SUR LA STABILITÉ DES POUTRES NON-LINÉAIRES ET DES POUTRES LINÉAIRES

Présenté par : Hachelfi Mouna

Département de Mathématiques, Université Badji Mokhtar Annaba

2019

Encadré par : Mr. Djebabla Abdelhak

Table des matières

Remerciements

Avant toute chose, je commencerai par Bismi Allâh, Ar-Rahmân Er-Rahim, celui qui accorde beaucoup de misécorde aux croyants et à ceux qui le sont moins dans ce bas monde. Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la force et la patience d'aller jusqu'au bout pour enfin achever ce travail.

La présente thèse de doctorat représente un labeur qui s'est inscrit dans la durée, et pour cette raison, a constitué le fil conducteur d'une tranche de ma vie, vraisemblablement au crépuscule de ma candeur estudiantine, et espérant à l'aube de la maturité scientifique.

De nombreuses personnes se retrouvent ainsi de manière fortuite ou non, pour le pire ou le meilleur, entre le doctorant et son doctorant. Ce sont ces personnes que j'aimerai mettre en avant dans mes remerciements.

Je remercie vivement toutes les personnes qui m'ont aidées pendant l'élaboration de ma thèse et notamment :

•Mon encadreur Monsieur le Docteur Djebabla Abdelhak pour m'avoir donné l'occasion d'aborder un sujet qui m'était auparavant complètement inconnu et partant d'approfondir mes connaissances dans ce domaine. Merci pour sa sollicitude et les efforts qu'elle a développés y compris pour ces journées sacrifiées nonobstant ses multiples responsabilités et autres tâches qui lui incombent par ailleurs.

•j'adresse préalablement mes vifs remerciements aux membres de jury pour avoir réservé de leur temps pour la lecture attentionnée et assurément nécessaire à l'amélioration du document :

✓Monsieur le professeur Haiour Mohamed, enseignant à l'Université ‹‹ Badji Mokhtar, Annaba››.

✓ Madame le professeur Benouhiba Nawel, enseignante à l'Université ‹‹ Badji Mokhtar, Annaba››.

✓ Monsieur le professeur Benzine Rachid, enseignant à l'École Supérieure de Technologies Industrielles ‹‹ ESTI, Annaba››.

✓ Monsieur le professeur Djellit Ali, Directeur du laboratoire de Mathématiques, Dynamique et Modélisation et enseignant à l'Université ‹‹ Badji Mokhtar, Annaba››.

✓ Monsieur le professeur Kouche Maheiddine, enseignant à l'Université ‹‹ Badji Mokhtar, Annaba››.

•Je les ai gardés pour la fin car j'avais, j'ai et j'aurai pour eux une estime inégalée. Je veux parler de mes parents, mon mari, mon fils et mes soeurs. Je vous serai reconnaissante toute mon existence et même par-delà, pour votre soutien moral et matériel et surtout votre indéfectible confiance. Je vous adore.

Mouna

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la stabilisation de la poutre de Timoshenko ; cette théorie constitue en fait, une amélioration de la théorie d'Euler Bernoulli, parce qu'elle tient compte du cisaillement et des effets d'inertie de rotation. Ainsi le phénomène des vibrations apparait dans toutes les structures mécaniques sont indésirables car elles ont une influence néfaste sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. De plus, elles peuvent constituer un danger pour l'utilisateur lui même. L'élimination ou la réduction de ces vibrations est un problème majeur dans les domaines de l'ingénierie, pour cette raison, on élabore et incorpore des amortissements de type friction, thermique ou viscoélastique dans le système, ce qui explique l'ajout de certain termes dissipatifs dans les équations ou bien sur la frontière. Ainsi, cette théorie conduit à l'obtention de plusieurs résultats concernant le comportement asymptotique des solutions et en démontrant que les solutions énergies sont stables de manière générale et que la stabilité exponentielle et polynômiale deviennent un cas particulier, et ceci en utilisant la méthode des multiplicateurs qui se base sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov équivalente à l'énergie .

Mots-clés : poutres vibrantes, système de Timoshenko, effet thermal, dissipation frictionnelle, dissipation thermo-viscoélastique, fonctionnelle de Lyapunov, décroissance exponentielle et décroissance générale.

Abstract

In this thesis, we study the stabilization of the Timoshenko beam ; this theory is, in fact, an improvement of Euler Bernoulli's theory, because it takes into account the shear and rotational inertia effects. So the phenomenon of vibrations appears almost in all the mechanical structures are undesirable because they have a detrimental influence on the operation and the lifetime of these structures. Moreover, they can constitute a danger for the user himself. The elimination or reduction of these vibrations is a major problem in the fields of the engineering, for this reason, one develops and incorporates in the system depreciation of various types such as : the strong depreciation, the friction damping and the viscoelastic damping, which explains the addition of certain dissipative terms in the equations or on the border. Thus, this theory leads to obtaining several results concerning the existence, the asymptotic behavior of the solutions and by demonstrating that the energy solutions are stable in general and that the exponential and polynomial stability become a special case and this by using the multiplier method which is based on the construction of a Lyapunov functional equivalent to energy.

Key words : vibrating beams, Timoshenko system, thermal effect, Frictional dissipation, thermo-viscoelastic dissipation, Lyapunov functional, exponential decay and general decay.

الملخص

في هذه الأطروحة ، ندرس استقرار حزمة **Timosheko**. هذه النظرية ، في الواقع ، هي تحسُّن لنظرية **Euler-Bernoulli** ، لأنها تأخذ بعين الاعتبار تأثيرات القص والقصور الذاتي. وبالتالي هذه ظاهرة الاهتزازات تظهر تقريبا في جميع الهياكل الميكانيكية غير مرغوب فيها لأنها لها تأثير ضار على العملية وعمر هذه الهياكل. علاوة على ذلك ، يمكن أن تشكل خطرا على المستخدم نفسه. يعتبر القضاء على هذه الاهتزازات أو الحد منها مشكلة رئيسية في مجال الهندسة ، ولهذا السبب ، فإنه يتطور ويضمن احتكاكًا قويًا للتخميد الضعيف والتخميد اللزج في النظام ، وهو ما يفسر إضافة بعض الشروط المبددة في المعادلات أو على الحدود. وبالتالي ، فإن هذه النظرية تؤدي إلى الحصول على عدة نتائج تتعلق بالوجود ، والسلوك اللاتقارب للحلول ، وإثبات أن حلول الطاقة مستقرة بشكل عام وأن الاستقرار الأسى والمتعدد الحدود يصبح حالة خاصة ، وهذا باستخدام طريقة المضاعف الذي يقوم على بناء وظيفية **Lyapunov** ما يعادل وظيفية الطاقة.

الكلمات المفتاحية: الحزم الاهتزازية ، نظام **Mindlin Timoshenko** ، التأثير الحراري، تبديد الاحتكاك، تبديد اللزجة الحرارية، وظيفية **Lyapunov** ، التناقص الأسي و التناقص العام.

Introduction

L'étude des systèmes dynamiques d'élasticité non linéaire et linéaire décrits par les équations de von Karman, l'une des équations fondamentales de la physique mathématique, a fait l'objet de plusieurs résultats [7, 14, 16, 17, 27, 28]. Leur importance provient du fait que de nombreux phénomènes physiques liés à la théorie de l'oscillation sont décrits par des modèles élastiques dynamiques. La propagation des ondes, des oscillations et des vibrations, des membranes, des plaques, des coques, etc.... est régie par des systèmes élastiques non linéaires impliquant des équations d'onde et de plaque ou une combinaison de celles-ci. Contrairement à d'autres modèles de base tels que : le modèle d'Euler-Bernoulli, le modèle de Raleigh ou le modèle de Timoshenko.

Une des théories les plus utilisées généralemet est la théorie des poutres ; dans la théorie d'Euler-Bernoulli les sections transversales plates perpendiculaires à l'axe de la poutre demeurent planes et perpendiculaire à l'axe aprés déformation ; il résulte de ce fait que la contrainte de cisaillement transversal est nulle. Un moment de l'inertie de masse est ajouté dans la dernière théorie tandis que l'inertie rotatoire et l'effet de la force de cisaillement sont pris en considération dans la théorie de Timoshenko et ceci rend le problème hyperbolique et plus précis en cas de poutre épaisse.

Par exemple, Timoshenko a introduit le système suivant de deux équations hyperboliques couplées

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \left(k\left(u_x + \varphi\right)\right)_x, & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty) \\ I_\rho \varphi_{tt} = \left(EI\varphi_x\right)_x + k\left(u_x - \varphi\right), & \text{dans } (0, L) \times (0, \infty), \end{cases}$$

comme un modèle simple décrivant les vibrations d'une poutre, où t est la variable du temps, x la variable de l'espace au long de la poutre de longueur L dans sa configuration d'équilibre, u est le déplacement transversal de la poutre et φ est l'angle de rotation du filament de la poutre. Les coefficient ρ, I_ρ, E, I et k sont respectivement : la masse linéaire, le moment polaire d'inertie de la section efficace, le module de young de l'élasticité, le moment d'inertie d'une section efficace et le module d'étirement.

Pendant de nombreuse décennies, la dynamique des vibrations des poutres non-linéaires et linéaires a été un sujet de grand intérêt dans le domaine mécanique des structures. Ces vibrations sont naturellement indésirables en raison de leur endomagemment et aussi de leur nature détruisante ; pour cette raison les chercheurs ont proposé une manière efficace et économique de commander les vibration de la poutre ; c'est de rajouter différents types d'amortissement par exemple (viscoélastique, forts, frictionnelles,...). La plupart de ces dispositifs sont des amortisseurs internes et\ ou sur la frontière. Par exemple, Perla Menzela et al. [27] . Araruna et al. [2] ont étudié le comportement asymptotique et ils ont démontré que le système suivant décroit de façon exponentielle.

$$\begin{cases} \rho h \psi_{tt} - \frac{\rho h^3}{12}\psi_{ttxx} - \psi_{txx} - \left[\left(\eta_x + \frac{1}{2}\psi_x^2\right)\psi_x\right]_x + \psi_{xxxx} + \psi_t = 0, \\ \rho h \eta_{tt} - \left(\eta_x + \frac{1}{2}\psi_x^2\right)_x + \eta_t = 0, \end{cases} \tag{1}$$

dans $(0, L) \times (0, \infty)$. Ce système est complètè par des conditions aux limites et des conditions initiales

$$\begin{cases} \psi(0,.) = \psi(L,.) = \psi_x(0,.) = \psi_x(L,.) = \eta_x(0,.) = \eta_x(L,.) = 0, \ t > 0, \\ \psi(.,0) = \psi_0, \ \psi_t(.,0) = \psi_1, \ x \in [0, L], \\ \eta(.,0) = \eta_0, \ \eta_t(.,0) = \eta_1, \ x \in [0, L]. \end{cases}$$

Ils ont introduit deux dissipations de frictions faibles (ψ_t) et (η_t) et une troisième dissipation de friction forte donnée par le terme $(-\psi_{txx})$, cette dissipation est nécessaire lorsque l'inertie de rotation de la poutre est prise en compte.

Dans [31] , Munõz Rivira et Rack ont rencontre un amortissement de nature différente. A savoir, le système augmenté suivant a été considéré

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - k\left(\phi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\phi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t - l\theta_{xx} + \gamma\psi_{tx} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

dans $(0, \infty) \times (0, L)$. Il est clair que cet amortissement n'agit pas directement dans les équations ou la frontière comme dans les travaux précédents mais plutôt comme un effet thermique. Une équation de la chaleur est ajoutée et couplée avec le système d'origine. Ils ont prouvé que cette équation de la chaleur, qui produisait une dissipation d'énergie, est capable de conduire le système de manière exponentielle, alors le système (2) devient

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - k\left(\phi_x + \psi\right)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\phi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0, \\ \rho_3\theta_t - l\theta_{xx} + \beta\theta_{txx} + \gamma\psi_{tx} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

dans $(0, \infty) \times (0, L)$, notant que le terme $(\beta\theta_{txx})$ dans la troisième équation représente un amortissement fort.

Djebabla. A et Tatar. N [6] ont amélioré le résultat précédent ; en remplaçant la dissipation forte par une autre plus faible de type viscoélastique de la forme $\left(\beta \int_0^t g\left(t-s\right)\theta_{xx}(s)ds\right)$, plus precisement, ils ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} \rho_1\phi_{tt} - k\left(\phi_x + \psi\right)_x = 0, & \text{dans } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\left(\phi_x + \psi\right) + \gamma\theta_x = 0, & \text{dans } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_3\theta_t - l\theta_{xx} + \beta \int_0^t g\left(t-s\right)\theta_{xx}(s)ds + \gamma\psi_{tx} = 0, & \text{dans } (0, \infty) \times (0, L), \end{cases} \tag{4}$$

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations, elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façons plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier ; le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est-à-dire :

$$E(t) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte .

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, c'est-à-dire :

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \ \forall t \geq 0 \ .$$

Dans cette thèse on s'intéresse à l'étude de la stabilité exponentielle du système thermoélastique linéaire de type I avec un effet micro-température et amortit par deux dissipations thermales (w_{xx}) et (θ_{xx}) ; plus precisement, l'étude du système suivant

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k(u_x + \varphi)_x + \gamma\theta_x = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty) \\ \rho_2 \varphi_{tt} - \alpha\varphi_{xx} + k(u_x+\varphi) + dw_x - m\theta = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty) \\ \rho_3\theta_t - l\theta_{xx} + \gamma u_{tx} + m\varphi_t + k_1 w_x = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty) \\ \rho_4 w_t - k_2 w_{xx} + k_1\theta_x + d\varphi_{tx} = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{5}$$

où $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \alpha, \gamma, l, m, d, k, k_1$ et k_2 sont des constantes positives ; les inconnues $u(x,t)$, $\varphi(x,t)$, $\theta(x,t)$ et $w(x,t)$ représentent, respectivement : le déplacement, la fraction volumique, la différence en température et le micro-température.

Nous complétons le système (5) avec des conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = \varphi_x(0,t) = \varphi_x(1,t) = 0 \quad t > 0 \\ \theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = w(0,t) = w(1,t) = 0 \quad t > 0 \end{cases} \tag{6}$$

et des conditions initiales

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad x \in (0,1) \\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \ w(x,0) = w_0(x), \ \theta(x,0) = \theta_0(x), \quad x \in (0,1), \end{cases} \tag{7}$$

où $u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, w_0, \theta_0$ sont des fonctions données.

Nous considérons les conditions suivantes sur θ et φ

$$\int_0^1 \theta_0(x)\,dx = \int_0^1 \varphi_0(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

$$\int_0^1 \bar{\theta}(x,t)\,dx = \int_0^1 \bar{\varphi}(x,t)\,dx = 0, \quad t \geq 0, \tag{9}$$

Nous démontrons alors que les solutions énergies sont stables de manière exponentielle sous la condition (8) et ceci, en utilisant la méthode des multiplicateurs.

Structure de thèse

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante, il est divisé en quatre chapitres ;

i- Le premier contient des rappels et des notions de base qui seront utiles à notre travail.

ii- Le deuxième chapitre : concerne un système non-linéaire, en prouvant le résultat de stabilité exponentielle du système.

iii- Le troisième chapitre : s'intéresse à un système non-linéaire de type Timoshenko amortit par une dissipation viscoélastique et deux autres frictionnelles. En utilisant la méthode des multiplicateurs, nous démontrons que ce système décroit d'une manière générale.

iv- Le quatrième et le dernier chapitre est consacré à la présentation de l'essentiel de ce travail, concernant l'étude de la stabilité exponentielle d'un système linéaire thermoélastique avec dissipation thermale et des effets micro-températures, toujours par la méthode des multiplicateurs.

Ceci a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale intitulée

"ON THE DECAY OF THE ENERGY FOR LINEAR THERMOELASTIC SYSTEMS BY THERMAL AND MICRO-TEMPERATURE EFFECTS" Hachelfi M., Djebabla A., Tatar N. Eurasion journal of Math, Comp App, ISSN 2306–6172 Vol 6, Issue 4 (2018) pp 29 – 37.

CHAPITRE 1

Notions de base

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions concernant les espaces fonctionnels et les espaces de Sobolev et certains résultats sur les inégalités. Aussi, nous donnons brièvement, les définitions et les notations de quelques produits de convolution et quelques inégalités intégrales qui nous seront utiles pour la suite de notre travail.

Dans ce qui suit, on désignera par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

1.1 Espaces de Sobolev

Espaces de Lebegue $\mathbf{L}^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme suit :*

$$\left.\begin{array}{c} L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{mesurables telles que} \\ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty,\ \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \text{et} \quad \sup_{x\in\Omega} ess \ |f(x)| < +\infty,\ \text{si} \ \ p = +\infty \end{array}\right\}.$$

Les espaces $L^p(\Omega)$, munis des normes suivantes

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{pour } 1 \leq p < +\infty,$$

et

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \ |f(x)| .$$

Remarque 1.1.1 *Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

En effet la norme $\|.\|_{L^2(\Omega)}$ émane du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx,$$

et ainsi on a

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} .$$

Théorème 1.1.1 *Pour tout $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, on a $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

Espaces de Sobolev $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.2 *Etant donné $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, nous désignerons par $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev*

$$\begin{array}{c}\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) \diagup \forall\alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha| \leq m, \ \partial^{\alpha} f \in L^p(\Omega) \\ \left. où \ \ \partial^{\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad et \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n \right\} .\end{array}$$

qui muni de la norme

$$\|f\|^p_{\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \| \ \partial^{\alpha} f\|^p_{L^p(\Omega)} .$$

Remarque 1.1.2 *Pour $p = 2$, l'espace de Sobolev $\mathbf{W}^{m,2}(\Omega)$ devient un espace de Hilbert que l'on note H^m.*

Définition 1.1.3 *Soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable*

On introduit sur $H^m(\Omega)$ le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \partial^{\alpha} f, \ \partial^{\alpha} g\rangle ,$$

et la norme associée

$$\|f\|_{H^m} = \sqrt{\langle f,\ f\rangle_m}.$$

Définition 1.1.4 *On définit l'éspace $H_0^1(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur le bord de Ω autrement dit :*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)/u = 0 \ sur\ \partial\Omega\}.$$

Théorème 1.1.2 ***(Lax-Milgram)*** *Soit $\alpha(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors, pour tout $\varphi \in H$ il existe u tel que :*

$$\alpha(u,v) = \langle\varphi, v\rangle,\ \forall v \in H.$$

Théorème 1.1.3 *De plus, si α est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété.*

$$u \in H \ \ et \tfrac{1}{2}\alpha(u,v) - \langle\varphi, v\rangle = \min\left\{\tfrac{1}{2}\alpha(u,v) - \langle\varphi, v\rangle\right\},\ \forall v \in H.$$

1.2 Quelques inégalités

Lemme 1.2.1 ***(Inégalité de Hölder)*** *Soit p et q deux nombres réels conjugués c'est à dire : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tous $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, on a $f.g \in L^1(\Omega)$. En particulier, on a*

$a)$ Si $p, q \in\ ]1, +\infty[$

$$\textstyle\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$b)$ Si $p = 1$, $q = +\infty$

$$\textstyle\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|\,dx\right) \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Remarque 1.2.1 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dans le cas $p = 2$, $q = 2$.*

Lemme 1.2.2 ***(Inégalité de Young)*** *Soit p et q deux nombres réels conjugués dans $]1, +\infty[$. Alors, pour tout α et $\beta \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\alpha\beta \leq \tfrac{1}{p}\alpha^p + \tfrac{1}{q}\beta^q.$$

En particulier pour $p = q = 2$, on a

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \tfrac{1}{\varepsilon}\beta^2, \ \forall\varepsilon > 0.$$

Lemme 1.2.3 ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Il existe une constante $c > 0$ vérifiant*

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq c \ \ \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$.

Notons qu'a partir de cette inégalité, on montre que $\|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$, et par conséquent $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f(x).\nabla g(x)dx.$$

Aussi, on donne l'inégalité de Poincaré habituelle dans $L^2(\Omega)$ à partir du lemme suivant

Lemme 1.2.4 *Soit $f \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante C positive vérifiant*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \ \ \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.3 Produit de convolution

Définition 1.3.1 ***(Produit de convolution)*** *Le produit de convolution de deux fonctions réelles, $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$, h qui se note généralement $h = (f * g)$ et qui est définie par :*

$$(f * g)(x) = \int_0^t f(x-t)g(t)dt = \int_0^t f(t)g(x-t)dt,\ \forall x \in [0, L].$$

Remarque 1.3.1 *Si $f \in L^1(\Omega)$, $g \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on a $(f * g) \in L^p(\Omega)$. tel que $\Omega = [0, L]$ et on montre que*

$$\|f * g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Remarque 1.3.2 *Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes. On définit les opérateurs binaires $\Diamond$ et o respectivement par*

$$(f \Diamond g)(t) = \int_0^t |f(t-s)| \left|(g(t) - g(s))\right| ds,$$

et

$$(fog)(x) = \int_0^t |f(t-s)| \left|(g(t) - g(s))\right|^2 ds.$$

Proposition 1.3.1 *Soient $f \in L^1(0, L)$ et $g \in C(0, L)$. Alors on a*

$$[(f \Diamond g)(t)]^2 \leq \int_0^t |f(s)| ds\ \ (fog)(t),\ \ t \geq 0.$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
[(f \Diamond g)(t)]^2 &= \left[\int_0^t |f(t-s)| \left|(g(t) - g(s))\right| ds\right]^2 \\
&= \left[\int_0^t \sqrt{|f(t-s)|}\sqrt{|f(t-s)|} \left|(g(t) - g(s))\right| ds\right]^2 \\
&\leq \left[\sqrt{\left(\int_0^t |f(t-s)| ds\right)}\sqrt{\left(\int_0^t |f(t-s)| \left|(g(t) - g(s))\right|^2 ds\right)}\right]^2,\ \ t \geq 0,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Lemme 1.3.1 *Soient g et φ deux fonctions de $C^1[0,L]$, alors on a*

$$(g*\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2}g(t)\left|\varphi(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{dt}o\varphi\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(go\varphi - \left(\int_\Omega g(s)ds\right)\left|\varphi(t)\right|^2\right).$$

cette relaltion est un résultat immédiat de la dérivée du terme $(go\varphi)$.

1.4 Inégalités intégrales

On rappelle ici quelques inégalités intégrales connues et largement utilisées dans les théories de la stabilités des systèmes d'évolutions dissipatifs.

Lemme 1.4.1 *Soient $E:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue décroissante et, $\phi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante de classe $C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que :*

$$\phi(0) = 0 \text{ et} \lim_{t\to+\infty}\phi(t) = +\infty.$$

Supposons que : $\exists p \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int_0^\infty \phi'(t)E^{p+1}dt \leq \frac{1}{d}E^p(0)E(s),\ \forall s > 0.$$

Alors

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0)e^{1-d\phi(t)},\ \forall t > 0 \text{ si } p = 0 \\ E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+p}{1+pd\phi(t)}\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall t > 0 \text{ si } p > 0, \end{cases}$$

dans le cas particulier où $\phi(t) = t$, nous déduisons les inégalités suivantes

$$\textbf{a)}\ E(t) \leq E(0)e^{1-dt},\ \forall t > 0 \text{ si } p = 0$$
$$\textbf{b)}\ E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+p}{1+pdt}\right)^{\frac{1}{p}},\ \forall t > 0 \text{ si } p > 0,$$

qui sont appelées respectivement, estimation exponentielle et estimation polynomiale.

CHAPITRE 2 Stabilité exponentielle d'un système non linéaire

2.1 Position du problème

Puisque les poutres ont joué un rôle important dans de nombreux domaines de l'ingénierie, de plus en plus les chercheurs ont pris plaisir à étudier le comportement asymptotique des poutres. Il y a eu plusieurs approches classiques employées afin de résoudre le problème des vibrations pour les équations différentielles non linéaires. Dans la majorité de ces travaux, la déformation axiale a été négligée et la force axiale moyenne est supposée constante sur la longueur de l'élément de la poutre. Cependant, pour les équations différentielles non linéaires l'analyse à démontrer que le déplacement axial ne peut être négligé. D'où la nécessité au cours de ces dernières années à un dévelopement de modèles plus efficaces pour l'interaction des structures des poutres non linéaires avec des milieux fluides.

Notre intérêt principal dans ce travail, concerne la stabilité du système (1) avec une conduction thermique modélissée par la loi de Cattaneo et un amortissement structurel, en utilisant la méthode des multiplicateurs.

$$
\begin{cases}
w_{tt}+\gamma_1 w_t-d_1\left[\left(u_x+\frac{1}{2}\left(w_x\right)^2\right)w_x\right]_x+d_2 w_{xxxx}=0,\\
u_{tt}-d_1\left[\left(u_x+\frac{1}{2}\left(w_x\right)^2\right)\right]_x+\delta\theta_x=0,\\
\theta_t+q_x+\delta u_{tx}=0,\\
q_t+\gamma_2 q+\theta_x=0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

dans $\Omega\times(0,\infty)$, où $\Omega=(0,L)$ et $d_1,\ d_2,\ \delta,\ \gamma_1{,}\gamma_2$ sont des constantes positives. Nous complétons le système (1) par les conditions aux limites suivantes

$$
\begin{cases}
u\left(0,t\right)=u\left(L,t\right)=w\left(0,t\right)=w\left(L,t\right)=0, & t\in\left[0,\ \infty\right),\\
w_x\left(0,t\right)=w_x\left(L,t\right)=\theta_x\left(0,t\right)=\theta_x\left(L,t\right)=0, & t\in\left[0,\ \infty\right),
\end{cases}
\tag{2}
$$

aussi nous considérons les conditions initiales suivantes

$$
\begin{cases}
u\left(.,0\right)=u_0,\ u_t\left(.,0\right)=u_1,\ w\left(.,0\right)=w_0, & x\in\left(0,\ L\right),\\
w_t\left(.,0\right)=w_1,\ \ \theta\left(.,0\right)=\theta_0,\ \theta_t\left(.,0\right)=\theta_1, & x\in\left(0,\ L\right).
\end{cases}
\tag{3}
$$

Ici, les quantités $u(x,t),w(x,t),\theta(x,t)$ et $q(x,t)$ représentent respectivement le déplacement longitudinal, le déplacement transversal, la différence de température et le flux thermique.

Concernant les systèmes thermoélastiques non-linéaires unidimensionnels de type Timoshenko avec la conduction thermique modélisée par la loi de Cattaneo, Messaoudi [21] a étudié le système suivant

$$
\begin{cases}
\rho_1\varphi_{tt}-\sigma\left(\varphi_x+\psi\right)_x+\mu\varphi_t=0,\\
\rho_2\psi_{tt}-b\psi_{xx}+\sigma\left(\varphi_x+\psi\right)+\beta\theta_x=0,\\
\rho_3\theta_t+\gamma q_x+\delta\psi_{tx}=0,\\
\tau_0 q_t+q+\kappa\theta_x=0,
\end{cases}
\tag{4}
$$

dans $(0,L)\times(0,\infty)$, où φ est le vecteur de déplacement, ψ est l'angle de rotation du filament, θ est la différence de température, q est le vecteur du flux thermique, $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,$

b, k, γ, δ, κ, μ et τ_0 sont des constantes positives. La fonction non linéaire σ satisfait

$$\sigma_{\varphi_x}(0,0) = \sigma_\psi(0,0) = k \quad \text{et} \quad \sigma_{\varphi_x\varphi_x}(0,0) = \sigma_{\varphi_x\psi}(0,0) = \sigma_{\psi\psi} = 0.$$

Dans le système(4), l'équation de la chaleur est régie par la loi de Fourier, qui stipule que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température. De plus, nous rappelons que le modèle utilisant la loi de Fourier

$$q + \gamma\theta_x = 0 \ ,$$

où q est le flux thermique et γ est le coefficient de conductivité thermique ; conduit au paradoxe physique des vitesses infinies de propagation de la chaleur. En d'autres termes, toute perturbation thermique à un moment donné sera transférée instantanément aux autres parties du corps. Cependant, des expériences ont montré que la conduction de certains cristaux diélectriques à basses températures se propageait à une vitesse finie.

Pour surmonter ce paradoxe physique tout en gardant l'essentiel d'un processus de conduction thermique, de nombreuses théories ont émergé par la suite. L'une d'entre elles est l'apparition de second sound observé expérimentalement dans des matériaux à très basse température. Le second sound survient lorsque la chaleur est transportée par un processus de propagation des ondes au lieu de la diffusion habituelle. Cette théorie suggère de remplacer la loi de Fourier par une loi de conduction thermique modifiée appelée loi de Cattaneo

$$\tau q_t + q + \gamma\theta_x = 0 \ ,$$

où le paramètre $\tau > 0$ représente le temps de relaxation décrivant le retard dans la réponse du flux thermique à un gradient de température. Le système de chaleur obtenu est de type hyperbolique et donc, automatiquement, élimine le paradoxe des vitesses infinies de propagation de la chaleur.

Plusieurs résultats de la stabilité exponentielle pour le cas non linéaire ont été établis en présence de l'amortissement frictionnel $\mu\varphi_t$ (voir Fern'andez Sare et Rivera [23]).

2.2 Existence et Unicité

Dans cette section, nous prouvons l'existence, l'unicité et la régularité de la résolution du problème (1)-(3) en utilisant la théorie du semigroupe. Mais d'abord, à partir de la quatrième équation du système et des conditions aux limites, nous vérifions que

$$\tfrac{d}{dt}\int_0^L q(x,t)dx+\gamma_2\int_0^L q(x,t)dx=0,$$

Donc, si on met

$$\bar{q}(x,t)=q(x,t)-\tfrac{1}{L}\left(\int_0^L q_0(x)dx\right)\exp\left(-\gamma_2 t\right),$$

puis, par simple substitution, nous vérifions que $(w,u,\theta,\bar{q})$satisfait (1) et plus important, nous avons

$$\int_0^L \bar{q}(x,t)=0,\quad \forall t\geq 0.$$

qui a justifié l'utilisation de l'inégalité de poincaré pour q. A partir de maintenant, nous travaillons avec $\bar{q}$ mais écrivons q pour plus de simplicité.

Maintenant, nous introduisons deux nouvelles variables dépendantes $\varphi=w_t$, et $\psi=u_t$.

Ensuite, le système (1)-(3) prend la forme d'un problème d'évolution abstraite de premier ordre

$$\left\{\begin{array}{l} U_t=\mathcal{A}U+\mathcal{F}\left(U\right),\qquad t>0,\\ U\left(0\right)=\left(w_0,w_1,u_0,u_1,\theta_0,q_0\right), \end{array}\right. \tag{5}$$

où $U=\left(w,w_t,u,u_t,\theta,q\right)^T$ et l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2\partial_x^4 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 u_{xx}^2 & 0 & -\delta\partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta\partial_x & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x & -\gamma I \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{F}(U)=\begin{pmatrix} 0 \\ d_1\left[\left(u_x+\frac{1}{2}(w_x)^2\right)w_x\right]_x \\ 0 \\ \frac{d_1}{2}(w_x)_x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U_0=\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $\mathcal{F}(U)$ est un opérateur continu et uniforme de Lipschitz.

Nous introduisons également

$$L_*^2(0,L)=\left\{v\in L^2(0,L):\int_0^L vdx=0\right\},\quad H_*^1(0,L)=H^1(0,L)\cap L_*^2(0,L),$$

et nous définissons l'espace d'Hilbert par

$$\aleph\ :=\left\{H_0^2(0,L)\times L^2(0,L)\times H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)\times L^2(0,L)\times L_*^2(0,L)\right\}\ ,$$

équipé du produit scalaire suivant

$$\begin{aligned}\left\langle U,\widetilde{U}\right\rangle = &\int_0^L \varphi\widetilde{\varphi}dx+\int_0^L \psi\widetilde{\psi}dx+\int_0^L \theta\widetilde{\theta}dx+\int_0^L q\widetilde{q}dx+d_2\int_0^L w_{xx}\widetilde{w}_{xx}dx \\ &+d_1\int_0^L u_x\widetilde{u}_xdx\end{aligned} \tag{6}$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est donné par

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = \ & \{U \in \aleph / w \in H^4(0,L) \cap H_0^2(0,L),\ u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L), \\ & \theta \in H_0^1(0,L), q \in H_*^1(0,L), \varphi \in H_0^2(0,L), \psi \in H_0^1(0,L)\} \end{aligned}$$

Clairement, $D(\mathcal{A})$ dense dans $\aleph$. Donc, du produit scalaire, nous avons

$$\langle AU, U\rangle = -\gamma_1 \int_0^L \varphi^2 dx - \gamma_2 \int_0^L q^2 dx \leq 0. \tag{7}$$

Théorème 2.2.1 *Soit $(w, \varphi, u, \psi, \theta, q)^T \in \aleph$. Pour toute donnée initiale $U_0 \in \aleph$, il existe une solution unique $U \in C([0,\infty), \aleph)$ pour le problème (5) . De plus, si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $U \in C([0,\infty), D(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty), \aleph)$.*

Preuve. Nous montrons que l'opérateur $\mathcal{A}$ génère un C_0-semigroupe dans $\aleph$. Dans cette étape, nous démontrons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif. Soit $U = (w, \varphi, u, \psi, \theta, q)^T$.

Alors,

$$AU = \begin{pmatrix} \varphi \\ -\gamma_1 \varphi - d_2 w_{xxxx} \\ \psi \\ d_1 u_{xx} - \delta \theta_x \\ -q_x - \delta \psi_x \\ -\gamma_2 q - \theta_x \end{pmatrix}, \tag{8}$$

et il est facile de vérifier que, pour tout $U \in D(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U\rangle = \ & -\gamma_1 \int_0^L \varphi^2 dx - d_2 \int_0^L \varphi w_{xxxx} dx + d_1 \int_0^L \psi u_{xx} dx - \delta \int_0^L \psi \theta_x dx \\ & - \int_0^L q\theta_x dx - \delta \int_0^L \theta \psi_x dx - \gamma_2 \int_0^L q^2 dx - \int_0^L q\theta_x dx + d_2 \int_0^L w_{xx} \varphi_{xx} dx \\ & + d_1 \int_0^L \psi_x u_x dx, \end{aligned}$$

par intégration par partie, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle = \;& -\gamma_1 \int_0^L \varphi^2 dx - \delta \int_0^L \psi\theta_x dx - \int_0^L q_x\theta dx \\ & -\delta \int_0^L \theta\psi_x dx - \gamma_2 \int_0^L q^2 dx - \int_0^L q\theta_x dx \\ & -\gamma_1 \int_0^L \varphi^2 dx - \gamma_2 \int_0^L q^2 dx \leq 0,\end{aligned}$$

Ensuite, nous prouvons que l'opérateur $I - \mathcal{A}$ est surjectif.

Soit $F = (f^1,\ f^2,\ f^3,\ f^4,\ f^5,\ f^6)^T \in \aleph$ nous prouvons qu'il existe $U = (w, \varphi, u, \psi, \theta, q)^T \in D(\mathcal{A})$ satisfaisant

$$(I - \mathcal{A})\, U = F\ . \tag{9}$$

L'équation (9) est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} w - \varphi = f^1 \in H_0^2(0, L), \\ \varphi + \gamma_1\varphi + d_2 w_{xxxx} = f^2 \in L^2(0, L), \\ u - \psi = f^3 \in H_0^1(0, L), \\ \psi - d_1 u_{xx} + \delta\theta_x = f^4 \in L^2(0, L), \\ \theta + q_x + \delta\psi_x = f^5 \in L^2(0, L), \\ q + \gamma_2 q + \theta_x = f^6 \in L_*^2(0, L). \end{cases} \tag{10}$$

Supposons que w, u et q sont donnés avec la régularité appropriée. Ensuite, à partir de $(10)_1, (10)_3, (10)_6$, et $(10)_5$, nous obtenons

$$\begin{cases} \varphi = w - f^1 \in H_0^2(0, L), \\ \psi = u - f^3 \in H_0^1(0, L), \\ \theta_x = f^6 - (1 + \gamma_2)\, q \in L_*^2(0, L), \\ q_x - (1 + \gamma_2) \int_0^x q dx = f^5 - \int_0^x f^6 dx + \delta f_x^3 - \delta u_x \in L^2(0, L). \end{cases} \tag{11}$$

De $(11)_3$, on définit

$$\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0,$$

ce qui implique que $\theta \in H_0^1(0, L)$.

Maintenant, par la régularité du problème elliptique, on peut conclure de $(11)_4$ que $q \in H^1_*(0, L)$.

En substituant φ, ψ, θ et q donnés par $(10)_1, (10)_3, (10)_5$, et $(10)_6$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} (1+\gamma_1) w + d_2 w_{xxxx} = g^1 \in L^2(0, L), \\ -d_1 u_{xx} + u + \delta\theta_x = g^2 \in L^2(0, L), \end{cases} \tag{12}$$

où

$$g^1 = f^2 + f^1 (1+\gamma_1),$$
$$g^2 = f^3 + f^4.$$

Maintenant, nous définissons la forme bilinéaire B sur l'espace de Hilbert $V = H^2_0(0, L) \times H^1_0(0, L)$ par

$$\begin{aligned} B((w,u),(\tilde{w},\tilde{u})) &= \textstyle\int_0^L [(1+\gamma_1) w\tilde{w} + d_2 w_{xx}\tilde{w}_{xx} + u\tilde{u} + \delta\theta_x\tilde{u} \\ &\quad + d_1 u_x \tilde{u}_x]\, dx. \end{aligned}$$

et la forme linéaire F par

$$F(\tilde{w}, \tilde{u}) = \textstyle\int_0^L (g^1\tilde{w} + g^2\tilde{u})\, dx,$$

Il est facile de vérifier que B est continu et coercitif, et F est continu. Ainsi, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, nous obtenons l'existence et l'unicité de $(w, u, \theta) \in V$, ce qui satisfait

$$B((w,u),(\tilde{w},\tilde{u})) = F(\tilde{w},\tilde{u}), \quad \forall (\tilde{w},\tilde{u}) \in V. \tag{13}$$

Maintenant, en prenant $\tilde{U} = (\tilde{w}, 0)$ dans (13), nous obtenons

$$\textstyle\int_0^L [(1+\gamma_1) w\tilde{w} + d_2 w_{xx}\tilde{w}_{xx}]\, dx = \int_0^L g^1 \tilde{w} dx, \quad \forall \tilde{w} \in H^1_0(0, L). \tag{14}$$

En utilisant deux fois l'intégration par partie dans (14), on obtient

$$(1+\gamma_1) w + d_2 w_{xxxx} = g^1, \quad \forall \tilde{w} \in L^2(0, L). \tag{15}$$

Par conséquent, nous obtenons $w \in H_0^4(0,L) \cap H_0^2(0,L)$.

En prenant $\tilde{U} = (0, \tilde{u})$, puis (13) se conduit à

$$\int_0^L [d_1 u_x \tilde{u}_x + u\tilde{u} + \delta\theta_x \tilde{u}]\, dx = \int_0^L g^2 \tilde{u} dx, \quad \forall \tilde{u} \in H_0^1(0,L),$$

c'est-à-dire

$$d_1 u_{xx} = +u + \delta\theta_x - g^2, \quad \forall \tilde{u} \in L^2(0,L).$$

et par la régularité du problème elliptique, on peut conclure que $w \in H_0^4(0,L) \cap H_0^2(0,L)$.

Par conséquent, il existe un unique $U \in D(\mathcal{A})$ tel que (9) soit satisfait. Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal. D'où nous concluons que $\mathcal{A}$ est un opérateur monotone maximal. ■

2.3 Décroissance exponentielle du système

Dans cette section, nous établissons notre résultat sur la décroissance exponentielle pour le système non linéaire(1)-(3). Nous commençons par introduire quelques fonctionnelles et prouver des résultats préliminaires sous forme de lemmes.

Lemme 2.3.1 *Soit* $(w,\ u,\ \theta,\ q)$ *solution du système* (1)-(3). *Alors la fonctionnelle d'énergie* E, *définie par*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[w_t^2 + u_t^2 + \theta^2 + q^2 + d_2 w_{xx}^2 + d_1 u_x + \frac{1}{2}\left((w_x)^2\right)^2 \right] dx,$$

satisfait l'identité

$$E'(t) = -\gamma_1 \int_0^L w_t^2 dx - \gamma_2 \int_0^L q^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \tag{16}$$

Preuve. La multiplication de la première équation du système (1) par u_t, la seconde par w_t, la troisième par θ et la quatrième par q, puis utilisant l'intégration par partie sur $(0, L)$ ainsi que les conditions aux limites, nous obtenons la relation (16). ■

Nous remarquons d'après la relation (16) que le système est dissipatif ; or cette égalité n'implique pas nécessairement la décroissance exponentielle du système. A cet effet, nous devons construire une autre fonctionnelle, dite fonctionnelle de Lyapunov, notée F équivalente à la fonctionnelle E au sens : il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_2 E(t) \leq F(t) \leq \beta_1 E(t), \ \forall t \geq 0, \tag{17}$$

et on a l'inégalité suivante

$$\tfrac{d}{dt} F(t) \leq -CE(t), \ \forall t \geq 0, \ \forall t \geq t_0,$$

avec $C > 0$ et t_0 un instant fixe.

Lemme 2.3.2 *Soit* $(w,\, u,\, \theta,\, q)$ *solution du système* (1)-(3)*. Alors la fonctionnelle* I_1*, définie par*

$$I_1(t) = \int_0^L \left(u_t u + \tfrac{1}{2} w_t w + \tfrac{d_1}{4} w^2 \right) dx, \ t \geq 0, \tag{18}$$

satisfait pour $\varepsilon_1 > 0$ *l'estimation*

$$\begin{aligned} I_1'(t) \leq \quad & -d_1 \int_0^L \left(u_x + \tfrac{1}{2} \left(w_x \right)^2 \right)^2 dx - \tfrac{d_2}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & + \int_0^L u_t^2 dx + \tfrac{1}{2} \int_0^L w_t^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^L u_x^2 dx + \tfrac{\delta^2}{4\varepsilon_1} \int_0^L \theta^2 dx, \end{aligned} \tag{19}$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve. En dérivant la fonctionelle I_1 et en utilisant la première et la deuxième équation du système (1), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \int_0^L u_t^2 dx + \int_0^L \left[d_1 \left[u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right]_x - \delta\theta_x\right] u dx + \tfrac{\gamma_1}{2}\int_0^L w_t w dx \\ &+\tfrac{1}{2}\int_0^L \left[-\gamma_1 w_t + d_1\left[\left(u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right]_x - d_2 w_{xxxx}\right] w dx + \int_0^L w_t^2 dx \\ &= \int_0^L u_t^2 dx - d_1 \int_0^L \left(u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right) u_x dx + \delta \int_0^L \theta u_x dx + \tfrac{1}{2}\int_0^L w_t^2 dx \\ &-\tfrac{d_1}{2}\int_0^L \left(u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x^2 dx - \tfrac{d_2}{2}\int_0^L w_{xx}^2 dx. \end{aligned}$$

Une application de l'inégalité de Young donne(19). ■

Lemme 2.3.3 *Soit* $(w,\, u,\, \theta,\, q)$ *solution du système* (1)-(3)*. Alors la fonctionnelle* I_2*, définie par*

$$I_2(t) = \int_0^L \left(\int_0^x \theta(t,y)\, dy\right) u_t dx,\ t \geq 0, \tag{20}$$

satisfait pour $\varepsilon_2 > 0$ *l'estimation*

$$\begin{aligned} I_2'(t) \leq\ & -\tfrac{\delta}{2}\int_0^L u_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \left(u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx \\ & +\tfrac{1}{2\delta}\int_0^L q^2 dx + C(\varepsilon_2)\int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_2 u_x^2(L),\ t \geq 0, \end{aligned} \tag{21}$$

où

$$C(\varepsilon_2) = \left[\tfrac{d_1^2}{4\varepsilon_2}(1+L) + \delta\right].$$

Preuve. La dérivation de (20) donne

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= \int_0^L \left(\int_0^x [-q_x - \delta u_{tx}]\, dy\right) u_t dx \\ &+ \int_0^L \left(\int_0^x \theta(t,y)\, dy\right)\left[d_1\left[u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right]_x - \delta\theta_x\right] dx \\ &= -\delta\int_0^L u_t^2 dx - \int_\Omega q u_t dx + \delta\int_\Omega \theta^2 dx \\ &-d_1\int_0^L \left(u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right)\theta dx + d_1\left(\int_0^L \theta dx\right) u_x(L). \end{aligned}$$

En rappelant l'inégalité de Young, nous obtenons,

$$-\int_0^L q u_t dx \leq \tfrac{\delta}{2}\int_0^L u_t^2 dx + \tfrac{1}{2\delta}\int_0^L q^2 dx\ ,$$

de même, pour tout $\varepsilon_2 > 0$,

$$d_1 \left(\int_0^L \theta dx \right) u_x (L) \leq \varepsilon_2 u_x^2 (L) + \frac{d_1^2 L}{4\varepsilon_2} \int_0^L \theta^2 dx \ ,$$

$$-d_1 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right) \theta dx \leq \varepsilon_2 \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2} (w_x)^2 \right)^2 dx + \frac{d_1^2}{4\varepsilon_2} \int_0^L \theta^2 dx.$$

La relation (21) est obtenue en utilisant les équations ci-dessus. ■

Lemme 2.3.4 *Soit* (w, u, θ, q) *solution du système* (1)-(3)*. Alors la fonctionnelle* I_3*, définie par*

$$I_3 (t) = \int_0^L \left(\int_0^x q (t, y) dy \right) \theta dx, \ t \geq 0 \ , \tag{22}$$

satisfait pour $\varepsilon_3 > 0$ *l'estimation*

$$I_3'(t) \leq - \int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L u_x^2 dx + C_1 (\varepsilon_3) \int_0^L q^2 dx, \ \ t \geq 0 \ , \tag{23}$$

où

$$C_1(\varepsilon_2) = \left(1 + \frac{\delta^2}{4\varepsilon_3} + \frac{\gamma_2}{2} (L+1) \right).$$

Preuve. La dérivation de (22) donne

$$\begin{aligned} I_3'(t) \ &= \int_0^L \left(\int_0^x [-\gamma_2 q - \theta_x] dy \right) \theta dx + \int_0^L \left(\int_0^x q (t, y) dy \right) [-q_x - \delta u_{tx}] dx \\ &-\gamma_2 \int_0^L \left(\int_0^x q (t, y) dy \right) q dx - \int_0^L \theta^2 dx + \int_0^L q^2 dx + \delta \int_0^L q u dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'inégalité de Young, on obtient

$$I_3'(t) \leq - \int_0^L \theta^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L u_x^2 dx + C_1 (\varepsilon_3) \int_0^L q^2 dx, \ \ t \geq 0 \ ,$$

d'où le résultat désiré. ■

Afin d'éliminer les termes de frontière apparaissant dans (23), nous exploitons la fonction

$$m(x) = 2 - \frac{4}{L} x, \quad -m(0) = m(L) = -2.$$

Maintenant, définissons la fonctionnelle suivante

$$I_4(t) = \int_0^L u_t m u_x dx + \int_0^L w_t m w_x dx - \int_0^L (\theta + \delta u_x) m q dx, \quad t \geq 0. \tag{24}$$

Lemme 2.3.5 *La fonctionnelle $I_4(t)$ ainsi que la solution du système* (1)-(3), *satisfait l'estimation*

$$\begin{array}{ll} I_4'(t) \leq & -d_1 \left[u_x^2(L) + u_x^2(0)\right] + \left(\frac{2d_1}{L} + \varepsilon_2\right) \int_0^L u_x^2 dx \\ & + \frac{2}{L} \int_0^L u_t^2 dx + \left(\frac{2}{L} + \gamma_1\right) \int_0^L w_t^2 dx + \gamma_1 \int_0^L w_x^2 dx \\ & + \frac{8d_1}{L} \int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)\right)^2 dx + \frac{6d_2}{L} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & + \left(\gamma_2 + \frac{\gamma_2^2 \delta^2}{4\varepsilon_2}\right) \int_0^L q^2 dx + \gamma_2 \int_0^L \theta^2 dx, \quad t \geq 0. \end{array} \tag{25}$$

Preuve. Dérivons (24) en utilisant la deuxième equation de (1) et l'intégration par partie sur $(0, L)$, conduisent à

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dt} \int_\Omega u_t m u_x dx & = d_1 \int_0^L u_{xx} m u_x dx + d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\ & -\delta \int_0^L \theta_x m u_x dx + \int_0^L u_t m u_{tx} dx \\ & = \frac{d_1}{2} \left[m u_x^2\right]_{x=0}^{x=L} - \frac{d_1}{2} \int_0^L m_x u_x^2 dx + d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\ & -\delta \int_0^L \theta_x m u_x dx - \frac{1}{2} \int_0^L m_x u_t^2 dx \\ & = -d_1 \left[u_x^2(L) + u_x^2(0)\right] + \frac{2d_1}{L} \int_0^L u_x^2 dx + d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx \\ & -\delta \int_0^L \theta_x m u_x dx + \frac{2}{L} \int_0^L u_t^2 dx. \end{array} \tag{26}$$

De même, en utilisant la première équation de (1), nous avons

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t m w_x dx &= -\gamma_1 \int_0^L w_t m w_x dx + d_1 \int_0^L \left(\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right)_x m w_x dx \\
&-d_2 \int_0^L w_{xxxx} m w_x dx + \int_0^L w_t m w_{tx} dx, \\
&= -\gamma_1 \int_0^L w_t m w_x dx - d_1 \int_0^L \left(\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right) m_x w_x dx \\
&-d_1 \int_0^L \left(\left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x\right) m w_{xx} dx + d_2 \int_0^L w_{xxx} m_x w_x dx \\
&+d_2 \int_0^L w_{xxx} m w_{xx} dx - \frac{1}{2}\int_0^L m_x w_t^2 dx, \\
&= -\gamma_1 \int_0^L w_t m w_x dx + \frac{4d_1}{L}\int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x^2 dx \\
&-d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \frac{d_1}{2}\int_0^L w_x^2 w_x m w_{xx} dx \\
&-\frac{4d_2}{L}\int_0^L w_{xxx} w_x dx + d_2 \int_0^L w_{xxx} m w_{xx} dx + \frac{2}{L}\int_0^L w_t^2 dx \\
&= -\gamma_1 \int_0^L w_t m w_x dx + \frac{4d_1}{L}\int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x^2 dx \\
&-d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \frac{d_1}{4}\int_0^L w_x^2 q \left((w_x)^2\right)_x dx + \frac{4d_2}{L}\int_0^L w_{xx}^2 dx \\
&-d_2 \left[w_{xx}^2(L) + w_{xx}^2(0)\right] + \frac{2d_2}{L}\int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{2}{L}\int_0^L w_t^2 dx, \\
&\leq -\gamma_1 \int_0^L w_t m w_x dx + \frac{4d_1}{L}\int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right) w_x^2 dx \\
&-d_1 \int_0^L w_x w_{xx} m u_x dx - \frac{d_1}{2L}\int_0^L w_x^2 dx + \frac{6d_2}{L}\int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{2}{L}\int_0^L w_t^2 dx,
\end{aligned}
$$

de plus,

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\int_0^L (\theta + \delta u_x) m q dx &= -\int_0^L (\theta_t + \delta u_{tx}) m q dx - \int_0^L (\theta + \delta u_x) m q_t dx \\
&= \int_0^L q_x m q dx - \int_0^L (\theta + \delta u_x) m (-\gamma_2 q - \theta_x) dx \\
&= \int_0^L q_x m q dx + \gamma_2 \int_0^L \theta m q dx + \int_0^L \theta m \theta_x dx \\
&+\gamma_2 \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\
&= +\frac{1}{2}\int_0^L m_x q^2 dx + \gamma_2 \int_0^L \theta m q dx + \frac{1}{2}\int_0^L m_x \theta^2 dx \\
&+\gamma_2 \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\
&= -\frac{2}{L}\int_0^L q^2 dx + \gamma_2 \int_0^L \theta m q dx - \frac{2}{L}\int_0^L \theta^2 dx \\
&+\gamma_2 \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx \\
&\leq \gamma_2 \int_0^L \theta m q dx + \gamma_2 \delta \int_0^L q m u_x dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx,
\end{aligned}
$$

en utilisant l'inégalité de Young, nous trouvons

$$\begin{array}{rl}\frac{d}{dt}\int_0^L w_t q w_x dx \leq & \left(\frac{2}{L}+\gamma_1\right)\int_0^L w_t^2 dx + \gamma_1 \int_0^L w_x^2 dx \\ & +\frac{8d_1}{L}\int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x)^2\right)^2 dx - d_1 \int_0^L w_x w_{xx} q u_x dx + \frac{6d_2}{L}\int_0^L w_{xx}^2 dx,\end{array} \tag{27}$$

et

$$\begin{array}{rl}-\frac{d}{dt}\int_0^L (\theta+\delta u_x)\, mq dx \leq & \int_0^L u_x^2 dx + \left(\gamma_2 + \frac{\gamma_2^2\delta^2}{4}\right)\int_0^L q^2 dx \\ & +\gamma_2 \int_0^L \theta^2 dx + \delta \int_0^L \theta_x m u_x dx.\end{array} \tag{28}$$

En sommant (26), (27) et (28), nous obtenons (25). ■

Maintenant, nous somme en mesure de prouver le résultat principal de ce travail. D'abord, nous introduisons la fonctionnelle de Lyapunov

$$F(t) = NE(t) + I_1 + N_1 I_2 + N_2 I_3 + \varepsilon_2 I_4. \tag{29}$$

Théorème 2.3.1 *Soit* $(u,\ w,\ \theta,\ q)$ *une solution de* (1)-(3) *pour les données initiales dans* $\aleph$. *Alors, l'energie* $E(t)$ *décroit exponentiellement, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives* C *et* d *indépendantes des données initiales de telle sorte que*

$$E(t) \leq CE(0)e^{-dt}, \quad \forall t \geq 0. \tag{30}$$

Preuve. En tenant compte $(16), (19), (21), (23), (25)$ et de la relation

$$\begin{array}{rl}\int_0^L u_x^2 dx & = \int_0^L \left(u_x^2 + \frac{1}{2}(w_x^2) - \frac{1}{2}(w_x^2)\right) dx \\ & \leq 2\int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x^2)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L w_x^2 dx \\ & \leq 2\int_0^L \left(u_x + \frac{1}{2}(w_x^2)\right)^2 dx + \frac{L}{4}\int_0^L w_{xx}^2 dx,\end{array}$$

pour$N_1 = \frac{\gamma_1}{\delta}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} F^{'}(t) \leq\ & -\left[N\gamma_1 - \tfrac{\gamma_1}{8} - \left(\tfrac{2}{L} + \gamma_1\right)\varepsilon_2\right]\int_0^L w_t^2 dx \\ & -\left[\tfrac{\delta N_1}{2} - \tfrac{\gamma_1}{4} - \tfrac{2\varepsilon_2}{L}\right]\int_0^L u_t^2 dx \\ & -\left[N_2 - \tfrac{\delta^2\gamma_1}{16\varepsilon_1} - N_1 C(\varepsilon_2) - \gamma_2\varepsilon_2\right]\int_0^L \theta^2 dx \\ & -\left[N\gamma_2 - \tfrac{\delta N_1}{2} - N_2 C_1(\varepsilon_3) - \left(\gamma_2 + \tfrac{\gamma_2^2\delta^2}{4\varepsilon_2}\right)\varepsilon_2\right]\int_0^L q^2 dx \\ & -\left[\tfrac{d_2}{2} - \tfrac{\gamma_1\varepsilon_1 L}{16} - \left(\tfrac{6d_2}{L} + \gamma_1 + \tfrac{L}{4}\left(\tfrac{2d_1}{L} + 1\right)\right)\varepsilon_2 - \tfrac{LN_2\varepsilon_3}{4}\right]\int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & -\left[d_1 - \tfrac{\gamma_1\varepsilon_1}{2} - \left(N_1 + 2\left(\tfrac{2d_1}{L} + 1\right) + \tfrac{8d_1}{L}\right)\varepsilon_2 - 2N_2\varepsilon_3\right]\int_0^L \left(u_x + \tfrac{1}{2}\left(w_x^2\right)\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{31}$$

A ce point, nous imposons les restrictions suivantes sur les coefficients. D'abord, nous choisissons

$$\varepsilon_2 < \min\begin{pmatrix} \frac{L\gamma_1}{16},\ \frac{d_2}{16}\left[\frac{6d_2}{L} + \gamma_1 + \frac{L}{4}\left(\frac{2d_1}{L} + 1\right)\right]^{-1} \\ \frac{d_1}{16}\left[N_1 + 2\left(\frac{2d_1}{L} + 1\right) + \frac{8d_1}{L}\right]^{-1} \end{pmatrix},$$

et, nous prenons ε_1 assez petit tel que

$$\varepsilon_1 < 16\gamma_1 \min\left(\tfrac{d_2}{L}, d_1\right) .$$

Ensuite, nous sélectionnons N_2 assez grand pour que

$$N_2 > \frac{\delta^2\gamma_1}{16\varepsilon_1} + \frac{\gamma_1}{\delta}C(\varepsilon_2) + \gamma_2\varepsilon_2 .$$

Enfin, nous choisissons N assez grand pour que

$$N > \max\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1}\left[\frac{\gamma_1}{8} + \left(\frac{2}{L} + \gamma_1\right)\varepsilon_2\right], \\ \gamma_2^{-1}\left[\frac{\delta N_1}{2} + N_2 C_1(\varepsilon_3) + \left(\gamma_2 + \frac{\gamma_2^2\delta^2}{4\varepsilon_2}\right)\varepsilon_2\right] \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, (31) prend la forme

$$\begin{aligned} F^{'}(t) & \leq -\eta\int_0^L \left[w_t^2 + u_t^2 + \theta^2 + q^2 + d_2 w_{xx}^2 + d_1\left(u_x + \tfrac{1}{2}(w_x)^2\right)^2\right]dx \\ & \leq -CE(t) \end{aligned} \tag{32}$$

pour certaines constantes spositives η, C.

En conbinant (32) et le coté droit de la relation (17), nous concluons que

$$F^{'}(t) \leq -dF(t),\ \forall t \geq 0\ , \tag{33}$$

pour une certaine constante d positive.

Ensuite, par une simple intégration de (33) nous obtenons

$$F(t) \leq F(0)e^{-dt},\ \forall t \geq 0\ \cdot \tag{34}$$

On utilise une deuxième fois l'équivalence de $E \sim F$, on obtient

$$E(t) \leq CE(0)e^{-dt}, \quad \forall t \geq 0.$$

D'où le résultat désiré. ■

CHAPITRE 3

Stabilité générale d'un système non linéaire de type Timoshenko avec effets viscoélastique et de frictions

3.1 Position du problème

De nombreuses structures dans plusieurs domaines de l'ingénierie sont formées par une seule ou un grand nombre de poutres. Il existe différents modèles pour ces poutres en fonction de leur nature et leur type de vibration ; le modèle complet de von Kármán est adapté aux déplacements transversaux ainsi qu'aux déplacements longitudinaux des corps élancés vibrants à grande déformation.

Dans [14, 16] Lagnese à considérè le système suivant de von Kármán

$$
\begin{aligned}
\rho A u_{tt} - \left[EA\left(u_x + \tfrac{1}{2}w_x^2\right)\right]_x = 0, \quad 0 < x < L, \quad t \geq 0, \\
\rho A w_{tt} - \left[EA\left(u_x + \tfrac{1}{2}w_x^2\right)w_x\right]_x + (EIw_{xx})_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t \geq 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

avec des conditions aux limites appropriées et des données initiales, où E est le module de Young, A est la section transversale du faisceau, L est la longueur du faisceau, ρA représente le poids par unité de longueur et EI est la rigidité du faisceau. Plus tard, de nombreux résultats liés au système (1) sur l'existence et la stabilité ont été obtenus en introduisant plusieurs contrôles dont la plupart sont des amortisseurs internes et / ou limitrophes. voir Benabdallah et Lasiecka[3], Favini et Horn [7], Lasiecka [17, 18], Horn et Lasiecka[9, 10], Lagnese [12, 13], Lagnese et Leugering [15], Puel et Tucsnak[29], Perla Menzala et Zuazua [28] et les références qui s'y trouvent.

Benabdallah et Teniou [4] ont étudié un autre type de dissipation qui se produit par des effets thermiques, ils ont prouvé la décroissance exponentielle du système en couplant le système avec deux équations de chaleur, une pour la composante longitudinale et une pour la composante transversale. Selon la théorie de Green et Naghdi, Djebabla et Tatar [5], ont étudié récemment le système unidimensionnel de von Kàrmàn en couplant le système avec une seule équation de la chaleur ; exactement ils ont considérè le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - D_1 \left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right)_x + \gamma\theta_{tx} = 0, & (0,L) \times (0,\ \infty), \\ w_{tt} + K_1 w_t - D_1 \left[\left(u_x + \frac{1}{2}w_x^2\right) w_x\right]_x + D_2 w_{xxxx} = 0, & (0,L) \times (0,\ \infty), \\ \theta_{tt} - l\theta_{xx} + K_1\theta_t + \gamma u_{tx} = 0, & (0,L) \times (0,\ \infty), \\ u(x,t) = w(x,t) = w_x(x,t) = \theta_x(x,t) = 0, & x \in (0,L), \\ u(.,0) = u_0 = u_t(.,0) = u_1,\ w(.,0) = w_0, & t \in (0,\ \infty), \\ w_t(.,0) = w_1,\ \theta(.,0) = \theta_0,\ \theta_t(.,0) = \theta_1, & t \in (0,\ \infty). \end{cases} \tag{2}$$

Ils ont prouvé que l'énergie associée à (2) décroît exponentiellement lorsque t tend vers l'infini.

D'autre part, Andrade [1] a discuté la décoissance d'énergie des solutions pour le problème suivant

$$u'' + \Delta^2 u - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + \alpha(t)\int_0^t g(t-s)\,\Delta u(s)ds - \Delta u' = 0, \tag{3}$$

avec diverses conditions aux limites. Ils ont montré l'existence et la décroissance exponentielle des solutions dans la norme d'énergie pour le cas $\alpha(t) = 1$, à condition que

$$g^{'}(t) \leq -\xi g(t), \text{ pour certains } \xi > 0 \; . \tag{4}$$

S. Hye Park [33] a considéré le même problème pour le cas $\alpha(t) > 0$. Il a établi une estimation générale de la décroissance de l'énergie, qui dépend du comportement de α et g, c'est-à-dire ; pour tous $t \geq 0$:

$$g^{'}(t) \leq -\xi(t)\, g(t), \quad \lim_{t\to\infty} \frac{-\alpha^{'}(t)}{\xi(t)\alpha(t)} = 0, \quad \text{et } \frac{1}{2} - \frac{2\alpha(t)}{\lambda_1} \int_0^t g(s)\, ds \geq l > 0, \tag{5}$$

Dans le présent travail, nous nous intéressons au modèle mathématique unidimensionnel de la poutre non linéaire de longueur $L > 0$ fixée aux points des extrémités

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - b\phi_{xx} + k(\phi + \psi_x) + \alpha(t) \int_0^t g(t-s)\, \phi_{xx}(s)\, ds = 0, & \text{dans } Q, \\ \rho_2\, \psi_{tt} - k(\phi + \psi_x)_x - k_1 \left[\psi_x \left(\eta_x + \frac{1}{2}\psi_x^2\right)\right]_x + \sigma \psi_{xxxx} + \beta \psi_t = 0, & \text{dans } Q, \\ \rho_2\, \eta_{tt} - k_1 \left(\eta_x + \frac{1}{2}\psi_x^2\right)_x + \gamma \eta_t = 0, & \text{dans } Q, \end{cases} \tag{6}$$

avec des conditions aux limites et des conditions initiales

$$\begin{cases} \phi(0,\cdot) = \phi(1,\cdot) = \psi(0,\cdot) = \psi(1,\cdot) = 0, & t \geq 0, \\ \psi_x(0,\cdot) = \psi_x(1,\cdot) = \eta_x(0,\cdot) = \eta_x(1,\cdot) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \phi(\cdot,0) = \phi_0,\ \phi_t(\cdot,0) = \phi_1,\ \psi(\cdot,0) = \psi_0, & x \in (0,1), \\ \psi_t(\cdot,0) = \psi_1,\ \eta(\cdot,0) = \eta_0,\ \ \eta_t(\cdot,0) = \eta_1, & x \in (0,1), \end{cases}$$

où $Q = \Omega \times (0,T)$ et $\Omega = (0,1)$ est le segment occupé par le faisceau. Les inconnues $\phi(x,t)$, $\psi(x,t)$ et $\eta(x,t)$ représentent, respectivement, l'angle de rotation, le déplacement vertical et le déplacement longitudinal, α et g sont des fonctions positives décroissantes définies sur $\mathbb{R}_+$ et les coefficients $\rho_1, \rho_2, k, k_1, \beta, \gamma$ et b sont des constantes positives.

Nous considérons les conditions suivantes sur la fonction de relaxation g et le potentiel α, nous supposons :

$(H1)$ $g, \alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont des fonctions différentiables telles que

$$g(0) > 0,\ b - \alpha(t) \int_0^\infty g(s)ds \geq \lambda > 0, \tag{8}$$

$(H2)$ Il existe une fonction différentiable et décroissante $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$\xi(t) > 0,\ \ g'(t) \leq -\xi\,(t)\,g(t) \quad \text{et} \lim_{t\to\infty} \tfrac{-\alpha'(t)}{\xi(t)\alpha(t)} = 0. \tag{9}$$

Notez que $(H1)$ et $(H2)$ impliquent $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = 0,$

à partir de la troisième équation de (6) et les conditions aux limites (7), il s'ensuit que

$$\tfrac{d^2}{dt^2} \int_0^1 \eta(x,t)dx + \tfrac{\gamma}{\rho_2} \tfrac{d}{dt} \int_0^1 \eta(x,t)dx = 0, \tag{10}$$

Donc, en résolvant (10) et en utilisant les conditions initiales de η, nous obtenons

$$\int_0^1 \eta(x,t)dx = \int_0^1 \eta_0(x)dx + \tfrac{\rho_2}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{\rho_2}t}\right) \int_0^1 \eta_1(x)dx,$$

par conséquent, si nous fixons :

$$\overline{\eta}(x,t) = \int_0^1 \eta(x,t)dx - \int_0^1 \eta_0(x)dx - \tfrac{\rho_2}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{\rho_2}t}\right) \int_0^1 \eta_1(x)dx,$$

ceci implique

$$\int_0^1 \overline{\eta}(x,t)dx = 0, \quad t \geq 0$$

et $(\phi, \psi, \overline{\eta})$ vérifie les mêmes équations dans(6)-(7). Alors dans ce qui suit, on va travailler avec $\overline{\eta}$ mais on les considère comme η.

Proposition 3.1.1 *Si* $(\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0, \eta_1) \in \aleph$, *supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaits. Alors le problème* (6)-(7) *a une solution globale unique dans la classe*

$$\{\phi, \psi, \eta\} \in C^0\left([0,\ \infty);\ H_0^1(0,L) \times H_0^2(0,L) \times V\right) \cap C^1\left([0,\ \infty);\ \left[L^2(0,L)\right]^2 \times H\right),$$

où

$$\begin{array}{l} \aleph = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^2(0,L) \times L^2(0,L) \times V \times H, \\ V = H^1(0,L) \cap H \ \ et \ \ H = \left\{ v \in L^2(0,L) ; \int_0^L v(x)\, dx = 0 \right\}. \end{array}$$

3.2 Décroissance exponentielle du système

Dans cette section, nous commençons par introduire certaines fonctionnelles et établir quelques lemmes pour prouver le résultat de la stabilitè générale pour le système non linéaire (6)-(7).

Lemme 3.2.1 *Soit* (ϕ, ψ, η) *la solution du problème* (6)-(7)*. Alors, l'énergie associé au problème est définie par*

$$\begin{aligned} E(t) \ &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \Big[\rho_1 \phi_t^2 + \rho_2\ \psi_t^2 + \rho_2\ \eta_t^2 + k(\phi + \psi_x)^2 + \sigma \psi_{xx}^2 \\ &+ k_1\ \left(\eta_x + \tfrac{1}{2}{\psi_x}^2\right)^2 + \left(b - \alpha(t) \int_0^t g(\tau)\, d\tau\right) \phi_x^2 \Big] dx \\ &+ \alpha(t)\,(go\phi_x), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{11}$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned} E'(t) \leq \ & -\gamma \int_0^1 \eta_t^2 dx - \beta \int_0^1 \psi_t^2 dx - \tfrac{\alpha'(t)}{2} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \int_0^1 \phi_x^2 dx \\ & + \tfrac{\alpha(t)}{2} g' o \phi_x, \end{aligned} \tag{12}$$

où

$$(go\phi_x)(x) = \int_0^t g(t-s)\,(\phi_x(t) - \phi_x(s))^2\, ds.$$

Preuve. En multipliant les equations du problème (6) respectivement par ϕ_t, ψ_t et η_t, puis utilisant l'intégration par partie sur $(0,1)$, ainsi que les conditions aux limites, nous obtenons

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left[\rho_1\phi_t^2+\rho_2\ \psi_t^2+\rho_2\ \eta_t^2+k\left(\phi+\psi_x\right)^2+\sigma\psi_{xx}^2\right.\\
\left.+k_1\ \left(\eta_x+\frac{1}{2}{\psi_x}^2\right)^2+b\phi_x^2dx-\phi_{tx}\int_0^t g(t-s)\phi_x\left(s\right)ds\right]dx\\
=-\gamma\int_0^1\eta_t^2dx-\beta\int_0^1\psi_t^2dx.
\end{array}
\tag{13}
$$

Maintenant, nous estimons le dernier terme dans la partie gauche de la dernière identité (13)

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1\phi_{tx}\int_0^t g(t-s)\phi_x\left(s\right)dsdx &= \int_0^1\phi_{tx}\int_0^t g(t-s)\left(\phi_x\left(t\right)-\phi_x\left(s\right)\right)dsdx\\
&+\int_0^t g(s)\int_0^1\phi_{tx}\phi_x dxds\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}go\phi_x-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)ds\int_0^1\phi_x^2dx\\
&-\frac{1}{2}g'o\phi_x+\frac{1}{2}g(s)\int_0^1\phi_x^2dx.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Le résultat s'en déduit d'aprés la substitution de (14) dans (13), et en tenant compte (11).

■

Lemme 3.2.2 *La fonctionnelle I_1 définie par*

$$
I_1\left(t\right)=\int_0^1\left(\frac{\rho_1}{2}\phi_t\phi+\rho_2\eta_t\eta+\frac{\rho_2}{2}\psi_t\psi+\frac{\beta}{4}\psi^2+\frac{\gamma}{2}\eta^2\right)dx,\ \ t\geq 0 \tag{15}
$$

vérifie, pour toute solution du système (6)-(7), l'éstimation suivante

$$
\begin{aligned}
I_1'\left(t\right)\leq\ & -\frac{\sigma}{2}\int_0^1\psi_{xx}^2dx-\frac{\lambda}{2}\int_0^1\phi_x^2dx\ -k_1\int_0^1\left(\eta_x+\frac{1}{2}\psi_x^2\right)^2dx\\
&-\frac{k}{2}\int_0^1\left(\phi+\psi_x\right)^2dx+\frac{\rho_1}{2}\int_0^1\phi_t^2dx+\frac{\rho_2}{2}\int_0^1\psi_t^2dx\\
&+\rho_2\int_0^1\eta_t^2dx+\frac{\bar{g}\ \alpha(t)}{2\lambda}\left(go\phi_x\right).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Preuve. En dérivant la fonctionnelle I_1 et en utilisant la première, deuxième et la troisième équation du système (6) et en intégrant par partie sur $(0,1)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I_1'\left(t\right)\ =\ & \frac{\rho_1}{2}\int_0^1\phi_t^2dx-\frac{b}{2}\int_0^1\phi_x^2dx+\frac{\rho_2}{2}\int_0^1\psi_t^2dx-\frac{\sigma}{2}\int_0^1\psi_{xx}^2dx\\
&+\rho_2\int_0^1\eta_t^2dx\ \ -\frac{k}{2}\int_0^1\left(\phi+\psi_x\right)^2dx-k_1\int_0^1\left(\eta_x+\frac{1}{2}\psi_x^2\right)^2dx\\
&+\frac{\alpha(t)}{2}\ \int_0^t g\left(\tau\right)d\tau\int_0^1\phi_x^2dx-\frac{\alpha(t)}{2}\int_0^1\phi_x\left(g\Diamond\phi_x\right)dx.
\end{aligned}
$$

Ainsi, par l'application de l'inégalité de Young, nous aurons pour tout $\delta_1 > 0$,

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha(t)}{2}\int_0^1 \phi_x\left(g\diamondsuit\phi_x\right)dx &\leq \frac{\delta_1\alpha(t)}{2}\int_0^1 \phi_x^2dx + \frac{\alpha(t)}{8\delta_1}\int_0^t g\left(\tau\right)d\tau\left(go\phi_x\right) \\ &\leq \frac{\delta_1\alpha(0)}{2}\int_0^1 \phi_x^2dx + \frac{\alpha(0)\overline{g}}{8\delta_1}\left(go\phi_x\right). \end{aligned}$$

La relation (16) est établie, en combinant l'estimation ci-dessus et en prenant $\delta_1 = \frac{\lambda}{2\alpha(0)}$. ■

Lemme 3.2.3 *La fonctionnelle I_2 définie par*

$$I_2\left(t\right) = -\rho_1\int_0^1 \phi_t\left(g\diamondsuit\phi_x\right)dx,\ \ t\geq 0 \tag{17}$$

vérifie pour toute solution du système (6)-(7) *et pour tout $\varepsilon > 0$ l'éstimation suivante*

$$\begin{aligned} I_2'\left(t\right) \leq\ & -\frac{\rho_1 g_0}{2}\int_0^1 \phi_t^2dx + C_1\varepsilon\int_0^1 \phi_x^2dx + k\varepsilon\int_0^1\left(\phi+\psi_x\right)^2dx \\ & +C_2\left(\varepsilon\right)\alpha(t)\left(go\phi_x\right) - \frac{\rho_1 g(0)}{2g_0}C_p\left(g'o\phi_x\right), \end{aligned} \tag{18}$$

où C_p est la constante de Poincaré, $g_0 = \int_0^t g\left(\tau\right)d\tau, C_1 = b + \alpha(t)\overline{g}^2$,

et $C_2\left(\varepsilon\right) = \dfrac{\overline{g}}{4}\left[\left(\varepsilon+\frac{1}{2\varepsilon}\right)4\alpha(t) + \frac{b}{\varepsilon} + \frac{k}{\varepsilon}\right]$.

Preuve. En multipliant la première équation du système (6)-(7) par $(g\diamondsuit\phi)$, puis par une intégration par partie sur $(0,1)$,on obtient

$$\begin{aligned} I_2'\left(t\right) &= -\rho_1\int_0^1 \phi_t\left(g\diamondsuit\phi\right)_t dx - \int_0^1\left[b\phi_{xx} - k\left(\phi+\psi_x\right) - \alpha(t)\left(g*\phi_{xx}\right)\right]\left(g\diamondsuit\phi\right)dx \\ &= -\left(\rho_1\int_0^t g\left(\tau\right)d\tau\right)\int_0^1 \phi_t^2dx - \rho_1\int_0^1 \phi_t\left(g'\diamondsuit\phi\right)dx + b\int_0^1 \phi_x\left(g\diamondsuit\phi_x\right)dx \\ & -\alpha(t)\int_0^1\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\phi_x\left(s\right)ds\right)\left(g\diamondsuit\phi_x\right)dx + k\int_0^1\left(\phi+\psi_x\right)\left(g\diamondsuit\phi\right)dx. \end{aligned} \tag{19}$$

Maintenant, nous estimons les termes de cette dernière identité, en utilisant les inégalités de Young, Cauchy-Schwarz et Poincaré.

Ainsi, on obtient, pour tout $\delta_2 > 0$

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_0^1 \phi_t \left(g'\diamondsuit\phi\right) dx &\leq \delta_2 \int_0^1 \phi_t^2 dx + \frac{\rho_1^2}{4\delta_2} \int_0^t -g'(\tau)\, d\tau \int_0^1 \left(-g' o\phi\right) dx \\ &\leq \delta_2 \int_0^1 \phi_t^2 dx + \frac{\rho_1^2}{4\delta_2} g(0) \int_0^1 \left(-g' o\phi\right) dx \\ &\leq \delta_2 \int_0^1 \phi_t^2 dx - \frac{\rho_1^2}{4\delta_2} g(0)\, C_p \int_0^1 \left(g' o\phi_x\right) dx. \end{aligned} \tag{20}$$

De même, nous avons pour tout

$$b \int_0^1 \phi_x \left(g\diamondsuit\phi_x\right) dx \leq \varepsilon b \int_0^1 \phi_x^2 dx + \frac{b}{4\varepsilon}\overline{g} \int_0^1 \left(go\phi_x\right) dx, \tag{21}$$

et

$$k \int_0^1 \left(\phi + \psi_x\right)\left(g\diamondsuit\phi\right) dx \leq \varepsilon k \int_0^1 \left(\phi + \psi_x\right)^2 dx + \frac{k\overline{g}}{4\varepsilon} C_p \left(go\phi_x\right). \tag{22}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \alpha(t) \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\, \phi_x(s)\, ds\right)\left(g\diamondsuit\phi_x\right) dx &\leq \frac{\alpha(t)\varepsilon}{2} \int_0^1 \left(\int_0^t g(t-s)\left(\phi_x(t) - \phi_x(s) - \phi_x(t)\right) ds\right)^2 dx \\ &+ \frac{\alpha(t)}{2\varepsilon} \int_0^1 \left(g\diamondsuit\phi_x\right)^2 dx \\ &\leq \alpha(t) \left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau\right)^2 \int_0^1 \phi_x^2 dx \\ &+ \left(\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}\right)\alpha(t) \int_0^t g(\tau)\, d\tau \int_0^1 \left(go\phi_x\right) dx. \end{aligned} \tag{23}$$

Puisque la fonction g est positive, continue et $g(0) > 0$, alors, pour tout $t \geq t_0 > 0$, nous avons

$$\int_0^t g(s)\, ds \geq \int_0^{t_0} g(s)\, ds = g_0.$$

En substituant (20) et (23) dans (19), on obtient

$$\begin{aligned} I_2'(t) \leq \quad & \delta_2 \int_0^1 \phi_t^2 dx - \frac{\rho_1^2 g(0)}{4\delta_2}\left(g' o\phi_x\right) + \varepsilon b \int_0^1 \phi_x^2 dx \\ &+ \frac{b\overline{g}}{4\varepsilon}\left(go\phi_x\right) + \varepsilon k \int_0^1 \left(\phi + \psi_x\right)^2 dx + \frac{k\overline{g}}{4\varepsilon}\left(go\phi_x\right) \\ &+ \alpha(0)\overline{g}^2 \int_0^1 \phi_x^2 dx + \left(\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon}\right)\alpha(0)\overline{g}\left(go\phi_x\right). \end{aligned}$$

La relation (18) s'en déduit en prenant $\delta_2 = \frac{\rho_1 g_0}{2}$. ■

Maintenant, pour établir le rèsultat principal de ce travail, on introduit la fonctionnelle de Lyapunov

$$F(t)=NE(t)+I_1(t)+N_1I_2(t),\ \forall\ t\geq 0. \tag{24}$$

Théorème 3.2.1 *Etant donné* $\{\phi_0,\psi_0,\eta_0,\phi_1,\psi_1,\eta_1\}\in\aleph$, *supposons que* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées . Alors il existe deux constantes positives* c_0 *et* c_1; *telles que l'énergie du système* (6)-(7) *vérifie*

$$E(t)\leq c_0e^{-c_1\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\ \xi(s)ds},\quad \forall t\geq t_0. \tag{25}$$

Preuve. En tenant compte les relations (12), (16), (18), nous obtenons

$$\begin{aligned}F'(t)\leq\ & -\alpha(t)\left(N\gamma-\rho_2\right)\int_0^1\eta_t^2dx-\left(\beta N-\tfrac{\rho_2}{2}\right)\int_0^1\psi_t^2dx\\ & -\tfrac{\sigma}{2}\int_0^1\psi_{xx}^2dx-\left(\tfrac{\lambda}{2}+\tfrac{\alpha'(t)Ng_0}{2}-C_1N_1\varepsilon\ \right)\int_0^1\phi_x^2dx\\ & -K_1\int_0^1\left(\eta_x+\tfrac{1}{2}\psi_x^2\right)^2dx-\left(\tfrac{k}{2}-k\varepsilon N_1\right)\int_0^1\left(\phi+\psi_x\right)^2dx\\ & -\left(\tfrac{\rho_1g_0N_1}{2}-\tfrac{\rho_1}{2}\right)\int_0^1\phi_t^2dx+\left(\tfrac{\alpha(t)N}{2}-\tfrac{\rho_1g(0)}{2g_0}N_1\right)\left(g^{'}o\phi_x\right)\\ & +\left(C_2\left(\varepsilon\right)\alpha(t)N_1+\tfrac{\bar{g}\,\alpha(t)}{2\lambda}\right)\left(go\phi_x\right).\end{aligned}$$

Notant que d'aprés l'hypothèse

$$\tfrac{\alpha(t)}{\alpha(0)}\geq 1 \text{ et } \lim_{t\to\infty}\tfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}=0.$$

nous avons

$$\begin{aligned}F'(t)\leq\ & -\alpha(t)\left(\tfrac{N\gamma}{\alpha(0)}-\tfrac{\rho_2}{\alpha(0)}\right)\int_0^1\eta_t^2dx-\alpha(t)\left(\tfrac{\beta N}{\alpha(0)}-\tfrac{\rho_2}{2\alpha(0)}\right)\int_0^1\psi_t^2dx\\ & -\alpha(t)\tfrac{\sigma}{2\alpha(0)}\int_0^1\psi_{xx}^2dx-\alpha(t)\left(N\tfrac{\alpha'(t)}{2\alpha(t)}g_0+\tfrac{\lambda}{2\alpha(0)}-\tfrac{C_1N_1\varepsilon}{\alpha(0)}\ \right)\int_0^1\phi_x^2dx\\ & -\alpha(t)\tfrac{k_1}{\alpha(0)}\int_0^1\left(\eta_x+\tfrac{1}{2}\psi_x^2\right)^2dx-\alpha(t)\left(\tfrac{k}{2\alpha(0)}-\tfrac{kN_1}{\alpha(0)}\varepsilon\right)\int_0^1\left(\phi+\psi_x\right)^2dx\\ & -\alpha(t)\left(\tfrac{\rho_1g_0N_1}{2\alpha(0)}-\tfrac{\rho_1}{2\alpha(0)}\right)\int_0^1\phi_t^2dx+\alpha(t)\left(\tfrac{N}{2}-\tfrac{\rho_1g(0)}{2g_0\alpha(0)}C_pN_1\right)g^{'}o\phi_x\\ & +\alpha(t)\left(C_2\left(\varepsilon\right)N_1+\tfrac{\bar{g}\ \alpha(0)}{2\lambda}\right)\left(go\phi_x\right).\end{aligned} \tag{26}$$

Maintenant, nous devons choisir les coefficients ε, N_1 and N d'une manière appropriѐe. Tout d'abord, nous choisissons ε assez petit pour que

$$\varepsilon < \tfrac{\lambda}{2C_1N_1},$$

ensuite, nous sélectionnons N_1 assez grand pour que

$$N_1 > \tfrac{1}{g_0}.$$

Enfin, nous choisisson N assez grand pour

$$\begin{aligned}
&N\tfrac{\alpha'(t)}{2\alpha(t)}g_0 + \tfrac{\lambda}{2\alpha(0)} - C_1N_1\varepsilon > 0,\\
&N\tfrac{\beta}{\alpha(0)} - \tfrac{\rho_2}{2\alpha(0)} > 0,\\
&N\tfrac{\gamma}{\alpha(0)} - \tfrac{\rho_2}{\alpha(0)} > 0,\\
&N > \max\left(\tfrac{2\alpha(t)}{\alpha'(t)g_0}\left[C_1N_1\varepsilon - \tfrac{\lambda}{2\alpha(0)}\right], \tfrac{\rho_2}{2\alpha(0)}, \tfrac{\rho_2}{\gamma}, \tfrac{\rho_1}{g_0\ \alpha(0)}g\left(0\right)C_pN_1\right).
\end{aligned}$$

En utilisant $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\alpha^{'}(t)}{\alpha(t)} = 0$, alors (26) devient

$$F^{'}(t) \leq -C_1\alpha(t)E(t) + C_2\alpha(t)\int_0^1\left(go\phi_x\right)dx, \qquad \forall t \geq t_0, \tag{27}$$

Pour certaines constantes positives β_1 et β_2, nous avons

$$\beta_2 E(t) \leq F(t) \leq \beta_1 E(t), \qquad \forall\ t \geq 0. \tag{28}$$

En multipliant (27) par $\xi\left(t\right)$ et en utilisant les hypothèses(H_1), (H_2) et la relation (12), on arrive à

$$\begin{aligned}
\xi\left(t\right)F'(t) &\leq -C_1\alpha\left(t\right)\xi\left(t\right)E(t) + C_2\alpha(t)\xi\left(t\right)go\phi_x\\
&\leq -C_1\alpha\left(t\right)\xi\left(t\right)E(t) - C_2\alpha(t)g'o\phi_x\\
&\leq -C_1\alpha\left(t\right)\xi\left(t\right)E(t)\\
&+C_2(-2E'(t) - \alpha'(t)g_0\int_0^1\phi_x^2dx - 2\gamma\int_0^1\eta_t^2dx - 2\beta\int_0^1\psi_t^2dx),
\end{aligned}$$

qu'on écrit

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}\left(\xi\left(t\right)F(t)+2C_2E(t)\right)-\xi^{'}\left(t\right)F(t)\leq & -C_1\alpha\left(t\right)\xi\left(t\right)E(t)-C_2\alpha'(t)g_0\int_0^1\phi_x^2dx \\ & -2\gamma C_2\int_0^1\eta_t^2dx-2\beta C_2\int_0^1\psi_t^2dx. \end{array} \tag{29}$$

En utilisant le fait que $\xi'\left(t\right)\leq 0$ et la relation (11), l'estimatin (29) prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\xi\left(t\right)F(t)+2C_2E(t)\right) &\leq -C_1\alpha\left(t\right)\xi\left(t\right)E(t)-\frac{2C_2}{\lambda}\alpha'(t)g_0E(t)-4C_2E(t) \\ &\leq -\alpha\left(t\right)\xi\left(t\right)\left(C_1+\frac{4C_2}{\alpha(t)\xi(t)}+\frac{2C_2\alpha'(t)g_0}{\lambda\alpha(t)\xi(t)}\right)E(t),\ \forall t\geq t_0. \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-\alpha'(t)}{\alpha(t)\xi(t)}=0$, on peut choisir $t_1\geq t_0$ tel que

$$\frac{d}{dt}\left(\xi\left(t\right)F(t)+2C_2E(t)\right)\leq-\left(C_1\alpha(t)\xi\left(t\right)+4C_2\right)E(t),\ \forall t\geq t_1.$$

Ainsi, en notant que $L(t)=\xi\left(t\right)F(t)+2C_2E(t)$ et $C_3=4C_2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} L'(t) &\leq\left(-C_1\alpha(t)\xi\left(t\right)-C_3\right)E(t) \\ &\leq -C_1\alpha(t)\xi\left(t\right)E(t),\ \forall t\geq t_1. \end{aligned}$$

Puisque $\xi\left(t\right)$ est une fonction positive non croissante, alors on peut observer que $L(t)$ est équivalent à $E(t)$. Par la suite, il s'ensuit que

$$L'(t)\leq-\omega\alpha(t)\xi\left(t\right)L(t),\ \forall t\geq t_1, \tag{30}$$

où ω une constante positive.

Il est facile de voir par intégration sur (t_1,t) de (30) on obtient

$$L(t)\leq L\left(t_1\right)e^{-\omega\int_{t_1}^t\alpha(s)\xi(s)ds},\ \forall t\geq t_1,$$

le fait que $L(t),F(t)$ et $E(t)$ sont équivalents, on aboutit à

$$E(t)\leq\omega_0e^{-\omega\int_{t_1}^t\alpha(s)\xi(s)ds},\ \forall t\geq t_1.$$

Enfin, pour une constante positive ω_0 alors, en vertu de la continuité et de la limite de $E(t)$ dans l'intervalle $(0, t_1)$, d'où le résultat. $\blacksquare$

CHAPITRE 4

Stabilité exponentielle d'un système linéaire thermoélastique avec effets micro-température et thermal

4.1 Position du problème

L'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes, biologique, économique ou mécanique est modélisée par des équations aux dérivées partielles. Dans le domaine de l'ingénierie, le phénomène indésirable des vibrations apparait pratiquement dans toutes les structures mécaniques a attiré l'attention de plusieurs chercheurs. Pour cela, ont été employés des amortissements de friction forts, faibles et viscoélastiques pour éliminer ces vibrations.

Dans cet article, nous considérons le système thermoélastique linéaire suivant

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - k\left(u_x + \varphi\right)_x + \gamma\theta_x = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty) \\ \rho_2 \varphi_{tt} - \alpha\varphi_{xx} + k\left(u_x + \varphi\right) + dw_x - m\theta = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty) \\ \rho_3 \theta_t - l\theta_{xx} + \gamma u_{tx} + m\varphi_t + k_1 w_x = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty) \\ \rho_4 w_t - k_2 w_{xx} + k_1\theta_x + d\varphi_{tx} = 0, & \text{dans } (0,1)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{1}$$

où $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \alpha, \gamma, l, m, d, k, k_1$ et k_2 sont des constantes positives. Le système (1) décrit un problème thermoélastique poreux. Ici, $u(x,t)$ est le déplacement transversal, $\varphi(x,t)$ le déplacement vertical, $\theta(x,t)$ la différence en température et $w(x,t)$ la micro-température. Notant que le concept de micro-température était juste utilisé dans la théorie de la thermodynamique pour les matériaux élastiques avec micro-structure.

En plus des micro-déformations de la corde, les micro-éléments subbissent des effets micro-températures qui représentent la variation de la température dans un micro-volume. Ainsi nous complétons le système (1) avec des conditions aux limites et des conditions initiales

$$\begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = \varphi_x(0,t) = \varphi_x(1,t) = 0 & t > 0 \\ \theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = w(0,t) = w(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x), & x \in (0,1) \\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ w(x,0) = w_0(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{2}$$

où $u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, w_0, \theta_0$ sont des fonctions données.

Dans ces dernières années, un grand effort a été consacré à l'obtention d'une stabilité exponentielle de solutions en thermoélasticité classique et de nombreux résultats de stabilité ont été établi. Par exemple, dans [31] Muñoz Rivera a considéré le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha u_{xx} + \beta\theta_x = 0 & \text{dans } (0,l)\times(0,T) \\ \theta_t - \gamma\theta_{xx} + \delta u_{tx} = 0 & \text{dans } (0,l)\times(0,T), \end{cases}$$

où u est le déplacement transversal d'une chaîne de longueur l et θ est la différence en température. Il a présenté une nouvelle preuve, beaucoup plus élémentaire que celle donnée par Hansen [8], ensuite il a prouvé que l'amortissement de la chaleur est assez fort pour stabiliser exponentiellement le système.

Ce système poreux unidimensionnel

$$\begin{cases} \rho_0 u_{tt} = \mu u_{xx} + \beta \varphi_x & \text{dans } (0,l) \times (0,T) \\ \rho_0 k \varphi_{tt} = \alpha \varphi_{xx} - \beta u_x - \tau \varphi_t - \xi \varphi & \text{dans } (0,l) \times (0,T), \end{cases}$$

a été étudié par de nombreux chercheurs. La première contribution dans cette direction était en 2003 par Quintanilla [24]. L'auteur a analysé le système ci-dessus dans un domaine borné avec des conditions initiales et des conditions aux limites mixtes et a montré que l'amortissement dans l'équation poreuse $(-\tau\varphi_t)$ est pas assez fort pour obtenir une décroissance exponentielle. précisément il a prouvé décroissance lente. Casas et Quintanilla [25] ont considéré un système de la forme

$$\begin{cases} \rho_0 u_{tt} - \mu u_{xx} - b\varphi_x - \beta \varphi_x = 0 & \text{dans } (0,l) \times (0,\pi) \\ \rho_0 k \varphi_{tt} - \alpha \varphi_{xx} + b u_x - \zeta \varphi_t - m\theta = 0 & \text{dans } (0,l) \times (0,\pi) \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + \beta u_{tx} + m\varphi_t = 0 & \text{dans } (0,l) \times (0,\pi) \\ u(x,0) = u^0(x),\ \varphi(x,0) = \varphi^0(x),\ \theta(x,0) = \theta^0(x) & \text{dans } (0,\pi) \\ u_t(x,0) = u^1(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi^1(x) & \text{dans } (0,\pi) \\ u(x,t) = \varphi_x(x,t) = \theta(x,t) = 0 & t \geq 0, \end{cases}$$

où θ indique le déplacement de la température. Ils ont montré que la présence de la micro-température et des dissipations poreuses agissant ensemble stabiliser le système de façon exponentielle. Par contre, pour le cas $\zeta = 0$ et avec un fort amortissement de la forme γu_{txx} agissant du côté droit de la première équation, Magaña et Quintanilla ont montré qu'il n'est pas assez pour stabiliser le système uniformément. Dans [32], Soufyane a incorporé un amortissement viscoélastique dans l'équation poreuse avec un effet micro-température et a prouvé que la décoissance est exponentielle (respectivement polynomiale) et la fonction de relaxation décroît exponentiellement (respectivement polynomialement). Pour le même système dans [32], un résultat similaire a été également obtenu par Soufyane, avec l'amortissement par frottement $-\tau\varphi_t$ est remplacé par deux dissipations viscoélastiques de la forme

$$\begin{aligned} u(L,t) &= -\int_0^t g_1(t-s)\left[\mu u_x(L,s)+b\varphi(L,s)\right]ds \\ v(L,t) &= -\alpha\int_0^t g_2(t-s)\varphi(L,s)ds, \end{aligned}$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions positives décroissantes. Récemment, Messaoudi et Apalara dans [22] ont considéré un système poreux thermoélastique de type III avec un amortissement viscoélastique

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt}-k\left(\varphi_x+\psi\right)_x+\theta_x=0 \\ \rho_2\psi_{tt}-\alpha\psi_{xx}+k\left(\varphi_x+\psi\right)-\theta+\int_0^t g(t-s)\psi_{xx}ds=0 \\ \rho_3\theta_{tt}-k\theta_{xx}-\delta\theta_{txx}+\beta\varphi_{ttx}+\beta\psi_{ttx}+\beta\psi_{tt}=0 \\ \varphi\left(x,0\right)=\varphi^0\left(x\right),\ \varphi_t\left(x,0\right)=\varphi^1\left(x\right),\ \psi\left(x,0\right)=\psi^0\left(x\right) \\ \psi_t\left(x,0\right)=\psi^1\left(x\right),\ \theta\left(x,0\right)=\theta^0\left(x\right),\ \theta_t\left(x,0\right)=\theta^1\left(x\right) \\ \varphi\left(0,t\right)=\varphi\left(1,t\right)=\psi\left(0,t\right)=\psi\left(1,t\right)=\theta\left(0,t\right)=\theta\left(1,t\right)=0, \end{cases}$$

où $\varphi\left(x,t\right)$ est le déplacement longitudinal, $\psi\left(x,t\right)$ est la fraction volumique, $\theta\left(x,t\right)$ est le déplacement de température et la fonction de relaxation $g:\Re_+\rightarrow\Re_+$ est une fonction décroissante. Ils ont établi une décroissance générale pour le cas où $\left(\frac{k}{\rho_1}=\frac{\alpha}{\rho_2}\right)$.

Notre but dans ce travail est d'étudier le système (1)-(2), d'établir un résultat de stabilité exponentielle dans la norme énergétique en utilisant la méthode des multiplicateurs. Nous énonçons également, sans preuve, un théorème de l'existence et de l'unicité de la solution qui peut être facilement établi par la théorie des semigroupes de manière similaire ; nous mettons

$$\begin{aligned} L_*^2\left(0,1\right) &= \left\{w\in L^2\left(0,1\right);\ \int_0^1 wdx=0\right\} \\ H_*^1\left(0,1\right) &= H^1\left(0,1\right)\cap L_*^2\left(0,1\right), \end{aligned}$$

et introduisons l'espace de Hilbert

$$\aleph=H_0^1\left(0,1\right)\times L^2\left(0,1\right)\times H_*^1\left(0,1\right)\times L_*^2\left(0,1\right)\times L_*^2\left(0,1\right)\times L^2\left(0,1\right),$$

équipé du produit scalaire

$$\left\langle U,\bar{U}\right\rangle_{\aleph}=\int_0^1\left\{\rho_1 v\bar{v}+ku_x\bar{u}_x+\rho_2\varphi\bar{\varphi}+\alpha\varphi_x\bar{\varphi}_x+k\varphi\bar{\varphi}+\rho_3\theta\bar{\theta}+\rho_4 w\bar{w}\right\}dx,$$

pour $U=(u,v,\varphi,\phi,\theta,w)^T$ et $\bar{U}=\left(\bar{u},\bar{v},\bar{\varphi},\bar{\phi},\bar{\theta},\bar{w}\right)^T$.

Alors le système(1)-(2) peut être écrit comme

$$\begin{cases} U'=\mathcal{A}U \\ U(0)=U_0=(u_0,v_1,\varphi_0,\phi_1,\theta_0,w_0)^T, \end{cases} \tag{3}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire défini par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v \\ \frac{k}{\rho_1}(u_x+\varphi)_x-\frac{\gamma}{\rho_1}\theta_x \\ \phi \\ \frac{\alpha}{\rho_2}\varphi_{xx}-\frac{k}{\rho_2}(u_x+\varphi)-\frac{d}{\rho_2}w_x+\frac{m}{\rho_2}\theta \\ \frac{l}{\rho_3}\theta_{xx}-\frac{\gamma}{\rho_3}v_x-\frac{m}{\rho_3}\phi+\frac{k}{\rho_3}w_x \\ \frac{k_2}{\rho_4}w_{xx}-\frac{k_1}{\rho_4}\theta_x-\frac{d}{\rho_4}\phi_x \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est donné par

$$D(\mathcal{A})\left\{\begin{array}{l} U\in\aleph; u,w\in H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1); \varphi,\theta\in H^2(0,1); \\ v,\phi\in H^1(0,1), \varphi_x=\phi_x=\theta_x=0,\ x=0,1. \end{array}\right\}$$

Clairement, $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\aleph$. Nous avons le résultat de l'existence et de l'unicité suivant

Théorème 4.1.1 *Soit $U_0\in\aleph$, alors il existe une solution unique $U\in C(\Re^+,\aleph)$ du problème*

(1)-(2). De plus, si $U_0\in D(\mathcal{A})$, alors $U\in C(\Re^+,D(\mathcal{A}))\cap C^1(\Re^+,\aleph)$.

Preuve. voir [27]. ■

4.2 Décroissance exponentielle du système

Dans cette section, nous affirmons et prouvons le résultat de stabilité exponentielle pour le problème (1)-(2), en utilisant la technique des multiplicateurs. Pour atteindre notre objectif, nous devons construire une fonctionnelle de Lyapunov approprié pour établir une décroissance exponentielle. Mais d'abord, nous devons justifier l'application de l'inégalité de Poincaré pour θ et φ. A partir de la troisième équation de (1)-(2) et les conditions aux limites, nous obtenons

$$\tfrac{d}{dt} \int_0^1 \theta dx = -\tfrac{m}{\rho_3} \tfrac{d}{dt} \int_0^1 \varphi dx, \quad \forall t \geq 0,$$

et donc

$$\int_0^1 \theta dx + \tfrac{m}{\rho_3} \int_0^1 \varphi dx = \int_0^1 \theta^0 (x) \, dx + \tfrac{m}{\rho_3} \int_0^1 \varphi^0 (x) \, dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Imposant les conditions suivantes (notons que ces conditions ont été également imposées dans [25])

$$\int_0^1 \theta_0 (x) \, dx = \int_0^1 \varphi_0 (x) \, dx = 0, \tag{5}$$

nous obtenons

$$\int_0^1 \theta dx = -\tfrac{m}{\rho_3} \int_0^1 \varphi dx, \quad \forall t \geq 0.$$

Maintenant, à partir de la deuxième équation de (1), nous voyons que

$$\begin{aligned} &\rho_2 \tfrac{d^2}{dt^2} \int_0^1 \varphi dx + k \int_0^1 \varphi dx - m \int_0^1 \theta dx \\ &= \rho_2 \tfrac{d^2}{dt^2} \int_0^1 \varphi dx + \left(k + \tfrac{m^2}{\rho_3} \right) \int_0^1 \varphi dx = 0, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi dx &= \left(\int_0^1 \varphi_0 (x) \, dx \right) \cos kt + \tfrac{1}{k} \left(\int_0^1 \varphi_1 (x) \, dx \right) \sin kt \\ &= \tfrac{1}{k} \left(\int_0^1 \varphi_1 (x) \, dx \right) \sin kt, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

où $k = \sqrt{\frac{k}{\rho_2} + \frac{m^2}{\rho_2 \rho_3}}$.

Par conséquent, si nous définissons

$$\bar{\varphi} (x,t) = \varphi (x,t) - \tfrac{1}{k} \left(\int_0^1 \varphi_1 (x) \, dx \right) \sin kt, \quad t \geq 0, \ x \in [0,t] \, ,$$

et

$$\begin{aligned}\bar{\theta}\left(x,t\right) &= \theta\left(x,t\right)-\int_0^1\theta\left(x,t\right)dx=\theta\left(x,t\right)+\tfrac{m}{\rho_3}\int_0^1\varphi\left(x,t\right)dx\\ &= \theta\left(x,t\right)+\tfrac{m}{k\rho_3}\left(\int_0^1\varphi_1\left(x\right)dx\right)\sin kt,\quad t\geq 0,\ x\in\left[0,t\right],\end{aligned}$$

nous trouvons

$$\int_0^1\bar{\theta}\left(x,t\right)dx=\int_0^1\bar{\varphi}\left(x,t\right)dx=0,\quad t\geq 0, \tag{6}$$

et $\left(u,\bar{\varphi},\bar{\theta},w\right)$ satisfait aux mêmes équations dans (1)-(2). Dans ce qui suit, nous allons travailler avec $\bar{\varphi}$ et $\bar{\theta}$ mais, pour plus de simplicité, nous écrivons φ et θ au lieu de $\bar{\varphi}$ et $\bar{\theta}$.

Lemme 4.2.1 *Soit* (u,φ,θ,w) *solution du système* (1)-(2)*. Alors la fonctionnelle d'énergie* E*, définie par*

$$E\left(t\right)=\tfrac{1}{2}\int_0^1\left\{\rho_1u_t^2+\rho_2\varphi_t^2+\rho_1\theta^2+\rho_1w^2+k\left(u_x+\varphi\right)^2+\alpha\varphi_x^2\right\}dx, \tag{7}$$

satisfait pour tous $t>0$ l'identité

$$E^{'}\left(t\right)=-l\int_0^1\theta_x^2-k_2\int_0^1w_x^2. \tag{8}$$

Preuve. Multipliant la première équation en (1) par u_t, la seconde par φ_t, la troisième par θ, la quatrième par w ; ensuite en faisant la somme aprés une intégration par partie sur $[0;1]$, nous obtenons (8). ■

Lemme 4.2.2 *Soit*

$$I_1\left(t\right)=\rho_1\int_0^1u_tudx+\rho_2\int_0^1\varphi_t\varphi dx,\ t\geq 0, \tag{9}$$

et soit (u,φ,θ,w) solution du système (1)-(2). Alors, nous avons pour tout $\varepsilon_1>0$ l'estimation

$$\begin{aligned}I_1^{'}\left(t\right)\leq\ & -k\int_0^1\left(u_x+\varphi\right)^2dx-\tfrac{\alpha}{2}\int_0^1\varphi_x^2dx+\varepsilon_1\int_0^1u_x^2dx+\rho_1\int_0^1u_t^2dx\\ &+\rho_2\int_0^1\varphi_t^2dx+\tfrac{d^2}{\alpha}\int_0^1w_x^2dx+\left(\tfrac{\gamma^2}{4\varepsilon_1}+\tfrac{m^2}{\alpha}\right)\int_0^1\theta_x^2dx.\end{aligned} \tag{10}$$

Preuve. La dérivation de (9) donne

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \rho_1 \int_0^1 u_t^2 dx + \int_0^1 \left[k\left(u_x+\varphi\right)_x - \gamma\theta_x\right] u dx + \rho_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &+ \int_0^1 \left[\alpha\varphi_{xx} - k\left(u_x+\varphi\right) - dw_x + m\theta\right]\varphi dx \\ &= \rho_1 \int_0^1 u_t^2 dx - \int_0^1 \left(u_x+\varphi\right)^2 dx + \gamma \int_0^1 \theta u_x dx + \rho_2 \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &-\alpha \int_0^1 w\varphi_x dx + m \int_0^1 \theta\varphi dx. \end{aligned}$$

La relation (10) est prouvée en appliquant l'inégalité de Young et l'inégalité de Poincaré. ■

Lemme 4.2.3 *Soit*

$$I_2(t) = \rho_2\rho_4 \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,t)\,dy\right)\varphi_t dx,\ \ t \geq 0, \tag{11}$$

et soit (u,φ,θ,w) solution du système (1)-(2) . Alors, nous avons pour tout $\varepsilon_1 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned} I_2'(t) \leq\ & -\frac{\rho_2 d}{2}\int_0^1 \varphi_t^2 dx + \varepsilon_1\alpha \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \varepsilon_1 k \int_0^1 \left(u_x+\varphi\right)^2 dx \\ & + C_2 \int_0^1 \theta_x^2 dx + C_1\left(\varepsilon_1\right)\int_0^1 w_x^2 dx, \end{aligned} \tag{12}$$

où $C_1(\varepsilon_1) = \frac{\rho_2 k_3^2}{d} + \rho_4^2\left(\frac{d}{\rho_4} + \frac{\alpha}{4\varepsilon_1} + \frac{k}{4\varepsilon_1} + \frac{m}{2\rho_4}\right)$
et $C_2 = \frac{\rho_2 k_1^2}{d} + \frac{m\rho_4}{2}$.

Preuve. En dérivant (11),ensuite en utilisant la deuxième équation et la quatrième du système (1)-(2) et en intégrant par partie sur $(0,1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_2'(t) &= \rho_2 \int_0^1 \left(\int_0^x \left[k_2 w_{xx} - k_1\theta_x - d\varphi_{tx}\right] dy\right)\varphi_t dx \\ &+\rho_4 \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,l)\,dy\right)\left[\alpha\varphi_{xx} - k\left(u_x+\varphi\right) - dw_x + m\theta\right] dx \\ &= \rho_2 k_2 \int_0^1 w_x\varphi_t dx - \rho_2 k_1 \int_0^1 \theta\varphi_t dx - \rho_2 d \int_0^1 \varphi_t^2 dx \\ &+ \left[\rho_2 d\varphi_t(0) + \rho_2 k_1 \theta(0)\right]\int_0^1 \varphi_t dx - \rho_4\alpha \int_0^1 w\varphi_x dx \\ &-\rho_4 k \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,l)\,dy\right)\left(u_x+\varphi\right) dx \\ &+\rho_4 d \int_0^1 w^2 dx + \rho_4 m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,l)\,dy\right)\theta dx. \end{aligned}$$

En utilisant la condition (6), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_2'(t) = & -\rho_2 d \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \rho_4 d \int_0^1 w^2 dx + \rho_2 k_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx - \rho_2 k_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx \\ & -\rho_4 \alpha \int_0^1 w \varphi_x dx - \rho_4 k \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,l)\, dy \right) (u_x + \varphi)\, dx \\ & +\rho_4 m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,l)\, dy \right) \theta dx. \end{aligned} \tag{13}$$

Grâce à l'inégalité de Young et à l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$\rho_2 k_2 \int_0^1 w_x \varphi_t dx \le \frac{\rho_2 d}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2 k_2^2}{d} \int_0^1 w_x^2, \tag{14}$$

$$\rho_2 k_1 \int_0^1 \theta \varphi_t dx \le \frac{\rho_2 d}{4} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_2 k_1^2}{d} \int_0^1 \theta_x^2, \tag{15}$$

$$-\rho_4 \alpha \int_0^1 w \varphi_x dx \le \varepsilon_1 \alpha \int_0^1 \varphi_x^2 dx + \frac{\rho_4^2 \alpha}{4\varepsilon_1} \int_0^1 w_x^2, \tag{16}$$

$$\rho_4 m \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,t)\, dy \right) \theta dx \le \frac{\rho_4 m}{2} \int_0^1 w_x^2 dx + \frac{\rho_4 m}{2} \int_0^1 \theta_x^2, \tag{17}$$

$$\begin{aligned} -\rho_4 k \int_0^1 \left(\int_0^x w(y,t)\, dy \right) (u_x + \varphi)\, dx \quad & \le \varepsilon_1 k \int_0^1 (u_x + \varphi)_x^2 dx \\ & + \frac{\rho_4^2 k}{4\varepsilon_1} \int_0^1 w_x^2, \end{aligned} \tag{18}$$

En remplaçant les estimations précédentes (14), (18) dans (13), on obtient le résultat désiré. ■

Lemme 4.2.4 *Soit*

$$I_3(t) = \rho_1 \rho_3 \int_0^1 \left(\int_0^x \theta(y,t)\, dy \right) u_t dx, \;\; t \ge 0, \tag{19}$$

et soit (u, φ, θ, w) solution du système (1)-(2). Alors, nous avons pour tout $\varepsilon_2, \delta_1 > 0$ l'estimation

$$\begin{aligned} I_3'(t) \le \;& -\frac{\rho_1 \gamma}{2} (1 - \delta_1) \int_0^1 u_t^2 dx + \varepsilon_2 k \int_0^1 (u_x + \varphi)^2 dx \\ & + \frac{\rho_1 m^2}{2\delta_1 \gamma} \int_0^1 \varphi_t^2 dx + \frac{\rho_1 k_1^2}{\gamma} \int_0^1 w_x^2 dx + C_3(\varepsilon_2) \int_0^1 \theta_x^2 dx, \end{aligned} \tag{20}$$

où $C_3(\varepsilon_2) = \frac{\rho_1 l^2}{\gamma} + \frac{\rho_3^2 k}{4\varepsilon_2} + \rho_3\gamma.$

Preuve. En dérivant (20),après en utilisant la première équation et la troisième du système (1)-(2) et en intégrant par parties sur $(0,1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_3'(t) \;& = \rho_1 \int_0^1 \left(\int_0^x [l\theta_{xx} - \gamma u_{tx} - m\varphi_t + k_1 w_x]\, dy \right) u_t dx \\ & +\rho_3 \int_0^1 \left(\int_0^x \theta(y,l)\, dy \right) [k(u_x+\varphi)_x - \gamma\theta_x]\, dx \\ & = \rho_1 l \int_0^1 \theta_x u_t dx - \rho_1\gamma \int_0^1 u_t^2 dx - \rho_1 m \int_0^1 (\varphi_t(y,t)\, dy)\, u_t dx \\ & +\rho_1 k_1 \int_0^1 w u_t dx + \rho_3 k [u_x(1) + \varphi(1)] \int_0^1 \theta dx \\ & -\rho_3 k \int_0^1 \theta(u_x+\varphi)\, dx - \rho_3\gamma \int_0^1 \theta dx + \rho_3\gamma \int_0^1 \theta^2 dx,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\int_0^1 \theta dx = 0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} I_3'(t) = \;& -\rho_1\gamma \int_0^1 u_t^2 dx + \rho_1 l \int_0^1 \theta_x u_t dx - \rho_1 m \int_0^1 (\varphi_t(y,t)\, dy)\, u_t dx \\ & +\rho_1 k_1 \int_0^1 w u_t dx - \rho_3 k \int_0^1 \theta(u_x+\varphi)\, dx + \rho_3\gamma \int_0^1 \theta^2 dx,\ t \geq 0. \end{aligned} \tag{21}$$

En vertu de l'inégalité de Young et de l'inégalité de Poincaré

$$-\rho_1 m \int_0^1 (\varphi_t(y,t)\, dy)\, u_t dx \leq \frac{\delta_1\rho_1\gamma}{2} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_1 m^2}{2\gamma\delta_1} \int_0^1 \varphi_t^2 dx, \tag{22}$$

$$\rho_1 l \int_0^1 \theta_x u_t dx \leq \frac{\rho_1\gamma}{4} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_1 l^2}{\gamma} \int_0^1 \theta_x^2 dx, \tag{23}$$

$$\rho_1 k_1 \int_0^1 w u_t dx \leq \frac{\rho_1\gamma}{4} \int_0^1 u_t^2 dx + \frac{\rho_1 k_1^2}{\gamma} \int_0^1 w_x^2 dx, \tag{24}$$

$$-\rho_3 k \int_0^1 \theta(u_x+\varphi)\, dx \leq \varepsilon_2 k \int_0^1 (u_x+\varphi)_x^2\, dx + \frac{\rho_3^2 k}{4\varepsilon_1} \int_0^1 w_x^2. \tag{25}$$

En remplaçant les estimations précédentes (22)-(25) dans (21), on obtient le résultat désiré. ■

Maintenant, nous sommes en mesure d'établir le résultat principal de cet article. Tout d'abord, nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov

$$F(t) = NE(t) + I_1(t) + N_1 I_2(t) + N_2 I_3(t), \ \forall t > 0, \tag{26}$$

où N, N_1 et N_2 sont des constantes positives à déterminer. Il est facile de voir que, pour N assez grand, F et E sont équivalents. Autrement dit, il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq F(t) \leq \beta_1 E(t), \ \forall t \geq 0. \tag{27}$$

Théorème 4.2.1 *Soit* (u, φ, w, θ) *la solution du problème déterminé par le système* (1)*. Si les données initiales satisfont la condition* (5) *; alors,*(u, φ, w, θ) *Décroît d'une manière exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives* C *et* d_1 *telles que*

$$E(t) \leq CE(0)\, e^{-d_1 t}, \ \forall t \geq 0. \tag{28}$$

Preuve. Prenant en compte (8), (10), (12), (20) et les relations

$$-\int_0^1 w_x^2 dx \leq -\int_0^1 w^2 dx, \tag{29}$$

$$\int_0^1 u_x^2 dx \leq 2\int_0^1 (u_x + \varphi)^2 dx + 2\int_0^1 \varphi_x^2 dx, \tag{30}$$

nous avons

$$\begin{aligned} F'(t) \leq \ & -\eta_1 \int_0^1 w_x^2 dx - \eta_2 \int_0^1 \theta_x^2 dx - \eta_3 \int_0^1 \varphi_x^2 dx \\ & -\eta_4 \int_0^1 (u_x + \varphi)^2 dx - \eta_5 \int_0^1 \varphi_t^2 dx - \eta_6 \int_0^1 u_t^2 dx, \end{aligned} \tag{31}$$

où η_i, $i = 1, 2, \cdots, 6$ sont définis comme suit

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= Nk_2 - \tfrac{d^2}{\alpha} - N_1 C_1(\varepsilon_1) - \tfrac{N_2 \rho_1 k_1^2}{\gamma}, \\
\eta_2 &= Nl - \left(\tfrac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} + \tfrac{m^2}{\alpha}\right) - N_1 C_2 - N_2 C_3(\varepsilon_2), \\
\eta_3 &= \tfrac{\alpha}{2} - N_1 \varepsilon_1 \alpha - 2\varepsilon_1, \\
\eta_4 &= k - N_1 \varepsilon_1 k - N_2 \varepsilon_2 k - 2\varepsilon_1, \\
\eta_5 &= \tfrac{N_1 \rho_2 d}{2} - \rho_2 - \tfrac{N_2 \rho_1 m^2}{2\delta_1 \gamma}, \\
\eta_6 &= \tfrac{N_2 \rho_1 \gamma}{2}(1 - \delta_1) - \rho_1.
\end{aligned}$$

Maintenant, les termes de(31) deviennent négatifs si nous sélectionnons nos paramètres de manière appropriée. Tout d'abord, prenons $\delta_1 = \frac{1}{2}$, et choisissons N_2 assez grand pour que

$$N_2 > \tfrac{4}{\gamma},$$

et N_1 assez grand pour que

$$N_1 > \tfrac{2}{\rho_2 d}\left(\tfrac{N_2 \rho_1 m^2}{\gamma} + \rho_2\right),$$

Ensuite, nous sélectionnons ε_1 assez petit pour que

$$\varepsilon_1 < \tfrac{1}{4}\min\left(\tfrac{\alpha}{N_1\alpha - 2}, \tfrac{k}{N_1 k - 2}\right),$$

et nous choisissons ε_2 assez petit tel que

$$\varepsilon_2 < \tfrac{1}{4N_2}.$$

Finallement, nous choisissons N assez grand pour que (28) reste valable et, de plus

$$N > \max\begin{pmatrix} l^{-1}\left[\tfrac{\gamma^2}{4\varepsilon_1} + \tfrac{m^2}{\alpha} + N_1 C_2 + N_2 C_3(\varepsilon_2)\right], \\ k^{-1}\left[\tfrac{d^2}{\alpha} + N_1 C_1(\varepsilon_1) + \tfrac{N_2 \rho_1 k_1^2}{\gamma}\right] \end{pmatrix}.$$

Tous ces choix avec la relation (31) conduisent à

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -C_4 \int_0^1 \left(u_t^2 + \varphi_t^2 + w^2 + \theta^2 + (u_x + \varphi)^2 + \varphi_x^2 \right) dx \\ &\leq -C_5 E(t), \end{aligned}$$

pour certaines constantes positives C_4 et C_5.

En remarquant que $E(t)$ et $F(t)$ sont équivalants, nous déduisons que

$$F'(t) \leq -d_1 F(t), \ t \geq 0, \tag{32}$$

où $d_1 = \frac{C_5}{\beta_2} > 0$. Une simple intégration de (32) donne

$$F'(t) \leq F(0) e^{-d_1 t}, \ t \geq 0,$$

ce qui donne le résultat désiré (28) en utilisant à nouveau l'autre côté de la relation d'équivalence. ■

Conclusion

Dans cette thèse nous avons établi trois résultats essentiels, en premier lieu on s'est intéressé à l'étude d'un problème non-linéaire. Et ceci, en construisant une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov équivalente à la fonctionnelle énergie et qui décroitre d'une manière exponentielle. Dans la deuxième partie, nous avons étudié la stabilité d'un système de type Timoshenko non-linéaire amortit par trois dissipations, une de type viscoélastique et deux autres de type frictions. En appliquant la méthode des multiplicateurs on a démontré la stabilité générale du système. Enfin, dans la dernière partie et qui consiste l'essentiel de ce travail, nous nous somme intéressé à un système poreux thermoélastique avec deux dissipations micro-température et thermale. Toujours, en utilisant la méthode d'énergie on établit un résultat de stabilité exponentielle.

Annexe

Bibliographie

[1] Andrade. D, Jorge Silva. M.A, and T. F. Ma, Exponential stability for a plate equation with p-Laplacian and memory terms, Math. Methods Appl. Sci. 35 (2012), no. 4, 417-426.

[2] Araruna. F.D, P. Braz e Silva, and Zuazua. E, Asymptotic limits and stabilization for 1D nonlinear Mindlin-Timoshenko system. J.Syst. Sci. Complex (2010) 23 : 1-17.

[3] Benabdallah. A and Lasiecka. I, Exponential decay rates for a full von Kármán system of dynamic thermoelasticity, J. Diff. Eqns, 160 (2000), 51-93.

[4] Benabdallah. A and Teniou. D, Exponential stability of a Von Kármán model with thermal effects, Electron. J. Diff. Eqns, 07 (1998), 1-13.

[5] Djebabla. A and Tatar. N, Exponential stabilization of the full von Kármán beams by a thermal effect and a frictional damping,Mathematics Subject,(2010),49K20,70K20.

[6] Djebabla. A and Tatar. N, Exponential stabilization of the Timoshenko system by a thermo-viscoelastic damping, Journal of Dynamical and Control System, Vol. 16, No. 2, April 2010, 189-210.

[7] Favini. A, Horn. A. M, Lasiecka . Iand Tataru, Global existence, uniqueness and regularity of solutions to a von Karman system with nonlinear boundary dissipation, Differential Integral Equation 9 (1996), no. 2,267-294.

[8] Hansen. S. W, Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod, J. Math. Anal. Appl., 167 (1992), 429-442.

[9] Horn. M.A and Laseicka. I, Global stabilization of a dynamic von Karman plate with nonlinear boundary feedback, Appl. Math. Optim. 31(1995), no. 1, 57-84.

[10] Horn . M.A and Lasiecka. I, Uniform decay of weak solutions to a von Karman plate with nonlinear boundary dissipation, Differential Integral Equations 7 (1994), no. 3-4, 885-908.

[11] Kim. J.U and Renardy. M, Boundary control of the Timoshenko beam. SIAM J. Control Optim. 25 (1987), 1417–1429.

[12] Lagnese.J.E, Boundary Stabilization of Thin Plates, SIAM Studies in Applied Mathematics10,Society for Industrial and Applied Mathematics,Philadelphia, 1989.

[13] Lagnese. J.E, Modlling and stabilization of nonlinear plates, in Estimation and Control of Distributed Parameter System (Vorau 1990), Internat. Ser. Numer. Math. 100, Birkhäuser, Basel (1991), 247-264.

[14] Lagnese. J.E, Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, Nonlinear Anal. 16 (1991), no. 1, 35-54.

[15] Lagnese. J.E and Leugering. G, Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback, J. Differential Equations 91 (1991), no. 2, 355-388.

[16] Lagnese. J.E and Lions. J.L, Modelling Analysis and control of Thin Plates. RMA 6, Masson, Paris, 1988

[17] Lasiecka. I, Uniform decay rates for full von Karman system of dynamic thermoelasticity with free boundary conditions and partial boundary dissipation, Comm. Partial Differential Equations 24 (1999), no. 9-10, 1801-1847.

[18] Lasiecka. I, Uniform stabilization of a full von Karman system with nonlinear boundary feedback, SIAMJ. Conrol Optim. 36 (1998), no. 4, 1376-1422.

[19] Liu. Z and Pang. C, Exponential stabilisaty of a viscoelastic Timoshenko beam. Adv. Math. Sci. Appl. 8(1998), No. 1, 343-351.

[20] Messaoudi. S and Fareh. F, General decay for a porous thermoelastic system with memory : The case of equal sppeds,Elsevier Ltd.All rights reserved, 2011.

[21] Messaoudi. S, General decay of solution of a weak viscoelastic equation. Arab J. Sci. Eng (2011) 36 :1569-1579.

[22] S. A. Messaoudi, T. A. Apalara, General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III. Arab, J, Math, Sci 20(2), (2014), 213-232.

[23] Muñoz Rivera, J.E. and Fernández Sare, H.D., Stability of Timoshenko systems with past history, J.Math. Anal. Appl. 339 (1) (2008), 482-502.

[24] Quintanilla. R, Slow decay in one-dimensional porous dissipation elasticity, Appl. Math. Lett. 16 (2003) 487-491.

[25] Quintanilla. R and Casas. P. S, Exponential decay in one-dimensional porous-thermo-elasticity, Mech. Res. Comm. 32 (2005) 652-658.

[26] Quintanilla. R and Racke. R, Stabilisation in thermoelasticity of type III. Discr. Contin. Dyn. Syst. Ser. B3 (2003), No. 3, 383-400.

[27] pazy. A, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlage, New York, v. 44, (1983). pp. 885-908

[28] Perla Menzala.G and Zuazua.E, Explicit exponential decay rates for solutions of von Kármán's system of thermoelastic plates.C. R. Acad.Sci. Paris,324(1997),49–54..

[29] Puel. J.P and Tucsnak. M, Boundary stabilization for the von Karman equations, SIAM J. Control optim. 33 (1995), no. 1, 255-273.

[30] Rapaso. C.A, Ferreira. J, Santos. M.L and Castro. N.N, Exponential stabilization for the Timoshenkho system with two weak dampings. ppl. Math. Lett. 18 (2005).

[31] Rivera. J. E. M and Racke. R, Midly dissipative nonlinear Timoshenko systems : Global existance and exponential stability. J. Math. nal. PPL. 276(2002), No. 1, 248-278.

[32] Soufyane. A, Stabilization de la poutre de Timoshenko. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 328 (1999), No. 8, 731-734.

[33] Sun Hye Park, Stability for a viscoelastic plate equation whith p-Laplacian. Bull. Korean. Math. Soc. 52(2015), No. 3, pp. 907-914.