وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

جامعة باجي مختار
عنابة

Université Badji Mokhtar-Annaba

Badji Mokhtar-Annaba University

كلية العلوم
قسم الرياضيات

السنة: 2019

أطروحة

قدمت لنيل شهادة الدكتوراه علوم

العنوان

دراسة بعض المعادلات التفاضلية الكسرية ذات الرتب العليا

تخصص

رياضيات تطبيقية

من تقديم : لعمايرية عبد الحكيم

المؤطر: هوام كمال	أستاذ دكتور	جامعة العربي التبسي – تبسة
مساعد المؤطر: مازوزي السعيد	أستاذ دكتور	جامعة باجي مختار – عنابة

أعضاء اللجنة:

جبابلة عبد الحق	أستاذ محاضر	رئيسا	جامعة باجي مختار – عنابة
دبوش عمار	أستاذ دكتور	ممتحن	جامعة 8 ماي 1945– قالمة
سعودي خالد	أستاذ محاضر	ممتحن	جامعة خنشلة
سالمي عبد الوهاب	أستاذ محاضر	ممتحن	جامعة باجي مختار – عنابة

إهداءات

أحمد الله عز وجل على منه و عونه لإتمام هذا البحث وبعد، أهدي هذا العمل إلى آبائي، إلى **أبي** العزيز رحمه الله وأسكنه فسيح جنانه، و إلى **أمي** جزاها الله عني خير الجزاء في الدارين، إلى **إخوتي** و **أخواتي** الذين تقاسموا معي عبء الحياة، إلى زوجتي إلى أبنائي لؤي مسلم ورفيف.

وإلى كل من يؤمن بأن أسباب نجاح التغيير هي في ذواتنا وفي أنفسنا قبل أن تكون في أشياء أخرى ...

قال الله تعالى : " **إن الله لا يغير ما بقوم حتى يغيروا ما بأنفسهم** ... " . الآية 11 من سورة الرعد. إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل.

تشكرات

قبل كل شيء ، أود أن أشكر الله على ماوهبه لي من عزيمة وإرادة، أشكره على كل شيء، الذي لو لاه لما أستطعت إتمام هذا العمل. كما أود أيضا أن أعرب عن امتناني لمؤطر الأطروحة الأستاذ الدكتور **هوام كمال** على مساعدته لي ودعمه ومشورته ، وكذلك مساعد المؤطر الأستاذ الدكتور **مازوزي السعيد** ، كما أود أن أشكر الأستاذ المحاضر **جبابلة عبد الحق** الذي تشرف برئاسة اللجنة ، وكذلك الأستاذ الدكتور **دبوش عمار** ، والأستاذ المحاضر **سعودي خالد** ، والأستاذ المحاضر **سالمي عبد الوهاب** ، لكونهم وافقوا على أن يكونوا جزءًا من هاته اللجنة وتخصيصهم وقت لهذا.

كما أتوجه بخالص شكري وتقديري إلى كل من ساعدني من قريب أو بعيد على إنجاز وإتمام هذا العمل ، لقوله صلى الله عليه وسلم : " من لم يشكر الناس لم يشكر الله " ، صدق رسول الله صلى الله عليه وسلم.

دليل المصطلحات

الرمز	مدلوله بالعربية	مدلوله بالفرنسية
$\Gamma(x)$	الدالة غاما	la fonction gamma
$\beta(x,y)$	الدالة بيطا	la fonction beta
I^{α}	مؤثر التكامل	Opérateur de l'intégrale
D^{α}	مؤثر الإشتقاق	Opérateur de dérivée
$\mathsf{D}^{\alpha}_{a\|t}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$	مشتق كسري عن اليسار	dérivée fractionnaire à gauche
$\mathsf{D}^{\alpha}_{t\|b}\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$	مشتق كسري عن اليمين	dérivée fractionnaire à droite
$\mathsf{D}^{\alpha}_{a\|t} = D^{\alpha}_{a\|t}$	بمفهوم غرينوالد ـ ليتنيكوف.	au sens de Grünwald-Letnikov
$\mathsf{D}^{\alpha}_{a\|t} = \mathbf{D}^{\alpha}_{a\|t}$	بمفهوم ريمان ـ ليوفيل.	au sens de Riemann-Liouville
$\mathsf{D}^{\alpha}_{a\|t} =^{c} \mathbf{D}^{\alpha}_{a\|t}$	بمفهوم كابيتو.	au sens de Caputo
$u \equiv 0$	u حل تافه	u solution trivial
$u \in L^{p}_{p\neq 2}([0,T])$	u حل ضعيف	u solution faible
$u \in L^{2}([0,T])$	u حل كلاسيكي	u solution classique
$u \in L^{p}_{loc}([0,T])$	u حل محلي	u solution local
$u \in L^{p}([0,+\infty])$	u حل شامل	u solution global

ملخص

تعتبر المعادلات التفاضلية الكسرية ذات الرتب العلياإحدى التطبيقات المهمة للحساب الكسري إذ أن هذا النوع من المعادلات هو الطريقة الأكثر واقعية لدراسة الظواهر التي تتعرض لعدد منته (أو غير منته) من التغيرات القصيرة المدى.

إن الهدف من هذه الأطروحة هو إثراء هذا المجال من الدراسة، ذلك من خلال تحديد الظروف و الشروط الكافية لعدم وجود حلول شاملة لمثل هذه المعادلات، ويتضمن هذا الهدف :

أولا، نقوم بتقديم بعض التعاريف و المصطلحات وذلك من أجل تزويد هذا الميدان بالتعاريف و المفاهيم باللغة العربية.كما سنقوم بتمديد دراستنا إلى فضاءات هازمبرج.

وأخيرا سنعالج بعض النتائج المتعلقة بنوع محدد من المعادلات التفاضلية الكسرية بالضبط المعادلات المكافئة للغاية الخطية و الغير خطية.

الكلمات الدالة المفتاحية:

المعادلات التفاضلية الكسرية، فضاء سبولاف، معادلة ذات رتبة عليا، شروط غير محلية.

Résumé

Les équations différentielles fractionnaires d´ ordre supérieur sont l´ une des applications les plus importantes du calcul fractionnel, car ce type d´ équation est la méthode la plus réaliste pour étudier les phénomènes exposés à un nombre fini (ou infini) des changements à court terme. L´ objectif de cette thèse est d´ enrichir ce domaine d´ étude en identifiant les conditions adéquates et les conditions permettant de non-existence de solutions globales pour de telles équations. Premièrement, nous fournissons des définitions et des termes afin de fournir des définitions et des concepts en arabe, puis nous étendrons notre étude aux espaces de Heisenberg. Enfin, nous aborderons certains des résultats pour un type spécifique d´ équations différentielles fractionnaires, exactement les équation ultra-parabolique non linéaire non locale, avec le choix d´ une fonction de test appropriée.

Les mots clés :

Equation différentielle fractionnaire, espace de sobolev, Equation d´ordre supérieur, Conditions non locales,

Abstract

Higher - order fractional differential equations are one of the most important applications of fractional computing because this type of equation is the most realistic method for studying phenomena exposed to a finite (or infinite) number of short - term changes. term. The objective of this thesis is to enrich this field of study by identifying the adequate conditions and the conditions allowing non - existence of global solutions for such equations. First, we provide definitions and terms to provide definitions and concepts in Arabic, and then extend our study to the Heisenberg spaces. Finally, we will discuss some of the results for a specific type of fractional differential equations, exactly the nonlinear nonlinear ultra-parabolic equation, with the choice of an appropriate test function.

Keywords :
Fractional differential equation, sobolev space, Higher order equation, Non-local conditions,

الفهرس

مقدمة

الفصل الأول

الإشتقاق و التكامل الكسريين

الفصل الرابع

مقدمة

الهدف الاساسي من هذه الأطروحة هو دراسة وجود وعدم وجود حلول لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية. وهذه الدراسة تجلت في أربع فصول.

في البداية في **الفصل الأول** ، وهو فصل تمهيدي نذكر فيه بعض الدوال الخاصة بالتحليل الكسري، كما نقدم بعض التعاريف الأكثر إنتشارا وإستعمالا كمفهوم الإشتقاق والتكامل الكسريين بمعنى غرينوالد - ليتنيكوف (Grünwald - Letnikov) و ريمان - ليوفيل (Riemann-Liouville) و كابتو (Caputo) . وآخرين.

في **الفصل الثاني** ، ندرس وجود ووحدانية الحلول لنظام معادلات تفاضلية ذوات رتب كسرية، غير خطية بالنسبة للزمن و المكان من النمط (FDS) التالية:

$$(\mathrm{FDS})\quad \begin{cases} {}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1}u+(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\,u=|v|^{p},\\ {}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2}v+(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\,v=|u|^{q},\end{cases}$$

حيث

$$(t,x)\in Q=\mathbb{R}^{+}\mathbf{x}\ \mathbb{R}^{N},$$

والشروط الإبتدائية هي:

$$v(.,0)=v_0\ ,\ \ u(.,0)=u_0,$$

توجد هناك أيضا دراسات تبين أن: إذا كان $pq>1$ ، فإن الحل الوحيد للنظام (FDS) المختصر في مسألة التفاعل - الإنتشار التالية:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=v^{p},\\ v_t-\Delta v=u^{q},\end{cases}$$

هو الحل التافه ، أي $u\equiv v\equiv 0$.

من ناحية أخرى (أنظر [30]) ، يدرس المؤلفون النظام (FDS) ويجدون حدا[1] في مما يؤدي إلى عدم وجود حل إيجابي شامل، و يحقق النظرية التالية:

[1]Point critique

نظرية 1.1.2 :

إذا كان $p>1$ و $q>1$ و فرضا

$$N \leq \max\left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{q}+\alpha_1-\left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 q p'}+\frac{\alpha_1}{\beta_1 q'}} \ , \ \frac{\frac{\alpha_1}{p}+\alpha_2-\left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p q'}+\frac{\alpha_2}{\beta_2 p'}} \right\}$$

عندئذ ، لا يقبل النظام (FDS) حلا إيجابيا ضعيفا شاملا غير تافه.
علاوة على ذلك ، تُظهر النظرية أيضًا الشروط اللازمة لوجود حل شامل ومحلي للمسألة التالية:

$$(STFE)\ \begin{cases} {}^c\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}u+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}u=h|u|^p, \\ u(.\ ,\ 0)=u_0\geq 0, \end{cases}$$

حيث $(t,x)\in\mathbb{R}^+\mathrm{x}\mathbb{R}^N$ وهذه الشروط تعتمد على سلوك البيانات الأولية u_0 والدالة h من أجل $|x|$ كبير بكفاية.
ثم نسرد بعض النتائج منها:

نظرية 1.2.2 :

ليكن (u,v) حل ضعيف **محليا** $(T<+\infty)$ للمسألة (FDS) ، عندئذ لدينا التقديرات التالية:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\inf u_0(x)\leq CT^{-\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}},$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\inf v_0(x)\leq C'T^{-\frac{\alpha_2+q\alpha_1}{pq-1}},$$

حيث C و C' ثوابت موجبة.
والنتيجة الرئيسية الثانية هي:

نظرية 5.2.2 :

نفرض أن المسألة (FDS) تقبل حلا ضعيفا موجبا شاملا وغير تافه،
عندئذ يوجد ثابتان H و K بحيث

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\leq H,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x)|x|^{\frac{\alpha_2+q\alpha_1}{pq-1}} \leq K,$$

في **الفصل الثالث** نهتم بدراسة عدم وجود حلول لمسائل من أنماط عديدة، بداية بعرض بعض نتائج المعادلة (77)

$$^c\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u) +^c \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}(|u|^m) = |u|^p,$$

وذلك من أجل كل (η, t_1, t_2) حيث:

$$(\eta, t_1, t_2) \in \mathbb{Q} = \mathbb{H}^N \text{x} \mathbb{R}^+ \text{x} \mathbb{R}^+, \ \ N \in \mathbb{N}$$

أين $\mathbb{H}$ ترمز إلى زمرة هازمبرج، و $\Delta_{\mathbb{H}}$ يرمز لمؤثر لابلاس على $\mathbb{H}$ ، و الشروط الإبتدائية

$$u(\eta, t_1, 0) = u_1(\eta, t_1) \ \ , u(\eta, 0, t_2) = u_2(\eta, t_2)$$

هنا $1 < p$ عدد حقيقي ، و $m \in \mathbb{N}$ و $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

والنتائج تتمثل في

النظرية 2.2.3 **:** ليكن

$$1 < m < p < p_c = m + \frac{m\alpha - (m-1)(\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\alpha}{\alpha_2})}{2N + 2 - \alpha + (\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\alpha}{\alpha_2})},$$

و

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi dw > 0, \quad \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T} \varphi dw > 0.$$

عندئذ المعادلة (77) ليس لديها حل شامل ضعيف غير تافه.

ثم نقوم بعرض نتائج أخرى لنظام معادلات (79) .

$$\begin{cases} ^c\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u) +^c \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}(|u|^m) = |v|^p \\ ^c\mathbf{D}^{\beta_1}_{0|t_1}(v) +^c \mathbf{D}^{\beta_2}_{0|t_2}(v) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}(|v|^n) = |u|^q \end{cases}$$

حيث:

$$(\eta, t_1, t_2) \in \mathbb{Q} = \mathbb{H}^N \text{x} \mathbb{R}^+ \text{x} \mathbb{R}^+, \ \ N \in \mathbb{N}$$

والشروط الإبتدائية

$$u(\eta, t_1, 0) = u_1(\eta, t_1) \ \ , u(\eta, 0, t_2) = u_2(\eta, t_2)$$

$$v(\eta, t_1, 0) = v_1(\eta, t_1) \ \ , v(\eta, 0, t_2) = v_2(\eta, t_2)$$

هنا p ، q أعداد حقيقية موجبة
و $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ ، $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ ، $0 < \alpha, \beta \leq 2$. والنتيجة تتمثل في النظرية التالية:

النظرية 2.3.3 **:**

ليكن $q > 1$ ، $p > 1$ ، $q > m$ ، $p > n$ ، ونفرض أن

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi^\mu dw > 0 \ , \ \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T} \varphi^\mu dw > 0,$$
$$\int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T} \varphi^\mu dw > 0 \ , \ \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T} \varphi^\mu dw > 0,$$

إذا كان

$$\max \{\sigma_1, \ldots, \sigma_9, \delta_1, \ldots, \delta_9\} \leq 0$$

عندئذ نظام المعادلات (79) لايقبل حلا ضعيفا محليا غير تافه.

في **الفصل الرابع** نعرض بعض النتائج لعدم وجود حلول شاملة لنظام معادلات (114) ،

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u - u_2) + \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u - u_1) + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(|u|) = k_1 |u|^{p_1} |v|^{q_1}, \ k_1 = const. \\ \mathbf{D}^{\beta_1}_{0|t_1}(v - v_2) + \mathbf{D}^{\beta_2}_{0|t_2}(v - v_1) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(|v|) = k_2 |u|^{p_2} |v|^{q_2}, \ k_2 = const. \end{cases}$$

وذلك من أجل كل

$$(t_1, t_2, x) \in Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$$

حيث الشروط الإبتدائية

$$u(t_1, 0, x) = u_1(t_1, x) \ , \ u(0, t_2, x) = u_2(t_2, x),$$
$$v(t_1, 0, x) = v_1(t_1, x) \ , \ v(0, t_2, x) = v_2(t_2, x),$$

هنا

$$.q_2 \geq 0 \ , \ q_1 > 1 \ , \ p_2 > 1 \ , \ p_1 \geq 0$$
$$.1 \leq \alpha, \beta \leq 2 \ , \ 0 < \beta_1, \beta_2 < 1 \ , \ 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$$

النتائج :

النظرية 1.2.4 **:**

ليكن $p_1 \geq 0$, $p_2 > 1$, $q_1 > 1$, $q_2 \geq 0$ ، **وليكن** $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ **حيث** أن $.u_0 \geq 0, v_0 \geq 0$

و نفرض أن:

$$\int_Q u_2\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dP > 0, \qquad \int_Q u_1\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dP > 0,$$
$$\int_Q v_2\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dP > 0, \qquad \int_Q v_1\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dP > 0,$$

حيث $dP = dt_1dt_2dx$ ودالة الاختبار φ موضحة لاحقا في البرهان.
عندئذ هناك حلول تفجير[2] لنظام المعادلات (114) كلما كان:
$\max\{\sigma_1, \cdots, \sigma_9, \delta_1, \ldots, \delta_9\} \leq 0,$

وقمنا أيضا بعرض نتائج لعدم وجود حلول شاملة للمعادلة (115) :

$$\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u-u_2) + \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u-u_1) + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(|u|^m) = h|u|^p,$$

حيث $h = t_1^s t_2^l |x|^r$ و $p > m > 1$ أعداد حقيقية.

التنائج تتمثل في:
النظرية 2.2.4 :
نفرض أن

$$\int_Q u_2\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dP > 0 \ , \ \int_Q u_1\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dP > 0,$$

إذا كان:

$$1 < p < \min\left\{1 + \frac{s+l+r+\alpha}{2+N-\alpha_1} \ , \ 1 + \frac{s+l+r+\alpha_2}{2+N-\alpha_2} \ , \ m\left(1 + \frac{s+l+r+\alpha}{2+N-\alpha}\right)\right\},$$

فإن المعادلة (115) لاتقبل حلولا ضعيفة شاملة .
ثم إن النتائج المتجلية في نظام معادلات (116) الآتي:

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u-u_2) + \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u-u_1) + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(|u|^m) = k_1|v|^q, \\ \mathbf{D}^{\beta_1}_{0|t_1}(v-v_2) + \mathbf{D}^{\beta_2}_{0|t_2}(v-v_1) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(|v|^n) = k_2|u|^p, \end{cases}$$

حيث $k_1 = t_1^{s_1}t_2^{l_1}|x|^{r_1}$ و $k_2 = t_1^{s_2}t_2^{l_2}|x|^{r_2}$.
لاتختلف كثيرا عن النتائج المستوحاة من نظام معادلات (114) .
وتلخص هذه النتائج في النظرية التالية:

[2] blow-up

النظرية 3.2.4 :

ليكن $p>1\ ,\ q>1\ ,\ p>m\ ,\ q>n$ ثم نفرض أن

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}dP>0\ ,\ \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}dP>0,$$
$$\int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}dP>0\ ,\ \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}dP>0,$$

عندئذ هناك حلول إنفجار لنظام المعادلات (116) كلما كان:

$$\max\{\sigma_1,\cdots,\sigma_9,\delta_1,\ldots,\delta_9\}\leq 0.$$

وفي الختام قمنا بتوضيح بعض التطبيقات المادية والتفسيرات الهندسية لمفهوم الاشتقاق والتكامل الكسريين .

الفصل الأول

الإشتقاق والتكامل الكسريان

1.1. الدوال الخاصة :

نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأساسية للدوال الخاصة التي نعتمد عليها في هذه الأطروحة ،كما أنها تلعب دورا هاما في الحساب الكسري وهي :

1.1.1 دالة (غاما) :

تعرف دالة (غاما) على النحو التالي :

$$\Gamma(n) = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M x^{n-1}e^{-x}dx \quad n>0\ ,x\in\mathbb{R}$$

فمثلا لإيجاد $\Gamma(2)$

$$\Gamma(2) = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M x^{2-1}e^{-x}dx = 1$$

قواعد أساسية للدالة غاما :

1. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \qquad \forall n\neq 0$
2. إذا كان n عددا صحيحا $n\geq 0$ فإن: $\Gamma(n+1)=n!$
3. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

2.1.1 دالة (بيطا) :

تعرف الدالة (بيطا) كمايلي :

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx, \quad n>0\ m>0$$

علاقة دالة (بيطا) بدالة (غاما)

$$\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

2.1 الإشتقاق ذوي الرتب الكسرية

1.2.1 الإشتقاق الكسري لـ غرينوالد – ليتنكوف:

هنا، نصف طريقة لتوحيد المفهومين، واللذان يتم تقديمهما غالبا بشكل منفصل في التحليل الكلاسيكي وهما: مشتق من الرتبة n (عدد طبيعي) ، وتكامل مكرر n مرة.
هذه المفاهيم في التحليل الكسري قريبة من بعضها البعض من تلك التي نفترض عادة.

عموما المشتقات الكسرية لـ غرينوالد – ليتنكوف على الشكل التالي:

$$D^{\alpha}_{a|t}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{[\frac{b-a}{n}]} (-1)^i \left(\frac{\alpha!}{(\alpha-i)!i!}\right) f(t-ih), \tag{1}$$

مثلا إذا كانت المشتقات $f^{(k)}(t), k = 1, ..., m+1$ مستمرة في المجال المغلق $[a, t]$ و m عدد صحيح يحقق الشرط $m > \alpha - 1$ و أصغر قيمة له تحدد بالمتراجحة $m < \alpha < m+1$ فإن:

$$D^{\alpha}_{a|t}f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau)d\tau. \tag{2}$$

وللمزيد من التفاصيل أنظر [45] .

2.2.1 الإشتقاق الكسري لـ ريمان – ليوفيل:

الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان – ليوفيل على نوعين:

- الإشتقاق الكسري عن اليسار

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a|t}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau, \quad (\forall t > a) \tag{3}$$

- الإشتقاق الكسري عن اليمين

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{t|b}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau, \quad (\forall t < b) \tag{4}$$

$$n-1 \leq \alpha < n,$$

وللتوضيح أكثر راجع [45] صفحة 24 .

مثال: $f(t) = (t-a)^{\nu}$ ، حيث ν عدد حقيقي.

لدينا

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\nu}d\tau, \quad (\forall\ t>a)$$

نجري تبديل المتغير بوضع $x = \frac{\tau-a}{t-a}$ عندئذ:

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[(t-a)^{n-\alpha+\nu}\int_{0}^{1}(1-x)^{n-\alpha-1}x^{\nu}dx\right],$$

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[(t-a)^{n-\alpha+\nu}\beta(n-\alpha,\nu+1)\right],$$

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[(t-a)^{n-\alpha+\nu}\frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\nu+1)}\right],$$

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\left[\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\nu+1)}(t-a)^{n-\alpha+\nu}\right]$$

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n-\alpha+\nu+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(t-a)^{n-\alpha+\nu},$$

أين

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}(t-a)^{n-\alpha+\nu} = (n-\alpha+\nu)\cdots\cdots(n-\alpha+\nu-(n-1))(t-a)^{\nu-\alpha},$$

ومنه

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}(t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)(n-\alpha+\nu)\cdots\cdots(n-\alpha+\nu-(n-1))}{\Gamma(n-\alpha+\nu+1)}(t-a)^{\nu-\alpha},$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)(n-\alpha+\nu)\cdots\cdots(n-\alpha+\nu-(n-1))}{(n-\alpha+\nu)\cdots\cdots(n-\alpha+\nu-(n-1))(n-\alpha+\nu-n)!}(t-a)^{\nu-\alpha},$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}(t-a)^{\nu-\alpha}.$$

إذا $\alpha = 1$ عندئذ:

$$\mathbf{D}_{a|t}^{1}(t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)}(t-a)^{\nu-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^{\nu}.$$

وإذا كان $\nu = 0$ عندئذ:

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a|t} 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

ومنه

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a|t} C = \frac{C(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

حيث C عدد حقيقي ثابت.

3.2.1 الإشتقاق الكسري لـ كابتو:

ويعطى بالشكل

$$
\begin{aligned}
{}^{c}\mathbf{D}^{\alpha}_{a|t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \qquad (5)\\
&= I^{n-\alpha}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right),
\end{aligned}
$$

$$n-1 < \alpha < n$$

لعب الإشتقاق الكسري بمفهوم **كابتو** دورا هاما في تطوير نظرية الإشتقاقات والتكاملات الكسرية، ولتطبيقاتها في الرياضيات البحتة (حل المعادلات التفاضلية ذات رتب طبيعية ، تعريفات لأصناف جديدة من الدوال ، إيجاد مجاميع السلاسل ، . . . . . إلخ) .

ومع ذلك ، التكنولوجيا الحديثة في أمس الحاجة إلى بعض المراجعة للنهج الرياضي البحت ، مثلا إحدى المراجعات أدت في وقت ما إلى ظهور العديد من الدراسات خاصة في نظرية اللزوجة والميكانيكا الصلبة ، حيث تستخدم الإشتقاقات الكسرية لوصف جيد لخصائص المواد . وكذلك من أجل النمذجة الرياضية فإن هذه الأخيرة تستند إلى النماذج الريولوجية[3] التي تؤدي بشكل طبيعي إلى المعادلات التفاضلية ذات رتب كسرية ، وإلى لزوم صياغة الشروط الإبتدائية لهذه المعادلات .

كذلك المسائل التطبيقية بحاجة إلى تعاريف الإشتقاقات الكسرية التي تسمح بإستخدام الشروط الإبتدائية القابلة للتفسير الفيزيائي تحتوي على الدوال : $f(a)$ ، $f'(a)$ ، $f''(t)$ . . . . . . إلخ.

[3] علم الريولوجيا جزء من العلوم الفيزيائية

ولسوء الحظ ، نهج ريمان - ليوفيل يؤدي إلى شروط إبتدائية تحتوي على القيم الحدية للمشتقات الكسرية بمفهوم ريمان - ليوفيل عند الحد الأدنى $t = a$ ، على سبيل المثال:

$$\lim_{t\to a}\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha-1}f(t) = b_1,$$
$$\lim_{t\to a}\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha-2}f(t) = b_2,$$
$$\vdots$$
$$\lim_{t\to a}\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha-n}f(t) = b_n,$$

حيث $b_k, /k = 1, 2, ..., n$ ثوابت معطاة.

كذلك على الرغم من حقيقة أن المسائل المتعلقة بالقيم الأولية يمكن حلها رياضيا مع مثل هذه الشروط الإبتدائية (انظر ، على سبيل المثال ، الحلول الواردة في [42]) ، فإن حلولها غير مجدية عمليا ، لأنه لا يوجد تفسير مادي لهذا النوع من الشروط الإبتدائية.

لهذا أقترح **كابتو** حلاً معينًا لهذا الصراع القائم بين النظرية الرياضية الراسخة والاحتياجات العملية في ورقته [7] ، وبعد ذلك بعامين في كتابه [8] ، ومؤخراً (في فضاء باناخ) من قبل $\mathrm{El-Sayed}$ أنظر [43] و [44] .

4.2.1 خواص الإشتقاق الكسري:

• التطابق:

يتطابق الإشتقاق الكسري بمفهوم ريمان − ليوفيل من الرتبة α لدالة $f(x)$ مع الإشتقاق الكسري بمفهوم غرينوالد − ليتنكوف، إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة وقابلة للإشتقاق $m+1$ مرة. حيث $m \leq \alpha < m+1$.

• العلاقة بين الإشتقاق الكسري لـ ريمان − ليوفيل و كابتو:

ليكن $\alpha \geq 0$ و $n-1 < \alpha < n$ و $n \in \mathbb{N}^\star$ والمشتقات $\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}f(t)$ و ${}^{c}\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}f(t)$ موجودة إذن:

$$\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}f(t) = {}^{c}\,\mathbf{D}_{a|t}^{\alpha}f(t) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \qquad (6)$$

من هنا نستنتج أن إذا كانت $f^{(k)}(a) = 0$ من أجل $k = 0, 1, \cdots, n-1$ فإننا نجد

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{a|t}f(t) =^{c} \mathbf{D}^{\alpha}_{a|t}f(t).$$

إذا كانت f مستمرة فإن:

$$^{c}\mathbf{D}^{\alpha}_{a|t}\left(I^{\alpha}_{a|t}f(t)\right) = f(t),$$

و

$$I^{\alpha}_{a|t}\left(^{c}\mathbf{D}^{\alpha}_{a|t}f(t)\right) = f(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!},$$

• قاعدة ليبنيز للإشتقاق الكسري هي كما يلي:

إذا كانت $f(\tau)$ مستمرة في $[a,t]$ و $\varphi(\tau)$ تقبل $(n+1)$ مشتقات مستمرة في $[a,t]$ عندئذ المشتق الكسري للجداء $\varphi(t)f(t)$ يعطى بالشكل

$$D^{\alpha}_{a|t}\left(\varphi(t)f(t)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\varphi^{(k)}(t)D^{\alpha-k}_{a|t}f(t) - R^{\alpha}_{n}(t), \tag{7}$$

حيث ، $n \geq \alpha+1$ و

$$R^{p}_{n}(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{-p-1}f(\tau)\int_{\tau}^{t}\varphi^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^{n}d\xi d\tau.$$

• الإشتقاق الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل لتكامل يتعلق بوسيط:

القاعدة المعروفة جيدا لإشتقاق تكامل يتعلق بوسيط مع النهاية العلوية تتعلق بنفس الوسيط ،

$$\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}F(t,\tau)d\tau = \int_{0}^{t}\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}d\tau + F(t,t-0), \tag{8}$$

قاعدة الإشتقاق الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل لتكامل يتعلق بوسيط ، عندما النهاية العلوية تتعلق أيضا بهذا الوسيط هي :

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}\int_{0}^{t}K(t,\tau)d\tau = \int_{0}^{t}\mathbf{D}^{\alpha}_{\tau|t}K(t,\tau)d\tau + \lim_{\tau\to t-0}\mathbf{D}^{\alpha-1}_{\tau|t}K(t,\tau),$$

$$(0<\alpha<1)$$

في الواقع ، لدينا .

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t}\int_0^t K(t,\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}\int_0^{\eta} K(\eta,\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t d\tau \int_{\tau}^{t} \frac{K(\eta,\tau)d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^t \tilde{K}(t,\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\tilde{K}(t,\tau)d\tau + \lim_{\tau\to t-0}\tilde{K}(t,\tau)$$

$$= \int_0^t \mathbf{D}^{\alpha}_{\tau|t}K(t,\tau)d\tau + \lim_{\tau\to t-0}\mathbf{D}^{\alpha-1}_{\tau|t}K(t,\tau),$$

حيث

$$\tilde{K}(t,\xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\xi}^{t}\frac{K(\eta,\xi)d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}.$$

3.1 التكامل ذوي الرتب الكسرية

1.3.1 التكامل ذوي الرتب الكسرية لـ ريمان – ليوفيل:

نعرف التكامل الكسري لـريمان – ليوفيل كمايلي:

$$I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \ \ \alpha>0, t>0 \tag{9}$$

$$I^{\alpha}f(t) = f(t),$$

خاصية 1.3.1 :

من خواص المؤثر I^{α} مايلي

$$I^{\alpha}t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}t^{\alpha+\mu},$$

توطئة 1.3.1 :

إذا كان $m-1<\alpha\leq m$ ، $m\in\mathbb{N}$ إذن

$$\mathbf{D}^{\alpha} I^{\alpha} f(t) = f(t),$$

و

$$I^{\alpha}\mathbf{D}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} f^{(j)}(0^{+})\frac{t^{j}}{j!}, \ \ t > 0$$

ملاحظة 1.3.1 :

التكامل الكسري لـ ريمان – ليوفيل، يمكن كتابته على شكل جداء التنوسوري (جداء اللف) لـ $f(t)$ و $g_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ كمايلي:

$$I^{\alpha}_{a|t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = g_{\alpha}(t) \star f(t), \tag{10}$$

2.3.1 التكامل ذوي الرتب الكسرية لـ ريمان – ليوفيل عن اليسار:

$$\forall t > a, \quad \mathbf{D}^{-\alpha}_{a|t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{11}$$

3.3.1 التكامل ذوي الرتب الكسرية لـ ريمان – ليوفيل غن اليمين:

$$\forall t < b, \quad \mathbf{D}^{-\alpha}_{t|b} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{b} (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{12}$$

4.3.1 تطبيقات التكامل ذوي الرتب الكسرية لـ ريمان – ليوفيل :

- $f(t) = (t-a)^{\nu}$ ، **حيث** $\nu > -1$

$$I^{\alpha}_{a}(t-a)^{\nu} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^{\nu} d\tau$$

بتغيير المتغير : $\tau = a + (t-a)s$ نجد:

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a}(t-a)^{\nu} &= \frac{(t-a)^{\alpha+\nu}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\nu} ds \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\nu}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \nu+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha+\nu}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)}, \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)}(t-a)^{\alpha+\nu}$$

- $f(t) = C$ ، حيث C عدد ثابت

$$\mathbf{D}_{a|t}^{-\alpha} C = I_a^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^{\alpha}.$$

4.1 تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري

1.4.1 أدوات أساسية لتحويل لابلاس:

لتكن $F(s)$ دالة للمتغير s حيث $s \in \mathbb{C}$ ، المعرفة كمايلي:

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt, \tag{13}$$

تسمى تحويل لابلاس للدالة $f(t)$.

ـ لوجود التكامل في الصيغة (13) ، يجب أن تكون الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية α ، مما يعني وجود ثابتين موجبين M و T بحيث:

$$e^{-\alpha t}|f(t)| \leq M \ , \ \forall t > T.$$

ـ يمكن إستخلاص الدالة $f(t)$ من تحويل لابلاس $F(s)$ بإستخدام تحويل لابلاس العكسي

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \ , \ c = Re(s) > c_0, \tag{14}$$

ـ تحويل لابلاس لجداء اللف

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \tag{15}$$

حيث

$$f(t) = 0 \ , \ g(t) = 0 \ , \ \forall t < 0$$

هو

$$L\{f(t) \star g(t), s\} = F(s) G(s), \tag{16}$$

أين

$$L\{f(t), s\} = F(s) \ , \ L\{g(t), s\} = G(s)$$

ـ الخاصية المفيدة الأخرى التي ستكون مطلوبة هي صيغة تحويل لابلاس للمشتق الكسري ذو رتبة عدد صحيح n للدالة $f(t)$:

$$L\left\{f^{(n)}(t);s\right\}=s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)$$
$$=s^{n}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{k}f^{(n-k-1)}(0). \qquad (17)$$

في ما سيأتي حول تحويل لابلاس للمشتقات الكسرية ، سنفترض أن الحد الأدنى هو $a=0$.

2.4.1 تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل :

تحت إفتراض وجود $F(s)$ و $G(s)$.

سوف نستخدم الخاصية (16) لحساب تحويل لابلاس للتكامل الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل.

سنبدأ بتحويل لابلاس للتكامل الكسري من الرتبة $p>0$ لريمان ـ ليوفيل و غرينوالد ـ ليتنيكوف المعرف في الصيغة (11) مع $a=0$ ، والتي يمكن كتابتها على أنها إلتفاف بين الدالتين $f(t)$ و $g(t)=t^{p-1}$:

$$\mathbf{D}_{0|t}^{-p}f(t)=D_{0|t}^{-p}f(t)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{p-1}f(\tau)d\tau=t^{p-1}\star f(t). \qquad (18)$$

تحويل لابلاس للدالة t^{p-1} هو :

$$G(s)=L\left\{t^{p-1};s\right\}=\Gamma(p)s^{-p}. \qquad (19)$$

أنظر [17] .

وهكذا ، بإستخدام تحويل لابلاس لجداء اللف (16) ، نحصل على تحويل لابلاس للتكامل الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل وغرينوالد ـ ليتنيكوف:

$$L\left\{\mathbf{D}_{0|t}^{-p}f(t);s\right\}=L\left\{D_{0|t}^{-p}f(t);s\right\}=s^{-p}F(s). \qquad (20)$$

الآن نهتم بحساب تحويل لابلاس للمشتق الكسري بمفهوم ريمان ـ ليوفيل ، لأجل ذلك نكتبها بالشكل:

$$\mathbf{D}_{0|t}^{p}f(t)=g^{(n)}(t). \qquad (21)$$

$$g(t) = \mathbf{D}_{0|t}^{-(n-p)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau, \tag{22}$$
$$(n-1 \leq p < n).$$

بإستخدام الصيغة (17) لتحويل لابلاس لمشتق ذو رتبة عدد صحيح ينتج:

$$L\left\{\mathbf{D}_{0|t}^{p} f(t); s\right\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \tag{23}$$

يتم تحديد تحويل لابلاس للدالة $g(t)$ بواسطة (20) :

$$G(s) = s^{-(n-p)} F(s), \tag{24}$$

وبإختصار من المشتق الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل، يأتي:

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} \mathbf{D}_{0|t}^{-(n-p)} f(t) = \mathbf{D}_{0|t}^{p-k-1} f(t), \tag{25}$$

في الأخير الصيغة النهائية لتحويل لابلاس للمشتق الكسري بمفهوم ريمان ـ ليوفيل من الرتبة $p > 0$:

$$L\left\{\mathbf{D}_{0|t}^{p} f(t); s\right\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\mathbf{D}_{0|t}^{p-k-1} f(t)\right]_{t=0}. \tag{26}$$
$$(n-1 \leq p < n).$$

3.4.1 تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري لـ كابتو:

من أجل إنشاء صيغة تحويل لابلاس للمشتق الكسري بمفهوم كابتو، نكتب مشتق كابتو الذي في الصيغة (3) بالشكل:

$${}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{p} f(t) = \mathbf{D}_{0|t}^{-(n-p)} g(t) \quad , \quad g(t) = f^{(n)}(t), \tag{27}$$

$$(n-1 < p \leq n), \tag{28}$$

بإستخدام الصيغة (20) في تحويل لابلاس للتكامل الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل ، سنجد:

$$L\left\{{}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{p} f(t), s\right\} = s^{-(n-p)} G(s), \tag{29}$$

حيث ، بفضل الصيغة (17) ،

$$G(s)=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)=s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kf^{(n-k-1)}(0), \qquad (30)$$

ندمج الصيغة (30) في (29) ، نصل إلى صيغة تحويل لابلاس للمشتق الكسري بمفهوم كابتو:

$$L\left\{{}^c\mathbf{D}_{0|t}^pf(t),s\right\}=s^pF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{p-k-1}f^{(k)}(0),\ \ (n-1<p\leq n) \qquad (31)$$

4.4.1 تحويل لابلاس للإشتقاق الكسري لـ غرينوالد ـ ليتنيكوف:

في البداية ، نهتم بالحالة $0\leq p<1$ أين المشتق الكسري لـ غرينوالد ـ ليتنيكوف أنظر (5) مع الحد الأدنى $a=0$ للدالة $f(t)$ ، التي هي محدودة في $t=0$ ، يمكن كتابته على النحو التالي:

$$D_{0|t}^pf(t)=\frac{f(0)t^{-p}}{\Gamma(1-p)}+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t(t-\tau)^{-p}f^{(1)}(\tau)d\tau, \qquad (32)$$

بإستخدام تحويل لابلاس للدالة متعددة الحدود (19) و تحويل لابلاس لجداء اللف (16) وتحويل لابلاس للمشتق ذوي الرتبة عدد صحيح (17) نحصل على:

$$L\left\{D_{0|t}^pf(t);s\right\}=\frac{f(0)}{s^{1-p}}+\frac{1}{s^{1-p}}\left(sF(s)-f(0)\right)=s^pF(s), \qquad (33)$$

ويرد مثال على تطبيق الصيغة (33) في [24] .

5.1 تحويل فوريي للإشتقاق الكسري

1.5.1 أدوات أساسية لتحويل فوريي:

إن تحويل فوريي لدالة مستمرة $h(t)$ قابلة للمكاملة بالإطلاق في $(-\infty,+\infty)$ ومعرفة بالشكل :

$$F_e\left\{h(t);w\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwt}h(t)dt, \tag{34}$$

ويمكن إعادة تشكيل $h(t)$ من تحويل فوريي $H_e(t)$ بإستخدام تحويل فوريي العكسي:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H_e(w)e^{-iwt}dw. \tag{35}$$

- تحويل فوريي لجداء اللف

$$h(t)\star g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{36}$$

لدالتين $h(t)$ و $g(t)$ معرفتان على $(-\infty,+\infty)$ هو:

$$F_e\left\{h(t)\star g(t);w\right\}=H_e(w)G_e(w) \tag{37}$$

- قد نستفيد من الخاصية (37) تحت فرضية H_e و G_e موجودان، في حساب تحويل فوريي للتكامل الكسري لـ ريمان - ليوفيل وتحويل فوريي للمشتقات الكسرية.

- هناك خاصية أخرى لاتقل أهمية عن الأولى والتي تستخدم عادة في حل المعادلات التطبيقية،وهي تحويل فوريي لمشتقات $h(t)$. لمعرفة أنه إذا كانت

$$h(t),h'(t),\ldots\ldots,h^{(n-1)}(t)$$

تؤول إلى الصفر عندما $t\to\pm\infty$ ، عندئذ تحويل فوريي للمشتق من الرتبة n للدالة $h(t)$ هو:

$$F_e\left\{h^{(n)}(t),w\right\}=(-iw)^nH_e(w), \tag{38}$$

- يعد تحويل فوريي أداة قوية جدًا للعديد من ميادين تحليل الأنظمة الديناميكية الخطية.

2.5.1 تحويل فوريي للتكامل الكسري:

في البداية، نذهب لحساب تحويل فوريي للتكامل الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل مع الحد الأدنى $a = -\infty$ أي أن:

$$\mathbf{D}_{-\infty|t}^{-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau, \tag{39}$$

حيث نفرض أن $0 < \alpha < 1$.

بداية بحساب تحويل فوريي للدالة

$$h(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

أنظر الصيغة (19) ، والذي يمكن كتابته بالشكل

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-st} dt = s^{-\alpha}. \tag{40}$$

نأخذ $s = -iw$ حيث $w \in \mathbb{R}$. يترتب عن مسألة ديركلي ([19], P.564) أنه في مثل هذه الحالة التكامل في الصيغة (39) يتقارب إذا $0 < \alpha < 1$. وهكذا نحصل على تحويل فوريي للدالة

$$h_{+}(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

من الشكل

$$F_e \left\{ h_{+}(t); w \right\} = (-iw)^{-\alpha}. \tag{41}$$

الآن يمكننا إيجاد تحويل فوريي للتكامل الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل (39) . وذلك لإمكانية كتابته على شكل جداء اللف (36) للدالتين $h_{+}(t)$ و $g(t)$:

$$\mathbf{D}_{-\infty|t}^{-\alpha} g(t) = h_{+}(t) \star g(t). \tag{42}$$

بإستخدام الصيغة (37) نحصل على:

$$F_e \left\{ \mathbf{D}_{-\infty|t}^{-\alpha} g(t); w \right\} = (iw)^{-\alpha} G(w), \tag{43}$$

حيث $G(w)$ هو تحويل فوريي للدالة $g(t)$.

ـ تعطي الصيغة (43) أيضا تحويل فوريي للتكامل الكسري لـ غرينوالد ـ ليتنيكوف $D_{-\infty|t}^{-\alpha}g(t)$ والتكامل الكسري لكابتو $^{c}\mathbf{D}_{-\infty|t}^{-\alpha}$. لأن في هذه الحالة تتطابق مع التكامل الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل.

3.5.1 تحويل فوريي للإشتقاق الكسري:

لنحسب الآن تحويل فوريي للمشتقات الكسرية. لنعتبر الحد الأدنى $a=-\infty$ ، والمطالبة بدالة $g(t)$ ذات سلوك معقول عندما $t\to-\infty$ وكذلك مشتقاته من أجل $t\to-\infty$.
يمكن إجراء هنا تكامل بالتجزئة وكتابة التعاريف لـ ريمان ـ ليوفيل و غرينوالد ـ ليتنيكوف و كابتو بنفس الشكل:

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{D}^{\alpha}_{-\infty|t}g(t)\\ D^{\alpha}_{-\infty|t}g(t)\\ {}^{c}\mathbf{D}^{-\alpha}_{-\infty|t}g(t)\end{array}\right\}=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{g^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}=\mathbf{D}^{\alpha-n}_{-\infty|t}g^{(n)}(t). \qquad (44)$$

$$(n-1<\alpha<n).$$

تحويل فوريي في (44) مع إستخدام تحويل فوريي للتكامل الكسري لـ ريمان ـ ليوفيل أنظر (43) وتحويل فوريي للمشتق ذي الرتبة عدد صحيح (38) . عندها تعطي الصيغة التالية (45) تحويل فوريي للمشتق الكسري لـ غرينوالد ـ ليتنيكوف و لـ ريمان ـ ليوفيل و لكابتو ، مع الحد الأدنى $a=-\infty$:

$$\begin{aligned}F_e\left\{\mathsf{D}^{\alpha}g(t);w\right\}&=(-iw)^{\alpha-n}F_e\left\{g^{(n)}(t);w\right\}\\&=(-iw)^{\alpha-n}(-iw)^{n}G(w).\\&=(-iw)^{\alpha}G(w),\end{aligned} \qquad (45)$$

حيث الرمز D^{α} يرمز لـ:

$D^{\alpha}_{-\infty|t}$ لـ غرينوالد ـ لتنيكوف أو $\mathbf{D}^{\alpha}_{-\infty|t}$ لـ ريمان ـ ليوفيل أو ${}^{c}\mathbf{D}^{\alpha}_{-\infty|t}$ ، لـ كابتو.

الفصل الثاني

نتائج عدم وجود حلول لنظام (FDS)

~ ملخص ~

في هذا الفصل ، ننشأ الشروط اللازمة لوجود حلول محلية وشاملة لنظام معادلات التفاعل ـ الإنتشار من النوع (FDS) مع مشتقات كسرية بالنسبة للزمن والمكان. كما في حالة معادلة واحدة من النوع (STFE) التي تمت دراستها في [30] ، تبين أن هذه الشروط تعتمد على سلوك البيانات الأولية.

1.2 مدخل

يخصص هذا الفصل لدراسة نظام[4] معادلات تفاضلية ذوات رتب كسرية، غير خطية بالنسبة للزمن و المكان من النمط (FDS) التالي:

$$
(\mathrm{FDS}) \quad \begin{cases} {}^{c}\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\, u = |v|^p, \\ {}^{c}\mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\, v = |u|^q, \end{cases} \tag{46}
$$

حيث

$$
(t,x) \in Q = \mathbb{R}^{+}\mathbf{x}\ \mathbb{R}^{N},
$$

والشروط الإبتدائية هي:

$$
v(.,0) = v_0 \ ,\ u(.,0) = u_0, \tag{47}
$$

أين الدوال u_0 و v_0 مستمرة و موجبة فرضا.

و كل من p ، q ، أعداد حقيقية موجبة و N عدد طبيعي غير معدوم.

من أجل $\alpha_1 \in (0,1)$ (على التوالي $\alpha_2 \in (0,1)$) ،

${}^{c}\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t}$ (على التوالي ${}^{c}\mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t}$) يرمز إلى المشتق الكسري من الرتبة α_1 (على التوالي α_2) بمفهوم كابتو (أنظر التعريف 1 أدناه وكذلك أنظر [7]) .

من ناحية أخرى، من أجل $\beta_1 \in [1,2]$ (على التوالي $\beta_2 \in [1,2]$) ،

[4] نظام معادلات معناه جملة معادلات

" $(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}$ " (على التوالي " $(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}$ ") ، مؤثر لابلاس الكسري بالنسبة إلى x من الرتبة $\frac{\beta_1}{2}$ (على التوالي $\frac{\beta_2}{2}$) ، كل منهما معرف كمايلي:

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} v(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\beta_1}\mathcal{F}(v)(\xi)\right)(x),$$

حيث $\mathcal{F}$ يرمز إلى تحويل فوريي و $\mathcal{F}^{-1}$ إلى عكسه.

إن النظام (FDS) قد تم دراسته في الحالة $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ و $\beta_1 = \beta_2 = 1$ من قبل العديد من المؤلفين وفي سياقات مختلفة، أنظر [18], [20], [22] مع $(\nu = \mu = 1)$. وعلاوة على ذلك ، وفيما يتعلق بنتيجة عدم الوجود وإستنادا إلى حجج وبراهين [21] ، أثبت إسكوبيدو وهيريرو في [18] أن:

إذا كان $pq > 1$ ، فإن الحل الوحيد للنظام (FDS) المختصر في مسألة التفاعل ـ الإنتشار التالية:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^p, \\ v_t - \Delta v = u^q, \end{cases} \tag{48}$$

هو الحل التافه ، أي $u \equiv v \equiv 0$. من ناحية أخرى ، (أنظر [30]) ، يدرس المؤلفون النظام (FDS) ويجدون حدا في مما يؤدي إلى عدم وجود حل إيجابي شامل. بتعبير أدق ، يغطي الحالة المعالجة في [18] (عندما تكون $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$) ، و يحقق النظرية التالية:

1.1.2 نظرية:

إذا كان $p > 1$ و $q > 1$ و فرضا

$$N \leq \max\left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{q} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 q p'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 q'}} \;,\; \frac{\frac{\alpha_1}{p} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p q'} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 p'}} \right\} \tag{49}$$

عندئذ ، لا يقبل النظام (FDS) حلا إيجابيا ضعيفا شاملا غير تافه.

علاوة على ذلك ، تُظهر النظرية أيضًا الشروط اللازمة لوجود حل شامل ومحلي للمسألة التالية:

$$(STFE)\ \begin{cases} {}^{c}\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t} u + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u = h|u|^p, \\ u(.\ ,\ 0) = u_0 \geq 0, \end{cases} \tag{50}$$

حيث $(t,x)\in\mathbb{R}^{+}\mathbf{x}\mathbb{R}^{N}$ وهذه الشروط تعتمد على سلوك البيانات الأولية u_0 والدالة h من أجل $|x|$ كبير بكفاية.
هناك نتائج مماثلة في [27] و [2] .
يمكن إعتبار نتائجنا مشابهة لتلك التي تم الحصول عليها في [30] ، حيث يمكن إعتبار النظام (FDS) كمعادلتين من النوع (STFE) . بالإضافة إلى ذلك ، يمكننا توسيع نتائجنا إلى أنظمة أكثر عمومية

$$\begin{cases} {}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1}u+(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\left(|u|^{m-1}u\right)=h|v|^{p}+g|u|^{r}, \\ {}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2}v+(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\left(|v|^{m-1}v\right)=k|u|^{q}+l|v|^{s}, \end{cases}$$

حيث $(t,x)\in\mathbb{R}^{+}\mathbf{x}\mathbb{R}^{N}$

في ظل فرضيات على h و g و k و l وبالطبع ، عند إتخاذ مثل هذه الأشكال من شروط التفاعل ، يجب أن تعتمد جميع النتائج المعروضة هنا على الدوال h و g و k و l .
لنتذكر هنا بعض التعاريف وخصائص المشتقات الكسرية لكابتو وريمان ـ ليوفيل.

2.1.2 تعريف:

يتم تعريف المشتق من اليسار على الترتيب المشتق من اليمين بمفهوم كابتو لـ $\psi'\in L^{1}(0,T)$ من خلال :

$$\left({}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}\psi\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\psi'(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau, \tag{51}$$

$$\left({}^{c}\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha}\psi\right)(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T\frac{\psi'(t)}{(\tau-t)^{\alpha}}d\tau, \tag{52}$$

بعد إستبدال ψ' بـ ψ والحفاظ على مؤثر الإشتقاق قبل التكامل في الصيغ (3) و (26) ، نحصل على تعريفات المشتق من اليسار والمشتق من اليمين بمفهوم ريمان ـ ليوفيل نرمز لهم على التوالي بالرمز $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}$ و $\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha}$ ، أنظر [35] للمزيد من التفاصيل.

نذكر أيضًا أن المشتق بمفهوم كابتو مرتبط بالمشتق بمفهوم ريمان ـ ليوفيل بالصيغة التالية:

$${}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}\psi(t)=\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}\left\{\psi(t)-\psi(0)\right\}.$$

وأخيرًا ، مع الأخذ بعين الإعتبار التكامل بالتجزئة التالي:

$$\int_0^T \left(\mathbf{D}^{\alpha}_{0|t} f\right)(t) g(t) dt = \int_0^T f(t) \left(\mathbf{D}^{\alpha}_{t|T} g\right)(t) dt,$$

نقبل أن

3.1.2 تعريف :

من أجل $0 < T \leq \infty$ ، نقول عن (u,v) أنه حل ضعيف محليا للنظام (FDS) معرف على Q_T حيث $Q_T = \mathbb{R}^N \mathrm{x}(0,T)$.
إذا:

$$u \in C\left([0,T]\ ,\ L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)\right) \cap L^q\left(Q_T, dtdx\right),$$
$$v \in C\left([0,T]\ ,\ L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)\right) \cap L^p\left(Q_T, dtdx\right),$$

ويستوفي مايلي:

$$\int_{Q_T} |v|^p \varphi + \int_{Q_T} u_0 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t|T} \varphi = \int_{Q_T} u \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t|T} \varphi + \int_{Q_T} u \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi,$$
$$\int_{Q_T} |u|^q \psi + \int_{Q_T} v_0 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t|T} \psi = \int_{Q_T} v \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t|T} \psi + \int_{Q_T} v \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \psi, \qquad (53)$$

من أجل أي دالة إختبار

$$\varphi, \psi \in C^{1,2}_{t,x}\left(Q_T\right)$$

تحقق $\varphi(.,T) = \psi(.,T) = 0$ عندها إذا كان $T = +\infty$ نقول أن (u,v) حل ضعيف شامل.[5]

2.2 بعض النتائج :

1.2.2 نظرية:

ليكن (u,v) حل ضعيف محليا $(T < +\infty)$ للمسألة (FDS) ، عندئذ لدينا التقديرات التالية:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \inf u_0(x) \leq C T^{-\frac{\alpha_1 + p\alpha_2}{pq-1}}, \qquad (54)$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \inf v_0(x) \leq C' T^{-\frac{\alpha_2 + q\alpha_1}{pq-1}}, \qquad (55)$$

[5] $\varphi \in C^{1,2}_{t,x}\left(Q_T\right) \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \in C\left(Q_T\right)$

حيث C و C' ثوابت موجبة.

برهان: من الصيغة (53) لدينا:

$$\int_{Q_T} u_0 \mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_1}\varphi \leq \int_{Q_T} u\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_1}\varphi + \int_{Q_T} u\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi,$$

$$\int_{Q_T} v_0 \mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_2}\psi \leq \int_{Q_T} v\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_2}\psi + \int_{Q_T} v\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}}\psi, \tag{56}$$

من أجل كل دالة إختبار φ و ψ حيث: $\psi, \varphi \in C_{t,x}^{1,2}\left(Q_T\right)$
تحقق $\varphi\left(T,.\right) = \psi\left(T,.\right) = 0$.

بإستخدام متراجحة هولدر، نحصل على

$$\int_{Q_T} u|\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_1}\varphi| \leq \left(\int_{Q_T} |u|^q\psi\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_{Q_T} |\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_1}\varphi|^{q'}\psi^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

و

$$\int_{Q_T} u|(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi| \leq \left(\int_{Q_T} |u|^q\psi\right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_{Q_T} |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi|^{q'}\psi^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

وهكذا

$$\int_{Q_T} u_0\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_1}\varphi \leq \left(\int_{Q_T} |u|^q\psi\right)^{\frac{1}{q}}.\mathbb{A}$$

أين

$$\mathbb{A} = \left(\int_{Q_T} |\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_1}\varphi|^{q'}\psi^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\int_{Q_T} |(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi|^{q'}\psi^{-\frac{q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{57}$$

على النحو المذكور أعلاه ، و بإستخدام متراجحة هولدر للمرة الثانية يكون لدينا

$$\int_{Q_T} v_0\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_2}\psi \leq \left(\int_{Q_T} |v|^p\varphi\right)^{\frac{1}{p}}.\mathbb{B}$$

أين

$$\mathbb{B} = \left(\int_{Q_T} |\mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_2}\psi|^{p'}\varphi^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{Q_T} |(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\psi|^{p'}\varphi^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{58}$$

من ناحية أخرى ، إذا إحتفظنا بالشروط الأولى في الجانب الأيسر من (53) وبإستخدام حقيقة أن u_0 و v_0 دوال موجبة، فإننا نحصل على

$$\int_{Q_T} |v|^p \varphi \leq \left(\int_{Q_T} |u|^q \psi \right)^{\frac{1}{q}} .\mathbb{A}, \tag{59}$$

$$\int_{Q_T} |u|^q \psi \leq \left(\int_{Q_T} |v|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} .\mathbb{B}, \tag{60}$$

بتطبيق (60) في (59) نحصل على

$$\left(\int_{Q_T} |v|^p \varphi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathbb{B}^{\frac{1}{q}}.\mathbb{A}, \tag{61}$$

وبتطبيق (59) في (60) نحصل على

$$\left(\int_{Q_T} |u|^q \psi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathbb{B}.\mathbb{A}^{\frac{1}{p}}, \tag{62}$$

و من الصيغة (53) يتضح أن الطريقة التي أستعملت في تقدير $\int_{Q_T} |u|^q \psi$ هي نفسها التي نقدر بها $\int_{Q_T} v_0 \mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_2} \psi,$ أي أن من الصيغة (62) نجد

$$\left(\int_{Q_T} v_0 \mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_2} \psi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathbb{B}.\mathbb{A}^{\frac{1}{p}}, \tag{63}$$

وكذلك من الصيغة (61) يكون لدينا

$$\left(\int_{Q_T} u_0 \mathbf{D}_{t|T}^{\alpha_1} \varphi \right)^{1-\frac{1}{pq}} \leq \mathbb{B}^{\frac{1}{q}}.\mathbb{A}, \tag{64}$$

الآن ، نأخذ دوال الإختبار في (57) و (58) من النموذج

$$\varphi(t,x) = \psi(t,x) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \begin{cases} \left(1-\frac{t}{T}\right)^l, & 0 < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases} \tag{65}$$

حيث $\Phi \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ دوال موجبة، ذات حامل في الإكليل $\{R < |x| < 2R\}$ ، وتحقق

$$\begin{cases} \left((-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \Phi\right)_+ \leq k\Phi, & k > 0 \quad (canst), \\ \left((-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \Phi\right)_+ \leq h\Phi, & h > 0 \quad (canst), \end{cases} \tag{66}$$

والأس l ، الذي تم إدخاله في (65) ،
هو عدد حقيقي موجب كيفي إذا كان:

$$\min\left(p - \frac{1}{1-\alpha_2} \quad , \quad q - \frac{1}{1-\alpha_1}\right) > 0,$$

و يحقق $l > \max(\alpha_1 q' - 1 \ , \ \alpha_2 p' - 1)$ ، إذا كان:

$$\min\left(p - \frac{1}{1-\alpha_2} \quad , \quad q - \frac{1}{1-\alpha_1}\right) < 0,$$

بحيث $p + p' = pp'$. و $q + q' = qq'$.

بالإضافة إلى ذلك ، نلاحظ أن

$$\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t|T}\varphi(t,x) = \mu T^{-\alpha_1}\Phi\left(\frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{l-\alpha_1}, \tag{67}$$

حيث

$$\mu = \frac{\Gamma(1+l)}{(1+l-\alpha_1)}.$$

بطريقة مشابهة

$$\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t|T}\psi(t,x) = \lambda T^{-\alpha_2}\Phi\left(\frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{l-\alpha_2}, \tag{68}$$

حيث

$$\lambda = \frac{\Gamma(1+l)}{(1+l-\alpha_2)}.$$

لنأخذ بعين الإعتبار تبديل المتغير التالي: $x = Ry$ و $t = T\tau$ ، ومنه يأتي

$$\int_{Q_T} u_0 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t|T}\varphi dt dx = \frac{\mu T^{1-\alpha_1} R^N}{l - \alpha_1 + 1}\int_{Q_T} u_0(Ry)\Phi(y)dy, \tag{69}$$

مع الأخذ بعين الإعتبار (57) ، نحصل على

$$\mathbb{A} \leq \left(\frac{\mu^{q'} T^{1-\alpha_1 q'} R^N}{l - \alpha_1 q' + 1}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{q'}} + \left(\frac{T R^{-\beta_1 q' + N} k^{q'}}{l+1}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{q'}},$$

أي أن

$$\mathbb{A} \leq R^{\frac{N}{q'}}\left\{\frac{\mu T^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}}{(l-\alpha_1 q'+1)^{\frac{1}{q'}}} + \frac{T^{\frac{1}{q'}} R^{-\beta_1} k}{(l+1)^{\frac{1}{q'}}}\right\}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{70}$$

وبالمثل ، من الصيغة (58) ، نحصل على

$$\mathbb{B} \leq R^{\frac{N}{p'}}\left\{\frac{\lambda T^{\frac{1}{p'}-\alpha_2}}{(l-\alpha_2 p'+1)^{\frac{1}{p'}}} + \frac{T^{\frac{1}{p'}} R^{-\lambda} h}{(l+1)^{\frac{1}{p'}}}\right\}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}, \tag{71}$$

وهكذا ، (72) ، (73) و (74) مع المتراجحة (64) ينتج

$$T^{(1-\alpha_1)(1-\frac{1}{pq})}\left\{\int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry)\Phi(y)dy\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$
$$\leq \left(C_1T^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}+C_2T^{\frac{1}{q'}}R^{-\beta_1}\right)\times\left(C_3T^{\frac{1}{p'}-\alpha_2}+C_4T^{\frac{1}{p'}}R^{-\beta_2}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)dy\right)^{1-\frac{1}{pq}}, \tag{72}$$

حيث C_1 ، C_2 ، C_3 و C_4 ثوابت موجبة مستقلة عن R و T . لذلك،

$$T^{(1-\alpha_1)(1-\frac{1}{pq})}\left\{\inf_{|y|>1} u_0(Ry)\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$
$$\leqslant \left(C_1T^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}+C_2T^{\frac{1}{q'}}R^{-\beta_1}\right)\times\left(C_3T^{\frac{1}{p'}-\alpha_2}+C_4T^{\frac{1}{p'}}R^{-\beta_2}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{73}$$

أخيرا ، من خلال جعل $R\to+\infty$ في (76) نستنتج أن:

$$T^{(1-\alpha_1)(1-\frac{1}{pq})}\left\{\lim_{|x|\to+\infty}\inf u_0(x)\right\}^{1-\frac{1}{pq}}\leqslant CT^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}T^{\frac{1}{p'q}-\frac{\alpha_2}{q}}.$$

وبالتالي تم إثبات التقدير (54) .

بإستخدام التقدير (63) وتطبيق طريقة تبديل المتغير $t=T\tau$ و $x=Ry$ في العبارات $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ نحصل على التقدير (55) . □

فيما يتعلق بنتائج وجود حل محلي وشامل ، نضع الشروط اللازمة التالية:

2.2.2 نتيجة:

إذا فرضنا أن النظام (FDS) يقبل حلا ضعيفا موجبا شاملا وغير تافه. عندئذ

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf u_0(x)=\lim_{|x|\to\infty}\inf v_0(x)=0. \tag{74}$$

3.2.2 نتيجة:

إذا كان

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf u_0(x)=+\infty,$$

أو إذا كان

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf v_0(x)=+\infty,$$

عندئذ النظام (FDS) لايقبلا حلا ضعيفا محليا موجبا وغير تافه.

4.2.2 نتيجة:

إذا وضعنا

$$A=\lim_{|x|\to\infty}\inf u_0(x)>0$$

و

$$B=\lim_{|x|\to\infty}\inf v_0(x)>0$$

عندئذ

$$T^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\leq\frac{C}{A}$$

و

$$T^{\frac{\alpha_2+q\alpha_1}{pq-1}}\leq\frac{C'}{B}$$

حيث C ثابت تم إدخاله في (76) ونفس الشيء بالنسبة C' .
نتيجتنا الرئيسية الثانية هي كالتالي:

5.2.2 نظرية :

نفرض أن المسألة (FDS) تقبل حلا ضعيفا موجبا شاملا وغير تافه،
عندئذ يوجد ثابتان H و K بحيث

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\leq H, \tag{75}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\inf v_0(x)|x|^{\frac{\alpha_2+q\alpha_1}{pq-1}}\leq K, \tag{76}$$

البرهان: لنعد للصيغة (76) ونضيف لطرفيها الحد $|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}$ مع الأخذ بعين الإعتبار أن $Supp\Phi\subset\{1<|y|<2\}$ فتصبح العبارة (76) كالآتي:

$$T^{(1-\alpha_1)(1-\frac{1}{pq})}\inf_{|x|>R}\left\{u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$

$$\leq\left(C_1T^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}+C_2T^{\frac{1}{q'}}R^{-\beta_1}\right)\left(C_3T^{\frac{1}{p'}-\alpha_2}+C_4T^{\frac{1}{p'}}R^{-\beta_2}\right)^{\frac{1}{q}}(2R)^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}},$$

وبعد تبسيطها نحصل على:

$$T^{(1-\alpha_1)(1-\frac{1}{pq})}\inf_{|x|>R}\left\{u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$

$$\leq T^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}\left(C_1+C_2T^{\alpha_1}R^{-\beta_1}\right)T^{\frac{1}{q}(\frac{1}{p'}-\alpha_2)}\left(C_3+C_4T^{\alpha_2}R^{-\beta_2}\right)^{\frac{1}{q}}(2R)^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}},$$

بأخذ $T=R$ نجد مايلي:

$$\inf_{|x|>R}\left\{u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$
$$\leq 2^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}}R^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}\left(C_1+C_2R^{\alpha_1-\beta_1}\right)R^{\frac{1}{q}(\frac{1}{p'}-\alpha_2)}\left(C_3+C_4R^{\alpha_2-\beta_2}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$R^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}}R^{-(1-\alpha_1)(1-\frac{1}{pq})},$$

بماأن:

$$R^{\frac{1}{q'}-\alpha_1}R^{\frac{1}{q}(\frac{1}{p'}-\alpha_2)}R^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}}R^{-(1-\alpha_1)(1-\frac{1}{pq})}=R^0=1,$$

إذن

$$\inf_{|x|>R}\left\{u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$
$$\leq 2^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}}\left(C_1+C_2R^{\alpha_1-\beta_1}\right)\left(C_3+C_4R^{\alpha_2-\beta_2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

وبالمرور إلى النهاية لما $R\to+\infty$ بمعنى آخر $|x|\to+\infty$ نجد

$$\left\{\lim\inf_{|x|>R}u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$
$$\leq 2^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}}\left(C_1+C_2\lim_{R\to+\infty}R^{\alpha_1-\beta_1}\right)\left(C_3+C_4\lim_{R\to+\infty}R^{\alpha_2-\beta_2}\right)^{\frac{1}{q}},$$

ومثلما $\alpha_1<\beta_1$ و $\alpha_2<\beta_2$ يكون لدينا

$\lim_{R\to+\infty}R^{\alpha_1-\beta_1}=0$

وأيضا

$\lim_{R\to+\infty}R^{\alpha_2-\beta_2}=0$

أي أن

$$\left\{\lim\inf_{|x|>R}u_0(x)|x|^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\right\}^{1-\frac{1}{pq}}$$
$$\leq 2^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq}}.C_1C_3^{\frac{1}{q}},$$

إذا وضعنا $H=2^{\frac{\alpha_1+p\alpha_2}{pq-1}}\left\{C_1C_3^{\frac{1}{q}}\right\}^{\frac{pq}{pq-1}}$ نكون قد برهنا على العبارة (75) .

ونفس الشيء إذا وضعنا $K=2^{\frac{\alpha_2+q\alpha_1}{pq-1}}\left\{C_1^{\frac{1}{p}}C_3\right\}^{\frac{pq}{pq-1}}$ ، ومنه برهان العبارة (76) .

□

الفصل الثالث

نظام معادلات على زمرة هازمبرج

~ ملخص ~

نشير إلى ${}^{c}\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha}$ المشتق الكسري بمفهوم كابتو في الزمن t من الرتبة α حيث $(\alpha \in (0,1))$ ، و $\Delta_{\mathbb{H}}$ مؤثر لابلاس على زمرة هازمبرج ذات البعد $(2N+1)$.

في البداية نعرض بعض النتائج لعدم وجود حلول للمسائل من النمط

$$ {}^{c}\mathbf{D}_{0|t_1}^{\alpha_1}(u) + {}^{c}\mathbf{D}_{0|t_2}^{\alpha_2}(u) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}(|u|^m) = |u|^p \tag{77} $$

وذلك من أجل كل (η, t_1, t_2) حيث:

$$ (\eta, t_1, t_2) \in \mathbb{Q} = \mathbb{H}^N \text{x} \mathbb{R}^+ \text{x} \mathbb{R}^+, \;\; N \in \mathbb{N} $$

حيث الشروط الإبتدائية

$$ u(\eta, t_1, 0) = u_1(\eta, t_1) \;\;, u(\eta, 0, t_2) = u_2(\eta, t_2) \tag{78} $$

هنا $p > 1$ عدد حقيقي ، و $m \in \mathbb{N}$ و $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

ثم نقوم بإستعراض بعض النتائج لنظام معادلات يتكون من معادلتين.

$$ \begin{cases} {}^{c}\mathbf{D}_{0|t_1}^{\alpha_1}(u) + {}^{c}\mathbf{D}_{0|t_2}^{\alpha_2}(u) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}(|u|^m) = |v|^p \\ {}^{c}\mathbf{D}_{0|t_1}^{\beta_1}(v) + {}^{c}\mathbf{D}_{0|t_2}^{\beta_2}(v) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}(|v|^n) = |u|^q \end{cases} \tag{79} $$

حيث:

$$ (\eta, t_1, t_2) \in \mathbb{Q} = \mathbb{H}^N \text{x} \mathbb{R}^+ \text{x} \mathbb{R}^+, \;\; N \in \mathbb{N} $$

والشروط الإبتدائية

$$ u(\eta, t_1, 0) = u_1(\eta, t_1) \;\;, u(\eta, 0, t_2) = u_2(\eta, t_2) \tag{80} $$

$$ v(\eta, t_1, 0) = v_1(\eta, t_1) \;\;, v(\eta, 0, t_2) = v_2(\eta, t_2) \tag{81} $$

هنا p ، q أعداد حقيقية موجبة

و $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ ، $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ ، $0 < \alpha, \beta \leq 2$.

1.3 مدخل:

زمرة هازمبرج $\mathbb{H}^N$ ذات البعد $(2N+1)$ هي الفضاء

$$\mathbb{R}^{2N+1}=\left\{\eta=(x,y,\tau)\in\mathbb{R}^N\text{x }\mathbb{R}^N\text{x }\mathbb{R}\right\},$$

مزود بقانون التركيب "$\circ$" المعرف كمايلي:

$$\eta\circ\tilde{\eta}=\left(x+\tilde{x},\ \ y+\tilde{y},\ \ \tau+\tilde{\tau}+2\left(\langle x,\tilde{y}\rangle-\langle\tilde{x},y\rangle\right)\right)$$

$$\eta^{-1}=(-x,\ \ -y,\ \ \tau),$$

حيث

$$\eta=(x,y,\tau)=(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N,\tau),$$

$$\tilde{\eta}=(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\tau})=(\tilde{x_1},\ldots,\tilde{x_N},\tilde{y_1},\ldots,\tilde{y_N},\tilde{\tau}),$$

$$\langle x,\tilde{y}\rangle-\langle\tilde{x},y\rangle=\sum_{i=1}^{N}x_i\tilde{y_i}-\sum_{i=1}^{N}\tilde{x_i}y_i=\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\tilde{y_i}-\tilde{x_i}y_i\right).$$

هذا القانون يجعل من الزمرة $\mathbb{H}^N$ زمرة ذات بنية زمرة لي[6] . ويتم تحديد لابلاس $\Delta_{\mathbb{H}}$ على $\mathbb{H}^N$ إنطلاقا من المؤثرات:

$$Y_i=\frac{\partial}{\partial y_i}-2x_i\frac{\partial}{\partial\tau}\quad,\quad X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+2y_i\frac{\partial}{\partial\tau}$$

بالصيغة

$$\Delta_{\mathbb{H}}=\sum_{i=1}^{N}\left(X_i^2+Y_i^2\right),\tag{82}$$

ثم حساب بسيط يعطينا الصيغة

$$\Delta_{\mathbb{H}}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+4y_i\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial\tau}-4x_i\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial\tau}+4\left(x_i^2+y_i^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2},\right)\tag{83}$$

المؤثر $\Delta_{\mathbb{H}}$ هو مؤثر إهليلجي متحلل[7]

يحقق ما يسمى بشرط هورماندي من الرتبة واحد 1 (أنظر [26]) .
و ثابت عن طريق عملية التركيب من اليسار في الزمرة لأن :

[6] Groupe de Lie
[7] $\Delta_{\mathbb{H}}$ est un opérateur elliptique dégénéré

$$\Delta_{\mathbb{H}}\left(u\left(\eta\circ\tilde{\eta}\right)\right)=\left(\Delta_{\mathbb{H}}u\right)\left(\eta\circ\tilde{\eta}\right),\ \ \forall\left(\eta,\tilde{\eta}\right)\in\mathbb{H}^{N}\text{x }\mathbb{H}^{N},$$

ويعرف النظيم للفضاء بالصيغة

$$|\eta|_{\mathbb{H}^N}=\left(\tau^2+\left(\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2+y_i^2\right)\right)^2\right)^{1/4}, \tag{84}$$

وهو متجانس

وفقا لذلك يمكن تحديد المسافة الداخلية من النقطة η إلى النقطة $\tilde{\eta}$ على $\mathbb{H}^N$ بالشكل

$$d\left(\eta,\tilde{\eta}\right)=|\tilde{\eta}^{-1}\circ\eta|_{\mathbb{H}^N}$$

ومن المهم أيضا ملاحظة أن، $\eta\to|\eta|_{\mathbb{H}^N}$ متجانس من الدرجة الأولى بالنسبة إلى الزمرة الطبيعية للتمددات[8] :

$$\delta_\lambda\left(\eta\right)=\left(\lambda x,\lambda y,\lambda^2\tau\right),\quad\lambda>0 \tag{85}$$

لاحظ أيضاً من الصيغة (86) المؤثر $\Delta_{\mathbb{H}}$ متجانس من الدرجة 2 بالنسبة إلى التمدد δ_λ المعرف في (88) ، وهو

$$\Delta_{\mathbb{H}}=\lambda^2\delta_\lambda\left(\Delta_{\mathbb{H}}\right).$$

فيما يتعلق بعمل (تأثير) $\Delta_{\mathbb{H}}$ على الدوال u يعتمد ذلك فقط على $\rho=|\eta|_{\mathbb{H}^N}$ ومن السهل رؤية ذلك

$$\Delta_{\mathbb{H}}\left(\rho\right)=a\left(\eta\right)\left(\frac{d^2u}{d\rho^2}+\frac{Q-1}{\rho}\frac{du}{d\rho}\right),$$

حيث الدالة a معرفة كمايلي:

$$a\left(\eta\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2+y_i^2}{\rho^2}$$

و $Q=2N+2$

هذا العدد الأخير Q يسمى البعد المتجانس لـ $\mathbb{H}^N$.

ولتفاصيل أكثر إليك بعض المراجع [5], [15], [16], [23], [31], [38], [39] .

[8] Groupe naturel des dilatations

2.3 حالة معادلة كسرية واحدة:

1.2.3 تعريف:

لتكن u دالة قابلة للمكاملة محليا أين :

$$u \in L^m_{loc}(Q_T) \cap L^p_{loc}(Q_T),$$

يسمى الحل المحلي الضعيف للصيغة (161) في Q_T حيث

$$\left(Q_T = \mathbb{H}^N \times [0,T] \times [0,T]\right),$$

ويخضع للشروط الإبتدائية:

$$u_1, u_2 \in L^1_{loc}\left(\mathbb{H}^N\,[0,T]\right),$$

إذا كانت المساواة

$$\int_{Q_T} |u|^p \varphi dw + \int_{Q_T} u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi dw + \int_{Q_T} u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T} \varphi dw$$

$$= \int_{Q_T} u \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi dw + \int_{Q_T} u \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T} \varphi dw + \int_{Q_T} |u|^m \left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2} \varphi dw, \tag{86}$$

محققة من أجل أي φ دالة إختبار حيث $\left(\varphi \in C^\infty_0\left(Q_T\right)\right)$ ، و

$$\varphi\left(\xi\right) = \begin{cases} 1 & if \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ \searrow & if \quad 1 \leq \xi \leq 2, \\ 0 & if \quad \xi \geq 2, \end{cases} \tag{87}$$

مع

$$\varphi\left(\eta, t_1, T\right) = \varphi\left(\eta, T, t_2\right) = 0 \ , \quad \varphi \geq 0 \quad , \quad dw = d\eta dt_1 dt_2$$

ويسمى الحل الشامل إذا $T = +\infty$.

2.2.3 نظرية :

ليكن

$$1 < m < p < p_c = m + \frac{m\alpha - (m-1)(\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\alpha}{\alpha_2})}{2N + 2 - \alpha + (\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\alpha}{\alpha_2})},$$

و

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dw > 0, \quad \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dw > 0.$$

عندئذ المعادلة (77) ليس لديها حل شامل ضعيف غير تافه.
للدليل ، نحتاج الفرضية 3.2.3

3.2.3 فرضية:

لنعتبر الدالة المحدبة $F \in C^2(\mathbb{R})$ نفرض أن $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{2N+1}\right)$. عندئذ:

$$F'(\varphi)(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\varphi \geq (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}F(\varphi), \tag{88}$$

على وجه الخصوص، إذا $F(0)=0$ و $\varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^{2N+1}\right)$, عندها

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} F'(\varphi)(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\varphi d\eta \geq 0 \tag{89}$$

الآن سوف نستخدم (88) من أجل،

$$F(\varphi)=\varphi^\sigma \ , \ \sigma \gg 1 \ , \ \varphi \geq 0$$

في هذه الحالة نقرأ

$$\sigma\varphi^{\sigma-1}(\varphi)(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\varphi \geq (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\varphi^\sigma, \tag{90}$$

نحتاج إلى التوطئة التالية مأخوذة من [32]

4.2.3 توطئة:

ليكن $f \in L^1\left(\mathbb{R}^{2N+1}\right)$ و $\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} f d\eta \geq 0$ ، عندئذ توجد دالة إختبار $0 \leq \varphi \leq 1$ بحيث :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N+1}} f\varphi d\eta \geq 0. \tag{91}$$

ملاحظة:

إصطلاحا نضع

$$\int_{Q_T} = \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2N+1}} \quad , \quad \int_Q = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{2N+1}}$$

برهان النظرية:

البرهان بالتناقض، لهذا نفرض أن u حل و φ دالة إختبار سلسة[9] غير سلبية حيث أن:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\varphi) &= \int_Q |\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\sigma}{p-1}}dw < \infty, \\
\mathcal{B}(\varphi) &= \int_Q |\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\sigma|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\sigma}{p-1}}dw < \infty, \qquad (92)\\
\mathcal{K}(\varphi) &= \int_Q |(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\varphi|^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{(\sigma-\frac{p}{p-m})}dw < \infty,
\end{aligned}$$

ثم ، مع أخذ $\varphi^\sigma, \sigma \gg 1$ بدلا من φ في (86) وبإستخدام (90) نحصل على

$$\begin{aligned}
&\int_Q |u|^p\varphi^\sigma dw + \int_Q u_2\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma dw + \int_Q u_1\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\sigma dw \\
&= \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma dw + \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\sigma dw + \int_Q |u|^m \left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi^\sigma dw \\
&\leq \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma dw + \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\sigma dw + \int_Q |u|^m\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi dw
\end{aligned}$$

- من أجل $\int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma dw$

عن طريق متراجحة $\varepsilon - Young$

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^{\frac{p}{p-1}}, \;\; a \geq 0, \;\; b \geq 0$$

نحصل على

$$u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma \leq |u||\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma| = \varphi^{\frac{\sigma}{p}}\varphi^{\frac{-\sigma}{p}}|u||\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma| = |u|\varphi^{\frac{\sigma}{p}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\sigma|\varphi^{\frac{-\sigma}{p}}$$

[9] $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(Q_T)$ est une fonction lisse

لأن $\varphi^{\frac{\sigma}{p}}\varphi^{\frac{-\sigma}{p}}=\varphi^{\frac{\sigma}{p}-\frac{\sigma}{p}}=\varphi^{0}=1$

إذا وضعنا $a=|u|\varphi^{\frac{\sigma}{p}}$ و $b=|\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}|\varphi^{\frac{-\sigma}{p}}$ ، عندئذ

$$u\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}\leq ab\leq \varepsilon a^{p}+C(\varepsilon)b^{\frac{p}{p-1}}=\varepsilon\left(|u|\varphi^{\frac{\sigma}{p}}\right)^{p}+C(\varepsilon)\left(|\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}|\varphi^{\frac{-\sigma}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$u\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}\leq \varepsilon|u|^{p}\varphi^{\sigma}+C(\varepsilon)|\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\sigma}{p-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{Q}u\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}dw\leq \varepsilon\int_{Q}|u|^{p}\varphi^{\sigma}dw+C(\varepsilon)\int_{Q}|\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\sigma}{p-1}}dw$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{Q}u\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\sigma}dw\leq \varepsilon\int_{Q}|u|^{p}\varphi^{\sigma}dw+C(\varepsilon)\mathcal{A}(\varphi)\qquad(\mathrm{I}_1)$$

• من أجل $\int_{Q}u\mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^{\sigma}dw$

نأخذ الطريقة السابقة مع وضع t_2 مكان t_1 و α_2 مكان α_1
للحصول على

$$\int_{Q}u\mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^{\sigma}dw\leq \varepsilon\int_{Q}|u|^{p}\varphi^{\sigma}dw+C(\varepsilon)\mathcal{B}(\varphi)\qquad(\mathrm{I}_2)$$

• من أجل $\int_{Q}|u|^{m}\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi dw$

عن طريق متراجحة $\varepsilon-Young$

$$ab\leq \varepsilon a^{\frac{p}{m}}+C(\varepsilon)b^{\frac{p}{p-m}},\;\; a\geq 0,\;\; b\geq 0$$

نحصل على

$$\begin{aligned}|u|^{m}\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi&=1.|u|^{m}\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi\\&=\varphi^{\frac{m\sigma}{p}}\varphi^{\frac{-m\sigma}{p}}|u|^{m}\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi\end{aligned}$$

لأن

$$\varphi^{\frac{m\sigma}{p}}\varphi^{\frac{-m\sigma}{p}}=\varphi^{\frac{m\sigma}{p}-\frac{m\sigma}{p}}=\varphi^{0}=1$$

إذا وضعنا $a=|u|^m\varphi^{\frac{m\sigma}{p}}$ و $b=|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}|\sigma\varphi^{\sigma-1-\frac{m\sigma}{p}}$ ، عندئذ

$$|u|^m\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi\leq ab\leq\varepsilon a^{\frac{p}{m}}+C(\varepsilon)b^{\frac{p}{p-m}}$$

$$\varepsilon a^{\frac{p}{m}}+C(\varepsilon)b^{\frac{p}{p-m}}=\varepsilon\left(|u|^m\varphi^{\frac{m\sigma}{p}}\right)^{\frac{p}{m}}+C(\varepsilon)\left(|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}|\sigma\varphi^{\sigma-1-\frac{m\sigma}{p}}\right)^{\frac{p}{p-m}}$$

$$\Updownarrow$$

$$|u|^m\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi\leq\varepsilon|u|^p\varphi^{\sigma}+C(\varepsilon)|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}|^{\frac{p}{p-m}}\sigma^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{(\sigma-1-\frac{m\sigma}{p})\frac{p}{p-m}}$$

$$\Updownarrow$$

$$|u|^m\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi\leq\varepsilon|u|^p\varphi^{\sigma}+C(\varepsilon)|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}|^{\frac{p}{p-m}}\sigma^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{(\sigma-\frac{p}{p-m})}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_Q|u|^m\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi dw\leq\varepsilon\int_Q|u|^p\varphi^{\sigma}dw$$
$$+C(\varepsilon)\sigma^{\frac{p}{p-m}}\int_Q|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}|^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{(\sigma-\frac{p}{p-m})}dw$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_Q|u|^m\sigma\varphi^{\sigma-1}\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\varphi dw\leq\varepsilon\int_Q|u|^p\varphi^{\sigma}dw+C(\varepsilon)\sigma^{\frac{p}{p-m}}\mathcal{K}(\varphi)\qquad(\mathrm{I}_3)$$

الآن نختار $\varepsilon=\frac{1}{6}$ و $C=\max\left\{C(\varepsilon),C(\varepsilon)\sigma^{\frac{p}{p-m}}\right\}$ ومن (I_1) ، (I_2) ، (I_3) نحصل على

$$\int_Q|u|^p\varphi^{\sigma}dw+\int_Q u_2\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\sigma}dw+\int_Q u_1\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\sigma}dw$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_Q|u|^p\varphi^{\sigma}dw+C\left(\mathcal{A}(\varphi)+\mathcal{B}(\varphi)+\mathcal{K}(\varphi)\right)\qquad(93)$$

نأخذ الآن دالة الأختبار $\varphi\left(\eta,t_1,t_2\right)$ ، بالشكل

$$\varphi\left(\eta,t_1,t_2\right)=\varphi_1\left(\eta\right)\varphi_2\left(t_1\right)\varphi_3\left(t_2\right),\qquad(94)$$

أين $\varphi_1\left(\eta\right)=\psi\left(\frac{\tau^2+|x|^4+|y|^4}{R^4}\right)$ ، و $\varphi_2\left(t_1\right)=\psi\left(\frac{t_1}{R^{\rho_1}}\right)$ ، و $\varphi_3\left(t_2\right)=\psi\left(\frac{t_2}{R^{\rho_2}}\right)$ ، و $\rho_1=\frac{\alpha(p-1)}{\alpha_1(p-m)}$ و $\rho_2=\frac{\alpha(p-1)}{\alpha_2(p-m)}$.
والمجموعات Ω_1 ، Ω_2 ، Ω_3 معرفة بالشكل

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{\tilde{\eta} \in \mathbb{H};\ 0 < \tilde{\tau}^2 + |\tilde{x}|^4 + |\tilde{y}|^4 \leq 2\right\},\\
\Omega_2 &= \left\{\tilde{t_1};\ 0 \leq \tilde{t_1} \leq 2\right\},\\
\Omega_3 &= \left\{\tilde{t_2};\ 0 \leq \tilde{t_2} \leq 2\right\},
\end{aligned}$$

نجري تبديل المتغير التالي

$\tilde{\tau} = R^{-2}\tau$ ، $\tilde{x} = R^{-1}x$ ، $\tilde{y} = R^{-1}y$ ، $\tilde{t_1} = R^{-\rho_1}t_1$ ، $\tilde{t_2} = R^{-\rho_2}t_2$ ،

نحصل على التقديرات

$$\mathcal{A}(\varphi) \leq \mathbf{A}R^{\mathbf{a}},\ \mathcal{B}(\varphi) \leq \mathbf{B}R^{\mathbf{b}},\ \mathcal{K}(\varphi) \leq \mathbf{K}R^{\mathbf{k}}. \tag{95}$$

مع

$$\mathbf{a} = -\frac{\alpha_1\rho_1 p}{p-1} + 2N + 2 + \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\alpha p}{p-m} + 2N + 2 + \rho_1 + \rho_2,$$

$$\mathbf{b} = -\frac{\alpha_2\rho_2 p}{p-1} + 2N + 2 + \rho_1 + \rho_2 = -\frac{\alpha p}{p-m} + 2N + 2 + \rho_1 + \rho_2,$$

$$\mathbf{k} = -\frac{\alpha p}{p-m} + 2N + 2 + \rho_1 + \rho_2,$$

نضع $\mathbf{v} = -\dfrac{\alpha p}{p-m} + 2N + 2 + \rho_1 + \rho_2$

عندئذ

$$\mathcal{A}(\varphi) \leq \mathbf{A}R^{\mathbf{v}}, \quad \mathcal{B}(\varphi) \leq \mathbf{B}R^{\mathbf{v}}, \quad \mathcal{K}(\varphi) \leq \mathbf{K}R^{\mathbf{v}} \tag{96}$$

الثوابت $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{K}$ هي $\mathcal{A}(\varphi)$ ، $\mathcal{B}(\varphi)$ ، $\mathcal{K}(\varphi)$ على الترتيب، تم تقييمها في $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$.

الآن إذا

$$-\frac{\alpha p}{p-m} + 2N + 2 + \rho_1 + \rho_2 < 0 \ \Leftrightarrow\ p < p_c,$$

عندئذ بإدراج $R \to \infty$ في (93) ، نحصل على

$$\int_Q |u|^p \varphi^\sigma dw = 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0$$

هذا تناقض. $\square$

3.3 نظام المعادلات الكسرية:

لنعتبر

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c\mathbf{D}_{0|t_1}^{\alpha_1}(u) + {}^c\mathbf{D}_{0|t_2}^{\alpha_2}(u) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}(|u|^m) = |v|^p \\ {}^c\mathbf{D}_{0|t_1}^{\beta_1}(v) + {}^c\mathbf{D}_{0|t_2}^{\beta_2}(v) + (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}(|v|^n) = |u|^q \end{array} \right. \tag{97}$$

إذ أن من أجل كل (η, t_1, t_2) حيث:

$$(\eta, t_1, t_2) \in Q = \mathbb{H}^N \text{x } \mathbb{R}^+ \text{x } \mathbb{R}^+, \ \ N \in \mathbb{N}$$

حيث الشروط الإبتدائية

$$u(\eta, t_1, 0) = u_1(\eta, t_1) \ \ , u(\eta, 0, t_2) = u_2(\eta, t_2) \tag{98}$$

$$v(\eta, t_1, 0) = v_1(\eta, t_1) \ \ , v(\eta, 0, t_2) = v_2(\eta, t_2) \tag{99}$$

هنا p ، q أعداد حقيقية موجبة ، و

$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ ، $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ ، $0 < \alpha, \beta \leq 2$.

لنضع

$$I_0 = \int_Q u_2 \mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1} \varphi dw + \int_Q u_1 \mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2} \varphi dw$$

$$J_0 = \int_Q v_2 \mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1} \varphi dw + \int_Q v_1 \mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2} \varphi dw$$

حيث ، $dw = d\eta dt_1 dt_2.$

1.3.3 تعريف:

نقول أن (u, v) حيث

$$(u, v) \in \left(L_{loc}^q(Q) \cap L_{loc}^m(Q)\right)\left(L_{loc}^p(Q) \cap L_{loc}^n(Q)\right),$$

حل ضعيف لجملة معادلات (97) إذا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Q |v|^p \varphi dw + I_0 = \int_Q u \mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1} \varphi dw + \int_Q u \mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2} \varphi dw + \int_Q |u|^m (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2} \varphi dw \\ \int_Q |u|^q \varphi dw + J_0 = \int_Q v \mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1} \varphi dw + \int_Q v \mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2} \varphi dw + \int_Q |v|^n (-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2} \varphi dw \end{array} \right. \tag{100}$$

من أجل كل دالة إختبار φ .

الآن نضع :

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 = -\frac{1}{pq-1}\Bigg[& pq\alpha_1 + p\beta_1 - 2\,(pq-1) \\
& - \left(\frac{(pq-p)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(p-1)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_2 = -\frac{1}{pq-1}\Bigg[& pq\alpha_1 + p\beta_2 - 2(pq-p) \\
& - \left(\frac{(pq-p)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(p-1)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_3 = -\frac{1}{pq-n}\Bigg[& pq\alpha_1 + p\beta_1 - 2\,(2pq-nq-p) \\
& - \left(\frac{(pq-p)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(pq-nq)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_4 = -\frac{1}{pq-1}\left[pq\alpha_2 + p\beta_1 - 2\,(pq-1) - \left(\frac{(pq-p)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(p-1)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\right],
$$

$$
\sigma_5 = -\frac{1}{pq-1}\left[pq\alpha_2 + p\beta_2 - 2\,(pq-1) - \left(\frac{(p-1)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(pq-p)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\right],
$$

$$
\sigma_6 = -\frac{1}{pq-n}\left[pq\alpha_2 + p\beta_1 - 2\,(pq-n) - \left(\frac{(pq-p)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(p-n)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\right],
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_7 = -\frac{1}{pq-m}\Bigg[& pq\alpha_1 + pm\beta_1 - 2\,(pq-m) \\
& - \left(\frac{(pq-pm)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(mp-m)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_8 = -\frac{1}{pq-m}\Bigg[& pq\alpha_1 + pm\beta_2 - 2\,(pq-m) \\
& - \left(\frac{(pq-pm)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(mp-m)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_9 = -\frac{1}{pq-nm}\Bigg[& pq\alpha_1 + pm\beta_1 - 2\,(pq-nm) \\
& - \left(\frac{(pq-pm)\alpha_1}{\alpha} + \frac{(mp-nm)\beta_1}{\beta}\right)(2N+2)\Bigg],
\end{aligned}
$$

نظرية: 2.3.3

ليكن $q > 1$ ، $p > 1$ ، $q > m$ ، $p > n$ ، ونفرض أن

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi^{\mu} dw > 0 \ , \ \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T} \varphi^{\mu} dw > 0,$$
$$\int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T} \varphi^{\mu} dw > 0 \ , \ \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T} \varphi^{\mu} dw > 0,$$

إذا كان

$$\max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_9, \delta_1, \ldots, \delta_9\} \leq 0$$

عندئذ جملة المعادلات (97) لاتقبل حلا ضعيفا محليا غير تافه.

برهان: كما هو الحال في إثبات النظرية 2.2.3 ، نبرهن بالنقيض. لنفرض (u, v) حلاً شاملا ضعيفًا غير تافه في الوقت المناسب. وبإستبدال φ بواسطة φ^{μ} في (100) وبما أن الشروط الأولية u_0 و v_0 موجبة ، فإن الصيغة (100) تؤدي إلى

$$\begin{cases} \int_Q |v|^p \varphi^{\mu} dw \leq \int_Q u \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi^{\mu} dw + \int_Q u \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T} \varphi^{\mu} dw + \int_Q |u|^m \left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2} \varphi^{\mu} dw \\ \int_Q |u|^q \varphi^{\mu} dw \leq \int_Q v \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T} \varphi^{\mu} dw + \int_Q v \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T} \varphi^{\mu} dw + \int_Q |v|^n \left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\beta/2} \varphi^{\mu} dw \end{cases} \tag{101}$$

بتطبيق متراجحة هولدر نحصل على التقديرات التالية:

من أجل $q > m$

$$\int_Q |u|^m \left|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2} \varphi^{\mu}\right| dw \leq \mu \left(\int_Q |u|^q \varphi^{\mu} dw\right)^{\frac{m}{q}}$$
$$\mathbf{x} \left(\int_Q \varphi^{\mu - \frac{q}{q-m}} \left|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2} \varphi\right|^{\frac{q}{q-m}} dw\right)^{\frac{q-m}{q}}, \tag{102}$$

- من أجل $q > 1$

$$\int_Q u \left|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi^{\mu}\right| dw \leq \left(\int_Q |u|^q \varphi^{\mu} dw\right)^{\frac{1}{q}} \mathbf{x} \left(\int_Q \left|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi^{\mu}\right|^{\frac{q}{q-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{q-1}} dw\right)^{\frac{q-1}{q}}, \tag{103}$$

و

$$\int_Q u\left|\mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^{\mu}\right|dw \leq \left(\int_Q |u|^q\,\varphi^{\mu}dw\right)^{\frac{1}{q}}\mathbf{x}\left(\int_Q \left|\mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^{\mu}\right|^{\frac{q}{q-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{q-1}}dw\right)^{\frac{q-1}{q}} \tag{104}$$

وبالمثل ، لدينا

من أجل $p>n$

$$\int_Q |v|^n\left|(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}\varphi^{\mu}\right|dw \leq \mu\left(\int_Q |v|^p\,\varphi^{\mu}dw\right)^{\frac{n}{p}}$$

$$\mathbf{x}\left(\int_Q \varphi^{\mu-\frac{p}{p-n}}\left|(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}\varphi\right|^{\frac{p}{p-n}}dw\right)^{\frac{p-n}{p}} \tag{105}$$

- من أجل $p>1$

$$\int_Q v\left|\mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1}\varphi^{\mu}\right|dw \leq \left(\int_Q |v|^p\,\varphi^{\mu}dw\right)^{\frac{1}{p}}\mathbf{x}\left(\int_Q \left|\mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1}\varphi^{\mu}\right|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dw\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{106}$$

و

$$\int_Q v\left|\mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2}\varphi^{\mu}\right|dw \leq \left(\int_Q |v|^p\,\varphi^{\mu}dw\right)^{\frac{1}{p}}\mathbf{x}\left(\int_Q \left|\mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2}\varphi^{\mu}\right|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dw\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{107}$$

إذا قمنا بتعيين

$$I_u=\int_Q |u|^q\,\varphi^{\mu}dw\ ,\qquad I_v=\int_Q |v|^p\,\varphi^{\mu}dw,$$

$$A(q,m)=\mu\left(\int_Q \varphi^{\mu-\frac{q}{q-m}}\left|(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\varphi\right|^{\frac{q}{q-m}}dw\right)^{\frac{q-m}{q}},$$

$$A(p,n)=\mu\left(\int_Q \varphi^{\mu-\frac{p}{p-n}}\left|(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}\varphi\right|^{\frac{p}{p-n}}dw\right)^{\frac{p-n}{p}},$$

$$B(q)=\left(\int_Q \left|\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\mu}\right|^{\frac{q}{q-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{q-1}}dw\right)^{\frac{q-1}{q}},$$

$$B(p)=\left(\int_Q\left|\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu\right|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dw\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$C(q)=\left(\int_Q\left|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu\right|^{\frac{q}{q-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{q-1}}dw\right)^{\frac{q-1}{q}},$$

$$C(p)=\left(\int_Q\left|\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu\right|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dw\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$I_0^\mu=\int_Q u_2\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dw+\int_Q u_1\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dw, \tag{108}$$

$$J_0^\mu=\int_Q v_2\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dw+\int_Q v_1\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dw, \tag{109}$$

عندئذ، بإستعمال التقديرات (102) ، (103) ، (104) ، (105) ، (106) ، (107) . يمكننا أن نكتب (101) على الشكل

$$I_v+I_0^\mu\leq I_u^{\frac{1}{q}}B(q)+I_u^{\frac{1}{q}}C(q)+I_u^{\frac{m}{q}}A(q,m)$$
$$I_u+J_0^\mu\leq I_v^{\frac{1}{p}}B(p)+I_v^{\frac{1}{p}}C(p)+I_v^{\frac{n}{p}}A(p,n)$$

ومن $J_0^\mu>0$, $I_0^\mu>0$ يكون لدينا

$$I_v\leq I_u^{\frac{1}{q}}B(q)+I_u^{\frac{1}{q}}C(q)+I_u^{\frac{m}{q}}A(q,m), \tag{110}$$

$$I_u\leq I_v^{\frac{1}{p}}B(p)+I_v^{\frac{1}{p}}C(p)+I_v^{\frac{n}{p}}A(p,n), \tag{111}$$

الآن ، من (110) و (111) ، لدينا

$$\begin{aligned}I_v+I_0^\mu\leq&\left(I_v^{\frac{1}{pq}}B^{\frac{1}{q}}(p)+I_v^{\frac{1}{pq}}C^{\frac{1}{q}}(p)+I_v^{\frac{n}{pq}}A^{\frac{1}{q}}(p,n)\right)B(q)\\&+\left(I_v^{\frac{1}{pq}}B^{\frac{1}{q}}(p)+I_v^{\frac{1}{pq}}C^{\frac{1}{q}}(p)+I_v^{\frac{n}{pq}}A^{\frac{1}{q}}(p,n)\right)C(q)\\&+\left(I_v^{\frac{m}{pq}}B^{\frac{m}{q}}(p)+I_v^{\frac{m}{pq}}C^{\frac{m}{q}}(p)+I_v^{\frac{nm}{pq}}A^{\frac{m}{q}}(p,n)\right)A(q,m),\end{aligned}$$

لذا تطبيق متراجحة يونغ يعني

$$\begin{aligned}I_v+I_0^\mu\leq K\Bigg[&\left(B^{\frac{1}{q}}(p)B(q)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(C^{\frac{1}{q}}(p)B(q)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(A^{\frac{1}{q}}(p,n)B(q)\right)^{\frac{pq}{pq-n}}\\&+\left(B^{\frac{1}{q}}(p)C(q)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(C^{\frac{1}{q}}(p)C(q)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(A^{\frac{1}{q}}(p,n)C(q)\right)^{\frac{pq}{pq-n}}\end{aligned}$$

$$+\left(B^{\frac{m}{q}}(p)A(q,m)\right)^{\frac{pq}{pq-m}}+\left(C^{\frac{m}{q}}(p)A(q,m)\right)^{\frac{pq}{pq-m}}+\left(A^{\frac{m}{q}}(p,n)A(q,m)\right)^{\frac{pq}{pq-nm}}\Bigg],$$

لنأخذ الآن دالة الإختبار $\varphi(\eta,t_1,t_2)$ في الشكل

$$\varphi(\eta,t_1,t_2)=\psi\left(\frac{\tau^{2\theta_j}+|x|^{4\theta_j}+|y|^{4\theta_j}}{R^4}\right)\psi\left(\frac{t_1}{R}\right)\psi\left(\frac{t_2}{R}\right),\quad j=1,2,$$

و θ_j سيتم تحديده فيما بعد.
عندئذ

$$\Delta_{\mathbb{H}}\varphi\left(\eta\right)=\psi\left(\frac{t_1}{R}\right)\psi\left(\frac{t_2}{R}\right)\Delta_{\mathbb{H}}\psi\left(\rho\right),$$

أين

$$\rho=\frac{\tau^{2\theta_j}+|x|^{4\theta_j}+|y|^{4\theta_j}}{R^4},$$

و

$$\Delta_{\mathbb{H}}\psi\left(\rho\right)=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial^2\psi\left(\rho\right)}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2\psi\left(\rho\right)}{\partial y_i^2}+4y_i\frac{\partial^2\psi\left(\rho\right)}{\partial x_i\partial\tau}\right.$$
$$\left.-4x_i\frac{\partial^2\psi\left(\rho\right)}{\partial y_i\partial\tau}+4\left(x_i^2+y_i^2\right)\frac{\partial^2\psi\left(\rho\right)}{\partial\tau^2}\right],$$

لدينا

$$\frac{\partial^2\psi\left(\rho\right)}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2}\psi'(\rho)+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\right)^2\psi''(\rho)$$
$$=\frac{4\theta_j}{R^4}\left(|x|^{4\theta_j-2}+\left(4\theta_j-2\right)x_i^2|x|^{4\theta_j-4}\right)\psi'(\rho)+\frac{16\theta_j^2}{R^8}x_i^2|x|^{8\theta_j-4}\psi''(\rho),$$

و

$$\frac{\partial^2\psi\left(\rho\right)}{\partial y_i^2}=\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y_i}\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial^2\rho}{\partial y_i^2}\psi'(\rho)+\left(\frac{\partial\rho}{\partial y_i}\right)^2\psi''(\rho)$$
$$=\frac{4\theta_j}{R^4}\left(|y|^{4\theta_j-2}+\left(4\theta_j-2\right)y_i^2|y|^{4\theta_j-4}\right)\psi'(\rho)+\frac{16\theta_j^2}{R^8}y_i^2|y|^{8\theta_j-4}\psi''(\rho),$$

و

$$\begin{aligned}
4y_i \frac{\partial^2 \psi(\rho)}{\partial x_i \partial \tau} &= 4y_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \psi(\rho)}{\partial \rho}\right) \\
&= 4y_i \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial \tau}\psi'(\rho) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right)\psi''(\rho)\right] \\
&= 4y_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{2\theta_j}{R^4}\tau^{2\theta_j-1}\right)\psi'(\rho) + \left(\frac{2\theta_j}{R^4}\tau^{2\theta_j-1}\right)\left(\frac{4\theta_j}{R^4}|x|^{4\theta_j-2}x_i\right)\psi''(\rho)\right] \\
&= \frac{8\theta_j^2}{R^8}\tau^{2\theta_j-1}|x|^{4\theta_j-2}x_i y_i \psi''(\rho),
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
-4x_i \frac{\partial^2 \psi(\rho)}{\partial y_i \partial \tau} &= -4x_i \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \psi(\rho)}{\partial \rho}\right) \\
&= -4x_i \left[\frac{\partial^2 \rho}{\partial y_i \partial \tau}\psi'(\rho) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial y_i}\right)\psi''(\rho)\right] \\
&= -4x_i \left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{2\theta_j}{R^4}\tau^{2\theta_j-1}\right)\psi'(\rho) + \left(\frac{2\theta_j}{R^4}\tau^{2\theta_j-1}\right)\left(\frac{4\theta_j}{R^4}|y|^{4\theta_j-2}y_i\right)\psi''(\rho)\right] \\
&= -\frac{8\theta_j^2}{R^8}\tau^{2\theta_j-1}|y|^{4\theta_j-2}x_i y_i \psi''(\rho),
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
4\left(x_i^2+y_i^2\right)\frac{\partial^2 \psi(\rho)}{\partial \tau^2} &= 4\left(x_i^2+y_i^2\right)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\frac{\partial \psi(\rho)}{\partial \rho}\right) \\
&= 4\left(x_i^2+y_i^2\right)\left[\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \tau^2}\right)\psi'(\rho) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau}\right)^2\psi''(\rho)\right] \\
&= 4\left(x_i^2+y_i^2\right)\left[\left(\frac{2\theta_j(2\theta_j-1)}{R^4}\tau^{2\theta_j-2}\right)\psi'(\rho) + \left(\frac{4\theta_j^2}{R^8}\tau^{4\theta_j-2}\right)\psi''(\rho)\right],
\end{aligned}$$

أخيرا

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}}\psi(\rho) &= \frac{4\theta_j}{R^4}\left[\left(N+(4\theta_j-2)\right)\left(|x|^{4\theta_j-2}+|y|^{4\theta_j-2}\right)\right. \\
&\quad \left.+(4\theta_j-2)\tau^{2\theta_j-2}\left(|x|^2+|y|^2\right)\right]\psi'(\rho) \\
&+\frac{16\theta_j^2}{R^8}\cdot\left[|x|^{8\theta_j-2}+|y|^{8\theta_j-2}+\frac{1}{2}\tau^{2\theta_j-1}\langle x,y\rangle\left(|x|^{4\theta_j-2}-|y|^{4\theta_j-2}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$+\tau^{4\theta_j-2}\left(|x|^2+|y|^2\right)\Big].\psi''(\rho),$$

ونطبق تبديل المتغيرات بالشكل

$$\eta=(x,y,\tau)\longrightarrow\tilde{\eta}=(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\tau})$$

حيث

$$\tilde{x}=R^{\frac{-1}{\theta_j}}x\ ,\ \ \tilde{y}=R^{\frac{-1}{\theta_j}}y\ ,\ \ \tilde{\tau}=R^{\frac{-2}{\theta_j}}\tau,\quad \tilde{t}_1=R^{-1}t_1,\quad \tilde{t}_2=R^{-1}t_2$$

نضع

$$\Omega_1^j=\left\{\tilde{\eta}\in\mathbb{H}:\ \ \tilde{\rho}=\tilde{\tau}^{2\theta_j}+|\tilde{x}|^{4\theta_j}+|\tilde{y}|^{4\theta_j}\leq 2\right\},$$

من أجل Ω_2 و Ω_3 أنظر الصفحة (41) .
عندئذ

$$\Delta_{\mathbb{H}}\psi(\rho)=\frac{4\theta_j}{R^{\frac{2}{\theta_j}}}\left[(N+(4\theta_j-2))\left(|\tilde{x}|^{4\theta_j-2}+|\tilde{y}|^{4\theta_j-2}\right)\right.$$
$$\left.+(4\theta_j-2)\,\tilde{\tau}^{2\theta_j-2}\left(|\tilde{x}|^2+|\tilde{y}|^2\right)\right]\psi'(\tilde{\rho})$$
$$+\frac{16\theta_j^2}{R^{\frac{2}{\theta_j}}}\left[|\tilde{x}|^{8\theta_j-2}+|\tilde{y}|^{8\theta_j-2}+\frac{1}{2}\tilde{\tau}^{2\theta_j-1}\langle\tilde{x},\tilde{y}\rangle\left(|\tilde{x}|^{4\theta_j-2}-|\tilde{y}|^{4\theta_j-2}\right)\right.$$
$$\left.+\tilde{\tau}^{4\theta_j-2}\left(|\tilde{x}|^2+|\tilde{y}|^2\right)\right]\psi''(\tilde{\rho})$$

هذا يعني

$$\Delta_{\mathbb{H}}\psi(\rho)=\frac{1}{R^{\frac{2}{\theta_j}}}\Delta_{\mathbb{H}}\psi(\tilde{\rho}),\ \ \forall\tilde{\eta}\in\Omega_1^j$$

و

$$(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\,\psi(\rho)=R^{\frac{-\alpha}{\theta_j}}\,(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\alpha/2}\,\psi(\tilde{\rho})$$

و

$$(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}\,\psi(\rho)=R^{\frac{-\beta}{\theta_j}}\,(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}\,\psi(\tilde{\rho})$$

مثل

$$d\eta=R^{\frac{N}{\theta_j}+\frac{N}{\theta_j}+\frac{2}{\theta_j}}d\tilde{\eta}=R^{\frac{2N+2}{\theta_j}}d\tilde{\eta}$$

نقوم بالتقديرات التالية:

• من أجل $j=1$ ،
نختار $\theta_1=\frac{\alpha}{\alpha_1}$ وكما $\alpha_1<\alpha_2$ نحصل على

$$A\left(q,m\right)=C_1R^{-\alpha_1+\frac{(q-m)}{q}\left(\frac{(2N+2)\alpha_1}{\alpha}+2\right)}$$

حيث

$$C_1=\mu\left(\int_{\Omega_1^1}\left|\left(-\Delta_{\mathbb{H}}\right)^{\alpha/2}\psi\left(\tilde{\rho}\right)\right|^{\frac{q}{q-m}}\psi^{\mu-\frac{q}{q-m}}\left(\tilde{\rho}\right)d\tilde{\eta}\right.$$
$$\left.\int_{\Omega_2}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_1\right)d\tilde{t}_1\int_{\Omega_3}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_2\right)d\tilde{t}_2\right)^{\frac{q-m}{q}}$$

و

$$B\left(q\right)=C_2R^{-\alpha_1+\frac{(q-1)}{q}\left(\frac{(2N+2)\alpha_1}{\alpha}+2\right)}$$

حيث

$$C_2=\left(\int_{\Omega_1^1}\psi^{\mu}\left(\tilde{\eta}\right)d\tilde{\eta}\int_{\Omega_2}\left|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{\tilde{t}_1|R^{-1}T}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_1\right)\right|^{\frac{q}{q-1}}\psi^{\frac{-\mu}{q-1}}\left(\tilde{t}_1\right)d\tilde{t}_1\int_{\Omega_3}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_2\right)d\tilde{t}_2\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

و

$$C\left(q\right)=C_3R^{-\alpha_2+\frac{(q-1)}{q}\left(\frac{(2N+2)\alpha_1}{\alpha}+2\right)}$$

حيث

$$C_3=\left(\int_{\Omega_1^1}\psi^{\mu}\left(\tilde{\eta}\right)d\tilde{\eta}\int_{\Omega_2}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_1\right)d\tilde{t}_1\int_{\Omega_3}\left|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{\tilde{t}_2|R^{-1}T}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_2\right)\right|^{\frac{q}{q-1}}\psi^{\frac{-\mu}{q-1}}\left(\tilde{t}_2\right)d\tilde{t}_2\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

• من أجل $j=2$ ،
نختار $\theta_2=\frac{\beta}{\beta_1}$ وكما $\beta_1<\beta_2$ نحصل على

$$A\left(p,n\right)=C_4R^{\frac{-\beta}{\theta_2}+\frac{(p-n)}{p}\left(\frac{(2N+2)\beta_1}{\beta}+2\right)}$$

حيث

$$C_4=\mu\left(\int_{\Omega_1^2}\left|(-\Delta_{\mathbb{H}})^{\beta/2}\psi\left(\tilde{\rho}\right)\right|^{\frac{p}{p-n}}\psi^{\mu-\frac{p}{p-n}}\left(\tilde{\rho}\right)d\tilde{\eta}\int_{\Omega_2}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_1\right)d\tilde{t}_1\int_{\Omega_3}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_2\right)d\tilde{t}_2\right)^{\frac{p-n}{p}}$$

و

$$B\left(p\right)=C_5R^{-\beta_1+\frac{(p-1)}{p}\left(\frac{(2N+2)\beta_1}{\beta}+2\right)}$$

حيث

$$C_5=\left(\int_{\Omega_1^1}\psi^{\mu}\left(\tilde{\eta}\right)d\tilde{\eta}\int_{\Omega_2}\left|\mathbf{D}^{\beta_1}_{\tilde{t}_1|R^{-1}T}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_1\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\psi^{\frac{-\mu}{p-1}}\left(\tilde{t}_1\right)d\tilde{t}_1\int_{\Omega_3}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_2\right)d\tilde{t}_2\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

و

$$C\left(p\right)=C_6R^{-\beta_2+\frac{(p-1)}{p}\left(\frac{(2N+2)\beta_1}{\beta}+2\right)}$$

حيث

$$C_6=\left(\int_{\Omega_1^1}\psi^{\mu}\left(\tilde{\eta}\right)d\tilde{\eta}\int_{\Omega_2}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_1\right)d\tilde{t}_1\int_{\Omega_3}\left|\mathbf{D}^{\beta_2}_{\tilde{t}_2|R^{-1}T}\psi^{\mu}\left(\tilde{t}_2\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}\psi^{\frac{-\mu}{p-1}}\left(\tilde{t}_2\right)d\tilde{t}_2\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

من أجل ثابت موجب $K\tilde{C}$ حيث

$$\tilde{C}=\max\left\{(C_5^{\frac{1}{q}}C_2)^{\frac{pq}{pq-1}},(C_6^{\frac{1}{q}}C_2)^{\frac{pq}{pq-1}},(C_4^{\frac{1}{q}}C_2)^{\frac{pq}{pq-n}},(C_5^{\frac{1}{q}}C_3)^{\frac{pq}{pq-1}}\right.,$$

$$\left.(C_6^{\frac{1}{q}}C_3)^{\frac{pq}{pq-1}},(C_4^{\frac{1}{q}}C_3)^{\frac{pq}{pq-n}},(C_5^{\frac{m}{q}}C_1)^{\frac{pq}{pq-m}},(C_6^{\frac{m}{q}}C_1)^{\frac{pq}{pq-m}},(C_4^{\frac{m}{q}}C_1)^{\frac{pq}{pq-nm}}\right\}$$

ومن ثم ، نحصل على

$$I_v+I_0^{\mu}\leq K\tilde{C}\left\{R^{\sigma_1}+R^{\sigma_2}+\ldots+R^{\sigma_9}\right\}\tag{112}$$

وبالمثل ، نحصل على تقدير I_u

$$I_u+J_0^{\mu}\leq K\tilde{\tilde{C}}\left\{R^{\delta_1}+R^{\delta_2}+\ldots+R^{\delta_9}\right\}\tag{113}$$

حيث يتم تحديد القيمة $\tilde{\tilde{C}}$ كتحديد القيمة $\tilde{C}$.

وأخيرًا ، من خلال أخذ $R \to \infty$ ، نلاحظ ما يلي:

إذا $\max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_9, \delta_1, \ldots, \delta_9\} < 0$ وفي هذه الحالة ، يؤول الجانب الأيمن من (97) إلى الصفر بينما يكون الجانب الأيسر موجبًا تمامًا. ومن ثم ، نحصل على تناقض.

أو $\max\{\sigma_1, \ldots, \sigma_9, \delta_1, \ldots, \delta_9\} = 0$ وفي هذه الحالة ، بعد تحليل مماثل كما في معادلة واحدة ، نثبت وجود تناقض. $\square$

الفصل الرابع

عرض نتائج عدم وجود حلول شاملة لمسألة كوشي لنظام (FDS)

~ ملخص ~

نعرض بعض النتائج لعدم وجود حلول شاملة للمسائل (114) و (115) و (116) وطريقة الإثبات التي نستخدمها تعتمد على إختيار دالة إختبار مناسبة .

1.4 مدخل:

قبل عرض نتائجنا ، نلقي نظرة فاحصة على المعادلات المكافئة للغاية الغير خطية،[10] والتي تعرف أيضا بإسم معادلات مكافئة متعددة الزمن. هذه الأنواع من المعادلات بدأت في حالة المعادلات الخطية مع Kolmogoroff في عام 1934 ، قدمها لهم من أجل وصف كثافة الإحتمال لنظام مع $2N$ درجة من الحرية ، ومنذ ذلك الحين قدم عدد كبير من المؤلفين العديد من التعميمات.
إن المعادلات المكافئة للغاية الخطية تظهر في النظرية الحركية للغازات .كماأن بعض نماذج العمليات العشوائية تؤدي أيضًا إلى معادلات مكافئة للغاية .
وللذكر فقد تمت دراسة تحليل المعادلات الغير خطية المكافئة للغاية من قبل Ugowsk الذي درس التفاوتات التفاضلية المكافئة زمنيا متعددة الأبعاد ؛ على سبيل المثال وضع مبدأ الحد الأقصى الذي هو مفيد جدا للتطبيقات.
وقد تم إعادة صياغة نتائجه ، في سياق أقل عمومية ، من قبل Walter .
Lavrenyuk والمتعاونين معه Lanconelli و . Citti و al ويجدر بنا الإلمام بمعرفة ماذا يحدث في حالة عدم الإنتشار ، حاليا يتم ذكر تطبيق مثير للإهتمام .

وكما لايخفى علينا ذكر أنه لمعادلاتنا ونظامنا تطبيقات واسعة النطاق في نظرية الإنتشار في الوسائط المسامية.

والآن بادئ ذي بدء نعرض بعض النتائج لعدم وجود حلول شاملة لنظام معادلات (114) :

[10] Nonlinear ultra-parabolic equations

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u-u_2)+\mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u-u_1)+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(|u|)=k_1|u|^{p_1}|v|^{q_1},\ k_1=const. \\ \mathbf{D}^{\beta_1}_{0|t_1}(v-v_2)+\mathbf{D}^{\beta_2}_{0|t_2}(v-v_1)+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(|v|)=k_2|u|^{p_2}|v|^{q_2},\ k_2=const. \end{cases} \tag{114}$$

وذلك من أجل كل

$$(t_1,t_2,x)\in Q=\mathbb{R}_+\times\ \mathbb{R}_+\times\ \mathbb{R}^N$$

حيث الشروط الإبتدائية

$$u(t_1,0,x)=u_1(t_1,x)\ ,\ u(0,t_2,x)=u_2(t_2,x),$$
$$v(t_1,0,x)=v_1(t_1,x)\ ,\ v(0,t_2,x)=v_2(t_2,x),$$

هنا

$$.q_2\geq 0\ ,\ q_1>1\ ,\ p_2>1\ ,\ p_1\geq 0$$
$$.1\leq\alpha,\beta\leq 2\ ,\ 0<\beta_1,\beta_2<1\ ,\ 0<\alpha_1,\alpha_2<1$$

ثم نقوم بعرض نتائج المعادلة (115) :

$$\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u-u_2)+\mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u-u_1)+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(|u|^m)=h|u|^p, \tag{115}$$

حيث $h=t_1^s t_2^l|x|^r$ و $p>m>1$ أعداد حقيقية.

ونتائج نظام معادلات (116) :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u-u_2)+\mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u-u_1)+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(|u|^m)=k_1|v|^q, \\ \mathbf{D}^{\beta_1}_{0|t_1}(v-v_2)+\mathbf{D}^{\beta_2}_{0|t_2}(v-v_1)+(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(|v|^n)=k_2|u|^p, \end{cases} \tag{116}$$

حيث $k_1=t_1^{s_1}t_2^{l_1}|x|^{r_1}$ و $k_2=t_1^{s_2}t_2^{l_2}|x|^{r_2}$.

2.4 عرض النتائج:

في هذا الصدد ، نضع الشروط التي تضمن عدم وجود حلول شاملة لنظام معادلات (114) . وبتعبير أدق ، لدينا النظرية التالية:

1.2.4 نظرية :
ليكن $p_1\geq 0\ ,\ p_2>1\ ,\ q_1>1\ ,\ q_2\geq 0$ وليكن $u_0,v_0\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$
حيث أن $u_0\geq 0, v_0\geq 0$.
و نفرض أن:

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dP > 0, \qquad \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dP > 0,$$
$$\int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dP > 0, \qquad \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dP > 0,$$

حيث $dP = dt_1dt_2dx$ ودالة الأختبار φ موضحة لاحقا في البرهان.
عندئذ هناك حلول تفجير[11] لنظام معادلات (114) كلما كان:

$$\max\{\sigma_1, \cdots, \sigma_9, \delta_1, \ldots, \delta_9\} \leq 0,$$

البرهان: نقوم بوضع

$$I_0 = \int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dP,$$
$$J_0 = \int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi dP,$$

تعريف: ليكن $Q_T = (0,T)\times\ (0,T)\times\ \mathbb{R}^N, \quad 0 < T < +\infty$
نقول أن $(u,v) \in \left(L^1_{loc}(Q_T)\right)\times\ \left(L^1_{loc}(Q_T)\right)$ حل ضعيف محلي للمسألة (114) في Q_T ، إذا كان
$u^{p_i}v^{q_i} \in L^1_{loc}(Q_T),\ \ i = 1,2,$ ويحقق

$$\int_Q k_1|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi dP + I_0 = \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dP + \int_Q |u|\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi dP.$$
$$\int_Q k_2|u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi dP + J_0 = \int_Q v\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q v\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi dP + \int_Q |v|\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi dP. \tag{117}$$

وذلك من أجل كل دالة إختبار $\varphi \in C^\infty$ ، **بحيث** $\varphi(T,t_2,x) = \varphi(t_1,T,x) = 0,$ و $P = (t_1,t_2,x)$.
الآن نضع

$$\sigma_1 = -\frac{q_1\beta_1 - (N+2)(p_2q_1 - 1) + p_2q_1\alpha_1}{p_2q_1 - 1}$$
$$\sigma_2 = -\frac{q_1\beta_2 - (N+2)(p_2q_1 - 1) + p_2q_1\alpha_1}{p_2q_1 - 1}$$

[11] blow-up

$$\sigma_3 = -\frac{q_1\beta - (N+2)(p_2q_1-1) + p_2q_1\alpha_1}{p_2q_1-1}$$
$$\sigma_4 = -\frac{q_1\beta_1 - (N+2)(p_2q_1-1) + p_2q_1\alpha_2}{p_2q_1-1}$$
$$\sigma_5 = -\frac{q_1\beta_2 - (N+2)(p_2q_1-1) + p_2q_1\alpha_2}{p_2q_1-1}$$
$$\sigma_6 = -\frac{q_1\beta - (N+2)(p_2q_1-1) + p_2q_1\alpha_2}{p_2q_1-1}$$
$$\sigma_7 = -\frac{q_1\beta_1 - (N+2)(p_2q_1-1) + p_2q_1\alpha}{p_2q_1-1}$$
$$\sigma_8 = -\frac{q_1\beta_2 - (N+2)(p_2q_1-1) + p_2q_1\alpha}{p_2q_1-1}$$
$$\sigma_9 = -\frac{q_1\beta - (N+2)(p_2q_1-1) + p_2q_1\alpha}{p_2q_1-1}$$

نفرض الآن أن الحل غير تافه وشامل، ثم نستبدل φ بـ φ^{μ} في (117) ، ثم نستخدم متراجحة هولدر في تقدير I_u و I_v (كما سنرى لاحقا) لنحصل على التقديرات التالية:

$$\int_Q u|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}| \leq \left(\int_Q k_2|u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi^{\mu}\right)^{\frac{1}{p_2}} \times \left(\int_Q k_2^{-\frac{1}{p_2-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}|^{\frac{p_2}{p_2-1}}|v|^{-\frac{q_2}{p_2-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}, \tag{118}$$

$$\int_Q u|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}| \leq \left(\int_Q k_2|u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi^{\mu}\right)^{\frac{1}{p_2}} \times \left(\int_Q k_2^{-\frac{1}{p_2-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}|^{\frac{p_2}{p_2-1}}|v|^{-\frac{q_2}{p_2-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}, \tag{119}$$

$$\int_Q u|\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^{\mu}| \leq \left(\int_Q k_2|u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi^{\mu}\right)^{\frac{1}{p_2}} \times \left(\int_Q k_2^{-\frac{1}{p_2-1}}|\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^{\mu}|^{\frac{p_2}{p_2-1}}|v|^{-\frac{q_2}{p_2-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}, \tag{120}$$

وبالمثل، لدينا $\int_Q v|\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu| \leq \left(\int_Q k_1|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi^\mu\right)^{\frac{1}{q_1}}$

$$\times\left(\int_Q k_1^{-\frac{1}{q_1-1}}|\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|^{\frac{q_1}{q_1-1}}|u|^{-\frac{p_1}{q_1-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{q_1-1}}\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}, \tag{121}$$

$$\int_Q v|\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu| \leq \left(\int_Q k_1|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi^\mu\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\times\left(\int_Q k_1^{-\frac{1}{q_1-1}}|\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|^{\frac{q_1}{q_1-1}}|u|^{-\frac{p_1}{q_1-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{q_1-1}}\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}, \tag{122}$$

$$\int_Q v|\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi^\mu| \leq \left(\int_Q k_1|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi^\mu\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\times\left(\int_Q k_1^{-\frac{1}{q_1-1}}|\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi^\mu|^{\frac{q_1}{q_1-1}}|u|^{-\frac{p_1}{q_1-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{q_1-1}}\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}, \tag{123}$$

إذا قمنا بتعيين

$$I_u = \left(\int_Q k_2|u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi^\mu\right)^{\frac{1}{p_2}} \quad , \quad I_v = \left(\int_Q k_1|u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi^\mu\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$A(p_2) = \left(\int_Q k_2^{-\frac{1}{p_2-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|^{\frac{p_2}{p_2-1}}|v|^{-\frac{q_2}{p_2-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$$

$$A(q_1) = \left(\int_Q k_1^{-\frac{1}{q_1-1}}|\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|^{\frac{q_1}{q_1-1}}|u|^{-\frac{p_1}{q_1-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{q_1-1}}\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}$$

$$B(p_2) = \left(\int_Q k_2^{-\frac{1}{p_2-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|^{\frac{p_2}{p_2-1}}|v|^{-\frac{q_2}{p_2-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$$

$$B(q_1) = \left(\int_Q k_1^{-\frac{1}{q_1-1}}|\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|^{\frac{q_1}{q_1-1}}|u|^{-\frac{p_1}{q_1-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{q_1-1}}\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}$$

$$C(p_2) = \left(\mu\int_Q k_2^{-\frac{1}{p_2-1}}|\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p_2}{p_2-1}}|v|^{-\frac{q_2}{p_2-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{p_2-1}}\right)^{\frac{p_2-1}{p_2}}$$

$$C(q_1) = \left(\mu\int_Q k_1^{-\frac{1}{q_1-1}}|\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi|^{\frac{q_1}{q_1-1}}|u|^{-\frac{p_1}{q_1-1}}\varphi^{-\frac{\mu}{q_1-1}}\right)^{\frac{q_1-1}{q_1}}$$

$$I_0^\mu = \int_Q u_2\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu + \int_Q u_1\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu \tag{124}$$

$$J_0^\mu = \int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu + \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu \tag{125}$$

ثم ، بإستخدام التقديرات (117) ، (123) ، يمكننا أن نكتب (117) بالشكل

$$I_v + I_0^\mu \le I_u^{\frac{1}{p_2}} \left(A(p_2) + B(p_2) + C(p_2)\right)$$

$$I_u + J_0^\mu \le I_v^{\frac{1}{q_1}} \left(A(q_1) + B(q_1) + C(q_1)\right)$$

منذ كان $I_0^\mu > 0$ و $J_0^\mu > 0$ ، يكون لدينا

$$I_v \le I_u^{\frac{1}{p_2}} \left(A(p_2) + B(p_2) + C(p_2)\right), \tag{126}$$

$$I_u \le I_v^{\frac{1}{q_1}} \left(A(q_1) + B(q_1) + C(q_1)\right), \tag{127}$$

الآن ، من (126) و (127) ، لدينا

$$I_v + I_0^\mu \le I_v^{\frac{1}{p_2 q_1}} \left(A^{\frac{1}{p_2}}(q_1) + B^{\frac{1}{p_2}}(q_1) + C^{\frac{1}{p_2}}(q_1)\right) \left(A(p_2) + B(p_2) + C(p_2)\right),$$

عندئذ بإستخدام متراجحة $\epsilon - Young$ نحصل على

$$\begin{aligned} I_v + I_0^\mu \le \\ K\Bigg[&\left(A^{\frac{1}{p_2}}(q_1)A(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} + \left(B^{\frac{1}{p_2}}(q_1)A(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} + \left(C^{\frac{1}{p_2}}(q_1)A(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} \\ &+ \left(A^{\frac{1}{p_2}}(q_1)B(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} + \left(B^{\frac{1}{p_2}}(q_1)B(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} + \left(C^{\frac{1}{p_2}}(q_1)B(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} \\ &+ \left(A^{\frac{1}{p_2}}(q_1)C(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} + \left(B^{\frac{1}{p_2}}(q_1)C(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}} + \left(C^{\frac{1}{p_2}}(q_1)C(p_2)\right)^{\frac{p_2q_1}{p_2q_1-1}}\Bigg], \end{aligned}$$

ثم من أجل K ثابت موجب، نختار دالة الإختبار $\varphi(t_1, t_2, x)$ من الشكل

$$\varphi(t_1, t_2, x) = \varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2)\varphi_3(x), \tag{128}$$

حيث $\varphi_1(t_1) = (1 - t_1/T)_+^\lambda$ ، $\varphi_2(t_2) = (1 - t_2/T)_+^\lambda$ و [12] $\varphi_3(x) = \psi(|x|^2/T^2)$.

لنمر الآن إلى المتغيرات الجديدة

$$\tau_1 = T^{-1}t_1, \quad \tau_2 = T^{-1}t_2, \quad y = T^{-1}x.$$

[12] $(1 - t_1/T)_+^\lambda = \sup\left\{0, (1 - t_1/T)^\lambda\right\}$

لدينا

$$A(p_2) = CT^{-\alpha_1+(N+2)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)}$$
$$A(q_1) = CT^{-\beta_1+(N+2)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)}$$
$$B(p_2) = CT^{-\alpha_2+(N+2)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)}$$
$$B(q_1) = CT^{-\beta_2+(N+2)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)}$$
$$C(p_2) = CT^{-\alpha+(N+2)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)}$$
$$C\left(q_1\right) = CT^{-\beta+(N+2)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)}$$

وبإعتبار C ثابت موجب يكون لدينا

$$I_v + I_0^{\mu} \leq K\left[T^{\sigma_1} + T^{\sigma_2} + \cdots + T^{\sigma_9}\right], \tag{129}$$

بالمثل، من أجل I_u نحصل على التقدير

$$I_u + J_0^{\mu} \leq K\left[T^{\delta_1} + T^{\delta_2} + \cdots + T^{\delta_9}\right], \tag{130}$$

وأخيرا بالإنتقال إلى النهاية $T \to +\infty$ نلاحظ أن :

إما

$$\max\left\{\sigma_1, \cdots, \sigma_9, \delta_1, \cdots, \delta_9\right\} < 0,$$

وفي هذه الحالة ، يميل الجانب الأيمن إلى الصفر بينما يكون الجانب الأيسر موجبًا تمامًا، ومن ثم نحصل على تناقض.

أو

$$\max\left\{\sigma_1, \cdots, \sigma_9, \delta_1, \cdots, \delta_9\right\} = 0,$$

وفي هذه الحالة ، بعد تحليل مماثل كما في معادلة واحدة ، نثبت وجود تناقض. □

ثم إن المعادلة (115) تطرح نتائج نلخصها في النظرية التالية:

2.2.4 **نظرية :**

نفرض أن

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1} \varphi dP > 0 \ , \ \int_Q u_1 \mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2} \varphi dP > 0,$$

إذا كان:

$$1 < p < \min\left\{1+\frac{s+l+r+\alpha}{2+N-\alpha_1}\ ,\ 1+\frac{s+l+r+\alpha_2}{2+N-\alpha_2}\ ,\ m\left(1+\frac{s+l+r+\alpha}{2+N-\alpha}\right)\right\},$$

فإن المعادلة (115) لاتقبل حلولا ضعيفة شاملة .

البرهان:

الحلول لـ (115) خاضعة للشروط

$$u(t_1,0,x)=u_1(t_1,x) \quad , \quad u(0,t_2,x)=u_2(t_2,x), \qquad (*)$$

نبدأ بتقديم المقصود بالمعنى الضعيف في التعريف التالي:

تعريف:

دالة u حيث $u\in L^m(Q)\cap L^p(Q)$ تسمى حل ضعيف لـ (115) إذا

$$\begin{aligned}&\int_Q h|u|^p\varphi dP+\int_Q u_2\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dP+\int_Q u_1\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dP,\\ =&\int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dP+\int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dP+\int_Q |u|^m(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi dP,\end{aligned} \qquad (131)$$

لأي دالة إختبار φ ، حيث أن $P=(t_1,t_2,x)$ ، $\varphi(T,t_2,x)=\varphi(t_1,T,x)=0,$ و $\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi<+\infty$ ، $\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi<+\infty$.

- لاحظ أن كل حل ضعيف هو حل كلاسيكي بجوارالنقاط $\{(t_1,t_2,x)\,|u(t_1,t_2,x)\geq 0\}$

للبرهان نحن بحاجة أيضا إلى الفرضية التالية:

فرضية:

نفرض أن $\delta\in[0,2],\beta+1\geq 0$ و $\theta\in \mathrm{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

لدينا

$$|\theta(x)|^\beta\theta(x)(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\theta(x)\geq\frac{1}{\beta+2}(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}|\theta(x)|^{\beta+2}.$$

وكذلك بحاجة إلى التوطئة التالية:

توطئة: لتكن الدالة ϕ المعرفة كالآتي

$$\phi(t)=\begin{cases}(1-\frac{t}{T})^\lambda, & 0\leq t\leq T,\\ 0, & t>T,\end{cases}$$

عندئذ لدينا

$$\int_0^T \mathbf{D}^{\alpha}_{t|T}\phi(t)dt = C_{\alpha,\lambda}T^{1-\alpha},$$

حيث

$$C_{\alpha,\lambda} = \frac{\lambda\Gamma(\lambda-\alpha)}{(\lambda-\alpha+1)\Gamma(\lambda-2\alpha+1)}.$$

• إستراتيجيتنا في البرهان هي إستخدام الصيغة الضعيفة للمسألة مع إختيار مناسب لدالة الإختبار، ثم نفرض أن الحل غير تافه و شامل.

ليكن إختيارنا لدالة الإختبار $\varphi\left(t_1,t_2,x\right)$ بالشكل

$$\varphi\left(t_1,t_2,x\right) = \varphi_1\left(t_1\right)\varphi_2\left(t_2\right)\varphi_3\left(x\right). \tag{132}$$

حيث $\varphi_1(t_1) = (1-\frac{t_1}{T})^{\lambda}_{+}$ ، $\varphi_2(t_2) = (1-\frac{t_2}{T})^{\lambda}_{+}$ ،

[13] $\varphi_3(x) = \psi(|x|^2/T^2)$

الآن، نستبدل φ بـ φ^{μ} في (التعريف) ، ونقدر كل من

$$\int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}dP \quad , \quad \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}dP \quad , \quad \int_Q |u|^m\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^{\mu}dP,$$

• تقدير $\displaystyle\int_{Q_T} u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}dP$

بإستخدام متراجحة $\varepsilon - Young$ نحصل على

$$\int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}dP \leq \varepsilon\int_Q h|u|^p\varphi^{\mu}dP + C(\varepsilon)\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP. \tag{133}$$

بالفعل لدينا

$$u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu} \leq |u||\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}| = h^{\frac{1}{p}}h^{\frac{-1}{p}}\varphi^{\frac{\mu}{p}}\varphi^{\frac{-\mu}{p}}|u||\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}|$$

إذا قمنا بتعيين

$$a = h^{\frac{1}{p}}|u|\varphi^{\frac{\mu}{p}}$$

و

$$b = h^{\frac{-1}{p}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}|\varphi^{\frac{-\mu}{p}}$$

من متراجحة ε – Young لدينا

$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q$ حيث $p+q = pq$ و $a,b \in \mathbb{R}^+$

ثم بالتعويض نجد

[13] $(1-\frac{t_1}{T})^{\lambda}_{+} = \sup\left\{0\ ,\ (1-\frac{t_1}{T})^{\lambda}\right\}$

$$uD_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu \le \varepsilon\left(h^{\frac{1}{p}}|u|\varphi^{\frac{\mu}{p}}\right)^p + C(\varepsilon)\left(h^{\frac{-1}{p}}|D_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu|\varphi^{\frac{-\mu}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}},$$

أين $q = \dfrac{p}{p-1}$

أخيرا

$$uD_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu \le \varepsilon\left(h|u|^p\varphi^\mu\right) + C(\varepsilon)\left(h^{\frac{-1}{p-1}}|D_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}\right),$$

ومنه

$$\int_Q uD_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu dP \le \varepsilon\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP + C(\varepsilon)\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|D_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP,$$

• تقدير $\int_{Q_T} uD_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^\mu dP$ [14]

بالمثل، لدينا

$$\int_Q uD_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^\mu dP \le \varepsilon\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP + C(\varepsilon)\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|D_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP, \quad (134)$$

لاحظ أن

$$\int_Q u_2D_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu dP = \left(\int_0^T D_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi_1^\mu(t_1)\,dt_1\right)\int_S u(0,t_2,x)\,\varphi_2^\mu(t_2)\,\varphi_3^\mu(x)\,dP_2, \quad (135)$$

مع مساعدة التوطئة سالفة الذكر يمكن إعادة كتابة المعادلة (135) بالشكل

$$\int_Q u_2D_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu dP = C_{\alpha_1,\lambda\mu}T^{1-\alpha_1}\int_S u(0,t_2,x)\,\varphi_2^\mu(t_2)\,\varphi_3^\mu(x)\,dP_2, \quad (136)$$

حيث $S = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$

وبالمثل لدينا

$$\int_Q u_1D_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^\mu dP = C_{\alpha_2,\lambda\mu}T^{1-\alpha_2}\int_S u(t_1,0,x)\,\varphi_1^\mu(t_1)\,\varphi_3^\mu(x)\,dP_1, \quad (137)$$

حيث $P_1 = (t_1, x)$ ، $P_2 = (t_2, x)$.

• $\int_Q |u|^m(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^\mu dP$

نستخدم خاصية التحدب في الفرضية

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^\mu \le \mu\varphi^{\mu-1}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi,$$

عندئذ

[14]This integration can be simplified using the lemmas, or it's estimate using change of variable , as we shall see later.

$$\int_Q |u|^m(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^\mu dP \le \int_Q \mu\varphi^{\mu-1}|u|^m(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi dP,$$

بإستخدام متراجحة Young $\varepsilon -$ نحصل على التقدير

$$\int_Q \mu\varphi^{\mu-1}|u|^m(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi dP \le \ \varepsilon\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP$$

$$+C(\varepsilon)\int_Q h^{\frac{-m}{p-m}}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}}dP, \tag{138}$$

الآن ، بإستخدام (133) ، (134) ، (135) و (138) ، نحصل على

$$\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP + C_{\alpha_1,\lambda\mu}T^{1-\alpha_1}\int_S u\left(0,t_2,x\right)\varphi_2^\mu\left(t_2\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_2$$

$$+C_{\alpha_2,\lambda\mu}T^{1-\alpha_2}\int_S u\left(t_1,0,x\right)\varphi_1^\mu\left(t_1\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_1 \tag{139}$$

$$\le 3\varepsilon\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP + C'(\varepsilon)\left(\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP\right.$$

$$\left.+\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP + \int_Q h^{\frac{-m}{p-m}}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}}dP\right).$$

إذا نختار $\varepsilon = \frac{1}{6}$

(على سبيل المثال) ، ثم نحصل على التقدير

$$\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP + 2C_{\alpha_1,\lambda\mu}T^{1-\alpha_1}\int_S u\left(0,t_2,x\right)\varphi_2^\mu\left(t_2\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_2$$

$$+2C_{\alpha_2,\lambda\mu}T^{1-\alpha_2}\int_S u\left(t_1,0,x\right)\varphi_1^\mu\left(t_1\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_1$$

$$\le C\left(\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP\right. \tag{140}$$

$$\left.+\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP + \int_Q h^{\frac{-m}{p-m}}|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}}dP\right).$$

من أجل C ثابت موجب ، الطرف الأيمن للمعادلة (140) خالي من الدالة u الغير معروفة. نمر الآن إلى المتغيرات الجديدة

$$\tau_1 = T^{-1}t_1, \quad \tau_2 = T^{-1}t_2, \quad y = T^{-1}x, \tag{141}$$

لدينا

$$\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}} |\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{p-1}} dP$$

$$= \left(\int_S t_2^{\frac{-l}{p-1}} |x|^{\frac{-r}{p-1}} \varphi_2^{\mu} \varphi_3^{\mu} dP_2\right) \left(\int_0^T t_1^{\frac{-s}{p-1}} |\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T} \varphi_1^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}} \varphi_1^{\frac{-\mu}{p-1}} dt_1\right)$$

$$\leq C_1 T^{2+N-\frac{s+l+r+\alpha_1 p}{p-1}} \tag{142}$$

حيث $C_1 = \left(\int_{\Omega_2} \tau_2^{\frac{-l}{p-1}} |y|^{\frac{-r}{p-1}} \varphi_2^{\mu} \varphi_3^{\mu} dP_{\tau_2}\right) \left(\int_0^1 \tau_1^{\frac{-s}{p-1}} |\mathbf{D}^{\alpha_1}_{\tau_1|1} \varphi_1^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}} \varphi_1^{\frac{-\mu}{p-1}} d\tau_1\right)$ ،

مع $\mu > \frac{p}{p-1}$ ، و $P_{\tau_2} = (\tau_2, y)$ ، $\Omega_2 = \{1 \leq \tau_2 + |y| \leq 2\}$ ،

و

$$\int_{\Omega_2} \tau_2^{\frac{-l}{p-1}} |y|^{\frac{-r}{p-1}} \varphi_2^{\mu} \varphi_3^{\mu} dP_{\tau_2} = \int_0^1 \tau_2^{\frac{-l}{p-1}} (1-\tau_2)^{\lambda\mu} \left(\int_{\{1-\tau_2 \leq |y| \leq 2-\tau_2\}} |y|^{\frac{-r}{p-1}} \psi^{\mu}\left(|y|^2\right) dy\right) d\tau_2$$

بما أن $|y|^{\frac{-r}{p-1}} \leq (1-\tau_2)^{\frac{-r}{p-1}}$ ، و $\psi^{\mu}\left(|y|^2\right) \leq 1$ ، $\forall (\tau_2, y) \in \Omega_2.$ عندئذ

$$\int_{\Omega_2} \tau_2^{\frac{-l}{p-1}} |y|^{\frac{-r}{p-1}} \varphi_2^{\mu} \varphi_3^{\mu} dP_{\tau_2} \leq \int_0^1 \tau_2^{\frac{-l}{p-1}} (1-\tau_2)^{\lambda\mu - \frac{r}{p-1}} \left(\int_{\{1-\tau_2 \leq |y| \leq 2-\tau_2\}} dy\right) d\tau_2$$

$$\leq V.\mathbf{B}\left(1 - \frac{l}{p-1}, 1 - \frac{r}{p-1} + \lambda\mu\right)$$

حيث $V = \int_{\{0 \leq |y| \leq 2\}} dy < +\infty$ ، و

$$\int_0^1 \tau_2^{\frac{-l}{p-1}} (1-\tau_2)^{\lambda\mu - \frac{r}{p-1}} d\tau_2 = \beta\left(1 - \frac{l}{p-1}, 1 - \frac{r}{p-1} + \lambda\mu\right)$$

$$= \frac{\Gamma(1 - \frac{l}{p-1})\Gamma(1 - \frac{r}{p-1} + \lambda\mu)}{\Gamma(2 - \frac{l}{p-1} - \frac{r}{p-1} + \lambda\mu)} < +\infty.$$

[15]

من أجل

$$I = \int_0^1 \tau_1^{\frac{-s}{p-1}} |\mathbf{D}^{\alpha_1}_{\tau_1|1} \varphi_1^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}} \varphi_1^{\frac{-\mu}{p-1}} d\tau_1 = \int_0^1 \tau_1^{\frac{-s}{p-1}} |\mathbf{D}^{\alpha_1}_{\tau_1|1} (1-\tau_1)^{\lambda\mu}|^{\frac{p}{p-1}} (1-\tau_1)^{\frac{-\mu}{p-1}} d\tau_1$$

مع

$$\mathbf{D}^{\alpha_1}_{\tau_1|1} (1-\tau_1)^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{d\tau_1} \int_{\tau_1}^1 \frac{(1-\sigma)^{\lambda\mu}}{(\sigma-\tau_1)^{\alpha_1}} d\sigma$$

[15] Beta function

$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{d\tau_1}\int_{\tau_1}^{1}\frac{\frac{(1-\sigma)^{\lambda\mu}}{(1-\tau_1)^{\lambda\mu}}\frac{1}{(1-\tau_1)^{\alpha_1-\lambda\mu}}}{\frac{(\sigma-\tau_1)^{\alpha_1}}{(1-\tau_1)^{\alpha_1}}}d\sigma$$

نضع $\sigma = \tau_1 + \eta(1-\tau_1)$ ،

ومنه

$$\mathbf{D}^{\alpha_1}_{\tau_1|1}(1-\tau_1)^{\lambda\mu} = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{d\tau_1}\left((1-\tau_1)^{\lambda\mu-\alpha_1+1}\right)\int_0^1 \eta^{-\alpha_1}(1-\eta)^{\lambda\mu}d\eta$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\beta\left(1-\alpha_1\ ,\ \lambda\mu+1\right)\frac{d}{d\tau_1}(1-\tau_1)^{\lambda\mu-\alpha_1+1}$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{\Gamma(1-\alpha_1).\Gamma(\lambda\mu+1)}{\Gamma(\lambda\mu-\alpha_1+2)}\left(-(\lambda\mu-\alpha_1+1)\right)(1-\tau_1)^{\lambda\mu-\alpha_1}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda\mu+1)}{\Gamma(\lambda\mu-\alpha_1+1)}(1-\tau_1)^{\lambda\mu-\alpha_1}$$

وبالتالي

$$I = \int_0^1 \tau_1^{\frac{-s}{p-1}}\left[\frac{\Gamma(\lambda\mu+1)}{\Gamma(\lambda\mu-\alpha_1+1)}(1-\tau_1)^{\lambda\mu-\alpha_1}\right]^{\frac{p}{p-1}}(1-\tau_1)^{\frac{-\mu}{p-1}}d\tau_1$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\lambda\mu+1)}{\Gamma(\lambda\mu-\alpha_1+1)}\right]^{\frac{p}{p-1}}\int_0^1 \tau_1^{\frac{-s}{p-1}}(1-\tau_1)^{(\lambda\mu-\alpha_1)\frac{p}{p-1}-\frac{\mu}{p-1}}d\tau_1$$

$$= \left[\frac{\Gamma(\lambda\mu+1)}{\Gamma(\lambda\mu-\alpha_1+1)}\right]^{\frac{p}{p-1}}\beta\left(1-\frac{s}{p-1}\ ,\ (\lambda\mu-\alpha_1)\frac{p}{p-1}-\frac{\mu}{p-1}+1\right) < +\infty$$

أخيرا $C_1 < +\infty$

بالمثل لدينا

$$\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP$$

$$= \left(\int_S t_1^{\frac{-s}{p-1}}|x|^{\frac{-r}{p-1}}\varphi_1^{\mu}\varphi_3^{\mu}dP_1\right)\left(\int_0^T t_2^{\frac{-l}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi_2^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}}\varphi_2^{\frac{-\mu}{p-1}}dt_2\right)$$

$$\leq C_2T^{2+N-\frac{s+l+r+\alpha_2 p}{p-1}} \tag{143}$$

حيث

$$C_2 = \left(\int_{\Omega_1} \tau_1^{\frac{-s}{p-1}} |y|^{\frac{-r}{p-1}} \varphi_1^{\mu}\varphi_3^{\mu} dP_{\tau_1}\right)\left(\int_0^1 \tau_2^{\frac{-l}{p-1}} |\mathbf{D}^{\alpha_2}_{\tau_2|1}\varphi_2^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}} \varphi_2^{\frac{-\mu}{p-1}} d\tau_2\right) < +\infty$$

مع

$\mu > \dfrac{p}{p-1}$ و $P_{\tau_1} = (\tau_1, y)$ و $\Omega_1 = \{1 \le \tau_1 + |y| \le 2\}$.

الآن ، نقدر

$$\int_Q h^{\frac{-m}{p-m}} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}} \varphi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}} dP.$$

لدينا

$$\begin{aligned} &\int_Q h^{\frac{-m}{p-m}} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}} \varphi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}} dP \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{-mr}{p-m}} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi_3|^{\frac{p}{p-m}} \varphi_3^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}} dx\right)\left(\int_{[0,T][0,T]} t_1^{\frac{-ms}{p-m}} t_2^{\frac{-ml}{p-m}} \varphi_1^{\mu}\varphi_2^{\mu} dt_1 dt_2\right) \\ &\le C_3 T^{2+N-\frac{m(s+l+r)+\alpha p}{p-m}}. \end{aligned} \tag{144}$$

حيث

$$\begin{aligned} C_3 = &\int_{supp\psi} |y|^{\frac{-mr}{p-m}} |(-\Delta)_y^{\frac{\alpha}{2}}\psi|^{\frac{p}{p-m}} \psi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}} dy \\ &\times \int_{\Omega} \tau_1^{\frac{-ms}{p-m}} \tau_2^{\frac{-ml}{p-m}} (1-\tau_1)^{\lambda\mu}(1-\tau_2)^{\lambda\mu} d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

أين $supp\psi = \{0 \le |y|^2 \le 2\}$ ، و [16] $\psi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}}(|y|^2) \le 1$ ، من أجل كل $y \in \mathrm{supp}\psi$ ،

عندئذ ، بإستخدام متراجحة $\varepsilon -$ Young ، نحصل على

$$\begin{aligned} \int_{supp\psi} |y|^{\frac{-mr}{p-m}} |(-\Delta)_y^{\frac{\alpha}{2}}\psi|^{\frac{p}{p-m}} \psi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}} dy &\le \int_{supp\psi} |y|^{\frac{-mr}{p-m}} |(-\Delta)_y^{\frac{\alpha}{2}}\psi|^{\frac{p}{p-m}} dy \\ &\le \varepsilon \int_{\{0\le|y|^2\le2\}} |y|^{\frac{-2mr}{p-m}} |(-\Delta)_y^{\frac{\alpha}{2}}\psi\left(|y|^2\right)|^{\frac{2p}{p-m}} dy + C(\varepsilon)\int_{\{0\le|y|^2\le2\}} 1^2 dy \end{aligned}$$

من أجل $\varepsilon \to 0$ نجد

$$\int_{supp\psi} |y|^{\frac{-mr}{p-m}} |(-\Delta)_y^{\frac{\alpha}{2}}\psi|^{\frac{p}{p-m}} \psi^{(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m}} dy \le C\int_{\{0\le|y|^2\le2\}} dy < +\infty.$$

$$\int_{\Omega} \tau_1^{\frac{-ms}{p-m}} \tau_2^{\frac{-ml}{p-m}} \varphi_1^{\mu}\varphi_2^{\mu} d\tau_1 d\tau_2 = \int_{[0,1]\times[0,1]} \tau_1^{\frac{-ms}{p-m}} \tau_2^{\frac{-ml}{p-m}} (1-\tau_1)^{\lambda\mu}(1-\tau_2)^{\lambda\mu} d\tau_1 d\tau_2$$

[16] $(\mu-1-\frac{m\mu}{p})\frac{p}{p-m} > 0, because\ \mu > \frac{p}{p-m}.$

.

$$= \int_0^1 \tau_1^{\frac{-ms}{p-m}}(1-\tau_1)^{\lambda\mu}d\tau_1 \int_0^1 \tau_2^{\frac{-ml}{p-m}}(1-\tau_2)^{\lambda\mu}d\tau_2$$

$$= \mathbf{B}\left(1-\frac{ms}{p-m}\ ,\ 1+\lambda\mu\right)\mathbf{B}\left(1-\frac{ml}{p-m}\ ,\ 1+\lambda\mu\right) < +\infty,$$

مع $\mu > \dfrac{p}{p-m}$ و $\Omega = [0,1]\text{x}[0,1]$ وأخيرا $C_3 < +\infty.$

بواسطة (142) ، (143) ، (144) نحصل على التقدير التالي من أجل (140) ،

$$\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP + 2C_{\alpha_1,\lambda\mu}T^{1-\alpha_1}\int_S u\left(0,t_2,x\right)\varphi_2^\mu\left(t_2\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_2$$

$$+2C_{\alpha_2,\lambda\mu}T^{1-\alpha_2}\int_S u\left(t_1,0,x\right)\varphi_1^\mu\left(t_1\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_1$$

$$\leq C\left(T^{2+N-\frac{s+l+r+\alpha_1 p}{p-1}} + T^{2+N-\frac{s+l+r+\alpha_2 p}{p-1}} + T^{2+N-\frac{m(s+l+r)+\alpha p}{p-m}}\right). \tag{145}$$

لأجل C ثابت موجب،

الآن ، نحن بحاجة إلى أخذ

(a) $\quad 2+N-\frac{s+l+r+\alpha_1 p}{p-1} < 0$ أو $1 < p < 1+\frac{s+l+r+\alpha_1}{2+N-\alpha_1}$.

(b) $\quad 2+N-\frac{s+l+r+\alpha_2 p}{p-1} < 0$ أو $1 < p < 1+\frac{s+l+r+\alpha_2}{2+N-\alpha_2}$.

(c) $\quad 2+N-\frac{m(s+l+r)+\alpha p}{p-m} < 0$ أو $1 < p < m\left(1+\frac{s+l+r+\alpha}{2+N-\alpha}\right)$.

عندما يؤول T إلى $+\infty$ في (145) ، نحصل على تناقض ، لأن الطرف الأيسر للمعادلة موجب و الطرف الأيمن يؤول إلى الصفر .

بالنسبة للحالة الثانية نفرض أن أسس T في (145) معدومة، ثم نطبق متراجحة هولدر على الطرف الأيمن من (140) فنحصل على:

$$\int_Q |u||\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|dP = \int_Q |u|\left(h\varphi^\mu\right)^{\frac{1}{p}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|\left(h\varphi^\mu\right)^{\frac{-1}{p}}dP$$

$$\leq \left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$\int_Q |u||\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|dP = \int_Q |u|\left(h\varphi^\mu\right)^{\frac{1}{p}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|\left(h\varphi^\mu\right)^{\frac{-1}{p}}dP$$

$$\leq \left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

و

$$\int_Q |u|^m |\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^\mu| dP = \int_Q |u|^m \left(h\varphi^\mu\right)^{\frac{m}{p}} |\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi^\mu| \left(h\varphi^\mu\right)^{\frac{-m}{p}} dP$$

$$\leq \mu \left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{m}{p}} \left(\int_Q h^{\frac{-m}{p-m}} |\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}} \varphi^{\left(\mu-1-\frac{m\mu}{p}\right)\frac{p}{p-m}} dP\right)^{\frac{p-m}{p}}$$

$$\leq \mu C \left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_Q h^{\frac{-m}{p-m}} |\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}} \varphi^{\left(\mu-1-\frac{m\mu}{p}\right)\frac{p}{p-m}} dP\right)^{\frac{p-m}{p}}$$

لأنه عند إستخدام ، $\varepsilon -$ Young يكون لدينا

$$\left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{m}{p}} \leq \varepsilon 1^{\frac{1}{1-m}} + C(\varepsilon)\left(\left(\left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{1}{m}}\right).$$

من أجل $\varepsilon \to 0$ لدينا

$$\left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{m}{p}} \leq C\left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ثم

$$\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP + 2C_{\alpha_1,\lambda\mu}T^{1-\alpha_1}\int_S u\left(0,t_2,x\right)\varphi_2^\mu\left(t_2\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_2$$
$$+2C_{\alpha_2,\lambda\mu}T^{1-\alpha_2}\int_S u\left(t_1,0,x\right)\varphi_1^\mu\left(t_1\right)\varphi_3^\mu\left(x\right)dP_1$$
$$\leq \left(\int_{C_T} h|u|^p\varphi^\mu dP\right)^{\frac{1}{p}} C\left(\varphi\right). \tag{146}$$

حيث

$$C\left(\varphi\right) = C\left(\int_Q h^{\frac{-1}{p-1}} |\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{p-1}} dP\right.$$
$$\left. + \int_Q h^{\frac{-1}{p-1}} |\mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^\mu|^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{p-1}} dP + \int_Q h^{\frac{-m}{p-1}} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}} \varphi^{\left(\mu-1-\frac{m\mu}{p}\right)\frac{p}{p-m}} dP\right).$$

عندها، بإستخدام نظرية التقارب المهيمن لـ $Lebesgue's$ لدينا،

$$\int_Q h|u|^p\varphi^\mu dP \leq C \Longrightarrow \lim_{T\to+\infty}\int_{C_T} h|u|^p dP = 0$$

حيث $C_T = \{(t_1,t_2,x) \ / \ T \leq t_1+t_2+|x| \leq 2T\}$.

ثم ، ندع $T \to +\infty$ في (145) ، الجانب الأيمن لها يؤول إلى الصفر، وهو التناقض مرة أخرى. $\square$

نتائج نظام المعادلات (116) لايختلف كثيرا عن نتائج نظام المعادلات (114) وهذا ما تدعمه النظرية التالية:

3.2.4 **نظرية :**

ليكن $p>1$, $q>1$, $p>m$, $q>n$ ثم نفرض أن

$$\int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dP > 0 \ , \ \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dP > 0,$$

$$\int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi^\mu dP > 0 \ , \ \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi^\mu dP > 0,$$

عندئذ هناك حلول إنفجار لجملة المعادلات من النمط (116) كلما كان:

$$\max\{\sigma_1,\cdots,\sigma_9,\delta_1,\ldots,\delta_9\} \leq 0.$$

البرهان:

لنعتبر

$$\mathbf{D}^{\alpha_1}_{0|t_1}(u-u_2) + \mathbf{D}^{\alpha_2}_{0|t_2}(u-u_1) + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(|u|^m) = k_1|v|^q , \ k_1 = t_1^{s_1}t_2^{l_1}|x|^{r_1} \tag{147}$$

$$\mathbf{D}^{\beta_1}_{0|t_1}(v-v_2) + \mathbf{D}^{\beta_2}_{0|t_2}(v-v_1) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}(|v|^n) = k_2|u|^p , \ k_2 = t_1^{s_2}t_2^{l_2}|x|^{r_2} \tag{148}$$

نضع من أجل $(t_1,t_2,x) \in Q = \mathbb{R}_+ \text{x} \mathbb{R}_+ \text{x} \mathbb{R}^N$ الشروط الإبتدائية

$$u(t_1,0,x) = u_1(t_1,x) \ \ , u(0,t_2,x) = u_2(t_2,x) \tag{149}$$

$$v(t_1,0,x) = v_1(t_1,x) \ \ , v(0,t_2,x) = v_2(t_2,x) \tag{150}$$

هنا p,q أعداد حقيقية موجبة و $0<\alpha_1<\alpha_2<1$ ، $0<\beta_1<\beta_2<1$ ، $0<\alpha,\beta\leq 2$ ، نضع

$$I_0 = \int_Q u_2 \mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q u_1 \mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dP,$$

$$J_0 = \int_Q v_2 \mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q v_1 \mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi dP,$$

كذلك نحتاج إلى التعريف التالي:

تعريف 2 : نقول أن (u,v) حيث

$$(u,v) \in (L^p \cap L^m) \times (L^q \cap L^n)$$

حل ضعيف لجملة المعادلات $(148) - (147)$ إذا:

$$\int_Q k_1|v|^q \varphi dP + I_0$$
$$= \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi dP + \int_Q |u|^m (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi dP,$$

و

$$\int_Q k_2|u|^p \varphi dP + J_0$$
$$= \int_Q v\mathbf{D}^{\beta_1}_{t_1|T}\varphi dP + \int_Q v\mathbf{D}^{\beta_2}_{t_2|T}\varphi dP + \int_Q |v|^n (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \varphi dP, \qquad (151)$$

من أجل أي دالة إختبار φ حيث $\varphi \in C^\infty$ ،

ثم نضع

$$\sigma_1 = -\frac{q\left[(s_2+l_2+r_2)+\alpha_1 p+\beta_1-(N+2)p\right]}{pq-1}$$
$$-\frac{(s_1+l_1+r_1)+(N+2)}{pq-1}$$
$$\sigma_2 = -\frac{q\left[(s_2+l_2+r_2)+\alpha_1 p+\beta_2-(N+2)p\right]}{pq-1}$$
$$-\frac{(s_1+l_1+r_1)+(N+2)}{pq-1}$$
$$\sigma_3 = -\frac{q\left[(s_2+l_2+r_2)+\alpha_1 p+\beta-(N+2)p\right]}{pq-n}$$
$$-\frac{n(s_1+l_1+r_1)+n(N+2)}{pq-n}$$
$$\sigma_4 = -\frac{q\left[(s_2+l_2+r_2)+\alpha_2 p+\beta_1-(N+2)p\right]}{pq-1}$$

$$-\frac{(s_1+l_1+r_1)+(N+2)}{pq-1}$$

$$\sigma_5 = -\frac{q\left[(s_2+l_2+r_2)+\alpha_2 p+\beta_2-(N+2)p\right]}{pq-1}$$

$$-\frac{(s_1+l_1+r_1)+(N+2)}{pq-1}$$

$$\sigma_6 = -\frac{q\left[(s_2+l_2+r_2)+\alpha_2 p+\beta-(N+2)p\right]}{pq-n}$$

$$-\frac{n(s_1+l_1+r_1)+n(N+2)}{pq-n}$$

$$\sigma_7 = -\frac{q\left[m(s_2+l_2+r_2)+\alpha p+m\beta_1-(N+2)p\right]}{pq-m}$$

$$-\frac{m(s_1+l_1+r_1)+m(N+2)}{pq-m}$$

$$\sigma_8 = -\frac{q\left[m(s_2+l_2+r_2)+\alpha p+m\beta_2-(N+2)p\right]}{pq-m}$$

$$-\frac{m(s_1+l_1+r_1)+m(N+2)}{pq-m}$$

$$\sigma_9 = -\frac{q\left[m(s_2+l_2+r_2)+\alpha p+m\beta-(N+2)p\right]}{pq-nm}$$

$$-\frac{nm(s_1+l_1+r_1)+nm(N+2)}{pq-nm}$$

الآن ، نفرض أن الحل غير تافه وشامل ، ثم نبدل φ بـ φ^{μ} في (151) و بإستخدام متراجحة هولدر، نقدر كل من I_u و I_v (كما سنرى لاحقا) فنحصل على التقديرات التالية:

- من أجل $p>1$

$$\int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}dP \leq \left(\int_Q k_2|u|^p\varphi^{\mu}dP\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q k_2^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_1}_{t_1|T}\varphi^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{152}$$

$$\int_Q u\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}dP \leq \left(\int_Q k_2|u|^p\varphi^{\mu}dP\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_Q k_2^{\frac{-1}{p-1}}|\mathbf{D}^{\alpha_2}_{t_2|T}\varphi^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}}\varphi^{\frac{-\mu}{p-1}}dP\right)^{\frac{p-1}{p}} \tag{153}$$

• من أجل $p > m$

$$\int_Q |u|^m \left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi^{\mu} dP$$

$$\leq \mu \left(\int_Q k_2 |u|^p \varphi^{\mu} dP\right)^{\frac{m}{p}} \left(\int_Q k_2^{\frac{-m}{p-m}} |\left(-\Delta\right)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi|^{\frac{p}{p-m}} \varphi^{\mu-\frac{p}{p-m}} dP\right)^{\frac{p-m}{p}} \tag{154}$$

بالمثل ، لدينا

• من أجل $q > 1$

$$\int_Q v \mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1} \varphi^{\mu} dP \leq \left(\int_Q k_1 |v|^q \varphi^{\mu} dP\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_Q k_1^{\frac{-1}{q-1}} |\mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1} \varphi^{\mu}|^{\frac{q}{q-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{q-1}} dP\right)^{\frac{q-1}{q}} \tag{155}$$

$$\int_Q v \mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2} \varphi^{\mu} dP \leq \left(\int_Q k_1 |v|^q \varphi^{\mu} dP\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_Q k_1^{\frac{-1}{q-1}} |\mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2} \varphi^{\mu}|^{\frac{q}{q-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{q-1}} dP\right)^{\frac{q-1}{q}} \tag{156}$$

• من أجل $q > n$

$$\int_Q |v|^n \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}} \varphi^{\mu} dP$$

$$\leq \mu \left(\int_Q k_1 |v|^q \varphi^{\mu} dP\right)^{\frac{n}{q}} \left(\int_Q k_1^{\frac{-n}{q-n}} |\left(-\Delta\right)^{\frac{\beta}{2}} \varphi|^{\frac{q}{q-n}} \varphi^{\mu-\frac{q}{q-n}} dP\right)^{\frac{q-n}{q}} \tag{157}$$

إذا قمنا بتعيين

$$I_u = \int_Q k_2 |u|^p \varphi^{\mu} dP \ , \ I_v = \int_Q k_1 |v|^q \varphi^{\mu} dP$$

$$A(p) = \left(\int_Q k_2^{\frac{-1}{p-1}} |\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1} \varphi^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{p-1}} dP\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$A(q) = \left(\int_Q k_1^{\frac{-1}{q-1}} |\mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1} \varphi^{\mu}|^{\frac{q}{q-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{q-1}} dP\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

$$B(p) = \left(\int_Q k_2^{\frac{-1}{p-1}} |\mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2} \varphi^{\mu}|^{\frac{p}{p-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{p-1}} dP\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$B(q) = \left(\int_Q k_1^{\frac{-1}{q-1}} |\mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2} \varphi^{\mu}|^{\frac{q}{q-1}} \varphi^{\frac{-\mu}{q-1}} dP\right)^{\frac{q-1}{q}}$$

$$C(p,m)=\mu\left(\int_Q k_2^{\frac{-m}{p-m}}|\,(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi|^{\frac{p}{p-m}}\varphi^{\mu-\frac{p}{p-m}}dP\right)^{\frac{p-m}{p}}$$

$$C(q,n)=\mu\left(\int_Q k_1^{\frac{-n}{q-n}}|\,(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}\varphi|^{\frac{q}{q-n}}\varphi^{\mu-\frac{q}{q-n}}dP\right)^{\frac{q-n}{q}}$$

$$I_0^{\mu}=\int_Q u_2\mathbf{D}_{t_1|T}^{\alpha_1}\varphi^{\mu}dP+\int_Q u_1\mathbf{D}_{t_2|T}^{\alpha_2}\varphi^{\mu}dP$$

$$J_0^{\mu}=\int_Q v_2\mathbf{D}_{t_1|T}^{\beta_1}\varphi^{\mu}dP+\int_Q v_1\mathbf{D}_{t_2|T}^{\beta_2}\varphi^{\mu}dP$$

ثم ، بإستخدام التقديرات (152) ـ (157) ، يمكننا كتابة (151) بالشكل

$$I_v+I_0^{\mu}\le I_u^{\frac{1}{p}}A(p)+I_u^{\frac{1}{p}}B(p)+I_u^{\frac{m}{p}}C(p,m),$$
$$I_u+J_0^{\mu}\le I_v^{\frac{1}{q}}A(q)+I_v^{\frac{1}{q}}B(q)+I_v^{\frac{n}{q}}C(q,n),$$

من $I_0^{\mu}>0$ و $J_0^{\mu}>0$, لدينا

$$I_v\le I_u^{\frac{1}{p}}A(p)+I_u^{\frac{1}{p}}B(p)+I_u^{\frac{m}{p}}C(p,m) \tag{158}$$
$$I_u\le I_v^{\frac{1}{q}}A(q)+I_v^{\frac{1}{q}}B(q)+I_v^{\frac{n}{q}}C(q,n) \tag{159}$$

الآن، من خلال (158) و (159) اذا ، فلدينا

$$I_v+I_0^{\mu}\le\left(I_v^{\frac{1}{pq}}A^{\frac{1}{p}}(q)+I_v^{\frac{1}{pq}}B^{\frac{1}{p}}(q)+I_v^{\frac{n}{pq}}C^{\frac{1}{p}}(q,n)\right)A(p)$$

$$+\left(I_v^{\frac{1}{pq}}A^{\frac{1}{p}}(q)+I_v^{\frac{1}{pq}}B^{\frac{1}{p}}(q)+I_v^{\frac{n}{pq}}C^{\frac{1}{p}}(q,n)\right)B(p)$$

$$+\left(I_v^{\frac{m}{pq}}A^{\frac{m}{p}}(q)+I_v^{\frac{m}{pq}}B^{\frac{m}{p}}(q)+I_v^{\frac{mn}{pq}}C^{\frac{m}{p}}(q,n)\right)C(p,m)$$

ومن ثم متراجحة Young تدل على

$$I_v+I_0^{\mu}\le K\Bigg[\left(A^{\frac{1}{p}}(q)A(p)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(B^{\frac{1}{p}}(q)A(p)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(C^{\frac{1}{p}}(q,n)A(p)\right)^{\frac{pq}{pq-n}}$$

$$+\left(A^{\frac{1}{p}}(q)B(p)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(B^{\frac{1}{p}}(q)B(p)\right)^{\frac{pq}{pq-1}}+\left(C^{\frac{1}{p}}(q,n)B(p)\right)^{\frac{pq}{pq-n}}$$

$$+\left(A^{\frac{m}{p}}(q)C(p,m)\right)^{\frac{pq}{pq-m}}+\left(B^{\frac{m}{p}}(q)C(p,m)\right)^{\frac{pq}{pq-m}}+\left(C^{\frac{m}{p}}(q,n)C(p,m)\right)^{\frac{pq}{pq-nm}}\Bigg]$$

من أجل K ثابت موجب.
بإستخدام تبديل المتغير الموجود في (132) نحصل على

$$A(p)=CT^{-\frac{1}{p}(s_2+l_2+r_2)-\alpha_1+(N+2)(1-\frac{1}{p})}$$

$$A(q)=CT^{-\frac{1}{q}(s_1+l_1+r_1)-\beta_1+(N+2)(1-\frac{1}{q})}$$

$$B(p)=CT^{-\frac{1}{p}(s_2+l_2+r_2)-\alpha_2+(N+2)(1-\frac{1}{p})}$$

$$B(q)=CT^{-\frac{1}{q}(s_1+l_1+r_1)-\beta_2+(N+2)(1-\frac{1}{q})}$$

$$C(p,m)=CT^{-\frac{m}{p}(s_2+l_2+r_2)-\alpha+(N+2)(1-\frac{m}{p})}$$

$$C(q,n)=CT^{-\frac{n}{q}(s_1+l_1+r_1)-\beta+(N+2)(1-\frac{n}{q})}$$

من أجل C ثابت موجب.
ومن ثم ، نحصل على

$$I_v+I_0^{\mu}\leq K\left[T^{\sigma_1}+T^{\sigma_2}+\cdots+T^{\sigma_9}\right]. \tag{160}$$

بالمثل، من أجل I_u نحصل على التقدير

$$I_u+J_0^{\mu}\leq K\left[T^{\delta_1}+T^{\delta_2}+\cdots+T^{\delta_9}\right]. \tag{161}$$

أخيرا، بالمرور إلى النهاية $T\to+\infty$ نلاحظ أن :
إما $\max\{\sigma_1,\cdots,\sigma_9,\delta_1,\cdots,\delta_9\}<0$ وفي هذه الحالة، يؤول الجانب الأيمن إلى الصفر، بينما يكون الجانب الأيسر موجبا تماما،ومن ثم نحصل على تناقض.
أو

$$\max\{\sigma_1,\cdots,\sigma_9,\delta_1,\cdots,\delta_9\}=0$$

وفي هذه الحالة ، بعد التحليل الماثل في معادلة واحدة ، نثبت التناقض. □

~ تطبيقات ~

هناك تطبيقات عديدة ومتنوعة لمثل هذه الدراسات، كالفيزياء والكيمياء والبيولوجيا ...... مثلا في الفيزياء خاصة ديناميكية السوائل يوجد مايعرف باللزوجة [17] الديناميكية. ونعرفها من خلال أخذ طبقتين من السائل إحداهما الطبقة $abcd$ والأخرى $\acute{a}\acute{b}\acute{c}\acute{d}$ ثم نحرك الطبقة $abcd$ بسرعة v بالنسبة إلى الطبقة $\acute{a}\acute{b}\acute{c}\acute{d}$

موجهة وفق المحور (ox) . ومن بين القوى الناتجة قوة الإحتكاك F التي تمارس على الطبقة $\acute{a}\acute{b}\acute{c}\acute{d}$ والعمودية على المحور (oz) .

وتظهر اللزوجة الديناميكية μ في العلاقة بين معيار هذه القوة F ومعدل القص[18] ذي الرمز $\frac{\partial v}{\partial z}$ ونكتب :

$$F = \mu A \frac{\partial v}{\partial z},$$

حيث A يمثل مساحة سطح كل طبقة.

وكذلك لدينا معادلة حركة السوائل هي معادلة الإنتشار من الشكل

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \qquad (1)$$

حيث ρ كثافة السائل و μ لزوجة السائل و v هي السرعة العرضية للسائل ، وهي دالة بمتغيرين الزمن t والمسافة z .

لإيجاد تحويل لابلاس للمعادلة (1) نستخدم القاعدة التالية :

$$L\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right] = sL\left[f(t)\right] - f(t=0).$$

و بالتعويض نحصل على

$$\rho s L\left[v\left(t,z\right)\right] - \rho v\left(t=0,z\right) = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} L\left[v\left(t,z\right)\right].$$

وبماأن السرعة الإبتدائية $v\left(t=0,z\right)$ للسائل معدومة، عندئذ المعادلة الأخيرة تصبح

$$\rho s L\left[v(t,z)\right] = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} L\left[v(t,z)\right], \qquad (2)$$

[17] la viscosité

[18] Contrainte de Cisaillement

و لأن

$$v(t,z)=v(t)e^{\lambda z}$$

عندئذ

$$L\left[v(t,z)\right]=e^{\lambda z}L\left[v(t)\right], \qquad (3)$$

كذلك يكون

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}L\left[v(t,z)\right]=\lambda^2 e^{\lambda z}L\left[v(t)\right], \qquad (4)$$

وبتعويض (3) و (4) في (2) نحصل على المعادلة الجبرية التالية بالمجهول λ :

$$\rho s e^{\lambda z}L\left[v(t)\right]=\mu\lambda^2 e^{\lambda z}L\left[v(t)\right].$$

مما يعني أن :

$$\lambda=\sqrt{\frac{\rho s}{\mu}}$$

ثم إن سرعة الطبقة $abcd$ والتي نرمز لها بالرمز $v_p(t)$ تصف سرعة السائل عند $z=0$ ، والذي بدوره يتمثل في الشرط على الحافة، ومنه

$$v(t,z=0)=v(t)=v_p(t) \;\Rightarrow\; v(t,z)=v_p(t)e^{\sqrt{\frac{\rho s}{\mu}}z},$$

وهي السرعة التي تحقق الشرط على الحافة.

من جهة أخرى نطبق تحويل لابلاس على العلاقة

$$F(t,z)=\mu A\frac{\partial v}{\partial z}(t,z),$$

فنجد :

$$L\left[F(t,z)\right] = \mu A L\left[\frac{\partial v}{\partial z}(t,z)\right] = \mu A \frac{\partial}{\partial z} L\left[v(t,z)\right],$$

وبماأن $v(t,z) = v_p(t) e^{\sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} z}$ إذن

$$\frac{\partial}{\partial z} L\left[v(t,z)\right] = \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} L\left[v(t,z)\right],$$

وفي الأخير

$$L\left[F(t,z)\right] = \mu A \sqrt{\frac{\rho s}{\mu}} L\left[v(t,z)\right] = A\sqrt{\mu\rho} \frac{s}{\sqrt{s}} L\left[v(t,z)\right], \qquad (5)$$

من (5) يمكننا تحديد تحويلات لابلاس التالية:

$$sL\left[v(t,z)\right] = L\left[\frac{\partial v}{\partial t}(t,z)\right], \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} = L\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{t}}\right], \qquad (7)$$

وبتعويض (6) و (7) في (5) نحصل على:

$$\begin{aligned} L\left[F(t,z)\right] &= A\sqrt{\mu\rho} L\left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{t}}\right] L\left[\frac{\partial v}{\partial t}(t,z)\right] \qquad (8) \\ &= A\sqrt{\mu\rho} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} L\left[\frac{1}{\sqrt{t}} \star \frac{\partial v}{\partial t}(t,z)\right], \end{aligned}$$

مما يعني:

$$L\left[F(t,z)\right] = A\sqrt{\mu\rho} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} L\left[\int_0^t \frac{\frac{\partial v}{\partial t}(\tau,z)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau\right],$$

وبإستخدام تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$F(t,z) = A\sqrt{\mu\rho} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\frac{\partial v}{\partial t}(\tau,z)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau,$$

وبمعنى أدق:

$$F(t,z) = A\sqrt{\mu\rho}\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(\tau,z)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}d\tau$$
$$= A\sqrt{\mu\rho}\mathbf{D}_{0|t}^{\frac{1}{2}}v(t,z), \qquad (9)$$

هناك مثال آخر قدمه كل من $(Trovik)$ و $(Bagley)$ ،بأخذ صفيحة صلبة ذات كتلة m مغمورة في سائل لزج ومثبتة في نابض ثابت مرونته k ، وبفرض أن حركات النابض الصغيرة لا تؤثر على السائل ، وأن سطح الصفيحة عريض بما فيه الكفاية بحيث ينتج في السائل المجاور للصفيحة حقل السرعات والضغط.
وحسب المبدأ الأساسي للتحريك (مجموع القوى يساوي جداء الكتلة في التسارع) ، أي أن حالة توازن القوى التي تمارس على جانبي الصفيحة تعطى بالمعادلة:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) + 2F(t, z=0) = 0,$$

ووفقا للمعادلة (9) نحصل على:

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) + 2A\sqrt{\mu\rho}\mathbf{D}_{0|t}^{\frac{1}{2}}v(t, z=0) = 0,$$

ومع المعطيات الإبتدائية: $v(t, z=0) = \dot{u}(t)$ ينتج لدينا مشتق كسري من الرتبة $\alpha = \frac{3}{2}$ ناتج عن إزاحة الصفيحة الصلبة المغمورة في هذا السائل اللزج.
أخيرا

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) + 2A\sqrt{\mu\rho}\mathbf{D}_{0|t}^{\frac{3}{2}}u(t) = 0,$$

وهي معادلة من النمط STFE .

Bibliography

[1] M.A.Al-Bassam,Some existence theorems on differential equations of generalized order, Journal fur Reine und Angewandte Mathematic, vol.218, 1965,p.p.70-78.

[2] P. Baras, R. Kersner, Local and global solvability of a class of semilinear parabolic equations, J. Differential Equations, 68, 1987, p.p. 238-252.

[3] P . Baras, M. Pierre, Critère d'existence de solutions positives pour des équations semi-linéaires non monotones, Ann.Inst.H.Poincaré Anal.Non Linéaire,2,1985,p.p.185-212.

[4] H.Beyer and S.Kempfle,Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives,Z. angew. Math.Mech., vol.75,no.8,1995,p.p.623-635.

[5] I. Brindelli, I. Capuzzo Dolcetta, A. Cutri, Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg Group Ann.Inst.H. Poincaré,14,1997,p.p.295-308.

[6] G. L. Bullock, A geometric interpretation of the Riemann- Stieltjes intergral, American Mathematical Monthly, 95, no. 5, (May 1988), p.p. 448-455.

[7] M. Caputo, Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II, Geophys.J.R.Astr.Soc. ,vol 13,1967, p.p. 529-539.

[8] M. Caputo, Elasticità e Dissipazione, Zanichelli, Bologna,1969.

[9] H. D. Davis, The Theory of Linear Operators, Principia Press, Bloomington, Indiana, 1936.

[10] M. M. Dzhrbashyan, Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain,Nauka, Moscow,1966,(in Russian).

[11] M. M. Dzhrbashyan and A. B. Nersesyan, Criteria of expansibility of functions in Dirichlet series, Izv.Akad.Nauk Arm. SSR,ser.fiz.-mat, vol. 11, no.5, 1958, p.p. 85-106.

[12] M. M. Dzhrbashyan and A. B. Nersesyan On the use of some integro-differential operators, Dokl.Akad.Nauk.SSSR, vol.121,no.2,1958,p.p.210-213.

[13] M.M.Dzhrbashyan and A.B. Nersesyan,Expansions in some biorthogonal system and boundary-value problems for differential equations of fractional order, Trudy Mosk. Mat. Ob., vol. 10, 1961, p.p. 89-179.

[14] M. M. Dzhrbashyan and A. B. Nersesyan, Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order, Izv. Akademii Nauk Arm SSR, vol. 3, no. 1, 1968, p.p. 3-29.

[15] A.El, Hamidi,M.Kirane,Nonexistence results of solutions to systems of semilinear differential inqualities on the Heisenberg group,Manuscripta Math., submitted.

[16] A.El Hamidi,A.Obeid,Systems of Semilinear higher order evolution inequalities on the Heisenberge group, J. Math. Anal. Appl., 280, 2003, no. 1, p.p. 77-90.

[17] A. Erdélyi (ed), Tables of Integral Transforms, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1954.

[18] M. Escobedo, M. A. Herrero, Boundedness and blow-up for a semilinear reaction-diffusion equation, J. Differential Equations, 89, 1991, p.p. 176-202.

[19] G.M.Fikhtengoltz,Course of Differential and Integral Calculus,vol. 2, Nauka, Moscow, 1969.

[20] M.Fila,H.A.Levine,Y.Uda,A Fujita-type global existence global nonexistence theorem for a system of reaction-diffusion equations with differing diffusivities, Math. Methods Appl. Sci., 17, No. 10, 1994, p.p. 807-835.

[21] H. Fujita, On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem ,J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I13,1966,p.p.109-124.

[22] V.A.Galaktionov,S.P.Kurdyumov,A.A.Samarskii,A parabolic system of quasilinear equations, I, (Russian) Differentsial'nye Uravneniya,19,No.12,19983,p.p.2123-2140.

[23] N. Garofalo, E. Lanconelli, Existence and nonexistence results for semi-linear equations on the Heisenberg group, Indiana Univ. Math. J., 41, 1992, p.p. 71-97.

[24] M.Guedda,M.Kirane,A note on nonexistenceof global solutions to a non-linear integral equation, Bull. Belg. Math.Soc.Simon Stevin, 6,1999, p.p.491-497.

[25] L. Hormander, Hypoelliptic second order differential, Acta.Math.,119,1967,p.147-171.

[26] A.S.Kalashnikov,On a heat conduction equation for a medium with non-uniformly distributed non-linear heat source or absorbers, Bull. Univ. Moscow Math.Mech.,3, 1983,p.p.20-24.

[27] A. G. Kartsatos, V. V. Kurta, On a comparaison principle and the critical exponents for solutions of semilinear parabolic inequalities, J. London Math. Soc.,66,2002,no.2,p.351-360.

[28] S. Kempfle and L. Gaul, Global solutions of fractional linear differential equations, Proc. of ICIAM'95, Zeitschrift Angew.Math.Mech.,vol.76,suppl.2,1996,p.p.571-572.

[29] M. Kirane, Y. Laskri, N. e. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations ans systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. appl., 312, 2005, p. 488-501.

[30] M.Kirane,M.Qafsaoui,Global non existence for the Cauchy problem of some non linear reaction-diffusion systems,J.Math.Anal.Appl.,268,2002, p.p. 217-243.

[31] E.Lanconelli,F.Uguzzoni,Asymptotic behaviour and nonexistence theorems for semilinear Dirichlet problems involving critical exponent on unbounded domains of the Heisenberg group,Boll.Un. Math.Ital.,8,1998,p.139-168.

[32] A. V. Letnikov, Theory of differentiation of an arbitrary order, Math.Sb.,vol.3,1868,p.1-68 in Russian.

[33] K. S. Miller and B Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley, Sons Inc .,New York,1993.

[34] J. D. Munkhammar, Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann series, Uppsala University, Department of Mathematics, 2004.

[35] R. R. Nigmatullin and Ya. E. Ryabov, Cole-Davidson dielectric relaxation as a self-similar relaxation process, Phys.Solid State,vol.39,no.1,1997, p.p. 87-90.

[36] M. Ochmann and S. Makarov, Representation of the absorption of nonlinear waves by fractional derivatives, J. Amer. Acoust. Soc ,vol.94, no.6,1993,p.p.3392-3399.

[37] K. B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York - London, 1974.

[38] E.Podlubny,Fractional Differential Equations, Asymptotic behaviour and nonexistence theorems for semilinear Dirichlet problems involving critical exponent on unbounded domains of the Heisenberg group, Math. Sci. Engrg., 198, Academin Press, New York,1999.

[39] S.I.Pohozaev,L.Véron,Apriori estimates and blow-up of solutions of semilinear inequalities on the Heisenberg-group, Manuscripta Math., no. 1, p.p. 85-99.

[40] B.Ross,Fractional calculus:anhistorical apologia for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non integral orders, Mathematics Magazine,vol.50,no.3,May 1977, p.155-122.

[41] S.G.Samko,A.A.KilbasandO.I.Maritchev,Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their Applications, Nauka i Technika, Minsk, 1987 (in Russian).

[42] A.M.A.El-Sayed, Multivalued fractional differential equations, Apll. Math. and Comput,vol. 80, 1994, p.p. 1-11.

[43] A. M. A. El-Sayed, Fractional order evolution equations, J. of Frac. Calculus, vol. 7, May 1995, p.p. 89-100.

[44] P.J.Trovik,R.L.Bagley,On the Appearance of the Fractional Derivatives in the Behavior of Real Materials, Journal of Applied Mechanics, vol.51,June 1984,p.p.294-298.

[45] K.Haouam, Existence et Non-Existence de solutions des équations différentielles fractionnaires . Septembre 2007, Constantine.