B\sqrt{A}\left(C^2A^3\right)C^2 \\ &= B\sqrt{A}AC^2 = Q. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(PQ)^2 &= (C^2A\sqrt{A}B.BA\sqrt{A}C^2)^2 \\
&= C^2\sqrt{A}A.B^2A\sqrt{A}C^4\sqrt{A}A.B^2A\sqrt{A}C^2 \\
&= C^2A^4\sqrt{A}C^4A^4\sqrt{A}C^2 \\
&= C^2\sqrt{A}\left(A^5C^4\right)A^3\sqrt{A}C^2 \\
&= C^2\sqrt{A}AA^3\sqrt{A}C^2 \\
&= C^2A^5C^2 = A^5C^4 = A.
\end{aligned}
$$

$(QP)^2 = B$, (de la même manière en changeront les rôles de P et Q).

5.6 Équations d'opérateurs de la forme $ABA = A^3A^{\frac{2}{3}}$

Proposition 30. *Si $P; Q \in B(E)$ sont deux éléments idempotents, tel que*

$$A = (PQ)^3 \text{ et } B = (QP)^3,$$

alors

$$AB^2A = A^3A^{\frac{2}{3}}; BA^2B = B^3B^{\frac{2}{3}}$$

Démonstration

$$
\begin{aligned}
AB^2A &= (PQ)^3((QP)^3)^2(PQ)^3 \\
&= (PQ)^3(QP)^6(PQ)^3 \\
&= (PQ)^2(PQQP)(QP)^4(QPPQ)(PQ)^2 \\
&= (PQ)^2(PQP)(QP)^4(QPQ)(PQ)^2 = (PQ)^3P(QP)^4Q(PQ)^3 \\
&= (PQ)^3(PQ)^6(PQ)^2 \\
&= \left((PQ)^3\right)^3\left((PQ)^3\right)^{\frac{2}{3}} = A^3A^{\frac{2}{3}};
\end{aligned}
$$

$BA^2B = B^3B^{\frac{2}{3}}$, (de la même manière en changeront les rôles entre A et B).

Théorème 59. *a)- Si $P, Q \in B(E)$, sont deux éléments idempotents*

$$A = (PQ)^3, B = (QP)^3.$$

Alors

$$ABA = A^3A^{\frac{2}{3}} \text{ et } BAB = B^2B^{\frac{2}{3}}.$$

b)- Supposons que $A, B \in E$, sont inversible au sens de Drazin,

$$A^D = C,\ B^D = D;\ ind(A) = ind(B) = k;\ ABA = A^2A^{\frac{2}{3}} \text{ et } BAB = B^2B^{\frac{2}{3}}.$$

Alors $P, Q \in B(E)$ *tel que*

$$P^2 = P, Q^2 = Q, A = (PQ)^3 \ \textit{et}\ B = (QP)^3 .$$

Démonstration

$$\begin{aligned} ABA &= (PQ)^3 (QP)^3 (PQ)^3 \\ &= (PQ)^2 (PQQP)(QP)^2 (PQ)^3 \\ &= (PQ)^2 (PQP)(QP)(QPPQ)(PQ)^2 \\ &= (PQ)^6 (PQ)^2 = A^2 A^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

$BAB = B^2 B^{\frac{2}{3}}$. (De la même manière en changeront les rôles de A et B.
b)- Puisque

$$ind\,(A) = ind\,(B) = k;$$

il existe $C, D \in E$ avec

$$CAC = C, AC = CA, A^{k+1}C = A^k;\ DBD = D, BD = BD; B^{k+1}D = B^k.$$

Supposons que

$$P = C^3 A A^{\frac{4}{3}} B, \text{ et } Q = BAA^{\frac{4}{3}} C^3;$$

$$\begin{aligned} P^2 &= (C^3 A A^{\frac{4}{3}} B)^2 \\ &= C^3 A^{\frac{4}{3}} ABAC^3 A^{\frac{4}{3}} B \\ &= C^3 A^{\frac{4}{3}} A^2 A^{\frac{2}{3}} C^3 A^{\frac{4}{3}} B \\ &= C^3 A^{\frac{4}{3}} A^2 A^{\frac{2}{3}} C^3 A^{\frac{4}{3}} B \\ &= C^3 \left(A^4 C^3 \right) A^{\frac{4}{3}} B \\ &= C^3 A A^{\frac{4}{3}} B = P. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= (BAA^{\frac{4}{3}} C^3)^2 \\ &= BA^{\frac{4}{3}} AC^3 BAA^{\frac{4}{3}} C^3 \\ &= BA^{\frac{4}{3}} C^3 ABAA^{\frac{4}{3}} C^3 \\ &= BA^{\frac{4}{3}} C^3 A^2 A^{\frac{2}{3}} A^{\frac{4}{3}} C^3 \\ &= BA^{\frac{4}{3}} \left(C^3 A^4 \right) C^3 \\ &= BA^{\frac{4}{3}} AC^3 = Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(PQ)^3 &= (C^3AA^{\frac{4}{3}}BBAA^{\frac{4}{3}}C^3)^3 \\
&= C^3A^{\frac{4}{3}}AB^2AA^{\frac{4}{3}}C^6A^{\frac{4}{3}}AB^2AA^{\frac{4}{3}}C^6A^{\frac{4}{3}}AB^2AA^{\frac{4}{3}}C^3 \\
&= C^3A^{\frac{4}{3}}A^3A^{\frac{2}{3}}A^{\frac{4}{3}}C^6A^{\frac{4}{3}}A^3A^{\frac{2}{3}}A^{\frac{4}{3}}C^6A^{\frac{4}{3}}A^3A^{\frac{2}{3}}A^{\frac{4}{3}}C^3 \\
&= C^3A^{\frac{4}{3}}A^5C^6A^{\frac{4}{3}}A^5C^6A^{\frac{4}{3}}A^5C^3 \\
&= C^3A^{\frac{4}{3}}\left(A^7C^6\right)A^{\frac{4}{3}}\left(A^7C^6\right)A^{\frac{4}{3}}AC^3 \\
&= C^3A^{\frac{4}{3}}AA^{\frac{4}{3}}AA^{\frac{4}{3}}AC^3 \\
&= C^3A^7\ C^3 = C^6A^7 = A
\end{aligned}$$

$(QP)^3 = B$. (De la même manière en changent les rôles de Q et P).

5.7 Équations d'opérateurs de la forme $ABA = A^2A^{\frac{n-1}{n}}$

Proposition 31. *Si $P, Q \in B(E)$ sot deux éléments idempotents,*

$$P^2 = P, Q^2 = Q, A = (PQ)^n, B = (QP)^n.$$

Alors

$$AB^2A = A^3A^{\frac{n-1}{n}} \text{ et } BA^2B = B^3B^{\frac{n-1}{n}}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
AB^2A &= (PQ)^n(QP)^{2n}(PQ)^n \\
&= (PQ)^n(PQ)^n(PQ)^n(PQ)^{n-1} \\
&= A^3A^{\frac{n-1}{n}}
\end{aligned}$$

$BA^2B = B^3B^{\frac{n-1}{n}}$. De la même manière en changeant les rôles de A *et* B

Proposition 32. *Si $P, Q \in B(E)$, sont deux éléments idempotents $A = (PQ)^n$, alors*

$$A^3A^{\frac{(n-1)^2}{n}}A^{\frac{n-1}{n}} = A^{n+2}$$

Théorème 60. *a)- Si*

$$P, Q \in E, P^2 = P, Q^2 = Q, A = (PQ)^n, B = (QP)^n.$$

Alors

$$ABA = A^2A^{\frac{n-1}{n}} \text{ et } BAB = B^2B^{\frac{n-1}{n}}.$$

b)- Supposons que $A, B \in B(E)$ sont inversibles au sens de Drazin,

$A^D = C,\ B^D = D;\ ind\,(A) = ind\,(B) = k;\ ABA = A^2 A^{\frac{n-1}{n}}\ \ et\ \ BAB = B^2 B^{\frac{n-1}{n}},$

alors $P.Q \in B(E)$ *tel que*

$$P^2 = P, Q^2 = Q, A = (PQ)^n\,; B = (QP)^n\,.$$

Démonstration a)

$$\begin{aligned} ABA &= (PQ)^n (QP)^n (PQ)^n \\ &= (PQ)^n\,(PQ)^n\,(PQ)^{n-1} \\ &= A^2 A^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

De même $BAB = B^2 B^{\frac{n-1}{n}}$.
b)- Puisque $i\,(A) = i\,(B) = k$; il existe $C, D \in E$ avec $CAC = C, AC = CA, A^{k+1}C = A^k,\ DBD = D, BD = DB, B^{k+1}D = B^k$. Supposons que $P = C^n A A^{\frac{(n-1)^2}{n}} B,$

$$\begin{aligned} Q &= BAA^{\frac{(n-1)^2}{n}} C^n P^2 \\ &= C^n A A^{\frac{(n-1)^2}{n}} B C^n A A^{\frac{(n-1)^2}{n}} B \\ &= C^n A^{\frac{(n-1)^2}{n}} ABAC^n A^{\frac{(n-1)^2}{n}} B \\ &= C^n \left(A^{\frac{(n-1)^2}{n}} A^2 A^{\frac{n-1}{n}} \right) C^n A^{\frac{(n-1)^2}{n}} B \\ &= C^n \left(A^{n+1} C^n \right) A^{\frac{(n-1)^2}{n}} B \\ &= C^n A A^{\frac{(n-1)^2}{n}} B = P. \end{aligned}$$

De même $Q^2 = Q$.

$$
\begin{aligned}
(PQ)^n &= (PQ)\,(PQ)\ldots(PQ)\\
&= \left(C^nAA^{\frac{(n-1)^2}{n}}BBA^{\frac{(n-1)^2}{n}}AC^n\right)\left(C^nAA^{\frac{(n-1)^2}{n}}BBA^{\frac{(n-1)^2}{n}}AC^n\right)\ldots\\
&\ldots\left(C^nAA^{\frac{(n-1)^2}{n}}BBA^{\frac{(n-1)^2}{n}}AC^n\right)\\
&= \left(C^nA^{\frac{(n-1)^2}{n}}AB^2AA^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\left(C^nA^{\frac{(n-1)^2}{n}}AB^2AA^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\ldots\\
&\ldots\left(C^nA^{\frac{(n-1)^2}{n}}AB^2AA^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\\
&= \left(C^nA^{\frac{(n-1)^2}{n}}A^3A^{\frac{n-1}{n}}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\left(C^nA^{\frac{(n-1)^2}{n}}A^3A^{\frac{n-1}{n}}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\ldots\\
&\ldots\left(C^nA^{\frac{(n-1)^2}{n}}A^3A^{\frac{n-1}{n}}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\\
&= \left(C^nA^{\frac{(n-1)^2}{n}}A^{n+2}C^n\right)\left(C^nA^{n+2}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\ldots\left(C^nA^{n+2}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\\
&= \left(C^nA^{n+2}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\left(C^nA^{n+2}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\ldots\left(C^nA^{n+2}A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\\
&= \left(\left(C^nA^{n+1}\right)AA^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\left(\left(C^nA^{n+1}\right)AA^{\frac{(n-)^2}{n}}C^n\right)\\
&\ldots\left(\left(C^nA^{n+1}\right)AA^{\frac{(n-)^2}{n}}C^n\right)\\
&= \left(A^2A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\left(A^2A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\ldots\left(A^2A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\\
&= \left(A^2A^{\frac{(n-1)^2}{n}}C^n\right)\left(\left(A^2A^{\frac{(n-1)^2}{n}}\right)C^n\right)\ldots\left(\left(A^2A^{\frac{(n-1)^2}{n}}\right)C^n\right)\\
&= \left(A^{\frac{n^2+1}{n}}C^n\right)\left(A^{\frac{n^2+1}{n}}C^n\right)\ldots\left(A^{\frac{n^2+1}{n}}C^n\right)\\
&= A^{n^2+1}C^{n^2} = A.
\end{aligned}
$$

De même $(QP)^n = B$.

Conclusion

Dans cette thèse, on a utilisé les techniques matricielles et opératorielles, pour examiner les représentations explicites de l'inverse généralisée de la somme $(A+B)^D$ en termes de A, A^D B, B^D sous la condition $AB = BA$.

On a pu arriver à des bons résultats concernant les conditions de resolvabilité de plusieur types d'equations d'opérateurs (En basant toujours sur les propriétés des inverses de Drazin).

On a traité principalement quelques types des classe d'équations opératorielles telles que l'équation de Sylvester et d'autres types et on a présenté la théorie des inverses généralisées, et principalement quelque méthodes de calcul d'une inverse généralisée, et la solution de quelques équations, en utilisant ces inverses.

Aussi on a traité avec succès quelques propriétés de l'inverse de Drazin, et on les a appliqué à la résolution des équations et systèmes d'opérateurs

$$x - y \tag{5.8}$$

$$s - t \tag{5.9}$$

$$r - r \tag{5.10}$$

Bibliographie

[1] A.Belhadi. A, Mansour and A, Selmi, Some Drazin invertible elements in Banach algebras and applications to operator equations solutions, Italian Journal of Pure and Applied Mathimatics, N 42-July 2019 (to appear).

[2] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, Generalized Inverses, theory and application, Springer-Verlag New York, Inc.(2003) .

[3] R. Bhaskara, C. Meyer, The Theory of Generalized inverse over commutative Rings. London and New York. 2002.

[4] R. Bhatia, Matrix Analysis, springer-Verlag, New York, (1997), graduate texts in Mathematics.

[5] B.A.Brnes, Common operator property of the linear operators RS and SR, PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 126, Number 4, April 1998, Pages 1055 ?1061 S 0002-9939(98)04218-X

[6] S.R.Caradus, Operator theory of the pseudo inverse.Queen's papers in pure and Appl.Math. No.38(1974) .

[7] G. Cassier, Generalized Toeplitz operators, restriction to invariant subspaces and similarity problems, Journal of operator theory, 53 : 01(2005), p. 49-89.

[8] N. Castro-Gonzalez, JJ. Koliha, New additive results for the g-Drazin inverse. Proc Roy Soc Edinburgh 2004 ; 134 : 1085-1097.

[9] M. Catral, D. D. Olesky And P. Van. Den. Driessche. Block Representations of the Drazin inverse of Bibaritite Matrix. Electronic Journal of Linear Algebra ISSN 1081-3810 A publication of the International Linear Algebra Society Volume 18, pp. 98-107, February 2009.

[10] J. Chen, H. Zhu, Drazin Invertibility of Product and Difference of Idempotents in a Ring. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, China.

[11] S.L.Compell and C.D.Meyer, Generalzed Inverses of Linear Transformations. Pitman. London.1979 ; Dover Publications, Inc. NewYork.1991.

[12] S. L. Campbell, C. D. Meyer, N. J. Rose, Applications of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients.

SIAM Journal on Applied Mathematics, 31(3), 411 ?425. doi :10.1137/0131035 (1976).

[13] DS. Cvetkovic-Ilic, Liu XJ and YM. Wei, Some additive results for the generalized Drazin inverse in a Banach algebra. Elect J Linear Algebra 2011 ; 22 : 1049-1058.

[14] CY. Deng, Generalized Drazin inverses of anti-triangular block matrices. J Math Anal Appl 2010 ; 368 : 1-8.

[15] CY. Deng, Cvetkovic-Ilic DS, YM. Wei. Some results on the generalized Drazin inverse of operator matrices. Linear Multilinear Algebra 2010 ; 58 : 503-521.

[16] CY. Deng, YM. Wei, Perturbation of the generalized Drazin inverse. Electron J Linear Algebra 2010 ; 21 : 85-97.

[17] CY. Deng, YM. Wei, New additive results for the generalized Drazin inverse. J Math Anal Appl 2010 ; 370 : 313-321

[18] D. S. Djordjevic, D. S. (2007). Explicit solution of the operator equation A*X+X*A=B. Journal of Computational and Applied Mathematics, 200(2), 701-704. doi :10.1016/j.cam.2006.01.023

[19] DS. Djordjevic, YM. Wei. Additive results for the generalized Drazin inverse. J Aust Math Soc 2002 ; 73 : 115-125.

[20] R.G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert spaces, proc. Amer. Math.Soc., 17 (1966), 413-415.

[21] M.P. Drazin, Pseudo inverse in associative rings and semi groups, Amer. Math. Monthly 65 (1958), 506-514.

[22] E. Heinz, Beitrage zur Storungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann. 123 (1951) 415-438.

[23] (5)H.Heuser, Funktional analysis,2nd ed. Teubner.1986.

[24] Y. Jiang. Y. Wen. And Q. Zeng. Generalizations of Cline's Formula For Three Generalized inverses. Revista De La Union Matematica Argentina. vol. 58. No, 1, 2017. page 127-134.

[25] E. Kaniuth, A Course in Commutative Banach Algebras. New York, NY, USA : Springer-Verlag, 2009.

[26] JJ. Koliha, A generalized Drazin inverse. Glasgow Math J 1996 ; 38 : 367-381.

[27] MZ. Kolundzija, D. Mosic, DS. Djordjevic, Further results on the generalized Drazin inverse of block matrices in Banach algebras. Bull Malays Math Sci Soc 2015 ; 38 : 483-498.

[28] YH. Liao, JL. Chen, J. Cui, Cline's formula for the generalized Drazin inverse. Bull Malays Math Sci Soc 2014 ; 37 : 37-42.

[29] H.F. Lian and Q.P. Zeng, An extension of Cline's formula for a generalized Drazin inverse. Turkish. J. Math.40(2016).161-165.MR 3438793.

[30] XJ. Liu, SX. Wu, YM. Yu, On the Drazin inverse of the sum of two matrices. J Appl Math 2011, doi :10.1155/2011/831892.

[31] S. Mecheri. A. Mansour. On the operator equation AXB-XD=E. Lobachevskii journal of mathematics, vol. 30. N3 (2009). 224-228.

[32] D. Mosic, A note on Cline's formula for the generalized Drazin inverse. Linear Multilinear Algebra 2015 ; 63 : 1106-1110.

[33] D. Mosic, DS. Djordjevic, Formula for the generalized Drazin inverse of a block matrix in terms of Banachiewic-Schur forms. J Math Anal Appl 2014 ; 413 : 114-120.

[34] D. Mosic, DS. Djordjevic, Several expressions for the generalized Drazin inverse of a block matrix in a Banach algebra. Appl Math Comput 2013 ; 220 : 374-381.

[35] M.Z.Nashed, Generalized Inverses, Theory and apllication,Academic Press, Ny(1976) .

[36] J. R. Nicolas, A Note On Computing the Drazin Inverse, Linear Algebra And itss Applications 15, 95-98, (1978).

[37] M. Nikuie ; M. K. Mirnia ; Y. Mahmoudi ; Some results about the index of matrix and Drazin inverse. Mathematical Sciences. vol. 4. No. 3 (2010) 283-294.

[38] R. Penrose. J,. A. Todd. AGeneralized Inverse For Matrices. St. John's. College. Cambredge.(1954). 406-413.

[39] V. Rakocevic, A note on a theorem of I. Vidav, Publ. Inst. Math. (Beograd) 68(82) (2000), 105-107.

[40] M. Rosenblum. On operator equation AX-XB=Q. Duke. Math.J 23(1956). 263-269

[41] Christoph Schmoeger, On the operator equations $ABA = A^2$ and $BAB = B^2$ Publications de l'institut mathematique. Nouvelle serie, tome 78(92) (2005), 127-133.

[42] A. Schweinsberg. The Operator equation AX-XB=C wich normal A and B. Pac. J. Math. 102(1982), 447.

[43] I.Vidav, On idempotent operators in a Hibert space Publ.Inst. Math.($Beorgad$)4(18) (1964) , 157-163.

[44] Z. Wang, JL. Chen, Pseudo Drazin inverses in associative rings and Banach algebras. Linear Algebra Appl 2012. 437.1332-1345.

[45] G. Weiss. The Fuglede commutativity theorem module the Hilbert-schemidt classe. II J.. Operator theory 5(1981). 3-16.

[46] H.Zakraoui and S.Guedjiba, On algebraic properties ofgeneralized inverses of matrices, International journaof Algebra. 2(2008) , 633-643.

[47] Q.P. Zeng, and H.J. Zhong. New resultas on common properties of producTs AC and BA, J. Math. Anal. Appt. 427(2015),830-840. MR 3323010.

[48] . Zhu, JL. Chen, P. Patrcio, Representations for the pseudo Drazin inverse of elements in a Banach algebra. Taiwanese J Math 2015 ; 19 : 349-362

[49] G.F. Zhuang, J.L. Chen, D.S. Cvetkovic-Ilic and Y.M. Wei. Additive property of Drazin invertibility of elements in a ring. Linear Multilinear Algebra, 60 :901-910, 2012.

[50] H. Zou, Di. Mosic, J. Chen, Generalized Drazin invertibility of the product and sum of two elements in a Banach algebra and its applications. Turk J Math (2017) 41 : 548 - 563. doi :10.3906/mat-1605-8.