وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

BADJI MOKHTAR-ANNABA UNIVERSITY
UNIVERSITE BADJI MOKHTAR-ANNABA

جامعة باجي مختار
- عنابة -

Année : 2018

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat

Sur quelques inégalités intégrales et leurs applications

Option : Modélisation Mathématique, contrôle optimal déterministe et stochastique

Par

Meziri Imen

DIRECTEUR DE THÈSE:	Boukerrioua Khaled	M.C.A	U.B.M. ANNABA
CO-DIRECTEUR DE THÈSE:	Laouar Abdelhamid	Prof.	U.B.M. ANNABA

Devant le jury

PRESIDENT :	Guezane- Lakoud Assia	Prof.	U.B.M. ANNABA
EXAMINATEUR :	Frioui Assia	M.C.A	Univ. GUELMA
EXAMINATEUR :	Khaldi Rabah	Prof.	U.B.M. ANNABA

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Dieu qui m'a donné force, et courage afin d'élaborer ce mémoire.

J'adresse mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, **Boukerrioua Khaled**, Maître de conférences à l'université d'Annaba pour la confiance qu'il m'a accordé, son suivi attentif, ses conseils avisés et surtout sa disponibilité. Je lui suis reconnaissante de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais.

Je remercie aussi le co-directeur de thèse Monsieur **Laouar Abdelhamid**, Professeur à l'université d'Annaba pour son aide et son soutien.

Mes remerciements les plus chaleureux à Madame **Guezane-Lakoud Assia**, Professeur à l'université d'Annaba qui a accepté de présider le jury de cette thèse.

Je remercie également, Madame **frioui Assia**, Maître de conférences à l'université de Guelma, Monsieur **Khaldi Rabah**, Professeur à l'université d'Annaba qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je ne saurais trouver les mots nécessaires pour exprimer ma profonde gratitude envers mes oncles **Mahmoud**, **Mohamed, et Rabah** pour leur réconfort moral et affectif prodigué sans relâche.

pour tous mes ami(e)s qui m'ont toujours soutenue durant ces années d'études, je les en remercie sincèrement.

Voici venir les derniers remerciements de ce mémoire et non pas des moindres, ils sont bien évidement adressés à mes très chers parents **Akila** et **Salah** qui font preuve d'un soutien inconditionnel, et à mes sœurs **Ryma**, **Mouna**, et **Bouchra**. Merci du fond du cœur d'avoir été et d'être toujours là pour moi.

Table des matières

Résumé

Il est bien connu que la théorie des inégalités intégrales joue un rôle essentiel dans l'étude de l'analyse qualitative et quantitative du comportement des solutions d'équations différentielles.

L'objectif de cette thèse est d'établir, en premier lieu, de nouvelles inégalités à retard non linéaires de type Gronwall-Bellman-Bihari qui sont des extensions des résultats de [2].

En deuxième lieu, nous avons établi de nouvelles inégalités de type Gamidov aux échelles de temps.

Enfin, nous avons étudié la h-stabilité de certains systèmes dynamiques non linéaires perturbés en utilisant quelques inégalités intégrales aux échelles de temps.

Mots-clés : Échelles de temps; Inégalité de Gronwall; Inégalité de Bihari; Inégalité de Gronwall-Bellman; Inégalité de Gamidov; Semi-groupe; h-Stabilité.

Abstract

It is well known that the theory of integral inequalities plays a key role in the study of qualitative and quantitative analysis behaviour of the solutions of differential equations.

The objective of this thesis is to establish, initially, new delay non-linear Gronwall-Bellman-Bihari type inequalities, which represent some extensions of the works from [2].

Next, we have established new generalizations of Gamidov type inequalities on time scales.

We conclude this thesis by studying the h-stability of some perturbed nonlinear dynamical systems by using some integral inequalities on time scales.

Keywords : Time scales; Gronwall's inequality; Bihari's inequality; Gronwall-Bellman's inequality; Gamidov's inequality; Semi-group; h-Stability.

ملـــخــــــص

من المعروف أن نظرية المتباينات التكاملية تلعب دورا رئيسيا في دراسة التحليل النوعي والكمي لسلوك حلول المعادلات التفاضلية.

حيث أن الهدف من هذه الأطروحة في البداية هو إنشاء متباينات جديدة غير خطية مع التأخير لنوع "جرنوال-بالمان-بيهاري"، والتي تمثل بعض التمديدات للعمل [2].

بعدها، أنشئنا تعميمات جديدة لمتباينات من نوع "جامدوف" على السلاسل الزمنية.

و في النهاية، استخدمنا بعض المتباينات التكاملية على السلاسل الزمنية لدراسة استقرار بعض الأنظمة الديناميكية غير الخطية في حالة وجود اضطراب.

الكلمات المفتاحية:

السلاسل الزمنية، متباينات جرنوال، متباينات بيهاري، متباينات جرنوال- بالمان، متباينات جامدوف، نصف زمرة، الاستقرار.

Introduction

Les inégalités sont au coeur de l'analyse mathématique depuis des siècles et possèdent un rôle éminent dans le développement de toutes les branches des mathématiques modernes telles que la théorie des espaces de Hilbert, l'analyse numérique, l'analyse complexe, les probabilités et les statistiques.

En effet, cette importance semble avoir considérablement pris de l'ampleur pendant le siècle dernier et la théorie des inégalités peut être considérée comme une branche à part et entière des mathématiques modernes. En particulier, les inégalités intégrales de divers types ont été largement étudiées dans la plupart des sujets impliquant l'analyse mathématique. Au cours des dernières années, divers chercheurs ont obtenu des nombreuses inégalités intégrales utiles dans les diverses types des équations différentielles et intégrales, où elles sont souvent la base des lemmes importants pour prouver des théorèmes ou pour rapprocher les différentes fonctions; citons en particulier, les inégalités de Pachpatte [55], Tricomi [65], Bainov et Simenov [7] et Dragomir [31].
Par ailleurs, la théorie des inégalités intégrales a émergé comme sujet intéressant et fascinant d'analyse avec un large éventail d'applications non seulement dans les mathématiques, mais également dans les domaines de la physique, de la technologie et des sciences biologiques; la plus connue parmi ces inégalités est sans doute, celle de Gronwall [39].

L'objectif de cette thèse est d'établir, dans un premier temps, de nouvelles généralisations des inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman à retard et celles de Gamidov-Bihari aux échelles de temps ainsi que leurs applications.
Dans un second temps, nous montrons l'utilité de quelques inégalités intégrales aux échelles de temps pour l'étude de la h-stabilité de certains systèmes perturbés.

Le premier chapitre, qui est plutôt un glossaire, regroupe quelques notions de base introductives et nécessaires à la compréhension de l'ensemble de cette thèse.

Le deuxième chapitre concerne les inégalités de type Granwall-Bellman-Bihari, dans lequel nous présentons tout d'abord quelques résultats classiques, puis nous citerons quelques généralisations apparues ces dernières années. Enfin, nous présentons de nouvelles généralisations qui sont illustrées par quelques applications.
Les résultats obtenus sont soumis pour une éventuelle publication dans une revue internationale.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des inégalités intégrales de type Gamidov. Nous allons citer brièvement les résultats classiques obtenus de ce type d'inégalités ainsi que quelques généralisations obtenues par Pachpatte [59] et Kendre & Latpate [47], puis nous allons établir des variantes des extensions et des raffinements des résultats obtenus par [47, 59], sur des échelles de temps quelconques. D'autres nouvelles inégalités de type Gamidov-Bihari sont démontrées.
Ces nouvelles inégalités ont contribué à l'étude d'une nouvelle classe d'équations intégrales et différentielles, et ont fait l'objet de la publication :

K. Boukerrioua, I. Meziri et T. Chiheb, Some refinements of certain Gamidov integral inequalties on time scales and applications. Kragujevac Journal of Mathematics.Vol 42, No. 1 (2018) , 131–152.

Le dernier chapitre est consacré à la caractérisation de la h-stabilité de quelques systèmes perturbés, en montrant l'utilité de quelques inégalités intégrales sur les échelles de temps. Nous allons alors montrer l'existence et l'unicité de la solution de certains systèmes perturbés, ensuite nous donnons l'étude de la h-stabilité en utilisant les inégalités intégrales. Ces nouveaux résultats ont été soumis pour une éventuelle publication dans une revue internationale.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons aborder quelques notions de base nécessaires pour introduire la théorie des échelles de temps. Aussi, nous rappelerons brièvement quelques notions fondamentales et des définitions relatives à la stabilité, les équations différentielles à retard et aux semi-groupes. Nous citerons également quelques inégalités importantes qui seront utiles tout au long de ce travail. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [5, 15, 45].

1.1 Notions de base sur les échelles de temps

Le calcul des échelles de temps a été initié par Stefane Hilger [44] dans sa thèse de doctorat en 1988 afin de mettre au point une nouvelle théorie qui peut unifier l'analyse discrète et continue, où il a défini la notion de la Δ-dérivée. C'est à partir de cette définition qu'ont été introduites les équations aux échelles de temps qui ont la même forme qu'une équation différentielle ou presque, à titre d'exemple: une équation du premier ordre dont la dérivée (u') est remplacée par la Δ-dérivée $\left(u^{\Delta}\right)$.

Nous verrons plus loin que si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies; d'ailleurs, l'intérêt pour ce dernier type d'équations a connu un essor considérable au cours des dernières années pour expliquer plusieurs phénomènes discrets notamment en économie, en psychologie, en génie et en informatique. Ainsi, la théorie des équations aux échelles de temps vient, dans un premier temps, pour unifier les résultats réalisés dans le domaine des équations différentielles et des équations aux différences finies. Dans un deuxième temps, elle permet l'étude des phénomènes se modélisant d'une façon qui fait appel simultanément au discret et au continu.

1.1.1 Terminologie

Définition 1.1.1 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un sous ensemble fermé non vide de* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.1 *Les ensembles* $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^+$, $[-1,0] \cup [1,2]$, $\overline{q^z} = \left\{q^k : k \in \mathbb{Z},\ q > 1\right\} \cup \{0\}$, $[0,1] \cup \mathbb{N}$ *et les ensembles de Cantor sont des échelles de temps.*

Exemple 1.1.2 *Les ensembles* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ *ne sont pas des échelles de temps.*

Remarque 1.1.1 *La topologie de* $\mathbb{T}$ *est induite par celle de* $\mathbb{R}$.

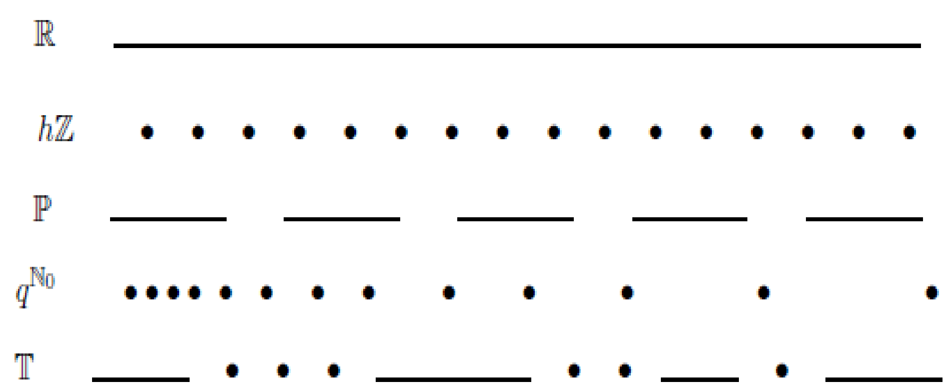

Figure 1.1.1 : Quelques échelles de temps

1.1.2 Opérateurs de saut et classification des points

Définition 1.1.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, pour* $t \in \mathbb{T}$, *l'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, *est défini comme suit :*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, pour $t \in \mathbb{T}$, l'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, est défini comme suit :*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}. \tag{1.2}$$

En utilisant les opérateurs $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ et $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, les points t dans une échelle de temps arbitraire $\mathbb{T}$ sont classés comme suit :

Définition 1.1.4 *On dit que t est un point dense à droite de $\mathbb{T}$ (resp. un point dense à gauche de $\mathbb{T}$), si $\sigma(t) = t$ (resp. $\rho(t) = t$).*

Définition 1.1.5 *On dit que t est un point dense s'il est simultanément dense à droite et à gauche.*

Définition 1.1.6 *On dit que t est un point dispersé à droite de $\mathbb{T}$ (resp. un point dispersé à gauche de $\mathbb{T}$), si $\sigma(t) > t$ (resp. $\rho(t) < t$).*

Définition 1.1.7 *t est dit point isolé s'il est simultanément dispersé à droite et à gauche.*

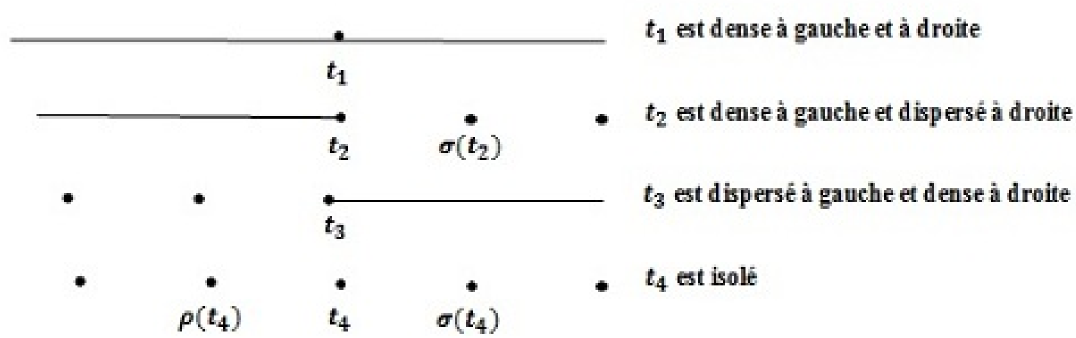

Figure 1.1.2 : Classification des points

Définition 1.1.8 *On appelle fonction de granulation la fonction définie par*

$$\mu : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ \mu(t) = \sigma(t) - t\ . \tag{1.3}$$

Nous illustrons les définitions précédentes par quelques ensembles des échelles de temps ainsi que leurs caratéristiques (opérateurs de saut, fonction de granulation) indiquées dans le tableau ci-dessous

[Tab.1.1.1] Quelques échelles de temps et leurs caratéristiques

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$k\mathbb{Z}$	$q^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}_0^2$	$[0,1] \cup [2,3]$
$\sigma(t)$	t	$t+1$	$t+k$	qt	$(\sqrt{t}+1)^2$	$\begin{cases} t \text{ si } t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 2 \text{ si } t = 1 \end{cases}$
$\rho(t)$	t	$t-1$	$t-k$	$\frac{t}{q}$	$(\sqrt{t}-1)^2$	$\begin{cases} t \text{ si } t \in [0,1] \cup]2,3] \\ 1 \text{ si } t = 2 \end{cases}$
$\mu(t)$	0	1	k	$(q-1)t$	$2\sqrt{t}+1$	$\begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,1[\cup [2,3] \\ 1 \text{ si } t = 1. \end{cases}$

1.1.3 Les sous-ensembles dérivés d'une échelle de temps

Soit m l'élément maximum dans une échelle de temps $\mathbb{T}$.
L'ensemble $\mathbb{T}^k$ représenté dans la figure 1.1.3 est défini comme suit : si le point m est dispersé à gauche alors, $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$. Alternativement,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} \diagup]\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \text{si } \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T} & \text{si } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$$

Figure 1.1.3 : Illustration de l'ensemble $\mathbb{T}^k$

Notons que de chaque échelle de temps, nous pouvons extraire le sous ensemble suivant :

Définition 1.1.9 *Pour deux points $a, b \in \mathbb{T}$, l'intervalle d'échelle de temps est défini par :*

$$[a,b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} \ : a \leq t \leq b\}.$$

Remarque 1.1.2 *Nous notons par* $[a,b]^k = [a,b) = [a,\rho(b)]$ *dans le cas où* b *est un point dispersé à gauche, sinon* $[a,b]^k = [a,b]$.

Les résultats présentés dans les sous-sections suivantes sont tirés des deux livres [15, 16].

1.1.4 Dérivation sur les échelles de temps

Nous rappelons en premier temps, la définition de la Δ-dérivée dite aussi la dérivée au sens de Hilger.

Définition 1.1.10 *Soit la fonction* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, f *est dite* Δ*-différentiable en* $t \in \mathbb{T}^k$ *s'il existe un nombre* $f^{\Delta}(t)$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* U *de* t *satisfaisant*

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon \left|\sigma(t) - s\right|,$$

pour tout $s \in U$. *Si* f *est* Δ*-différentiable en tout point* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors la fonction* $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite la* Δ*-dérivée de* f *sur* $\mathbb{T}^k$.

Le théorème suivant donne plusieurs observations importantes sur la Δ-dérivée.

Théorème 1.1.1 *Soit* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* $t \in \mathbb{T}^k$.

(i) *Si* f *est* Δ*-différentiable en* t, *alors* f *est continue en* t.

(ii) *Si* f *est continue en* t *et si* t *est dispersé à droite, alors* f *est* Δ*-différentiable en* t, *de plus nous avons*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.4}$$

(iii) *Si* t *est dense à droite, alors* f *est* Δ*-différentiable en* t *si et seulement si*

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe et est finie. Dans ce cas nous avons

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

(iv) *Si* f *est différentiable en* t, *alors*

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.5}$$

Exemple 1.1.3 *Considérons l'ensemble* $\mathbb{T} = \left\{ \sqrt[4]{2n+1},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ *avec* $\mathbb{N}_0$ *est l'ensemble des entiers non négatifs,* $f(t) = t^4$*,* $t \in \mathbb{T}$*.*
Pour tout $t, s \in \mathbb{T}$*,* $t = \sqrt[4]{2n+1}$*,* $s = \sqrt[4]{2l+1}$*,* $n = \frac{t^4-1}{2}$*,* $n, l \in \mathbb{N}_0$*, nous avons*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\left\{ \sqrt[4]{2l+1} : \sqrt[4]{2l+1} > \sqrt[4]{2n+1} \right\} = \sqrt[4]{2n+3} \\ &= \sqrt[4]{t^4+2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, chaque point de $\mathbb{T}$ *est dispersé à droite. Nous notons que la fonction* $f(t)$ *est continue sur* $\mathbb{T}$*. Ainsi,*

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{\sigma^4(t) - t^4}{\sigma(t) - t} \\ &= \sigma^3(t) + t\ \sigma^2(t) + t^2\sigma(t) + t^3 \\ &= \sqrt[4]{(t^4+2)^3} + t^2\sqrt[4]{t^4+2} + \ t\sqrt{t^4+2} + t^3, t \in \mathbb{T}^k. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.3

- *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$*, alors d'après (iii) du théorème précédent la fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* $t \in \mathbb{R}$*, si et seulement si*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe et de plus, $f^{\Delta}(t) = f'(t)$*.*

- *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$*, d'après (ii) la fonction* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* $t \in \mathbb{Z}$ *et nous aurons*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

Le théorème suivant établit quelques identités de base pour calculer la Δ-dérivée.

Théorème 1.1.2 *Si* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *sont* Δ*-différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$*, alors*

(i) $f + g$ *est* Δ*-différentiable en* t*, de plus*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

(ii) (αf) *est* Δ*-différentiable en* t *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et nous avons*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

(iii) fg *est* Δ*-différentiables en* t *et nous avons*

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)\, g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)\, g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)\, g(\sigma(t)).\end{aligned}$$

(iv) Si $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et nous avons*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

(v) Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et nous avons*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)\, g(t) - f(t)\, g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Exemple 1.1.4 *Soient* $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions définies par* $f(t) = t^2$, $g(t) = t^3$ *et soit la fonction* $h(t) = \frac{1}{t^2}$, *pour tout* $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$. *D'après la règle de la différentiation du produit (voir (iii) du théorème ci-dessus), nous obtenons*

$$\begin{aligned}f^{\Delta}(t) &= tt^{\Delta} + t^{\Delta}\sigma(t) = t + \sigma(t). \\ g^{\Delta}(t) &= t^2 t^{\Delta} + (t^2)^{\Delta}\sigma(t) = t^2 + t\ \sigma(t) + \sigma^2(t),\ \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.\end{aligned}$$

En utilisant (iv) du théorème ci-dessus, nous obtenons

$$h^{\Delta}(t) = \frac{-(t^2)^{\Delta}}{(t\sigma(t))^2} = -\frac{t + \sigma(t)}{(t\sigma(t))^2}, t \in \mathbb{T}^k \setminus \{0\}.$$

Théorème 1.1.3 *Soit* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue,* $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* $\mathbb{T}^k$ *et si* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continûment différentiable, alors il existe* $c \in [t, \sigma(t)]$ *satisfaisant*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = f'(g(c))\, g^{\Delta}(t).$$

Définition 1.1.11 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Remarque 1.1.4 *L'ensemble de toutes les fonctions rd-continues est noté par* C_{rd} *ou* $C_{rd}(\mathbb{T})$.

Remarque 1.1.5 *L'ensemble de toutes les fonctions* Δ*-différentiables et rd-continues est noté par* C_{rd}^{1} *ou* $C_{rd}^{1}(\mathbb{T})$.

1.1.5 Intégration sur les échelles de temps

Définition 1.1.12 *La fonction* $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, *est dite primitive de* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, *si elle vérifie* $F^{\Delta}(t) = f(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}^{k}$.

Exemple 1.1.5 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2$ *et* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction définie par* $f(t) = \frac{1}{1+2\sqrt{t}} \log\left(\frac{(\sqrt{t}+1)^2}{t}\right)$, *alors la fonction* $g(t) = \log t$ *est une primitive de* f. *En effet:* $\sigma(t) = \left(\sqrt{t}+1\right)^2$ *et pour tout* $t \in \mathbb{T}^{k}$, *nous avons*

$$\begin{aligned} g^{\Delta}(t) &= \frac{\log(\sigma(t)) - \log t}{\sigma(t) - t} \\ &= \frac{\log\left((\sqrt{t}+1)^2\right) - \log t}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2 - t} \\ &= \frac{1}{1+2\sqrt{t}} \log\left(\frac{\left(\sqrt{t}+1\right)^2}{t}\right) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Théorème 1.1.4 *Toute fonction rd-continue* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, *admet une primitive* $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, *et nous notons*

$$\int_s^r f(t)\, \Delta t = F(r) - F(s) \quad \text{pour tout } r, s \in \mathbb{T}.$$

Théorème 1.1.5 *Si* $f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ *et* $t \in \mathbb{T}^{k}$, *nous avons :*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\, \Delta\tau = \mu(t)\, f(t).$$

Théorème 1.1.6 *Soit $a, b, c \in \mathbb{T}, \lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T})$ alors :*

i) $\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t.$

ii) $\int_a^b (\lambda f(t)) \Delta t = \lambda \int_a^b f(t) \Delta t.$

iii) $\int_a^b f(t) \Delta t = -\int_b^a f(t) \Delta t.$

iv) $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t.$

v) $\int_a^a f(t) \Delta t = 0.$

vi) Si $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a, b]_{\mathbb{T}}$, *alors* $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t.$

Proposition 1.1.1

• *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nous avons :*

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt.$$

• *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, nous avons :*

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t) \ \ si\ a < b \\ 0 \ \ si\ a = b \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t) \ \ si\ a > b. \end{cases}$$

• *Si $[a, b]$ contient des points isolés alors :*

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t \in [a,b[} \mu(t) f(t) \ \ si\ a < b \\ 0 \ \ si\ a = b \\ -\sum\limits_{t \in [b,a[} \mu(t) f(t) \ \ si\ a > b. \end{cases}$$

Proposition 1.1.2 *Les formules d'intégration par partie sont :*

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{\sigma}(t) g^{\Delta}(t) \Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t) g(t) \Delta t, \\ \int_a^b f(t) g^{\Delta}(t) \Delta t &= [(fg)(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f^{\Delta}(t) g^{\sigma}(t) \Delta t. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.7 *Soit $a \in \mathbb{T}^k$, $b \in \mathbb{T}$ et $L : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$, est continue en (t, t), pour $t \in \mathbb{T}^k$, $t > a$ et $L^{\Delta}(t, .)$ est rd-continue sur $[a, \sigma(t)]$, nous supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\ U$ voisinage de t indépendant de $\tau \in [a, \sigma(t)]$ tel que :*

$$\left| L(\sigma(t), \tau) - L(s, \tau) - L^{\Delta}(t, \tau)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \qquad \forall s \in U,$$

où f^{Δ} dénote la dérivée de f par rapport à la $1^{ière}$ variable, alors nous avons :

$$g(t) = \int_a^t L(t,\tau)\,\Delta\tau \Rightarrow g^{\Delta}(t) = \int_a^t L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau + L(\sigma(t),\tau),$$

et

$$h(t) = \int_t^b L(t,\tau)\,\Delta\tau \Rightarrow h^{\Delta}(t) = \int_t^b L^{\Delta}(t,\tau)\,\Delta\tau - L(\sigma(t),\tau).$$

1.1.6 Fonction exponentielle

Définition 1.1.13 *Soit $h > 0$, l'ensemble des nombres complexes de Hilger est défini comme suit : $\mathbb{C}_h = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{-1}{h}\right\}$.*

Définition 1.1.14 *Pour $h > 0$, on définit l'ensemble $\mathbb{Z}_h = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{-\Pi}{h} < \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\Pi}{h}\right\}$ et pour $h = 0$, on fixe $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.*

Définition 1.1.15 *Pour $h > 0$, la transformation cylindrique $\xi_h : \mathbb{C}_h \longmapsto Z_h$, est définie par :*

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h}\,\mathrm{Log}(1 + zh),$$

où Log est le logarithme principal. Pour $h = 0$, nous aurons : $\xi_0(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition 1.1.16 *Soit $p : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, p est dite régressive si elle vérifie*

$$1 + \mu(t)\,p(t) \neq 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Remarque 1.1.6 *Pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues est noté par $\Re$.*

Définition 1.1.17 *L'ensemble de toutes les fonctions régressives positives est défini par :*

$$\Re^+ = \left\{p \in \Re : 1 + \mu(t)\,p(t) > 0, \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k\right\}. \tag{1.6}$$

Théorème 1.1.8 *Nous supposons que $p \in \Re$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ un point fixé, alors le problème à valeur initiale*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)\,y(t),\ y(t_0) = 1, \tag{1.7}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{T}$.

Définition 1.1.18 *Soit $p \in \Re$, la fonction exponentielle est définie comme solution du problème* (1.7) *et nous avons*

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ pour } t, t_0 \in \mathbb{T},$$

nous la notons souvent par

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \text{ pour } t, t_0 \in \mathbb{T},$$

où ξ_μ est la transformation cylindrique donnée par la définition 1.1.15.

Proposition 1.1.3 *Soit $p, q \in \Re$ et $t, t_0, s \in \mathbb{T}$, alors*

- ♦ $e_0(t, t_0) \equiv 1$ et $e_p(t, t) \equiv 1$,
- ♦ $e_p(\sigma(t), t_0) = (1 + \mu(t)p(t))\, e_p(t, t_0)$,
- ♦ $e_p(t, t_0)\, e_p(t_0, s) = e_p(t, s)$,
- ♦ $e_p(t, t_0) = \frac{1}{e_p(t_0, t)}$,
- ♦ $e_p(t, t_0)\, e_q(t, t_0) = e_{p\oplus q}(t, t_0)$ où $(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)\, p(t)\, q(t)$, $\forall t \in \mathbb{T}^k$.

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [15, 16].

Exemple 1.1.6 *Soit $p \in \Re$, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ et $t > t_0$,*

- si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors $e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau\right)$,
- si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ et $p(t) \equiv \alpha$, alors $e_p(t, t_0) = e^{\alpha(t-t_0)}$,
- si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, alors $e_p(t, t_0) = \prod_{\tau=t_0}^{\tau=t-1} (1 + p(\tau))$,
- si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, avec $h > 0$ et $p(t) \equiv \alpha$, alors $e_p(t, t_0) = (1 + \alpha h)^{\frac{t-t_0}{h}}$.

1.2 Notions fondamentales de stabilité

La stabilité est l'une des notions les plus utilisées pour étudier les comportements qualitatifs des systèmes différentiels ainsi que les équations aux différences.
La première étude de stabilité aux échelles de temps a été réalisée en 1892, par l'utilisation de la méthode de Lyapunov.
Les définitions de stabilité des systèmes sur les échelles de temps sont obtenues avec une légère modification de leurs définitions standard pour les équations différentielles ordinaires. Hamza [42] et Dacunha [28] ont donné des caractérisations généralisées des différents types de stabilité (stabilité uniforme, stabilité exponentielle, h-stabilité...) des solutions pour des systèmes dynamiques aux échelles de temps.

Considérons l'équation dynamique définie sur une échelle de temps $\mathbb{T}$ comme ci-dessous

$$x^{\Delta}(t) = f(t,x), \; x(t_0) = x_0 \in X \tag{1.9}$$

où $t, t_0 \in \mathbb{T}$, $x \in X$, $f : \mathbb{T} \times X \to X$ est rd-continue en t avec $f(t,0) = 0$ et X est un espace de Banach.

Définition 1.2.1 ([42]) *L'équation* (1.9) *est dite exponentiellement stable s'il existe* $\alpha > 0$ *avec* $-\alpha \in \Re^+$ *tel que pour tout* $t_0 \in \mathbb{T}$, *il existe* $\gamma = \gamma(t_0) \geq 1$ *tel que, toute solution* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *de l'équation* (1.9) *satisfait* $\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| e_{-\alpha}(t, t_0)$, *pour tout* $t \geq t_0$, $t \in \mathbb{T}$.

Définition 1.2.2 ([42]) *L'équation* (1.9) *est dite uniformément exponentiellement stable s'il existe* $\alpha > 0$ *avec* $-\alpha \in \Re^+$ *et il existe* $\gamma \geq 1$ *indépendant de tout point initial* t_0 *tel que, toute solution* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *de l'équation* (1.9) *satisfait* $\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| e_{-\alpha}(t, t_0)$, *pour tout* $t \geq t_0$, $t \in \mathbb{T}$.

Définition 1.2.3 ([42]) *Soit* $h : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction positive et bornée. On dit que l'équation* (1.9) *est* h*-stable s'il existe une constante* $\gamma \geq 1$ *telle que, toute solution* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *de l'équation* (1.9) *satisfait*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) \, h(t_0)^{-1}, \; t \geq t_0,$$

(*ici* $(h(t))^{-1} = \frac{1}{h(t)}$).

Remarque 1.2.1 *Si nous prenons $h(t) = e_{-\alpha}(t, 0)$ où $\alpha > 0$ et $-\alpha \in \Re^+$. La h-stabilité de l'équation* (1.9) *coïncide avec la stabilité exponentielle uniforme.*

Remarque 1.2.2 *Si $X = \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction rd-continue en t, localement Lipchitzienne en x, et regressive (i.e., la fonction $id + \mu(t)f(t, .) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible). Nous obtenons les implications suivantes :*

$$\begin{aligned} h\text{-stabilité} &\Longrightarrow \text{stabilité exponentielle uniforme} \\ &\Longrightarrow \text{stabilité de Lipschitz uniforme} \\ &\Longrightarrow \text{stabilité uniforme.} \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur les différents types de stabilité, se réferer à [25, 28, 42].

L'analyse de la stabilité des systèmes linéaires non-autonomes peut être complètement caractérisée en termes de la résolvante du système étudié. En effet, considérons le problème

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t), x(t_0) = I_n, \tag{1.10}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ et $A : \mathbb{T} \longmapsto \mathrm{R}^{n\times n}$ une matrice rd-continue, régressive, dépend de t.

Définition 1.2.4 *L'application $A : \mathbb{T} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ est appelée régressive, si pour tout $t \in \mathbb{T}$ la matrice carré $I + \mu(t)A$ de degré $n \times n$ est inversible, où I est la matrice identité.*

La classe de toutes les fonctions régressives et rd-continues A de $\mathbb{T}$ vers $M_n(\mathbb{R})$ est notée par $C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$.

Définition 1.2.5 *Pour $t_0 \in \mathbb{T}$, la solution du problème* (1.10) *s' appelle exponentielle de la fonction matricielle, notée par $\phi_A(t, t_0)$, où $A \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$.*

En conséquence, la fonction $\phi_A(t, t_0)$ possède les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_A^{\Delta}(t, t_0) &= A(t)\phi_A(t, t_0), \\ \phi_A(t_0, t_0) &= I_n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Cette fonction matricielle est appelée matrice de transition et notre hypothèse sur $A(t)$ montre que la matrice de transition existe et elle est unique.

Théorème 1.2.1 *Supposons $r, s, t \in \mathbb{T}$ et $A, B \in C_{rd}\Re(\mathbb{T}, M_n(\mathbb{R}))$, alors la matrice de transition possède les propriétés suivantes :*

(i) $\phi_A(t,r)\phi_A(r,s) = \phi_A(t,s)$.

(ii) $\phi_A(\sigma(t), s) = (I + \mu(t)A(t))\phi_A(t,s)$.

(iii) *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *et* A *est constante, alors* $\phi_A(t,s) = e_A(t,s) = e^{A(t-s)}$.

(iv) *Si* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *avec* $h > 0$ *et* A *est constante, alors* $\phi_A(t,s) = (I + hA)^{\frac{(t-s)}{h}}$.

1.3 C_0 semi-groupes et leurs générateurs

Définition 1.3.1 *Soit $L(X)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés d'un espace de Banach X. On appelle C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés dans X, une famille $\{T(t) : t \in \mathbb{T}\} \subset L(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $T(t+s) = T(s)T(s)$ *pour tout* $t, s \in \mathbb{T}$ *(la propriété du semi-groupe),*

2. $T(0) = I$, *(I est l'opérateur identité dans X),*

3. $\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x$ *pour tout* $x \in X$,

où l'échelle de temps $\mathbb{T}$ est un semi-groupe additif de $\mathbb{R}_+$.

Si de plus $\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$, alors T s'appelle un semi-groupe continu uniformément.

Définition 1.3.2 *On dit qu'un opérateur linéaire A est l'opérateur générateur de T si*

$$Ax = \lim_{s\to 0^+} \frac{T(\mu(t))x - T(s)x}{\mu(t) - s}, \ x \in D(A), \tag{1.14}$$

où le domaine $D(A)$ de A est l'ensemble de tout $x \in X$ pour lequel la limite ci-dessus existe uniformément en t.

La référence [43] donne plus de détails sur les propriétés d'un C_0 semi-groupe T et son générateur A.

1.4 Quelques inégalités importantes

Dans cette section, nous donnons un petit rappel de quelques classes de fonctions ainsi que des inégalités utiles dans cette étude.

Définition 1.4.1 ([29]) *Soit g une fonction continue positive et croissante définie sur $\mathbb{R}_+$, g est dite de classe $\mathcal{S}$, si elle vérifie*

$$\frac{1}{a}g(x) \leq g(\frac{x}{a}) \quad \textit{pour tout } x \geq 0 \textit{ et } a \geq 1.$$

Définition 1.4.2 ([29]) *Soit g une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, g est dite de classe $\mathcal{T}$, si elle vérifie*

$$\frac{1}{a}g(x) \geq g(\frac{x}{a}) \quad \textit{pour tout } x \geq 0 \textit{ et } a \geq 1.$$

Lemme 1.4.1 ([46]) *Supposons $a \geq 0$, $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$, nous avons*

$$a^{\frac{q}{p}} \leq \frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}a + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}$$

pour tout $k > 0$.

Lemme 1.4.2 ([7]) *Soient b et f deux fonctions continues sur $I = [\alpha, \beta]$ et soit υ une fonction différentiable sur I. Si les inégalités*

$$\begin{aligned} \upsilon'(t) &\leq b(t)\upsilon(t) + f(t), \qquad t \in I \\ \upsilon(\alpha) &\leq \upsilon_0, \end{aligned}$$

sont satisfaites, alors

$$\upsilon(t) \leq \upsilon_0 \exp\left(\int_{\alpha}^{t} b(s)ds\right) + \int_{\alpha}^{t} f(s)\exp\left(\int_{s}^{t} b(\tau)d\tau\right)ds, \ t \in I.$$

Lemme 1.4.3 ([15]) (*Comparaison*)

On suppose que $x, b \in C_{rd}$, $a \in \Re^+$. Si

$$x^{\Delta}(t) \leq a(t)\,x(t) + b(t), \ t \geq t_0, \ t \in \mathbb{T}^k.$$

Alors,

$$x(t) \leq x(t_0)\,e_a(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_a(t,\sigma(s))\,b(s)\,\Delta s, t \geq t_0, \ t \in \mathbb{T}^k.$$

Lemme 1.4.4 ([11]) *Soit p une fonction positive et rd-continue, nous avons les inégalités*

$$1+\int_{t_0}^{t} p(\tau)\Delta\tau \leq e_p(t,t_0) \leq \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(\tau)\Delta\tau\right), \quad \textit{pour tout } t\in\mathbb{T}^+_{t_0}.$$

où $\mathbb{T}^+_{t_0}=\{t,t_0\in\mathbb{T}, t\geq t_0\}$.

Lemme 1.4.5 ([11]) *Supposons que* $t_0\in\mathbb{T}$. *Si* U, δ, $\vartheta\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)$ *et* δ *est une fonction delta-différentiable sur* $\mathbb{T}$ *avec* $\delta^\Delta(t)\geq 0$. *Si* U *satisfait*

$$U(t)\leq\delta(t)+\int_{t_0}^{t}\vartheta(s)U(s)\Delta s,\ \ t\in\mathbb{T}^k,$$

alors, nous avons

$$U(t)\leq\delta(t_0)e_\vartheta(t,t_0)+\int_{t_0}^{t}\delta^\Delta(s)e_\vartheta(t,\sigma(s))\Delta s, \quad t\in T^k.$$

Lemme 1.4.6 ([15]) (*Inégalité de Hölder*)

Soient $a,b\in\mathbb{T}$ *et* $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *deux fonctions rd-continues, nous avons*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\,\Delta t\leq\left[\int_a^b |f(t)|^p\,\Delta t\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b |g(t)|^q\,\Delta t\right]^{\frac{1}{q}},$$

où $p>1$*et* $q=\frac{p}{p-1}$.

1.5 Équation différentielle à retard

Définition 1.5.1 *Une équation différentielle à retard (EDR) est une équation différentielle où la variable d'état apparaît avec un argument retardé, autrement dit lorsque l'état à un instant donné est une fonction de son passé. Cela peut s'exprimer comme suit :*

$$u^{'}(t)=f(t,u(t),u(t-\tau)), \qquad\qquad u(t)\in\mathbb{R},$$

où le retard $\tau>0$ *est constant.*

Exemple 1.5.1 ([27]) *Considérons l'évolution d'une population animale ne tenant compte que de la natalité et de la mortalité naturelle. En supposant que la mortalité est instantanée dans la population, par rapport à l'échelle de temps considérée (typiquement, la semaine ou le mois), la description de l'évolution de cette population nécessite de connaitre* *le nombre d'individus à l'instant* t*, que l'on peut noter* $N(t)$*, mais également le nombre d'individus à l'instant* $t-\tau$*, où* τ *est la durée de gestation moyenne de la population. On peut alors écrire l'équation linéaire à retard discret suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= -aN(t)+bN(t-\tau), t>0, \\ N(t) &= \Phi(t), t \in [-\tau, 0], \end{aligned}$$

où a *et* b *sont respectivement les taux de mortalité et de naissance de la population et* Φ *une condition initiale, définie sur l'intervalle* $[-\tau, 0]$*.*

CHAPITRE 2 Inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman-Bihari à retard

Diverses inégalités intégrales ont joué un rôle important dans le développement de la théorie des équations intégrales et plus généralement dans la théorie des équations différentielles ordinaires, au point de vue existence et unicité des solutions et de la stabilité des points d'équilibres. Les inégalités intégrales qui sont appliquées fréquemment dans la littérature, sont les célèbres inégalités de Gronwall-Bellman [9]. Leur première généralisation non linéaire due au Bihari [14]. Des généralisations et des applications de l'inégalité de Gronwall-Bellman ont été obtenues par de nombreux auteurs ([2], [8], [18], [29], [33], [35], [36], [48], [56]).

Nous commençons ce chapitre en citant quelques inégalités intégrales linéaires classiques de type Gronwall-Bellman en une dimension. Nous donnons par la suite quelques généralisations de ces inégalités intervenant dans les équations différentielles ordinaires et à retard.

Nous concluons ensuite ce chapitre par donner des nouvelles généralisations des inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman à retard, illustrées par deux applications. Les nouveaux résultats obtenus ont été soumis pour une éventuelle publication dans une revue internationale.

2.1 Quelques célèbres inégalités intégrales unidimensionnelles

En 1919, Gronwall, a établi une remarquable inégalité suscitant l'attention de plusieurs mathématiciens, dont l'énoncé est le suivant :

Lemme 2.1.1 ([39]) *Soit u une fonction continue sur $I = [\alpha, \alpha + h]$ et a et b sont deux constantes positives. Si l'inégalité*

$$0 \leq u(t) \leq \int_{\alpha}^{t} [bu(s) + a]\, ds, \ t \in I,$$

est vérifiée, alors

$$0 \leq u(t) \leq ah \exp(bh), \ t \in I.$$

En 1943, Bellman a démontré une inégalité similaire dans le cas, où b est une fonction dépendante de la variable t et elle porte le nom d'inégalité de type Gronwall-Bellman. Ce résultat a été repris dans le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 ([9]) *Soient u et g deux fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$ et c une constante positive. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} g(s)u(s)ds, \ t \in I,$$

est vérifiée, alors

$$u(t) \leq c \exp(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds), \ t \in I.$$

En 1956, Bihari a prouvé une inégalité encore plus générale que celle de Gronwall-Bellman, dont l'intitulé est :

Théorème 2.1.2 ([14]) *Soient u, f deux fonctions continues positives sur $\mathbb{R}_+$, w une fonction croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, vérifiant $w(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et c une constante positive. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(s)w(u(s))ds,$$

est satisfaite pour tout $t \geq 0$, alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left(G(c) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right) \qquad \text{pour tout } \; 0 \leq t \leq T,$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{w(s)}ds, \qquad t > t_0 > 0.$$

G^{-1} est la fonction inverse de G, T est choisi de telle sorte que $\left\{G(c) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds\right\} \in$ Dom G^{-1} pour tout $0 \leq t \leq T$.

Nous présentons maintenant une des inégalités la plus utile dans le développement de la théorie des équations différentielles. Cette dernière est prouvé par Ou-Iang en 1957.

Théorème 2.1.3 ([71]) *Soient u et g deux fonctions continues et positives sur $\mathbb{R}_+$ et soit u_0 une constante positive, si l'inégalité*

$$u^2(t) \leq u_0^2 + 2\int_{0}^{t} g(s)u(s)ds,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq u_0 + \int_{0}^{t} g(s)ds.$$

Remarque 2.1.1 *L'inégalité de Ou-Iang* (1957) *a été utilisée pour établir la bornitude des solutions de certaines équations différentielles de second ordre, elle a permis d'exploiter les propriétés des solutions des différents types d'équations différentielles non linéaires telles que l'existence globale, l'unicité, la stabilité.*

En 1958, Bellman généralisa son propre Théorème 2.1.1 comme suit :

Théorème 2.1.4 ([10]) *Soient u et g deux fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$ et soit n une fonction continue, positive et croissante définie sur I. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} g(s)u(s)ds, \ t \in I,$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq n(t) \exp(\int_{\alpha}^{t} g(s)ds), \ t \in I.$$

En 1967, Chu and Metcalf ont établi une variante de l'inégalité de Gronwall-Bellman dans le cas où la fonction g dépendra du paramètre t (i.e., $g(s) = k(t,s)$), dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 2.1.5 ([26]) *Soient u et f deux fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$ et $k(t,s)$ une fonction continue et positive sur le triangle $\Delta : \alpha \leq s \leq t \leq \beta$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq f(t) + \int_{\alpha}^{t} k(t,s)u(s)ds, \ t \in I,$$

alors,

$$u(t) \leq f(t) + \int_{\alpha}^{t} H(t,s)f(s)ds, \ t \in I,$$

où

$$H(t,s) = \sum_{t=1}^{\infty} k_i(t,s), \ (t,s) \in \Delta,$$

est le noyau résolvant.

En 1969, Gollwitzer prouva une inégalité encore plus générale que celle de Bellman donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.1.6 ([38]) *Soient u, f, g et h des fonctions continues et positives sur $I = [\alpha, \beta]$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_{\alpha}^{t} h(s)u(s)ds, \ t \in I,$$

est vérifiée, alors

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_{\alpha}^{t} h(s)f(s) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} h(\tau)g(\tau)d\tau\right)ds, \ t \in I.$$

Györi a, en 1971*, établi une variante de Théorème* 2.1.2.

Théorème 2.1.7 ([40]) *Soient u et β deux fonctions continues et positives sur $I = [t_0, \infty)$ et soient f, g et α des fonctions différentiables avec f positive, g positive et croissante et α positive et décroissante. Supposons que*

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_{t_0}^{t} \beta(s)g(u(s))ds.$$

Si

$$f'(t)\left\{\frac{1}{g(\eta(t))} - 1\right\} \leq 0, \quad sur\ I\ ,$$

pour toute fonction continue et positive η, alors

$$u(t) \leq G^{-1}\left\{G(f(t_0)) + \int_{t_0}^{t} [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)]\, ds\right\},$$

où G est solution de l'équation intégrale suivante

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{g(s)}ds; \qquad t > t_0 > 0.$$

G^{-1} est la fonction inverse de G et $\left\{G(f(t_0)) + \int_{t_0}^{t} [\alpha(s)\beta(s) + f'(s)]\, ds\right\} \in Dom\ G^{-1}$.

En 1987, Norbury et Stuart ont établi une autre variante du Théorème 2.1.5.

Théorème 2.1.8 ([54])*Soient $u(t)$ et $k(t, s)$ définies comme dans le Théorème* 2.1.5 *sachant que $k(t, s)$ est croissante par rapport à t pour tout $s \in I$.*

i) Si l'inégalité

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} k(t,s)u(s)ds,\ t \in I$$

est satisfaite pour toute constante $c \geq 0$, alors

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_{\alpha}^{t} k(t,s)ds\right),\ t \in I.$$

ii) Soit n une fonction continue, positive et croissante sur I. Si

$$u(t) \leq n(t) + \int_{\alpha}^{t} k(t,s)u(s)ds,\ t \in I$$

est satisfaite, alors

$$u(t) \leq n(t) \exp\left(\int_{\alpha}^{t} k(t,s)ds\right),\ t \in I.$$

Dans la section suivante, nous allons présenter quelques généralisations apparues dans les revues mathématiques [2, 17, 35, 34, 56]. Ces généralisations sont utilisées comme un outil très important dans l'étude de certaines nouvelles classes d'équations intégrales et différentielles.

Nous énonçons ces résultats, sans démonstrations.

2.2 Quelques Généralisations des inégalités de type Gronwall-Bellman

Pachpatte [56] a établi plusieurs généralisations de l'inégalité de Ou-Iang, donnée par le Théorème 2.1.3. Nous citons les plus célèbres.

Théorème 2.2.1 ([56]) *Soit u, a, b, g, h des fonctions continues, positives et définies sur $\mathbb{R}_+$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_{0}^{t} \left[g(s)u^p(s) + h(s)u(s)\right] ds,\ t \in \mathbb{R}_+,$$

est satisfaite pour $p > 1$ alors,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \left\{ a(t) + b(t) \int_0^t (g(s)a(s) + h(s) \left[\tfrac{a(s)}{p} + \tfrac{p-1}{p}\right] \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(\int_s^t b(\sigma) \left[g(\sigma) + \tfrac{h(\sigma)}{p}\right] d\sigma \right) ds \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Théorème 2.2.2 ([56]) *On suppose que les hypothèses du Théorème* 2.2.1 *sont vérifiées. Soit c une fonction continue, croissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c^p(t) + b(t) \int_0^t \left[g(s)u^p(s) + h(s)u(s)\right] ds,$$

est satisfaite alors,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq c(t) \left\{ 1 + b(t) \int_0^t (g(s) + h(s)c(s)^{1-p} \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(\int_s^t b(\sigma) \left[g(\sigma) + \tfrac{h(\sigma)}{p}\right] d\sigma \right) ds \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Boukerrioua et Guezane-Lakoud [17] ont généralisé le Théorème 2.2.2, dont l'énoncé est ci-dessous

Théorème 2.2.3 ([17]) *Sous les hypothèses du Théorème* 2.2.2 *et supposons que la fonction $\dfrac{a + \frac{p}{r}}{b}$ est croissante, si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t \left[g(s)u^q(s) + h(s)u^r(s)\right] ds,$$

est satisfaite, alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq (a(t) + \frac{p}{r})^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(1 - (\tfrac{q}{p} - 1) \int_0^t b(s)(g(s) + \tfrac{r}{p}h(s))(a(s) + \tfrac{p}{r})^{\frac{q}{p}-1} ds \right)^{\frac{1}{p-q}}, \end{aligned}$$

dans le cas $0 < r < p < q$ *et pour tout* $t < \beta_{p,q,r}$ *, où*

$$\beta_{p,q,r} = \sup \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \,/\, (\tfrac{q}{p} - 1) \int\limits_0^t b(s)(g(s) + \tfrac{r}{p}h(s))(a(s) + \tfrac{p}{r})^{\frac{q}{p}-1} ds \leq 1 \right\}.$$

Dans tous ce qui suit, nous désignons par $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et par $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

El-Owaidy [35] a introduit les théorèmes suivants :

Théorème 2.2.4 ([35]) *Soient* $u, g, f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. *Si l'inégalité*

$$u(t) \leq u_0 + \int\limits_0^t f(s) \left[u^{(2-p)}(s) + \int\limits_0^s g(\lambda) u^q(\lambda) d\lambda \right]^p ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

est satisfaite où $u_0 > 0$ *et* $0 < p \leq 1$, $0 \leq q < 1$, *sont des constantes. Nous avons*

$$u(t) \leq u_0 + \int\limits_0^t f(s) k(s) \exp \left(p(2-p) \int\limits_0^s f(\lambda) d\lambda \right) ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$k(t) = \left[u_0^{(1-q)(2-p)} + (1-q) \int\limits_0^t g(s) \exp \left(-(1-q)(2-p) \int\limits_0^s f(\lambda) d\lambda \right) ds \right]^{\left[\frac{p}{(1-q)}\right]}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème 2.2.5 ([35]) *Soit* u *une fonction positive, continue et à valeurs dans* $\mathbb{R}$, g, $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *et* n *une fonction positive, monotone, croissante et continue sur* $\mathbb{R}_+$ *Si*

$$u(t) \leq n(t) + \int\limits_0^t f(s) \left[u(s) + \int\limits_0^s g(\lambda) u(\lambda) d\lambda \right]^p ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

est satisfaite, où p *est une constante telle que* $p \in (0,1)$. *Alors*

$$u(t) \leq n(t) \left[1 + \int\limits_0^t f(s) k_0(s) n^{(p-1)}(s) \exp \left(p(1-p) \int\limits_0^s g(\lambda) d\lambda \right) ds \right], \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

avec

$$k_0(t) = \left[1 + (1-q) \int\limits_0^t f(s) n^{(p-1)}(s) \exp \left(-(1-p) \int\limits_0^s g(\lambda) d\lambda ds \right) \right]^{\left[\frac{p}{(1-p)}\right]}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Nous nous sommes intéressés à étudier certaines inégalités intégrales non linéaires à retard en changeant l'argument non retardé t par l'argument $\alpha(t)$ qui exprime le retard. Le théorème suivant est étroitement lié à ce type des inégalités intégrales.

Théorème 2.2.6 (*Lipovan* [49]) *Soient* $u, f \in C([t_0, T), \mathbb{R}_+)$, $\alpha \in C^1([t_0, T), [t_0, T))$ *des fonctions positives avec* $\alpha(t) \leq t$ *sur* $[t_0, T)$ *et soit* u_0 *une constante positive, alors l'inégalité*

$$u(t) \leq u_0 + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)u(s)ds, \qquad t_0 < t < T,$$

implique que

$$u(t) \leq u_0 \exp\left(\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(s)ds\right), \qquad t_0 < t < T.$$

Récemment, de nombreux nouveaux résultats sur les inégalités non linéaires à retard peuvent être trouvés. Nous référons entre autres le lecteur à $[1-4, 23, 34, 49, 60, 63, 66-70]$.

Abdeldaim à élaboré des généralisations des deux théorèmes d'El-Owaidy (2.2.4 et 2.2.5).

Théorème 2.2.7 ([2]) *Soient* $u, g, f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *et* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction croissante avec* $\alpha(t) \leq t$ *sur* $\mathbb{R}_+$. *Si l'inégalité*

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^{\alpha(t)} f(s)\left[u^{(2-p)}(s) + \int_0^s g(\lambda)u^q(\lambda)\ d\lambda\right]^p ds,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où $q, u_0 > 0$ *et* $0 < p \leq 1$ *sont des constantes.*

A: Si $0 \leq q < 1$ *alors*

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^{\alpha(t)} f(s)k_1(\alpha^{-1}(s)) \exp\left(p(2-p)\int_0^s f(\lambda)d\lambda\right) ds,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$k_1(t) = \left[u_0^{(1-q)(2-p)} + (1-q)\int_0^{\alpha(t)} g(s)\exp\left(-(1-q)(2-p)\int_0^s f(\lambda)d\lambda\right) ds\right]^{\left[\frac{p}{(1-q)}\right]}.$$

B: Si $q > 1$ alors

$$u(t) \leq u_0 + u_0^{p(2-p)} \int_0^{\alpha(t)} f(s) k_2(\alpha^{-1}(s)) \exp\left(p(2-p)\int_0^s f(\lambda)d\lambda\right) ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$k_2(t) = \left[1 - (q-1)u_0^{(2-p)(q-1)} \int_0^{\alpha(t)} g(s)\exp\left((2-p)(q-1)\int_0^s f(\lambda)d\lambda\right) ds\right]^{\left[\frac{-p}{(q-1)}\right]},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et

$$1 - (q-1)u_0^{(2-p)(q-1)} \int_0^{\alpha(t)} g(s)\exp\left((2-p)(q-1)\int_0^s f(\lambda)d\lambda\right) ds > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème 2.2.8 ([2]) *Soient $u, g, f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, et $n, \alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ avec $n(t) \geq 1, \alpha(0) = 0$, et $\alpha(t) \leq t$ sur $\mathbb{R}_+$. Si l'inégalité*

$$u(t) \leq n(t) + \int_0^{\alpha(t)} f(s)\left[u(s) + \int_0^s g(\lambda)u(\lambda)d\lambda\right]^p ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

est satisfaite avec $p \in [0, 1)$. Alors, nous avons

$$u(t) \leq n(t) + \int_0^{\alpha(t)} k_3(\alpha^{-1}(s)) f(s) \exp\left(p\int_0^s g(\lambda)d\lambda\right) ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$k_3(t) = \left[n^{(1-p)}(0) + (1-p)\int_0^t [n'(s) + \alpha'(s)f(\alpha(s))] \exp\left(-(1-p)\int_0^s g(\lambda)d\lambda\right) ds\right]^{\frac{p}{(1-p)}}.$$

Un autre résultat prouvé par Abdeldaim est le suivant :

Théorème 2.2.9 ([2]) *Soient $u, f, h \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $n, \alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ avec $n(t) \geq 1$, $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(t) \leq t$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t f(s)u^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)u^q(s)ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

est satisfaite, où $p > q \geq 0$ sont des constantes. Alors, nous avons

$$u(t) \leq k_4(t)\exp\left(\tfrac{1}{p}\int_0^t f(s)ds\right), \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$k_4(t) = \left[n^{p1}(0) + p_1\int_0^t (n'(s)h(\alpha(s))\exp\left(-p_1\int_0^s f(\lambda)d\lambda\right) ds\right]^{\frac{1}{p-q}},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, avec $p_1 = \frac{p-q}{p}$.

2.3 Nouvelles généralisations

2.3.1 Inégalités à retard de type Gronwall-Bellman-Bihari

L'objectif principal de ce chapitre est d'établir des nouvelles inégalités intégrales non linéaires à retard qui peuvent être utilisées comme outils pratiques pour étudier le comportement qualitatif de certaines équations différentielles et intégrales à retard.

Dans cette partie, nous allons énoncer et prouver quelques nouvelles inégalités intégrales non linéaires à retard de type Gronwall-Bellman-Bihari, qui sont des généralisations des résultats obtenus par El-Owaidy [34, 35] et Abdeldaim [2].

Théorème 2.3.1 *Supposons que $u, g, h, n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que n est une fonction croissante. Soit $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante, vérifiant $\alpha(t) \leq t$ et $\alpha(0) = 0$. Soit $w : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction différentiable croissante sur $]0, \infty[$ telle que sa dérivée première est continue et décroissante sur $]0, \infty[$. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t g(s)u^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)w(u^q(s))ds, \tag{2.1}$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0$ et $p \neq 0$. Alors

$$u(t) \leq \left[n(t) + \int_0^t P_1(s) \exp\left(\int_s^t Q_1(\tau)d\tau\right) ds\right]^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.2}$$

où

$$\begin{aligned} P_1(t) &= g(t)n(t) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \\ Q_1(t) &= g(t) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))w'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par :

$$z(t) = \int_0^t g(s)u^p(s)\,ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)w(u^q(s))ds, \tag{2.4}$$

ainsi, nous avons

$$u(t) \leq [n(t) + z(t)]^{\frac{1}{p}}, z(0) = 0. \tag{2.5}$$

Dérivons $z(t)$ par rapport à t, et utilisons l'inégalité (2.5), nous obtenons

$$z'(t) \leq g(t)(n(t)+z(t)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w\left((n(t)+z(t))^{\frac{q}{p}}\right). \tag{2.6}$$

Appliquons le Lemme 1.4.1 à cette dernière, nous trouvons

$$z'(t) \leq g(t)(n(t)+z(t)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}(n(t)+z(t)) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \tag{2.7}$$

par une simple application du Théorème de la valeur moyenne à la fonction w, nous aurons, pour tout $x_1 > y_1 > 0$, il existe $c \in \,]\, y_1, x_1[$ tel que,

$$w(x_1) - w(y_1) = w'(c)(x_1 - y_1) \leq w'(y_1)(x_1 - y_1).$$

L'inégalité (2.7) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} z'(t) \;\; \leq \;\; & g(t)(n(t)+z(t)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))\left[w\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\right. \\ & \left. + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}w'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)z(t)\right], \end{aligned}$$

ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} z'(t) \;\; \leq \;\; & g(t)n(t) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \\ & + z(t)\left[g(t) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))w'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

L'inégalité (2.8) peut être exprimée de la manière suivante :

$$z'(t) \leq P_1(t) + Q_1(t)z(t),$$

où $P_1(.)$ et $Q_1(.)$ sont données par (2.3).

Faisons appel au Lemme 1.4.2, l'inégalité ci-dessus donne

$$z(t) \leq \int_0^t P_1(s)\exp\left(\int_s^t Q_1(\tau)d\tau\right)ds, \;\; \forall t \in I. \tag{2.9}$$

Utilisons (2.5), nous obtenons l' inégalité désirée (2.2).

Remarque 2.3.1 *Si nous prenons,* $w(t) = t$, *alors l'inégalité* (2.1) *donnée par le Théorème* 2.3.1 *a été discutée par Abdeldaim dans le Théorème* 2.2.9.

Corollaire 2.3.1 *Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t g(s)u^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\arctan(u^q(s))ds,$$

est satisfaite, où $p \geq q \geq 0$ *et* $p \neq 0$*. Alors*

$$u(t) \leq \left[n(t) + \int_0^t P_1(s)\exp\left(\int_s^t Q_1(\tau)d\tau\right)ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

où,

$$\begin{aligned} P_1(t) &= g(t)n(t) + \alpha'(t)h(\alpha(t)\arctan\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \\ Q_1(t) &= g(t) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))\left(\frac{1}{1+\left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)^2}\right), \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 2.3.2 *Supposons que* $u, g, h, n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *telle que* n *est une fonction croissante. Soit* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction croissante, vérifiant* $\alpha(t) \leq t$ *et* $\alpha(0) = 0$*. Soient* $w_1, w_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *deux fonctions différentiables croissantes sur* $]0, \infty[$ *telles que leurs dérivées premières sur* $]0, \infty[$ *sont continues et décroissantes. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t g(s)w_1(u^p(s))ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)w_2(u^q(s))ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.10}$$

est satisfaite, sachant que $p \neq 0$ *et* $p \geq q \geq 0$*. Alors*

$$u(t) \leq \left[n(t) + \int_0^t P_2(s)\exp\left(\int_s^t Q_2(\tau)d\tau\right)ds\right]^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned} P_2(t) &= g(t)w_1(n(t)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w_2\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \\ Q_2(t) &= g(t)w_1'(n(t)) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))w_2'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par :

$$z(t) = \int_0^t g(s)w_1(u^p(s))ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)w_2(u^q(s))ds, \tag{2.13}$$

alors, nous avons

$$u(t) \leq [n(t) + z(t)]^{\frac{1}{p}}, z(0) = 0. \tag{2.14}$$

et

$$z'(t) \leq g(t)w_1(u^p(t)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w_2(u^q(t)).$$

Utilisons l'inégalité (2.14) et appliquons par la suite le Lemme 1.4.1, nous trouvons

$$z'(t) \leq g(t)w_1(n(t) + z(t)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w_2\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}(n(t) + z(t)) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right).$$

Par une simple application du Théorème de la valeur moyenne aux fonctions w_1 et w_2, nous obtenons

$$\begin{aligned} z'(t) \leq\ & g(t)\left[w_1(n(t)) + w_1'(n(t))z(t))\right] + \alpha'(t)h(\alpha(t)) \\ & \times \left[w_2\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}w_2'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)z(t)\right], \end{aligned} \tag{2.15}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} z'(t) \leq\ & g(t)w_1(n(t)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))w_2\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \\ & + z(t)\left[g(t)w_1'(n(t)) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))w_2'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.16}$$

on peut réécrire l'inégalité (2.16) sous la forme :

$$z'(t) \leq P_2(t) + Q_2(t)z(t),$$

où $P_2(.)$ et $Q_2(.)$ sont données par (2.12). Faisant appel au Lemme 1.4.2, l'inégalité ci-dessus implique une estimation de $z(t)$ comme suit :

$$z(t) \leq \int_0^t P_2(s)\exp\left(\int_s^t Q_2(\tau)d\tau\right)ds \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.17}$$

Utilisons l'inégalité (2.14), nous obtenons l'inégalité requise (2.11). Ce qui achève la preuve.

Théorème 2.3.3 *Supposons que $u, g, h, n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que n est une fonction croissante. Soit $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante, vérifiant $\alpha(t) \leq t$ et $\alpha(0) = 0$. Étant donné $w_1, w_2 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions différentiables et croissantes sur $]0, \infty[$ telles* *que leurs dérivées premières sont des fonctions continues et décroissantes sur* $]0,\infty[$. *Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t g(s)w_1(u^q(s))ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)w_2(u^r(s))ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.18}$$

est satisfaite, où $p \neq 0,\ p \geq q \geq 0$ *et* $p \geq r \geq 0$. *Alors*

$$u(t) \leq \left[n(t) + \int_0^t P_3(s)\exp\left(\int_s^t Q_3(\tau)d\tau\right)ds\right]^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.19}$$

où

$$\begin{aligned} P_3(t) &= g(t)w_1\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) + \alpha'(t)h(\alpha(t)w_2\left(\tfrac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-r}{p}k^{\frac{r}{p}}\right), \\ Q_3(t) &= \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}g(t)w_1'\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) + \tfrac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))w_2'\left(\tfrac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-r}{p}k^{\frac{r}{p}}\right), \end{aligned} \tag{2.20}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. La preuve est similaire à celle du Théorème 2.3.2.

Remarque 2.3.2 *Si nous prenons* $w_1(t) = t$ *et* $w_2(t) = t,\ q = p$, *alors l'inégalité* (2.18) *donnée par le Théorème* 2.3.3 *a été étudiée par Abdeldaim dans le Théorème* 2.2.9.

Corollaire 2.3.2 *Supposons que toutes les conditions du Théorème* 2.3.3 *sont vérifiées. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t g(s)\arctan(u^q(s))ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\log(1 + u^r(s))ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

est satisfaite, où $p \neq 0,\ p \geq q \geq 0$ *et* $p \geq r \geq 0$. *Alors*

$$u(t) \leq \left[n(t) + \int_0^t P_3(s)\exp\left(\int_s^t Q_3(\tau)d\tau\right)ds\right]^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

où

$$\begin{aligned} P_3(t) &= g(t)\arctan\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) + \alpha'(t)h(\alpha(t))\log\left(1 + \tfrac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-r}{p}k^{\frac{r}{p}}\right), \\ Q_3(t) &= \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}g(t)\frac{1}{1 + \left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)^2} + \tfrac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))\frac{1}{\left(1 + \tfrac{r}{p}k^{\frac{r-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-r}{p}k^{\frac{r}{p}}\right)}, \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 2.3.4 *Supposons que* $u, g, h, n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *telle que* n *est une fonction croissante. Soit* $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *une fonction croissante, vérifiant* $\alpha(t) \leq t$ *et* $\alpha(0) = 0$.*Soient* $\mathcal{L}, M \in C\left(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+\right)$ *satisfaisant*

$$0 \leq \mathcal{L}\left(t, x\right) - \mathcal{L}\left(t, y\right) \leq M\left(t, y\right)\left(x - y\right), \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x \geq y \geq 0,$$

Si l'inégalité

$$u^p(t) \leq n(t) + \int_0^t g(s)u^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\mathcal{L}(s, u^q(s))ds, \tag{2.21}$$

est satisfaite, où $p \neq 0$, $p \geq q \geq 0$. *Alors*

$$u(t) \leq \left[n(t) + \int_0^t P_4(s) \exp\left(\int_s^t Q_4(\tau)d\tau\right) ds\right]^{\frac{1}{p}}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.22}$$

où

$$\begin{aligned} P_4(t) &= g(t) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))M\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \\ Q_4(t) &= n(t)g(t) + \alpha'(t)h(\alpha(t))\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \end{aligned} \tag{2.23}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ comme suit

$$z(t) = \int_0^t g(s)u^p\left(s\right)ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\mathcal{L}(s, u^q(s))ds, \tag{2.24}$$

ce qui entraîne,

$$u\left(t\right) \leq \left[n(t) + z\left(t\right)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.25}$$

Dérivons $z\left(t\right)$, par rapport à t et utilisons l'inégalité (2.25), nous obtenons

$$z'(t) \leq g(t)(n(t) + z\left(t\right)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))\mathcal{L}\left(\alpha(t), (n(t) + z\left(t\right))^{\frac{q}{p}}\right). \tag{2.26}$$

Appliquons le Lemme 1.4.1 à cette dernière, nous trouvons

$$z'(t) \leq g(t)(n(t) + z\left(t\right)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}(n(t) + z\left(t\right)) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} z'(t) \leq\ & g(t)(n(t) + z\left(t\right)) + \alpha'(t)h(\alpha(t))\left[\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\right. \\ & \left. + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}z\left(t\right)M\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z'(t) &\leq n(t)g(t) + \alpha'(t)h(\alpha(t))\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \\ &\quad + \left[g(t) + \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\alpha'(t)h(\alpha(t))M\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\right] z(t). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Faisons appel au Lemme 1.4.2, l'inégalité (2.29) donne une estimation de $z(t)$ de la forme suivante :

$$z(t) \leq \int_0^t P_4(s) \exp\left(\int_s^t Q_4(\tau)d\tau\right) ds \ , \ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.30}$$

où $P_4(.)$ et $Q_4(.)$ sont données par (2.23). Le résultat souhaité découle des deux inégalité (2.25) et (2.30). ■

Remarque 2.3.3 *Pour $\mathcal{L}(t,x) = x$, l'inégalité* (2.21) *dans le Théorème* 2.3.4 *a été étudiée par Abdeldaim dans le Théorème* 2.2.9.

Théorème 2.3.5 *Soient $u, f, g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante avec $\alpha(t) \leq t$, $\alpha(0) = 0$ et $\mathcal{L}, M \in C\left(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+\right)$ satisfaisant*

$$0 \leq \mathcal{L}(t,x) - \mathcal{L}(t,y) \leq M(t,y)(x-y), \ \text{pour } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x \geq y \geq 0,$$

Si l'inégalité,

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^{\alpha(t)} f(s)\left[u^{(2-p)}(s) + \int_0^s g(\tau)\mathcal{L}(\tau, u^q(\tau))\,d\tau\right]^p ds, \tag{2.31}$$

est satisfaite, où $0 < p \leq 1$, $0 \leq q < 1$. Alors

$$u(t) \leq u_0 + \int_0^{\alpha(t)} f(s)\,\phi_3\left(\alpha^{-1}(s)\right) exp\left(p(2-p)\int_0^s P_3(\tau)\,d\tau\right) ds, \tag{2.32}$$

où

$$\begin{cases} P_5(t) = & f(t) + \frac{q}{2-p}k^{q-1}g(t)\,M\left(t,(1-q)\,k^q\right), \\ Q_5(t) = & \left[u_0^{(2-p)} + \int_0^{\alpha(t)} g(t)\,\mathcal{L}\left(t,(1-q)\,k^q\right) exp\left(-(2-p)\int_0^s P_3(\tau)\,d\tau\right) ds\right]^p, \end{cases} \tag{2.33}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = u_0 + \int_0^{\alpha(t)} f(s) \left[u^{(2-p)}(s) + \int_0^s g(\tau) \mathcal{L}(\tau, u^q(\tau)) \, d\tau \right]^p,$$

donc

$$z(0) = u_0$$

et

$$u(t) \leq z(t). \tag{2.34}$$

Dérivons $z(t)$, par rapport à t et utilisons l'inégalité (2.34), nous trouvons

$$z'(t) \leq \alpha'(t) f(\alpha(t)) \left[z^{(2-p)}(t) + \int_0^{\alpha(t)} g(s) \mathcal{L}(s, z^q(s)) \, ds \right]^p. \tag{2.35}$$

Posons $v(t) = z^{(2-p)}(t) + \int_0^{\alpha(t)} g(s) \mathcal{L}(s, z^q(s)) \, ds$, ainsi, nous avons $v(0) = u_0^{(2-p)}$ et

$$z'(t) \leq \alpha'(t) f(\alpha(t)) v^p(t), \tag{2.36}$$

comme $p \leq 1 \Rightarrow 2 - p \geq 1$ et $z^{(2-p)}(t) \leq v(t)$, nous obtenons

$$z(t) \leq v(t). \tag{2.37}$$

Dérivons $v(t)$ par rapport à t et utilisons les deux inégalités (2.36) et (2.37), nous trouvons

$$v'(t) \leq (2-p) \alpha'(t) f(\alpha(t)) v(t) + \alpha'(t) g(\alpha(t)) \mathcal{L}(\alpha(t), v^q(t)). \tag{2.38}$$

Posons $q = \frac{m}{n}$ avec $n > m \geq 0$, $n \neq 0$ et appliquons le Lemme 1.4.1, nous avons

$$v^q(t) \leq q k^{q-1} v(t) + (1-q) k^p,$$

donc

$$\begin{aligned} v'(t) &\leq (2-p) \alpha'(t) f(\alpha(t)) v(t) \\ &\quad + \alpha'(t) g(\alpha(t)) \left[\mathcal{L}(\alpha(t), (1-q) k^q) + q k^{q-1} M(\alpha(t), (1-q) k^q) v(t) \right], \\ v'(t) &\leq \alpha'(t) g(\alpha(t)) \mathcal{L}(\alpha(t), (1-q) k^q) \\ &\quad + \left[(2-p) \alpha'(t) f(\alpha(t)) + \alpha'(t) g(\alpha(t)) q k^{q-1} M(\alpha(t), (1-q) k^q) \right] v(t). \end{aligned}$$

L'application du Lemme 1.4.2 à l'inégalité ci dessus, nous permet d'obtenir une estimation de $v\left(t\right)$ comme suit

$$\begin{aligned}
v\left(t\right) \leq & exp\left(\left(2-p\right)\int_{0}^{\alpha(t)}(f\left(s\right)+\frac{q}{2-p}k^{q-1}g\left(s\right)M\left(s,\left(1-q\right)k^{q}\right))ds\right) \\
& \left[u_{0}^{(2-p)}+\int_{0}^{\alpha(t)}g\left(s\right)\mathcal{L}\left(s,\left(1-q\right)k^{q}\right)\right. \\
& \left.\times\, exp\left(-\left(2-p\right)\int_{0}^{s}(f\left(\tau\right)+\frac{q}{2-p}k^{q-1}g\left(\tau\right)M\left(\tau,\left(1-q\right)k^{q}\right))d\tau\right)ds\right]
\end{aligned}$$

alors,

$$v^{p}\left(t\right)\leq exp\left(p\left(2-p\right)\int_{0}^{\alpha(t)}P_{5}\left(s\right)ds\right)Q_{5}\left(t\right), \tag{2.39}$$

avec $P_5(.)$ et $Q_5(.)$ sont données par (2.33).

La substitution de (2.39) dans (2.36) entraîne

$$z'\left(t\right)\leq\alpha'\left(t\right)f\left(\alpha\left(t\right)\right)Q_{5}\left(t\right)exp\left(p\left(2-p\right)\int_{0}^{\alpha(t)}P_{5}\left(s\right)ds\right).$$

Par conséquent,

$$z\left(t\right)\leq u_{0}+\int_{0}^{\alpha(t)}f\left(s\right)Q_{5}\left(\alpha^{-1}\left(s\right)\right)exp\left(p\left(2-p\right)\int_{0}^{s}P_{5}\left(\tau\right)d\tau\right)ds.$$

Le résultat voulu découle de l inégalité ci-dessus et l'inégalité (2.34). La preuve est ainsi achevée. ■

Remarque 2.3.4 *Si $\mathcal{L}\left(t,x\right)=x$, alors l'inégalité* (2.31) *donnée par le Théorème* 2.3.5 *a été discutée par Abdeldaim dans le* [*Théorème* 2.2.7 (*A*)].

Remarque 2.3.5 *Notons que si $\mathcal{L}\left(t,x\right)=x$ et $\alpha(t)=t$, l'inégalité* (2.31) *donnée par le Théorème* 2.3.5 *a été aussi discutée par El-Owaidy dans le Théorème* 2.2.4.

Théorème 2.3.6 *Soient $u,g,h\in C(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}_{+})$ et $\alpha\in C^{1}(\mathbb{R}_{+},\mathbb{R}_{+})$ une fonction croissante avec $\alpha\left(0\right)=0$, $\alpha\left(t\right)\leq t$ et*

$$u\left(t\right)\leq u_{0}+\int_{0}^{\alpha(t)}g\left(s\right)u^{p}\left(s\right)ds+\int_{0}^{\alpha(t)}g\left(s\right)\mathcal{L}\left(s,u^{q}\left(s\right)\right)\left[u^{2-p}\left(s\right)+\int_{0}^{\alpha(s)}h\left(\lambda\right)u\left(\lambda\right)d\lambda\right]^{p}ds, \tag{2.40}$$

où $u_0 > 0$*,* $0 < p \leq 1$*,* $0 \leq q < 1$ *sont des constantes et* $L, M \in C\left(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R}_+\right)$ *satisfaisant*

$$0 \leq L(t,x) - L(t,y) \leq M(t,y)(x-y)\,, \ \textit{pour } t \in \mathbb{R}_+ \textit{ et } x \geq y \geq 0,$$

alors, nous avons

$$u(t) \leq K(t) \exp\{\int_0^{\alpha(t)} \psi(s)\}ds, \tag{2.41}$$

où

$$\begin{aligned} &\psi(t) = pk^{p-1} g(s) \left(1 + \tfrac{q}{p} k^{q-p} M\left(s, (1-q) k^q\right) \theta^p\left(\alpha^{-1}(s)\right)\right), \\ &K(t) = u_0 + \textstyle\int_0^{\alpha(t)} \left[g(s)(1-p) k^p + \mathcal{L}\left(s, (1-q) k^q\right) \theta^p\left(\alpha^{-1}(s)\right)\right. \\ &\qquad \left. \times\ exp(-\textstyle\int_0^s \psi(\tau) d\tau) ds\right], \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\theta(t) = \frac{exp\{\int_0^{\alpha(t)} Q_6(s)\, ds\}}{C - \int_0^{\alpha(t)} P_6(s) \left(exp\{\int_0^s Q_6(\tau)\, d\tau\}\right) ds}, \tag{2.43}$$

et

$$\begin{aligned} P_6(t) &= (2-p)\, qk^{q-1} g(t)\, M\left(t, (1-q) k^q\right), \\ Q_6(t) &= (2-p)\, g(t) \left\{1 + \mathcal{L}\left(t, 1-q\right) k^q)\right\} + h(t), \end{aligned} \tag{2.44}$$

avec $\int_0^{\alpha(t)} P_6(s) \left(exp\{\int_0^s Q_6(\tau)\, d\tau\}\right) ds < C$*.*

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = u_0 + \int_0^{\alpha(t)} g(s)\, u^p(s)\, ds + \int_0^{\alpha(t)} g(s)\, \mathcal{L}\left(s, u^q(s)\right) \left[u^{2-p}(s) + \int_0^{\alpha(s)} h(\lambda)\, u(\lambda)\, d\lambda\right]^p ds,$$

alors nous avons $z(0) = u_0$ et

$$u(t) \leq z(t)\,. \tag{2.45}$$

Dérivons $z(t)$, par rapport à t et utilisons (2.45), nous obtenons

$$z'(t) \leq \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, z^p(t) + \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, \mathcal{L}\left(\alpha(t), z^q(t)\right) \left[z^{2-p}(t) + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\, z(s)\, ds\right]^p. \tag{2.46}$$

Posons $q = \frac{m}{n}$ avec $n > m \geq 0$, $n \neq 0$, ce qui donne

$$\mathcal{L}\left(\alpha(t), z^q(t)\right) \leq \mathcal{L}\left(\alpha(t), (1-q) k^q\right) + qk^{q-1} M\left(\alpha(t), (1-q) k^q\right) z(t),$$

donc

$$
\begin{aligned}
z'(t) \quad &\leq \quad \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, z^p(t) + \alpha'(t)\, g(\alpha(t)) \\
&\quad \times \left[\mathcal{L}(\alpha(t), (1-q)k^q) + qk^{q-1} M(\alpha(t), (1-q)k^q)\, z(t)\right] \times v^p(t), \quad (2.47)
\end{aligned}
$$

où

$$
v(t) = z^{2-p}(t) + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\, z(s)\, ds, \;\; v(0) = u_0^{(2-p)}, v(t) > 0, \qquad (2.48)
$$

$$
z(t) \leq z^{2-p}(t) \leq v(t). \qquad (2.49)
$$

Dérivons $v(t)$ par rapport à t, ensuite utilisons les inégalités (2.47) et (2.49), nous trouvons

$$
\begin{aligned}
v'(t) \leq\; &(2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, v^p(t)\, v^{1-p}(t) + (2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t)) \\
&\times \left[\mathcal{L}(\alpha(t), (1-q)k^q) + qk^{q-1} M(\alpha(t), (1-q)k^q)\, v(t)\right] v^p(t)\, v^{1-p}(t) \\
&+ \alpha'(t)\, h(\alpha(t))\, v(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, v(t) + (2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, v(t) \\
&\quad \times [\mathcal{L}(\alpha(t), (1-q)k^q) + qk^{q-1} M(\alpha(t), (1-q)k^q)\, v(t)] + \alpha'(t)\, h(\alpha(t))\, v(t) \\
&= [(2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, (1 + \mathcal{L}(\alpha(t), (1-q)k^q)) + \alpha'(t)\, h(\alpha(t))]\, v(t) \\
&\quad + [(2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t)) qk^{q-1} M(\alpha(t), (1-q)k^q)]\, v^2(t).
\end{aligned} \qquad (2.50)
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
A(t) \quad &= \quad (2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t)) qk^{q-1} M(\alpha(t), (1-q)k^q), \\
\beta(t) \quad &= \quad (2-p)\, \alpha'(t)\, g(\alpha(t))\, (1 + \mathcal{L}(\alpha(t), (1-q)k^q)) + \alpha'(t)\, h(\alpha(t)),
\end{aligned}
$$

par la suite, nous avons

$$
v'(t) \leq A(t)\, v^2(t) + \beta(t)\, v(t),
$$

$$
v^{-2}(t)\, v'(t) \leq A(t) + \beta(t)\, v^{-1}(t),
$$

posons $v^{-1}(t) = y(t)$, ainsi nous obtenons

$$
\begin{aligned}
-y'(t) \quad &\leq \quad A(t) + \beta(t)\, y(t), \\
y'(t) \quad &= \quad -v'(t) v^{-2}(t).
\end{aligned}
$$

Utilisons le Lemme 1.4.2, nous trouvons

$$\begin{aligned}
y(t) &\geq u_0^{-(2-p)}exp\{-\int_0^t \beta(s)ds\} - \int_0^t A(s)exp\{-\int_s^t \beta(\tau)d\tau\}ds \\
&= u_o^{-(2-p)}exp\{-\int_0^{\alpha(t)} ((2-p)\, g\,(s)\,\{1+\mathcal{L}\,(s,(1-q)\,k^q)\} + h\,(s))\,ds\} \\
&\quad -(2-p)\,qk^{q-1}\int_0^{\alpha(t)} g\,(s)\,M\,(s,(1-q)\,k^q) \\
&\quad \times \exp\{-\int_s^{\alpha(t)} ((2-p)\,g\,(\tau)\,\{1+\mathcal{L}\,(\tau,(1-q)\,k^q)\} + h(\tau))d\tau\}ds \\
&= exp\{-\int_0^{\alpha(t)} [(2-p)\,g\,(s)\,(1+\mathcal{L}\,(s,(1-q)\,k^q)) + h\,(s)]\,ds\}\Big[u_0^{-(2-p)} - (2-p)\,qk^{q-1} \\
&\quad \times \int_0^{\alpha(t)} g\,(s)\,M\,(s,(1-q)\,k^q) \\
&\quad \times exp\{\int_0^s [(2-p)\,g\,(\tau)\,(1+\mathcal{L}\,(\tau,(1-q)\,k^q)) + h\,(\tau)]\,d\tau\}ds\Big],
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$y\,(t) \geq exp\left(-\int_0^{\alpha(t)} Q_6\,(s)\,ds\right)\{u_0^{-(2-p)} - \int_0^{\alpha(t)} P_6\,(s)\,exp\left(\int_0^s Q_6\,(\tau)\,d\tau\right)ds\}, \quad (2.51)$$

où $P_6(.)$ et $Q_6(.)$ sont données par (2.44).

$$y\,(t) \geq \frac{u_0^{-(2-p)} - \int_0^{\alpha(t)} P_6\,(s)\left(exp\{\int_0^s Q_6\,(\tau)\,d\tau\}\right)ds}{exp\{\int_0^{\alpha(t)} Q_6\,(s)\,ds\}}, \quad (2.52)$$

donc,

$$v\,(t) \leq \frac{exp\{\int_0^{\alpha(t)} Q_6\,(s)\,ds\}}{u_0^{-(2-p)} - \int_0^{\alpha(t)} P_6\,(s)\left(exp\{\int_0^s Q_6\,(\tau)\,d\tau\}\right)ds}.$$

Prenons $u_0^{-(2-p)} = C$ et

$$\int_0^{\alpha(t)} P_6\,(s)\left(exp\{\int_0^s Q_6\,(\tau)\,d\tau\}\right)ds < C,$$

nous obtenons facilement $v(t) \leq \theta\,(t)$, où $\theta\,(t)$ est donnée par (2.43).

Utilisons l'inégalité (2.47), et prenons $p = \frac{m^*}{n^*}$ avec $n^* \geq m^* > 0$, $n^* \neq 0$, nous aboutirons à

$$\begin{aligned}
z'(t) &\leq \alpha'\,(t)\,g\,(\alpha\,(t))\,[(1-p)\,k^p + \mathcal{L}\,(\alpha\,(t)\,,(1-q)\,k^q)\,\theta^p\,(t)] \\
&\quad +\alpha'\,(t)\,g\,(\alpha\,(t))\,\{pk^{p-1} + qk^{q-1}M\,(\alpha\,(t)\,,(1-q)\,k^q)\,\theta^p\,(t)\}z\,(t)\,.
\end{aligned}$$

Appliquons une autre fois, le Lemme 1.4.2 sur cette dernière, nous pouvons donner une estimation de $z(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned} z(t) \leq exp\{&\int_0^{\alpha(t)} g(s)\left(pk^{p-1}+qk^{q-1}M(s,(1-q)k^q)\theta^p\left(\alpha^{-1}(s)\right)\right)ds\} \\ &\times\left[u_0+\int_0^{\alpha(t)} g(s)\left[(1-p)k^p+\mathcal{L}(s,(1-q)k^q)\theta^p\left(\alpha^{-1}(s)\right)\right]\right. \\ &\left.\times\, exp\{-\int_0^s g(\tau)\left(pk^{p-1}+qk^{q-1}M(\tau,(1-q)k^q)\right)\theta^p\left(\alpha^{-1}(\tau)\right)d\tau\}ds\right], \end{aligned}$$

l'inégalité ci-dessus peut être reformulée comme suit :

$$z(t) \leq K(t)\exp\{\int_0^{\alpha(t)} \psi(s)\}ds, \tag{2.53}$$

où $k(.)$ et $\psi(.)$ sont données par (2.42). L'inégalité (2.41) souhaitée découle des deux inégalités (2.45) et (2.53). Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 2.3.7 *Supposons que $u, g, h, n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que n est une fonction croissante. Soit $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante, vérifiant $\alpha(t) \leq t$ et $\alpha(0) = 0$. Soit Φ une fonction croissante de classe $\mathcal{T}$ (voir Définition 1.4.2 page 17) telle que $\Phi^{-1}(I) \subset I$ et $\Phi^{-1} \geq 1$. Si l'inégalité suivante*

$$\Phi(u^p(t)) \leq n^p(t) + \int_0^t g(s)u^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)u^q(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.54}$$

est satisfaite, où $p > q \geq 0$. Alors

$$u(t) \leq \left[\max(n^p(t),1)\ \Phi^{-1}\left(W^{-1}(W(1)+\int_0^t g(s)ds + \left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}+\tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\int_0^{\alpha(t)} \tfrac{h(s)}{a^{p-q}(s)}ds)\right)\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{2.55}$$

avec

$$\begin{aligned} W(1)+\int_0^t g(s)ds + \left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}+\tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\int_0^{\alpha(t)} \tfrac{h(s)}{a^{p-q}(s)}ds &\in Dom(W^{-1}), \\ W^{-1}\left(W(1)+\int_0^t g(s)ds + \left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}+\tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\int_0^{\alpha(t)} \tfrac{h(s)}{a^{p-q}(s)}ds\right) &\in Dom(\Phi^{-1}), \end{aligned}$$

où W est une fonction définie par $W(t) = \int_0^t \frac{1}{\Phi^{-1}(s)}ds$.

Preuve. Posons $a^p(t) = \max(n^p(t), 1)$. Ainsi l'inégalité (2.54) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\Phi(u^p(t))}{a^p(t)} \leq 1 + \int_0^t \frac{g(s)}{a^p(s)} u^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} \frac{h(s)}{a^p(s)} u^q(s)ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.56}$$

Prenons

$$z(t) = \frac{u(t)}{a(t)} \ . \tag{2.57}$$

Comme la fonction Φ est de classe $\mathcal{T}$, nous aurons

$$\Phi(z^p(t)) \leq 1 + \int_0^t g(s)z^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} \frac{h(s)}{a^{p-q}(s)} z^q(s)ds, \ \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.58}$$

Définissons une fonction auxiliaire $v(t)$ par

$$v(t) = 1 + \int_0^t g(s)z^p(s)ds + \int_0^{\alpha(t)} \frac{h(s)}{a^{p-q}(s)} z^q(s)ds, \tag{2.59}$$

utilisons l'inégalité-ci dessus (2.59) et les propriétés de la fonction Φ, nous obtenons

$$z(t) \leq \left[\Phi^{-1}(v(t))\right]^{\frac{1}{p}} \text{ et } v(0) = 1. \tag{2.60}$$

Substituons l'inégalité (2.60) dans l'inégalité (2.59), nous aurons

$$v(t) \leq 1 + \int_0^t g(s)\Phi^{-1}(v(s))ds + \int_0^{\alpha(t)} \frac{h(s)}{a^{p-q}(s)} \left[\Phi^{-1}(v(s))\right]^{\frac{q}{p}} ds. \tag{2.61}$$

Dérivons la fonction $v(t)$ par rapport à t et appliquons le Lemme 1.4.1, nous trouvons

$$v'(t) \leq g(t)\Phi^{-1}(v(t)) + \alpha'(t)\frac{h(\alpha(t))}{a^{p-q}(\alpha(t))} \left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\Phi^{-1}(v(t)) + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right),$$

ainsi

$$\frac{v'(t)}{\Phi^{-1}(v(t))} \leq g(t) + \alpha'(t)\frac{h(\alpha(t))}{a^{p-q}(\alpha(t))} \left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right). \tag{2.62}$$

Intégrons l'inégalité (2.62) de 0 à t, nous obtenons

$$W(v(t)) \leq W(v(0)) + \int_0^t g(s)ds + \left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \int_0^{\alpha(t)} \frac{h(s)}{a^{p-q}(s)}ds,$$

donc

$$v(t) \leq W^{-1}\left(W(1) + \int_0^t g(s)ds + \left(\frac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}} + \frac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \int_0^{\alpha(t)} \frac{h(s)}{a^{p-q}(s)}ds\right). \tag{2.63}$$

Le résultat désiré (2.55) découle des inégalités (2.63), (2.60) et (2.57). La preuve est donc achevée. ■

Théorème 2.3.8 *Soient $u, g, f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $\alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction croissante avec $\alpha(t) \leq t$, $\alpha(0) = 0$, $\mathcal{L}, m : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues et $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et strictement croissante vérifiant*

$$\phi(0) = 0,$$

et

$$0 \leq \mathcal{L}(t,x) - \mathcal{L}(t,y) \leq m(t,y)\phi^{-1}(x-y), \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+ \text{et } x \geq y \geq 0, \tag{2.64}$$

où ϕ^{-1} est la fonction inverse de ϕ satisfaisant à la condition suivante

$$\phi^{-1}(xy) \leq \phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y). \tag{2.65}$$

Si l'inégalité

$$u^p(t) \leq n(t) + \phi\left(\int_0^t g(s)\,\mathcal{L}(s, u^p(s))\,ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\,\mathcal{L}(s, u^q(s))\,ds\right), \tag{2.66}$$

est satisfaite, où $p > q \geq 0$. Alors

$$u(t) \leq \left(n(t) + \phi\left[\int_0^t P_7(s) \exp\left(\int_s^t Q_7(\tau)d\tau\right) ds\right]\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.67}$$

avec

$$\begin{aligned} P_7(t) &= \mathcal{L}(t, n(t))g(t) + \alpha'(t)\,h(\alpha(t))\,\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \\ Q_7(t) &= g(t)m(t,n(t)) + m(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}})\phi^{-1}(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}), \end{aligned} \tag{2.68}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. Soit $z(t) = \int_0^t g(s)\,\mathcal{L}(s, u^p(s))\,ds + \int_0^{\alpha(t)} h(s)\,\mathcal{L}(s, u^q(s))\,ds$, donc nous aurons $z(0) = 0$ et

$$u(t) \leq [n(t) + \phi(z(t))]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.69}$$

Dérivons $z(t)$, par rapport à t, ensuite utilisons l'inégalité (2.69), ceci entraîne

$$z'(t) \leq g(t)\mathcal{L}(t, n(t) + \phi(z(t)) + \alpha'(t)\,h(\alpha(t))\,\mathcal{L}\left(\alpha(t), (n(t) + \phi(z(t))^{\frac{q}{p}}\right), \tag{2.70}$$

utilisons (2.64) et le Lemme 1.4.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} z'(t) \;\leq\; & g(t)\left[\mathcal{L}\left(t, n(t)\right) + m(t,n(t))\phi^{-1}(\phi(z(t))\right] \\ & + \alpha'(t)\,h(\alpha(t))\,\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}(n(t) + \phi(z(t)) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right), \end{aligned} \tag{2.71}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} z'(t) &\le g(t)\left[\mathcal{L}(t,n(t)) + m(t,n(t))z(t)\right] + \alpha'(t)\,h(\alpha(t)) \\ &\quad \times \left[\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\right. \\ &\quad \left. + m\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\phi^{-1}\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\phi(z(t))\right)\right], \end{aligned} \tag{2.72}$$

ensuite utilisons (2.65), nous aurons

$$\begin{aligned} z'(t) &\le \mathcal{L}(t,n(t))g(t) + \alpha'(t)\,h(\alpha(t))\,\mathcal{L}\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right) \\ &\quad + \left[g(t)m(t,n(t)) + m\left(\alpha(t), \tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}n(t) + \tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}\right)\phi^{-1}\left(\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\right)\right] z(t). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Appliquons en dernier lieu, le Lemme 1.4.2, nous aurons l'estimation de $z(t)$ suivante :

$$z(t) \le \int_0^t P_7(s)\exp\left(\int_s^t Q_7(\tau)d\tau\right)ds, \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.74}$$

où $P_7(.)$ et $Q_7(.)$ sont données par (2.68).

Une fois utiliser l'inégalité (2.69), nous allons aboutir au résultat voulu (2.67). Ce qui achève la preuve. ■

2.3.2 Applications

Nous allons présenter quelques exemples pour étudier certaines propriétés de solutions des équations différentielles et intégrales non linéaires à retard.

Exemple 2.3.1 *Considérons l'équation différentielle à retard suivante :*

$$\begin{gathered} \tfrac{du}{dt} = H(t, u(\alpha(t)), K(t, u(\alpha(t)))), \;\; \forall t \in I, \\ u(0) = u_0, \end{gathered} \tag{2.75}$$

où $K \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}), H \in C(\mathbb{R}_+^3, \mathbb{R})$, et u_0 est une constante positive.

Proposition 2.3.1 *Supposons que les fonctions H et K dans* (2.75) *satisfaisont les conditions suivantes :*

$$|K(t, u(\alpha(t)))| \le g(\alpha(t))\;\, L(t, |u^q(\alpha(t))|), \tag{2.76}$$

$$|H(t,u(\alpha(t)),K(t,u(\alpha(t))))| \leq f(\alpha(t))\left[\ \left|u^{(2-p)}(\alpha(t))\right| + \int_0^t |K(\tau,u(\alpha(\tau)))|\,d\tau\right]^p, \tag{2.77}$$

où u, f, g, α, L, p et q sont définies dans le Théorème 2.3.5.

Si $u(t)$ est une solution de (2.75)*, alors*

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^{\alpha(t)} \frac{f(s)}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))}\phi^*\left(\alpha^{-1}(s)\right) exp\left(p\,(2-p)\int_0^s P^*(\tau)\,d\tau\right) ds, \tag{2.78}$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} P^*(t) = & \frac{f(t)}{\alpha'(\alpha^{-1}(t))} + \frac{q}{2-p}k^{q-1}\frac{g(t)}{\alpha'(\alpha^{-1}(t))}M\left(\alpha^{-1}(t),(1-q)\,k^q\right), \\ \phi^*(t) = & \left[u_0^{(2-p)} + \int_0^{\alpha(t)} \frac{g(t)}{\alpha'(\alpha^{-1}(t))}\mathcal{L}\left(\alpha^{-1}(t),(1-q)\,k^q\right) exp\left(-(2-p)\int_0^s P^*(\tau)\,d\tau\right) ds\right]^p. \end{cases}$$

Preuve. Intégrons chaque membre de l'équation (2.75) de 0 à t, nous obtenons

$$u(t) = u_0 + \int_0^t H(s,u(\alpha(s)),K(t,u(\alpha(s))))ds. \tag{2.79}$$

Les inégalités (2.76) et (2.77) nous permet de réécrire (2.79) comme suit

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^t f(\alpha(s))\left[\ \left|u^{(2-p)}(\alpha(s))\right| + \int_0^s g(\alpha(\tau))\ L(\tau,|u^q(\alpha(\tau))|)d\tau\right]^p ds.$$

Posons le changement de variable suivant : $y = \alpha(s) \Rightarrow s = \alpha^{-1}(y)$ et $dy = \alpha'(s)ds \Rightarrow ds = \frac{dy}{\alpha'(\alpha^{-1}(y))}$,
on a pour $s = 0 \Rightarrow y = \alpha(0) = 0$ et pour $s = t \Rightarrow y = \alpha(t)$, ainsi

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^{\alpha(t)} \frac{f(y)}{\alpha'(\alpha^{-1}(y))}\left[\ \left|u^{(2-p)}(y)\right| + \int_0^{\alpha^{-1}(y)} g(\alpha(\tau))\ L(\tau,|u^q(\alpha(\tau))|)d\tau\right]^p dy,$$

ou encore,

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^{\alpha(t)} \frac{f(s)}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))}\left[\ \left|u^{(2-p)}(s)\right| + \int_0^{\alpha^{-1}(s)} g(\alpha(\tau))\ L(\tau,|u^q(\alpha(\tau))|)d\tau\right]^p ds.$$

Posons maintenant le changement de variable suivant $y = \alpha(\tau) \Rightarrow \tau = \alpha^{-1}(y)$ et $dy = \alpha'(\tau)d\tau \Rightarrow d\tau = \frac{dy}{\alpha'(\alpha^{-1}(y))}$, on a pour $\tau = 0 \Rightarrow y = \alpha(0) = 0$ et pour $\tau = \alpha^{-1}(s) \Rightarrow y = \alpha(\alpha^{-1}(s)) = s$, alors

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^{\alpha(t)} \frac{f(s)}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))}\left[\ \left|u^{(2-p)}(s)\right| + \int_0^s g(y)\ L(\alpha^{-1}(y),|u^q(y)|)\frac{dy}{\alpha'(\alpha^{-1}(y))}\right]^p ds,$$

en outre,

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^{\alpha(t)} \frac{f(s)}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))} \left[\left|u^{(2-p)}(s)\right| + \int_0^s \frac{g(\tau)}{\alpha'(\alpha^{-1}(\tau))} L(\alpha^{-1}(\tau), |u^q(\tau)|) d\tau \right]^p ds. \tag{2.80}$$

Une application convenable du Théorème 2.3.5 à l'inégalité (2.80), nous donne immédiatement (2.78). ■

Exemple 2.3.2 *Considérons l'équation intégrale à retard suivante*

$$u(t) = n(t) + \int_0^t G(s, u(s)) ds + \int_0^{\alpha(t)} H(s, u(s)) ds, \tag{2.81}$$

où $u, n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \alpha \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *sont des fonctions croissantes et* $G, H \in C(I \times I, \mathbb{R})$.

Proposition 2.3.2 *Supposons que les fonctions* G *et* H *dans* (2.81) *satisfaisant les conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} | \ G(s, u(s) - G(s, \overline{u}(s))| &\leq g(s) \left|u(s) - \overline{u}(s)\right|, \\ |H(s, u(s)) - H(s, \overline{u}(s))| &\leq h(s) w(|u(s) - \overline{u}(s)|), \end{aligned} \tag{2.82}$$

où g, h, w *sont définies dans le Théorème* 2.3.1*,* $w(0) = 0$ *et* $u(t)$ *est solution de* (2.81)*, alors l'équation* (2.81) *possède au plus une solution.*

Preuve. Soient $u(t)$ et $\overline{u}(t)$ deux solutions de (2.81), alors

$$\begin{aligned} u(t) - \overline{u}(t) \ &= \ \int_0^t G(s, u(s)) - G(s, \overline{u}(s)) \ ds \\ &+ \int_0^{\alpha(t)} H(s, u(s)) - H(s, \overline{u}(s)) \ ds \ , \end{aligned} \tag{2.83}$$

utilisons (2.82), nous aurons

$$\begin{aligned} |u(t) - \overline{u}(t)| \ &\leq \ \int_0^t |G(s, u(s)) - G(s, \overline{u}(s))| \, ds + \int_0^{\alpha(t)} |H(s, u(s) - H(s, \overline{u}(s))| \ ds \\ &\leq \ \int_0^t g(s) \left|u(s) - \overline{u}(s)\right| ds \quad + \int_0^{\alpha(t)} h(s) w(|u(s) - \overline{u}(s)|) ds. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Appliquons le Théorème 2.3.1 (pour $p = q = 1$) à l'inégalité ci-dessus, nous obtenons que $|u(t) - \overline{u}(t)| \leq 0$, ce qui donne : $u(t) = \overline{u}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, i.e. l'équation (2.81) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. ■

CHAPITRE 3

Raffinements de quelques inégalités intégrales de type Gamidov

Ce chapitre est consacré entièrement aux inégalités de type Gamidov. Ce type des inégalités a été d'abord initié par Gamidov [37] en 1969, pour étudier les problèmes aux limites relatifs aux équations différentielles d'ordre supérieur. Par la suite, de nombreux chercheurs ont établi des inégalités plus générales, plus fines que celles de Gamidov [37]; parmi ces chercheurs, on peut citer par exemple, Bainov, Pachpatte, Kendre et Latpate. En outre, leurs résultats sont considérés comme des outils fondamentaux pour l'étude du comportement qualitatif des solutions de certaines classes d'équations intégrales. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter $[7, 21, 22, 47, 55, 58-60]$.

Dans la première section, nous rappelons les célèbres inégalités de type Gamidov et dans la deuxième section, nous nous contenterons de présenter certaines généralisations apparues ces dernières années.

Quant à la dernière section, nous allons établir de nouvelles inégalités de type Gamidov sur une échelle de temps quelconque qui sont illustrées par des exemples. Les résultats obtenus ont fait l'objet de la publication :

K. Boukerrioua, I. Meziri and T. Chiheb, Some refinements of certain Gamidov integral inequalities on time scales and applications. Kragujevac Journal of Mathematics. Vol 42, No. 1 (2018), 131–152.

3.1 Quelques célèbres inégalités de type Gamidov

Dans cette première partie, nous énoncerons les inégalités de type Gamidov.
En 1969 Gamidov [37] a prouvé les inégalités suivantes afin de les appliquer dans l'étude de certains problèmes de valeurs aux limites.
Dans tous ce qui suit, nous désignerons par J l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Corollaire 3.1.1 ([37]) *Soient u, f, g_1, g_2, h_i $(i = 1, 2, ...n)$ des fonctions positives, continues et définies sur J. Si*

$$u(t) \leq f(t) + g_1(t) \int_{t_1}^{t} h_1(s)u(s)ds + g_2(t) \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s)u(s)ds,$$

où

$$\alpha = t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n = \beta \text{ et } c_i \text{ sont des constantes},$$

avec

$$\sum_{i=2}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s) \left[g_2(s) + g_1(s) \int_{t_1}^{s} h_1(\tau) g_2(\tau) \times \exp\left(\int_{\tau}^{s} g_1(\tau)\, h_1(\sigma)\, d\sigma \right) d\tau \right] ds < 1,$$

alors, nous avons

$$u(t) \leq p_1(t) + M p_2(t),$$

où

$$p_1(t) = f(t) + g(t) \int_{t_1}^{t} h_1(s) f(s) \exp\left(\int_{s}^{t} g_1(\sigma) h_1(\sigma) d\sigma \right) ds,$$
$$p_2(t) = g_2(t) + g_1(t) \int_{t_1}^{t} h_1(s) g_2(s) \exp\left(\int_{s}^{t} g_1(\sigma)\, h_1(\sigma) d\sigma \right) ds,$$

$$M = \left(\sum_{i=2}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s) p_1(s) ds \right) \left(1 - \sum_{i=2}^{n} c_i \int_{t_1}^{t_i} h_i(s) p_2(s) ds \right)^{-1}.$$

Théorème 3.1.1 ([37]) *Soient u et k des fonctions positives continue sur J, et soient $0 < p < 1$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, et $a_3 > 0$ des constantes. Supposons que*

$$u(t) \leq a_1 + a_2 \int_\alpha^t k(s)u^p(s)ds + a_3 \int_\alpha^\beta k(s)u^p(s)ds, \ t \in J,$$

alors, nous aurons

$$u(t) \leq \left(x_0^q + a_2 q \int_\alpha^t k(s)ds \right)^{\frac{1}{q}}, \ t \in J,$$

où $q = 1 - p$ et x_0 est l'unique racine positive de l'équation

$$\left[\frac{a_2 + a_3}{a_3} x - \frac{a_1 a_2}{a_3} \right]^q - x^q - a_2 q \int_\alpha^\beta k(s)ds = 0.$$

En 1989, Leela et Martynyuk [52] ont établi une nouvelle inégalité de type Gamidov, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 3.1.2 ([52]) *Soient $m, v \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), T > t_0 \geq 0$. Si l'inégalité*

$$m(t) \leq m(t_0) + \int_{t_0}^t v(s)m(s)ds + \int_{t_0}^T v(s)m(s)ds, \quad \forall \ t_0 \leq t \leq T,$$

est satisfaite, et

$$\exp\left(\int_{t_0}^T v(s)ds \right) < 2,$$

alors, nous obtenons

$$m(t) \leq \frac{m(t_0)}{2 - \exp\left(\int_{t_0}^T v(s)ds \right)} \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds \right).$$

En 1992, Bainov et Simeonov [7] ont démontré une variante du Théorème 3.1.2. Ce résultat est le suivant :

Théorème 3.1.3 ([7]) *Soient u, b, et c des fonctions continues sur J telles que $b$et c sont positives sur J. Admettons que*

$$u(t) \leq a + \int_\alpha^t b(s)u(s)ds + \int_\alpha^\beta c(s)u(s)ds, \ t \in J,$$

où a est une constante et si

$$q = \int_{\alpha}^{\beta} C(s) \exp\left(\int_{\alpha}^{s} b(\tau)\, d\tau\right) ds < 1,$$

alors,

$$u(t) \leq \frac{a}{1-q} \exp\left(\int_{\alpha}^{t} b(s) ds\right), \ t \in J.$$

Dans [57], Pachpatte a établi une version plus générale de l'inégalité de Gamidov. Dans l'énoncé suivant, nous notons par $\Delta = \{(t,s) \in J^2 : \alpha \leq s \leq t \leq \beta\}$.

Théorème 3.1.4 ([57]) *Soient $u \in C(J, \mathbb{R}_+)$, $a, b \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ telles que a et b sont des fonctions croissantes en t, pour chaque $s \in J$ et supposons que*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} a(t,s)u(s)ds + \int_{\alpha}^{\beta} b(t,s)u(s)ds,$$

pour tout $t \in J$, où $c \geq 0$ est une constante. Si la condition

$$p(t) = \int_{\alpha}^{\beta} b(t,s) \exp\left(\int_{\alpha}^{s} a(s,\sigma)d\sigma\right) ds < 1,$$

est satisfaite, alors nous avons

$$u(t) \leq \frac{c}{1-p(t)} \exp\left(\int_{\alpha}^{t} a(t,s)ds\right), \ \forall t \in J.$$

3.2 Quelques généralisations

Nous allons exposer sans démonstrations, quelques variantes et généralisations obtenues sur les inégalités présentées dans la section précédente. Pour plus de détails, nous pouvons consulter [7, 47, 58, 59].

Théorème 3.2.1 ([59]) *Soient u, a, b, c, f, $g \in C(J, \mathbb{R}_+)$.*

(H_1) *Soit a une fonction continument différentiable sur J telle que $a'(t) \geq 0$ et*

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\alpha}^{t} b(s)u(s)ds + \int_{\alpha}^{\beta} c(s)u(s)ds, \ \forall t \in J,$$

et si

$$p_1 = \int_{\alpha}^{\beta} c(s) \exp\left(\int_{\alpha}^{s} b(\sigma)d\sigma\right) ds < 1,$$

alors

$$u(t) \leq M_1 \exp\left(\int_\alpha^t b(s)ds\right) + \int_\alpha^t a'(s)\exp\left(\int_s^t b(\sigma)d\sigma\right)ds,$$

où

$$M_1 = \frac{1}{1-p_1}\left[a(\alpha) + \int_\alpha^\beta c(s)(\int_\alpha^s a'(\tau)\exp\left(\int_\tau^s b(\sigma)d\sigma\right)d\tau)ds\right].$$

(H_2) *Supposons que*

$$u(t) \leq a(t) + b(t)\int_\alpha^t f(s)u(s)ds + c(t)\int_\alpha^\beta g(s)u(s)ds,\ \ \forall t \in J,$$

et si nous avons

$$p_2 = \int_\alpha^\beta g(s)k_2(s)ds < 1,$$

alors

$$u(t) \leq k_1(t) + M_2 k_2(t),\ \forall t \in J,$$

avec

$$k_1(t) = a(t) + b(t)\int_\alpha^t f(\tau)a(\tau)\exp\left(\int_\tau^t f(\sigma)\, b(\sigma)d\sigma\right)d\tau,$$
$$k_2(t) = c(t) + b(t)\int_\alpha^t f(\tau)c(\tau)\exp\left(\int_\tau^t f(\sigma)\, b(\sigma)d\sigma\right)d\tau,$$

et

$$M_2 = \frac{1}{1-p_2}\int_\alpha^\beta g(s)k_1(s)ds.$$

(H_3) *Soient* $h(t,s)$ *et sa dérivée partielle* $\frac{\partial h(t,s)}{\partial t}$ *des fonctions positives et continues pour* $\alpha \leq s \leq t \leq \beta$ *et si l'inégalité*

$$u(t) \leq a(t) + \int_\alpha^t h(t,s)u(s)ds + \int_\alpha^\beta c(s)u(s)ds,$$

est satisfaite pour tout $t \in J$, *de plus si*

$$P_3 = \int_\alpha^\beta c(s)\exp\left(\int_\alpha^s B^*(\sigma)\, d\sigma\right)ds < 1,$$

alors,

$$u(t) \leq a(t) + M_3 \exp\left(\int_\alpha^t B^*(\sigma)\, d\sigma\right) + \int_\alpha^t A^*(s)\exp\left(\int_s^t B^*(\sigma)\, d\sigma\right)ds\ ,\ \forall t \in J,$$

où

$$A^{*}(t)=h(t,t)a(t)+\int_{\alpha}^{t}\frac{\partial}{\partial t}h(t,s)a(s)ds\ ,$$
$$B^{*}(t)=h(t,t)+\int_{\alpha}^{t}\frac{\partial}{\partial t}h(t,s)ds,$$

et

$$M_3=\frac{1}{1-P_3}\int_{\alpha}^{\beta}c(s)\left[a(s)+\int_{\alpha}^{s}A^{*}(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{s}B^{*}(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau\right]ds.$$

Remarque 3.2.1 *L'inégalité établi dans* (H_1, *Théorème* 3.2.1) *est une variante de l'inégalité donnée par Bainov et Simeonov dans le* (*Théorème* 3.1.3), *tandis que l'inégalité établi en* (H_2) *est une variante de l'inégalité donnée par Gamidov dans le Corollaire* 3.1.1.

Kendre et Latpate [47] ont développé l'inégalité prouvée par Pachpatte dans (Théorème 3.2.1, (H_1)) en démontrant les résultats suivants :

Théorème 3.2.2 ([47]) *Soient* $u,\ f,\ g,\ c,\ c'\in C(J,\mathbb{R}_+)$ *et* $p\geq q\geq 0,\ p\neq 0$ *sont des constantes.*
Si l'inégalité

$$u^{p}(t)\leq c(t)+\int_{\alpha}^{t}f(s)u^{q}(s)ds+\int_{\alpha}^{\beta}g(s)u^{p}(s)ds,$$

est satisfaite, et

$$\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}g(s)\exp\left(\int_{\alpha}^{s}n_1f(\sigma)d\sigma\right)ds<1,$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned}u^{p}(t)\ &\leq\ \frac{c(\alpha)+\int_{\alpha}^{\beta}g(s)\left(\int_{\alpha}^{s}\left[c'(\tau)+n_2f(\tau)\right]\exp\left(\int_{\tau}^{s}n_1f(\sigma)d\sigma\right)d\tau\right)ds}{1-\varphi}\\&\quad\times\exp\left(\int_{\alpha}^{t}mf(s)ds\right)+\int_{\alpha}^{t}\left[c'(s)+n_2f(s)\right]\exp\left(\int_{s}^{t}n_1f(\sigma)\,d\sigma\right)ds,\end{aligned}$$

où

$$k>0,\ n_1=\tfrac{q}{p}k^{\frac{q-p}{p}}\qquad\text{et}\qquad n_2=\tfrac{p-q}{p}k^{\frac{q}{p}}.$$

Théorème 3.2.3 ([47])*Soient* $u,\ f,\ g,\ h\in C(J,\mathbb{R}_+)$ *et* $c\geq 0$ *est une constante. Si l'inégalité*

$$u^{p}(t)\leq c+\int_{\alpha}^{t}h(s)\left[u^{q}(s)+\int_{\alpha}^{s}f(\sigma)u^{q}(\sigma)d\sigma+\int_{\alpha}^{\beta}g(\sigma)u^{p}(\sigma)d\sigma\right]ds,\ \ \forall t\in J,$$

alors

$$u^p(t) \leq c \exp\left(\int_\alpha^t n_1 A(\sigma) d\sigma\right) + \int_\alpha^t n_2 B(s) \exp\left(\int_s^t n_1 A(\sigma)\, d\sigma\right),$$

où

$$A(t) = h(t)\left[1 + \int_\alpha^t f(\sigma) d\sigma + \frac{1}{n_1}\int_\alpha^\beta g(\sigma) d\sigma\right],$$
$$B(t) = h(t)\left[1 + \int_\alpha^t f(\sigma) d\sigma\right],$$

et p, q, n_1, n_2 sont exactement les mêmes définies dans le Théorème 3.2.2.

Corollaire 3.2.1 ([47]) *Supposons que les hypothèses du Théorème* 3.2.3 *sont vérifiées et soit $c(t) \geq 1$ une fonction croissante. Si l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c^p(t) + \int_\alpha^t h(s)\left[u^q(s) + \int_\alpha^s f(\sigma) u^q(s) d\sigma + \int_\alpha^\beta g(\sigma) u^p(\sigma) d\sigma\right] ds,\ \forall t \in J,$$

est satisfaite, alors

$$u^p(t) \leq c^p(t) \exp \int_\alpha^t n_1 A(\sigma) d\sigma + c^p(t) \int_\alpha^t n_2 B(s) \exp\left(\int_s^t n_1 A(\sigma) d\sigma\right),$$

où $p \geq q \geq 1$, A, B et n_1, n_2 sont exactement les mêmes fonctions définies dans les Théorème 3.2.3 *et* 3.2.2 *respectivement.*

3.3 Nouvelles extensions et généralisations

Dans la présente section, nous examinerons le problème d'obtentions des résultats plus fins et des versions plus générales des inégalités représentées dans les deux sections précédentes sur des échelles de temps arbitraires.

3.3.1 Inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman-Gamidov

Avant d'énoncer nos nouvelles généralisations, nous présentons le lemme suivant, vu son utilité dans nos résultats.

Lemme 3.3.1 ([36]) *Soient $\alpha, b \in \mathbb{T}$, considérons l'intervalle des échelles de temps suivant $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}$. Étant donné r une fonction delta différentiable telle que $r : [\alpha, b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow]0, \infty[$ et $r^{\Delta} \geq 0$ sur $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$. Définissons maintenant*

$$N(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{n(s)}, \ x > x_0 > 0,$$

où $n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est une fonction positive et croissante sur $]0, \infty[$. Alors, pour tout $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}$, nous avons

$$N(r(t)) \leq N(r(\alpha)) + \int_{\alpha}^{t} \frac{r^{\Delta}(\tau)}{n(r(\tau))} \Delta\tau.$$

Nos principaux résultats sont établis dans les théorèmes suivants.
Pour plus de commodité, nous supposons que $p \neq 0$, p, q, r sont des constantes réelles telles que $0 \leq q, \ r \leq p$ et $\alpha, b \in \mathbb{T}$.

Lemme 3.3.2 *Soient u, m, l et $n \in C_{rd}\left([\alpha, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+\right)$, où α, $b \in \mathbb{T}$. Si*

$$u(t) \leq m(t) + l(t) \int_{\alpha}^{b} n(s) u(s) \Delta s, \tag{3.1}$$

alors

$$u(t) \leq m(t) + \frac{l(t) \int_{\alpha}^{b} n(s) m(s) \Delta s}{1 - \int_{\alpha}^{b} n(s) l(s) \Delta s}, \tag{3.2}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, à condition que

$$\int_{\alpha}^{b} n(s) l(s) \Delta s < 1. \tag{3.3}$$

Preuve. Posons

$$k = \int_{\alpha}^{b} n(s) u(s) \Delta s.$$

De toute évidence, k est une constante. Il résulte de (3.1) que

$$u(t) \leq m(t) + l(t)k. \tag{3.4}$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité (3.4) par $n(t)$, puis intégrons le résultat obtenu de α à b, nous aurons

$$\int_{\alpha}^{b} n(s)u(s)\Delta s \leq \int_{\alpha}^{b} n(s)m(s)\Delta s + k\int_{\alpha}^{b} n(s)l(s)\Delta s.$$

Il est facile de constater que

$$k \leq \int_{\alpha}^{b} n(s)m(s)\Delta s + k\int_{\alpha}^{b} n(s)l(s)\Delta s, \tag{3.5}$$

et donc, l'inégalité (3.5) implique l'estimation suivante

$$\left(1 - \int_{\alpha}^{b} n(s)l(s)\Delta s\right) k \leq \int_{\alpha}^{b} n(s)m(s)\Delta s,$$

utilisons l'inégalité (3.3), l'inégalité précédente devient

$$k \leq \frac{\int_{\alpha}^{b} n(s)m(s)\Delta s}{1 - \int_{\alpha}^{b} n(s)l(s)\Delta s}. \tag{3.6}$$

Par conséquent, l'inégalité souhaitée (3.2) découle des deux inégalités (3.6) et (3.4). La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 3.3.1 *Supposons que* u, c, $g \in C_{rd}\left([\alpha, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_{+}\right)$, *et* $c^{\Delta} \geq 0$. *Si* f *est définie comme dans le Théorème* 1.1.7 *telle que* $f(t,s) \geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ *pour* $t, s \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}$ *avec* $s \leq t$. *Alors*

$$u^{p}(t) \leq c(t) + \int_{\alpha}^{t} f(t,s)u^{q}(s)\Delta s + \int_{\alpha}^{b} g(s)u^{r}(s)\Delta s\ ,$$

implique

$$u(t) \leq \left[m(t) + \frac{\frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} e_P(t,\alpha) \int_{\alpha}^{b} g(s) m(s) \Delta s}{1 - \frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} \int_{\alpha}^{b} g(s) e_P(s,\alpha) \Delta s} \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.7}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, *où*

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{q}{p} k^{\frac{q-p}{p}} \left[f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s) \Delta s \right], \qquad (3.8) \\ Q(t) &= c^{\Delta}(t) + \frac{p-q}{p} k^{\frac{q}{p}} \left[f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s) \Delta s \right], \end{aligned}$$

et

$$m(t) = c(\alpha) e_P(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(s) e_P(t, \sigma(s)) \Delta s + \frac{p-r}{p} k^{\frac{r}{p}} e_P(t,\alpha) \int_{\alpha}^{b} g(s) \Delta s, \tag{3.9}$$

à condition que

$$\frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} \int_{\alpha}^{b} g(s) e_P(s,\alpha) \Delta s < 1.$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ par

$$z(t) = c(t) + \int_{\alpha}^{t} f(t,s) u^{q}(s) \Delta s + \int_{\alpha}^{b} g(s) u^{r}(s) \Delta s,$$

alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq z^{\frac{1}{p}}(t), \qquad (3.10) \\ z(\alpha) &= c(\alpha) + \int_{\alpha}^{b} g(s) u^{r}(s) \Delta s \leq c(\alpha) + \int_{\alpha}^{b} g(s) z^{\frac{r}{p}}(s) \Delta s, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &= c^{\Delta}(t) + f(\sigma(t), t) u^{q}(t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s) u^{q}(s) \Delta s \\ &\leq c^{\Delta}(t) + \left[f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s) \Delta s \right] z^{\frac{q}{p}}(t). \end{aligned}$$

Utilisons le Lemme 1.4.1 (voir page17) pour tout $k > 0$, nous obtenons facilement

$$z^{\Delta}(t) \leq c^{\Delta}(t) + (f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,s)\Delta s)(\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} z(t) + \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}),$$

l'inégalité ci-dessus peut être reformulée comme suit :

$$z^{\Delta}(t) \leq P(t)z(t) + Q(t), \quad t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}, \tag{3.11}$$

où P et Q sont données par (3.8).

Utilisons le Lemme 1.4.3 (voir page17) et l'inégalité (3.11) nous aurons

$$z(t) \leq z(\alpha)e_P(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s, \ t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}.$$

La combinaison de l'inégalité ci-dessus avec l'inégalité (3.10) peut entraîner

$$z(t) \leq c(\alpha)e_P(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s + e_P(t,\alpha)\int_{\alpha}^{b} g(s)z^{\frac{r}{p}}(s)\Delta s. \tag{3.12}$$

Appliquons le Lemme 1.4.1 à l'inégalité (3.12), nous obtenons

$$z(t) \leq c(\alpha)e_P(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(s)e_P(t,\sigma(s))\Delta s + e_P(t,\alpha)\int_{\alpha}^{b} g(s)(\tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} z(s) + \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}})\Delta s.$$

De plus, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée de la maniére suivante :

$$z(t) \leq m(t) + \tfrac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} e_P(t,\alpha)\int_{\alpha}^{b} g(\alpha,s)z(s)\Delta s,$$

où m est donnée par (3.9).

Appliquons le Lemme 3.3.1 et en utilisant l'inégalité (3.10), on obtient l'inégalité voulue (3.7). Ce qui achève la preuve. ∎

Remarque 3.3.1 *Si nous prenons $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $p = q = r = 1$, l'inégalité donnée dans le Théorème 3.3.1 se réduira à l'inégalité donnée dans [Théorème 3.2.1, (H_3)].*

Théorème 3.3.2 *Supposons que $u,\ h,\ g \in C_{rd}\left([\alpha,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_{+}\right)$, et $c \geq 0$ une constante. Si f est définie comme dans le Théorème 1.1.7 telle que $f(t,s) \geq 0$ et $f^{\Delta}(t,s) \geq 0$ pour $t,s \in [\alpha,b]_{\mathbb{T}}$ avec $s \leq t$. Alors*

$$u^{p}(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[u^{q}(s) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau) u^{q}(\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)u^{r}(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s,$$

implique

$$u(t) \leq \left[c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left(m(s) + \frac{l(s)\int_{\alpha}^{b} g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_{\alpha}^{b} g(\tau)l(\tau)\Delta\tau} \right) \Delta s \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.13}$$

pour $t \in [\alpha,b]_{\mathbb{T}}^{k}$, à condition que

$$\int_{\alpha}^{b} g(\tau)l(\tau)\Delta\tau < 1,$$

où

$$m(t) = (\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}} \int_{\alpha}^{b} g(\tau)\Delta\tau) e_{P}(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(\tau) e_{P}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau, \tag{3.14}$$

et

$$\begin{aligned} P(t) &= \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} h(t) + f(\sigma(t),t) + \textstyle\int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau, \\ Q(t) &= \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} (f(\sigma(t),t) + \textstyle\int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ par

$$z(t) = c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[u^{q}(s) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau) u^{q}(\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)u^{r}(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s,$$

alors

$$\begin{aligned} z(\alpha) &= c \\ u(t) &\leq z^{\frac{1}{p}}(t), \end{aligned} \tag{3.16}$$

et

$$z^{\Delta}(t) = h(t) \left[u^{q}(t) + \int_{\alpha}^{t} f(t,\tau) u^{q}(\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)u^{r}(\tau)\Delta\tau \right]. \tag{3.17}$$

Substituons (3.16) dans (3.17), ce qui entraîne

$$z^{\Delta}(t) \leq h(t)\left[z^{\frac{q}{p}}(t) + \int_{\alpha}^{t} f(t,\tau) z^{\frac{q}{p}}(\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) z^{\frac{r}{p}}(\tau)\Delta\tau\right]. \tag{3.18}$$

Utilisons le Lemme 1.4.1 pour tout $k > 0$, nous obtenons facilement

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) \ \leq \ h(t) & \left[\left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(t) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right) + \int_{\alpha}^{t} f(t,\tau)\left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(\tau) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)\Delta\tau \right. \\ & \left. + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}} z(\tau) + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\Delta\tau\right]. \end{aligned}$$

Définissons une fonction $\upsilon(t)$ par

$$\begin{aligned} \upsilon(t) \ = \ & \left(\left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(t) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right) + \int_{\alpha}^{t} f(t,\tau)\left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(\tau) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)\Delta\tau \right. \\ & \left. + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}} z(\tau) + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\Delta\tau\right), \end{aligned}$$

alors,

$$\upsilon(\alpha) = \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(t) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}} z(\tau) + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\Delta\tau. \tag{3.19}$$

Il est facile d'observer que

$$\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(t) \leq \upsilon(t), \qquad z^{\Delta}(t) \leq h(t)\upsilon(t), \tag{3.20}$$

et que la fonction $\upsilon(t)$ est croissante pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$. Ainsi, une simple application du Théorème 1.1.7 (voir page 11), donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} \upsilon^{\Delta}(t) \ \leq \ & \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z^{\Delta}(t) + f(\sigma(t), t)\left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(t) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right) \\ & + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} z(\tau) + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}\right)\Delta\tau. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Il résulte de ces deux inégalités (3.21) et (3.20) que

$$\begin{aligned} \upsilon^{\Delta}(t) \ \leq \ & \left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} h(t) + f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau\right)\upsilon(t) \\ & + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}(f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau), \end{aligned}$$

en outre, l'inégalité ci-dessus peut être réécrite sous la forme suivante

$$\upsilon^{\Delta}(t) \leq P(t)\upsilon(t) + Q(t), \tag{3.22}$$

où P et Q sont définies par (3.15).

Faisons appel au Lemme 1.4.3, l'inégalité (3.22) donne une estimation de $\upsilon(t)$ de la forme suivante

$$\upsilon(t) \leq \upsilon(\alpha)e_P(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(\tau)e_P(t,\sigma(\tau))\Delta\tau, \qquad t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}.$$

Utilisons (3.19), nous obtenons

$$\begin{aligned} \upsilon(t) \quad &\leq \quad \left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(\tau) + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\right)\Delta\tau)\right) \\ &\quad \times e_P(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(\tau)e_P(t,\sigma(\tau))\Delta\tau. \end{aligned}$$

Utilisons (3.20), nous obtenons

$$\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}z(t) \leq \frac{\frac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}}{\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}}\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}z(t) \leq \frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{p}}\upsilon(t).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \upsilon(t) \quad &\leq \quad \left(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}c + \tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}\int_{\alpha}^{b} g(\tau)\Delta\tau\right)e_P(t,\alpha) \\ &\quad + \int_{\alpha}^{t} Q(\tau)e_P(t,\sigma(\tau))\Delta\tau + \tfrac{r}{q}K^{\frac{r-q}{p}}e_P(t,\alpha)\int_{\alpha}^{b} g(\tau)\upsilon(\tau)\Delta\tau, \end{aligned}$$

alors, l'inégalité ci-dessus peut être reformulée comme suit :

$$\upsilon(t) \leq m(t) + l(t)\int_{\alpha}^{b} g(\tau)\upsilon(\tau)\Delta\tau, \tag{3.23}$$

où

$$l(t) = \frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{p}}e_P(t,\alpha),$$

et $m(t)$ est donnée par (3.14).

Appliquons le Lemme 3.3.1 et en utilisant l'inégalité (3.23), nous obtenons

$$\upsilon(t) \leq m(t) + \frac{l(t) \int_\alpha^b g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_\alpha^b g(\tau)l(\tau)\Delta\tau}.$$

Donc, de l'inégalité (3.20), il résulte que

$$z^\Delta(t) \leq h(t) \left(m(t) + \frac{l(t) \int_\alpha^b g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_\alpha^b g(\tau)l(\tau)\Delta\tau} \right).$$

L'intégration des deux côtés de la dernière inégalité de α à t, donne

$$z(t) \leq c + \int_\alpha^t h(s) \left(m(s) + \frac{l(s) \int_\alpha^b g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_\alpha^b g(\tau)l(\tau)\Delta\tau} \right) \Delta s, \tag{3.24}$$

l'inégalité désirée (3.13) découle des deux inégalités (3.24) et (3.16). ■

Remarque 3.3.2 *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $r = p$, $f(t,s) = f(t)$, *le Théorème* 3.3.2 *sera semblable au Théorème* 3.2.3.

Corollaire 3.3.1 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème* 3.3.2 *sont vérifiées. Soit* $1 \leq c(t)$ *une fonction croissante. Alors l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c^p(t) + \int_\alpha^t h(s) \left[u^q(s) + \int_\alpha^s f(s,\tau)u^q(\tau)\Delta\tau + \int_\alpha^b g(\tau)u^r(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s, \tag{3.25}$$

implique

$$u(t) \leq c(t) \left[1 + \int_\alpha^t h(s) \left(m(s) + \frac{l(s) \int_\alpha^b g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_\alpha^b g(\tau)l(\tau)\Delta\tau} \right) \Delta s \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.26}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$, *où*

$$\begin{aligned} m(t) &= (\frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}} + \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}} + \frac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}} \int_\alpha^b g(\tau)\Delta\tau)e_P(t,\alpha) \\ &\quad + \int_\alpha^t Q(\tau)e_P(t,\sigma(\tau))\Delta\tau, \\ l(t) &= \frac{r}{q}K^{\frac{r-q}{p}} e_P(t,\alpha), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}h(t) + f(\sigma(t),t) + \int_\alpha^t f^\Delta(t,\tau)\Delta\tau, \\ Q(t) &= \frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}(f(\sigma(t),t) + \int_\alpha^t f^\Delta(t,\tau)\Delta\tau), \end{aligned}$$

à condition que

$$\int_\alpha^b g(\tau)l(\tau)\Delta\tau < 1.$$

Preuve. Étant donné $c(t)$ une fonction croissante telle que $1 \leq c(t)$, nous pouvons donc reformuler l'inégalité (3.25) sous la forme suivante

$$\omega^p(t) = \left(\frac{u(t)}{c(t)}\right)^p \leq 1 + \int_\alpha^t h(s)\left[\omega^q(s) + \int_\alpha^s f(s,\tau)\omega^q(\tau)\Delta\tau + \int_\alpha^b g(\tau)\omega^r(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s. \tag{3.27}$$

Appliquons le Théorème 3.3.2 sur cette dernière, nous en déduisons l'inégalité souhaitée (3.26). ■

Remarque 3.3.3 *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $r = p$, $f(t,s) = f(t)$, *le Corollaire* 3.3.1 *est équivalent au Corollaire* 3.2.1.

3.3.2 Inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman-Bihari-Gamidov

Cette partie est dédiée à quelques résultats supplémentaires substantiels qui sont, des extensions des résultats précédents.

Théorème 3.3.3 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème* 3.3.1 *sont vérifiées. Soit* $S : [\alpha,b]_{\mathbb{T}}^k \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction rd-continue satisfaisant*

$$\begin{aligned} &0 \leq S(t,x) - S(t,y) \leq R(t,y)(x-y), \\ &S^\Delta(t,0) \geq 0, \ \ R^\Delta(t,0) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

pour $t \in [\alpha,b]_{\mathbb{T}}^k$ *et* $x \geq y \geq 0$, *où* $R : [\alpha,b]_{\mathbb{T}}^k \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *est une fonction rd-continue. Alors*

$$u^p(t) \leq c(t) + \int_\alpha^t f(t,\tau)S(\tau,u^q(\tau))\Delta\tau + \int_\alpha^b g(\tau)S(\tau,u^r(\tau))\Delta\tau, \tag{3.29}$$

implique

$$u(t) \leq \left\{ m(t) + \frac{l(t)\int\limits_{\alpha}^{b} g(\tau) R(\tau, \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) m(\tau) \Delta\tau}{1 - \int\limits_{\alpha}^{b} g(\tau) R(\tau, \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) l(\tau) \Delta\tau} \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3.30}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, *où*

$$l(t) = \tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} e_P(t, \alpha), \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} m\ (t) = & \left(c(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{b} g(\tau) S(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) \Delta\tau \right) e_P(t, \alpha) \\ & + \int\limits_{\alpha}^{t} Q(\tau) e_p(t, \sigma(\tau)) \Delta\tau, \end{aligned} \tag{3.32}$$

et

$$\begin{aligned} P(t) &= \tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(t, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) f(\sigma(t), t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(\tau, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) f^{\Delta}(t, \tau) \Delta\tau, \\ Q(t) &= c^{\Delta}(t) + f(\sigma(t), t) S(t, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) + \int\limits_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t, \tau) S(\tau, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) \Delta\tau. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ par

$$z(t) = c(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} f(t, \tau) S(\tau, u^{q}(\tau)) \Delta\tau + \int\limits_{\alpha}^{b} g(\tau) S(\tau, u^{r}(\tau)) \Delta\tau, \tag{3.34}$$

alors,

$$z(\alpha) = c(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{b} g(\tau) S(\tau, u^{r}(\tau)) \Delta\tau, \tag{3.35}$$

et

$$u(t) \leq z^{\frac{1}{p}}(t). \tag{3.36}$$

En utilisant la première condition de (3.28) et en appliquant le Lemme 1.4.1, il s'ensuit que, pour tout $K > 0$

$$\begin{aligned} S(t, u^r(t)) &\leq S(t, z^{\frac{r}{p}}(t)) \\ &\leq S(t, \frac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} z(t) + \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) \\ &\leq \tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} R(t, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) z(t) + S(t, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}). \end{aligned} \tag{3.37}$$

En se servant des inégalités (3.35) et (3.37), nous obtenons

$$z(\alpha) \leq c(\alpha) + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) \left[\tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} R(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) z(\tau) + S(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) \right] \Delta\tau. \tag{3.38}$$

La Δ-dérivation de (3.34), entraîne

$$z^{\Delta}(t) = c^{\Delta}(t) + f(\sigma(t), t) S(t, u^q(t)) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t, \tau) S(\tau, u^q(\tau)) \Delta\tau, \tag{3.39}$$

ainsi, utilisons l'inégalité (3.37), nous trouvons

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) \leq c^{\Delta}(t) &+ f(\sigma(t), t) \left[\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(t, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) z(t) + S(t, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) \right] \\ &+ \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t, \tau) \left[\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(\tau, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) z(\tau) + S(\tau, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) \right] \Delta\tau. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Nous pouvons réécrire l'inégalité (3.40) sous la forme suivante

$$z^{\Delta}(t) \leq P(t) z(t) + Q(t), \tag{3.41}$$

où $P(t)$ and $Q(t)$ sont données par (3.34).

Faisons appel au Lemme 1.4.3, l'inégalité (3.41) devient

$$z(t) \leq z(\alpha) e_P(t, \alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(\tau) e_P(t, \sigma(\tau)) \Delta\tau, \tag{3.42}$$

utilisons (3.38), nous obtenons

$$\begin{aligned} z(t) \leq &\left(c(\alpha) + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) \left[\tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} R(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) z(\tau) + S(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) \right] \Delta\tau \right) e_P(t, \alpha) \\ &+ \int_{\alpha}^{t} Q(\tau) e_P(t, \sigma(\tau)) \Delta\tau. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Alors l'inégalité (3.43) peut être reformulée comme suit

$$z(t) \leq m\ (t) + \ l(t) \int_{\alpha}^{b} g(\tau) R(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) z(\tau) \Delta\tau, \tag{3.44}$$

où $l(t), m(t)$ sont données par (3.31) et (3.32).

Utilisons le Lemme 3.3.1, l'inégalité (3.44) devient

$$z(t) \leq m(t) + \frac{l(t) \int_{\alpha}^{b} g(\tau) R(\tau, \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) m(\tau) \Delta\tau}{1 - \int_{\alpha}^{b} g(\tau) R(\tau, \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) l(\tau) \Delta\tau}. \tag{3.45}$$

La combinaison de l'inégalité ci-dessus avec l'inégalité (3.36), entraîne (3.30). Ce qui achève la preuve. ∎

Remarque 3.3.4 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $S(t, u(t)) = u(t)$, $f(t, s) = f(t)$, $p = q = r = 1$ *et* $c(t) = c$ *(une constante), l'inégalité donnée dans le Théorème* 3.3.3 *se réduit à l'inégalité donnée dans* [57, *Lemme BS*] *et si on prend* $r = p$, $f(t, s) = f(t)$, *le Théorème* 3.3.3 *se réduit au Théorème* 3.2.2.

Théorème 3.3.4 *Supposons que toutes les conditions du Théorème* 3.3.2 *sont satisfaites. Si* S *est définie comme dans le Théorème* 3.3.3, *alors l'inégalité*

$$u^p(t) \leq c\ + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[S(s, u^q(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s, \tau) S(\tau, u^q(\tau)) \Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) S(\tau, u^r(\tau)) \Delta\tau \right] \Delta s, \tag{3.46}$$

implique

$$u(t) \leq \left\{ c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[m(s) + \frac{l(s) \int_{\alpha}^{b} \frac{R(\tau, \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) g(\tau)}{R(\tau, \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}})} m(\tau) \Delta\tau}{1 - \int_{\alpha}^{b} \frac{R(\tau, \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) g(\tau)}{R(\tau, \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}})} l(\tau) \Delta\tau} \right] \Delta s \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3.47}$$

pour tout $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, *où*

$$\begin{aligned} m(t) = \Big[& \tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(\alpha, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) c + S(\alpha, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) \\ & + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) S(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) \Delta\tau \Big] e_p(t, \alpha) + \int_{\alpha}^{t} Q(\tau) e_P(t, \sigma(\tau)) \Delta\tau, \qquad (3.48) \\ l(t) = {} & \tfrac{r}{q} K^{\frac{r-q}{p}} e_p(t, \alpha), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Q(t) &= S^{\Delta}(t, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) + f(\sigma(t), t) S(t, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t, \tau) S(\tau, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) \Delta\tau, \\ P(t) &= \tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(\sigma(t), \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) h(t) + \frac{R^{\Delta}(t, \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}})}{R(t, \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}})} \qquad (3.49) \\ &\quad + f(\sigma(t), t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t, \tau) \Delta\tau, \end{aligned}$$

à condition que

$$\int_{\alpha}^{b} \frac{R(\tau, \frac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) g(\tau)}{R(\tau, \frac{q-p}{p} K^{\frac{q}{p}})} l(\tau) \Delta\tau < 1. \qquad (3.50)$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ comme suit

$$z(t) = c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[S(s, u^q(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s, \tau) S(\tau, u^q(\tau)) \Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) S(\tau, u^r(\tau)) \Delta\tau \right] \Delta s, \qquad (3.51)$$

et

$$z^{\Delta}(t) = h(t) \left[S(t, u^q(t)) + \int_{\alpha}^{t} f(t, \tau) S(\tau, u^q(\tau)) \Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) S(\tau, u^r(\tau)) \Delta\tau \right]. \qquad (3.52)$$

Utilisons le Lemme 1.4.1 et l'inégalité (3.37). L'inégalité (3.52) devient

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) \quad \leq \quad h(t) \Big[& \tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(t, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) z(t) + S(t, \frac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) \\ & + \int_{\alpha}^{t} f(t, \tau) (\tfrac{q}{p} K^{\frac{q-p}{p}} R(\tau, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}}) z(\tau) + S(\tau, \tfrac{p-q}{p} K^{\frac{q}{p}})) \Delta\tau \\ & + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) (\tfrac{r}{p} K^{\frac{r-p}{p}} R(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) z(\tau) + S(\tau, \tfrac{p-r}{p} K^{\frac{r}{p}}) \Delta\tau \Big]. \qquad (3.53) \end{aligned}$$

Notons une fonction$v(t)$ par

$$\begin{aligned} v(t) &= \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})z(t)+S(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) \\ &+\int_{\alpha}^{t} f(t,\tau)(\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(\tau,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})z(\tau)+S(\tau,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}))\Delta\tau \\ &+\int_{\alpha}^{b} g(\tau)(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}R(\tau,\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})z(\tau)+S(\tau,\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}}))\Delta\tau. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Évidemment, v est une fonction delta différentiable et croissante telle que

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(\alpha,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})c+S(\alpha,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) \\ &+\int_{\alpha}^{b} g(\tau)\left(\tfrac{r}{p}K^{\frac{r-p}{p}}R(\tau,\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})z(\tau)+S(\tau,\tfrac{p-r}{p}K^{\frac{r}{p}})\right)\Delta\tau, \end{aligned}$$

et

$$\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})z(t)\le v(t), \tag{3.55}$$

par un simple calcul, nous trouvons

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(t) &= \tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(\sigma(t),\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})z^{\Delta}(t)+\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R^{\Delta}(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})z(t)+S^{\Delta}(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) \\ &+f(\sigma(t),t)\left[\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})z(t)+S(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\right] \\ &+\int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\left[\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(\tau,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})z(\tau)+S(\tau,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\right]\Delta\tau. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} v^{\Delta}(t) &\le \Bigg[\tfrac{q}{p}K^{\frac{q-p}{p}}R(\sigma(t),\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})h(t)+\frac{R^{\Delta}(t,\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})}{R(t,\frac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})}+f(\sigma(t),t) \\ &\quad+\int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau\Bigg]\times v(t)+S^{\Delta}(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})+f(\sigma(t),t)S(t,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}}) \\ &\quad+\int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)S(\tau,\tfrac{p-q}{p}K^{\frac{q}{p}})\Delta\tau \\ &= P(t)v(t)+Q(t), \end{aligned} \tag{3.57}$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ sont données par (3.49).

En suivant les mêmes étapes de la démonstration du Théorème 3.3.2, nous obtenons l'inégalité désirée (3.47). ■

Corollaire 3.3.2 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème* 3.3.2 *sont vérifiées. Soit* $c(t) \in C_{rd}\left([\alpha, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+^*\right)$ *une fonction croissante telle que* $S^{\Delta}(t,0)c(t) \geq S(t,0)c^{\Delta}(t)$ *et* $R^{\Delta}(t,0) \geq 0$ *sur* $[\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$*, où* S *est exactement définie comme dans* (3.28)*. Alors*

$$u(t) \leq c(t) + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left[S(s,u(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)S(\tau,u(\tau))\Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)S(\tau,u(\tau))\Delta\tau\right]\Delta s, \tag{3.58}$$

implique

$$u(t) \leq c(t)\left\{1 + \int_{\alpha}^{t} h(\tau)\left[m(\tau) + \frac{l(\tau)\int_{\alpha}^{b} g(\tau)m(\tau)\Delta\tau}{1 - \int_{\alpha}^{b} g(\tau)l(\tau)\Delta\tau}\right]\Delta s\right\}, \tag{3.59}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^k$*, où*

$$\begin{aligned} m(t) &= \left[R(\alpha,0) + M(\alpha,0) + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)M(\tau,0)\Delta\tau\right]e_p(t,\alpha) + \int_{\alpha}^{t} e_P(t,\sigma(\tau))Q(\tau)\Delta\tau, \\ l(t) &= e_p(t,\alpha), \end{aligned} \tag{3.60}$$

et

$$\begin{aligned} Q(t) &= M^{\Delta}(t,0) + f(\sigma(t),t)M(t,0) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)M(\tau,0)\Delta\tau, \\ P(t) &= R(\sigma(t),0)h(t) + \tfrac{R^{\Delta}(t,0)}{R(t,0)} + f(\sigma(t),t) + \int_{\alpha}^{t} f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau, \end{aligned} \tag{3.61}$$

avec

$$\int_{\alpha}^{b} g(\tau)l(\tau)\Delta\tau < 1,$$

et

$$M(t,u(t)) = \frac{1}{c(t)}S(t,c(t)u(t)).$$

Preuve. Étant donné que $c(t)$ est croissante. D'après l'inégalité (3.58) nous pouvons avoir

$$\begin{aligned} w(t) \quad \leq \quad 1 \ + & \int_{\alpha}^{t} h(s)\left[\frac{1}{c(s)}S(s,c(s)w(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\frac{1}{c(\tau)}S(\tau,c(\tau)w(\tau))\Delta\tau\right. \\ & \left. + \int_{\alpha}^{b} g(\tau)\frac{1}{c(\tau)}S(\tau,c(\tau)w(\tau))\Delta\tau\right]\Delta s. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Soit

$$M(t,x) = \frac{1}{c(t)}S(t,c(t)x).$$

De plus, nous pouvons facilement constater que $M(t,x)$ satisfait l'inégalité (3.28), telle que

$$0 \leq M(t,x) - M(t,y) \leq R_1(t,y)(x-y), \ \ x \geq y \geq 0,$$

avec $R_1(t,y) = R(t,c(t)y(t))$. Considérons $S^{\Delta}(t,0)c(t) \geq S(t,0)c^{\Delta}(t)$ et $R^{\Delta}(t,0) \geq 0$ sur $[\alpha,b]_{\mathbb{T}}^{k}$ et appliquons convenablement le Théorème 3.3.4 pour $(p = q = r = c = 1)$, nous en déduisons l'inégalité (3.58). ■

Dans la suite, nous allons élaborer d'autres nouvelles généralisations de type Bellman-Bihari, où les fonctions non linéaires qui apparaissent sur le coté droit appartiennent à certaines classes de fonctions.

Théorème 3.3.5 *Considérons les fonctions* $u,h,g \in C_{rd}\left([\alpha,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R}_{+}\right)$ *et soit* $n:\mathbb{R}_{+}\longrightarrow\mathbb{R}_{+}$ *une fonction continue croissante telle que* $n(u)>0$ *pour* $u>0$ *et* N *est bien définie dans le Lemme* 3.3.1. *Si* f *est définie comme dans le Théorème* 1.1.7 *telle que* $f(t,s)\geq 0$ *et* $f^{\Delta}(t,s)\geq 0$ *pour* $t,s\in[\alpha,b]_{\mathbb{T}}$ *avec* $s\leq t$ *.*

$$u(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left[n(u(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)n(u(\tau))\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)n(u(\tau))\Delta\tau\right]\Delta s, \tag{3.63}$$

implique

$$u(t) \leq N^{-1}(N(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s), \tag{3.64}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, *avec*

$$N(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s) \in Dom(N^{-1}). \tag{3.65}$$

Preuve. Posons $z(t)$ le côté droit de l'inégalité (3.63), ainsi nous avons

$$u(t) \le z(t). \tag{3.66}$$

A l'aide des propriétés de la fonction n, on peut obtenir

$$z^{\Delta}(t) \le h(t) \left[n(z(t)) + \int_{\alpha}^{t} f(t,\tau) n(z(\tau))\Delta\tau + \int_{\alpha}^{t} g(\tau) n(z(\tau)\Delta\tau \right], \tag{3.67}$$

l'inégalité (3.67) peut être reformulée comme suit

$$z^{\Delta}(t) \le h(t) \left[(1 + \int_{\alpha}^{t} f(t,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{t} g(\tau)\Delta\tau) \right] n(z(t)), \tag{3.68}$$

l'inégalité (3.68) implique

$$\frac{z^{\Delta}(t)}{n(z(t))} \le h(t)(1 + \int_{\alpha}^{t} f(t,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{t} g(\tau)\Delta\tau).$$

Intégrons les deux côtés de l'inégalité ci-dessus de α à t et faisons appel au Lemme 3.3.1, nous pouvons obtenir

$$N(z(t)) \le N(z(\alpha)) + \int_{\alpha}^{t} h(s)(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s,$$

donc

$$z(t) \le N^{-1}(N(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s).$$

Utilisons l'inégalité (3.66), nous obtenons l'inégalité désirée (3.64). ■

Corollaire 3.3.3 *Supposons que toutes les hypothèses du Théorème* 3.3.5 *sont vérifiées et que* $n^{-1}(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$, *alors l'inégalité*

$$n(u(t)) \le c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[u(s) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau) u(\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau) u(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s, \tag{3.69}$$

implique

$$u(t) \leq n^{-1}(W^{-1}(W(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s)), \tag{3.70}$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$, *où*

$$W(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{n^{-1}(s)}, \; x > \; x_0 > 0,$$

et

$$\left(W(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau\right)\Delta s\right) \in Dom(W^{-1}),$$

$$W^{-1}\left(W(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau\right)\Delta s\right) \in Dom(n^{-1}).$$

Preuve. Définissons la fonction $z(t)$ par

$$z(t) = c + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left[u(s) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)u(\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)u(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s.$$

L'utilisation des propriétés de la fonction n entraîne

$$u(t) \leq n^{-1}(z(t)),$$

alors

$$z(t) \leq c + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left[n^{-1}(z(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)n^{-1}(z(\tau))\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)n^{-1}(z(\tau))\Delta\tau\right]\Delta s.$$

Une application appropriée du Théorème 3.3.5, nous mène à déduire l'inégalité souhaitée (3.70). ■

Corollaire 3.3.4 *Si toutes les hypothèses du Théorème* 3.3.5 *sont satisfaites,* n *est de classe* $\mathcal{S}$ *(voir définition 1.4.1 page* 17*) et* $c(t) \in C_{rd}\left([\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}, \mathbb{R}_{+}^{*}\right)$ *est une fonction croissante. Si l'inégalité suivante*

$$u(t) \leq c(t) + \int_{\alpha}^{t} h(s)\left[n(u(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)n(u(\tau))\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)n(u(\tau))\Delta\tau\right]\Delta s, \tag{3.71}$$

est satisfaite pour tout $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$*, alors*

$$u(t) \leq max(c(t),1)\left(N^{-1}\left(N(1)+\int_{\alpha}^{t} h(s)(1+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s\right)\right), \tag{3.72}$$

avec

$$\left(N(1)+\int_{\alpha}^{t} h(s)(1+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s\right) \in Dom(N^{-1}).$$

Preuve. Notons $b(t) = max(c(t), 1)$. Alors l'inégalité (3.71) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\frac{u(t)}{b(t)} \leq 1+\int_{\alpha}^{t} \frac{h(s)}{b(s)}\left[n(u(s))+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)n(u(\tau))\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)n(u(\tau))\Delta\tau\right]\Delta s.$$

Soit $z(t) = \frac{u(t)}{b(t)}$. Puisque la fonction n est de classe $\mathcal{S}$, nous aurons

$$z(t) \leq 1+\int_{\alpha}^{t} h(s)\left[n(z(s))+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)n(z(\tau))\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)n(z(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s.$$

Comme n est une fonction croissante et en utilisant le Théorème 3.3.5, on peut obtenir l'inégalité désirée (3.72). ■

Corollaire 3.3.5 *Si toutes les hypothèses du Théorème* 3.3.5 *sont satisfaites et* n *est de classe* $\mathcal{T}$ *(voir définition 1.4.2 page* 17*). Si l'inégalité*

$$n(u(t)) \leq c(t)+\int_{\alpha}^{t} h(s)\left[(u(s))+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)u(\tau))\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)u(\tau)\Delta\tau\right]\Delta s, \tag{3.73}$$

est satisfaite pour tout $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}^{k}$*, alors*

$$u(t) \leq max(c(t),1)n^{-1}(W^{-1}(W(1)+\int_{\alpha}^{t} h(s)(1+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s)), \tag{3.74}$$

avec

$$\begin{aligned} (W(1)+\int_{\alpha}^{t} h(s)(1+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s) &\in Dom(W^{-1}), \\ W^{-1}(W(1)+\int_{\alpha}^{t} h(s)(1+\int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau+\int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s) &\in Dom(n^{-1}). \end{aligned}$$

Preuve. Désignons $b(t) = max(c(t), 1)$. Ainsi l'inégalité (3.74) peut être reformulée comme suit

$$\frac{n(u(t))}{b(t)} \leq 1 + \int_{\alpha}^{t} \frac{h(s)}{b(s)} \left[(u(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)u(\tau))\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(s,\tau)u(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s. \qquad (3.75)$$

Soit $z(t) = \frac{u(t)}{b(t)}$. Puisque la fonction n est de classe $\mathcal{T}$, nous allons avoir

$$n(z(t)) \leq 1 + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[z(s) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)z(\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)z(\tau)\Delta\tau \right] \Delta s.$$

Une application adéquate du Corollaire 3.4.2, conduit à l'inégalité souhaitée (3.74). ■

3.3.3 Applications

La dernière partie de cette section est consacrée à illustrer nos principaux et récents résultats par la présentation de quelques exemples dont l'objectif principal est d'étudier et explorer certaines propriétés de solutions des équations dynamiques sur des échelles de temps.

Exemple 3.3.1 *Considérons l'équation intégrale générale, mixte et non linéaire suivante*

$$y^p(t) = x(t) + \int_{\alpha}^{t} F(s, y^q(s))\Delta s + \int_{\alpha}^{b} G(s, y^r(s))\Delta s, \qquad (3.76)$$

pour $t \in [\alpha, b]_{\mathbb{T}}$*, où* $p \geq q > 0$, $p \geq r > 0$, $y(t)$ *est une fonction inconnue,* $x \in C_{rd}([\alpha, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$, $F, G \in C_{rd}([\alpha, b]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Supposons les fonctions* x, y, F, G *indiquées dans la formule* (3.76) *satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq c(t), \\ |F(s, y^q(s))| &\leq f(s)\,|y|^q\,, \\ |G(s, y^r(s))| &\leq g(s)\,|y|^r\,. \end{aligned} \qquad (3.77)$$

où $c, f, g \in C_{rd}([\alpha, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}_+)$.

Proposition 3.3.1 *Admettons que $y(t)$ est la solution unique de l'équation* (3.76) *et* $\int\limits_{\alpha}^{b} g(s)l(s)\Delta s < 1$, *ainsi nous avons*

$$|y(t)| \leq \left\{ m(t) + \frac{l(t)\int\limits_{\alpha}^{b} g(s)m(s)\Delta s}{1 - \int\limits_{\alpha}^{b} g(s)l(s)\Delta s} \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3.78}$$

où $m(t)$ est définie exactement comme dans le Théorème 3.3.1 *et*

$$l(t) = \frac{r}{p} k^{\frac{r-p}{p}} e_p(t, \alpha).$$

Preuve. A partir des équations (3.76) et (3.77), nous obtenons

$$|y(t)|^p \leq c(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} f(s)\,|y(s)|^q\,\Delta s + \int\limits_{\alpha}^{b} g(s)\,|y(s)|^r\,\Delta s.$$

En faisant appel au Théorème 3.3.1 et en prenant $f(t,s) = f(t)$, nous obtenons l'estimation requise dans (3.78). ■

Exemple 3.3.2 *Considérons le problème de valeur initiale suivant :*

$$y^{\Delta}(t) = h(t)\left[n(y(t)) + \int_{\alpha}^{t} f(t,s)n(y(s))\Delta s + \int_{\alpha}^{t} g(s)n(y(s))\Delta s\right],\ y(\alpha) = c, \tag{3.79}$$

où $h(t)$, $f(t,s)$, $g(t)$ et $n(t)$ sont exactement définies comme dans le Théorème 3.3.5 *et c est une constante.*

Proposition 3.3.2 *Supposons que $y(t)$ est la solution unique de l'équation* (3.79)*. Alors*

$$u(t) \leq N^{-1}(N(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s), \tag{3.80}$$

avec

$$\left(N(c) + \int_{\alpha}^{t} h(s)(1 + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{s} g(\tau)\Delta\tau)\Delta s\right) \in Dom(N^{-1}).$$

Preuve. Si $y(t)$ est l'unique solution de (3.79), alors $y(t)$ peut être exprimée de la manière suivante

$$y(t) = c + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[n(y(s)) + \int_{\alpha}^{s} f(s,\tau) n(y(\tau)\Delta\tau) + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) n(y(\tau))\Delta\tau \right] \Delta s.$$

En outre,

$$|y(t)| \leq |c| + \int_{\alpha}^{t} h(s) \left[n(|y(s)|) + \int_{\alpha}^{\eta} f(s,\tau) n(|y(\tau)|)\Delta\tau + \int_{\alpha}^{b} g(\tau) n(|y(\tau)|)\Delta\tau \right] \Delta s.$$

Appliquons le Théorème 3.3.5, nous trouvons le résultat voulu (3.80). ■

CHAPITRE 4

Stabilité de quelques systèmes perturbés sur les échelles de temps par l'approche des inégalités intégrales

La stabilité est une notion vaste dans le monde des mathématiques, dans cette thèse notre étude se focalise sur la h-stabilité des solutions des équations dynamiques perturbées sur les échelles de temps.

La notion de h-stabilité a été présenté par Pinto [62]. Choi, Koo et Im [24] ont étudié la h-stabilité des systèmes dynamiques non linéaires perturbées à l'aide du concept de l'inégalité de type Bihari sur des échelles de temps et les fonctions de Lyapunov. Choi, Goo et Koo [25] ont étudié la h-stabilité des systèmes dynamiques avec la condition de non regressivité de la matrice de transition. Pour plus de résultats détaillés sur la h-stabilité aux équations dynamiques linéaires sur des échelles de temps, nous renvoyons le lecteur aux références [24, 25].

Sachant que lorsque $A \in BC_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, L(X))$, le problème homogène suivant :

$$x^{\Delta}(t) = A(t)\, x(t), \quad t \in \mathbb{T},\ x(t_0) = x_0,$$

admet l'unique solution donnée par :

$$x(t) = e_A(t, t_0)\, x_0.$$

Aussi, toute solution du problème perturbé

$$x^{\Delta}(t) = A(t)\, x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{T},\ x(t_0) = x_0,$$

satisfait l'équation intégrale :

$$x(t) = e_A(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t, \sigma(s))\, f(s)\, \Delta s,$$

où $BC_{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, L(X))$ est l'espace des fonctions bornées, régressives et rd-continues de $\mathbb{T}$ dans $L(X)$, $x_0 \in X$ et X un espace de Banach. Pour plus de détails, se référer à [41].

Il a été prouvé dans [42] que l'équation homogène

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{T},\ t > t_0, \\ x(t_0) = x_0 \in D(A), \end{cases} \tag{4.1}$$

a une unique solution donnée par :

$$x(t) = T(t - t_0)\, x_0,\ t \geq t_0,$$

où A est le générateur d'un C_0 semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t) : t \in \mathbb{T}\}$, l'échelle de temps $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+$ est un semi-groupe additif avec la propriété $a - b \in \mathbb{T}$, pour tout $a, b \in \mathbb{T}$ avec $a > b$ et $D(A)$ est le domaine de A. De plus, de nombreuses caractérisations de stabilité de l'équation (4.1) ont été obtenu. Pour plus de détails sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un opérateur linéaire A soit le générateur d'un C_0 semi-groupe, voir [43, 61].

Dans ce travail, nous établirons dans un premier temps, l'existence et l'unicité de la solution des équations dynamiques perturbées de la forme :

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{T},\ t > t_0, \\ x(t_0) = x_0 \in D(A), \end{cases} \tag{4.2}$$

où $f \in C_{rd}$ et A est le générateur d'un C_0 semi-groupe T, et nous prouverons qu'elle est donnée par :

$$x(t) = T(t - t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - \sigma(s))\, f(s)\, \Delta s.$$

Ensuite, nous souhaiterons vérifier dans le cadre de stabilité des équations dynamiques, la h-stabilité de l'équation :

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = Ax(t) + f(t, x), \ t \in \mathbb{T}, \ t > t_0, \\ x(t_0) = x_0 \in D(A), \end{cases} \tag{4.3}$$

en fonction de la h-stabilité de l'équation homogène (4.1) et en imposant des conditions plus générales sur le terme perturbé f où $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, X)$ et $f(t, 0) = 0$.

Dans tous ce qui suit, nous considérons l'opérateur $\{T(t) : t \in \mathbb{T}\} \subset L(X)$ et son générateur A, où l'échelle de temps $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}_+$ est un semi-groupe additif avec la propriété $a - b \in \mathbb{T}$, pour tout $a, b \in \mathbb{T}$ avec $a > b$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la première section, nous établirons les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème perturbé (4.2) possède une unique solution. La seconde section sera consacrée à l'étude de la h-stabilité du problème (4.3).

Ces résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

4.1 Existence et unicité de la solution du problème à valeur initiale perturbé

Dans cette section, nous considérons le problème perturbé (4.2).
Par le biais du Théorème 2.4 dans [42], le problème homogène associé à (4.2) possède une unique solution donnée par :

$$x(t) = T(t - t_0)\, x_0, \ \text{pour toute valeur initiale } x_0 \in D(A).$$

Définition 4.1.1 *Une fonction $x : \mathbb{T} \to X$ est une solution classique de* (4.2) *sur $\mathbb{T}$ si $x \in C^1_{rd}$, $x(t) \in D(A)$ pour $t \in \mathbb{T}$ et* (4.2) *est satisfaite sur $\mathbb{T}$.*

Proposition 4.1.1 [42] *Soit T un C_0 semi-groupe généré par A, alors pour tout $t, s \in \mathbb{T}$ et $x \in D(A)$ nous avons :*

- $x^{\Delta}(t) = T(t)Ax$, *où* $x(t) = T(t)x$,
- $H_t^{\Delta}(s)\, x = -T(t-\sigma(s))\, Ax$, *où* $H_t(s) = T(t-s)$.

Lemme 4.1.1 *Si $f \in C_{rd}$, alors toute solution de* (4.2) *avec la valeur initiale $x_0 \in D(A)$, est donnée par :*

$$x(t) = T(t-t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\sigma(s))\, f(s)\, \Delta s. \tag{4.5}$$

Preuve. Soit x une solution de (4.2). Alors la fonction $\phi(s) = H_t(s)\, x(s)$ est différentiable pour $s \in]t_0, t[_{\mathbb{T}}$, où $H_t(s) = T(t-s)$ et

$$\begin{aligned}
\phi^{\Delta}(s) &= H_t(\sigma(s))\, x^{\Delta}(s) + H_t^{\Delta}(s)\, x(s) \\
&= T(t-\sigma(s))\, [Ax(s) + f(s)] - T(t-\sigma(s))\, Ax(s) \\
&= T(t-\sigma(s))\, f(s).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

En intégrant (4.6) de t_0 à t, on obtient (4.5). ∎

Pour toute fonction $f \in C_{rd}$, le membre droit de (4.5) est une fonction rd-continue sur $\mathbb{T}$. Il est donc naturel de considérer (4.5) comme étant, une solution du problème (4.2) même si elle n'est pas différentiable et elle ne satisfait pas strictement l'équation dans le sens de la définition 4.1.1. Toutefois, on définit

Définition 4.1.2 *Soit $x_0 \in D(A)$et $f \in C_{rd}$. La fonction $x \in C_{rd}$ est donnée par*

$$x(t) = T(t-t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-\sigma(s))\, f(s)\, \Delta s, \;\; t \in \mathbb{T},$$

*s'appelle la solution faible **(mild)** du problème* (4.2) *sur* $\mathbb{T}$.

On donne maintenant, le critère général de l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.2).

Théorème 4.1.1 *Soit A est le générateur d'un C_0 semi-groupe T, $f \in C_{rd}$ et*

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} T(t-\sigma(s))\, f(s)\, \Delta s, \;\; t \in \mathbb{T}. \tag{4.7}$$

En supposant que l'une des conditions suivantes soit satisfaite,

(i) $v(t)$ est rd-continument différentiable sur $\mathbb{T}$.

(ii) $v(t) \in D(A)$ pour $t \in \mathbb{T}$ et $Av(t)$ est rd-continue sur $\mathbb{T}$.

Alors le problème perturbé (4.2) *a une solution unique x sur $\mathbb{T}$ pour tout $x_0 \in D(A)$.*

Inversement, si (4.2) *admet une solution x sur $\mathbb{T}$ pour certain $x_0 \in D(A)$, alors v satisfait les deux conditions (i) et (ii).*

Preuve. Si le problème (4.2) a une solution x pour certain $x_0 \in D(A)$, alors cette solution est donnée par (4.5). Par conséquent,

$$v(t) = x(t) - T(t - t_0)\, x_0,$$

est différentiable pour $t \in \mathbb{T}$ comme étant la différence de deux fonctions différentiables, ainsi

$$v^{\Delta}(t) = x^{\Delta}(t) - T(t - t_0)\, Ax_0.$$

Il est évidement que $v^{\Delta}(t)$ est rd-continue sur $\mathbb{T}$. Donc (i) est satisfaite.

De même si $x_0 \in D(A)$, $T(t - t_0)\, x_0 \in D(A)$, d'aprés le (Théorème 2.2 dans [42]) nous avons :

$$AT(t - t_0)\, x_0 = T(t - t_0)\, Ax_0, \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{T}.$$

et ainsi $v(t) = x(t) - T(t - t_0)\, x_0 \in D(A)$ pour $t \in \mathbb{T}$ et

$$Av(t) = Ax(t) - AT(t - t_0)\, x_0 = x^{\Delta}(t) - f(t) - T(t - t_0)\, Ax_0,$$

est rd-continue sur $\mathbb{T}$. Donc (ii) est satisfaite.

D'un autre côté, on a, pour $h > 0$

$$\begin{aligned}
\tfrac{T(h)-T(\mu(t))}{h-\mu(t)}v(t) &= \tfrac{1}{h-\mu(t)}\int_{t_0}^{t} T(t+h-\sigma(s))\,f(s)\,\Delta s \\
&\quad -\int_{t_0}^{t} T(t+\mu(t)-\sigma(s))\,f(s)\,\Delta s \\
&= \tfrac{1}{h-\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t+h} T(t+h-\sigma(s))\,f(s)\,\Delta s\right. \\
&\quad -\int_{t_0}^{t+\mu(s)} T(t+\mu(t)-\sigma(s))\,f(s)\,\Delta s \\
&\quad -\int_{t}^{t+h} T(t+h-\sigma(s))\,f(s)\,\Delta s \\
&\quad \left.+\int_{t}^{t+\mu(t)} T(t+\mu(t)-\sigma(s))\,f(s)\,\Delta s\right] \\
&= \tfrac{v(t+h)-v(t+\mu(t))}{h-\mu(t)} - \frac{1}{h-\mu(t)}\int_{t}^{t+h} T(t+h-\sigma(s))\,f(s)\,\Delta s \\
&\quad +\tfrac{1}{h-\mu(t)}\mu(t)\,f(t)\,. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Il est clair que le membre droit de (4.8) atteint la limite $\left(v^{\Delta}\right)_{+}(t)-f(t)$ quand $h \to 0^{+}$. Si $v(t)$ est $rd-$continument différentiable sur $\mathbb{T}$ alors il s'ensuit de (4.8) que $v(t) \in D(A)$ pour $t \in \mathbb{T}$, $t > t_0$ et

$$Av(t) = v^{\Delta}(t) - f(t)\,.$$

Ceci implique que $x(t) = T(t-t_0)\,x_0 + v(t)$ est la solution du problème perturbé (4.2) pour $x_0 \in D(A)$. Si $v(t) \in D(A)$ et $Av(t)$ est rd-continue sur $\mathbb{T}$, il découle de (4.8) que $v(t)$ est différentiable à la droite de t et la dérivée à droite $\left(v^{\Delta}\right)_{+}(t)$ de v satisfait $\left(v^{\Delta}\right)_{+}(t) = Av(t) + f(t)$.

Ainsi, $\left(v^{\Delta}\right)_{+}(t)$ est rd-continue, $v(t)$ est $rd-$continument différentiable et

$$v^{\Delta}(t) = Av(t) + f(t)\,.$$

Encore une fois, nous obtenons : $x(t) = T(t-t_0)\,x_0 + v(t)$ comme solution du problème (4.2) pour $x_0 \in D(A)$.

La preuve est ainsi achevée.

■

Remarque 4.1.1 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$*, le problème perturbé* (4.2) *possède une unique solution donnée par :*

$$x(t) = T(t - t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s) f(s) \, ds.$$

Remarque 4.1.2 *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$*, le problème perturbé* (4.2) *possède une unique solution donnée par :*

$$x(t) = T(t - t_0)x_0 + \sum_{s=t_0}^{t-1} T(t - s) f(s).$$

4.2 Stabilité des solutions du problème à valeur initiale perturbé

Dans cette section, on étudie la h-stabilité du problème perturbé :

$$CP(f): \begin{cases} x^{\Delta}(t) & = Ax(t) + f(t,x), \ t \in \mathbb{T}, t > t_0, \\ x(t_0) & = x_0 \in D(A), \end{cases}$$

en fonction de la h-stabilité du problème homogène

$$CP(0): \begin{cases} x^{\Delta}(t) & = Ax(t), \quad t \in \mathbb{T}, t > t_0, \\ x(t_0) & = x_0 \in D(A), \end{cases}$$

où $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, X)$ avec $f(t,0) = 0$ et A est le générateur de C_0 semi-groupe T.

4.2.1 Inégalités Intégrales de Gronwall sur les échelles de temps

Dans cette partie, on cite quelques inégalités intégrales dynamiques non linéaires de type Gronwall aux échelles du temps, qui sont utiles à notre étude.

Lemme 4.2.1 [12] *Supposons que* $t_0 \in \mathbb{T}$*,* $u, \varphi, \psi, \alpha \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ *et* $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction croissante différentiable sur* $\mathbb{R}_+$ *telle que sa dérivée première* β' *est continue et décroissante sur* $\mathbb{R}_+$*. Si* u *satisfait*

$$u(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(u(s))\Delta s, \ t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+},$$

alors on obtient

$$u(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\beta(\varphi(s)) \exp \int_{\sigma(s)}^{t} \alpha(r)\beta'(\varphi(r))\psi(r)\Delta r \Delta s, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}.$$

Lemme 4.2.2 *Soient $t_0 \in \mathbb{T}, u, \varphi, \psi, \alpha \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ et $P, L : \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ des fonctions rd-continues vérifiant*

$$0 \leq P(t,x) - P(t,y) \leq L(t,y)(x-y), \ t \in \mathbb{T} \ , x \geq y \geq 0, \tag{4.9}$$

alors

$$u(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{t_0}^{t} \alpha(s)P(s,u(s))\Delta s, t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}$$

implique

$$u(t) \leq \varphi(t) + \psi(t) \int_{t_0}^{t} \alpha(s)P(s,\varphi(s)) \exp[\int_{\sigma(s)}^{t} \alpha(\tau)L(\tau,\varphi(\tau))\psi(\tau)\Delta\tau]\Delta s, \ t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}. \tag{4.10}$$

Preuve. Définissons une fonction $z(t)$ sur $\mathbb{T}_{t_0}^{+}$ par :

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s)P(s,u(s))\Delta s,$$

alors,

$$u(t) \leq \varphi(t) + \psi(t)z(t), \tag{4.11}$$

et pour tout $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+} \cap \mathbb{T}^k$, nous avons

$$z^{\Delta}(t) = \alpha(t)P(t,u(t)) \leq \alpha(t)P(t,\varphi(t) + \psi(t)z(t)),$$

et

$$P(t,\varphi(t) + \psi(t)z(t)) \leq P(t,\varphi(t)) + L(t,\varphi(t))\psi(t)z(t),$$

alors,

$$z^{\Delta}(t) \leq \alpha(t) \left[P(t,\varphi(t)) + L(t,\varphi(t))\psi(t)z(t)\right]. \tag{4.12}$$

Ainsi, l'intégration des deux côtés de (4.12) de t_0 à $t \in \mathbb{T}_{t_0}^{+}$, donne

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} z^{\Delta}(s)\Delta s \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s)P(s,\varphi(s))\Delta s + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)L(s,\varphi(s))\psi(s)z(s)\Delta s. \tag{4.13}$$

On définit deux fonctions δ et υ sur $\mathbb{T}_{t_0}^+$ par :

$$\delta(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(s) P(s, \varphi(s)) \Delta s \quad \text{et } \upsilon(t) = \alpha(t) L(t, \varphi(t)) \psi(t),$$

alors (4.13) devient :

$$z(t) \leq \delta(t) + \int_{t_0}^{t} \upsilon(s)\ z(s) \Delta s.$$

Une application convenable du Lemme 1.4.5 (voir page 18), donne

$$z(t) \leq \int_{t_0}^{t} \alpha(s) p(s, \varphi(s))\ e_\upsilon(t, \sigma(s)) \Delta s, \tag{4.14}$$

$$e_\upsilon(t, \sigma(s)) \leq \exp\{ \int_{\sigma(s)}^{t} \alpha(\tau) \psi(\tau)\ L(\tau, \varphi(\tau)) \Delta \tau \}. \tag{4.15}$$

En remplaçant (4.14) et (4.15) dans (4.11) on obtient l'inégalité désirée (4.10). ■

4.2.2 Caractérisation de la h-stabilité via les inégalités intégrales

Rappelons que la solution de l'équation

$$x^{\Delta}(t) = Ax(t) + f(t, x), x(t_0) = x_0,\ t \in \mathbb{T}_{t_0}^+, \tag{4.16}$$

satisfait

$$x(t) = T(t - t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - \sigma(s)) f(s, x(s)) \Delta s.$$

où ($x_0 \in D\,(A)$). Nous énonçons maintenant quelques nouveaux résultats sur l'étude de la h-stabilité de l'équation perturbée (4.16) sous différentes conditions imposées sur la perturbation f.

Théorème 4.2.1 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

i) $CP(0)$ est h-stable.

ii) $\|f(t,x(t))\| \leq P(t,\|x(t)\|)$ où P vérifie (4.16) et $P(t,0)=0$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

iii) Il existe deux constantes $\alpha, \tilde{\alpha} \geq 0$ telles que $\int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{h(s)\ L(s,0)}{h(\sigma(s))}\Delta s \leq \alpha$ et

$\int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{h(s)L(s,\gamma\|x_0\|h(s)(h(t_0))^{-1})}{h(\sigma(s))}\Delta s \leq \tilde{\alpha}$. Alors l'équation (4.16) est h-stable.

Preuve. Soit $CP(0)$ est h-stable. Alors, il existe une constante $\gamma \geq 1$ telle que pour toute solution $x(t) = T(t-t_0)x_0$ de $CP(0)$ avec une valeur initiale $x_0 \in D(A)$, nous avons

$$\|T(t-t_0)x_0\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) \left(h(t_0)\right)^{-1}, \ t \in \mathbb{T}^+_{t_0}. \tag{4.17}$$

La solution de l'équation (4.16) vérifie l'équation intégrale

$$x(t) = T(t-t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} T(t-\sigma(s))f(s,x(s))\Delta s, \ t \in \mathbb{T}^+_{t_0}. \tag{4.18}$$

Appliquons la norme aux deux membres de (4.18) et utilisons (4.17), nous obtenons

$$\|x(t)\| \leq \|T(t-t_0)x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|T(t-\sigma(s))\| \, \|f(s,x(s))\| \, \Delta s,$$

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) \left(h(t_0)\right)^{-1} + \gamma h(t) \int\limits_{t_0}^{t} \left(h(\sigma(s))\right)^{-1} P(s,\|x(s)\|)\Delta s.$$

Appliquons le Lemme 4.2.2 à l'inégalité ci-dessus, nous trouvons

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \quad \leq \quad & \gamma \|x_0\| h(t) \left(h(t_0)\right)^{-1} + \gamma h(t) \int\limits_{t_0}^{t} \left(h(\sigma(s))\right)^{-1} P(s,\gamma \|x_0\| h(s) \left(h(t_0)\right)^{-1}) \\ & \times \exp(\int\limits_{\sigma(s)}^{t} \gamma \left(h(\sigma(r))\right)^{-1} L(r,\gamma \|x_0\| h(r) \left(h(t_0)\right)^{-1}) h(r)\Delta r)\Delta s.\end{aligned}$$

De plus, à partir de (4.9), il s'ensuit que

$$P(s,\gamma \|x_0\| h(s) \left(h(t_0)\right)^{-1}) \leq L(s,0)(\gamma \|x_0\| h(s) \left(h(t_0)\right)^{-1}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|x(t)\| \quad \leq \quad & \gamma \|x_0\| h(t) \left(h(t_0)\right)^{-1} + \gamma^2 \|x_0\| h(t) \left(h(t_0)\right)^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{L(s,0)h(s)}{h(\sigma(s))} \exp \right. \\ & \left. [\gamma \int\limits_{\sigma(s)}^{t} \frac{h(r)L(r,\gamma \|x_0\| h(r) \left(h(t_0)\right)^{-1})}{h(\sigma(r))}\Delta r]\Delta s \right),\end{aligned}$$

$$\|x(t)\| \leq [\gamma(1+\gamma\alpha e^{\gamma\tilde{\alpha}})] \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1}, \ t \in \mathbb{T}_{t_0}^+,$$

ce qui caractérise la h-stabilité de l'équation (4.16). ■

Théorème 4.2.2 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

i) $CP(0)$ est h-stable.

ii) Le terme perturbé satisfait $\|f(t,x)\| \leq l(t).\beta(\|x\|)$, où $l \in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)$, $\beta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante différentiable telle que sa dérivée première β'est décroissante, vérifiant $\beta(0) = 0$ et $\beta'(0) \leq 1$.

iii) Il existe $\tilde{a} \geq 0$ tel que $\int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{l(s).h(s)}{h(\sigma(s))}\Delta s \leq \tilde{a}$.

Alors l'équation (4.16) est h-stable.

Preuve. Soit $CP(0)$ est h-stable. Alors, il existe une constante $\gamma \geq 1$ telle que pour toute solution $x(t) = T(t-t_0)x_0$ de $CP(0)$ avec une valeur initiale $x_0 \in D(A)$, on a

$$\|T(t-t_0)x_0\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1}, \ t \in \mathbb{T}_{t_0}^+.$$

La solution de l'équation (4.16) satisfait

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|T(t-t_0)x_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} \|T(t-\sigma(s))\| \|f(s,x(s)\| \Delta s \\ &\leq \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} + \gamma h(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{l(s)}{h(\sigma(s))} \beta(\|x(s)\|) \Delta s. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4.2.1, on trouve

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq \ & \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} + \gamma h(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{l(s)}{h(\sigma(s))} \beta(\gamma \|x_0\| h(s) (h(t_0))^{-1}) \\ & \times \exp\left[\gamma \int\limits_{\sigma(s)}^{t} \frac{l(r)h(r)}{h(\sigma(r))} \beta'(\gamma \|x_0\| h(r) (h(t_0))^{-1}) \Delta r\right] \Delta s. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq \ & \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} + \gamma^2 \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} \\ & \times \int_{t_0}^{t} \frac{l(s)h(s)}{h(\sigma(s))} \exp\left(\gamma \int_{\sigma(s)}^{t} \frac{l(r)h(r)}{h(\sigma(r))} \beta'(\gamma \|x_0\| h(r) (h(t_0))^{-1}) \Delta r\right) \Delta s. \end{aligned}$$

D'aprés les conditions ii) et iii), nous déduisons que

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} \left[1 + \gamma \tilde{a} e^{\gamma \tilde{a}}\right],$$

$$\|x(t)\| \leq c \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} \text{ où } c = \gamma(1 + \gamma \tilde{a} e^{\gamma \tilde{a}}) \geq 1.$$

Il s'ensuit que l'équation (4.16) est h-stable. ■

Théorème 4.2.3 *Si les conditions suivantes sont satisfaites*

i) $CP(0)$ est h-stable.

ii) $\|f(t, x(t)\| \leq l(t).\, \|x\|^p$où $l \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}_+)$ et $p \in]0, 1[$.

iii) Il existe B tel que $\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{l(s)}{h(\sigma(s))}\right)^{\frac{1}{q}} \Delta s \leq B$ avec $q = 1 - p$.

Alors l'équation (4.16) est h-stable.

Preuve. Pour tout $t \in \mathbb{T}_{t_0}^+$, la solution de l'équation perturbée (4.16) satisfait :

$$\|x(t)\| \leq \|T(t - t_0)x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|T(t - \sigma(s)\| \|f(s, x(s)\| \Delta s.$$

Comme l'équation homogène $x(t) = T(t - t_0)x_0$ est h-stable [voir condition i)] et avec la condition ii), nous obtenons

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} + \gamma h(t) \int_{t_0}^{t} \frac{l(s)}{h(\sigma(s))} \|x(s)\|^p \Delta s, \text{ avec } p \in]0, 1[. \tag{4.19}$$

Utilisons l'inégalité de Hölder, nous trouvons

$$\int_{t_0}^{t} \frac{l(s)}{h(\sigma(s))} \|x(s)\|^p \Delta s \leq \left[\int_{t_0}^{t} \left(\frac{l(s)}{h(\sigma(s))}\right)^{\frac{1}{q}} \Delta s\right]^q \left[\int_{t_0}^{t} \|x(s)\| \Delta s\right]^p,$$

alors, l'inégalité (4.19) implique

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} + \gamma h(t) \left[\int_{t_0}^{t} \left(\frac{l(s)}{h(\sigma(s))}\right)^{\frac{1}{q}} \Delta s\right]^q \left[\int_{t_0}^{t} \|x(s)\| \Delta s\right]^p. \tag{4.20}$$

L'intégration des deux parties de (4.20) de t_0 à ∞, nous donne

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} \|x(s)\| \Delta s \quad &\leq \quad \gamma \|x_0\| (h(t_0))^{-1} \int_{t_0}^{+\infty} h(s) \Delta s \qquad (4.21) \\ &+ \left[\int_{t_0}^{+\infty} \|x(s)\| \Delta s\right]^p \times \gamma \int_{t_0}^{+\infty} h(s) \left[\int_{t_0}^{s} \left(\frac{l(r)}{h(\sigma(r))}\right)^{\frac{1}{q}} \Delta r\right]^q \Delta s. \end{aligned}$$

Prenons :

$$z = \int_{t_0}^{+\infty} \|x(s)\| \Delta s,$$

$$b = \gamma \|x_0\| (h(t_0))^{-1} \int_{t_0}^{+\infty} h(s)\Delta s,$$

et

$$c = \gamma \int_{t_0}^{+\infty} h(s) \left[\int_{t_0}^{s} \left(\frac{l(r)}{h(\sigma(r))} \right)^{\frac{1}{q}} \Delta r \right]^{q} \Delta s,$$

et l'inégalité (4.21) satisfait l'inégalité $z \leq b + cz^p$. Il est facile à voir que

$$z \leq z_{0,} \tag{4.22}$$

où z_0 est l'unique racine positive de l'équation $z = b + cz^p$. De plus, de (4.22), il s'ensuit que

$$\int_{t_0}^{t} \|x(s)\| \Delta s \leq \int_{t_0}^{+\infty} \|x(s)\| \Delta s \leq z_0. \tag{4.23}$$

En remplaçant (4.23) dans l'inégalité (4.20), on trouve

$$\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} + \gamma h(t) (h(t_0))^{-1} \left[\int_{t_0}^{t} \left(\frac{l(s)}{h(\sigma(s))} \right)^{\frac{1}{q}} \Delta s \right]^{q} \times h(t_0)\ z_0^p, \tag{4.24}$$

et en considerant que $\mathbb{R}$ est **Archimédien**, on peut conclure qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$z_0^p \leq \frac{n}{h(t_0)} \|x_0\|,$$

alors l'inéquation (4.24) implique

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| h(t) (h(t_0))^{-1} [\gamma + \gamma B^q n].$$

Alors l'équation (4.16) est h-stable. ■

4.2.3 Applications

Exemple 4.2.1 *Considérons le problème perturbé suivant :*

$$x^{\Delta}(t) = A\ x(t) + e_{-\frac{4}{3}}(t,0)x^{\frac{1}{2}}(t), \qquad t \in \mathbb{T} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+, \tag{4.25}$$

où $\mathbb{Z}_+$ *désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls,* $x \in C_{rd}\left(\mathbb{T}, \mathbb{R}^2\right)$, $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ *et* $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que* $f(t, x(t)) = e_{-\frac{4}{3}}(t,0)x^{\frac{1}{2}}(t)$.

Il est facile de voir que la matrice A *est générateur du* C_0 *semi-groupe (voir page* 16*),*

$$T(t) = (I + \mu A)^{2t} = (I + \frac{1}{2}A)^{2t},$$

alors,

$$T(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2t},$$

$$T(t-t_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(t-t_0)} = (\frac{2}{3})^{2(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ t > t_0,$$

par conséquant,

$$\|T(t-t_0)\| = \frac{\sqrt{85}}{2}(\frac{2}{3})^{2(t-t_0)} = \frac{\sqrt{85}}{2}e_{-\frac{2}{3}}(t, t_0).$$

En prenant $\delta \geq \frac{\sqrt{85}}{2}$ *et* $h(t) = e_{-\frac{2}{3}}(t,0)$*, nous aurons*

$$\|T(t-t_0)\| \leq \delta e_{-\frac{2}{3}}(t,0)e_{-\frac{2}{3}}(0,t_0) = \delta h(t)\left(h(t_0)\right)^{-1}.$$

Ce qui assure la h-stabilité de l'équation homogène associée à (4.25)*. De plus,*

$$h(\sigma(t)) = e_{-\frac{2}{3}}(\sigma(t),0) = (1 + \frac{1}{2}(\frac{-2}{3}))e_{-\frac{2}{3}}(t,0) = \frac{2}{3}e_{-\frac{2}{3}}(t,0).$$

Maintenant, nous vérifions les deux autres conditions du Thèorème 4.2.3*.*

Il est clair que $\|f(t,x(t)\| = e_{-\frac{4}{3}}(t,0).\, \|x(t)\|^{\frac{1}{2}}$ *et aussi*

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{l(s)}{h(\sigma(s))}\right)^2\Delta s &= \int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{e_{-\frac{4}{3}}(s,0)}{\frac{2}{3}e_{-\frac{2}{3}}(s,0)}\right)^2\Delta s \\
&= \frac{9}{4}\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{e_{-1}(s,0)e_{-\frac{2}{3}}(s,0)}{e_{-\frac{2}{3}}(s,0)}\right)^2\Delta s \\
&= \frac{9}{8}\sum_{s=t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2s} < \infty.
\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses du Théorème 4.2.3 *sont vérifiées. Donc, nous concluons que l'équation* (4.25) *est h-stable, de plus, nous pouvons constater que l'équation* (4.25) *est uniformément exponentiellement stable.*

Exemple 4.2.2 *Soit* $\mathbb{T} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$, $x \in C_{rd}\,(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)$. *Considérons le problème perturbé suivant :*

$$x^{\Delta}(t) = A\ x(t) + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \arctan\ \left(\|x(t)\|\right), \tag{4.26}$$

avec $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ *est générateur du* C_0 *semi-groupe suivant :*

$$T(t) = (I + \frac{1}{2}A)^{2t} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2t},$$

alors,

$$T(t-t_0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{2(t-t_0)} = (\frac{5}{6})^{2(t-t_0)}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t > t_0.$$

ainsi,

$$\|T(t-t_0)\| = \frac{\sqrt{29}}{5}(\frac{5}{6})^{2(t-t_0)} = \frac{\sqrt{29}}{5}e_{-\frac{1}{3}}(t,t_0).$$

Posons maintenant, $\delta \geq \frac{\sqrt{29}}{5}$ *et* $h(t) = e_{-\frac{1}{3}}(t,0)$, *nous obtenons*

$$\|T(t-t_0)\| \leq \delta e_{-\frac{1}{3}}(t,0)e_{-\frac{1}{3}}(0,t_0) = \delta h(t)\left(h(t_0)\right)^{-1}.$$

Donc, l'équation homogène associée à (4.26), $x^{\Delta}(t) = A\ x(t)$ *est h-stable. De plus, nous avons* $\|f(t,x(t))\| = \left(\frac{1}{2}\right)^t \arctan\ (\|x(t)\|) = l(t)\ \beta(\|x(t)\|)$ *avec* $\beta(x(t)) = \arctan x(t)$*. En outre,* $h(\sigma(t)) = \frac{5}{6} e_{-\frac{1}{3}}(t,0) = \frac{5}{6}\ h(t)$ *et*

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^s . h(s)}{h(\sigma(s))} \Delta s = \frac{3}{5} \sum_{s=t_0}^{\infty} (\frac{1}{2})^s,$$

Ainsi, $\frac{3}{5} \sum\limits_{s=t_0}^{\infty} (\frac{1}{2})^s = \frac{3}{5} \sum\limits_{y=2t_0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^y \leq \frac{3}{5} \sum\limits_{y=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^y$ *et* $\frac{3}{5} \sum\limits_{y=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^y = \frac{3}{5} (\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}) < \infty.$
Toutes les hypothèses du Théorème 4.2.2 *sont verifiées, nous concluons donc, que l'équation* (4.26) *est h-stable.*

Conclusion

Dans ce travail de recherche, de nouvelles inégalités intégrales de type Gronwall-Bellman-Bihari ont été étudiées ainsi que quelques inégalités intégrales de type Gamidov-Bihari ont été développées et raffinées sur des échelles de temps arbitraires.

Ces inégalités jouent un rôle important dans l'étude de différents types d'équations différentielles et intégro-différentielles.

Cette approche peut être utilisée dans l'analyse de stabilité de certaines classes des systèmes dynamiques aux échelles de temps.

Nous avons aussi abordé des questions sur la h-stabilité en développant quelques conditions sur la perturbation non linéaire et en utilisant des inégalités intégrales appropriées sur des échelles de temps arbitraires.

Bibliographie

[1] A. Abdeldaim, A. A. El-Deeb, Some new retarded nonlinear integral inequalities with iterate integrals and their applications in retarded differential equations and integral equations, Journal of Fractional Calculus and Applications. Vol. 5 (3S) No. 9 (2014), 1–9.

[2] A. Abdeldaim, Nonlinear retarded integral inequalities of Gronwall-Bellman Type and applications. Journal of Mathematical Inequalities. Vol 10, No. 1 (2016), 285–299.

[3] R. P. Agarwal, S. Deng, W. Zhang, Generalization of a retarded Gronwall-like inequality and its applications, Appl Math Comput. 165 (2005), 599–612.

[4] R. P. Agarwal, Y. H. Kim, S. K. Sen, New retarded integral inequalities with applications, J. Inequal. Appl. (2008), Article ID 908784.

[5] C. D. Ahlbrandt, C. Morian, Partial differential equations on time scales. Dynamic equations on time scales. J. Comput. Appl. Math. 141 (2002), No. 1-2, 35–55.

[6] B. Aulbach, S. Hilger, A unified approach to continuous and discrete dynamics, Qualitative theory of differential equations (Szeged, 1988), vol. 53 of Colloq. Math. Soc. Jànos Bolyai, North-Holland, Amsterdam, 1990, pp. 37–56.

[7] Bainov, P. Simeonov, Integral Inequalities and Applications, vol. 57 of Mathematics and its Applications (East European Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1992), translated by R. A. M. Hoksbergen and V. Covachev.

[8] P. R. Beesack, Gronwall inequalities. Carleton Mathematical Lecture Notes, No. 11. Carleton University, Ottawa, Ont, (1975).

[9] R. Bellman, The stability of solutions of linear differential equations. Duke Math. J. 10, (1943), 643 647.

[10] R. Bellman, Asymptotic series for the solutions of linear differential and difference equations. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 7 (1958), 261–269.

[11] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. A. Hammami, On the stability of perturbed time scale systems using integral inequalities, Appl. Sci. 16 (2014), 56–71.

[12] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. A. Hammami, On stability and stabilization of perturbed time scale systems with Gronwall inequalities, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. 11 (2015), 207–235.

[13] B. Ben Nasser, K. Boukerrioua, M. Defoort, M. Djemai, and M. A. Hammami, Refinements of Some Pachpatte and Bihari Inequalities on Time Scales. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 17 (4) (2017), 388–401.

[14] I. A. Bihari, A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problem of differential equation, Acta Math Acad Sci Hung. 7 (1956), 81–94.

[15] M. Bohner, A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales : An Introduction with Applications, Birkhauser, Besel, (2001).

[16] M. Bohner, A. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser Basel, Boston, MA, (2003).

[17] K. Boukerrioua, A. Guezane-Lakoud, Some nonlinear integral inequalities arising in differential equations. Electron. J. Differential Equations. 2008, No. 80, 6 pp.

[18] K. Boukerrioua, Note on some nonlinear integral inequalities and applications to differential equations, Int. J. Differ. Equ. (2011), Article ID 456216.

[19] K. Boukerrioua, Note on some nonlinear integral inequalities on time scales and applications to dynamic equations, J. Adv. Res. Appl. Math. 5 (2013), 1–12.

[20] K. Boukerrioua, I. Meziri and T. Chiheb, Some Refinements Of Certain Gamidov Integral Inequalities On time Scales And Applications. Kragujevac Journal Of Mathematics. Vol 42, No. 1 (2018), 131–152.

[21] K. Cheng, C. Guo, New explicit bounds on Gamidov type integral inequalities for functions in two variables and their applications, Abstr. Appl. Anal, (2014), Article ID 539701.

[22] K. Cheng, C. Guo, M. Tang, Some nonlinear Gronwall-Bellman-Gamidov integral inequalities and their weakly singular analogues with applications, Abstr. Appl. Anal. (2014), Article ID 562691.

[23] W. S. Cheung, Some new nonlinear inequalities and applications to boundary value problems, Nonlinear Anal. 64 (2006), 2112–2128.

[24] S. K. Choi, N. J. Koo, D. M. Im, h-Stability for Linear Dynamic Equations on Time Scales, J.Math. Anal. Appl. 324 (2006), 707–720.

[25] S. K. Choi, Y. H. Goo, N. Koo, h-Stability of Dynamic Equations on Time Scales with Nonregressivity, Abstract and Applied Analysis. (2008), Article ID 632474, 13 pages.

[26] S. C. Chu, F. T. Metcalf, On Gronwall's inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 18, (1967), 439–440.

[27] F. Crauste. Equations à Retard et Modèles de Dynamiques de Populations Cellulaires. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1, 2014.

[28] J. J. Dacunha, Stability for Time Varying Linear Dynamic Systems on Time Scales, J. Comput. Appl. Math. 176 (2005), 381-410.

[29] U. D. Dhongade, S. G. Deo, Some generalizations of Bellman-Bihari integral inequalities, J. Math. Anal. Appl. 44 (1973), 218–226.

[30] T. S. Doan, A. Kalauch, S. Siegmund, Exponential Stability of linear Time-Invariant Systems on Time Scales, Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 9(1), (2009), 37–50.

[31] S. S. Dragomir, Some Gronwall Type Inequalities and Applications, Nova Science Publishers, Hauppauge, NY, (2003).

[32] N. H. Du, L. H. Tien, On The Exponential Stability for Dynamic Equations on Time Scales, J. Math. Anal. Appl. 331 (2007) 1159–1174.

[33] H. El-Owaidy, A. A. Ragab, A. Abdeldaim, On some integral inequalities of Gronwall-Bellman type, Appl. Math Comut. 106 (1999), 289–303.

[34] H. El-Owaidy, A. Abdeldaim, A. A. El-Deeb, On some new nonlinear retarded integral inequalities with iterated integrals and their applications in differential-integral equations, Mathematical Sciences Letters journal. 3 (2014), 157–164.

[35] H. El-Owaidy, A. A. Ragab, W. Abuelela, A. A. El-Deeb, On some new nonlinear integral inequalities of Gronwall-Bellman type, Kyungpook Math. J. 54 (2014), 555–575.

[36] R. A. C. Ferreira, D. F. M. Torres, Generalizations of Gronwall-Bihari inequalities on time scales, J. Difference Equ. Appl. 15 (2009), 529–539.

[37] Sh. G. Gamidov, Certain integral inequalities for boundary value problems of differential equations, Differ. Uravn. 5 (1969), 463–472.

[38] H. E. Gollwitzer, A note on a functional inequality. Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969) 642–647.

[39] T. H. Gronwall, Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, AnnMath. 20 (1919), 292–296.

[40] I. Györi A generalization of Bellman's inequality for Stieltjes integrals and a uniqueness theorem. Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 137–145.

[41] A. E. Hamza, M. A. Al-Qubaty, On the Exponential Operator Functions on Time Scales, Advances in Dynamical Systems and Applications, 7(2012), No. 1, 57-80.

[42] A. E. Hamza, K. M. Oraby, Stability of Abstract Dynamic Equations on Time Scales, Advances in Difference Equations, 2012, 2012:143, 15 pp.

[43] A. E. Hamza, K. M. Oraby, Semigroups of Operators and Abstract Dynamic Equations onTime Scales, Applied Mathematics and Computation, 270 (2015), 334–48.

[44] S. Hilger, Ein Ma kettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität. Würzburg (1988).

[45] S. Hilger, Analysis on measure chain a unified approach to continuous and discrete calculus, Res. Math. 18 (1990) 18–56.

[46] F. Jiang, F. Meng, Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay, J. Comput. Appl. Math. 205 (2007), 479–486.

[47] S. D. Kendre, S. G. Latpate, On some mixed integral inequalities and its applications, Theoretical Mathematics and Applications 5 (2015), 1–14.

[48] A. Khan Zareen, Integral inequalities of Gronwall-Bellman Type, Applied Mathematics. 5 (2014), 3484–3488.

[49] O. Lipovan, A retarded Gronwall-like inequality and its applications, J.Math Anal Appl. 252 (2000), 389–401.

[50] A. L. LIU, Boundedness and Exponential Stability of Solutions to Dynamic Equations on Time Scales, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2006, 12 (2006), 1-14.

[51] V. Lakshmikantham, S. Leela, Differential and Integral Inequalities, Vol. I, New York, Academic Press, (1969).

[52] V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk, Stability analysis of nonlinear systems. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 125. Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.

[53] D. S. Mitrinovi, J. E. Pecari, A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, (1994).

[54] J. Norbury and A. M. Stuart, Volterra integral equations and a new Gronwall inequality. I. The linear case. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 106 (1987), no. 3-4, 361 373.

[55] B. G. Pachpatte, Inequalities for Differential and Integral Equations, vol. 197 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, Inc., San Diego, CA, (1998).

[56] B. G. Pachpatte, On some new inequalities related to a certain inequality arising in the theory of differential equations. J. Math. Anal. Appl. 251, no. 2, (2000) 736–751.

[57] B. G. Pachpatte, A note on certain integral inequality, Tamkang J. Math. 33 (2002), 353–358.

[58] B. G. Pachpatte, Explicit bound on certain integral inequalities, J. Math. analysis and Applications. 267 (2002), 48–61.

[59] B. G. Pachpatte, Explicit bounds on Gamidov type integral inequalities, Tamkang J. Math. 37 (2006), 1–9.

[60] B. G. Pachpatte, Integral and Finite Difference Inequalities and Applications, vol. 205 of North- Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam, (2006).

[61] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlage, New York, v. 44, (1983).

[62] M. Pinto, Perturbations of Asymptotically Stable Differential Systems, Analysis, vol. 4, no. 1-2, (1984), 161–175.

[63] M. H. M. Rashid, Explicit bound on retarded Gronwall-Bellman inequality, Tamkang J.Math. 43 (2012), 99–108.

[64] H.J. Skala, On the characterization of certain similarly ordered superadditive functionals, Proceedings of the American Mathematical Society, 126 (5) (1998), 1349–1353.

[65] F. G .Tricomi, Integral equations. Pure and Applied Mathematics. Vol. V Interscience Publishers, Inc., New York ; Interscience Publishers Ltd., London 1957.

[66] W. S. Wang, C. Shen, On a generalized retarded integral inequality with two variables, J. Inequal. Appl. (2008), Article ID 518646.

[67] W. S. Wang, Z. Li, Y. Li, Y. Huang, Nonlinear retarded integral inequalities with two variables and applications, J. Inequal. Appl. (2010), Article ID 240790.

[68] W. S. Wang, R. C. Luo, Z. Li, A new nonlinear retarded integral inequality and its application, J.Inequal. Appl. (2010), Article ID 462163.

[69] W. S. Wang, Some generalized nonlinear retarded integral inequalities with applications, J. Inequal. Appl. (2012), 2012 : 31.

[70] W. S. Wang, Some New generalized retarded nonlinear integral inequalities with iterated integrals and thier applications, J. Inequal. Appl. (2012) : 236.

[71] L. Ou Yang, The boundedness of solutions of linear differential equations y"+A(t)y = 0. (Chinese) Advancement in Math. 3 (1957), 409–415.