



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



**BADJI MOKHTAR-ANNABA
UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-
ANNABA**

جامعة باجي مختار باجي مختار
- عنابة -

**Faculté des Sciences
Année : 2019**

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

ÉVALUATION ET COUVERTURE DES OPTIONS À BARRIÈRE

**Option
Mathématiques Financières**

**Par
ZEHANI Nadjla**

DIRECTEUR DE THÈSE : Mr. Remita Mohamed Riad

Prof. U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	Mr. Benchettah Azzedine	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Mr. Boutabia Hacène	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Mr. Boukhetala Kamel	Prof.	U.S.T.H.B
EXAMINATEUR :	Mr. Kandouci Abdeldjebar	Prof.	U. Saida
EXAMINATEUR :	Mr. Benchabaane Abbas	M.C.A	U. Guelma

Évaluation et Couverture des options à barrière

ZEHANI NADJLA

2018/2019

Remerciements

Je souhaite exprimer toute ma gratitude et mes plus sincères remerciements à Mr. REMITA MOHAMED RIAD, Professeur à l'Université Badji Mokhtar de Annaba, pour sa disponibilité ainsi que pour la confiance qu'il m'a manifesté surtout dans les moments difficiles dans la direction de cette thèse.

Je tiens à remercier le Professeur BENCHETTAH AZZEDINE de l'Université Badji Mokhtar de Annaba, qui m'a fait l'honneur d'être le président du jury de thèse. Qu'il trouve ici ma gratitude et ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail.

Je remercie sincèrement et vivement le Professeur BOUTABIA HACENE de l'Université Badji Mokhtar de ANNABA, pour avoir accepté d'examiner mon travail. Je suis profondément reconnaissante de sa participation à ce jury de thèse.

Mes remerciements vont aussi au Professeur BOUKHETALA KAMEL de l'USTHB pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je remercie aussi le Professeur KANDOUCI ABDELJEBAR de l'Université de Saida, qui m'a fait l'honneur d'être examinateur de thèse.

Merci également à Mr. BENCHAAABANE ABBES, Maître de Conférence à l'Université de Guelma, pour avoir accepté d'examiner mon travail et prendre part au jury de thèse.

Et bien sûr, un grand remerciement pour tous ceux qui ont contribué à l'accomplissement de ce travail.

Aux sou- venirs de
mes défunts père, grands
parents et fils YANIS.
Je dédie ce modeste travail à ma très
chère mère DJEMAA qui grâce à son
amour m'a protégée guidée, soute-
nue et conseillée tout au long de ma
vie et mes études, sans oublier
mon cher fils ZINOÛ, mon
époux SALAHEDINE
et mes sœurs RIM
et AMINA.



Cette thèse consiste à aborder un problème très important dans l'analyse de la finance, qui est l'évaluation des options européennes standards et les options à barrière européennes. Ces options ont la particularité d'appartenir aux modèles à volatilité constante. En premier lieu, on présente un historique sur le modèle de Black-Scholes. En effet, en 1973, Black-Scholes établirent le premier modèle d'évaluation d'options dont la volatilité du sous-jacent est connue et constante. Mais, au fil des années les options deviennent complexes et les profits issus de ces dernières se révèlent trop coûteuses. Afin de réduire le coût et combler ces lacunes, on propose un modèle d'options exotiques (options de seconde génération) et en particulier les options à barrière européennes du type Call Up and In. L'approche utilisée pour évaluer ces options est le raisonnement risque neutre (probabiliste) sous deux contextes : à maturité continue et à maturité aléatoire. Bien que la formule de Black-Scholes soit explicite, certaines hypothèses ne correspondent pas à celles observées sur le marché (phénomène de Smile). Malheureusement cela met en évidence l'incapacité du modèle à expliquer un tel phénomène. Ce qui a poussé plusieurs chercheurs à l'améliorer en développant des modèles à volatilité stochastique qui sont plus proches de la réalité. Un de ces modèles est celui de Heston, dont la popularité vient du fait de l'existence d'une formule explicite pour le prix des options standards et des options à barrière. Après la présentation des équations différentielles stochastiques correspondantes au modèle précité, on procède à l'évaluation des options européennes à l'aide des fonctions caractéristiques. Enfin, la dernière étape est l'évaluation des options à barrière sous le modèle de Heston par le biais de l'approche probabiliste, ceci est fait en considérant un coefficient de corrélation nul entre les deux mouvements browniens.

Mots clés :

Option, volatilité, Évaluation d'option, Black-Scholes, options à barrière, Heston.

This thesis involves addressing a very important problem in the analysis of finance, which is the evaluation of European standard options and European barrier options. These options have the distinction of belonging to constant volatility models. We start with a history based on the Black & Scholes model. Indeed, in 1973, Black-Scholes established the first option pricing model with known and constant volatility of the underlying. But as the years go by, the options become complex and the profits from them become too expensive. In order to reduce the cost and fill these gaps, we propose a model of exotic options (second generation options) and in particular the European barrier options of the type Call Up and In. The approach used to evaluate these options is the neutral risk approach (probabilistic) in two contexts : continuous maturity and random maturity. Although the Black-Scholes formula is explicit, some assumptions do not correspond to those observed on the market (Smile phenomenon). Unfortunately this highlights the inability of the model to explain such a phenomenon. This has led many researchers to improve it by developing stochastic volatility models that are closer to reality. One of these is Heston's model, which is popular because of the existence of an explicit formula for the price of standard options and barrier options. After the presentation of the stochastic differential equations corresponding to the aforementioned model, the European options are evaluated using the characteristic functions; the next step is the evaluation of barrier options under the Heston model through the probabilistic approach. This is done considering a zero correlation coefficient between the two Brownian motions.

Keywords :

Option, Volatility, Option pricing, Black-Scholes, Barrier Options, Heston.

مع تطور الأسواق المالية، أخذت دراسة الخيارات أهمية كبيرة لا يمكن إنكارها و كما أنها في تطور مستمر خلال السنوات الأخيرة. يمكن للخيار توليد خسائر كبيرة بسبب عدم الاستقرار المتزايد في الأسواق. في مواجهة هذه التحديات ، طورت الشركات صيغ لتحديد قيمة الخيارات من أجل خفض التكاليف. من هذا المنطلق ، فإن الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو معالجة مشكلة بالغة الأهمية و معقدة للغاية في التحليل المالي و المتمثل في تسعير الخيارات. في هذه الدراسة سنتطرق لنوعين من النماذج: نموذج التقلب الثابت ونموذج التقلب العشوائي. بالنسبة للنموذج الأول، تستند الحسابات إلى الاستدلال المحايد للمخاطر و السوق الكاملة، أما بالنسبة للنموذج الثاني يستند على الحسابات الرياضية.

تضمنت هذه الأطروحة أربعة فصول.

الفصل الأول تمهيدي، حيث أنه مكرس لعرض أدوات و أسس الرياضيات المالية.

يتناول الفصل الثاني تسعير الخيارات المالية وفقاً لنموذج بلاك و شولز. نستعرض فرضياته و وضع معادلاتها التفاضلية الجزئية لتقييم الخيارات الأوروبية و نختم بتقديم نظرة عامة على التغطية اليونانية.

يتطرق الفصل الثالث لخيارات الحاجز. أولاً، التعريف بهذا النوع من الخيارات و فوائد إستخدامها. ثم يتم عرض كفاءات تسعير خيارات الحاجز في سياقين : الوقت المستمر و الوقت المنفصل.

أما الفصل الأخير فهو مخصص لدراسة تسعير خيارات الحاجز وفقاً لنماذج التقلب العشوائي. حيث سنقوم بدراسة نموذج هيستون وذلك من خلال التطرق لمزايا و عيوب هذا النموذج ، كما نقوم بوضع المعادلة التفاضلية الجزئية بالإضافة إلى تقديم سعر الخيار الأوروبي. و في الأخير سنقوم بتكييف نموذج هيستون مع خيارات الحاجز لتوفير صيغة سريعة مغلقة لهذه الخيارات.

كلمات البحث:

الخيار ، التقلب ، تسعير الخيارات ، بلاك شولز ، خيارات الحاجز ، هيستون.

<i>Remerciements</i>	<i>i</i>
<i>Dédicaces</i>	<i>ii</i>
<i>Résumé</i>	<i>iii</i>
<i>Sommaire</i>	<i>vi</i>
INTRODUCTION	1
I ELÉMENTS FONDAMENTAUX EN MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES	5
1 Processus aléatoires	5
2 Filtration	5
3 Temps d'arrêt	6
4 Mouvement Brownien ou processus de Wiener	6
4.1 Mouvement brownien avec dérive	6
4.2 Mouvement Brownien géométrique	7
5 Martingales	7
5.1 Théorème de représentation des martingales avec un Mouvement Brownien	8
6 Intégrales Stochastiques	8
6.1 Propriétés de l'intégrales stochastique :	8
7 Formule d'Itô	9
8 Equations différentielles stochastiques	10
8.1 Equations différentielles stochastiques géométrique	10
8.2 Résolution de l'équation différentielle stochastique géométrique	11
9 Produits dérivés	12
10 Actif sous-jacent	12
11 Options	12
12 Marché complet et viable	13
12.1 Marché complet	13
12.2 Marché viable	13
13 Changement de mesure de probabilités	15

13.1	Théorème de Radon-Nikodym	15
13.2	Théorème de Girsanov	16
II EVALUATION ET COUVERTURE DES OPTIONS CALLS EUROPEENS		17
1	Hypothèses du modèle Black-Scholes	17
2	Equations aux dérivées partielles d'évaluation de Black-Scholes	18
2.1	La méthode risque-neutre	18
2.2	La méthode d'EDP	20
3	Evaluation d'un Call Européen par la méthode risque-neutre	22
3.1	Le cours actualisé du sous-jacent	23
3.2	Application du raisonnement risque-neutre pour évaluation d'un Call Européen (Formule de Black-Scholes)	23
4	Couverture et sensibilité (Grecs)	27
4.1	Couverture delta -neutre	27
4.2	Les Grecs	28
5	Conclusion	31
III LES OPTIONS PATH-DEPENDENT : LES OPTIONS À BARRIÈRE		32
1	Introduction	32
2	Les options à barrière	33
2.1	Définitions et caractéristiques	33
2.2	Avantages d'utilisation des options à barrière	35
2.3	La parité des options à barrière Européennes	35
3	Options à barrière à maturité fixe	35
3.1	Propositions [53]	35
3.2	Evaluation des Options Calls Européennes à barrière	36
4	Options à barrière à maturité aléatoire	43
4.1	Options à barrière à contrôl discret	44
4.2	Le prix d'une option Call à barrière à maturité aléatoire suivant la distribution de Poisson	48
5	Conclusion	50
IV MODÈLES À VOLATILITÉ STOCHASTIQUE (SV)		51
1	Introduction	51
2	Modèle d'Heston	51
3	EDP d'évaluation d'Heston	53
4	Formule fermée pour un Call Européen	56
5	Les options à barrière appliquées au modèle de Heston	61
5.1	Valorisation de l'option à barrière sous le modèle d'Heston	62
6	Conclusion	69
CONCLUSION		70
PERSPECTIVES		72
BIBLIOGRAPHIE		72

Depuis les faillites d'institutions financières survenues au cours des décennies 1970 et 1980, les firmes subissent des risques auxquels les exposent leurs activités principales (industrielles, commerciales ou financières) qui résultent de l'incertitude d'évolution future des taux d'intérêt, des taux de changes et des prix (actifs financiers, marchandises, matières premières). Du coup, les investisseurs cherchent à adopter un cadre robuste de gestion des risques financiers qui réponde aux exigences réglementaires, facilite la prise de décision et rehausse leur performance [1]. Les produits dérivés tels que les options sont des instruments particulièrement bien adaptés à la gestion de ces risques. Les options sur les marchés de gré à gré sont négociées directement entre l'acheteur et le vendeur, sans la garantie d'un marché [2]. Elles permettent de réaliser des économies d'échelle sur les coûts de transactions et la demande concernant ces produits a contribué à l'explosion de l'innovation financière au cours des dernières années.

Le premier modèle d'évaluation d'options a été découvert en 1973 par Black-Scholes [3], ces hypothèses les plus restrictives sont la distribution normale des rendements d'un actif sous-jacent et la volatilité constante qui ne varie ni avec le temps ni avec le prix d'exercice. Ce modèle sert de référence dans le monde de la finance des marchés, il a été amélioré par Robert Merton [4], qui a levé l'hypothèse que l'action ne verse aucun dividende et en 1979, Jonathan Ingerson [5] est allé un pas en avant et a relâché l'hypothèse de l'absence d'impôts et de coûts de transaction. En 1976, Merton a finalement supprimé la restriction ayant trait aux taux d'intérêts constants.

La robustesse du modèle Black-Scholes tient du fait qu'il dispose d'une formule fermée pour les options standards par un calcul relativement simple et qu'il permet de calculer un paramètre important en finance : la volatilité. La volatilité mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent [6], ces principaux estimateurs sont la volatilité historique et la volatilité implicite. Toutefois, il est souvent affirmé que la volatilité implicite est un estimateur de la volatilité meilleur que la volatilité historique car elle est intégrée dans les prix des options et ces derniers reflètent les anticipations futurs du marché. Ceci implique que la volatilité implicite constitue une estimation prévisionnelle de la volatilité de l'action puisqu'elle est directement liée au prix actuel du marché.

L'équation de Black-Scholes s'appliquait à des options standards ou classiques, cependant les profils issus des options classiques peuvent ne pas correspondre à ceux qui sont recherchés par un investisseur ou encore, elles peuvent se révéler trop coûteuses en regard des besoins spécifiques de l'investisseur. A partir de ces raisons, d'autres op-

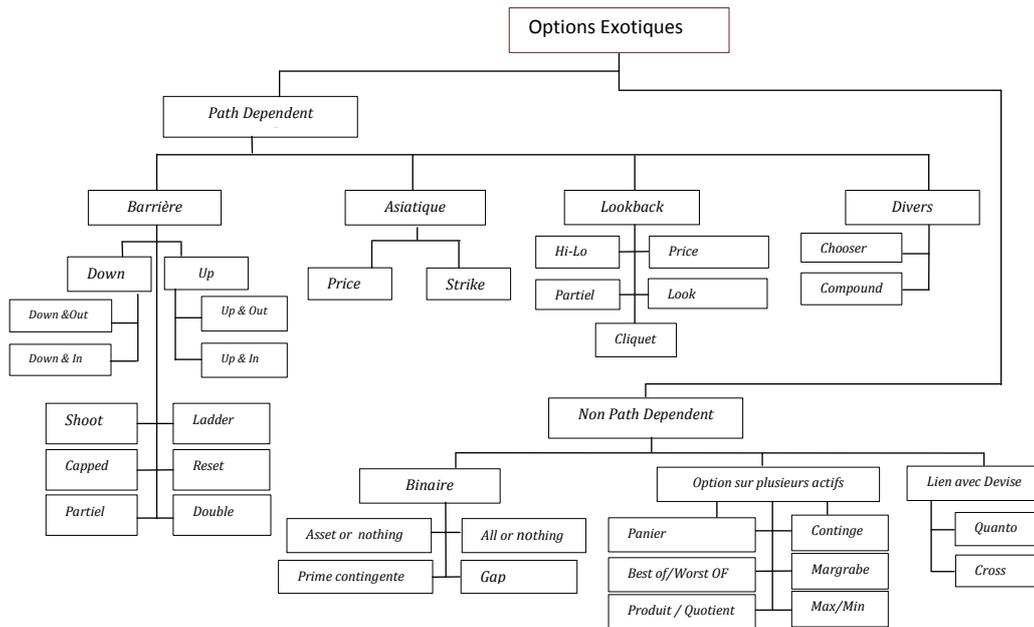
tions sont apparus sous le nom d'option exotique ou option de seconde génération. Les options exotiques sont des produits complexes qui constituent un marché d'une réelle importance depuis les années 1990, elles se distinguent des options standards par les critères suivants :

- ✓ La dimension : les options classiques sont unidimensionnelles en ce sens qu'elles sont écrites sur un seul sous-jacent. Par contre, les options exotiques peuvent pour leur part être bidimensionnelles ou multidimensionnelles.
- ✓ Le chemin suivi : les options classiques ne dépendent pas du chemin suivi. En revanche, les options exotiques peuvent dépendre du chemin suivi par le sous-jacent. On dit que de telles options sont path-dependent [7].
- ✓ L'ordre : une option classique est du premier ordre, car son sous-jacent est un instrument financier primaire, telle une action. A l'opposé, une option exotique, est du second ordre.

Il existe deux grandes catégories :

- Les options « non-path-dependent » : sont des options dont la valeur finale ne dépend pas du chemin suivi par le cours du sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option.
- Les options « path-dependent » : le prix de ces options dépend du chemin suivi par le cours du sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option.

Ainsi, ces options peuvent être classées selon le critère de path-dependent comme suit :



Les options exotiques ont été développées, afin de réduire le coût de leurs aînées ainsi qu'à combler les lacunes laissées par les instruments financiers classiques. Elles sont moins chères que les options classiques équivalentes. Les options à barrière sont un exemple d'une telle réduction, puisque l'option pourra être exercée dans un nombre de configurations moindre que l'option classique. Ces options se différencient des options vanilles par un pay-off plus compliqué que celui des options de base, elles sont échangées et ne sont donc pas standardisées. Elles possèdent plusieurs avantages comme une plus grande flexibilité ou encore un prix inférieure aux options vanille pour des caractères

quasi-similaires. Reiner [8] a été le premier à montrer que sous le contexte de Black-Scholes, il existe des formules fermées pour le prix de ces options qui reposent sur un principe de symétrie bien connu des probabilistes. Peter Carr [9] a prouvé comment ce principe pouvait être appliqué directement à un sous-jacent log-normal sans coût de portage.

Bien que les formules de Black-Scholes soient explicites, le modèle repose sur certaines hypothèses qui ne correspondent pas exactement à ce que l'on observe sur les marchés financiers [10, 11, 12]. Parmi ces défauts, notant en particulier les problèmes liés au caractère constant du paramètre de volatilité. La réalité du marché montre que cette hypothèse n'est pas vérifiée et que la volatilité dépend ne serait-ce que du temps. En effet, plusieurs résultats soulignent que, si nous observons des prix des options vanilles ayant différents prix d'exercice et différentes maturités, nous constatons que leur volatilité implicite est différente. L'allure de la courbe représentant la volatilité implicite en fonction de la volatilité et du prix d'exercice est semblable à un Smile [13]. Cela est en contradiction avec le modèle théorique de Black-Scholes, ces courbes de "Smile" mettent en évidence l'incapacité du modèle de Black-Scholes à expliquer un tel phénomène, ce constat a poussé plusieurs chercheurs à améliorer le modèle de Black-Scholes en considérant une volatilité stochastique. Par la suite, des modèles à volatilités stochastique ont été développés afin de rendre certaines hypothèses plus proches de la réalité.

Les modèles à volatilité stochastique sont une approche permettant de corriger les défauts du modèle de Black-Scholes en expliquant le phénomène de Smile mais aussi en conduisant à une dynamique réaliste pour le prix et la surface de volatilité implicite. Ils considèrent que la volatilité du prix du sous-jacent est un processus stochastique. L'un des modèles à volatilité stochastique est celui d'Heston [14], sa popularité vient du fait de l'existence d'une formule fermée pour le prix des options vanilles, ouvrant donc la voie à la calibration du modèle aux données de marché observées. La solution du modèle à volatilité stochastique est obtenue analytiquement par Heston [14] et Stein & Stein [15] et numériquement par Cox, Ross & Ingersoll [16], Merton [4], Johnson & Shanno [17], Hull & White [18], Scott [19], Wiggins [20] et Fouque & al. [21].

Dans cette thèse, nous avons réussi à expliciter un problème très important et très complexe dans la finance qui est l'évaluation des options. Pour ce faire, nous proposons différents modèles à savoir les modèles à volatilité constante représenté par le modèle de Black-Scholes et le modèle des options à barrière ainsi que les modèles à volatilité stochastique définis par le modèle d'Heston adapté aux options à barrière. Cette thèse comporte quatre chapitres :

Ainsi, le premier chapitre est consacré à la présentation des outils fondamentaux en mathématiques financières, qui serviront de base pour la suite de notre thèse. Nous commençons par définir les notions préliminaires du calcul stochastique à savoir Processus aléatoires, Filtration, Temps d'arrêt, Intégrales Stochastiques, Formule d'Itô et Equations différentielles stochastiques. Puis, nous suivons nos définitions par des outils financiers tels que Produit dérivé, Actif sous-jacent et Options, Marché complet et viable qui est caractérisé par deux hypothèses la Stratégie autofinancée et Absence d'opportunité d'arbitrage. Nous terminons par le Théorème de Girsanov, le changement de mesure de probabilité, le Mouvement Brownien et les Martingales.

Le chapitre 2 traite l'évaluation d'une option par le modèle de Black-Scholes. Nous commençons par les hypothèses du modèle qui serviront de base d'établissement de l'équations aux dérivées partielles d'évaluation des options Européennes dans un premier temps par la méthode risque-neutre puis par la méthode d'EDP dans un deuxième

temps. L'étape suivante consistera à la valorisation d'un Call Européen en appliquant le raisonnement risque-neutre. Finalement, on fera un bref aperçu sur la couverture delta-neutre et les Grecs.

L'objectif principal du chapitre 3 est la valorisation des options à barrière. Après une présentation des options barrière et leurs caractéristiques ainsi que l'intérêt d'utilisation de ce type d'option pour une bonne compréhension des méthodes d'évaluations. Nous allons tenter d'évaluer les options sous deux contextes, en temps continu puis en temps discret, basé sur le théorème de Girsanov, le principe de réflexion et la densité jointe du Mouvement Brownien et son maximum.

Enfin, le dernier chapitre portera sur l'évaluation des options, par les modèles à volatilité stochastique. Après avoir explicité le modèle d'Heston en rappelant ces avantages et inconvénients, nous montrons comment établir l'équation aux dérivées partielles d'Heston pour évaluer n'importe quelle option. Puis, nous démontrons la méthode d'évaluation des options Européennes et ceci en fournissant des formules fermées, lorsqu'il y a une corrélation entre le prix du sous-jacent et sa volatilité. Et pour terminer, nous adapte-rons le modèle d'Heston aux options à barrière afin de fournir une formule fermée du prix de ces options.

Depuis 60 ans, les outils mathématiques probabilistes ont montré leur rôle central dans l'analyse et la gestion des risques financiers de tout ordre. Ce chapitre est consacré à la présentation des outils fondamentaux en mathématiques financières [22, 23, 24, 25, 27, 28], qui serviront de base pour la suite de notre thèse. Nous commençons par définir les notions préliminaires du calcul stochastique à savoir Processus aléatoires, Filtration, Temps d'arrêt, Intégrales Stochastiques, Formule d'Itô et Equations différentielles stochastiques. Puis, nous suivons nos définitions par des outils financiers tels que Produit dérivé, Actif sous-jacent et Options, Marché complet et viable qui est caractérisé par deux hypothèses la Stratégie autofinancée et Absence d'opportunité d'arbitrage. Nous terminons par le Théorème de Girsanov, le changement de mesure de probabilité, le Mouvement Brownien et les Martingales.

1. Processus aléatoires

Définition 1.1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ indexée par un paramètre $t \geq 0$, définies sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ϵ) appelé espace d'état. La variable X_t donne l'état à l'instant t . Un processus $X_t(\omega)$ dépend de deux paramètres t (généralement le temps) et de la variable aléatoire $\omega \in \Omega$. Pour $t \in T$ fixé, l'application $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, l'application $t \in T \rightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus, noté $X_t(\omega)$ ou $X(t, \omega)$.*

2. Filtration

Définition 2.1 *Une **filtration** (\mathcal{F}_t) , est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F} c'est à dire que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $s \leq t$, qui peut s'interpréter comme la quantité d'information disponible à l'instant t qui évolue au cours du temps, c'est à dire que plus le temps croît ($s \leq t$) plus on a des informations ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$).*

3. Temps d'arrêt

Définition 3.1 *Un temps d'arrêt ($t. a.$) est une v. a. $\tau \geq 0$, à valeurs éventuellement infinies, telle que pour tout $t \geq 0$, l'évènement $\{\tau \leq t\}$ ne dépend que des valeurs du mouvement brownien $\{B_s; s \leq t\}$ avant la date t .*

4. Mouvement Brownien ou processus de Wiener

Histoire

En 1828, Robert Brown observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau. Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est dû aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction). En 1900, pour des applications à la finance, Louis Bachelier introduit le Mouvement Brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la Bourse, dans sa thèse "Théorie de la spéculation" mais le problème était que le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif. Einstein détermine la densité du Mouvement Brownien et le lie aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire. En 1923, Norbert Wiener construit rigoureusement la fonction aléatoire du mouvement brownien, il établit que les trajectoires sont continues.

Définition 4.1 *Soit l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus $(B_t)_{t \geq 0}$ défini sur cet espace à valeurs réelles. Un mouvement brownien standard (processus de Weiner) réel (sur $T = \mathbb{R}^+$) est une famille de variables aléatoires $\{B_t; t \in T\}$ à trajectoires continues, telle que :*

- $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$ (le mouvement brownien issu de l'origine);
- Tout accroissement $B_t - B_s$ où $0 \leq s < t$, suit une loi gaussienne centrée, de variance $(t - s)$: (stationnarité des accroissements du mouvement brownien)
- Pour tous $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les accroissements $\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}; 0 \leq i \leq n - 1\}$ sont indépendants.

Interprétation financière

Le Mouvement Brownien est utilisé en finance pour modéliser le terme d'innovation de l'équation différentielle stochastique servant à modéliser le comportement du prix d'une action dans le modèle de Black-Scholes. Le Mouvement Brownien "drive" le prix du sous-jacent. La signification du terme d'innovation est la suivante : Sur le marché, il y a un flux continu d'information qui influence le prix du sous-jacent, les mauvaises nouvelles font baisser le cours du titre tandis que les bonnes ont l'influence inverse.

4.1. Mouvement brownien avec dérive

Un Mouvement brownien avec dérive est un mouvement brownien ayant une valeur initiale différente de 0, éventuellement aléatoire.

Définition 4.2 *(du mouvement brownien issu de X_0) Un mouvement brownien issu de X_0 est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + B_t \tag{I.1}$$

avec une condition initiale X_0 indépendante du brownien B .

Définition 4.3 (du mouvement brownien avec dérive) *Un mouvement brownien, issu de X_0 , de dérive (ou tendance) b et de coefficient de diffusion σ est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \sigma B_t + bt \tag{I.2}$$

avec une condition initiale X_0 indépendante du brownien B .

4.2. Mouvement Brownien géométrique

Soit le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ suivant un Mouvement Brownien avec drift μ et une variance constante égale à σ^2 . Le processus stochastique défini par $(Y_t)_{t \geq 0} = \exp(X_t)_{t \geq 0}$, est appelé **Mouvement Brownien géométrique**. Ce processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ est, donc, toujours positif. On dit qu'il suit, à chaque instant t , une loi Log-normale dont les paramètres dépendent du temps t .

Définition 4.4 *Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, μ et σ deux constantes. Le processus*

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right\} \tag{I.3}$$

est appelé mouvement brownien géométrique ou processus "log-normale". En effet, dans ce cas

$$\log X_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t + \log X_0 \tag{I.4}$$

suit une loi normale.

5. Martingales

La notion de martingale est très importante dans l'évaluation des actifs dérivés car elle occupe une très grande place dans la notion d'arbitrage. Les martingales sont des variables aléatoires dont les variations futures sont imprévisibles avec l'information disponible en date précédente.

Définition 5.1 *Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Un processus à valeurs réelles $(M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale si :*

- il est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, c'est à dire que $\forall t$, M_t est \mathcal{F}_t -mesurable ;
- Chaque variable M_t est intégrable, et :

$$s \leq t \Rightarrow M_s = \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \tag{I.5}$$

- On dit que M_t est une surmartingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$.
- On dit que M_t est une sousmartingale si : $\forall s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$.

La variation d'une martingale définie selon une probabilité \mathbb{P} et un ensemble d'information \mathcal{F} peut se définir comme suit :

Soit $u \geq 0$, M_t étant par définition \mathcal{F}_t -adapté.

$$\mathbb{E}(M_{t+u} - M_t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(M_{t+u} | \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_t) = M_t - M_t = 0 \tag{I.6}$$

L'intérêt d'utilisation des martingales en finance

1. Le lien entre martingale et absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, lorsque le marché est parfaitement arbitré et qu'il est viable et complet alors le processus des prix actualisé des actifs risqués est une martingale.
2. Le fait qu'une martingale possède un drift nul, est un élément clé du pricing en univers risque neutre, nous permet de trouver les équations aux dérivées partielles d'évaluation.

5.1. Théorème de représentation des martingales avec un Mouvement Brownien

Théorème 5.1 Soit l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle de $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$, Il existe alors un processus adapté $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$ de carré intégrable $\left(\mathbb{E} \left(\int_0^T \varphi_s^2 ds \right) < +\infty \right)$ tel que,

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_s dB_s \quad p.s \quad (\text{I.7})$$

6. Intégrales Stochastiques

Définition 6.1 Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un \mathcal{F}_t -mouvement brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$. L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire ϕ est alors, un processus continu $(I(\phi)_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$I(\phi)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (\text{I.8})$$

où $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} = T$.

6.1. Propriétés de l'intégrales stochastique :

Proposition 6.1 Si $(\phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus prévisibles vérifi $\mathbb{E} \left(\int_0^t \phi_s^2 dt \right) < \infty$ alors

1. $\int_0^t \phi_s dW_s$ est une martingale de carré intégrable.
2. $\mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_s dt \right] = 0$.
3. En particulier, nous avons l'isométrie fondamentale, donnée par la formule suivante : $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \phi_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_s^2 ds \right]$

7. Formule d'Itô

Définition 7.1 On appelle processus d'Itô à valeurs réelles tout processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathbb{R} tel que :

$$\forall t \in T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s \quad \mathbb{P}p.s \quad (\text{I.9})$$

avec X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable, $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ deux processus adaptés à \mathcal{F}_t ; vérifiant les conditions d'intégrabilités :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |K_s| ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T |H_s|^2 ds \right] < \infty$$

La notation infinitésimale de cette relation est :

$$\begin{cases} dX_t = K_t dt + H_t dB_t \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Les formes possibles de la formule d'Itô :

- Pour le Mouvement Brownien avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds, \quad \forall t \leq T \quad (\text{I.11})$$

- Pour un processus d'Itô avec $f \in C^2(\mathbb{R})$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s, \quad \forall t \leq T \quad (\text{I.12})$$

- Pour un processus d'Itô avec $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ fonction du temps et de l'espace : $\forall t \leq T$

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

- Pour un processus d'Itô multidimensionnel avec $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$: $\forall t \leq T$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_s) d\langle X^j, X^k \rangle_s \quad (\text{I.14})$$

8. Equations différentielles stochastiques

De manière informelle, on appelle équation différentielle stochastique une équation différentielle ordinaire perturbée par un terme stochastique. Plus précisément

Définition 8.1 Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + a(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

où dB_t est la différentielle d'un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, a et b des applications boréliennes de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} .

Définition 8.2 Un processus (X_t) est solution de cette EDS (appelé processus de diffusion) si, il est continu (\mathcal{F}_t) -adapté tel que :

$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds + \int_0^t a^2(s, X_s) ds < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ } \mathbb{P} - p.s \quad (\text{I.16})$$

et qui vérifie

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t a(s, X_s) dB_s, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \text{ } \mathbb{P} - p.s \quad (\text{I.17})$$

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, nous avons besoin de 2 types de conditions.

Condition 1 : Assurer l'unicité de la solution grâce au caractère contractant (Lip-schitz) des fonctions a et b . Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq L |x - y| \quad (\text{I.18})$$

pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$.

Condition 2 : Assurer que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien défini sur tout \mathbb{R}^+ . Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq C (1 + |x|^2) \quad (\text{I.19})$$

pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Si les fonctions a et b satisfont les conditions 1 et 2. Alors l'EDS admet une unique solution.

8.1. Equations différentielles stochastiques géométrique

Les équations différentielles stochastiques sont des équations différentielles perturbées par un bruit aléatoire (dans notre cas c'est le mouvement brownien). Elles ont le même but que les équations ordinaires, c'est à dire modéliser le comportement d'un phénomène selon les hypothèses du modèle et la nature du sous-jacent.

Il existe plusieurs types d'équations différentielles stochastiques selon le comportement du sous-jacent :

- EDS à coefficient linéaire constant.
- EDS géométrique, utilisée dans le modèle de Black-Scholes et qui a pour but de modéliser des actions.
- Processus racine carrée.
- Processus mean reverting (retour à la moyenne).
- Processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui a pour but de modéliser les taux d'intérêt.

8.2. Résolution de l'équation différentielle stochastique géométrique

Soit l'équation différentielle stochastique géométrique (qui modélise les actions) suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (\text{I.20})$$

tel que le drift et la diffusion sont proportionnels à la dernière valeur de S_t . Plus S_t augmente, plus le drift augmente et plus la variance du Mouvement Brownien augmente. Nous pouvons réécrire l'équation I.20 sous forme d'intégrale :

$$\int_0^t \frac{dS_s}{S_s} = \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s \quad (\text{I.21})$$

Or,

$$d \ln u = \frac{du}{u}.$$

Alors, $\frac{dS_t}{S_t}$ peut être interprétée comme la différentielle de $(\ln S_t)$. Ainsi, pour évaluer $\int_0^t \frac{dS_t}{S_t}$, nous pouvons appliquer la formule d'Itô sur $(\ln S_t)$:

$$d(\ln S) = \frac{\partial(\ln S)}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\ln S)}{\partial S^2} (dS)^2 \quad (\text{I.22})$$

avec, $\frac{\partial(\ln S)}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2(\ln S)}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$ et $(dS)^2 = S^2 \sigma^2 dt$.
L'équation I.22 devient :

$$\begin{aligned} d(\ln S) &= \frac{dS}{S} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S^2}\right) S^2 \sigma^2 dt \\ &= \frac{dS}{S} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt. \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'équation I.21, nous obtenons :

$$\int_0^t d(\ln S_s) + \int_0^t \frac{1}{2} \sigma^2 ds = \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s. \quad (\text{I.24})$$

En intégrant, nous trouvons :

$$\ln S_t - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t.$$

Et au final, ça donne :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right). \quad (\text{I.25})$$

Donc, la valeur d'une option sur un sous-jacent à la date d'échéance T , est donnée par l'expression suivante :

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma B_T\right). \quad (\text{I.26})$$

avec S_T est la solution de l'EDS géométrique.

9. Produits dérivés

Depuis 1973, le volume des transactions sur les marchés financiers a considérablement augmenté en raison notamment de la création de nouveaux produits financiers, appelés produits dérivés. Un produit dérivé est un produit financier, défini à partir d'un autre produit financier plus simple appelé sous-jacent. Le produit dérivé le plus simple est le contrat à terme où un acheteur et un vendeur s'entendent pour échanger à une date fixée un sous-jacent à un prix déterminé à l'avance.

10. Actif sous-jacent

Un actif sous-jacent est un actif sur lequel porte une option ou plus largement un produit dérivé. Il peut être financier (actions, obligations, bons du Trésor, contrats à terme, devises, indices boursiers...) ou physique (matières premières agricoles ou minérales...). L'actif sous-jacent est l'actif réel sur le prix contractuel duquel porte le produit dérivé concerné. Il désigne en effet l'instrument support d'un contrat à terme dont la qualité est strictement définie.

11. Options

Lorsque le produit financier a une caractéristique optionnelle, il est alors appelé option. Une option financière est un contrat entre deux parties pour acheter ou vendre un produit financier spécifique, le sous-jacent qui peut être une action, une obligation, une matière première, une devise, un indice boursier, etc. Le contrat d'option est très précis, il établit un prix spécifique, appelé prix d'exercice (strike) et a une date d'échéance, la date d'expiration (expiration date ou maturité). L'acheteur de l'option a le droit d'acheter (dans le cas d'une option d'achat ou Call) ou de vendre (dans le cas d'une option de vente ou Put) une quantité donnée du sous-jacent au prix d'exercice durant toute la période jusqu'à la date d'échéance. Ce droit se négocie pour un certain prix, appelé prime ou premium (ou pay-off) que reçoit le vendeur d'option en compensation de son obligation de se conformer à la décision de l'acheteur. Une option qui peut être exercée à n'importe quel moment avant la date d'échéance est dite option "Américaine". Une option qui ne peut être exercée qu'à la date d'échéance est dite option "Européenne".

12. Marché complet et viable

En univers risque neutre, il existe deux hypothèses portant sur le marché qui sont très utilisées dans les différents modèles d'évaluation de produits dérivés à savoir marché complet et marché viable.

12.1. Marché complet

Le marché est dit complet si tout produit dérivé est simulable càd, s'il existe une stratégie autofinancée répliquant le pay-off en date d'échéance pour chacun des produits dérivés.

Définition 12.1 (Stratégie autofinancée) *Soit un marché où sont échangés k actifs, dont les prix en date t sont notés par S_t^i , avec $i = 1, \dots, k$ et $0 \leq t \leq T$. Nous pouvons créer une stratégie de portefeuille ϕ qui associe à chaque actif S_t^i une quantité ϕ_t^i . La valeur initiale de ce portefeuille est :*

$$V_0(\phi) = \sum_{i=1}^k \phi_0^i S_0^i = \sum_{i=1}^k \phi_{t+1}^i S_t^i. \quad (\text{I.27})$$

Ce portefeuille sera admissible (autofinancé) si nous avons :

$$\sum_{i=1}^k \phi_t^i S_t^i = \sum_{i=1}^k \phi_{t+1}^i S_t^i, \quad \forall 0 \leq t \leq T-1. \quad (\text{I.28})$$

A l'instant t , la valeur de notre portefeuille est la somme de la composition de notre portefeuille multipliée par la valeur de chacun des actifs. Notre portefeuille étant autofinancé (il n'y a ni prise de bénéfices ni injection d'argent) donc la constitution de notre portefeuille pour la date $t+1$ se fera à partir de la valeur du portefeuille en t . En clair, le pay-off (prix) d'un produit dérivé à la date d'échéance peut être répliqué grâce à un portefeuille composé de l'actif sans risque et du sous-jacent.

$$\mathcal{F}_T = \theta_T^0 \times B_T + \theta_T \times S_T, \quad (\text{I.29})$$

avec

- \mathcal{F}_T : la valeur d'un produit dérivé,
- θ_T^0 : la quantité d'actifs sans risque,
- B_T : la valeur d'actifs sans risque,
- θ_T : la quantité du sous-jacent,
- S_T : la valeur du sous-jacent.

12.2. Marché viable

Le marché est dit **viable**, s'il n'existe pas de possibilité d'arbitrage. L'absence d'opportunité d'arbitrage est un des axiomes de base de la finance des marchés. Elle repose sur l'idée que dans un marché sans friction nous ne pouvons pas faire de profit sans prendre de risque i.e il est impossible de gagner de l'argent de façon certaine à partir d'un investissement initial nul. La méthode de raisonnement par arbitrage est très utilisée en finance, lorsque nous cherchons à déterminer le prix d'un produit dérivé portant sur un sous-jacent.

Proposition 12.1 *En univers risque neutre le prix actualisé est une martingale.*

En effet, soient l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ muni d'une filtration $\mathcal{F}_t(0 \leq t \leq n)$ avec $\tilde{\mathbb{P}}$ la mesure de probabilité risque neutre et \tilde{S}_t le prix actualisé de l'actif S_t . Le processus \tilde{S}_t est appelé une martingale s'il est \mathcal{F}_t -adapté, i.e, son espérance non conditionnelle est finie, et l'espérance d'une valeur future quelconque conditionnée à la filtration \mathcal{F}_t égale à \tilde{S}_t :

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[\tilde{S}_{t+\Delta} | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t \quad (\text{I.30})$$

Remarque

En univers risque neutre, les investisseurs sont neutres au risque. Pour un surplus de risque, ils ne demandent pas un surplus de rentabilité par rapport au taux sans risque. En actualisant au taux sans risque, le drift de l'équation modélisant le prix se trouve éliminé.

En clair, soit S_t un sous-jacent de l'option, modélisé par l'équation aux dérivées stochastique géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \quad (\text{I.31})$$

avec μ et σ sont des constantes et B_t est un Mouvement Brownien. Sous $\tilde{\mathbb{P}}$, le rendement de l'actif risqué r est égal au rendement sans risque. Notant par \tilde{S}_t le cours actualisé du cours du sous-jacent donné par :

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t. \quad (\text{I.32})$$

La formule d'Itô appliquée à \tilde{S}_t donne :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \frac{\partial \tilde{S}_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{S}_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{S}_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= (\mu - r) \tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

En posant

$$\tilde{B}_t = B_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) t$$

On obtient :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{B}_t \quad (\text{I.34})$$

En univers risque neutre en actualisant au taux sans risque, le drift de l'équation modélisant le prix *s'annule* (disparaît) et le *cours actualisé* sera 'drivé' par le Mouvement

Brownien. Si en posant $(\theta_t = \frac{\mu-r}{\sigma})$, il est connu que $\left(\exp\left(-xB_t - \frac{x^2}{2}t\right)\right)$ est une martingale et qu'il existe une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ équivalente à \mathbb{P} sous laquelle le processus \tilde{B}_t est un Mouvement Brownien. Sous cette probabilité, on en déduit que \tilde{S}_t est une *martingale* dont l'expression est :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \quad (\text{I.35})$$

Conclusion

Une probabilité risque neutre $\tilde{\mathbb{P}}$ est une probabilité équivalente à \mathbb{P} sous laquelle les stratégies simples actualisées sont des martingales.

13. Changement de mesure de probabilités

13.1. Théorème de Radon-Nikodym

Définition 13.1 *Sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) , deux mesures de probabilités \mathbb{P} et Q définies sur cet espace sont dites équivalentes si elles ont le même ensemble d'événements impossibles, i.e :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\omega) = 0 \Leftrightarrow Q(\omega) = 0 \quad (\text{I.36})$$

Théorème 13.1 *Sur un espace probabilisable (Ω, \mathcal{F}) , si \mathbb{P} est équivalente à Q , alors il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur cet espace tel que :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad Q(f) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \quad (\text{I.37})$$

avec Z est la densité de Q par rapport à \mathbb{P} et

$$dQ(f) = Z(f) d\mathbb{P}(f) \quad (\text{I.38})$$

Interprétation financière

Si ces deux probabilités sont équivalentes, la densité de **Nikodyn-Radon** de \mathbb{P} par rapport à Q existe et il est possible d'utiliser cette densité pour transformer \mathbb{P} en Q sans modifier la structure de la variance associée au sous-jacent, car la volatilité du sous-jacent est prépondérante dans l'évaluation du produit dérivé associé.

Sur les marchés, un paraticien sera tenu d'évaluer un produit dérivé sur un sous-jacent dont la distribution de probabilité peut être inconnue tout comme son espérance de rentabilité. Soit Q une mesure de probabilité risque neutre sous laquelle le prix actualisé au taux sans risque est une martingale. Une espérance se calcule par rapport à une filtration et une mesure de probabilité donnée, donc en changeant la mesure par Q , nous nous retrouvons en univers risque neutre.

13.2. Théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov fournit la structure nécessaire pour transformer une mesure de probabilité en une autre équivalente.

Théorème 13.2 *Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ d'un Mouvement Brownien standard B_t .*

*Soit un processus aléatoire $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapté à la filtration naturelle tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) \right] < \infty$ (**condition de Novikov**) et que le processus $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ construit sur θ_t , défini comme suit :*

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) \quad (\text{I.39})$$

soit une martingale. Alors sous la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$, qui est une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$ où $d\tilde{\mathbb{P}} = Z_T d\mathbb{P}$, le processus (\tilde{B}_t) défini comme ceci :

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds \quad (\text{I.40})$$

est un Mouvement Brownien.

Le premier modèle d'évolution des actifs financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900 [29]. Les actifs risqués étaient supposés gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle porte le nom de Modèle Black-Scholes. En effet en 1973 [3], Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes publient un article révolutionnaire intitulé "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Ils proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle log-normal. Ils établirent la première formule universelle permettant de calculer le prix d'une option Européenne. Ils obtinrent le prix Nobel d'économie en 1997 pour ces travaux.

Ce chapitre présentera le modèle de Black-Scholes. Nous verrons les hypothèses du modèle qui serviront de base d'établissement de l'équation aux dérivées partielles d'évaluation des options Européennes [29, 30, 33], dans un premier temps par la méthode risque-neutre puis par la méthode d'EDP dans un deuxième temps [5]. L'étape suivante consistera à la valorisation d'un Call Européen en appliquant le raisonnement risque-neutre. Finalement, nous ferons un bref aperçu sur la couverture delta-neutre et les Grecs [31, 32].

1. Hypothèses du modèle Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes sert de référence pour les praticiens dans l'évaluation des options. Il repose sur les hypothèses suivantes :

1. Marché parfait, les taux d'intérêt sont supposés constants : On peut emprunter et prêter au même taux constant r ,
2. Temps continu : Ce qui aide à obtenir ainsi une "Equation aux Dérives Partielles" régissant l'évolution du prix d'une option,
3. Mouvement Brownien : L'idée est de modéliser les accroissements relatifs du prix du sous-jacent par un Mouvement Brownien,
4. Absence d'opportunité d'arbitrage : La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage stipule qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir

d'un investissement nul. Une des conséquences de cette condition est que deux portefeuilles ayant la même valeur à une date future ont la même valeur à toute date intermédiaire,

5. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant,
6. On peut emprunter et vendre à découvert,
7. Les échanges ont lieu sans coûts de transaction,
8. La volatilité est supposée constante,
9. Les titres sont divisibles.

2. Equations aux dérivées partielles d'évaluation de Black-Scholes

2.1. La méthode risque-neutre

La méthode d'évaluation risque-neutre est basée sur le théorème de Girsanov. Ce dernier permet de passer en univers risque-neutre où le prix actualisé du sous-jacent est une martingale.

Soient l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ du Mouvement Brownien standard $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ et le taux d'intérêt ($r \neq cte$) n'est pas supposé fixe. Le processus $(R_t)_{0 \leq t \leq T}$ permet de définir le processus d'actualisation de la manière suivante :

$$D_t = \exp \left(- \int_0^t R_s ds \right) \quad (\text{II.1})$$

Soit $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$, la *valeur d'une option* de maturité T , portant sur un sous-jacent dont le comportement est modélisé par l'Equation Différentielle Stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (\text{II.2})$$

Sur un marché complet et viable, il existe un *portefeuille dont la valeur* est $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$. Sa valeur en T est :

$$X_T = V_T \quad p.s \quad (\text{II.3})$$

Le portefeuille répliquant est constitué à l'aide du capital initial (X_0) avec $V_0 = X_0$. Etant donnée l'absence d'opportunité d'arbitrage, nous avons :

$$V_t = X_t, \text{ pour } t \in [0, T] \quad (\text{II.4})$$

Le portefeuille répliquant est constitué en date t du sous-jacent d'une quantité de Δ_t , plus un investissement ou emprunt au taux R_t , où Δ_t représente le processus de portefeuille.

$$X(t, S_t) = \Delta_t S_t + R_t (X_t - \Delta_t S_t) \quad (\text{II.5})$$

Soit $\tilde{\mathbb{P}}$ la mesure risque neutre, sous laquelle le processus $D_t S_t$ est une *martingale*.

Calculons le différentiel de $D_t X_t$:

$$d(D_t X(t, S_t)) = X(t, S_t) dD_t + D_t dX(t, S_t) + dD_t dX(t, S_t) \quad (\text{II.6})$$

Avec

$$dD_t = -R_t e^{\left(-\int_0^t R_s ds\right)} dt = -R_t D_t dt \quad (\text{II.7})$$

et

$$\begin{aligned} dX(t, S_t) &= \Delta_t dS_t + R_t (X(t, S_t) - \Delta_t S_t) dt \\ &= \Delta_t (R_t S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t) + R_t (X_t(t, S_t) - \Delta_t S_t) dt \\ &= \Delta_t R_t S_t dt + \sigma S_t \Delta_t d\tilde{B}_t + R_t X_t(t, S_t) dt - \Delta_t S_t R_t dt \\ &= R_t X_t(t, S_t) dt + \sigma S_t \Delta_t d\tilde{B}_t \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Donc l'équation II.6 devient,

$$\begin{aligned} d(D_t X(t, S_t)) &= -R_t D_t dt + D_t (R_t X_t dt + \sigma S_t \Delta_t d\tilde{B}_t) + 0 \\ &= \sigma S_t \Delta_t D_t d\tilde{B}_t \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Sous $\tilde{\mathbb{P}}$, la *valeur actualisée de notre portefeuille* est représentée uniquement par une intégrale d'Itô, elle est donc *une martingale* sous la mesure risque -neutre. Cela implique :

$$D_t X_t = \tilde{\mathbb{E}}[D_T X_T | \mathcal{F}_t] = \tilde{\mathbb{E}}[D_T V_T | \mathcal{F}_t] \quad (\text{II.10})$$

Autrement dit,

$$D_t V_t = \tilde{\mathbb{E}}[D_T V_T | \mathcal{F}_t] \quad (\text{II.11})$$

Comme D_t est processus \mathcal{F}_t -mesurable, alors :

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{1}{D_t} \tilde{\mathbb{E}}[D_T V_T | \mathcal{F}_t] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[D_t^{-1} D_T V_T | \mathcal{F}_t] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\exp\left(-\int_0^t R_s ds\right)^{-1} \exp\left(-\int_0^T R_s ds\right) V_T | \mathcal{F}_t] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\exp\left(\int_0^t R_s ds\right) \exp\left(-\int_0^T R_s ds\right) V_T | \mathcal{F}_t] \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Ainsi,

$$V_t = \tilde{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\int_t^T R_s ds\right) V_T | \mathcal{F}_t\right] \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T \quad (\text{II.13})$$

Cette dernière expression représente la *formule d'évaluation risque-neutre*. Ainsi, la *valeur actualisée de l'option est une martingale*.

Le calcul de $d(D_t V_t)$ permet de trouver d'équation différentielle partielle d'évaluation et le processus de portefeuille Δ_t à adopter pour se couvrir.

Soit l'exemple d'un Call Européen dont la valeur à la date t est $V(t, S_t)$. Le calcul de $d(D_t V_t)$ est donné par :

$$d(D_t V(t, S_t)) = V(t, S_t) dD_t + D_t dV(t, S_t) + dD_t dV(t, S_t) \quad (\text{II.14})$$

Sous $\tilde{\mathbb{P}}$, nous avons (en appliquant le Lemme d'Itô) :

$$dV(t, S_t) = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \quad (\text{II.15})$$

Sachant que : $dS_t = R_t S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t$ et $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$. L'équation II.14 se réécrit :

$$\begin{aligned} d(D_t V(t, S_t)) &= -R_t D_t V(t, S_t) dt + D_t \left(\frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right) \\ &\quad - R_t D_t dt \times \left(\frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right) \\ &= -R_t D_t V(t, S_t) dt + D_t \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t} dt \\ &\quad + D_t \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S_t} (R_t S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t) + \frac{1}{2} D_t \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Notant par : $V_t = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial t}$, $V_s = \frac{\partial V(t, S_t)}{\partial S}$ et $V_{ss} = \frac{\partial^2 V(t, S_t)}{\partial S^2}$, nous aurons donc :

$$\begin{aligned} d(D_t V(t, S_t)) &= -R_t D_t V dt + D_t V_t dt + D_t (R_t S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t) V_s + \frac{1}{2} D_t \sigma^2 S_t^2 V_{ss} dt \\ &= D_t (-R_t V(t, S_t) + V_t + R_t S_t V_s + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 V_{ss}) dt + \sigma V_s S_t D_t d\tilde{B}_t \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Nous savons que $d(D_t V(t, S_t))$ est une martingale, ceci impliquera que le drift est nul. Ce qui mène à :

$$-R_t V(t, S_t) + V_t + R_t S_t V_s + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 V_{ss} = 0 \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, l'équation aux dérivées partielles (EDP) du modèle de Black-Scholes, est représentée par l'expression suivante :

$$V_t + R_t S_t V_s + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 V_{ss} = -R_t V(t, S_t) \quad (\text{II.19})$$

2.2. La méthode d'EDP

La méthode d'évaluation d'option par la méthode des équations aux dérivées partielles repose sur l'hypothèse suivante : L'aspect aléatoire de la valeur de l'option et de la valeur du sous-jacent ont la même source. En prenant des positions opposées judicieuses sur l'option et son sous-jacent, permet d'éliminer le terme aléatoire du portefeuille créé.

Soit V_t la valeur d'une option sur action ne versant pas de dividendes, qui est modélisée

comme une fonction dépendant du temps t et du prix de l'action sous-jacente S_t .
Le prix de l'action est modélisé par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

Utilisant la formule d'Itô pour calculer la variation de la valeur de l'option dV suite à une variation du temps de longueur dt et d'une variation du prix de l'action S sur cet intervalle de temps dt :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dB_t \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Si nous constituons un portefeuille P dans lequel nous sommes longs de λ actions et shorts d'un Call de maturité T , sa valeur sera : pour $t \in [0, T]$

$$P_t = \lambda S_t - V_t \quad (\text{II.21})$$

Sa variation s'exprime donc,

$$\begin{aligned} dP_t &= \lambda dS_t - dV_t \\ &= \lambda (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dB_t \\ &= \left(\lambda \mu S_t - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right) dt + \left(\sigma \lambda S_t - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) dB_t \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Pour que ce portefeuille soit sans risque, il faut que son terme aléatoire soit nul ($[\cdot]dB = 0$) i.e :

$$\begin{aligned} \left(\sigma \lambda S_t - \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\partial V}{\partial S_t} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Ainsi, le portefeuille sera sans risque si nous sommes longs d'une quantité $\frac{\partial V}{\partial S}$ (Delta) d'actions. En étant longs sur $\frac{\partial V}{\partial S}$ actions, veut dire que nous avons constitué un portefeuille delta neutre. Si nous adaptons cette couverture, nous aurons une couverture de delta-dynamique et notre portefeuille sera sans risque pour $t \in [0, T]$.

Un portefeuille sans risque, sur un marché parfaitement arbitré procure un rendement égal au taux sans risque r . Sur une période de dt , la valeur de notre portefeuille est :

$$dP_t = P_t r dt \quad (\text{II.24})$$

Et d'autre part, nous avons trouvé :

$$dP_t = \left(\lambda \mu S_t - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (\text{II.25})$$

D'après l'équation II.24 et l'équation II.25, nous obtenons :

$$\left(\lambda \mu S_t - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) = P.t.r \quad (\text{II.26})$$

Or, $\lambda = \frac{\partial V}{\partial S}$ et $P_t = \lambda S_t - V_t$, l'équation II.26 se réécrit comme suit :

$$\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial t} - \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \left(S_t \frac{\partial V}{\partial S} - V \right) r \quad (\text{II.27})$$

Au final, l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + r S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = V.r \quad (\text{II.28})$$

La résolution de cette équation nécessite une condition terminale. Cette condition est simplement le pay-off de l'option Call :

$$V_T = (S_T - K)^+$$

Remarque 2.1 Selon l'EDP de Black-Scholes, la valeur de l'option ne dépend pas de l'espérance de rentabilité du sous-jacent mais de sa volatilité. Ainsi, cette stratégie de couverture a annulé l'incertitude du portefeuille (le terme aléatoire).

Les EDP peuvent être résolues de façons différentes :

- Dans le cas de l'EDP de Black-Scholes, il est possible de la transformer en une EDP dont nous connaissons la résolution, dans ce cas-là, l'équation de la chaleur.
- Une résolution à l'aide de méthodes numériques, par exemple à l'aide de la méthode des différences finies ou la méthode de Monté Carlo.

3. Evaluation d'un Call Européen par la méthode risque-neutre

La relative simplicité de ce produit dérivé permet un calcul explicite pour l'obtention d'une formule fermée d'évaluation. Une des propriétés importantes en univers risque-neutre est que le prix actualisé est une martingale.

Propriété 3.1 Soit l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq n}$ avec $\tilde{\mathbb{P}}$ la mesure de probabilité risque-neutre.

Sous $\tilde{\mathbb{P}}$, le rendement de l'actif risqué est égale au rendement sans risque. Notons par \tilde{S}_t le prix actualisé de l'actif S_t et précisons que \tilde{S}_t est \mathcal{F}_t -adapté.

Le processus \tilde{S}_t est une martingale si il est \mathcal{F}_t -adapté, que son espérance non conditionnelle est finie, et que l'espérance d'une valeur future quelconque conditionnée à la filtration est égale à \tilde{S}_t .

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{S}_{t+\Delta} | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t \quad (\text{II.29})$$

3.1. Le cours actualisé du sous-jacent

Comme nous l'avons vu dans la [Proposition 12.1](#), le cours actualisé \tilde{S}_t est modélisé par l'EDS :

$$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t d\tilde{B}_t \quad \text{avec } \mu > r \quad (\text{II.30})$$

avec μ le rendement espéré et r le taux sans risque. Nous remarquons que le drift est logiquement positif ceci implique que \tilde{S}_t n'est pas une martingale.

Une espérance est calculée avec respect d'une probabilité et un ensemble d'informations donc la modification de l'un ou de l'autre modifie le calcul de l'espérance.

La clé de cette méthode est de trouver $\tilde{\mathbb{P}}$ équivalente à \mathbb{P} tel que :

$$\tilde{\mathbb{E}}[\tilde{S}_t | \tilde{S}_s] = \tilde{S}_t \quad \text{avec } t > s \quad (\text{II.31})$$

où \tilde{S}_t est une martingale, sous $\tilde{\mathbb{P}}$.

Cela est dû au fait que, sous $\tilde{\mathbb{P}}$, nous avons le rendement espéré pour l'actif risqué μ est égal au taux sans risque r , (c à d sous $\tilde{\mathbb{P}}$: $r = \mu$).

Ainsi, l'équation [II.30](#) devient :

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = \sigma d\tilde{B}_t \quad (\text{II.32})$$

Sa solution s'exprime de la manière suivante :

Nous remarquons que $\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t}$ est de la forme $(\ln \tilde{S}_t)$. En appliquant la formule d'Itô sur $(\ln \tilde{S}_t)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} d(\ln \tilde{S}_t) &= \frac{\partial \ln \tilde{S}}{\partial \tilde{S}} d\tilde{S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \tilde{S}}{\partial \tilde{S}^2} (d\tilde{S})^2 \\ &= \frac{1}{\tilde{S}} d\tilde{S} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\tilde{S}^2}\right) \sigma^2 \tilde{S}^2 dt \\ &= \frac{d\tilde{S}}{\tilde{S}} - \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &= \sigma d\tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2} dt \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

En intégrant, nous aurons :

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma\tilde{B}_t\right) \quad (\text{II.34})$$

3.2. Application du raisonnement risque-neutre pour évaluation d'un Call Européen (Formule de Black-Scholes)

Le pay-off d'un Call Européen est :

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \quad (\text{II.35})$$

Avec S_T est la valeur du sous-jacent à la date d'échéance du Call et K le prix d'exercice. Partons du principe que nous sommes l'emetteur d'un Call et que nous voulons connaître

sa valeur en date initiale.

Dans le modèle de Black-Scholes, toute *option* définie par une variable aléatoire X positive, \mathcal{F}_t -mesurable et de carrée intégrable sous la mesure de probabilité risque-neutre $\tilde{\mathbb{P}}$ est simulable et sa valeur notée par $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ est :

$$V_t = \tilde{\mathbb{E}}[\exp(-r(T-t)X) | \mathcal{F}_T] \quad (\text{II.36})$$

Ici, $X = \max(S_T - K, 0)$, or sous probabilité risque-neutre $\tilde{\mathbb{P}}$, \tilde{S}_t est une martingale, donc

$\tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\tilde{S}_T\right)^2\right] < \infty$, et notre formule du Call est par conséquent de carré intégrable.

Ainsi, la valeur de notre Call en date initiale ($t = 0$) est notée par :

$$\begin{aligned} C_0 &= \tilde{\mathbb{E}}[\exp(-rT) \max(S_T - K, 0)] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\max(\exp(-rT)S_T - \exp(-rT)K, 0)] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}[\max(\tilde{S}_T - \tilde{K}, 0)] \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

avec, \tilde{S}_T et \tilde{K} représentent, respectivement, le prix du sous-jacent actualisé et le prix d'exercice actualisé.

En utilisant la fonction indicatrice ayant pour événement $(\tilde{S}_T \geq \tilde{K})$, nous pouvons récrire le pay-off de la façon suivante :

$$C_0 = \tilde{\mathbb{E}}[(\tilde{S}_T - \tilde{K})1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] \quad (\text{II.38})$$

Avec, $\max(\tilde{S}_T - \tilde{K}, 0) = (\tilde{S}_T - \tilde{K})1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}$ tel que :

$$\max(\tilde{S}_T - \tilde{K}, 0) = \begin{cases} \tilde{S}_T - \tilde{K} & \text{si } \tilde{S}_T \geq \tilde{K} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

Nous savons que l'espérance d'une fonction indicatrice est égale au probabilité d'occurrence de son événement.

$$\tilde{\mathbb{E}}[1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] = \tilde{\mathbb{P}}[\tilde{S}_T \geq \tilde{K}] \quad (\text{II.40})$$

Ainsi l'équation II.38 devient,

$$C_0 = \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{S}_T] \tilde{\mathbb{E}}[1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] - \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{K}] \tilde{\mathbb{E}}[1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] \quad (\text{II.41})$$

Nous devons trouver pour quelle valeur de \tilde{B}_T pour que $\tilde{S}_T \geq \tilde{K}$:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_T \geq \tilde{K} &\Leftrightarrow S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\tilde{B}_T\right) \geq \tilde{K} \\ &\Leftrightarrow S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\tilde{B}_T\right) \geq e^{-rT}K \\ &\Rightarrow \ln\left(S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\tilde{B}_T\right)\right) \geq \ln(e^{-rT}K) \\ &\Rightarrow \ln(S_0) + \left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\tilde{B}_T\right) \geq -rT + \ln(K) \end{aligned}$$

Donc, la valeur de \tilde{B}_T est définie comme suit :

$$-\left(\ln \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2}T + rT\right) \frac{1}{\sigma} \leq \tilde{B}_T \quad (\text{II.42})$$

En utilisant l'équation précédente, nous pouvons réécrire l'équation II.40 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{E}}[1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] &= \tilde{\mathbb{P}}[\tilde{S}_T \geq \tilde{K}] \\
 &= \tilde{\mathbb{P}}\left[\tilde{B}_T \geq -\frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2} T + rT \right)\right] \\
 &= \tilde{\mathbb{P}}[\tilde{B}_T \geq C]
 \end{aligned} \tag{II.43}$$

avec $C = -\frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2} T + rT \right)$.

D'autre part, sachant que $\tilde{B}_T \rightsquigarrow \mathbb{N}(0, T)$, la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ est donnée par :

$$\tilde{\mathbb{P}}[\tilde{B}_T \geq C] = \int_{x=C}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sqrt{T})^2}\right) dx \tag{II.44}$$

Faisant un changement de variable, en posant : $y = \frac{x}{\sqrt{T}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{T}}$

Ça donne :

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}[\tilde{B}_T \geq C] &= \int_{y=\frac{C}{\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{y^2 T}{2(\sqrt{T})^2}\right) \sqrt{T} dy \\
 &= \int_{y=\frac{C}{\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
 &= 1 - \mathbb{N}\left(\frac{C}{\sqrt{T}}\right) \\
 &= \mathbb{N}\left(-\frac{C}{\sqrt{T}}\right)
 \end{aligned} \tag{II.45}$$

$\mathbb{N}(\cdot)$ est une fonction de densité cumulée de la loi normale centrée et réduite (espérance 0 et variance 1) :

$$\mathbb{N}(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \tag{II.46}$$

Posant :

$$d_2 = -\frac{C}{\sqrt{T}} = -\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2} T + rT \right)\right) \tag{II.47}$$

Ainsi,

$$\mathbb{N}\left(-\frac{C}{\sqrt{T}}\right) = \mathbb{N}(d_2) = \tilde{P}[\tilde{S}_T \geq \tilde{K}] = \tilde{\mathbb{E}}[1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] \tag{II.48}$$

Remplaçant la dernière formule dans l'expression de C_0 (équation II.41) :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{S}_T] \tilde{\mathbb{E}}[1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] - \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{K}] \mathbb{N}(d_2) \quad (\text{avec } \tilde{\mathbb{E}}[\tilde{S}_T] = \tilde{S}_T \text{ car c'est une martingale}) \\
 &= \tilde{S}_T \tilde{\mathbb{E}}[1_{\tilde{S}_T \geq \tilde{K}}] - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= \int_{x=C}^{\infty} S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma x\right) \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sqrt{T})^2}\right) dx \\
 &\quad - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \quad (\text{en posant } \tilde{B}_T = x)
 \end{aligned} \tag{II.49}$$

Posant de nouveau $y = \frac{x}{\sqrt{T}} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{T}}$, donc le prix du Call sera :

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \int_{y=\frac{C}{\sqrt{T}}}^{\infty} S_0 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma y\sqrt{T}\right) \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= S_0 \int_{y=\frac{C}{\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma y\sqrt{T} - \frac{y^2}{2}\right) dy - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= S_0 \int_{y=\frac{C}{\sqrt{T}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)^2\right) dy - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2)
 \end{aligned} \tag{II.50}$$

Nouveau changement de variable : $z = y - \sigma\sqrt{T} \Rightarrow dz = dy$. Alors,

$$\begin{aligned}
 C_0 &= S_0 \int_{z=\frac{C}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= S_0 \left(1 - \mathbb{N}\left(\frac{C}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)\right) - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= S_0 \mathbb{N}\left(-\left(\frac{C}{\sqrt{T}} - \sigma\sqrt{T}\right)\right) - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= S_0 \mathbb{N}\left(\frac{\left(\ln \frac{S_0}{K} - \frac{\sigma^2}{2}T + rT\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \sigma\sqrt{T}\right) - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= S_0 \mathbb{N}\left(\frac{\left(\ln \frac{S_0}{K} + \frac{\sigma^2}{2}T + rT\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \\
 &= S_0 \mathbb{N}(d_1) - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2)
 \end{aligned} \tag{II.51}$$

Nous pouvons noter :

$$C_0 = S_0 \mathbb{N}(d_1) - K \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2)$$

Plus généralement,

$$C_t = S_t \mathbb{N}(d_1) - K \exp(-r(T-t)) \mathbb{N}(d_2) \quad (\text{II.52})$$

avec

$$d_1 = \frac{\left(\ln \frac{S_t}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + r(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = \frac{\left(\ln \frac{S_t}{K} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + r(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (\text{II.53})$$

Remarque 3.1 *La méthode risque neutre permet de trouver la formule de Black-Scholes. Cette formule est son cheminement sont le point de départ de la valorisation des produits dérivés exotiques dont le pay-off possède des similitudes au pay-off d'une option vanille.*

4. Couverture et sensibilité (Grecs)

4.1. Couverture delta -neutre

Lorsqu'un intervenant vend une option, un Call par exemple, il peut être amené à la maturité de l'option, à devoir payer le sous-jacent en date T pour le livrer en cas d'exercice de l'acheteur, ou à payer la différence entre le prix du sous-jacent à la maturité et le prix d'exercice.

Toutefois, si le marché est viable, il doit exister un portefeuille permettant de dupliquer le pay-off du Call à la date de maturité de l'option. Le raisonnement est semblable à l'évaluation risque-neutre, si nous reprenons le raisonnement risque-neutre (Section 2 dans l'équation II.17), nous obtenons l'expression :

$$d(D_t V(t, S_t)) = D_t(-R_t V + V_t + R_t S_t V_s + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{ss}) dt + \sigma S_t D_t V_s d\tilde{B}_t$$

Le drift est nul dans la dernière expression. Donc :

$$d(D_t V(t, S_t)) = \sigma S_t D_t V_s d\tilde{B}_t \quad (\text{II.54})$$

Tandis que le portefeuille répliquant l'option avait un différentiel (vu dans l'équation II.9) :

$$d(D_t X(t, S_t)) = \sigma S_t \Delta_t D_t d\tilde{B}_t$$

Sous forme d'intégrale, ça donne :

$$D_t V(t, S_t) = V(0, S_0) + \int_0^t \sigma S_u D_u V_s d\tilde{B}_u \quad (\text{II.55})$$

et

$$D_t X(t, S_t) = X(0, S_0) + \int_0^t \sigma S_u \Delta_u D_u d\tilde{B}_u \quad (\text{II.56})$$

Ainsi, pour que $V(t, S_t) = X(t, S_t)$ p.s, il faut $V(0, S_0) = X(0, S_0)$ et que :

$$V_s = \Delta_t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{II.57})$$

La quantité détenue de sous-jacent doit être égale au delta du Call continuellement, c'est une couverture delta -neutre dynamique. Cette méthode peut être appliquée aux options exotiques, cela permet de déterminer dans de nombreux cas la stratégie de portefeuille à adopter pour couvrir les dérivés.

4.2. Les Grecs

Pour la gestion des risques, il est indispensable de disposer d'indicateurs pertinents de ces risques. Nous utilisons très souvent les sensibilités ou les dérivées de prix par rapport aux différents paramètres du modèle, nommés les "Grec". Ces sensibilités sont prépondérantes à la gestion d'un portefeuille de produits dérivés dans la mesure où elles permettent de se couvrir des variations de prix suite à la variation d'un des paramètres influant le prix du produit dérivé.

4.2.1. Delta

Le Delta d'une option est la mesure de la sensibilité du prix de l'option à un changement de prix du sous-jacent sur lequel elle porte.

Nous avons trouvé la formule du prix du Call Européen dans l'équation II.51 :

$$C_t = S_t \mathbb{N}(d_1) - K \exp(-r(T-t)) \mathbb{N}(d_2)$$

avec

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\left(\ln \frac{S_t}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + r(T-t) \right)}{\sigma \sqrt{T-t}} \\ d_2 = \frac{\left(\ln \frac{S_t}{K} - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + r(T-t) \right)}{\sigma \sqrt{T-t}} \end{cases}$$

et $\mathbb{N}(\cdot)$ est une fonction de densité cumulée de la loi normale centrée et réduite.

En clair, notant par $x = S_t$ et $T-t$ sera simplement T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_t}{\partial x} &= \mathbb{N}(d_1) + x \frac{\partial \mathbb{N}(d_1)}{\partial x} - K \exp(-rT) \frac{\partial \mathbb{N}(d_2)}{\partial x} \\ &= \mathbb{N}(d_1) + x \mathbb{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial x} - K \exp(-rT) \mathbb{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Or,

$$x \mathbb{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial x} = K \exp(-rT) \mathbb{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial x} \quad (\text{II.59})$$

Puisque, nous avons

$$\frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} = \frac{\partial d_2}{\partial x} \quad (\text{II.60})$$

et

$$\mathbb{N}'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{N}'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_2^2}{2}\right) \quad (\text{II.61})$$

avec $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ ce qui fait

$$\begin{aligned} \mathbb{N}'(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_1 - \sigma\sqrt{T})^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{T} + \sigma^2T)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \exp(d_1\sigma\sqrt{T}) \exp\left(-\frac{\sigma^2T}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \exp\left(\frac{\left(\ln \frac{x}{K} + \frac{\sigma^2}{2}T + rT\right)}{\sigma\sqrt{T}} \sigma\sqrt{T}\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2T}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \exp\left(\ln \frac{x}{K} + \frac{\sigma^2}{2}T + rT\right) \exp\left(-\frac{\sigma^2T}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x}{K} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \exp(rT) \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

L'équation II.58 devient :

$$\frac{\partial C_t}{\partial x} = \mathbb{N}(d_1) + x \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \right) \frac{\partial d_1}{\partial x} - K \exp(-rT) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x}{K} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \exp(rT) \right) \frac{\partial d_2}{\partial x}$$

Enfin, nous trouvons le Delta du Call égal à :

$$\frac{\partial C_t}{\partial x} = \mathbb{N}(d_1) \quad (\text{II.63})$$

4.2.2. Gamma

Le Gamma d'une option est la mesure de la sensibilité du Delta à un changement de prix du sous-jacent sur lequel elle porte. C'est la dérivée seconde du prix du Call par rapport au prix du sous-jacent :

$$\frac{\partial^2 C_t}{\partial x^2} = \frac{\partial \mathbb{N}(d_1)}{\partial x} = \mathbb{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial x} = \frac{1}{\sigma x \sqrt{T}} \mathbb{N}'(d_1) \quad (\text{II.64})$$

4.2.3. Vega

Le Vega d'une option est la mesure de la sensibilité du prix de l'option à un changement de volatilité du sous-jacent sur lequel l'option porte :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} &= x \mathbb{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + K \exp(-rT) (\mathbb{N}'(d_2)) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
 &= x \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \right) \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + K \exp(-rT) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x}{K} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \exp(rT) \right) \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
 &= x \mathbb{N}'(d_1) \left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \right) \tag{II.65}
 \end{aligned}$$

De plus,

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \Rightarrow \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \sqrt{T} \tag{II.66}$$

Alors le Vega est égal à :

$$\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = x \mathbb{N}'(d_1) \sqrt{T} \tag{II.67}$$

4.2.4. Rhô

Le Rhô d'une option est la mesure de la sensibilité du prix de l'option à un changement de taux d'intérêt :

$$\frac{\partial C_t}{\partial r} = x \mathbb{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial r} - \left[-TK \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) + K \exp(-rT) (\mathbb{N}'(d_2)) \frac{\partial d_2}{\partial r} \right] \tag{II.68}$$

Nous avons,

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\partial d_2}{\partial r} \tag{II.69}$$

Alors le Rhô est égal à :

$$\frac{\partial C_t}{\partial r} = TK \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \tag{II.70}$$

4.2.5. Thêta

Le Thêta d'une option est la mesure de la sensibilité du prix de l'option à la variation de la maturité :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C_t}{\partial T} &= x \mathbb{N}'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial T} - \left[-rK \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) + K \exp(-rT) (\mathbb{N}'(d_2)) \frac{\partial d_2}{\partial T} \right] \\
 &= x \mathbb{N}'(d_1) \left(\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T} \right) + rK \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \tag{II.71}
 \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \tag{II.72}$$

Alors le Thêta est égal à :

$$\frac{\partial C_t}{\partial T} = x \mathbb{N}'(d_1) \left(-\frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \right) + rK \exp(-rT) \mathbb{N}(d_2) \tag{II.73}$$

5. Conclusion

Le modèle de Black-Scholes est l'outil fondamental en finance pour l'évaluation et couverture des options Européennes. En se basant sur le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage, nous avons pu aboutir à une équation aux dérivées partielles (EDP), ainsi, démontré les démarches à suivre afin d'évaluer les options d'achat standards du type européen par le biais de la méthode risque-neutre et la méthode des équations aux dérivées partielles. Concluons ce chapitre par l'étude des sensibilités ou les dérivées de prix des options par rapport aux différents paramètres du modèle, nommés les "Grec". Ces dernières sont prépondérantes à la gestion d'un portefeuille de produits dérivés dans la mesure où elles nous permettent de se couvrir des variations de prix suite à la variation d'un des paramètres influant le prix du produit dérivé.

1. Introduction

Dans le but de mondialisation des échanges des capitaux, les options ont été développées afin de répondre aux demandes des investisseurs en matière de gestion du risque et de protection face aux fluctuations du marché. Le marché des options a connu une hausse de nombre de transactions dès les années 80. Aujourd'hui les options sont devenues des outils indispensables pour tous les professionnels des marchés financiers. En effet, avec la découverte de la formule d'évaluation des options sur actions par Black-Scholes en 1973, celle-ci a permis une meilleure compréhension de ces outils financiers tant au niveau des stratégies d'investissements que des couvertures de portefeuilles. Cette équation s'appliquait à des options de première génération et à des options exotiques de seconde génération [34, 35, 36].

Les options exotiques se différencient des options classiques par :

- *La dimension* : Les options classiques sont unidimensionnelles, elles sont écrites sur un seul sous-jacent.
- *Dépendance du chemin suivi* : Les options exotiques peuvent dépendre du chemin suivi par le sous-jacent. Elles sont appelées path-dependent.
- *Ordre de l'option* : Une option classique est du premier ordre, car son sous-jacent est un instrument financier primaire, telle une action. Par contre, une option exotique, est du second ordre, son sous-jacent est en effet une option.

Il existe une grande variété d'options exotiques : options à barrière, options asiatiques, options lookback, . . . etc. Dans ce qui suit, nous nous intéressons plus précisément aux options à barrière. Comme leur nom l'indique, elles sont des options dont la valeur est conditionnée par l'évolution, pendant leur durée de vie, du prix du sous-jacent par rapport à un ou plusieurs seuils [31, 37, 38, 39]. Nous pouvons distinguer deux catégories : les options à barrière désactivantes "Out" dont la valeur de l'option s'annule si le cours du sous-jacent franchit la barrière à la hausse (option de type Up) ou à la baisse (option de type Down) et les options à barrière activantes "In" dont le pay-off de l'option est nul si le cours du sous-jacent ne franchit pas la barrière à la hausse (option de type Up) ou à la baisse (option de type Down).

Les options à barrière ont été étudiées en temps continu par Merton [4], Andersen et

al. [40] Reiner [8], Bowie et Carr [41], Rich [42], Heynen et Kat [43], Baldi et al. [44], Linetsky [45], Kunitomo et Ikeda [46] et Doobae [47]. Broadie et al. [48] ont présenté quelques termes de correction entre les options à barrière en temps discret et en temps continu. Généralement, l'actif sous-jacent est observé en temps continu par rapport à la barrière. Cependant dans la pratique, la plupart des options à barrière sont discrètement surveillées à des dates précises. Ces options sont appelées des options à barrière discrète [49]. Elles ont été discutées par Wilmott et al. [50], Musiela et Rutkowski [6], Zhang [51], Pliska [52], Monique Jeanblanc et al [53] et Wilmott [38].

L'objectif principal dans ce qui suit est la valorisation des options à barrière. Après une présentation détaillée des options à barrière, leurs caractéristiques ainsi que l'intérêt d'utilisation de ce type d'option pour une bonne compréhension des méthodes d'évaluation. Nous allons tenter d'évaluer les options du type Up and In Call [39, 54], sous deux contextes, en temps continu puis en temps discret. Le raisonnement d'évaluation est basé sur le théorème de Girsanov, le principe de réflexion et la densité jointe du Mouvement Brownien et son maximum.

2. Les options à barrière

2.1. Définitions et caractéristiques

En 1970, les produits dérivés de première génération sont introduits par les célèbres travaux de Black-Scholes mais au cours de ces dernières années les produits financiers disponibles sur les marchés se sont particulièrement complexifiés, sur ce fait les produits exotiques de deuxième génération ont fait leur apparition au début des années 1990. Parmi eux, les options à barrière dont la caractéristique essentielle réside dans la dépendance du flux terminal de l'option en la trajectoire complète du cours de l'action sous-jacente.

Les options à barrière sont un nom générique donné aux produits dérivés dont les pay-offs dépendent du fait que le sous-jacent a atteint ou non un niveau donné (ou barrière) durant la durée de vie de l'option. Tel que leur nom l'indique, les options à barrière naissent ou disparaissent si une barrière est atteinte. Si elles naissent lorsque la barrière est atteinte, nous disons qu'elles sont Knocked-In. Par ailleurs, si elles disparaissent lorsque la barrière est touchée, nous disons qu'elles sont Knocked-Out.

2.1.1. Options à barrière activantes et désactivantes

Une option à barrière, d'une manière générale, est un instrument financier qui s'active ou se désactive, en fonction de l'évolution du sous-jacent sur laquelle elle porte. Elle peut donc être activée à la hausse ou à la baisse, tout comme elle peut être également désactivée à la hausse ou à la baisse. Nous pouvons les classer comme suit :

① **Options à barrière activante** : Ces options, dites de type « In Barrier ou Knock-In ou lightable option », qui ne commencent à exister que si le cours du sous-jacent atteint un certain cours fixé à l'avance. Cependant, la prime est payée dès le départ, qu'une option apparait.

② **Options à barrière désactivante** : Ces options, dites de type « Out Barrier ou Knock-Out ou extinguishable », sont des options Européennes classiques en tout point sauf qu'elles disparaissent si le cours du sous-jacent atteint dans la période de référence un seuil prédéterminé.

Nous pouvons ainsi, dénombrer quatre cas :

- a. **Option Up and In** : L'option ne prend effet que si le sous-jacent franchit un certain niveau à la hausse. Ce type d'option s'applique à des Calls ou à des Puts.
- b. **Option Up and Out** : L'option disparaît si le sous-jacent franchit un certain niveau à la hausse. Ce type d'option s'applique à des Calls ou à des Puts.
- c. **Option Down and In** : L'option ne prend effet que si le sous-jacent franchit un certain niveau à la baisse. Ce type d'option s'applique à des Calls ou à des Puts.
- d. **Option Down and Out** : L'option disparaît si le sous-jacent franchit un certain niveau à la baisse. Ce type d'option s'applique à des Calls ou à des Puts.

Au final, il existe donc 8 types d'options à barrière 4 Calls et 4 puts. Utilisons les notations suivantes pour définir leurs « pay-offs » respectifs [55] :

- K : Prix d'exercice ou strike,
- S : Cours du sous-jacent,
- B : Barrière.

*** Calls à barrière :**

Type	Pay-off
Down and Out	$C_{CDO} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & \text{si } \forall t, S_t > B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Up and Out	$C_{CUO} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & \text{si } \forall t, S_t < B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Down and In	$C_{CDI} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & \text{si } \exists t, S_t \leq B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Up and In	$C_{CUI} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & \text{si } \exists t, S_t \geq B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

*** Puts à barrière :**

Type	Pay-off
Down and Out	$C_{PDO} = \begin{cases} \max(K - S_T, 0) & \text{si } \forall t, S_t > B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Up and Out	$C_{PUO} = \begin{cases} \max(K - S_T, 0) & \text{si } \forall t, S_t < B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Down and In	$C_{PDI} = \begin{cases} \max(K - S_T, 0) & \text{si } \exists t, S_t \leq B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Up and In	$C_{PUI} = \begin{cases} \max(K - S_T, 0) & \text{si } \exists t, S_t \geq B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.1.2. Options à barrière Américaines et options à barrière Européennes

Dès lors, la question est désormais de savoir comment observer la barrière d'une option. Plusieurs conventions sont utilisées dans le marché.

*** Observation Européenne** : Appelée aussi observation à maturité seulement. En d'autres termes, c'est le dernier jour, et uniquement le dernier jour, que nous observons le niveau du sous-jacent pour déclarer si un événement de barrière a eu lieu.

* **Observation Américaine** : Appelée aussi observation en continu. En d'autres termes, nous observons le niveau du sous-jacent tous les jours, à chaque instant, pour établir le franchissement potentiel de la barrière.

* **Observation au close** : Appelée aussi observation discrète. En d'autres termes, nous observons le niveau du sous-jacent tous les jours, uniquement à la clôture (et pas en intraday), pour savoir si la barrière a été franchie.

2.2. Avantages d'utilisation des options à barrière

Nous pouvons citer trois principaux avantages de l'utilisation des options à barrière :

- ▶ *Prix des options* : le prix des options à barrière peut être selon le niveau de la barrière, nettement plus faible que celui d'une option standard de mêmes caractéristiques.
- ▶ *Grande flexibilité* : la multiplicité des options à barrière permet d'élaborer des stratégies très précises tant en terme d'anticipation, qu'en terme de couverture pour une classe donnée d'option standard.
- ▶ *Levier et rendement importants* : le versement d'une prime faible combiné à un « pay-off » identique à celui d'une option standard en cas d'évolution favorable du sous-jacent permettent d'améliorer le levier de façon significative, ainsi que le rendement de l'option.

Dès lors, l'investisseur peut être fortement intéressé par ce type d'option à barrière pour une raison liée au prix. Aussi, parce que les options à barrière sont en général bien moins chères que des options vanilles similaires (sans barrière).

2.3. La parité des options à barrière Européennes

Tout comme la parité Call/Put, une relation de parité peut être dégagée des options à barrière Européennes. Si aucun rebat n'est associé aux options à barrière, dans ce cas :

$$Call = Call_{Up\&In} + Call_{Up\&Out} \quad (III.1)$$

3. Options à barrière à maturité fixe

3.1. Propositions [53]

Proposition 3.1 (Propriété de Markov forte) Si $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un Mouvement Brownien sous \mathbb{P} , si $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une filtration adaptée et si τ est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ alors, sur l'événement $\{\tau < +\infty\}$, le processus :

$$(B_{t+\tau} - B_\tau)_{t \in \mathbb{R}^+} \quad (III.2)$$

est un Mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_t .

En particulier, pour toute fonction g \mathbb{P} - mesurable, et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}} (1_{\tau \leq t} \cdot g(B_t)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(1_{\tau \leq t} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left(g(B_t + \tilde{B}_{t-\tau} | \mathcal{F}_\tau) \right) \right) \quad (III.3)$$

où $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un Mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_τ .

Proposition 3.2 (Loi du maximum d'un mouvement Brownien avec Dérive)

Soit $X_t = \mu t + B_t$ un Mouvement Brownien et soit $M_t = \max_{s \leq t} (X_s)$. Notant par, $\mathbb{P}(X_t \in A)$ la probabilité que le Mouvement Brownien avec dérive X_t avec drift μ appartient à A .

La loi du maximum d'un Mouvement Brownien avec drift est :

$$\mathbb{P}(X_t \geq y, M_t \geq y) = \mathbb{P}(M_t \geq y) \quad (\text{III.4})$$

Nous aurons :

$$\mathbb{P}(M_t \geq y) = N\left(\frac{-y + \mu t}{\sqrt{t}}\right) + e^{2\mu y} N\left(\frac{-y - \mu t}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{pour } y \geq 0 \quad (\text{III.5})$$

Proposition 3.3 (Principe de Reflexion) Pour $y \geq 0$ et $x \leq y$, on a :

$$\mathbb{P}(X_t \leq x, M_t \geq y) = \mathbb{P}(X_t \geq 2y - x) \quad (\text{III.6})$$

Proposition 3.4 (Loi du Mouvement Brownien Drifté)

$$\mathbb{P}(X_t \geq x, M_t \geq x) = \mathbb{P}(X_t \geq x) = N\left(\frac{-x + \mu t}{\sqrt{t}}\right) \quad (\text{III.7})$$

3.2. Evaluation des Options Calls Européennes à barrière

Les options à barrière peuvent être activantes ou désactivantes. Nous allons étudier l'option du type Up and In, qui est activée si le sous-jacent franchit un certain niveau à la hausse (passe au-dessus de la barrière), son existence est conditionnée par le passage du prix de l'actif sous-jacent au-dessus d'un certain seuil [51, 56].

Dans ce qui suit, la maturité est considérée comme une constante.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ l'espace probabilisé muni de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ du Mouvement Brownien $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$. Soit une option Call Up and In ayant un prix d'exercice K et une barrière de niveau B , avec $B > K$ portant sur un sous-jacent S_t . L'Equation Différentielle Stochastique (EDS) modélisant le cours du sous-jacent (S_t) avec un taux d'intérêt sans risque r est donnée par [57] :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t \quad (\text{III.8})$$

Sous $\tilde{\mathbb{P}}$, seul le processus $\exp(-rt)S_t$ (le prix du cours actualisé \tilde{S}) est une martingale. La solution de l'équation III.8 est obtenue comme suit :

Soit,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma d\tilde{B}_t$$

Nous remarquons que $\frac{dS_t}{S_t}$ est du type $d(\ln S_t)$:

$$d(\ln S_t) = \frac{dS_t}{S_t} \quad (\text{III.9})$$

En appliquant la formule d'Itô sur $(\ln S_t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 d(\ln S_t) &= \frac{\partial(\ln S_t)}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\ln S_t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\
 &= \frac{1}{S_t} (rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2}\right) (\sigma S_t)^2 dt \\
 &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma d\tilde{B}_t
 \end{aligned} \tag{III.10}$$

En intégrant,

$$\int d(\ln S_t) = \int \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \int \sigma d\tilde{B}_t \tag{III.11}$$

Donc le processus résolvant l'équation III.8 est :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma \tilde{B}_t\right) \tag{III.12}$$

Le processus S_t n'est pas une martingale, possédant un drift.

Nous pouvons néanmoins réécrire l'équation III.12 de la manière suivante :

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma\left(\left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t + \tilde{B}_t\right)\right) = S_0 \exp\left(\sigma \hat{B}_t\right) \tag{III.13}$$

Où

$$\hat{B}_t = at + \tilde{B}_t \tag{III.14}$$

et

$$a = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{III.15}$$

D'après le Théorème 13.2 de Girsanov $(\hat{B}_t)_{t \geq 0}$ est un Mouvement Brownien sous $\hat{\mathbb{P}}$ défini par [24, 37] :

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-a\tilde{B}_T - \frac{a^2}{2}T\right) \tag{III.16}$$

Alors, sous $\hat{\mathbb{P}}$, la nouvelle formule de S_t (l'équation III.13) est une martingale (drift annulé).

Situons-nous dans le cas d'une option Up and In Call Européenne, sous les conditions suivantes :

- ☛ La barrière se situe au-delà du prix d'exercice ($B > K$),
- ☛ Et le cours du sous-jacent est au-dessous de la barrière ($S < B$).

L'équation III.13 peut se réécrire sous la forme :

$$S_t = S_0 e^{X_t} \tag{III.17}$$

avec

$$X_t = \sigma \hat{B}_t = \lambda t + \sigma \tilde{B}_t \quad (\text{III.18})$$

et

$$\lambda = r - \frac{\sigma^2}{2} \quad (\text{III.19})$$

Nous savons que l'option à barrière s'active si le cours du sous-jacent franchit la barrière B , nous allons donc être amenés à étudier le *maximum du Mouvement Brownien* X_t . Définissons [27],

$$M_T = \max_{0 \leq t \leq T} X_t \quad (\text{III.20})$$

Remarque 3.1 La transformation de \tilde{B}_t en X_t (ou bien \hat{B}_t) (Mouvement Brownien avec drift) a été faite dans le but de calculer la densité jointe du couple (X_t, M_t) sous la mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$, sous laquelle X_t est une martingale, puis de la transposer sous $\tilde{\mathbb{P}}$, en utilisant le théorème de Girsanov (voir [Théorème 13.2](#)). Cette transformation est essentielle dans la mesure où elle permet l'utilisation de la propriété de réflexion (voir [Proposition 3.3](#)) du Mouvement Brownien qui permet de calculer la distribution jointe du couple Mouvement Brownien et son maximum.

A présent, nous nous retrouvons sous $\hat{\mathbb{P}}$, dans une situation où le problème de l'évaluation de l'option à barrière peut être aisément transposé.

Pour que l'option ne soit pas désactivée, le prix du sous-jacent ne doit pas franchir la barrière B durant toute la vie de l'option ($B > S_t$) [57, 72], mais pour que l'option n'ait pas une valeur nulle, il faut que $S_t > K$.

Le pay-off d'un Call Up and In avec barrière fixée au niveau B et prix d'exercice K est donné par :

$$C_T^{UI} = \begin{cases} \max(S_T - K, 0) & \text{si } \exists t, S_T \geq B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

avec $S_T = S_0 e^{X_T}$, est la valeur du sous-jacent à la date d'échéance T .

Nous savons que toute *option* définie par une variable aléatoire X positive, \mathcal{F}_t -mesurable et de carrée intégrable sous la mesure de probabilité risque-neutre $\hat{\mathbb{P}}$ est simulable et sa valeur notée par $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ est :

$$V_t = \hat{\mathbb{E}}[\exp(-r(T-t)X_T) | \mathcal{F}_t] \quad (\text{III.22})$$

Ici, $X_T = \max(S_T - K, 0)$, or sous probabilité risque-neutre $\hat{\mathbb{P}}$, S_T est une martingale (voir [subsection 3.2](#)), donc $\hat{\mathbb{E}}[(S_T)^2] < \infty$, et notre formule du Call Up and In est par conséquence de carré intégrable.

Ceci n'est applicable que si nous définissons V_t à l'aide du temps d'arrêt $\tau_m = \min\{t \geq 0, B_t = B\}$ comme suit :

$$\exp(-r(t \wedge \tau)) X(t \wedge \tau) = \begin{cases} \exp(-r(t))X(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ \exp(-r(\tau))X(\tau) & \text{si } \tau \leq t \leq T \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

Une martingale arrêtée étant toujours une martingale, celle-ci peut être utilisée dans la formule d'évaluation risque-neutre.

D'après [37], si $V(t, x)$ la valeur d'une option Call Up and In à l'instant t , sous l'hypothèse que l'option ne soit pas activée avant t et que $S_t = x$. Alors, le pay-off d'un Call à barrière est identique à celui d'un Call standard. Dès lors, le processus de prix d'un Call barrière $V(t, x)$ devrait résoudre d'EDP de Black-Scholes (l'équation II.28) :

$$V_t(t, x) + rxV_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2V_{xx}(t, x) = rV(t, x)$$

avec $0 \leq t < T$ et $0 \leq x \leq B$.

Maintenant, partons du principe que nous sommes l'emetteur d'un Call Up and In et que nous voulons connaitre sa valeur en date initiale.

Notons par C_t^{UI} le prix du Call Up and In à l'instant t :

$$\begin{aligned} C_t^{UI} &= \widehat{\mathbb{E}} \left[e^{-r(T-t)} \max(S_T - K, 0) \right] \\ &= \widehat{\mathbb{E}} \left[e^{-r(T-t)} (S_T - K)^+ 1_{\left\{ \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B, S_T \geq K \right\}} \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \widehat{\mathbb{E}} \left[(S_0 \exp(X_T) - K) 1_{\left\{ \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B, S_T \geq K \right\}} \right] \quad (\text{III.24}) \\ &= e^{-r(T-t)} \widehat{\mathbb{E}} \left[S_0 (\exp(X_T) - K) 1_{\left\{ X_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right) \right\}} \right] \\ &= e^{-r(T-t)} S_0 \widehat{\mathbb{E}} [\exp(X_T) I_D] - e^{-r(T-t)} K \widehat{\mathbb{E}} [I_D] \\ &= e^{-r(T-t)} S_0 I_1 - e^{-r(T-t)} K \widehat{\mathbb{P}}(D) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} D &= \left\{ S_T \geq K, \quad \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \right\} \\ &= \left\{ S_0 e^{X_T} \geq K, \quad \max_{0 \leq t \leq T} S_0 e^{X_t} \geq B \right\} \quad (\text{III.25}) \\ &= \left\{ X_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right) \right\} \end{aligned}$$

A l'instant initial $t = 0$, la valeur du Call Up and In serait :

$$C_0^{UI} = e^{-rT} S_0 I_1 - e^{-rT} K \widehat{\mathbb{P}}(D) \quad (\text{III.26})$$

En utilisant les Proposition 3.4 et Proposition 3.2, nous obtenons la distribution de probabilité du couple (X_T, M_T) :

$$\mathbb{P}(X_T \geq x, M_T \geq y) = \begin{cases} \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \cdot y\right) N\left(\frac{-y-\lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + N\left(\frac{-y+\lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \cdot y\right) N\left(\frac{x-2y-\lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) & \text{si } x \leq B \\ \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \cdot y\right) N\left(\frac{-y-\lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + N\left(\frac{-y+\lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \cdot y\right) N\left(\frac{-y-\lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) & \text{si } x \geq B \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

En appliquant cette dernière définition (équation III.27), cas où $x \leq B$, à la probabilité $\widehat{\mathbb{P}}(D)$ de l'équation III.26, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbb{P}}(D) &= \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right) N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) - \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
 &\quad - \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right) N\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - 2\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) - \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
 &= \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) - \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{B^2}{S_0 K}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

D'autre part, le premier terme de l'équation III.26 est donné par :

$$I_1 = \widehat{\mathbb{E}}[\exp(X_T)I_D] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\exp(X_T)1_{\left\{X_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right\}}\right] \tag{III.29}$$

Pour que nous puissions poursuivre le calcul, nous avons besoin de définir une mesure de probabilité $\bar{\mathbb{P}}$:

$$\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\hat{\mathbb{P}}} = e^{-rT} e^{X_T} = e^{-rT} \frac{S_T}{S_0} \tag{III.30}$$

tel que $\bar{B}_T = \tilde{B}_T - \sigma T$ est un Mouvement Brownien sous $\bar{\mathbb{P}}$.

En clair, nous avons

$$\hat{\mathbb{P}}\left\{X_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right\} \tag{III.31}$$

Et nous souhaitons obtenir :

$$\bar{\mathbb{P}}\left\{X_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right\} \tag{III.32}$$

Pour cela, il suffit d'appliquer le Théorème 13.2 de Girsanov :

$$\bar{\mathbb{P}}\left\{X_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right\} \times \frac{1}{Z_T} = \hat{\mathbb{P}}\left\{X_T \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), M_T \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right\} \quad \hat{\mathbb{P}} \text{ p.s} \tag{III.33}$$

avec Z_T est la dérivée de Radon-Nikodym donnée par :

$$Z_T = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\tilde{B}_T\right) \tag{III.34}$$

tel que $\bar{B}_T = \tilde{B}_T - \sigma T$ est un Mouvement Brownien sous $\bar{\mathbb{P}}$.

Nous avons :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\exp(X_T)I_D] = \widehat{\mathbb{E}}[\exp(rT)Z_T I_D]$$

Donc,

$$\widehat{\mathbb{E}}[\exp(rT)Z_T I_D] = \exp(rT)\widehat{\mathbb{E}}[Z_T I_D] = \exp(rT)\bar{\mathbb{E}}[I_D]$$

Ce qui ramène à :

$$I_1 = \exp(rT) \cdot \bar{\mathbb{P}} \left\{ X_T \geq \ln \left(\frac{K}{S_0} \right), M_T \geq \ln \left(\frac{B}{S_0} \right) \right\} \quad (\text{III.35})$$

Finalement, le processus X_T sous $\bar{\mathbb{P}}$ devient :

$$X_t = \sigma \bar{B}_t + \acute{\lambda} t \quad \text{pour } t \in [0, T] \quad (\text{III.36})$$

avec

$$\acute{\lambda} = \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad (\text{III.37})$$

Par conséquent,

$$\bar{\mathbb{P}}(D) = \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\acute{\lambda}}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) - \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\acute{\lambda}}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_0 K} \right) + \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \quad (\text{III.38})$$

En remplaçant les expressions de $\bar{\mathbb{P}}(D)$ et $\hat{\mathbb{P}}(D)$ dans l'équation III.26, nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_0^{UI} &= e^{-rT} S_0 e^{rT} \left[\left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\acute{\lambda}}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) - \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\acute{\lambda}}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_0 K} \right) + \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right] \\ &\quad - K e^{-rT} \left[\left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) - \lambda T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \lambda T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_0 K} \right) + \lambda T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \right] \\ &= S_0 \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\acute{\lambda}}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) - \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + S_0 N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &\quad + S_0 \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\acute{\lambda}}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_0 K} \right) + \acute{\lambda} T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &\quad - K e^{-rT} \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) - \lambda T}{\sigma \sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \lambda T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \\ &\quad - K e^{-rT} \left(\frac{B}{S_0} \right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_0 K} \right) + \lambda T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Avec

$$\lambda = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad \text{et} \quad \acute{\lambda} = \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

Dans le cas où $x \geq B$, les probabilités $\hat{\mathbb{P}}(D)$ et $\bar{\mathbb{P}}(D)$ deviennent :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(D) &= \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right) N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) - \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\quad - \exp\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)\right) N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) - \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Et

$$\bar{\mathbb{P}}(D) = N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (\text{III.41})$$

En remplaçant les expressions de $\bar{\mathbb{P}}(D)$ et $\hat{\mathbb{P}}(D)$ dans l'équation III.26, nous obtenons :

$$\begin{aligned} C_0^{UI} &= e^{-rT} S_0 e^{rT} \left(N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right) - K e^{-rT} \left(N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right) \\ &= S_0 N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) + \lambda T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Ainsi, la formule fermée du prix de l'option Call Eurpéen Up and In, à l'instant t , pour une maturité fixée est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} C_t^{UI} &= S_0 \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) - (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + S_0 N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad + S_0 \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{B^2}{S_0 K}\right) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) - (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{B}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad - K e^{-r(T-t)} \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\frac{2(r-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln\left(\frac{B^2}{S_0 K}\right) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Pour $0 \leq t \leq T$ et $0 \leq S_t \leq B$.
Et,

$$C_t^{UI} = S_0 N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \lambda(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - K e^{-r(T-t)} N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \lambda(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) \quad (\text{III.44})$$

Pour $0 \leq t \leq T$ et $S_t \geq B$.

4. Options à barrière à maturité aléatoire

Désormais, nous considérons le temps d'expiration T une variable aléatoire τ (par exemple une loi de poisson de paramètre $(\lambda > 0)$) [26], indépendante du Mouvement Brownien $W = (W_t)_{t \geq 0}$.

Soit la mesure de probabilité risque neutre \mathbb{P}^* . La dérivée de Radon Nikodym est donnée par :

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp(\sigma W_n - \frac{\sigma^2}{2}n), \quad \forall n \geq 1. \quad (\text{III.45})$$

Nous considérons une option Européenne Call à barrière, avec comme barrière donnée *le premier temps T_a de passage d'une certaine barrière $a > 0$* par le processus S avec $S_0 < a$ [27] :

$$T_a = \inf \{t \geq 0; S_t = a\} \quad (\text{III.46})$$

Alors, la relation suivante est ainsi satisfaite :

$$\mathbb{E} \left(e^{(\sigma W_n - \frac{\sigma^2}{2}n)} 1_{\{T_a \geq n\}} \right) = \mathbb{E}^* (1_{\{T_a \geq n\}}) = \mathbb{P}^* (T_a \geq n), \quad \forall n \geq 1. \quad (\text{III.47})$$

Où

$$1_{\{T_a \geq n\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } T_a \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

est une fonction indicatrice et \mathbb{E}^* désigne l'espérance sous la mesure de probabilité risque-neutre \mathbb{P}^* .

Le prix d'une telle option Européenne à barrière à maturité aléatoire suivant la loi de Poisson est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi(r, \sigma, K, a, \tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^* [e^{-rm} (S_m - K)^+ 1_{\{T_a \leq m\}}] \mathbb{P}(\tau = m) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^* [e^{-rm} (S_m - K)^+ 1_{\{T_a \leq m\}}] \frac{\lambda^m}{m!}. \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

Pour calculer ce prix nous devons tout d'abord trouver le prix de l'option Call Up and In à temps discret, défini par :

$$V_m(B) = \mathbb{E}^* [e^{-rT} (S_m - K)^+ 1_{\{\bar{\tau}(B,S) \leq m\}}] \quad (\text{III.50})$$

4.1. Options à barrière à contrôl discret

Nous supposons que le prix de l'actif est contrôlé discrètement seulement aux instants $t_n = n\Delta t$ avec $\Delta t = \frac{T}{m}$ et $1 \leq n \leq m$, où T est la date d'échéance et $m - 1$ est le nombre de points de contrôle ($n = 1, \dots, m - 1$). Sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^* [58, 59], au n^{th} point de contrôle, le prix de l'actif sous-jacent est donné par :

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 \exp \left(\mu n \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n Z_i \right) \\ &= S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{\Delta t} \left(\mu \frac{n}{\sigma} \sqrt{\Delta t} + \sum_{i=1}^n Z_i \right) \right) \\ &= S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n \left(Z_i + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \right) \\ &= S_0 \exp \left(\sigma \sqrt{\Delta t} W_n \right), \quad n = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{III.51}$$

Avec,

► W_n représente le pas aléatoire, donné par :

$$W_n = \sum_{i=1}^n \left(Z_i + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{\Delta t} \right) \tag{III.52}$$

► μ est le drift, donné par :

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} \tag{III.53}$$

► Z_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes.

Par analogie, sous \mathbb{P}^* , le prix d'une option discrète Up and In est :

$$V_m(B) = \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} (S_m - K)^+ 1_{\{\tau(B,S) \leq m\}} \right] \tag{III.54}$$

Pour calculer ce prix, nous avons besoin des propositions suivantes :

Proposition 4.1 (Théorème de Girsanov à temps discret) *Pour toute mesure de probabilité \mathbb{P}^* , soit $\hat{\mathbb{P}}$ définie par :*

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*} = \exp \left(\sum_{i=1}^m a_i Z_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m a_i^2 \right) \tag{III.55}$$

Où $a_{i(i=1, \dots, m)}$ sont des constantes arbitraires et Z_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes sous la mesure de probabilité \mathbb{P} .

Alors sous la mesure de probabilité arbitraire $\hat{\mathbb{P}}$, pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$\hat{Z}_i = Z_i - a_i \tag{III.56}$$

est une variable aléatoire normale standard [27, 58].

Proposition 4.2 *Le prix d'une option barrière discrète dans le cas d'un Call Up and In [58, 60] est donné par :*

$$\begin{aligned} V_m(B) &= S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[S_0 e^{(\mu + \sigma^2)T + \sigma B_T} \geq K, \tau \left(B e^{\beta \sqrt{\frac{T}{m}}}, S \right) \leq T \right] \\ &\quad - K e^{-rT} \mathbb{P}^* \left[S_0 e^{\mu T + \sigma B_T} \geq K, \tau \left(B e^{\beta \sqrt{\frac{T}{m}}}, S \right) \leq T \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \end{aligned} \tag{III.57}$$

Avec $\beta = -\frac{\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}} = 0.5826$ et ζ est la fonction zeta Riemann [61].

Preuve. Notons que :

$$\begin{aligned}
 V_m(B) &= \mathbb{E}^* [e^{-rT} (S_m - K)^+ 1_{\{\tilde{\tau}(B,S) \leq m\}}] \\
 &= \mathbb{E}^* [e^{-rT} (S_m - K) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}}] \\
 &= \mathbb{E}^* [e^{-rT} S_m 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}}] - K e^{-rT} \mathbb{E}^* [1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}}] \\
 &= \mathbb{E}^* [e^{-rT} S_m 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}}] - K e^{-rT} \mathbb{P}^* [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m] \\
 &= I - K e^{-rT} \mathbb{P}^* [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m] \tag{III.58}
 \end{aligned}$$

En utilisant le théorème discret de Girsanov, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}
 I &= \mathbb{E}^* [e^{-rT} S_m 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}}] \\
 &= \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} \left(S_0 \exp \left(\mu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} \left(\exp \left(\mu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E}^* \left[\exp \left(-rT + \mu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E}^* \left[\exp \left(-r(m\Delta t) + \mu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) (m\Delta t) + \mu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \frac{\sigma^2}{2} (m\Delta t) + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^m Z_i \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \frac{\sigma^2}{2} \Delta t + \sum_{i=1}^m Z_i \sigma \sqrt{\Delta t} \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \mathbb{E}^* \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^m \frac{a_i^2}{2} + \sum_{i=1}^m Z_i a_i \right) 1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}} \right] \\
 &= S_0 \hat{\mathbb{E}} [1_{\{S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m\}}] \\
 &= S_0 \hat{\mathbb{P}} [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B,S) \leq m] \tag{III.59}
 \end{aligned}$$

Avec

$$a_i = \sigma \sqrt{\Delta t} \tag{III.60}$$

Sous $\hat{\mathbb{P}}$, la fonction $(\ln S_m)$ a une moyenne $(\mu m \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot m \sigma \sqrt{\Delta t} = (\mu + \sigma^2)T)$ et une variance μT .

Ainsi,

$$\begin{aligned}
V_m(B) &= S_0 \hat{\mathbb{P}} [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B, S) \leq m] - K e^{-rT} \mathbb{P}^* [S_m \geq K, \tilde{\tau}(B, S) \leq m] \\
&= S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right] \\
&\quad - K e^{-rT} \mathbb{P}^* \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right] \\
&= S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \sqrt{m}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right] \\
&\quad - K e^{-rT} \mathbb{P}^* \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \sqrt{m}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right]
\end{aligned} \tag{III.61}$$

Avec,

$$a = \ln\left(\frac{B}{S_0}\right) \tag{III.62}$$

Où sous $\hat{\mathbb{P}}$,

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left(\hat{Z}_i + \left(\frac{\mu + \sigma^2}{\sigma} \right) \left(\frac{\sqrt{T}}{m} \right) \right) \tag{III.63}$$

tel que \hat{Z}_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes.
et sous \mathbb{P}^* ,

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left(Z_i + \left(\frac{\mu}{\sigma} \right) \left(\frac{\sqrt{T}}{m} \right) \right) \tag{III.64}$$

tel que Z_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes.

Maintenant, nous aurons besoin du Corollaire et Proposition suivants :

Corollaire 4.1 *Pour toute constante $b \geq y$ et $b > 0$ quand $m \rightarrow \infty$ (Voir [58])*

$$\mathbb{P}(U_m > y\sqrt{m}, \tilde{\tau}(b, U) \leq m) = \mathbb{P}(U(1) \geq y; \tau(b + \beta/\sqrt{m}, U) \leq 1) + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{III.65}$$

Ainsi, avec $y = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$ et $b = \frac{a}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\frac{B}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \geq y$ ($m \rightarrow \infty$).

Le prix ($V_m(B)$) devient :

$$\begin{aligned}
 V_m(B) &= S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_{\frac{(\mu+\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}}(1) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}, \tau\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}, W_{\frac{(\mu+\sigma^2)\sqrt{T}}{\sigma}}\right) \leq 1 \right] \quad (\text{III.66}) \\
 &\quad - K e^{-\tau T} \mathbb{P}^* \left[W_{\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}}(1) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}, \tau\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}, W_{\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}}\right) \leq 1 \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)
 \end{aligned}$$

Où $W_c(t)$ désigne un Mouvement Brownien avec drift c et une variance 1.

Proposition 4.3 (Propriété Rescaling) *Par la proposition suivante, pour le Mouvement Brownien avec drift (au) et variance 1, nous avons :*

$$\mathbb{P}(W_{au}(1) \geq x, \tau(c, W_{au}) \leq 1) = \mathbb{P}(W_u(a^2) \geq xa, \tau(ac, W_u) \leq a^2) \quad (\text{III.67})$$

En utilisant la [Proposition 4.3](#) et les notations suivantes $a = \sqrt{T}$, $u = \frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}/\frac{\mu}{\sigma}$, $x = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$ et $c = \frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}$, notre prix s'écrit :

$$\begin{aligned}
 V_m(B) &= S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau\left(\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}\right)\sqrt{T}, W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}\right) \leq T \right] \\
 &\quad - K e^{-\tau T} \mathbb{P}^* \left[W_{\frac{\mu}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau\left(\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\beta}{\sqrt{m}}\right)\sqrt{T}, W_{\frac{\mu}{\sigma}}\right) \leq T \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \\
 &= S_0 \hat{\mathbb{P}} \left[W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau\left(\frac{a}{\sigma} + \beta\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{m}}, W_{\frac{(\mu+\sigma^2)}{\sigma}}\right) \leq T \right] \\
 &\quad - K e^{-\tau T} \mathbb{P}^* \left[W_{\frac{\mu}{\sigma}}(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma}, \tau\left(\frac{a}{\sigma} + \beta\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{m}}, W_{\frac{\mu}{\sigma}}\right) \leq T \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \quad (\text{III.68})
 \end{aligned}$$

Puis, nous avons :

$$\tau\left(\frac{a}{\sigma} + \beta\sqrt{\frac{T}{m}}, W\right) \leq T \iff W \geq \frac{a}{\sigma} + \beta\sqrt{\frac{T}{m}} \quad (\text{III.69})$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 W &\geq \frac{\ln\left(\frac{B}{S_0}\right)}{\sigma} + \beta\sqrt{\frac{T}{m}} \Rightarrow \sigma W \geq \ln\left(\frac{B}{S_0}\right) + \sigma\beta\sqrt{\frac{T}{m}} \\
 &\Rightarrow \exp(\sigma W) \geq \frac{B}{S_0} \exp\left(\sigma\beta\sqrt{\frac{T}{m}}\right) \\
 &\Rightarrow S_0 \exp(\sigma W) \geq B \exp\left(\sigma\beta\sqrt{\frac{T}{m}}\right) \\
 &\Rightarrow S \geq B \exp\left(\sigma\beta\sqrt{\frac{T}{m}}\right)
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\tau\left(B \exp\left(\sigma\beta\sqrt{\frac{T}{m}}\right), S\right) \leq T$$

Aussi,

$$W(T) \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma W(T) \geq \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) \Leftrightarrow \exp(\sigma W(T)) \geq \frac{K}{S_0} \Leftrightarrow S_0 \exp(\sigma W(T)) \geq K \quad (\text{III.70})$$

Nous aurons au final,

$$\begin{aligned}
 V_m(B) &= S_0 \hat{\mathbb{P}}\left[S_0 e^{(\mu+\sigma^2)T+\sigma B T} \geq K, \tau\left(B e^{\beta\sqrt{\frac{T}{m}}}, S\right) \leq T\right] \\
 &\quad - K e^{-rT} \mathbb{P}^*\left[S_0 e^{\mu T+\sigma B T} \geq K, \tau\left(B e^{\beta\sqrt{\frac{T}{m}}}, S\right) \leq T\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)
 \end{aligned}$$

■

4.2. Le prix d'une option Call à barrière à maturité aléatoire suivant la distribution de Poisson

Maintenant, nous calculons le prix d'une option Call Up and In, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \pi(r, \sigma, K, a, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}^* \left[e^{-rm} (S_m - K)^+ 1_{\{\tilde{\tau}(B,S) \leq t\}} \right] \mathbb{P}(t = m) \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \left[S_0 \hat{\mathbb{P}}\left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m\right) \right. \\
 &\quad \left. - K e^{-rT} \mathbb{P}^*\left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m\right) \right] \frac{\lambda^m}{m!} \quad (\text{III.71})
 \end{aligned}$$

Avec, sous $\hat{\mathbb{P}}$,

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left(\hat{Z}_i + \left(\frac{\mu + \sigma^2}{\sigma} \right) \left(\frac{\sqrt{T}}{m} \right) \right) \quad (\text{III.72})$$

Sous \mathbb{P}^* ,

$$W_m = \sum_{i=1}^m \left(Z_i + \left(\frac{\mu}{\sigma} \right) \left(\frac{\sqrt{T}}{m} \right) \right) \quad (\text{III.73})$$

tel que Z_i et \hat{Z}_i sont des variables aléatoires normales standards indépendantes sous \mathbb{P}^* et $\hat{\mathbb{P}}$.

Nous avons besoin de calculer les probabilités suivantes :

Si $x \leq B$, en d'autre terme si $m \leq m_0$, nos probabilités de l'équation III.71 seront égales aux :

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbb{P}} \left[W_m \geq \frac{\ln \left(\frac{K}{S_0} \right)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau} \left(\frac{a}{\sigma \sqrt{T}}, W \right) \leq m \right] \\ &= \exp \left(\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \right) \ln \left(\frac{B}{S_0} \right) \right) N \left(\frac{-\ln \left(\frac{B}{S_0} \right) - \lambda m \Delta t}{\sigma \sqrt{m \Delta t}} \right) \\ &+ N \left(\frac{-\ln \left(\frac{B}{S_0} \right) + \lambda m \Delta t}{\sigma \sqrt{m \Delta t}} \right) \\ &- \exp \left(\frac{2\lambda}{\sigma^2} \ln \left(\frac{B}{S_0} \right) \right) N \left(\frac{\ln \left(\frac{K}{S_0} \right) - 2 \ln \left(\frac{B}{S_0} \right) - \lambda m \Delta t}{\sigma \sqrt{m \Delta t}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^* \left[W_m \geq \frac{\ln \left(\frac{K}{S_0} \right)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau} \left(\frac{a}{\sigma \sqrt{T}}, W \right) \leq m \right] &= \exp \left(\left(\frac{2\lambda'}{\sigma^2} \right) \ln \left(\frac{B}{S_0} \right) \right) N \left(\frac{-\ln \left(\frac{B}{S_0} \right) - \lambda' m \Delta t}{\sigma \sqrt{m \Delta t}} \right) \\ &+ N \left(\frac{-\ln \left(\frac{B}{S_0} \right) + \lambda' m \Delta t}{\sigma \sqrt{m \Delta t}} \right) \\ &- \exp \left(\frac{2\lambda'}{\sigma^2} \ln \left(\frac{B}{S_0} \right) \right) N \left(\frac{\ln \left(\frac{K}{S_0} \right) - 2 \ln \left(\frac{B}{S_0} \right) - \lambda' m \Delta t}{\sigma \sqrt{m \Delta t}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

Et si $m > m_0$ nos probabilités de l'équation III.71 seront égales aux :

$$\hat{\mathbb{P}} \left[W_m \geq \frac{\ln \left(\frac{K}{S_0} \right)}{\sigma \sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau} \left(\frac{a}{\sigma \sqrt{T}}, W \right) \leq m \right] = N \left(\frac{-\ln \left(\frac{B}{S_0} \right) + \lambda m \Delta t}{\sigma \sqrt{m \Delta t}} \right) \quad (\text{III.76})$$

et

$$\mathbb{P}^* \left[W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right] = N\left(\frac{-\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) + \lambda m \Delta t}{\sigma\sqrt{m\Delta t}}\right) \quad (\text{III.77})$$

Donc, notre prix de l'option Call Up and In en temps discret devient :

$$\begin{aligned} \pi(r, \sigma, K, a, t) &= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \left[S_0 \hat{\mathbb{P}} \left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right) \right. \\ &\quad \left. - K e^{-rT} \mathbb{P}^* \left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right) \right] \frac{\lambda^m}{m!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{m_0} \left[S_0 \hat{\mathbb{P}} \left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right) \right. \\ &\quad \left. - K e^{-rT} \mathbb{P}^* \left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right) \right] \frac{\lambda^m}{m!} \\ &\quad + e^{-\lambda} \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \left[S_0 \hat{\mathbb{P}} \left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right) \right. \\ &\quad \left. - K e^{-rT} \mathbb{P}^* \left(W_m \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tilde{\tau}\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{T}}, W\right) \leq m \right) \right] \frac{\lambda^m}{m!} \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

Avec $K > S_0$, $m_0 \doteq \mathbb{E}\left[\left(\frac{a}{\ln(K/S_0)}\right)^2\right]$, où $\mathbb{E}[x]$ désigne l'intégrale par partie de x .

5. Conclusion

Suite au prise de conscience du choix sans limite des options en matière de gestion de risque et de la rentabilité espérée par les investisseurs, d'autres types d'options sont apparus susceptibles de mieux répondre aux besoins de leurs clients nomées options de seconde génération ou bien exotiques. De ce fait, nous choisissons d'étudier le modèle des options à barrière dont l'avantage de ce dernier est d'être moins chères que les options standards avec les mêmes conditions. En se basant sur les fondements du calcul stochastique et les résultats de Merton (1973) et Reiner (1991), nous avons établi la formule explicite d'évaluation des options Call à barrière du type Up and In. L'évaluation de ces dernières est approchée par la méthode probabiliste utilisant la loi jointe du couple mouvement brownien et son maximum. Les résultats obtenus développés sous la contrainte que la maturité est constante ainsi qu'aléatoire qui suit la distribution de poisson.

1. Introduction

Depuis l'apparition du modèle de Fischer Black et Myron Scholes en 1973, la volatilité des marchés financiers est devenue une norme. Elle est l'élément le plus important qui est estimée par la volatilité implicite. Le prix d'une option Européenne obtenue par le modèle de Black-Scholes dépend de la volatilité du sous-jacent, supposée constante et qui est en plus, l'unique paramètre inobservable directement sur les marchés financiers [62, 63]. Néanmoins dans la pratique, ceci n'est le cas, à chaque prix d'exercice correspond une valeur de la volatilité, et l'observation des prix sur les marchés financiers montre que la volatilité dépend de la maturité considérée et du strike [64, 65]. La courbe représentant la volatilité implicite en fonction de la volatilité et prix d'exercice a une allure de smile. Ne pouvant pas expliquer ce phénomène de smile, les limites de la théorie d'évaluation dans le cadre du modèle de Black-Scholes apparurent très vite [12]. Etant donné que la valeur de l'option étant très sensible aux variations de la volatilité, ceci conduit à considérer la volatilité comme une variable stochastique [16, 66, 67]. Par la suite, les chercheurs Merton [4], Hull et White [18], Stein et Stein [15], Wiggins [20] et enfin Heston [14], ont donc développé d'autres modèles portant le nom de modèle à volatilité stochastique. Le modèle d'Heston est l'un le plus populaire de ces modèles. Il a comme avantage de résoudre le problème du modèle de Black-Scholes ainsi que d'expliquer le phénomène de smile. Ainsi, il donne en général des meilleurs prix pour les options exotiques dépendant fortement de la trajectoire du sous-jacent.

Après avoir explicité le modèle d'Heston en rappelant ces avantages et inconvénients, nous montrons comment établir l'équation aux dérivées partielles d'Heston pour évaluer n'importe quelle option. Puis, nous démontrons la méthode d'évaluation des options Européennes et ceci en fournissant des formules fermées, lorsqu'il y a une corrélation entre le prix du sous-jacent et sa volatilité. Et pour terminer, nous adapterons le modèle d'Heston aux options à barrière afin de fournir une formule fermée du prix de ces options.

2. Modèle d'Heston

Le modèle d'Heston est un type de modèle à volatilité stochastique et l'un des plus utilisés par les professionnels de la finance pour évaluer les options ainsi que pour es-

timer et prévoir les comportements de la volatilité [6]. Ce modèle a été introduit par Steven L. Heston en 1993 [14] afin de résoudre le problème du modèle Black-Scholes, qui maintient la volatilité constante. Le modèle d'Heston fut inspiré par les travaux par John C. Hull et Alan White en 1987 [18], qui utilisaient la volatilité stochastique comme second facteur de risque afin de couvrir l'échec du modèle de Black-Scholes à reproduire l'ensemble des prix des options sur un même sous-jacent. Le modèle d'Heston représente une généralisation du modèle Black-Scholes du fait qu'il suppose que la volatilité est une variable qui dépend du prix d'exercice d'une option et de la maturité de cette option. Ayant comme avantages de prendre en compte l'effet de levier et les clusters de volatilité, de fournir une solution analytique [68, 69] "closed-form solution" pour calculer le prix d'une option d'achat, Call, lorsqu'il y a une corrélation entre le prix du sous-jacent et sa volatilité, ainsi que, la correspondance entre la forme de la volatilité implicite et celui du marché.

Le modèle d'Heston est caractérisé par :

- ✓ Il est basé sur le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) [70] pour expliquer la dynamique de la volatilité et sur le modèle de Black-Scholes pour décrire le prix de l'action.
- ✓ Il possède un paramètre retour à la moyenne et une variance long-terme qui permettent de prendre en compte la tendance de la volatilité à retourner vers sa moyenne après de brutale hausse.
- ✓ La volatilité est toujours positive et mean-reverting, ce qui correspond à ce que l'on peut observer sur le marché.
- ✓ Il est particulièrement adapté pour évaluer les options à barrière.
- ✓ Il s'agit d'un des premiers modèles capables d'expliquer le phénomène de smile.
- ✓ Il permet de prendre en compte l'effet de levier et les clusters de volatilité.

Dans le modèle d'Heston (1993) [14], l'équation différentielle stochastique modélisant le sous-jacent est donnée par :

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \quad (\text{IV.1})$$

où W_t^1 est un Mouvement Brownien, μ_t est la dérive stationnaire du sous-jacent S_t et $\sqrt{v_t}$ désigne la volatilité stochastique.

De plus, si la volatilité suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, nous avons :

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_t^2 \quad (\text{IV.2})$$

où W_t^1 et W_t^2 sont mutuellement corrélés de sorte que :

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \quad (\text{IV.3})$$

Afin de définir le processus stochastique de la variance $\sqrt{v_t}$, nous allons effectuer le changement suivant. Soit :

$$Y(t, \sqrt{v_t}) = (\sqrt{v_t})^2 = v_t \quad (\text{IV.4})$$

Puis, en appliquant le lemme d'Itô, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 dY(t, \sqrt{v_t}) &= \frac{\partial Y}{\partial t}(t, \sqrt{v_t}) dt + \frac{\partial Y}{\partial \sqrt{v_t}}(t, \sqrt{v_t}) d\sqrt{v_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \sqrt{v_t}^2}(t, \sqrt{v_t}) d\langle \sqrt{v_t}, \sqrt{v_t} \rangle_t \\
 &= 0dt + 2\sqrt{v_t}d\sqrt{v_t} + \frac{1}{2}2d\langle \sqrt{v_t}, \sqrt{v_t} \rangle_t \\
 &= 2\sqrt{v_t}(-\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_t^2) + \frac{1}{2}2(\delta^2 dt) \\
 &= (\delta^2 - 2v_t\beta) dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_t^2
 \end{aligned} \tag{IV.5}$$

Ainsi, nous aurons l'expression du processus stochastique de la variance v_t :

$$dv_t = (\delta^2 - 2\beta v_t) dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_t^2 \tag{IV.6}$$

En faisant le changement de variable suivant : $k = 2\beta$, $\theta = \frac{\delta^2}{2\beta}$ et $\sigma = 2\delta$.

L'équation IV.6 peut être écrite sous la forme similaire du modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) :

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^2 \tag{IV.7}$$

où :

- θ : la moyenne à long terme du processus de variance, lorsque t tend vers $+\infty$, v_t tend vers θ ,
- k : la vitesse de retour à la moyenne θ du processus de variance,
- σ : la volatilité du processus de variance v_t , appelée volatilité de la volatilité.

Sachant que le modèle d'Heston est incomplet, de ce fait, nous pouvons pas suivre le raisonnement risque-neutre. Par la suite, pour obtenir l'équation aux dérivées partielles du modèle d'Heston pour l'évaluation d'option, nous ne devons suivre le raisonnement suivant :

Le modèle d'Heston suppose que le prix du sous-jacent S_t et sa variance v_t vérifient le système d'EDS suivant :

$$\begin{cases} dS_t = \mu_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 \end{cases} \tag{IV.8}$$

où μ_t est la tendance instantanée (déterministe) du sous-jacent. Avec le respect de condition de Feller [71] pour que le processus de CIR sera strictement positif et qui évite que le processus de variance de s'affaisser à 0.

$$2k\theta > \sigma^2 \tag{IV.9}$$

3. EDP d'évaluation d'Heston

Dans le cas Black-Scholes, la seule source d'incertitude vient du prix du sous-jacent, qui peut se couvrir avec le sous-jacent. Tandis que dans le cas d'Heston, il faut aussi couvrir l'incertitude venant du caractère stochastique de la volatilité pour créer un portefeuille sans risque.

Soit un portefeuille Π contenant l'option dont nous cherchons à déterminer le prix noté

$u(S, v, t)$, la quantité $-\Delta$ de sous-jacent et la quantité $-\Delta_1$ d'un autre actif, de valeur u_1 dépendant de la volatilité [66, 35]. Nous avons ainsi :

$$\Pi = u - \Delta S - \Delta_1 u_1 \quad (\text{IV.10})$$

En appliquant le lemme d'Itô aux options u et u_1 , nous obtenons :

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial S} dS + \frac{\partial u}{\partial v} dv + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} dt + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} dt + \rho \sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} dt \quad (\text{IV.11})$$

et

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} dt + \frac{\partial u_1}{\partial S} dS + \frac{\partial u_1}{\partial v} dv + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} dt + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} dt + \rho \sigma v S_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial v \partial S} dt \quad (\text{IV.12})$$

Nous aurons donc,

$$\begin{aligned} d\Pi &= du - \Delta dS - \Delta_1 du_1 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial S} dS + \frac{\partial u}{\partial v} dv + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} dt + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} dt + \rho \sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} dt \right) \\ &\quad - \Delta dS \\ &\quad - \Delta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} dt + \frac{\partial u_1}{\partial S} dS + \frac{\partial u_1}{\partial v} dv + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} dt + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} dt + \rho \sigma v S_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial v \partial S} dt \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho \sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} \right) dt \\ &\quad - \Delta_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2} v \sigma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} + \rho \sigma v S_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial v \partial S} \right) dt \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial S} - \Delta - \Delta_1 \frac{\partial u_1}{\partial S} \right) dS + \left(\frac{\partial u}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial u_1}{\partial v} \right) dv \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Pour que le portefeuille soit sans risque, il est nécessaire d'éliminer les termes en dS et dv , d'où nous tirons les quantités :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial S} - \Delta - \Delta_1 \frac{\partial u_1}{\partial S} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial v} - \Delta_1 \frac{\partial u_1}{\partial v} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \frac{\partial u}{\partial S} - \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \frac{\partial u_1}{\partial S} \\ \Delta_1 = \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

D'autre part, un portefeuille sans risque procure un rendement égale au taux sans risque r (supposé constant), sans qu'il y aurait une opportunité d'arbitrage. Sur une période de dt , la valeur de notre portefeuille est donnée par :

$$\begin{aligned} d\Pi &= r\Pi dt \\ &= r(u - \Delta S - \Delta_1 u_1) dt \\ &= r \left(u - \left(\frac{\partial u}{\partial S} - \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \frac{\partial u_1}{\partial S} \right) S - \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \right) u_1 \right) dt \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

En remplaçant Δ_1 par sa valeur dans l'équation IV.13 :

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} \right) dt \\ & - \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial v \partial S} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Ainsi, de l'équation IV.15 et l'équation IV.16 nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho\sigma v S \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} \right) dt - \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} + \rho\sigma v S \frac{\partial^2 u_1}{\partial v \partial S} \right) dt = \left(ru - r \left(\frac{\partial u}{\partial S} - \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \frac{\partial u_1}{\partial S} \right) S - r \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \right) u_1 \right) dt \end{aligned}$$

En simplifiant :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} - ru + rS \frac{\partial u}{\partial S} \\ = & \frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial v \partial S} + rS \frac{\partial u_1}{\partial S} - ru_1 \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial v}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} - ru + rS \frac{\partial u}{\partial S} \right) \\ = & \frac{1}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial v \partial S} + rS \frac{\partial u_1}{\partial S} - ru_1 \right) \end{aligned}$$

Nous observons que le membre de gauche est une fonction uniquement de u tandis que le membre de droite est une fonction de u_1 seulement. Cela force chacun des deux membres à être égaux à une fonction f des variables indépendantes S, v et t . Nous pouvons ainsi écrire que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} - ru + rS \frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial v} f \quad (\text{IV.17})$$

On en déduit l'équation aux dérivées partielles du modèle d'Heston pour l'évaluation des options,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho\sigma v S_t \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = \frac{\partial u}{\partial v} (\Lambda(S, v, t) \sigma \sqrt{v} - k(\theta - v)) \quad (\text{IV.18})$$

où $\Lambda(S, v, t)$ est le prix de marché de la volatilité [72].

Selon [73], Heston choisit $\Lambda(S, v, t) = \frac{\lambda\sqrt{v}}{\sigma}$, de sorte que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2}v\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \rho\sigma v S \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial S} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru + \frac{\partial u}{\partial v} (k(\theta - v) - v\lambda) = 0 \quad (\text{IV.19})$$

4. Formule fermée pour un Call Européen

Soit un Call Européen $C(S_t, v_t, t)$ de strike K et de maturité T satisfait l'équation aux dérivées partielles (équation IV.19) avec les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(0, v_t, t) = 0 \\ C(S, v_t, T) = \max(0, S - K) \\ C(S, 0, t) = \max(0, S - Ke^{-r(T-t)}) \\ C(S, +\infty, t) = S \\ \frac{\partial C}{\partial S}(S = -\infty, v_t, t) = 1 \\ \frac{\partial C}{\partial S}(S, v_t = 0, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.20})$$

En faisant l'analogie avec la formule du Call Européen obtenu pour le modèle de Black-Scholes, nous avons le résultat suivant avec le modèle d'Heston :

$$C(S_t, v_t, T) = S_t \mathbb{P}_1 - Ke^{-r(T-t)} \mathbb{P}_2 \quad (\text{IV.21})$$

où \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 représentent les probabilités risque-neutres que le Call se termine dans la monnaie. Par la suite, il est préférable de connaître le logarithme népérien [74] du sous-jacent.

Ainsi, nous effectuons le changement de variable suivant :

$$x = \ln(S_t) \Leftrightarrow S_t = e^x \quad (\text{IV.22})$$

Par souci de distinction, nous notons \tilde{C} le Call exprimé en fonction de x, v_t et t . Nous avons les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} \\ \frac{\partial C}{\partial v_t} &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial v_t} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial v_t^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial v_t^2} \\ \frac{\partial C}{\partial S_t} &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t} \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{1}{S_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial S_t} \right) = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{1}{S_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S_t} \right) \\ &= -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{1}{S_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) = -\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{1}{S_t^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S_t \partial v_t} &= \frac{\partial}{\partial v_t} \left(\frac{\partial C}{\partial S_t} \right) = \frac{\partial}{\partial v_t} \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) = \frac{1}{S_t} \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial v_t} \right) \end{aligned}$$

Remplaçant ces dernières dans l'EDP (équation IV.19), nous aurons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} + \frac{1}{2} v_t S^2 \left(-\frac{1}{S_t^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{1}{S_t^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial v_t^2} + \rho \sigma v_t S_t \left(\frac{1}{S_t} \left(\frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial v_t} \right) \right) \\ + r S \left(\frac{1}{S_t} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} \right) - r \tilde{C} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial v_t} (k(\theta - v_t) - v_t \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \rho\sigma v_t \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x \partial v_t} + \frac{1}{2}v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial v_t^2} + \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} - r\tilde{C} \\ + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial v_t} (k(\theta - v_t) - v_t\lambda) + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

Par ailleurs, étant donné que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle vérifiée par \tilde{C} est un espace vectoriel, nous pouvons considérer que $S_t\mathbb{P}_1$ et $-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2$ sont solutions de l'équation précédente (équation IV.23).

Pour $S_t\mathbb{P}_1$, avec $S_t = e^x$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial t} &= 0 + S_t \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial t} = e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial t} \\ \frac{\partial (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial v_t} &= 0 + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial v_t} \\ \frac{\partial^2 (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial v_t^2} &= \frac{\partial}{\partial v_t} \left(\frac{\partial (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial v_t} \right) = \frac{\partial}{\partial v_t} \left(e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial v_t} \right) = e^x \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial v_t^2} \\ \frac{\partial (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial x} &= e^x \mathbb{P}_1 + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^x \mathbb{P}_1 + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial x} \right) = e^x \mathbb{P}_1 + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial x} + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial x} + e^x \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial x \partial v_t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (S_t\mathbb{P}_1)}{\partial v_t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial v_t} \right) = e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial v_t} + e^x \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial x \partial v_t} \end{aligned}$$

En remplaçant ces dernières dans l'équation IV.23, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_t \left(e^x \mathbb{P}_1 + 2e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial x} + e^x \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial x^2} \right) + \rho\sigma v_t \left(e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial v_t} + e^x \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial x \partial v_t} \right) + \frac{1}{2}v_t \sigma^2 \left(e^x \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial v_t^2} \right) \\ + \left(r - \frac{1}{2}v_t \right) \left(e^x \mathbb{P}_1 + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial x} \right) - r e^x \mathbb{P}_1 + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial v_t} (k(\theta - v_t) - v_t\lambda) + e^x \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

Soit après simplification par e^x (non nul) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial x^2} + \rho\sigma v_t \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial x \partial v_t} + \frac{1}{2}v_t \sigma^2 \frac{\partial^2 \mathbb{P}_1}{\partial v_t^2} + \left(r + \frac{1}{2}v_t \right) \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial x} \\ + \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial v_t} (k(\theta - v_t) - v_t\lambda + \rho\sigma v_t) + \frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

D'autre part, pour $-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial t} &= -rKe^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2 - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial t} \\
 \frac{\partial (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial v_t} &= 0 - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial v_t} \\
 \frac{\partial^2 (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial v_t^2} &= \frac{\partial}{\partial v_t} \left(\frac{\partial (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial v_t} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial v_t} \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial v_t} \right) = -Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial v_t^2} \\
 \frac{\partial (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial x} &= -Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial x} \\
 \frac{\partial^2 (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial x} \right) = -Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial x\partial v_t} &= \frac{\partial}{\partial v_t} \left(\frac{\partial (-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2)}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial v_t} \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial x} \right) = -Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x\partial v_t}
 \end{aligned}$$

Donc nous obtenons, après insertion dans l'équation IV.23 :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2}v_t \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x^2} \right) + \rho\sigma v_t \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x\partial v_t} \right) + \frac{1}{2}v_t\sigma^2 \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial v_t^2} \right) \\
 &+ \left(r - \frac{1}{2}v_t \right) \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial x} \right) - r \left(-Ke^{-r(T-t)} \right) \mathbb{P}_2 \\
 &+ (k(\theta - v_t) - v_t\lambda) \left(-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial v_t} \right) + \left(-rKe^{-r(T-t)}\mathbb{P}_2 - Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Après simplification par $-Ke^{-r(T-t)}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2}v_t\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x^2} + \rho\sigma v_t\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x\partial v_t} + \frac{1}{2}v_t\sigma^2\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial v_t^2} + \left(r - \frac{1}{2}v_t \right) \frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial x} \\
 &- r\mathbb{P}_2 + (k(\theta - v_t) - v_t\lambda) \frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial v_t} + \left(r\mathbb{P}_2 + \frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial t} \right) = 0
 \end{aligned}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2}v_t\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x^2} + \rho\sigma v_t\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial x\partial v_t} + \frac{1}{2}v_t\sigma^2\frac{\partial^2\mathbb{P}_2}{\partial v_t^2} + \left(r - \frac{1}{2}v_t \right) \frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial x} \\
 &+ (k(\theta - v_t) - v_t\lambda) \frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial v_t} + \frac{\partial\mathbb{P}_2}{\partial t} = 0
 \end{aligned} \tag{IV.25}$$

Par conséquent, nous venons de démontrer que les probabilités risque-neutres \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 doivent satisfaire l'équation différentielle suivante :

Pour $j = 1, 2$

$$\frac{1}{2}v_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \rho\sigma v_t \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial v_t} + \frac{1}{2}v_t\sigma^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial v_t^2} + (r + u_j v_t) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - b_j v_t) \frac{\partial P_j}{\partial v_t} + \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV.26})$$

avec $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = k\theta$, $b_1 = k + \lambda - \rho\sigma$ et $b_2 = k + \lambda$.

De plus, afin que la première condition du système (équation IV.20) soit satisfaite, nous devons avoir la condition finale suivante [75] :

$$P_j(x, v_t, T; \ln(K)) = 1_{\{x \geq \ln(K)\}} \quad (\text{IV.27})$$

Par ailleurs, en partant de l'équation IV.1 et en utilisant le lemme d'Itô avec la transformation $x_t = \ln(S_t)$, l'équation différentielle stochastique de x_t s'écrit :

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{\partial x_t}{\partial t} dt + \frac{\partial x_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x_t}{\partial S_t^2} d\langle S_t, S_t \rangle_t \\ &= 0dt + \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{S_t^2} \right) S_t^2 v_t dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1 \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Donc les équations stochastiques risque-neutres de diffusion pour x_t et v_t sont d'après l'équation IV.8 :

$$\begin{cases} dx = \left(\mu - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1 \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

Ainsi, les probabilités risque-neutres \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 sont les probabilités conditionnelles que le Call termine dans la monnaie, c'est à dire :

$$P_j(x_t, v_t, T; \ln(K)) = \text{Probabilité}(x_T \geq \ln(K) | x_t = x, v_t = v) \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad (\text{IV.30})$$

Les probabilités ne sont pas calculables immédiatement, il faut donc dériver les fonctions caractéristiques. Pour cet effet, considérons deux fonctions deux fois différentiables $f_j(x_t, v_t, t)$ qui soit l'espérance conditionnelle d'une fonction g de x_t et v_t à la date T :

$$f_j(x_t, v_t, t) = \mathbb{E}[g(x_T, v_T) | x_t = x, v_t = v] \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad (\text{IV.31})$$

En utilisant le lemme d'Itô, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 df_j(x_t, v_t, t) &= \frac{\partial f_j}{\partial t} dt + \frac{\partial f_j}{\partial x_t} dx_t + \frac{\partial f_j}{\partial v_t} dv_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} d\langle x_t, x_t \rangle_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t^2} d\langle v_t, v_t \rangle_t \\
 &\quad + 2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t \partial x_t} d\langle v_t, x_t \rangle_t \\
 &= \frac{\partial f_j}{\partial t} dt + \frac{\partial f_j}{\partial x_t} ((r + u_j v_t) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1) + \frac{\partial f_j}{\partial v_t} ((a - b_j v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} (v_t dt) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t^2} (\sigma^2 v_t dt) + \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t \partial x_t} (\rho \sigma v_t dt) \\
 &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} + \rho \sigma v_t \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t \partial x_t} + (a - b_j v_t) \frac{\partial f_j}{\partial v_t} + (r + u_j v_t) \frac{\partial f_j}{\partial x_t} + \frac{1}{2} v_t \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2 v_t \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t^2} \right) dt \\
 &\quad + \sqrt{v_t} \frac{\partial f_j}{\partial x_t} dW_t^1 + \sigma \sqrt{v_t} \frac{\partial f_j}{\partial v_t} dW_t^2
 \end{aligned} \tag{IV.32}$$

Le théorème de l'espérance totale permet d'écrire que pour tout $t \geq u$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[g(x_T, v_T) | x_t = x, v_t = v] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(x_T, v_T) | x_t = x, v_t = v] | x_u = x, v_u = v] \\
 &= \mathbb{E}[g(x_T, v_T) | x_u = x, v_u = v]
 \end{aligned} \tag{IV.33}$$

Donc $f_j(x_t, v_t, t)$ est une martingale. Par conséquent, nous avons

$$\mathbb{E}[df_j(x_t, v_t, t)] = 0 \tag{IV.34}$$

Ainsi, le terme en dt dans l'équation IV.32 doit être nul, ce qui revient à dire que $f_j(x_t, v_t, t)$ satisfait à l'équation différentielle (équation IV.26) avec la condition finale suivante :

$$f_j(x_T, v_T, T) = g(x_T, v_T) \tag{IV.35}$$

Si $g(x_T, v_T) = 1_{\{x_T \geq \ln(K)\}}$ alors la solution de l'équation différentielle (équation IV.26) est la probabilité conditionnelle à l'instant t que $x_T \geq \ln(K)$. D'autre part, si $g(x_T, v_T) = \exp(i\phi x_T)$ alors la solution de l'équation IV.26 devient la fonction caractéristique f_j définie par :

$$f_j(x_t, v_t, t) = \exp[C_j(T-t) + D_j(T-t)v_t + i\phi x_t] \tag{IV.36}$$

avec $C_j(T-t)$ et $D_j(T-t)$ des fonctions inconnues [76].

Le calcul des dérivées partielles donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_j}{\partial t} &= \left(\frac{\partial C_j}{\partial t} + \frac{\partial D_j}{\partial t} v_t \right) f_j \\
 \frac{\partial f_j}{\partial v_t} &= D_j f_j \\
 \frac{\partial^2 f_j}{\partial v_t^2} &= D_j (D_j f_j) = D_j^2 f_j \\
 \frac{\partial f_j}{\partial x_t} &= i\phi f_j \\
 \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t^2} &= i\phi (i\phi f_j) = -\phi^2 f_j \quad \text{car } i^2 = -1 \\
 \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_t \partial v_t} &= \frac{\partial}{\partial x_t} \left(\frac{\partial f_j}{\partial v_t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_t} (D_j f_j) = i\phi D_j f_j
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'insertion dans l'équation différentielle (équation IV.26) donne :

$$-\frac{1}{2}v_t\phi^2 f_j + i\rho\sigma v_t\phi D_j f_j + \frac{1}{2}v_t\sigma^2 D_j^2 f_j + (r + u_j v_t) i\phi f_j + (a - b_j v_t) D_j f_j + \left(\frac{\partial C_j}{\partial t} + \frac{\partial D_j}{\partial t} v_t \right) f_j = 0 \quad (\text{IV.37})$$

Après simplification par f_j , nous obtenons :

$$v_t \left(-\frac{1}{2}\phi^2 + i\rho\sigma\phi D_j + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + i\phi u_j - b_j D_j + \frac{\partial D_j}{\partial t} \right) + \left(r i\phi + a D_j + \frac{\partial C_j}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{IV.38})$$

En tenant compte de la conditions finale pour f_j , nous arrivons au système suivant :

$$\begin{cases}
 -\frac{1}{2}\phi^2 + i\rho\sigma\phi D_j + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + i\phi u_j - b_j D_j + \frac{\partial D_j}{\partial t} = 0 \\
 r i\phi + a D_j + \frac{\partial C_j}{\partial t} = 0 \\
 C_j = 0 \\
 D_j = 0
 \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

La résolution du système précédent fournit les résultats suivants :

$$\begin{cases}
 C_j(\tau = T - t, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2\ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right] \\
 D_j(\tau = T - t, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right) \\
 g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d_j}{b_j - \rho\sigma\phi i - d_j} \\
 d_j = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j\phi i - \phi^2)}
 \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

Connaissant les fonctions caractéristiques f_j , il faut les inverser pour déterminer les probabilités P_j cherchées :

$$P_j(x_t, v_t, T; \ln(K)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x_t, v_t, T)}{i\phi} \right] d\phi \quad (\text{IV.41})$$

avec $\tau = T - t$; $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = -\frac{1}{2}$; $a = k\theta$; $b_1 = k + \lambda - \rho\sigma$; $b_2 = k + \lambda$.

5. Les options à barrière appliquées au modèle de Heston

Lorsque nous considérons les options à barrière dans le cadre du modèle d'Heston la non-linéarité du processus de variance conduit au problème de la non-linéarité du touché de la frontière. Dans cette partie, nous présenterons une méthode pour obtenir des formules d'évaluation des options à barrière continue sous la dynamique de la volatilité stochastique, en suivant l'approche stochastique, et ceci pour le cas de corrélation nulle et les taux d'intérêt égaux [77].

Le modèle d'Heston est défini dans un marché incomplet car la variance évolue de façon stochastique dans le temps et cette dernière n'est pas transigée. Par conséquent, un marché incomplet implique généralement une infinité de prix possibles pour le même produit dérivé ce qui n'est pas pratique. La solution proposée par Heston est d'effectuer un changement de mesure unique dans une certaine classe pour chacun des deux mouvements browniens. Le premier changement est :

$$W_t^S = W_t^1 + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sqrt{v_s}} ds$$

Et le deuxième est :

$$W_t^v = W_t^2 + \int_0^t \frac{\lambda v_s}{\sigma \sqrt{v_s}} ds$$

En absence d'arbitrage, le théorème de Girsanov (et la condition de Novikov) assure qu'il existe au moins une mesure risque-neutre \mathbb{P}^v sous laquelle le mouvement brownien transformé est toujours un mouvement brownien standard. Il permet aussi le passage du modèle de la mesure de probabilités physique \mathbb{P} vers la mesure risque-neutre \mathbb{P}^v . Dès lors, nous pouvons réécrire le système d'EDS (équation IV.8) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sqrt{v_t} dW_t^S \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

où sous \mathbb{P}^v , les deux mouvements browniens standards $\{W_t^S\}_{t \geq 0}$ et $\{W_t^v\}_{t \geq 0}$ sont toujours mutuellement corrélés avec un taux de corrélation constante ρ , à prendre entre -1 et 1 ,

$$dW_t^S dW_t^v = \rho dt$$

et r est le terme de drift, taux d'intérêt sans risque, du processus de l'actif sous-jacent qui est défini comme la différence entre les taux d'intérêt domestique et foreign (étrangers) : $r = r_d - r_f$

5.1. Valorisation de l'option à barrière sous le modèle d'Heston

Dans son livre "Mathematical Methods for Foreign Exchange" [7], Lipton a établi des méthodes pour obtenir des formules fermées d'évaluation des options à barrière. Il a proposé des solutions (semi) analytiques pour les options à doubles barrières. En s'inspirant de ces résultats et des travaux de [78], en fixant l'une des deux barrières qui serait égale à une valeur pratiquement improbable (proche de zéro ou très grand), nous allons les adopter à notre étude afin d'obtenir une approximation de la valeur d'une option à une seule barrière sous le cadre d'Heston à temps continu [79].

Dès lors, nous développerons une approche pour obtenir une formule d'évaluation (semi) fermée d'options à barrière du type Call Up and In, de pay-off :

$$(S_T - K)^+ 1_{\left\{ \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \right\}} \quad (\text{IV.43})$$

où K représente le strike et B le niveau de la barrière de l'option.

Dans le but d'avoir une représentation du prix du sous-jacent dépendant essentiellement de la variance et une intégrale Itô par rapport aux mouvements browniens indépendants W^S et W^v , nous procéderons de la sorte :

La solution de la première équation du système (équation IV.42) se fait à l'aide du logarithme du prix du sous-jacent à un moment arbitraire $0 < t < T$ car $\frac{dS_t}{S_t}$ est du type $d(\ln S_t)$. De cet effet, le conditionnement de l'information générée par les trajectoires de la variance donne lieu à un logarithme du prix du sous-jacent normalement distribué avec la variance en fonction du temps.

En appliquant le lemme d'Itô au logarithme du prix du sous-jacent à l'instant t :

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{\partial \ln S_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \ln S_t}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln S_t}{\partial S^2} \langle dS, dS \rangle \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{S_t^2}{S_t^2} v_t dt \\ &= (rdt + \sqrt{v_t} dW_t^S) - \frac{1}{2} v_t dt \\ &= \left(r - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^S \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

En intégrant, nous pouvons trouver le processus résolvant l'EDS :

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left((r_d - r_f) t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^S \right) \\ &= S_0 \exp \left((r_d - r_f) t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^v + \rho_2 \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

avec $\rho_2 = \sqrt{1 - \rho^2}$ et $dW_s^S = \rho dW_s^v + \rho_2 dW_s$ qui est la décomposition de Cholesky du Mouvement Brownien W^S sous la somme de W^v et un autre Mouvement Brownien indépendant W .

Et en intégrant la deuxième équation du système (équation IV.42) qui définit la variance, nous obtenons la valeur de la variance à l'instant t , donnée par :

$$v_t = v_0 + k\theta t - k \int_0^t v_s ds + \sigma \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^v \quad (\text{IV.46})$$

Remplaçant l'équation IV.46, par rapport à l'intégrale $\int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^v$, dans l'équation IV.45, nous trouvons :

$$S_t = S_0 \exp \left((r_d - r_f) t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \frac{\rho}{\sigma} \left(v_t - v_0 - k\theta t + k \int_0^t v_s ds \right) + \rho_2 \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s \right)$$

Notons par α le drift du processus du prix du sous-jacent, défini par :

$$\alpha_t = (r_d - r_f)t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \frac{\rho}{\sigma} \left(v_t - v_0 - k\theta t + k \int_0^t v_s ds \right) \quad (\text{IV.47})$$

et sachant que, α_t (équation IV.47) est une fonction continue déterministe lorsqu'elle est conditionnée à une réalisation particulière de $\{v_s\}_{0 \leq s \leq t}$, mais n'est pas dérivable à moins que $\rho = 0$.

Ainsi, le processus du prix du sous-jacent à l'instant t peut s'écrire sous forme de sa valeur initiale, du drift α et d'une intégrale d'Itô :

$$S_t = S_0 \exp \left(\alpha_t + \rho_2 \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s \right) \quad (\text{IV.48})$$

Notant par :

$$Y_t = \rho_2 \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s \quad (\text{IV.49})$$

D'après Shreve [27], l'intégrale d'Itô Y_t de la forme ci-dessus suit la loi normale de moyenne zero et de variance $\rho_2^2 \nu_t^2$, où $\nu_t^2 = \int_0^t v_s ds$.

En remplaçant l'équation IV.49 dans l'équation IV.48, nous obtiendrons ainsi le processus du prix du sous-jacent recherché :

$$S_t = S_0 \exp \left(\hat{Y}_t \right) \quad (\text{IV.50})$$

avec

$$\hat{Y}_t = \alpha_t + Y_t \quad (\text{IV.51})$$

Nous savons que l'option à barrière s'active si le cours du sous-jacent franchit la barrière B , cela conduit à étudier le maximum du processus \hat{Y} , défini par :

$$\hat{M}_t = \max_{0 \leq s \leq t} \hat{Y}_s \quad (\text{IV.52})$$

Situons-nous dans le cas de $r_d = r_f$ et $\rho = 0$ et choisissons l'option Call Up and In. Son pay-off est donné par :

$$V_T = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \text{si } \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.53})$$

Puisque toute option définie par une variable aléatoire X positive G_t^v -mesurable et de carré intégrable sous la mesure de probabilité risque-neutre \mathbb{P}^v (d'après la condition de Novikov

$\left(\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \int_0^T \left(-\frac{1}{2} v_s \right)^2 ds \right\} \mid G_T^v \right] < \infty \right)$, est par conséquent simulable et sa valeur est notée par $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$ est :

$$V_t = \mathbb{E}[\exp(-r(T-t)X) \mid G_T^v] \quad (\text{IV.54})$$

tel que $X = \max(S_T - K, 0)$.

Sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^v conditionnée par la filtration G_T^v et après insertion de

la définition du pay-off, la valeur de notre option à barrière "Call Up and In" sous le cadre du modèle d'Heston *en date initiale* ($t = 0$) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 V_0^{UI} &= \mathbb{E}^v \left[e^{-rdT} \max(S_T - K, 0) \right] \\
 &= e^{-rdT} \mathbb{E}^v \left[(S_T - K)^+ 1_{\left\{ \max_{0 \leq t \leq T} S_t \geq B \right\}} \mid G_T^v \right] \\
 &= e^{-rdT} \mathbb{E}^v \left[\left(S_0 e^{\hat{Y}_T} - K \right)^+ 1_{\left\{ S_0 e^{\hat{M}_T} \geq B \right\}} \mid G_T^v \right] \\
 &= e^{-rdT} \mathbb{E}^v \left[\left(S_0 e^{\hat{Y}_T} - K \right) 1_{\left\{ \hat{M}_T \geq b, \hat{Y}_T \geq k \right\}} \right]
 \end{aligned} \tag{IV.55}$$

avec $k = \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$ et $b = \ln\left(\frac{B}{S_0}\right)$ (voir [subsection 3.2](#)).

5.1.1. La loi conjointe du couple (\hat{Y}, \hat{M})

Lors de l'évaluation de ce type d'option à barrière, nous allons avoir besoin de connaître la distribution conjointe du couple Mouvement Brownien et son maximum (Y, M) sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^v . Ensuite, nous abordons le problème de trouver la distribution conjointe du couple Mouvement Brownien avec drift et son maximum (\hat{Y}, \hat{M}) sous la mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$. A cet effet, les propositions suivantes sont indispensables pour la suite du raisonnement.

Proposition 5.1 (Principe de réflexion) Soit $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ un processus d'Itô de la forme :

$$Y_t = \int_0^t \beta(s) dW_s \tag{IV.56}$$

avec β fonction déterministe et $M_t = \sup_{s \leq t} Y_s$ pour $t \geq 0$. Alors le principe de réflexion est donné par :

$$\mathbb{P}(M_t \geq x, Y_t \leq y) = \mathbb{P}(Y_t > 2x - y) \quad \text{pour tout } t \geq 0, x \geq y \vee 0. \tag{IV.57}$$

Proposition 5.2 Pour $m \neq 0$ une variable aléatoire, $\tau_m = \inf \{t \geq 0 : Y_t \geq m\}$ a la distribution suivante :

$$\mathbb{P}^v(M_t \geq m) = \mathbb{P}^v(\tau_m \leq t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{|m|}{\sqrt{\rho_2^2 \nu_t^2}}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \tag{IV.58}$$

Preuve. D'abord, considérant $m > 0$ et posant $x = y = m$. En utilisant le principe de réflexion (voir [Proposition 5.1](#)) et l'égalité $\{M_t \geq m\} = \{\tau_m \leq t\}$ nous obtenons :

$$\mathbb{P}^v(\tau_m \leq t, Y_t \leq m) = \mathbb{P}^v(Y_t \geq m) \tag{IV.59}$$

D'autre part, si $Y_t \geq m$, alors $\tau_m \leq t$, le processus Y commence de 0. Par conséquent,

$$\mathbb{P}^v (\tau_m \leq t, Y_t \geq m) = \mathbb{P}^v (Y_t \geq m) \quad (\text{IV.60})$$

L'additionnement des deux équations donne la distribution cumulative de τ_m :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^v (\tau_m \leq t) &= \mathbb{P}^v (\tau_m \leq t, Y_t \leq m) + \mathbb{P}^v (\tau_m \leq t, Y_t \geq m) & (\text{IV.61}) \\ &= 2\mathbb{P}^v (Y_t \geq m) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\rho_2\nu_t}} \int_m^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\rho_2^2\nu_t^2}} dx. \end{aligned}$$

Si $m < 0$, alors $\tau_m \stackrel{d}{=} \tau_{|m|}$. ■

De la [Proposition 5.2](#) et le principe de reflexion ([Proposition 5.1](#)) nous trouvons :

$$\mathbb{P}^v (M_t \geq m, Y_t \leq w) = \mathbb{P}^v (Y_t \geq 2m - w) \quad \text{pour } w \leq m, m > 0. \quad (\text{IV.62})$$

Ainsi, la loi conjointe de M et Y sous la mesure \mathbb{P}^v est obtenue comme suit :

Proposition 5.3 *Pour $t > 0$ la loi conjointe de (Y_t, M_t) est donnée par :*

$$f_{Y,M}(m, w) = \frac{2(2m - w)}{\sqrt{2\pi\rho_2^3\nu_t^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2\nu_t^2}\right) \quad \text{pour } w \leq m, m > 0. \quad (\text{IV.63})$$

Preuve. Par définition,

$$\mathbb{P}^v (M_t \geq m, Y_t \leq w) = \int_m^{+\infty} \int_{-\infty}^w f_{Y,M}(u, s) du ds \quad (\text{IV.64})$$

Et de la [Proposition 5.1](#), nous savons que :

$$\mathbb{P}^v (Y_t \geq 2m - w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_2\nu_t}} \int_{2m-w}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\rho_2^2\nu_t^2}} dy. \quad (\text{IV.65})$$

D'après l'équation [IV.62](#), il en résulte que l'équation [IV.64](#) est égale à l'équation [IV.65](#) :

$$\int_m^{+\infty} \int_{-\infty}^w f_{Y,M}(u, s) du ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_2\nu_t}} \int_{2m-w}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{\rho_2^2\nu_t^2}} dy \quad (\text{IV.66})$$

Intégrant par rapport à m puis par rapport à w conduit à :

$$-f_{Y,M}(u, s) du ds = -\frac{2(2m - w)}{\sqrt{2\pi\rho_2^3\nu_t^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2\nu_t^2}\right)$$

■

Rappelons que sous \mathbb{P}^v , le processus Y_t n'a pas de drift et la densité jointe de (Y, M) a été obtenue sous \mathbb{P}^v . En revanche, $\hat{Y} = \alpha_t + Y_t$ a un drift $\frac{\partial\alpha_t}{\partial t}$ sous \mathbb{P}^v . Ainsi, nous avons besoin de trouver une nouvelle mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ sous laquelle \hat{Y} a un drift zéro. Nous allons utiliser la proposition suivante afin de palier ce problème :

Proposition 5.4 *La loi jointe (\hat{Y}_T, \hat{M}_T) sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^v est donnée par :*

$$f_{\hat{Y}, \hat{M}}(m, w) = \exp\left(-\frac{1}{2}w - \frac{1}{8}\nu_T^2\right) \frac{2(2m-w)}{\sqrt{2\pi\nu_T^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(2m-w)^2}{\nu_T^2}\right) \text{ pour } w \leq m, m > 0 \quad (\text{IV.67})$$

Preuve. Puisque à l'instant $t = 0$, le processus \hat{Y}_t prend la valeur 0, nous avons évidemment $\hat{M}_t \geq 0$ et $\hat{M}_t \geq \hat{Y}_t$. Par conséquent, le couple de variables aléatoires (\hat{Y}_T, \hat{M}_T) prend des valeurs dans l'ensemble $\{(m, w) : w \leq m, m \geq 0\}$.

Pour $\rho = 0$ ($\Rightarrow \rho_2 = 1$), nous avons :

- En dérivant le processus Y qui est défini par l'équation IV.49 :

$$dY_t = \sqrt{v_t}dW_t \quad (\text{IV.68})$$

où W_t est un mouvement Brownien avec un drift nul sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^v .

- En dérivant le processus \hat{Y} qui est défini par l'équation IV.51 :

$$d\hat{Y}_t = d\alpha_t + \sqrt{v_t}dW_t = \sqrt{v_t}d\hat{W}_t \quad (\text{IV.69})$$

Tel que

$$\begin{cases} \alpha_t = -\frac{1}{2} \int_0^t v_s ds, \\ d\hat{W}_t = \frac{d\alpha_t}{\sqrt{v_t}} + dW_t = dW_t + \gamma_t dt, \\ \gamma_t = -\frac{1}{2}\sqrt{v_t}. \end{cases}$$

Par conséquent, $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$, est un mouvement Brownien sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^v avec un drift γ_t . Nous définissons la martingale exponentielle

$$\hat{H}_t = \exp\left(-\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \gamma_s d\hat{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds\right) \quad (\text{IV.70})$$

et la nouvelle mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ par :

$$\hat{\mathbb{P}}(A) = \int_A \hat{H}_T d\mathbb{P}^v \text{ pour tout } A \in G_T^v. \quad (\text{IV.71})$$

Conditionné sur la sigma-algèbre générée par les trajectoires de la variance, la condition de Novikov,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\int_0^T \left(-\frac{1}{2}v_s\right)^2 ds\right\} \mid G_T^v\right] < \infty \quad (\text{IV.72})$$

Est immédiatement satisfaite. D'après le théorème de Girsanov, \hat{W}_t est un Mouvement Brownien avec drift nul sous $\hat{\mathbb{P}}$. La Proposition 5.3 nous donne la loi jointe du couple (\hat{Y}_T, \hat{M}_T) sous $\hat{\mathbb{P}}$, qui est $f_{\hat{Y}, \hat{M}}$. Pour déterminer la densité de (\hat{Y}_T, \hat{M}_T) sous \mathbb{P}^v , nous constatons que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^v \left(\hat{M}_T \geq m, \hat{Y}_T \leq w \right) &= \mathbb{E}^v \left[1_{\{\hat{M}_T \geq m, \hat{Y}_T \leq w\}} \right] & (IV.73) \\
 &= \hat{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{\hat{H}_T} 1_{\{\hat{M}_T \geq m, \hat{Y}_T \leq w\}} \right] \\
 &= \hat{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{\exp \left(-\int_0^T \gamma_s d\hat{W}_s + \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds \right)} 1_{\{\hat{M}_T \geq m, \hat{Y}_T \leq w\}} \right] \\
 &= \hat{\mathbb{E}} \left[\exp \left(\int_0^T \gamma_s d\hat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds \right) 1_{\{\hat{M}_T \geq m, \hat{Y}_T \leq w\}} \right] \\
 &= \hat{\mathbb{E}} \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \sqrt{v_s} d\hat{W}_s - \frac{1}{8} \int_0^T v_s ds \right) 1_{\{\hat{M}_T \geq m, \hat{Y}_T \leq w\}} \right] \\
 &= \int_{-\infty}^w \int_{-\infty}^m \exp \left(-\frac{1}{2} y - \frac{1}{8} \nu_T^2 \right) f_{\hat{Y}_T, \hat{M}_T}(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

Donc, la loi du couple (\hat{Y}_T, \hat{M}_T) sous \mathbb{P}^v est :

$$\frac{\partial^2}{\partial m \partial w} \mathbb{P}^v \left(\hat{M}_T \geq m, \hat{Y}_T \leq w \right) = \begin{cases} \exp \left(-\frac{1}{2} w - \frac{1}{8} \nu_T^2 \right) \frac{2(2m-w)}{\sqrt{2\pi\nu_t^3}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m-w)^2}{\nu_t^2} \right) & \text{pour } w \leq m, m > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (IV.74)$$

Pour d'autre valeur de w et m , nous obtenons zero car $f_{\hat{Y}_T, \hat{M}_T}$ est nulle. ■

Ainsi, pour résoudre le problème de l'équation IV.55, [80] :

$$V_0^{UI} = e^{-rdT} \mathbb{E} \left[\left(S_0 e^{\hat{Y}_T} - K \right)^+ 1_{\{\hat{M}_T \geq b, \hat{Y}_T \geq k\}} \mid G_T^v \right] \quad (IV.75)$$

Nous utiliserons la loi jointe des variables aléatoires (\hat{Y}_T, \hat{M}_T) , sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^v suivante :

$$f_{\hat{Y}, \hat{M}}(m, w) \cong \frac{2(2m-w)}{\sqrt{2\pi\rho_2^3\nu_T^3}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m-w)^2}{\rho_2^2\nu_T^2} + Fw + G \right) \quad \text{pour } w \leq m, m > 0 \quad (IV.76)$$

avec

$$F = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad G = -\frac{1}{8} \nu_T^2 \quad (IV.77)$$

Pour notre cas, nous allons appliquer la méthode d'intégration par partie, et exprimer les intégrales restantes en termes de la fonction de répartition de la loi normale.

Sous la condition que $0 < S_0 < B$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
 V_0^{UI} &= e^{-r_d T} \left(\int_k^{+\infty} \int_b^{+\infty} (S_0 e^w - K) f_{\hat{Y}, \hat{M}}(m, w) dm dw \right) \\
 &= e^{-r_d T} \left(\int_k^{+\infty} \int_b^{+\infty} (S_0 e^w - K) \frac{2(2m - w)}{\sqrt{2\pi} \rho_2^3 \nu_T^3} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2 \nu_T^2} + Fw + G \right) dm dw \right)
 \end{aligned} \tag{IV.78}$$

Nous savons que :

$$\frac{\partial}{\partial m} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2 \nu_T^2} \right) = -\frac{2(2m - w)}{\rho_2^2 \nu_T^2} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2 \nu_T^2} \right) \tag{IV.79}$$

En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho_2 \nu_T}$, puis en intégrant, nous obtenons :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho_2 \nu_T} \int_b^{+\infty} \frac{2(2m - w)}{\rho_2^2 \nu_T^2} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2 \nu_T^2} \right) dm = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho_2 \nu_T} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2 \nu_T^2} \right) \Big|_{m=b}^{m=\infty} \tag{IV.80}$$

Donc,

$$V_0^{UI} = e^{-r_d T} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho_2 \nu_T} \int_k^{+\infty} (S_0 e^w - K) \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(2m - w)^2}{\rho_2^2 \nu_T^2} + Fw + G \right) \Big|_{m=b}^{m=\infty} dw \right)$$

En poursuivant l'intégration, nous pouvons obtenir l'expression de V_0^{UI} comme suit :

$$\begin{aligned}
 V_0^{UI} &= B.N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) - \frac{\nu^2}{2}(T)}{\nu(T)} \right) + S_0 N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \frac{\nu^2}{2}(T)}{\nu(T)} \right) \\
 &\quad - B.N \left(\frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_0 K} \right) - \frac{\nu^2}{2}(T)}{\nu(T)} \right) - K \left(\frac{S_0}{B} \right) N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) + \frac{\nu^2}{2}(T)}{\nu(T)} \right) \\
 &\quad - K N \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{B} \right) - \frac{\nu^2}{2}(T)}{\nu(T)} \right) + K \left(\frac{S_0}{B} \right) N \left(\frac{\ln \left(\frac{B^2}{S_0 K} \right) + \frac{\nu^2}{2}(T)}{\nu(T)} \right) \tag{IV.81}
 \end{aligned}$$

Cette formule représente la valeur d'un Call Up and In Call option dans le cadre du modèle d'Heston à l'instant $t = 0$, pour le cas $r_d = r_f$ et $\rho = 0$.

6. Conclusion

Vu que le modèle à volatilité constante suggéré par Black-Scholes ne reflète pas les prix des options standards observés sur les marchés financiers du fait que la distribution empirique des log-rendements d'un actif n'est pas une gaussienne et que la volatilité cotée sur un marché financier dépend du strike et de la maturité d'une option (notion

de smile/skew pour la surface de volatilité implicite). Pour pallier ces problèmes, nous proposons d'étudier un des modèles le plus proche de la réalité et le plus populaire des modèles à volatilité stochastique particulièrement le modèle d'Heston. Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, nous avons élaboré l'équation aux dérivées partielles d'Heston afin d'évaluer les options Européennes, basé sur la dynamique du sous-jacent inspirée du modèle de Black-Scholes et de sa volatilité inspirée du modèle Cox Ingersoll Ross [81]. En faisant l'analogie avec la formule du Call Européen obtenu pour le modèle de Black-Scholes et effectuant le changement de variable, on a pu obtenir une formule explicite pour l'évaluation des Calls Européens. Enfin, nous avons adapté le modèle d'Heston dans le but d'évaluer les options à barrière afin de fournir une formule du prix de ces options, ceci est fait en considérant un coefficient de corrélation entre les deux mouvements browniens nul.

Cette thèse traite l'évaluation des modèles à volatilité constante et à volatilité stochastique. Nous avons commencé par le modèle de Black-Scholes qui est l'outil indispensable en finance, sa robustesse tient du fait de l'existence d'une formule explicite, permettant une valorisation des options standards qui dépendent uniquement d'un seul paramètre qui est la volatilité du sous-jacent, supposé constant. Notre contribution est d'évaluer les options européennes en détaillant l'enchaînement des calculs qui mènent à la résolution de l'équation de Black-Scholes. Ce dernier est basé sur un raisonnement risque-neutre où les prix actualisés du sous-jacent sont des martingales.

Cependant, dans la pratique, les prix issus de ce modèle sont incohérents avec ceux observés sur les marchés (la volatilité en fonction du prix d'exercice). Ne pouvant pas expliquer ce phénomène, la faiblesse du modèle de Black-Schole est très vite apparue. D'autres types d'options ont vu le jour, sous le nom d'options dites exotiques tel que les options à barrière. En effet, les options à barrière sont devenues presque aussi populaires que les options standards et ceci grâce à leurs capacités de réduction du risque du vendeur de l'option et aussi la valeur d'une option à barrière qui est inférieure à celle d'une option standard équivalente. Notre contribution dans cette partie consiste, premièrement, à détailler les calculs qui mènent à l'équation de valorisation des options à barrière d'achat activantes à la hausse (Up and In) du type européen dont la maturité est fixée à une date constante, par le raisonnement risque neutre basé essentiellement sur le calcul de la densité jointe du couple mouvement brownien et son maximum ainsi que le théorème de Girsanov, ce dernier nous fournit l'univers adéquat à la résolution des EDS du modèle précité. Deuxièmement, elle consiste à élaborer la formule d'évaluation des options à barrière dont la maturité est considérée comme une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson.

Vu que le modèle à volatilité constante suggéré par Black-Scholes pour la modélisation du prix d'un actif financier ne reflète pas les prix des options standards observés sur les marchés financiers, cela conduisait à le rejeter et développer d'autres modèles où la volatilité n'est pas constante portant le nom de modèles à volatilité stochastique. Un des modèles à volatilité stochastique le plus utilisé est celui de Heston. Notre but consiste à présenter le modèle d'Heston en rappelant ces avantages et inconvénients, nous avons établi l'équation aux dérivées partielles d'Heston pour évaluer n'importe quelle option. Puis, démontré la méthode d'évaluation des options d'achat Européennes, par la suite adapté le modèle d'Heston aux options à barrière afin de fournir une formule explicite du prix de ces options pour un cas où la corrélation est nulle.

Enfin, il est à noter que, en premier lieu, dans la réalité c'est à dire sur les marchés financiers le modèle le plus performant lors de l'évaluation des options à barrière est celui du cas où la maturité aléatoire à cause des conditions qui influent le marché des transactions. En deuxième lieu, le modèle à volatilité stochastique lui-même n'est pas conforme à la réalité, dans la mesure, où le prix de l'actif sous-jacent et la volatilité connaissent des sauts dans leurs évolutions.

- En guise de suite de notre thèse, il sera intéressant de :
- évaluer les options américaines par le biais de Black-Scholes et du modèle Heston.
 - Application la technique relative à l'équation de la chaleur pour trouver une solution exacte relative au modèle à volatilité stochastique.
 - Supposer que le coefficient de corrélation est non nul pour calculer la distribution du prix d'option des modèles à volatilité stochastique.

- [1] Racicot, F. E and Théoret R. (2006). Finance computationnelle et gestion des risques. Presses de l'Université de Québec.
- [2] Detemple J. (2006). American-style Derivatives Valuation and Computation. Chapman & Hall/CRC.
- [3] Black F and Scholes M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Polit. Econ. 81, 637–654.
- [4] Merton R.C. (1973). Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economic Management Science, 4, 141–183.
- [5] Cox J.C, Ross S. A and Rubinstein M. (1979). Option pricing : A simplified approach. Financ. Econom. 7, 229–263.
- [6] Musiela M and Rutkowski M. (2005). Martingale Methods in Financial Modelling second edition. Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, New York.
- [7] Lipton. A. (2001). Mathematical Methods for Foreign Exchange. World Scientific, Singapore.
- [8] Reiner, E. (1991). Breaking down the barriers. Risk, 9, 28–35.
- [9] Carr, P. and Ellis, K. and Gupta, V. (1998). Static hedging of path dependent options. Journal of Finance, 53, 1165–1190.
- [10] Goodman, L., Ross, S. et Schmidt, F. (1985). Are foreign currency options overvalued the early experience of the philadelphia stock exchange. The Journal of Futures Markets. 5, 349–359.
- [11] Bollerslev, T., Chou, R. et Kroner, F. (1992). Arch modeling in finance : A review of the theory and empirical evidence. Journal of Econometrics. 52, 5–59.
- [12] Bakshi, G., Cao, C. et Chen, Z. (1997). Empirical performance of alternative option pricing models. Journal of Finance. 52, 2003–2049.
- [13] Lewis A. (2001). Option Valuation under Stochastic Volatility. Finance Press.
- [14] Heston, S.L. (1993). "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. Review of Financial Studies, 6, 327–43.
- [15] Stein E.M. and Stein J.C. (1991) Stock price distributions with stochastic volatility : an analytic approach. The review of financial studies. 4(4), 727–752.

-
- [16] Cox J. C and Ross S. A. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*. 3, 145–166.
- [17] Johnson H. & Shanno.D. (1985). Option pricing when the variance is changing; *Journal of Finance and Quantitative analysis*. 22, 143–151.
- [18] Hull, J and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*. 42, 281–300.
- [19] Scott L. O. (1987). Option pricing when the variance changes randomly : Theory, estimation and an application. *Journal of financial and quantitative analysis*. 22(4).
- [20] Wiggins J. B. (1987) Option values under stochastic volatility :Theory and Empirical estimates. *Journal of Financial Economics*. 19, 351–372.
- [21] Fouque J.P. and Papanicolaou G. and Sicar K. R. (2000). *Derivatives in financial markets with stochastic volatility* Cambridge University Press.
- [22] Wilmott P. (1998). *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*. University Edition, Wiley, Chichester.
- [23] Rogers L. C. G and Williams D. (2000). *Diffusion, Markov Processes, and Martingales, Ito calculus*, Volume two. Cambridge University Press.
- [24] Revuz D., and Yor M. (1999). *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Third edition. Springer Verlag, Berlin.
- [25] Le Gall, J.F. (2013). *Mouvement Brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer, Coll. Mathématiques et applications. vol 71.
- [26] Khodja N., Trabelsi F., and Remita M.R. (2016). Asymptotic behaviour of random maturity barrier options. *Int. J. Operational Research*. 26(2), 221–235.
- [27] Karatzas I., and Shreve, S.E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag, Berlin.
- [28] Comets F and Meyre T. (2006). *Calcul stochastique et modèles de diffusions*. Dunod.
- [29] Bachelier, L., (1901). Théorie mathématique du jeu. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. 18, 143–210.
- [30] Achdou Y and Pironneau O. (2005). *Computational Methods for Option Pricing*. Society for Industrial and Applied Mathematic.
- [31] Haug E.G. (1998). *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill, New York.
- [32] Taleb N. (2001). *Dynamic Hedging*. Wiley, New York.
- [33] Mikosch T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, Vol. 6. World Scientific.
- [34] McDonald, R.L. (2006), *Derivatives Markets*, 2e édition, Addison Wesley, Boston.
- [35] Wilmott, P. (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, 2e édition, Wiley & Sons, New York.
- [36] Haug, E.G. (1997), *The Complete Guide to Option pricing Formulas*, McGraw-Hill, New York.
- [37] Shreve S.E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous Time Models*. Springer Verlag, New York.
- [38] Wilmott P., Dewynne, J., and Howison, S. (1993). *Option Pricing : Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press, Oxford UK.

-
- [39] Derman E., and Iraj, K. (1996). The Ins and Outs of Barrier Options : Part 1. *Derivatives Quarterly*, Winter. 1996, 55–67.
- [40] Andersen L.G.B., Andreasen, J., and Eliezer, D. (2002). Static replication of barrier options : some general results. *Journal of Computational Finance*. 5, 1-25.
- [41] Bowie J., and Carr, P. (1994). Static simplicity. *Risk*. 7, 45–49.
- [42] Rich D.R. (1994). The mathematical foundations of barrier option-pricing theory. *Advances in Futures and Options Research*. 7, 267–311.
- [43] Heynen R and Kat H. (1995). Crossing barriers. *Risk Magazine*. 7, 46–51.
- [44] Baldi P, Caramellino L, and Iovino M.G. (1999). Pricing single and double barrier options via sharp large deviations techniques. *Math. Finance*. 9, 293–322.
- [45] Linetsky V. (2004). The spectral decomposition of the option value. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 7, 337–347.
- [46] Kunitomo N and Ikeda N. (1992). Pricing options with curved boundaries. *Math. Finance*. 2, 275–298.
- [47] Doobae J., and Hyejin, K. (2011) Cross a barrier to reach barrier options. *J. Math. Anal. Appl.* 389, 968–978.
- [48] Broadie M, Glasserman P, and Kou S. (1997). A continuity correction for discrete barrier options. *Math. Finance*. 7, 325–347.
- [49] Hörfelt P. (2003). Extension of the corrected barrier approximation by Broadie, Glasserman, and Kou. *Finance and Stochastics*. 7, 231–243.
- [50] Deynne J., Howison, S., and Wilmott, P. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives : A student introduction*. Press Syndicate of the University of Cambridge, UK.
- [51] Zhang P.G. (1997). *Exotic Options*. World Scientific, Singapore.
- [52] Pliska S.R. (1997). *Introduction to mathematical finance*. Blackwell, Oxford.
- [53] Jeanblanc M., and Yor, M. (2009). *Mathematical Methods for Financial Markets*. Springer Finance.
- [54] Derman E., and Iraj, K. (1997). The Ins and Outs of Barrier Options : Part 2. *Derivatives Quarterly*, Spring. 73–80.
- [55] Harrison J.M. (1985). *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. John Wiley, New York.
- [56] Lishang J. (2005). *Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing*. World Scientific Publishing Company.
- [57] Yue K.K. (2008). *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer.
- [58] Kou S. (2003). On pricing of discrete barrier options. *Statistica Sinica*. 13, 955–964.
- [59] Kou S. (2008). discrete Barrier and Lookback Options. *Handbooks in OR MS*. 15, 343–373.
- [60] Broadie M., Glasserman, P., and Kou, S. (1997). A continuity correction for discrete barrier options. *Math. Finance*. 7, 325–349.
- [61] Hull J.C. (2005). *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, fourth ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [62] Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *Journal of finance*. 49, 771–818.

-
- [63] Latane, H.A and Rendleman, R.J.J. (1976). Standard derivations of stock price ratios implied on option prices. *Journal on finance*. 31, 369–381.
- [64] Derman, E. and Kani, I. (1994). Riding on a Smile. *RISK*. 7(2), 32–39.
- [65] Dupire, B. (1994). Pricing with a Smile. *RISK*, 7(1), 18–20.
- [66] Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface : A Practitioner’s Guide*. Hoben. John Wiley& Sons, NJ.
- [67] Joshi, M. (2008). *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*. Second Edition. Cambridge, Cambridge University Press, UK.
- [68] Rouah F. D. and Heston L. S. (2013). *The Heston Model and its Extensions in Matlab and C#, + Website*. Wiley.
- [69] Rouah, F. D. (2013). *Simplified Derivation of the Heston Model*. John Wiley & Sons.
- [70] Cox, J.C., Ingersoll, J.E and Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*. 53, 385.
- [71] Feller, W. (1951). Two singular diffusion problems. *Annals of Mathematics*. 54,173-182.
- [72] Garman, M. B., and S. W. Kohlhagen. (1983). Foreign Currency Option Values. *Journal of International Money and Finance*. 2, 231–237.
- [73] Breeden, D. (1979). An Intertemporal Asset Pricing Model With Stochastic Consumption and Investment Opportunities. *Journal of Financial Economics*. 7, 265–96.
- [74] Clark, I. (2011). *Foreign Exchange Option Pricing - A Practitioner’s Guide*. Wiley-Finance.
- [75] Janek, A, Kluge, T, Weron, R. and Wystup, U. (2011). FX smile in the Heston model. *Statistical Tools for Finance and Insurance (2nd Ed)*, Cizek et al. (eds.). Springer-Verlag.
- [76] Gil-Pelaez, J. (1951). Note on the Inversion Theorem. *Biometrika*. 38(3-4),481–482.
- [77] Dragulescu, A. and Yakovenko, V. (2002). Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility. *Quantitative Finance*. 2, 443–453.
- [78] Griebisch, S.A and Pilz, K. F. (2013). A Stochastic Approach to the Valuation of Barrier Options in Heston’s Stochastic Volatility Model. *SSRN Electronic Journal*. Working paper. 34.
- [79] Alos, E. (2012). A Decomposition Formula for Option Prices in the Heston Model and Applications to Option Pricing Approximation. *Finance and Stochastics*. 16(3), 403–422.
- [80] Chiarella, C, Kang, B and Meyer, G. H. (2012). The evaluation of barrier option prices under stochastic volatility. *Computers and Mathematics with Applications*. 64, 2034–2048.
- [81] Foulon, F. (2010). ADI finite difference schemes for option pricing in the Heston model with correlation. *International journal of numerical analysis and modeling*. 7(2), 303–320.
- [82] Tavella, D and Randall, C. (2000). *Pricing Financial Instruments*. Wiley, New York.
- [83] Alos, E and Ewald, C. (2008). Malliavin differentiability of the Heston volatility and applications to option pricing. *Advances in Applied Probability*. 49, 1–19.